Estratégia
Militares

Aula 08 — Capacitância, capacitores e dielétricos

ITA 2020

Professor João Maldonado

SUMÁRIO

Introdução

Tudo bem galera?

Meu nome é João Maldonado, vou ser o novo professor de Física de vocês nos vestibulares do ITA, IME, AFA, EFOMM e Escola Naval.

Como essa vai ser a primeira aula de vocês comigo, vou primeiro me apresentar.

Sou formado em Engenharia Mecânica-Aeronáutica pelo ITA em 2018. Entrei no ITA em 2014, portanto sou da T18. Fui aprovado no IME em 2013 e em 4º lugar geral em 2014. Fui aprovado em Engenharia Civil em primeiro lugar na PUC-SP em 2012 e logo após terminar o ITA, por motivos pessoais, resolvi cursar medicina, passando em 10º lugar geral na UNB no 1º semestre em 2019, e que estou cursando agora.

Formatura da T18

Nesta aula vamos estudar o conceito de capacitância e capacitores. Trata-se de um assunto muito cobrado no ITA, com questões bem difíceis e conceituais. A única ressalva é que a maioria dos assuntos de capacitores são cobrados juntos com outros assuntos de eletrodinâmica, que ainda não estudamos, portanto não assuste a falta de questões nessa aula.

Com esse assunto, fecharemos todos os conceitos da eletrostática. Ainda não trabalharemos alguns tópicos especiais quanto a associação de capacitores por questões didáticas. Esses assuntos serão detalhados quando estudarmos resistores em eletrodinâmica. Ficará muito mais fácil de entender lá na frente.

Além disso, não abordaremos os capacitores aplicados a circuitos elétricos, já que ainda não estudamos corrente elétrica e eletrodinâmica. Posteriormente, faremos o estudo completo dos capacitores em regime permanente e em regime transitório. Tudo pensado para você ter o material mais completo, com a forma mais didática possível.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia.

1. Capacitância (C)

Conforme vimos na aula passada, tomando como referencial no infinito, o potencial de um condutor **isolado** e esférico, com raio R, carregado com carga Q, é expresso por:

$$V = K\frac{Q}{R}$$

Se manipularmos algebricamente fazendo a relação de carga por potencial do corpo, temos que:

$$\frac{Q}{V} = \frac{R}{K}$$

Observamos que essa relação mostra que a quantidade de cargas que um condutor pode reter é proporcional ao seu potencial elétrico e essa razão depende das dimensões e da forma do corpo, como mostra $\frac{R}{K}$.

Essa relação $\frac{Q}{V}$ chamamos de capacitância (C):

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{R}{K}}$$

Assim, dizemos que capacitância é uma grandeza física que mede a capacidade de armazenar cargas para uma dada diferença de potencial. Ela depende exclusivamente da geometria do condutor e do meio onde ele se encontra.

Sua unidade no SI é o farad (F), em homenagem ao físico experimentalista Michael Faraday:

$$[C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{C}{V} = F$$

Observações:

1) A capacitância não depende do material que é feito o condutor, apenas de sua forma, de suas dimensões e do meio que o envolve.
2) Quando dois condutores têm o mesmo formato, aquele que possui as maiores dimensões tem maior capacitância.
3) Em um mesmo meio, se dois condutores possuem o mesmo volume, aquele que mais se aproxima de uma esfera terá maior capacitância. Por isso, dizemos que condutores com forma de fio têm capacitância menor quando comparado com as de condutores de outros formatos, desde que tenham o mesmo volume.
4) Cuidadosamente, quando mostramos a definição de capacitância, mencionamos que o condutor estava isolado. Essa restrição se deve ao fato de o potencial de dois ou mais condutores não dependerem apenas de suas cargas, mas da soma dos outros potenciais

devidos às outras cargas. Dessa forma, não haveria proporcionalidade entre carga e potencial.

5) Quando dizemos que um corpo possui capacitância de 3 farads, esse valor representa a proporcionalidade entre a carga elétrica e o potencial. Em outras palavras, não representa o valor máximo de nada. Geralmente, associamos capacitância com a ideia de limite máximo suportado por algo. Por exemplo, a capacidade de uma garrafa de refrigerante de 2 litros. A capacidade volumétrica dela é 2 litros, mas quando falamos de capacidade de armazenar cargas não podemos usar essa analogia.

1)

Considere um condutor isolado e carregado positivamente carregado de capacitância igual a $1pF$. Qual deve ser a carga fornecida a esse condutor para que seu potencial sofra um acréscimo de $200\ V$?

Comentários:

Notamos que o condutor não teve a sua geometria alterada e não mudou de meio, logo, sua capacitância não alterou. Logo, podemos dizer que:

$$Q_{inicial} = C.V_{inicial}$$

$$Q_{final} = C.V_{final}$$

Assim, a variação de carga será de:

$$\Delta Q = Q_{final} - Q_{inicial} = C.V_{final} - C.V_{inicial} = C\left(V_{final} - V_{inicial}\right) = C.\Delta V$$

Ou seja:

$$\boxed{\Delta Q = C.\Delta V}$$

Substituindo valores, temos:

$$\Delta Q = (1 \times 10^{-12}).200$$

$$\boxed{\Delta Q = 2 \times 10^{-10} C}$$

1.1. Capacitância do condutor esférico

Dado um condutor esférico e isolado de raio R. Na aula passada, vimos que o potencial elétrico desse condutor quando carregado com uma carga Q é:

$$V = K\frac{Q}{R}$$

Assim, sua capacitância será:

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{R}{K}$$

$$\boxed{C=\frac{R}{K}}$$

Caso seja fornecida a permissividade do meio que envolve o condutor, podemos reescrever a capacitância do condutor esférico:

$$C=\frac{R}{K}=\frac{R}{\frac{1}{4\pi\varepsilon}}$$

$$\therefore \boxed{C=4\pi\varepsilon R}$$

Anteriormente, mencionamos que a permissividade ε tinha como unidade:

$$C^2/N.m^2$$

Entretanto, pela equação da capacitância do condutor esférico, podemos definir uma nova unidade para ε:

$$C=4\pi\varepsilon R\Rightarrow\varepsilon=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{C}{R}$$

Dessa forma, temos:

$$[\varepsilon]=\left[\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{C}{R}\right]=\left[\frac{1}{4\pi}\right]\cdot\left[\frac{C}{R}\right]=1.\frac{F}{m}$$

$$[\varepsilon]=F/m$$

Portanto, definimos a nova unidade de ε como sendo F/m. Mais adiante, entenderemos melhor o que é de fato essa tal permissividade do meio.

Exemplo: vamos mostrar como é grande $1F$. Para isso, vamos calcular o raio de um condutor esférico que possui capacitância de 1 farad, onde $\varepsilon_0=8{,}85\times10^{-12}\ F/m$. Pela fórmula, temos que:

$$C=4\pi\varepsilon_0 R$$

$$1=4\pi.8{,}85\times10^{-12}R$$

$$R=8{,}99\times10^{9}\ m$$

Esse raio é cerca de 1400 vezes o raio da Terra. Podemos notar como é grande a unidade farad. Por isso, é muito comum aparecer os seus submúltiplos:

1 Millifarad	$\mathbf{1\ mF}$	$\mathbf{1\times10^{-3}F}$
1 Microfarad	$1\mu F$	$1\times10^{-6}F$
1 Nanofarad	$1\ \eta F$	$1\times10^{-9}F$
1 Picofarad	$1\ pF$	$1\times10^{-12}F$

Exemplo: qual a nova capacitância de uma esfera com carga Q, se a carga for aumentada para $5Q$?

Como a geometria do condutor não mudou, a capacitância deve ser a mesma. Note que quando multiplicamos por 5 a carga, seu potencial também será multiplicado por 5, de forma que a razão $\frac{Q}{V}$ não se altera:

$$\frac{5Q}{5V} = \frac{Q}{V}$$

1.2. Eletrização por contato

Como bem sabemos, quando interligamos dois condutores com potenciais diferentes, existe uma movimentação dos elétrons, procurando os potenciais maiores até que os condutores fiquem com o mesmo potencial. A partir desse momento, interrompe a movimentação das cargas.

Na aula passada, estudamos esse problema para o caso de condutores esféricos. Agora, com o conceito de capacitância expandiremos nossa resolução do problema das cargas após o contato para condutores quaisquer, desde que conheçamos as capacitâncias.

Vamos considerar dois corpos n corpos, carregados com cargas q_i com $i = 1, 2, \dots, n$. Considerando desprezível a capacitância dos fios e que conhecemos as capacitâncias de todos os corpos, podemos dizer que:

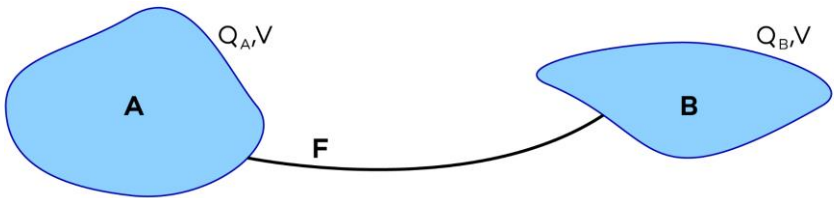


Figura 1: Aplicação do conceito de capacitância para determinação de potencial equivalente e cargas após o contato.

$$Q_{eq} = Q'_1 + Q'_2 + \dots + Q'_n$$

Como sabemos $Q = CV$, então:

$$Q'_i = C_i . V_{eq}, i = 1, 2, \dots, n$$

$$C_{eq} . V_{eq} = C_1 . V_{eq} + C_2 . V_{eq} + \dots + C_n . V_{eq}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Pelo Princípio da Conservação das Cargas, podemos escrever que:

$$Q_{eq} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = Q'_1 + Q'_2 + \dots + Q'_n$$

Usando novamente $Q_i = C_i . V_i$ com $i = 1, 2, \dots, n$; temos:

$$C_1 V_1 + C_2 V_2 + \dots + C_n V_n = C_1 . V_{eq} + C_2 . V_{eq} + \dots + C_n . V_{eq}$$

Portanto, o potencial equivalente após o contato das n esferas é:

$$\boxed{V_{eq} = \frac{C_1V_1 + C_2V_2 + \cdots + C_nV_n}{C_1 + C_2 + \cdots C_n}}$$

Notamos que o potencial equivalente é a média ponderada dos potenciais tendo como peso as capacitâncias. Se desejamos a carga final de 1, por exemplo, utilizamos que:

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_1'}{V_{eq}}$$

$$\boxed{Q_1' = \frac{Q_1}{V_1} \cdot V_{eq} \; ou \; Q_1' = C_1 . V_{eq}}$$

2)

Considere três condutores isolados 1, 2 e 3, com capacitâncias $C_1 = 1\,\eta F$, $C_2 = 3\,\eta F$ e $C_3 = 6\,\eta F$. Os condutores são colocados em contato utilizando um fio de capacitância desprezível. Os condutores estão eletrizados com cargas $Q_1 = 10\,\mu C$, $Q_2 = 15\,\mu C$ e $Q_3 = 20\,\mu C$. Após o equilíbrio eletrostático, determine:

a) o potencial dos condutores.

b) a carga elétrica de cada condutor.

Comentários:

a) Calculando o potencial elétrico equivalente após o contato, temos que:

$$V_{eq} = \frac{C_1V_1 + C_2V_2 + \cdots + C_nV_n}{C_1 + C_2 + \cdots C_n} = \frac{Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n}{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}$$

$$V_{eq} = \frac{10\mu C + 15\mu C + 20\mu C}{1\eta F + 3\eta F + 6\eta F} = \frac{45}{10} \cdot \frac{10^{-6}}{10^{-9}} = 4{,}5 \cdot 10^{-6-(-9)} = 4{,}5 \cdot 10^3 = 4{,}5\,kV$$

Assim, esse será o potencial elétrico de cada um dos condutores após o equilíbrio eletrostático.

b) para calcular a carga elétrica de cada condutor, podemos usar que:

$$Q_1 = C_1 \cdot V_{eq} = 1nF \cdot 4{,}5kV = 4{,}5\,\mu C$$

$$Q_2 = C_2 \cdot V_{eq} = 3\eta F \cdot 4{,}5kV = 13{,}5\,\mu C$$

$$Q_3 = C_3 \cdot V_{eq} = 6\eta F \cdot 4{,}5kV = 27\,\mu C$$

PRESTE MAIS ATENÇÃO!

2. Capacitores

Nesse momento não vamos trabalhar os capacitores em regime transitório e não vamos trabalhar com capacitores em circuitos elétricos. Esse estudo será feito mais adiante.

Capacitores são dispositivos elétricos constituídos de dois condutores com cargas iguais e opostas, capaz de armazenar energia potencial elétrica, devido ao acúmulo de cargas elétricas. A capacitância do dispositivo é definida pela razão:

$$\frac{Q}{V}$$

Em que Q é o módulo da carga em dos condutores e V é a intensidade da diferença de potencial entre as duas superfícies condutoras.

Vamos demonstrar que a capacitância de um capacitor depende de dois fatores apenas:

1) Do isolante entre as armaduras (superfícies condutoras);
2) Da geometria de cada armadura, bem como da posição relativa entre elas.

Para calcular a capacitância, sempre colocaremos cargas iguais e opostas nas armaduras e determinaremos a diferença de potencial entre elas. Vale lembrar que obtemos o potencial a partir do campo elétrico devido às cargas.

2.2. Capacitores de placas paralelas

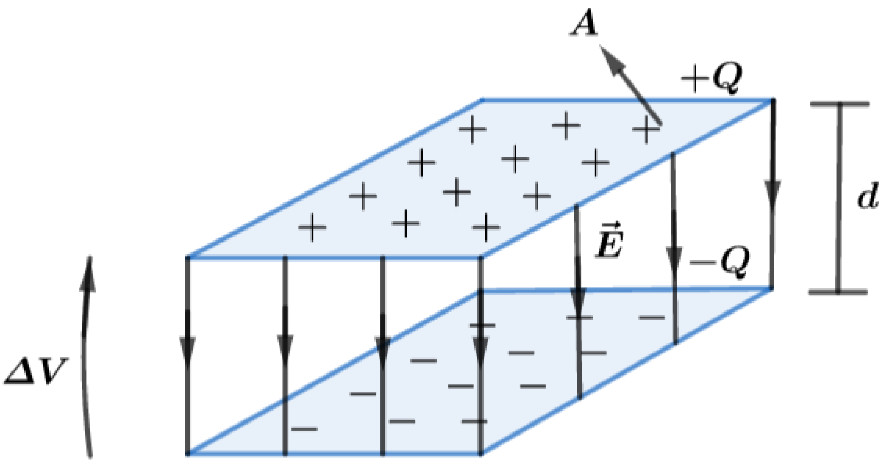


Figura 2: Capacitor de placas paralelas.

Trata-se de um dos capacitores mais utilizados. Constitui-se de duas placas paralelas, formadas por folhas metálicas delgadas, separadas e isoladas uma da outra por um filme plástico bem fino.

Seja A a área da superfície (área lateral de cada placa condutora) e a d a distância de separação entre as placas. Para minimizar os efeitos de bordas e garantir a uniformidade do campo, constrói-se o capacitor de tal forma que d seja muito menor que a largura das placas.

Com isso, carrega-se uma das placas com uma carga $+Q$ e a outra com uma carga $-Q$. As cargas se distribuem uniformemente pelas armaduras e como as superfícies estão muito próximas, podemos dizer que o campo elétrico entre elas se aproxima muito do campo entre dois planos infinitos.

Lembrando que o campo devido à um plano infinito é dado por:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

onde $\sigma = \frac{Q}{A}$.

Assim, o campo elétrico entre as placas terá módulo:

$$E = E_{+} + E_{-}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Em um campo elétrico uniforme, vimos a relação do potencial elétrico e do campo, expresso por:

$$\Delta V = E.d \Rightarrow \Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot d = \frac{Q \cdot d}{\varepsilon \cdot A}$$

Como capacitância é a razão da carga pela diferença de potencial, temos que:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}}$$

Notamos que a capacitância é proporcional a área das placas e inversamente proporcional a distância que separa as armaduras. Como podemos ver pela expressão logo acima, a capacitância depende das dimensões, da forma e da disposição geométrica das placas condutoras, e das propriedades do meio isolante entre os condutores (ε).

2.3. Capacitores esféricos

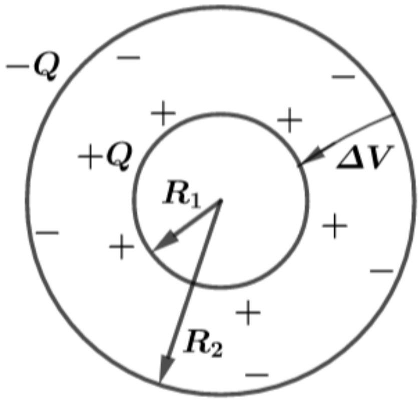


Figura 3: Capacitor esférico.

Considere uma esfera menor carregada com uma carga $+Q$ e uma casca carregada com carga $-Q$. Podemos calcular o potencial em cada superfície da seguinte forma:

$$V_1 = K\frac{Q}{R_1} - K\frac{Q}{R_2}$$

$$V_2 = K\frac{Q}{R_2} - K\frac{Q}{R_2} = 0$$

Dessa forma, a diferença de potencial é dada por:

$$\Delta V = V_1 - V_2 = K\frac{Q}{R_1} - K\frac{Q}{R_2}$$

$$\Delta V = KQ\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Delta V = KQ\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2}\right)$$

Portanto, a capacitância será:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$$C = \frac{1}{K}\frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}$$

$$\boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon \cdot R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}}$$

Quando as duas superfícies esféricas possuem raios muito próximos, podemos dizer que a diferença entre os raios é muito pequena ($d = R_2 - R_1$) e se chamarmos um deles de R o produto $R_1 \cdot R_2 \approx R^2$. Assim, a capacitância se tornaria:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon \cdot R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}$$

$$C = \frac{\varepsilon \cdot (4\pi \cdot R^2)}{d}$$

Mas, $4\pi R^2$ é a área superficial da esfera, portanto novamente teríamos:

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}}$$

Com resultado, podemos concluir que um capacitor se torna um capacitor de placas paralelas quando fazemos as duas superfícies externas esféricas com raios muito próximos.

2.4. Capacitores cilíndricos

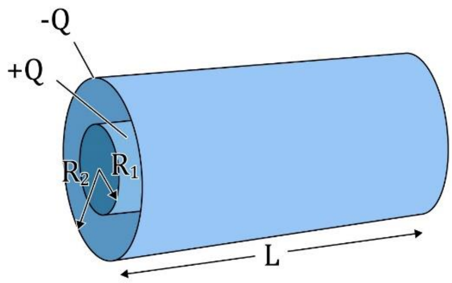


Figura 4: Capacitor cilíndrico.

Trata-se de um capacitor feito por um fio condutor com raio R_1e uma casca cilíndrica condutora concêntrica com raio R_2, tal que $R_2 > R_1$, como mostra a figura acima.

Para obtermos a capacitância de um condutor cilíndrico, vamos considerar que:

$$\boxed{R_1 < R_2 \ll L}$$

Com isso, basta seguirmos os seguintes passos:

1) Definição de capacitância:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

2) A relação do potencial com o campo elétrico:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

3) Utilização da Lei de Gauss para conhecermos o módulo do campo elétrico na região desejada. Para isso, devemos definir a gaussiana (Ω) de forma cilíndrica de raio R e comprimento $l \ll L$.

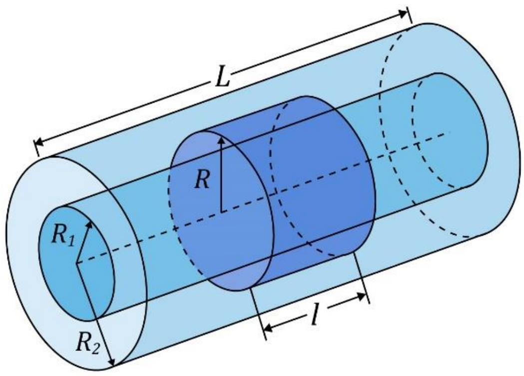


Figura 5: Utilização da Lei de Gauss para determinação do campo elétrico no interior do capacitor cilíndrico.

4) Verificamos a simetria do problema e notamos que o campo elétrico é radial as cascas cilíndricas. Dessa forma, o fluxo do campo que atravessa as bases da superfície cilíndrica gaussiana é nulo. Portanto:

$$\left(\sum_{\Omega} E.\Delta A\right)_{bases} + \left(\sum_{\Omega} E.\Delta A\right)_{lateral} = \frac{q_{int}}{\varepsilon}$$

$$0+E\sum_{\Omega}\Delta A=\frac{q_{int}}{\varepsilon}$$

$$E(2\pi RL)=\frac{q_{int}}{\varepsilon}$$

5) Cálculo da carga interna: vamos admitir que a distribuição de cargas ao longo do fio será uniforme, logo:

$$\frac{q_{int}}{l}=\frac{Q}{L}$$

$$q_{int}=\frac{l}{L}Q$$

6) Explicitar o campo na região isolante em função da distância radial:

$$E(2\pi Rl)=\frac{\frac{l}{L}Q}{\varepsilon}$$

$$E=\frac{Q}{2\pi L\varepsilon}\frac{1}{R}$$

7) Calcular o potencial a partir do campo na região de interesse:

$$V_{R_2}-V_{R_1}=-\int_{R_1}^{R_2}E.dR$$

$$\Delta V=-\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q}{2\pi L\varepsilon}\frac{1}{R}dR$$

$$\Delta V=-\frac{Q}{2\pi L\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{R}dR$$

$$\Delta V=-\frac{Q}{2\pi L\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

8) Calcule a capacitância de acordo com a definição:

$$C=\frac{Q}{|\Delta V|}$$

$$\boxed{C=\frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}$$

Observe que a capacitância é proporcional ao comprimento dos condutores (L).

Novamente, podemos ver que a capacitância depende das dimensões, da forma e da disposição geométrica das placas condutoras, e das propriedades do meio isolante entre os condutores (ε).

Vale ressaltar que a demonstração feita aqui foge um pouco da proposta do vestibular do ITA e do IME. É apenas para melhor fundamentar nossa teoria. Entretanto, é muito importante você ter os resultados em mente!

2.5. O Armazenamento da energia elétrica em um capacitor

Quando estamos carregando um capacitor, os elétrons são transferidos do condutor carregado positivamente para o condutor carregado negativamente, por aplicação de uma diferença de potencial.

Com isso, aumentamos a deficiência de elétrons no condutor positivo e deixamos o condutor negativo com excesso de elétrons. Nesse processo, parte do trabalho realizado pelas cargas serve para carregar o capacitor e outra parte desse trabalho é armazenada em energia potencial eletrostática.

Se em um dado instante do carregamento a carga transferida for q, então a diferença de potencial será dada por $V = q/C$. Quando uma pequena quantidade de carga adicional dq é transferida do condutor negativo para o positivo através de um aumento de potencial, a energia potencial da carga e, portanto, do capacitor é aumentada de:

$$dU = Vdq = \frac{q}{C}dq$$

Para contabilizar o aumento total na energia potencial U, devemos somar a contribuição de acréscimo de energia devido à cada carga transferida, isto é:

$$U = \int dU = \int_0^Q \frac{q}{C}dq$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

Lembrando da relação $C = Q/V$, podemos reescrever a expressão da energia potencial armazenada no capacitor das seguintes maneiras:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2}$$

Outra maneira de chegarmos a esse resultado seria observarmos o gráfico da diferença de potencial pela carga. Como vimos anteriormente, a energia potencial elétrica pode ser dada por $E_p = q \cdot V$, portanto, nesse gráfico a área corresponde numericamente a energia potencial elétrica.

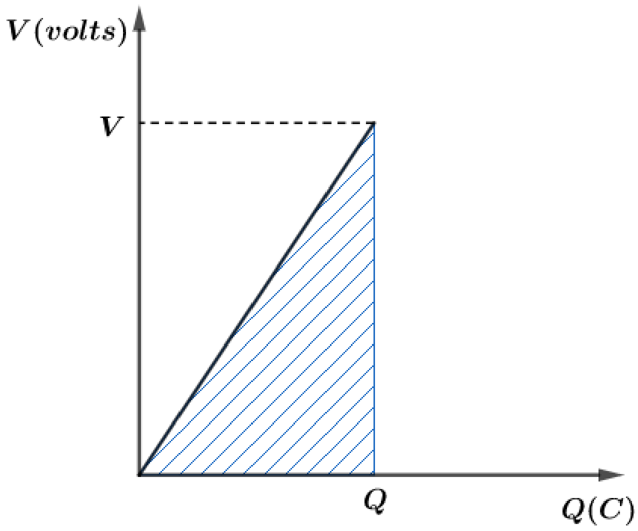


Figura 6: Gráfico do potencial em função da carga do capacitor.

$$E_p = q \cdot V \text{ e } C = \frac{Q}{V}$$

Como $E_p \overset{N}{=} área$ e pelo gráfico temos a área de um triângulo retângulo, então:

$$E_p \overset{N}{=} área = \frac{1}{2} QV$$

Além disso, outro resultado interessante é o armazenamento da energia elétrica por unidade de volume ou densidade de energia ou energia específica (μ_{E_P}), onde a unidade é dada por J/m^3. Como vimos, em um capacitor plano temos que:

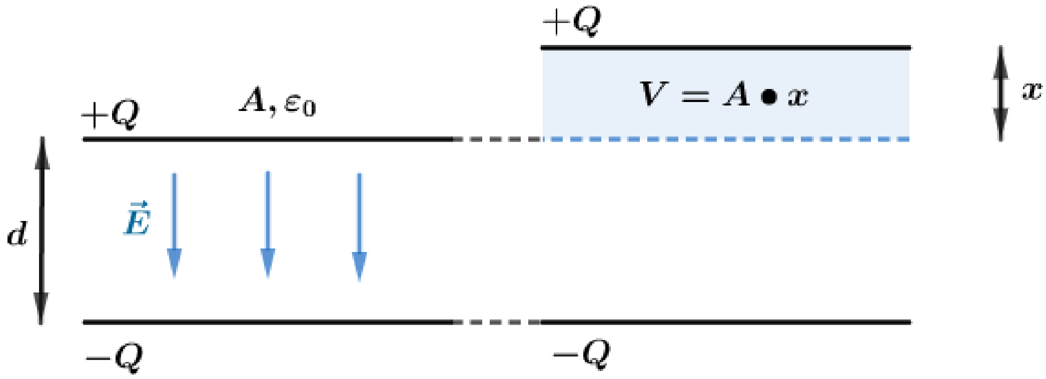
$$U = \frac{CV^2}{2} = \frac{\varepsilon \cdot A}{d} \cdot \frac{(E \cdot d)^2}{2} = \frac{\varepsilon \cdot E^2 \cdot [A \cdot d]}{2}$$

$$\boxed{\mu_{E_P} = \frac{U}{[A \cdot d]} = \frac{\varepsilon \cdot E^2}{2}}$$

Notamos que a energia por unidade de volume é proporcional ao módulo do campo ao quadrado. Assim, vemos que a energia está armazenada no campo elétrico que foi gerado ao carregar as placas e a denominamos por energia do campo eletrostático.

Ainda que a equação de μ_{E_P} tenha sido deduzida para o caso do capacitor de placas paralelas, tal resultado pode ser aplicado a qualquer campo elétrico.

Vamos fazer uma abordagem diferente da energia potencial. Se desejássemos aumentar a distância entre as placas de um capacitor plano, qual seria o trabalho necessário para isso?



Onde:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

Notamos que o acréscimo na energia é o trabalho necessário para aumentar a distância em x metros. Utilizando o conceito de energia por unidade de volume, temos que:

$$\tau_F = \Delta E_P = \mu_{E_P} \cdot (A \cdot x)$$

$$\tau_F = \frac{\varepsilon \cdot E^2}{2} \cdot A \cdot x = \frac{\varepsilon \cdot E}{2} \cdot A \cdot x \cdot E = \frac{\varepsilon \cdot E}{2} \cdot A \cdot x \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1}{2} E \cdot x \cdot (A \cdot \sigma)$$

Como $\sigma = \frac{Q}{A}$, então:

$$\boxed{\tau_F = \frac{1}{2} Q \cdot E \cdot x}$$

A partir desse resultado, podemos determinar a força de atração entre as placas da seguinte forma:

$$\tau_F = F \cdot x = \frac{1}{2} Q \cdot E \cdot x$$

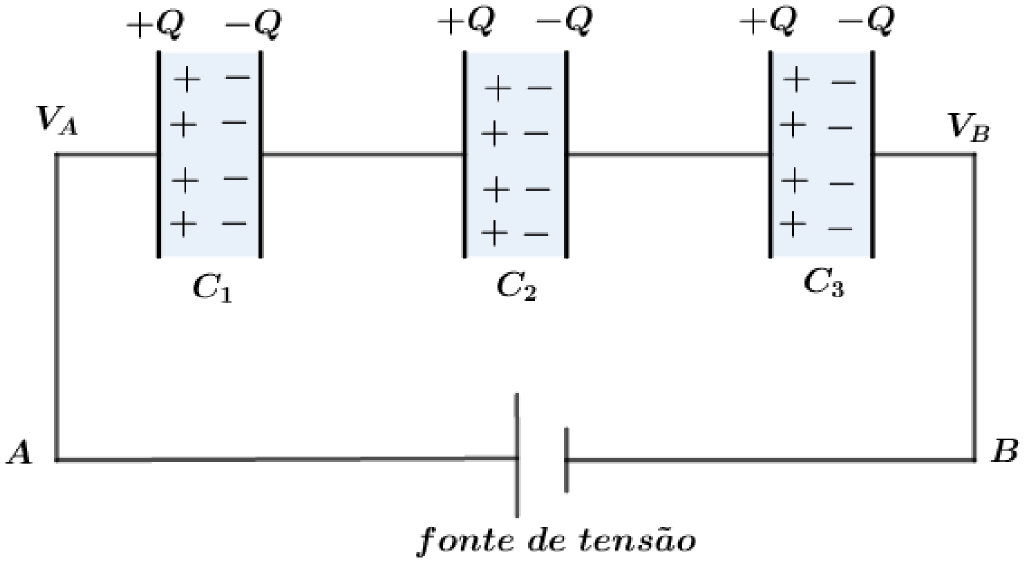
$$\therefore \boxed{F = \frac{1}{2} Q \cdot E}$$

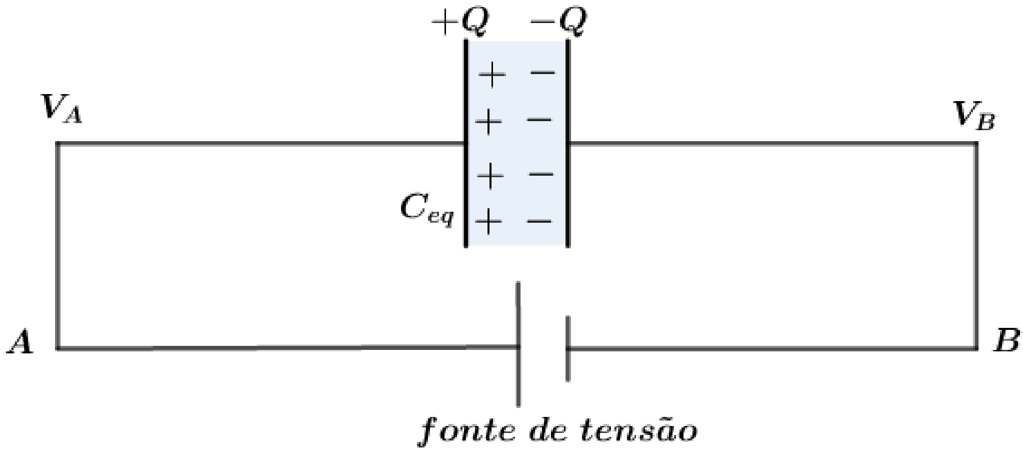
2.6. Associação de capacitores

É comum combinar dois ou mais capacitores para obter valores desejados de capacitâncias, conforme as especificações de projeto.

2.6.1. Capacitores associados em série

Dizemos que dois ou mais capacitores estão em série quando a soma das tensões é igual à diferença de potencial a que o sistema é submetido. Se estão descarregados, possuíram a mesma carga, que é igual à carga total da associação. Este fato decorre da indução total nas placas. Quando a placa positiva de C_1 adquire carga $+Q$, será induzida uma carga $-Q$ na outra placa de C_1. Com isso, a placa de C_2 mais próxima de C_1será induzida com carga $+Q$ e assim por diante. Dessa forma. Todos os capacitores terão a mesma carga Q.





A diferença de potencial entre os pontos A e B é dada pela soma das diferenças de potenciais em cada capacitor:

$$V_A - V_B = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3$$

Como:

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1}, \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2}, \Delta V_3 = \frac{Q}{C_3}$$

Por definição, a capacitância equivalente entre os pontos A e B é dada por:

$$C_{eq} = \frac{Q_{eq}}{\mathrm{V_A} - \mathrm{V_B}}$$

Como a carga é a mesma para cada capacitor, assim como para a capacitância equivalente, então:

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

Para o caso de n capacitores associados em série, a soma das tensões é igual a tensão equivalente:

$$U_{eq} = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$$

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \cdots + \frac{Q}{C_n}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n}}$$

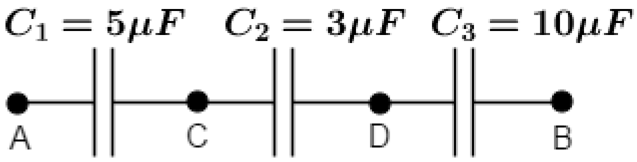
Caso os n capacitores iguais, a capacitância equivalente será:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \cdots + \frac{1}{C}$$

$$\boxed{C_{eq} = \frac{C}{n}}$$

3)

Considere três capacitores combinados em série, inicialmente descarregados. O ponto A é ligado ao polo positivo de uma bateria de corrente contínua e o terminal B ao polo negativo. Nesse processo, C_1 fica com carga de $15\ \mu C$.



Calcule:

a) as cargas elétricas dos outros capacitores da associação.

b) a diferença de potencial em cada capacitor.

c) a diferença de potencial da bateria.

d) a capacitância equivalente entre A e B.

e) a energia armazenada na associação.

Comentários:

a) Na associação em série temos como propriedade fundamental que a carga adquirida deve ser a mesma em cada capacitor. Assim, as cargas nos outros capacitores também serão de $15\ \mu C$.

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 15\ \mu C$$

b) Vamos utilizar a definição de capacitância para determinar a diferença de potencial em cada capacitor:

$$\Delta V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{15\ \mu C}{5\ \mu F} = 3\ V$$

$$\Delta V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{15\ \mu C}{3\ \mu F} = 5\ V$$

$$\Delta V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{15\ \mu C}{10\ \mu F} = 1{,}5\ V$$

c) A diferença de potencial da bateria é a soma das diferenças de potenciais em cada capacitor em série:

$$\Delta V_{AB} = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3$$

$$\Delta V_{AB} = 3 + 5 + 1{,}5 = 9{,}5\ V$$

d) Utilizando a definição de capacitância equivalente, temos que:

$$C_{eq} = \frac{Q}{\Delta V_{AB}} = \frac{15\ \mu C}{9{,}5} \cong 1{,}58\ \mu F$$

Ou ainda:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{5\mu F} + \frac{1}{3\mu F} + \frac{1}{10\mu F}$$

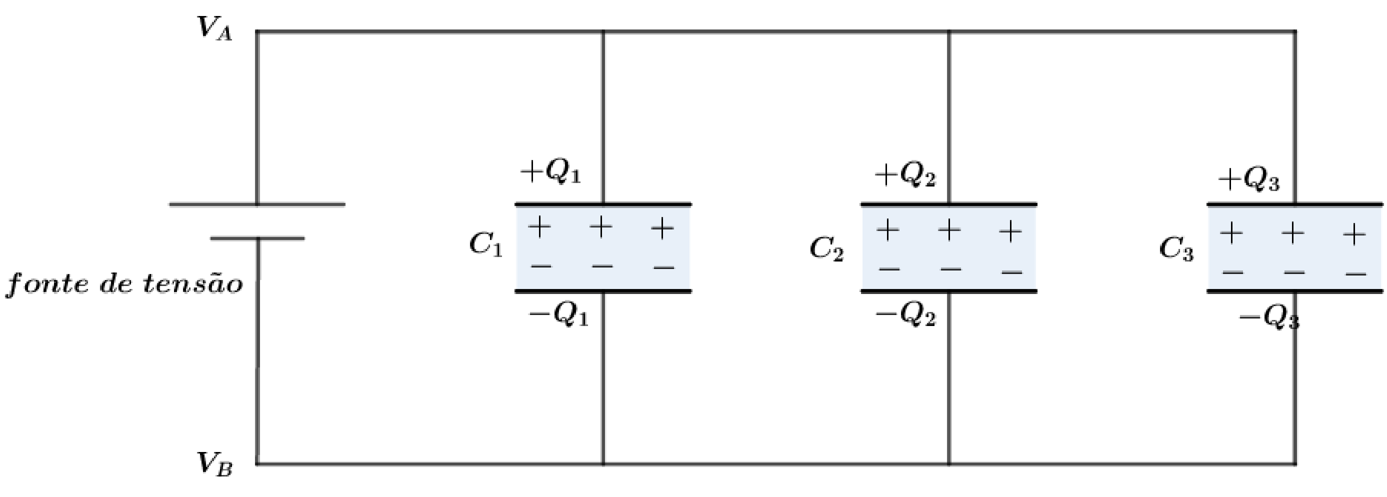
$$C_{eq} = \frac{30}{19}\ \mu F \cong 1{,}58\ \mu F$$

e) Podemos calcular a energia da combinação somando as energias armazenadas em cada dispositivo ou calcular a energia armazenada no capacitor equivalente:

$$E_P = \frac{C_{eq} \cdot \Delta V_{AB}^2}{2} = \frac{\left(\frac{30}{19} \times 10^{-6}\right) \cdot (9{,}5)^2}{2} = 71{,}25 \times 10^{-6}\ J$$

2.6.2. Capacitores associados em paralelo

Dizemos que dois ou mais capacitores estão em paralelo quando a diferença de potencial a que eles estão submetidos é a mesma.



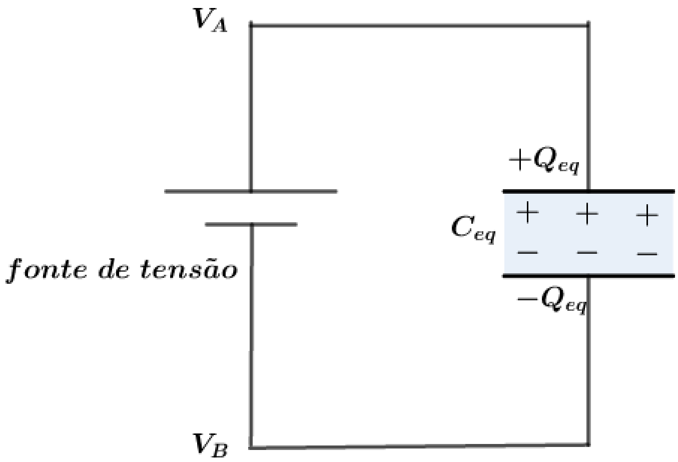
Nessa configuração, cada capacitor terá sua respectiva carga Q_1, Q_2 e Q_3. Pela definição de capacitância, temos:

$$Q_1 = C_1 \cdot \Delta V, Q_2 = C_2 \cdot \Delta V, Q_3 = C_3 \Delta V$$

Assim, a carga total é dada pela soma das cargas:

$$Q_{eq} = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

O capacitor equivalente nessa combinação possuirá a carga total, sob a diferença de potencial ΔV, onde a capacitância equivalente é dada pela definição:



$$C_{eq} = \frac{Q_{eq}}{\Delta V}$$

$$C_{eq} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{\Delta V} = \frac{Q_1}{\Delta V} + \frac{Q_2}{\Delta V} + \frac{Q_3}{\Delta V}$$

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3}$$

Para o caso de n capacitores associados em paralelo, a soma das cargas é igual a carga equivalente:

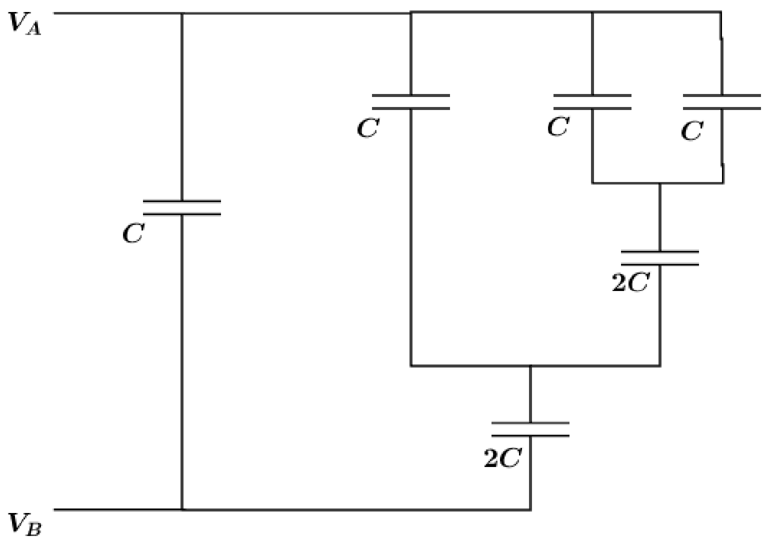
$$Q_{eq} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots + Q_n$$

$$C_{eq} \cdot (V_A - V_B) = C_1 \cdot (V_A - V_B) + C_2 \cdot (V_A - V_B) + C_3 \cdot (V_A - V_B) + \cdots + C_n \cdot (V_A - V_B)$$

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n}$$

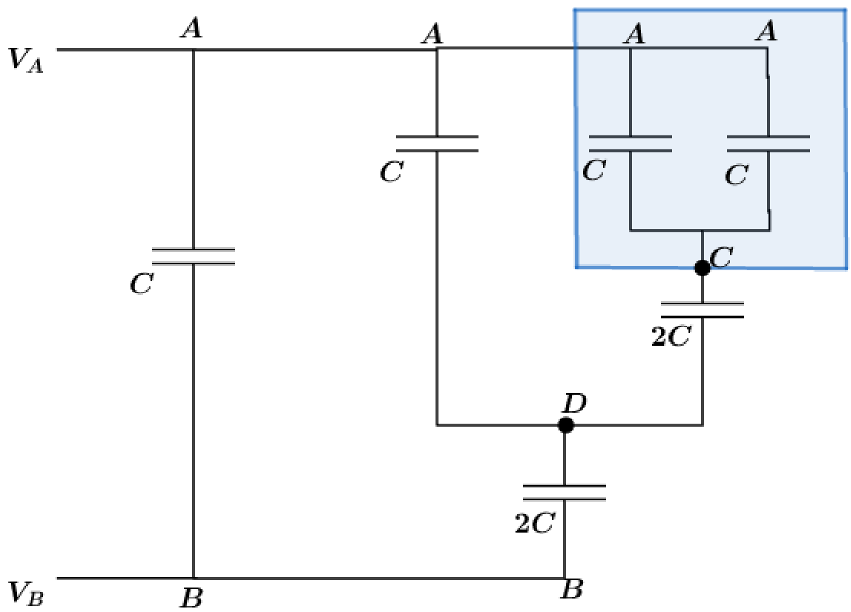
4)

Calcule a capacitância equivalente entre X e Y.



Comentários:

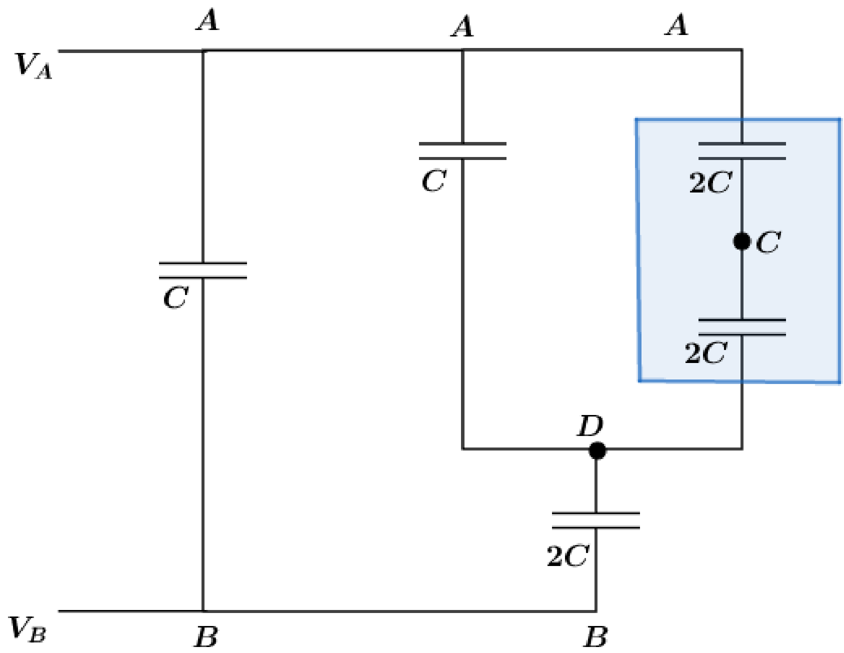
Vamos simplificar nossa combinação de capacitores de forma a facilitar nosso problema. Para isso, vamos dar o nome para todos os pontos que estão em potenciais diferentes:



Entre os pontos A e C temos dois capacitores em paralelo, logo a capacitância será dada por:

$$C_{AC} = C + C = 2C$$

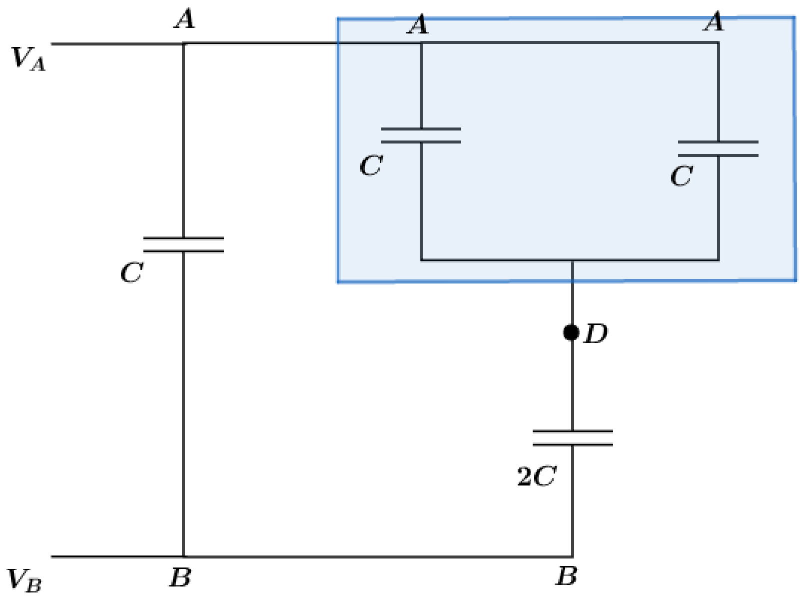
A partir daí teremos uma nova configuração de capacitores:



Entre os pontos A e D temos dois capacitores em série no ramo da direita, logo:

$$(C_{AD})_{direita} = \frac{2C}{2} = C$$

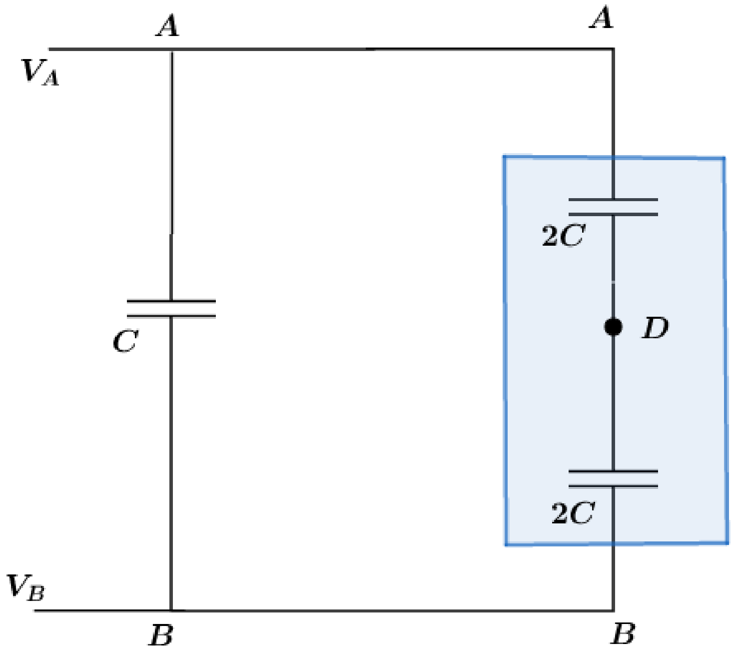
Agora, temos a nova configuração:



Com isso, podemos determinar a capacitância equivalente entre A e D, pois os dois capacitores estão em paralelo:

$$C_{eq_{AD}} = C + C = 2C$$

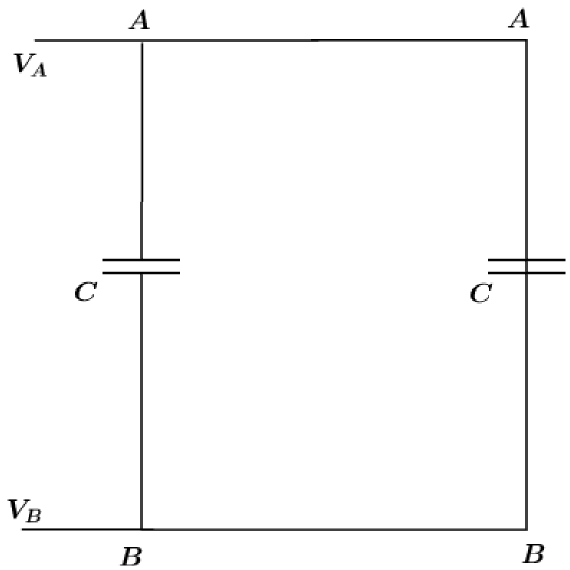
Então, chegamos a nova configuração de capacitores:



Nesse momento, somos capazes de determinar a capacitância equivale entre A e B no ramo mais à direita, já que temos dois capacitores em série:

$$(C_{AB})_{direita} = \frac{2C}{2} = C$$

Então, nossa combinação de capacitores se resumiu a:

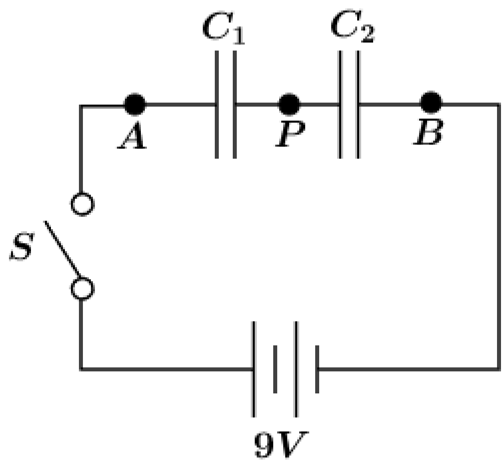


Assim, a capacitância equivalente entre os pontos A e B é expressa por:

$$C_{eq_{AB}} = C + C = 2C$$

5)

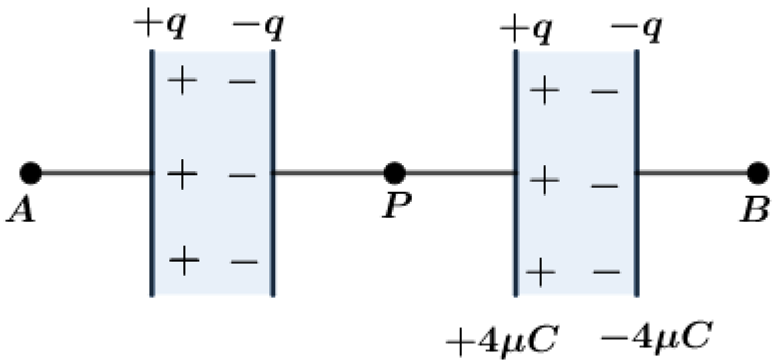
Considere dois capacitores em série, com capacitâncias iguais a $C_1 = 4\,\mu F$ e $C_2 = 1\,\mu F$. Inicialmente, C_2 já possui uma carga de $4\mu C$, antes de fecharmos o circuito da figura.



Fechando a chave S, após o equilíbrio do sistema, qual deve ser as cargas adquiridas pelos capacitores.

Comentários:

Quando fechamos S, haverá uma indução de carga q nas armaduras do capacitor, já que ambos estão em série:



A carga $+q$ se soma a $+4\mu C$ no capacitor C_2, assim como $-q$ superpõe-se a $-4\mu C$. Dessa forma, a carga no capacitor C_2 é de:

$$Q_2 = q + 4\mu C$$

Em C_1, temos que:

$$Q_1 = q$$

Dado que os capacitores estão em série, temos que a tensão entre A e B é a soma das tensões:

$$V_A - V_B = (V_A - V_P) + (V_P - V_B) = 9\ V\ (eq. 1)$$

Utilizando a definição de capacitância, temos:

$$V_A - V_P = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{q}{4\mu F} \text{ e } V_P - V_B = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{q+4\mu C}{1\mu F}$$

Substituindo as diferenças de potenciais na equação 1, vem:

$$\frac{q}{4\mu F} + \frac{q+4\mu C}{1\mu F} = 9\ V$$

$$\frac{q+4q+16\mu C}{4\mu F} = 9V$$

$$5q = 36(\mu F \cdot V) - 16\mu C = 36\mu C - 16\mu C$$

$$\boxed{q = 4\mu C}$$

Com isso, as cargas finais dos capacitores ficam:

$$Q_1 = q = 4\mu C, Q_2 = q + 4\mu C = 8\mu C$$

Note que devido ao fato do capacitor C_2 já estar previamente carregado, cada capacitor não ficou com a mesma carga, mesmo estando em série. Por isso, devemos lembrar que quando estabelecemos a regra da associação em série, admitimos que eles estão inicialmente descarregados ou possuem a mesma carga inicial. Contudo, sempre valerá que a soma das tensões nos capacitores em série é igual a tensão total:

$$V_A - V_P = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{4\mu C}{4\mu F} = 1V$$

$$V_P - V_B = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{8\mu C}{1\mu F} = 8V$$

$$(V_A - V_P) + (V_P - V_B) = 1V + 8V = 9V = V_A - V_B$$

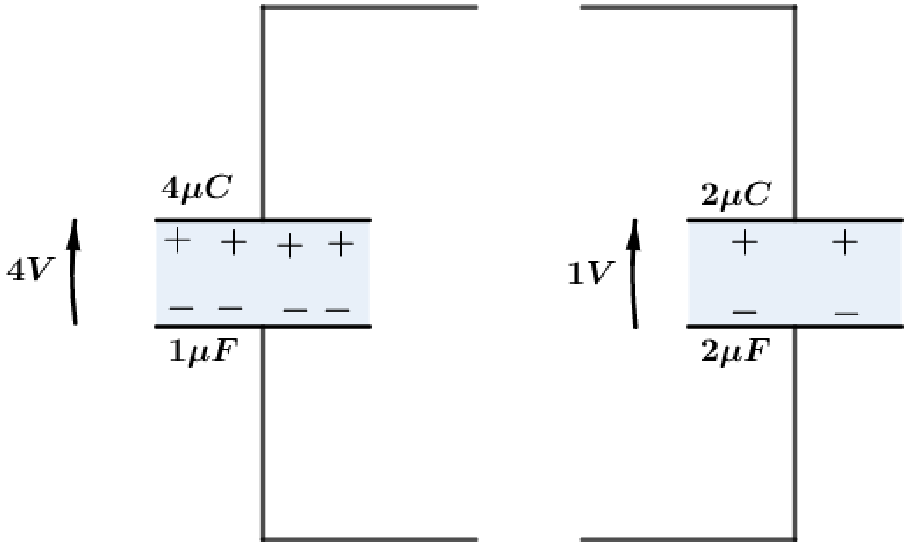
2.6.3. Associação em paralelo de capacitores previamente carregados

Vamos fazer esse estudo utilizando exemplos. Esses casos são extremamente comuns nas provas, senão os mais comuns. Preste muita atenção!

Para isso, vamos dividir em dois casos particulares que costumam dar mais trabalho:

- **Mesma polaridade**:

Vamos tomar dois capacitores previamente carregados como na figura abaixo:



Pela conservação das cargas, temos que a carga equivalente é dada pela soma das cargas:

$$Q_{eq} = Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2'$$
$$Q_{eq} = 4\ \mu C + 2\ \mu C = Q_1' + Q_2'$$
$$Q_{eq} = 6\ \mu C = Q_1' + Q_2'$$

Dado que os capacitores terão a mesma diferença de potencial, então:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2$$
$$\frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2}$$
$$\frac{Q_1'}{1\mu F} = \frac{Q_2'}{2\mu F}$$
$$Q_2' = 2Q_1'$$

Então, as cargas serão dadas por:

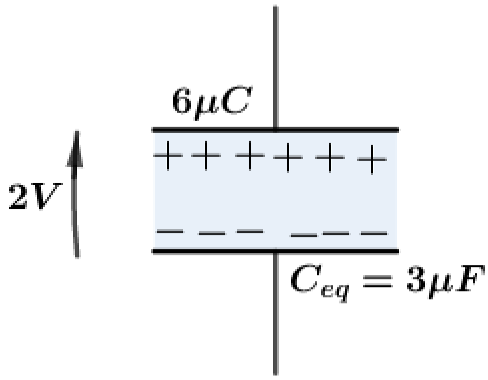
$$Q_1' = 2\mu C \text{ e} Q_2' = 4\mu C$$

Logo, a diferença de potencial nos capacitores será de:

$$\Delta V = \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2}$$
$$\Delta V = \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{2\mu C}{1\mu F} = 2\ V$$

Por definição, a capacitância equivalente é dada por:

$$C_{eq} = \frac{Q_{eq}}{\Delta V} = \frac{6\mu C}{2V} = 3\ \mu F$$



Vamos calcular a energia potencial do sistema antes e depois da conexão:

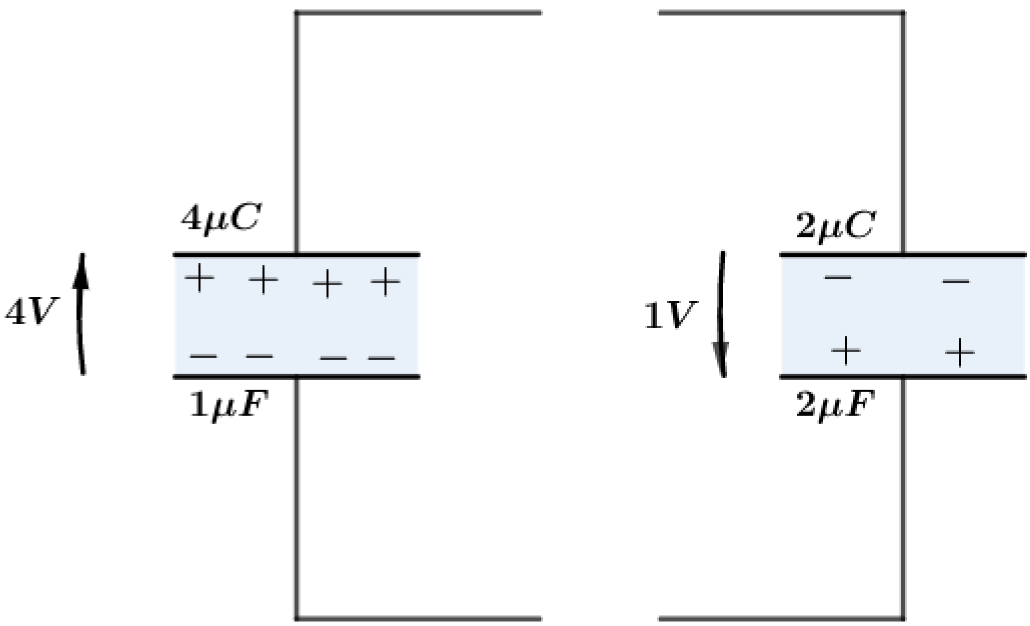
$$(E_P)_{antes} = (E_P)_1 + (E_P)_2$$
$$(E_P)_{antes} = \frac{Q_1 \cdot \Delta V_1}{2} + \frac{Q_2 \cdot \Delta V_2}{2}$$
$$(E_P)_{antes} = \frac{(4\mu C) \cdot 4V}{2} + \frac{(2\mu C) \cdot 1V}{2} = 9\ \mu J$$

$$(E_P)_{depois} = (E_P)_1 + (E_P)_2$$
$$(E_P)_{depois} = \frac{Q_1' \cdot \Delta \mathrm{V}}{2} + \frac{Q_2' \cdot \Delta \mathrm{V}}{2}$$
$$(E_P)_{depois} = \frac{(2\mu C) \cdot 2V}{2} + \frac{(4\mu C) \cdot 2V}{2} = 6\ \mu J$$

Podemos notar a diferença na energia antes e depois. Tal energia é perdida como energia térmica nos fios ou na forma de energia irradiada.

- **Polaridade opostas**:

Vamos analisar este caso através do exemplo da figura abaixo:



Pelo Princípio da Conservação das Cargas, temos que:

$Q_{eq} = \left||2\mu C| - |4\mu C|\right| = 2\ \mu C = Q_1' + Q_2'$

Novamente, teremos que a diferença de potencial nos terminais dos capacitores deve ser a mesma, isto é:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$
$$\frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2}$$
$$\frac{Q_1'}{1\mu F} = \frac{Q_2'}{2\mu F}$$
$$Q_2' = 2Q_1'$$

Agora, as cargas de cada capacitor serão de:

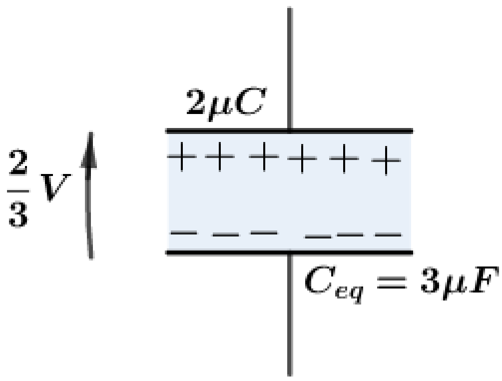
$$Q_1' = \frac{2}{3}\mu C \text{ e } Q_2' = \frac{4}{3}\mu C$$

Assim, a diferença de potencial é dada por:

$$\Delta V = \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2}$$
$$\Delta V = \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{\frac{2}{3}\mu C}{1\mu F} = \frac{2}{3}V$$

Pela definição, a capacitância equivalente será expressa por:

$$C_{eq} = \frac{Q_{eq}}{\Delta V} = \frac{2\mu C}{\frac{2}{3}V} = 3\ \mu F$$



A nova energia potencial elétrica do sistema é dada por:

$$(E_P)_{depois} = \frac{C_{eq} \cdot (\Delta V)^2}{2} = \frac{3\mu F \cdot \left(\frac{2}{3}V\right)^2}{2} = \frac{2}{3}\mu J$$

Notamos que nessa forma, a variação de energia é ainda maior.

3. Dielétricos

Chamamos de dielétrico todo material não-condutor. Quando ocupamos o espaço entre as armaduras de um capacitor, sua capacitância varia. Vamos entender um pouco mais sobre esse fenômeno estudado experimentalmente por Faraday, estudando como se comporta a estrutura molécula de um dielétrico quando existe um campo elétrico atuando na região.

3.1. Estrutura molecular e polarização de um dielétrico

As moléculas que constituem um dielétrico podem existir em dois grupos: polares e apolares. Dizemos que moléculas polares são aquelas que possuem densidades de cargas não simétricas com relação ao centroide da molécula.

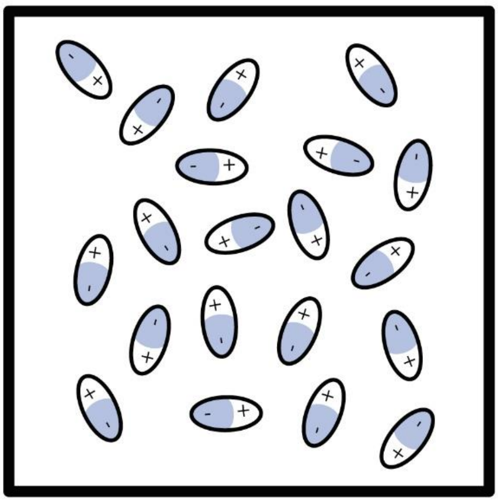


Figura 7: Moléculas em um dielétrico.

Em moléculas onde a nuvem de elétrons tem simetria esférica e, com isso, o centro de cargas negativas é localizado no centro da molécula, coincidindo com o centro das cargas positivas, dizemos que essa molécula é não-polar (apolar).

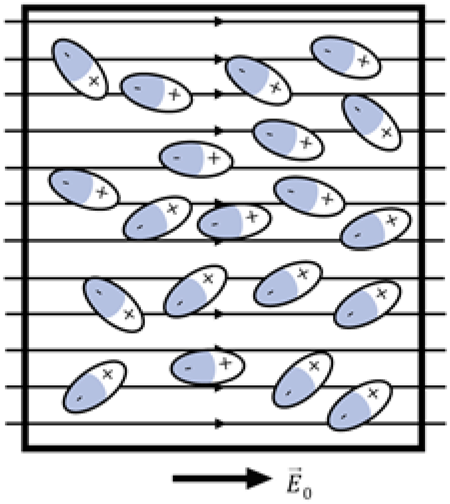


Figura 8: Moléculas polares sendo alinhadas com o campo elétrico.

Quando o dielétrico é constituído de moléculas polares, ao ser colocado em um campo elétrico, existe um alinhamento das moléculas com o campo. Por causa da agitação térmica, tal alinhamento não é perfeito. Entretanto, se diminuirmos a temperatura melhora-se o alinhamento. Outra forma de melhorar o grau de alinhamento é aumentar o módulo do campo elétrico.

Por outro lado, as moléculas apolares não formam dipolos elétricos. Contudo, quando tai moléculas são imersas em regiões onde existe um campo elétrico, ocorre uma deformação da molécula, tornando-a um dipolo elétrico. Assim, dizemos que o campo elétrico polarizou o dielétrico.

Vamos tomar um exemplo de um capacitor plano com vácuo no espaço entre as armaduras do capacitor com carga Q_0, como na figura abaixo. Como sabemos, existe um campo elétrico $\vec{E}_0$ orientado da placa positiva para a placa negativa.

Se preenchermos a região entre as placas com um material dielétrico (polar ou apolar), a ação do campo elétrico $\vec{E}_0$ torna as moléculas dipolos que se alinham com $\vec{E}_0$.

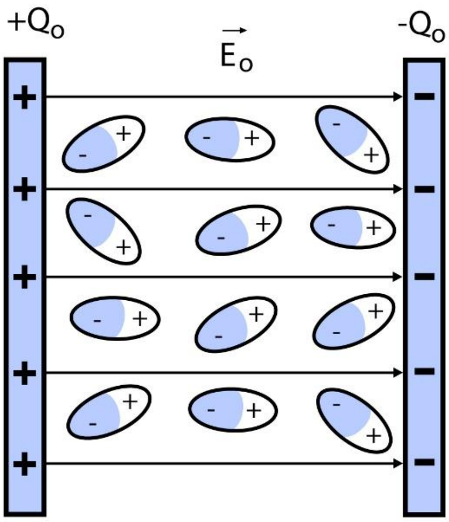


Figura 9: Moléculas de um material dielétrico sob ação de um campo elétrico.

Como efeito resultante, poderíamos imaginar que próximo da placa positiva se formasse uma película plana de carga negativa $-q'$ e, do outro lado, uma película plana de carga positiva se formasse na placa negativa, como na figura abaixo:

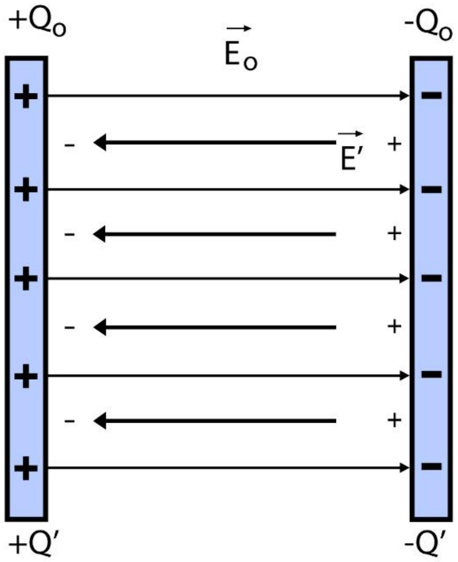


Figura 10: Efeito resultante do campo elétrico no dielétrico.

Devido a esse efeito, podemos dizer que surge um campo elétrico interno no sentido contrário, de intensidade menor que $\vec{E}_0$. Assim, o campo elétrico resultante no dielétrico é dado por:

$$\vec{E}_{Res} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{int}$$

Trabalhando em módulos, temos que:

$$E_{Res} = E_0 - E_{int}$$

Notamos que ao adicionar o material dielétrico, o campo elétrico na região diminui de intensidade.

Um exemplo prático da utilidade de polarização de dielétrico é o efeito piezelétrico. Alguns cristais de moléculas polares quando aplicada uma tensão mecânica polarizam suas moléculas. A polarização do cristal produz uma diferença de potencial entre as suas faces, que pode ser transformada em corrente elétrica.

Esses cristais são utilizados em transdutores para converter as deformações mecânicas em sinais elétricos. Utilizamos esses cristais em microfones, captadores fotográficos, medidores de vibrações etc.).

Por outro lado, podemos aplicar uma tensão elétrica em um cristal e ele produzir uma deformação mecânica, trata-se do efeito piezelétrico invertido. Esse efeito é muito utilizado em fones de ouvido, autofalantes etc. Os cristais mais utilizados são quartzo, turmalina e topázio.

ESCLARECENDO!

3.2. Efeito do dielétrico na capacitância

Como vimos anteriormente, ao introduzir um material dielétrico no interior de um capacitor, o campo elétrico diminui. Com enfraquecimento do campo, o potencial elétrico também é reduzido e a capacitância aumenta, já que $C = Q/V$.

Se o campo elétrico antes de inserir a substância dielétrica era E_0, após a inserção o campo será:

$$\boxed{E = \frac{E_0}{k}}$$

Chamamos k de constante dielétrica. No caso do capacitor de placas paralelas, com distância de separação d, quando a diferença de potencial (ΔV) entre as placas é:

$$\Delta V = E \cdot d = \frac{E_0}{k} \cdot d = \frac{1}{k}(E_0 \cdot d) = \frac{1}{k}\Delta V_0$$

Com isso, como a carga do capacitor não se alterou, a nova capacitância é:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{1}{k}\Delta V_0} = k\left(\frac{Q}{\Delta V_0}\right)$$

$$\boxed{C = k \cdot C_0}$$

Onde C_0 é a capacitância sem a presença do dielétrico. Como vimos anteriormente, a capacitância de um capacitor plano é dada por:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

No caso do preenchimento com dielétrico, temos que:

$$C = k \cdot C_0$$

$$C = k\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right) = \frac{\varepsilon A}{d}$$

$$\therefore \boxed{\varepsilon = k \cdot \varepsilon_0}$$

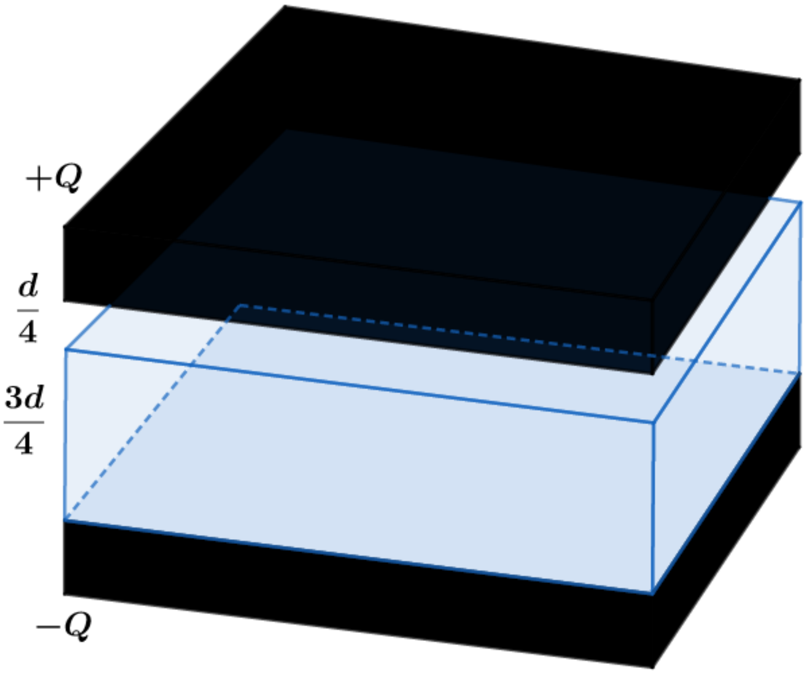
Denotamos ε como permissividade do dielétrico. Para chegar até aqui, admitimos que a carga nas placas do capacitor não se alterou. Isso só é verdadeiro quando o capacitor é carregado e retirado da fonte de carga antes de inserir o dielétrico.

Por outro lado, se adicionarmos o dielétrico enquanto a bateria ainda estiver conectada ao capacitor, a fonte de cargas fornecerá mais carga para manter a diferença de potencial original. Assim, a carga total entre as placas será $Q = k \cdot Q_0$. Com isso, a capacitância é aumentada de um fator k.

6)

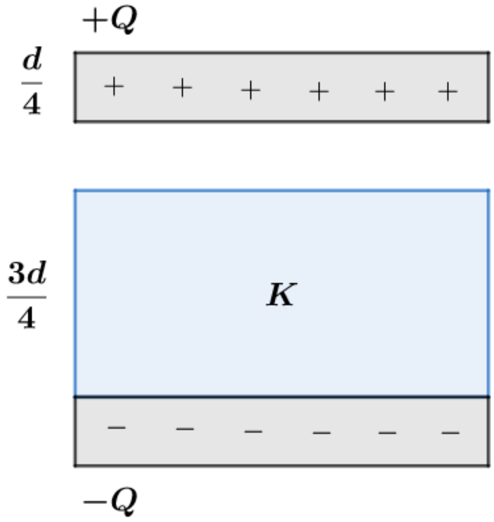
Sem a presença de um dielétrico, a capacitância de um capacitor de placas planas é dada por C_0.

Qual o valor da capacitância se uma chapa dielétrica preenche $\frac{3}{4}d$?



Comentários:

Podemos idealizar dois capacitores em série: capacitor preenchido pela chapa dielétrico ($\frac{3}{4}d$) e capacitor com espaço vazio ($\frac{d}{4}$). Dessa forma, a diferença de potencial total é a soma das diferenças de potenciais em cada trecho:



$$\Delta V = \Delta V_{chapa} + \Delta V_{esp} = E_{chapa}\left(\frac{3}{4}d\right) + E_{esp}\left(\frac{1}{4}d\right)$$

Como vimos, o campo na região onde é inserido o dielétrico diminui de intensidade, de acordo com a constante dielétrica:

$$E_{chap} = \frac{E_0}{k}$$

Para a região vazia, o campo elétrico ainda é o mesmo E_0.

Assim, a diferença de potencial será de:

$$\Delta V = \frac{E_0}{k}\left(\frac{3}{4}d\right) + E_0\left(\frac{1}{4}d\right) = E_0 \cdot d \cdot \left(\frac{k+3}{4k}\right) = \Delta V_0 \cdot \left(\frac{k+3}{4k}\right)$$

Dessa forma, a nova capacitância por definição será de:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\Delta V_0 \cdot \left(\frac{k+3}{4k}\right)} = \frac{Q}{\Delta V_0}\frac{4k}{k+3}$$

$$\boxed{C = C_0\left(\frac{4k}{k+3}\right)}$$

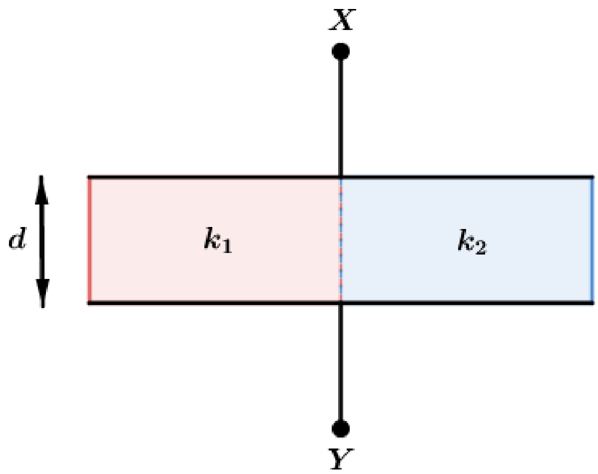
Observação:

Quando não existe um dielétrico entre as placas do capacitor, podemos dizer que $k = 1$. Assim, a capacitância seria $C = C_0$, como o esperado. Por outro lado, se a chapa dielétrica fosse condutora, o campo elétrico nela seria nulo ($E = \frac{E_0}{k} \approx 0$), implicando uma constante dielétrica muito grande (k tende ao infinito). Se fizermos $\lim_{k\to\infty} C_0\left(\frac{4k}{k+3}\right) = \lim_{k\to\infty} C_0\left(\frac{4}{1+\frac{3}{k}}\right) = 4C_0$. Esse resultado mostra que ao adicionar a chapa condutora apenas aumentamos a espessura da placa. Assim, a distância entre as placas seria apenas de $d/4$ e isso também está de acordo, já que $C = \frac{\varepsilon_0 A}{\frac{d}{4}} = 4\frac{\varepsilon_0 A}{d} = 4C_0$. Resultado esperado caso k seja muito grande.

Note que poderíamos ter resolvido essa questão apenas utilizando o conceito de capacitância em série, mas por questões de aprendizado, decidimos fazer por essa abordagem.

7)

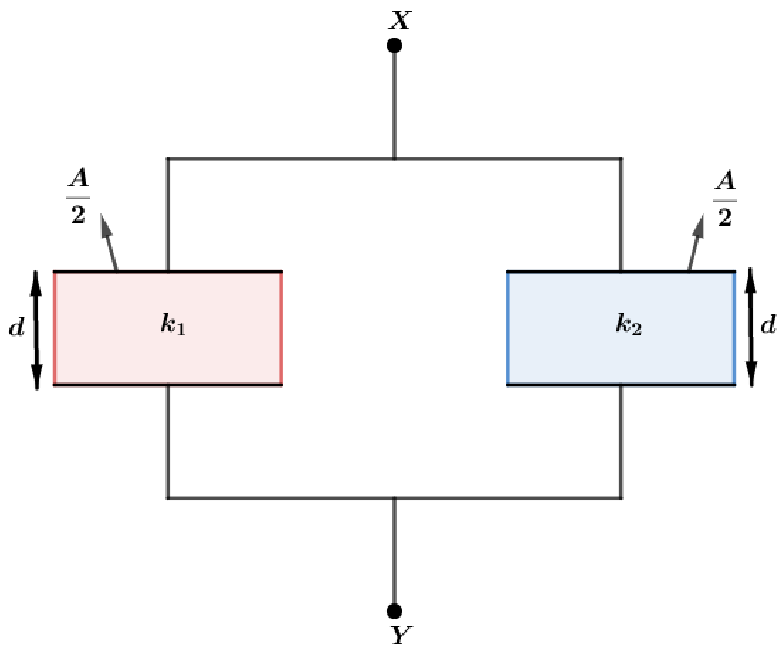
Considere dois dielétricos k_1 e k_2 entre as placas de um capacitor de placas paralelas conforme mostra a figura:



Determine a capacitância do capacitor. Dados: a distância d, a área total A de cada placa e a permissividade elétrica no vácuo ε_0.

Comentários:

Diante da configuração, tudo se passa como se tivéssemos dois capacitores em paralelo, submetidos a mesma diferença de potencial:



Assim, a capacitância equivalente é dada por:

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

$$C_{eq} = \frac{k_1 \varepsilon_0 \left(\frac{A}{2}\right)}{d} + \frac{k_2 \varepsilon_0 \left(\frac{A}{2}\right)}{d}$$

$$\therefore \boxed{C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}$$

3.3. Energia armazenada no capacitor com dielétrico

Como já vimos, a energia armazenada em um capacitor plano com dielétrico é expressa por:

$$E_P = \frac{1}{2}Q \cdot \Delta V = \frac{1}{2}C \cdot \Delta V^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

A capacitância pode ser expressa em função da área das placas, da distância entre as armaduras e a diferença de potencial ΔV em função do campo elétrico, bem como a separação entre as placas, da seguinte forma:

$$E_P = \frac{1}{2}C \cdot \Delta V^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon \cdot A}{d}\right)(E \cdot d)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon \cdot E^2 \cdot (A \cdot d)$$

Notamos que $A \cdot d$ representa o volume entre as placas. Assim, a energia por unidade de volume é de:

$$\mu_{E_P} = \frac{1}{2}(\varepsilon \cdot E^2)$$

$$\boxed{\mu_{E_P} = \frac{1}{2}(k \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2)}$$

Com esse resultado, vemos que parte da energia está associada ao campo elétrico, e a outra parte vinculada à polarização do dielétrico.

8)

Considere dois capacitores planos, com $C_1 = C_2 = 4\mu F$, conectados em paralelo submetido a uma diferença de potencial de $24\ V$.

a) calcule a carga de cada capacitor.

b) calcule a energia armazenada nos capacitores.

Agora, desconectamos a associação de capacitores em paralelo da fonte de tensão e adicionamos uma chapa dielétrica com $k = 2{,}5$ em C_2, até preencher completamente o espaço entre as armaduras. Nessa nova situação, calcule:

c) a diferença de potencial entre os terminais de cada capacitor.

d) as cargas nos capacitores.

e) a energia total armazenada nos capacitores.

Comentários:

a) utilizando a relação $Q = C \cdot \Delta V$, temos que:

$$Q_1 = C_1 \cdot \Delta V = (4\mu F) \cdot (24) = 96\mu C$$
$$Q_2 = C_2 \cdot \Delta V = (4\mu F) \cdot (24) = 96\mu C$$

b) a energia total é soma das energias em cada capacitor, logo:

$$E_T = E_1 + E_2 = \frac{Q_1 \cdot \Delta V}{2} + \frac{Q_2 \cdot \Delta V}{2} = 2304\ \mu J$$

c) podemos determinar a diferença de potencial entre os terminais dos capacitores utilizando a carga total e a capacitância equivalente:

$$\Delta V' = \frac{Q_{total}}{C_{eq}}$$

Onde:

$$Q_{total} = Q_1 + Q_2 = 192\ \mu C$$
$$C_{eq} = C_1 + C_2 = C_1 + k \cdot C_2 = 4 + 4 \cdot 2{,}5 = 14\ \mu F$$

Então:

$$\Delta V' = \frac{Q_{total}}{C_{eq}} = \frac{192\mu C}{14\mu F} = 13{,}7\ V$$

d) a carga em cada capacitor é obtida a partir da nova tensão e suas respectivas capacitâncias:

$$Q_1' = C_1 \cdot \Delta V' = (4\mu F) \cdot (13{,}7\ V) \cong 54{,}8\ \mu C$$
$$Q_2' = (k \cdot C_2) \cdot \Delta V' = (2{,}5 \cdot 4\mu F) \cdot (13{,}7\ V) \cong 137{,}2\ \mu C$$

Observação: ao introduzir o dielétrico no capacitor C_2, o campo no se interior é enfraquecido e a diferença de potencial diminui. Devido à disposição dos capacitores em paralelo, a carga flui de um capacitor para o outro para compensar o enfraquecimento do campo ($Q_2' > Q_1'$). Note ainda que a soma das cargas antes ($96\ \mu C + 96\mu C = 192\mu C$) e depois ($54{,}8\ \mu C + 137{,}2\ \mu C = 192\ \mu C$) é a mesma, mostrando o Princípio da Conservação das Cargas.

e) a energia total é dada por:

$$(E_T)_{depois} = \frac{1}{2}(Q_1' \cdot \Delta V') + \frac{1}{2}(Q_2' \cdot \Delta V') = \frac{1}{2}(Q_1' + Q_2')\Delta V' = \frac{1}{2}(192\mu C) \cdot 13{,}7 = 1315{,}2\ \mu J$$

Observe que a energia total diminui, pois para inserir o dielétrico em C_2 é necessário realizar um trabalho para colocá-lo no lugar desejado. Se desejássemos remover o dielétrico, seria necessário um trabalho $\tau = 2304\mu J - 1315{,}2\mu J = 988{,}8\ \mu J$. Tal trabalho será armazenado na forma de energia potencial eletrostática.

3.4. Rigidez dielétrica

Quando aumentamos a diferença de potencial entre as armaduras de um capacitor, aumenta-se a intensidade do campo elétrico. Como vimos, esse campo polariza o campo elétrico no dielétrico. Se esse campo for muito intenso, ele pode ionizar as moléculas do dielétrico.

Se alcançar determinado valor de diferença de potencial (ΔV), uma faísca salta entre as placas e descarrega o capacitor, danificando o dielétrico. Tal valor de ΔV é denominado de tensão disruptiva ou tensão explosiva.

Essa tensão depende da forma do capacitor, da espessura e do dielétrico. Por isso, quando compramos um capacitor devemos olhar sua capacitância e sua tensão admissível.

Define-se rigidez elétrica como a máxima intensidade de campo elétrico que um capacitor pode suportar, sem romper o dielétrico. Note que o dielétrico possibilita aplicar uma diferença de potencial maior que aquela aplicada ao capacitor se ele tivesse sido preenchido com ar.

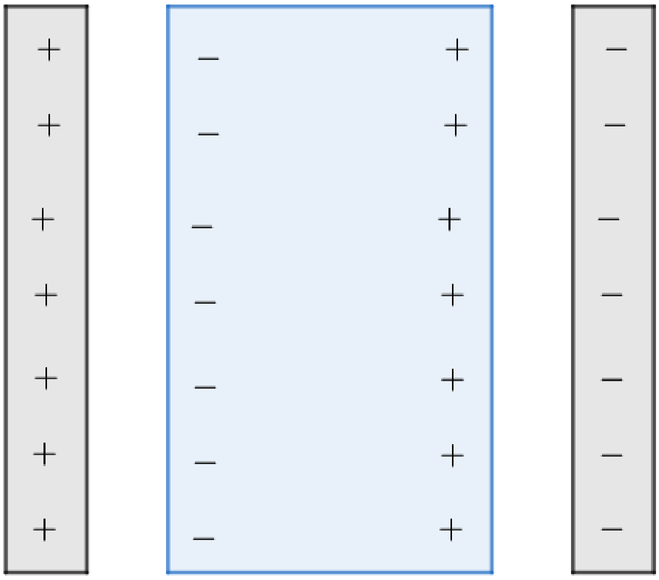
Na tabela abaixo apresentamos alguns valores de rigidez dielétrica para materiais bem conhecidos.

Material	Constante Dielétrica (k)	Rigidez Dielétrica (kV/mm)
Vácuo	1	10^{12}
Ar	1,00059	3
Vidro (Pirex)	5,6	14
Mica	5,4	10-100
Papel	3,7	16
Poliestireno	2,55	24

3.5. Valor da carga ligada

Como vimos na polarização de um dielétrico, podemos dizer que surgem cargas ligadas formando um plano de cargas negativas próximo da placa positiva e um plano de cargas positivas perto da placa negativo do capacitor.

A densidade de cargas ligada em cada lado está relacionada com a constante dielétrica do meio. Vamos considerar um capacitor plano, preenchido com um dielétrico de constante k, como na figura abaixo:



Idealizando que o dielétrico se tornou dois planos infinitos, delgados, próximos as armaduras do capacitor, podemos dizer que o campo interno é dado por:

$$E_{int} = \frac{\sigma_{lig}}{\varepsilon_0}$$

Já o campo elétrico gerado pelas cargas livres nas placas condutoras é expresso por:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Definindo a constante dielétrica como:

$$k = \frac{E_0}{E_{Res}}$$

E dado que o campo elétrico resultante é:

$$E_{res} = E_0 - E_{int}$$

Temos:

$$\frac{E_0}{k} = E_0 - E_{int} \Rightarrow E_{int} = E_0\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

Utilizando que $E_{int} = \sigma_{lig}/\varepsilon_0$ e $E_0 = \sigma/\varepsilon_0$, temos:

$$\frac{\sigma_{lig}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

Portanto:

$$\boxed{\sigma_{lig} = \sigma\left(1 - \frac{1}{k}\right)}$$

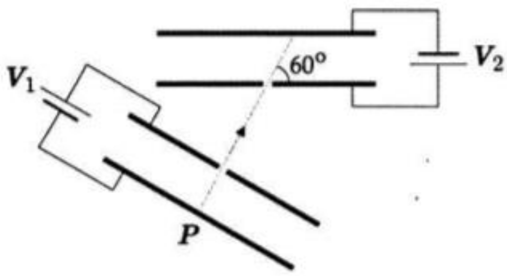
Note que a densidade de carga ligada é sempre menor que a densidade de cargas livres nas placas. Se $k = 1$ (dielétrico é o vácuo), a densidade de carga ligada é nula, como esperado já que não existe dielétrico. Por outro lado, se o meio é preenchido com uma chapa condutora, $k \to \infty$ e $\sigma_{lig} = \sigma$.

Nesse momento, não abordaremos em capacitores os seguintes tópicos: associação tridimensional, associação infinita, associação com elevado grau de simetria, transformação delta-estrela e ponte de Wheatstone. Por efeitos didáticos, apresentaremos esses tópicos juntos com resistores, em Eletrodinâmica.

4. Lista de questões

1. (ITA-2020 – 2ª FASE)

Um capacitor 1 de placas paralelas está submetido a uma d.d.p. V1 = 12 V, e um capacitor 2, idêntico ao primeiro, a uma d.d.p. V2. Um elétron em repouso parte do ponto P, atravessa um orifício no primeiro capacitor e adentra o segundo através de outro orifício, a 60° em relação à placa, conforme indica a figura.

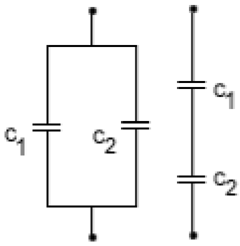


Desconsiderando a ação da gravidade, determine a d.d.p. V2 para que o elétron tangencie a placa superior do capacitor 2.

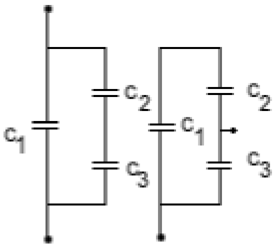
2. (ITA-1972)

Qual dos pares de circuitos abaixo tem a mesma capacitância entre os pontos extremos?

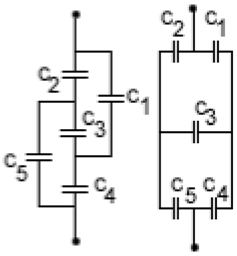
a)



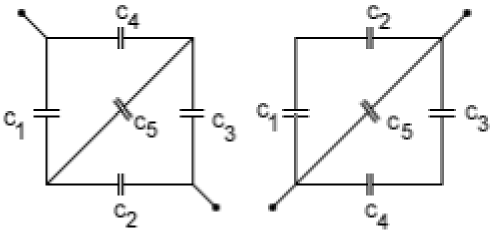
b)



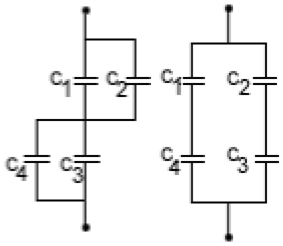
c)



d)

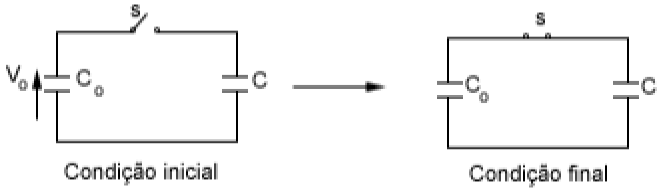


e)



3. (ITA-1978)

Aplica-se, com a chave S aberta, uma tensão V_0 às armaduras do capacitor de capacitância C_0, armazenando no mesmo uma quantidade de energia U_i.



Fechada a chave S, pode-se afirmar que a tensão V no capacitor de capacitância C, e a variação U na energia de natureza elétrica, armazenada nos capacitores, serão dadas por:

a) $V = \frac{V_0 C_0}{C_0 + C}$ e $\Delta U = -\frac{C U_i}{C_0 + C}$

b) $V = \frac{V_0 C_0}{C_0 + C}$ e $\Delta U = +\frac{C U_i}{C_0 + C}$

c) $V = V_0$ e $\Delta U = 0$

d) $V = V_0 / C$ e $\Delta U = -\frac{C U_i}{C_0 + C}$

e) $V = \frac{V_0}{C_0 + C}$ e $\Delta U = -\frac{C_0 U_i}{2(C_0 + C)}$

4. (ITA-1985)

Dispõem-se de capacitores de capacitância $2\ \mu F$ cada um e capazes de suportar até $10^3 V$ de tensão. Deseja-se associá-los em série e em paralelo de forma a ter uma capacitância equivalente a $10\ \mu F$, capaz de suportar $4 \times 10^3\ V$. Isso pode ser realizado utilizando-se:

a) Cinco capacitores.

b) Quatro capacitores.

c) Oitenta capacitores.

d) Cento e vinte capacitores.

e) Vinte capacitores.

5. (ITA-1986)

Quantas vezes podemos carregar um capacitor de $10\ \mu F$, com auxílio de uma bateria de $6{,}0V$, extraindo dela a energia total de $1{,}8 \times 10^4\ J$?

a) $1{,}8 \times 10^4$ vezes.

b) $1{,}0 \times 10^6$ vezes.

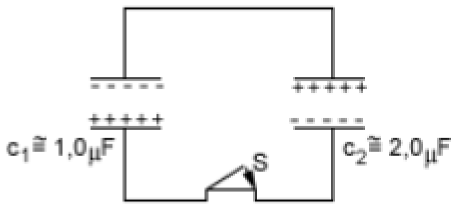
c) $1{,}0 \times 10^8$ vezes.

d) $1{,}0 \times 10^{10}$ vezes.

e) $9{,}0 \times 10^{12}$ vezes.

6. (ITA-1986)

Dois capacitores, um C1 1,0 F e outro C2 2,0 F, foram carregados a uma tensão de 50V. Logo em seguida estes capacitores assim carregados foram ligados conforme mostra a figura.

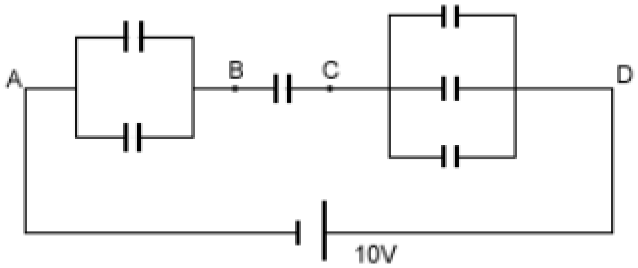


O sistema atingirá o equilíbrio a uma nova diferença de potencial entre as armaduras dos capacitores, com carga Q1 no capacitor C1 e com carga Q2 no capacitor C2, dados respectivamente por:

	(V)	$Q_1(\mu C)$	$Q_2(\mu C)$
a)	zero	50/3	100/3
b)	zero	50	100
c)	50	50	100
d)	50	50/3	100/3
e)	50/3	50/3	100/3

7. (ITA-1990)

No arranjo de capacitores abaixo, onde todos têm 1,0 F de capacitância e os pontos A e D estão ligados a um gerador de 10,0V, pergunta-se: qual é a diferença de potencial entre os pontos B e C?



a) 0,1 V.

b) 10,0 V.

c) 1,8 V.

d) 5,4 V.

e) Outro valor.

8. (ITA-1994)

Um capacitor de $1{,}0\ \mu F$ carregado com $200V$ e um capacitor de $2{,}0\ \mu F$ carregado com $400V$ são conectados após terem sido desligados das baterias de carga, com a placa positiva de um ligada à placa negativa do outro. A diferença de potencial e a perda de energia armazenada nos capacitores serão dadas por:

a) 20 V; 1,0 J.

b) 200 V; 1,2 J.

c) 200 V; 0,12 J.

d) 600 V; 0,10 J.

e) 100 V; 1,2 J.

9. (ITA-1994)

Um capacitor é formado por duas placas metálicas retangulares e paralelas, cada uma de área S e comprimento L, separadas por uma distância d. Uma parte de comprimento X é preenchida com um dielétrico de constante dielétrica k. A capacitância desse capacitor é:

a) $\varepsilon_0 S[l + x(k-1)]/(dl)$

b) $\varepsilon_0 S[l - x(k+l)]/(dl)$

c) $\varepsilon_0 S\left[\frac{1}{x-l} + \frac{k}{x}\right]/d$

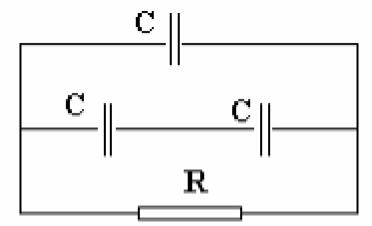
d) $\varepsilon_0 S\left[\frac{1}{l-x}+\frac{k}{x}\right]/d$

e) $\varepsilon_0 S[k(l-x)+x]/(dl)$

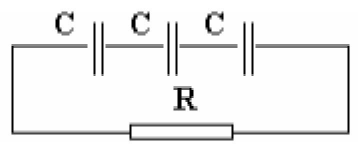
10. (ITA – 1996)

Você tem três capacitores iguais, inicialmente carregados com a mesma carga, e um resistor. O objetivo é aquecer o resistor através da descarga dos três capacitores. Considere então as seguintes possibilidades:

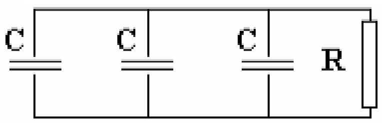
I.



II.



III.



IV. descarregando cada capacitor individualmente, um após o outro, através do resistor.

Assim, se toda energia dissipada for transformada em calor, ignorando as perdas para o ambiente, pode se afirmar que:

a) o circuito I é o que corresponde à maior geração de calor no resistor.

b) o circuito II é o que gera menos calor no resistor.

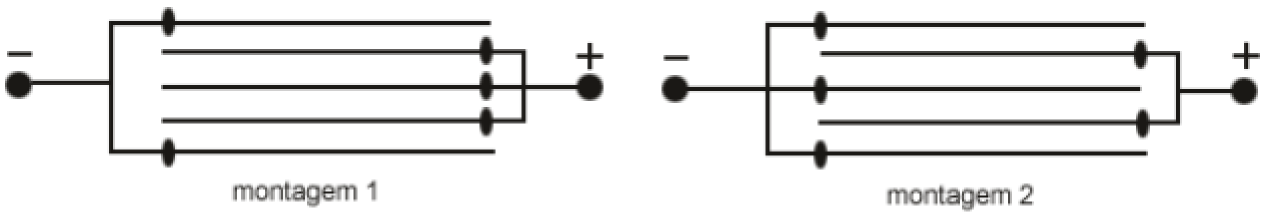
c) o circuito III é o que gera mais calor no resistor.

d) a experiência IV é a que gera mais calor no resistor.

e) todas elas geram a mesma quantidade de calor no resistor.

11. (ITA-1999)

Dois conjuntos de capacitores de placas planas e paralelas são construídos como mostram as montagens 1 e 2 abaixo. Considere que a área de cada placa seja igual a A e que as mesmas estejam igualmente espaçadas de uma distância d. Sendo a permissividade elétrica do vácuo, as capacitâncias equivalentes c_1 e c_2 para as montagens 1 e 2, respectivamente, são:



a) $C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}; C_2 = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}$

b) $C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}; C_2 = \frac{4\varepsilon_0 A}{d}$

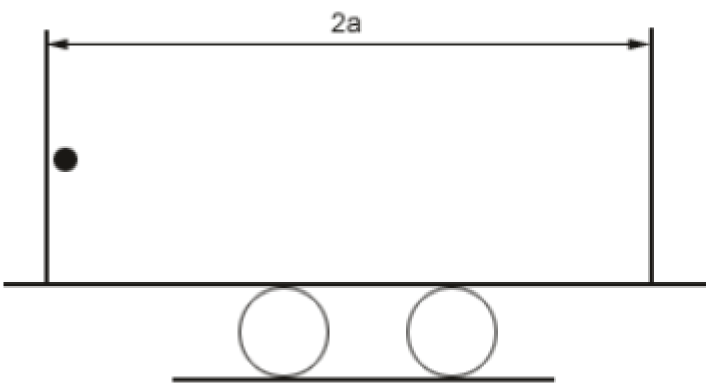
c) $C_1 = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}; C_2 = \frac{4\varepsilon_0 A}{d}$

d) $C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}; C_2 = \frac{2\varepsilon_0 A}{4d}$

e) $C_1 = C_2 = \frac{4\varepsilon_0 A}{d}$

12. (ITA-2001)

Um capacitor plano é formado por duas placas planas paralelas, separadas entre si de uma distância $2a$, gerando em seu interior um campo elétrico uniforme E. O capacitor está rigidamente fixado em um carrinho que se encontra inicialmente em repouso. Na face interna de uma das placas encontra-se uma partícula de massa m e carga $q > 0$ presa por um fio curto e inextensível. Considere que não haja atritos e outras resistências a qualquer movimento e que seja M a massa do conjunto capacitor mais carrinho. Por simplicidade, considere ainda a inexistência da ação da gravidade sobre a partícula. O fio é rompido subitamente e a partícula move-se em direção à outra placa. A velocidade da partícula no momento do impacto resultante, vista por um observador fixo no solo, é:



a) $\sqrt{\frac{4qEMa}{m(M+m)}}$

b) $\sqrt{\frac{2qEMa}{m(M+m)}}$

c) $\sqrt{\frac{qEa}{(m+M)}}$

d) $\sqrt{\frac{4qEma}{M(M+m)}}$

e) $\sqrt{\frac{4qEa}{m}}$

13. (ITA-2002)

Um capacitor de capacitância igual a $0{,}25 \times 10^{-6}\, F$ é carregado até um potencial de $1{,}00 \times 10^{5}\, V$, sendo então descarregado até $0{,}40 \times 10^{5}\, V$ num intervalo de tempo de $0{,}10\, s$, enquanto transfere energia para um equipamento de raios-X. A carga total, Q, e a energia, ε, fornecidas ao tubo de raios-X, são melhor representadas, respectivamente, por:

a) $Q = 0{,}005\, C; \varepsilon = 1250\, J.$

b) $Q = 0{,}025\, C; \varepsilon = 1250\, J.$

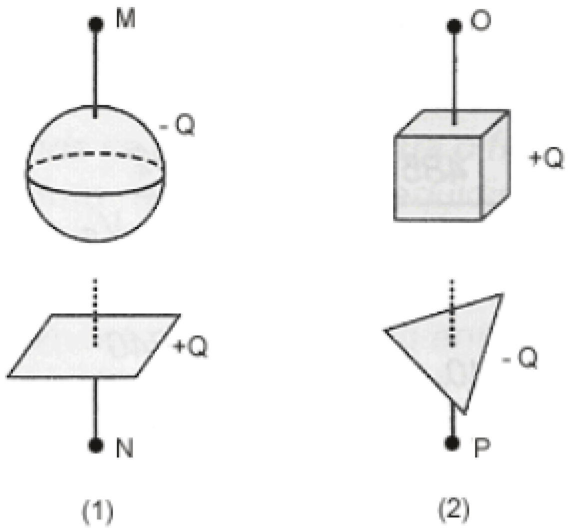
c) $Q = 0{,}025\, C; \varepsilon = 1050\, J.$

d) $Q = 0{,}015\, C; \varepsilon = 1250\, J.$

e) $Q = 0{,}015\, C; \varepsilon = 1050\, J.$

14. (ITA-2003)

A figura mostra dois capacitores, 1 e 2, inicialmente isolados um do outro, carregados com uma mesma carga Q. A diferença de potencial (ddp) do capacitor 2 é a metade da ddp do capacitor 1. Em seguida, as placas negativas dos capacitores são ligadas à Terra e as positivas ligadas uma a outra por meio de um fio metálico, longo e fino.



a) Antes das ligações, a capacitância do capacitor 1 é maior do que a do capacitor 2.

b) Após as ligações, as capacitâncias dos dois capacitores aumentam.

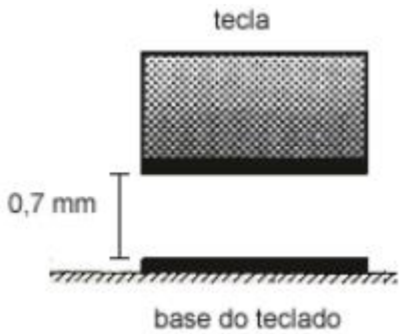
c) Após as ligações, o potencial final em N é maior do que o potencial em O.

d) A ddp do arranjo final entre O e P é igual a 2/3 da ddp inicial no capacitor 1.

e) A capacitância equivalente do arranjo final é igual a duas vezes a capacitância do capacitor 1.

15. (ITA-2005)

Considere o vão existente entre cada tecla de um computador e a base do teclado. Em cada vão existem duas placas metálicas, uma presa na base do teclado e a outra na tecla. Em conjunto, elas funcionam como um capacitor plano de placas paralelas imersas no ar. Quando se aciona a tecla, diminui a distância entre as placas e a capacitância aumenta. Um circuito elétrico detecta a variação da capacitância, indicativa do movimento da tecla. Considere então um dado teclado, cujas placas metálicas têm $40\ mm^2$ de área e $0{,}7\ mm$ de distância inicial entre si. Considere ainda que a permissividade do ar seja $\varepsilon_0 = 9 \times 10^{-12}\ F/m$. Se o circuito eletrônico é capaz de detectar uma variação de capacitância de $0{,}2\ pF$, então qualquer tecla deve ser deslocada de pelo menos:



a) 0,1 mm.

b) 0,2 mm.

c) 0,3 mm.

d) 0,4 mm.

e) 0,5 mm.

16. (ITA-2006)

Algumas células do corpo humano são circundadas por paredes revestidas externamente por uma película com carga positiva e internamente por outra película semelhante, mas com carga negativa de mesmo modulo. Considere que sejam conhecidas: densidade superficial de ambas as cargas $\sigma = \pm\, 0{,}50 \times 10^{-6}\ C/m^2$; $\varepsilon_0 = 9{,}0 \times 10^{-12}\ C^2/N.m^2$; parede com volume de $4{,}0 \times 10^{-16}\ m^3$; constante dielétrica $k = 5{,}0$. Assinale, então, a estimada da energia total acumulada no campo elétrico dessa parede.

a) 0,7 e V.

b) 1,7 e V.

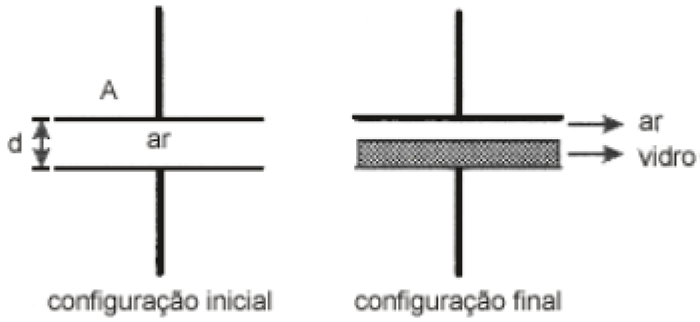
c) 7,0 e V.

d) 17 e V.

e) 70 e V.

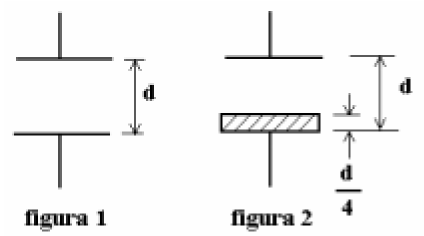
17. (ITA-2006)

A figura mostra um capacitor de placas paralelas de área A separadas pela distância d. Inicialmente o dielétrico entre as placas é o ar e a carga máxima suportada é Q_i. Para que esse capacitor suporte uma carga máxima Q_f foi introduzida uma placa de vidro de constante dielétrica k e espessura $d/2$. Sendo mantida a diferença de potencial entre as placas, calcule a razão entre as cargas Q_f e Q_i.



18. (ITA – 2008)

A figura 1 mostra um capacitor de placas paralelas com vácuo entre as placas, cuja capacitância é C_0. Num determinado instante, uma placa dielétrica de espessura $d/4$ e constante dielétrica K é colocada entre as placas do capacitor, conforme a figura 2. Tal modificação altera a capacitância do capacitor para um valor C_1. Determine a razão C_0/C_1.



a) $\frac{3k+1}{4k}$

b) $\frac{4k}{3k+1}$

c) $\frac{4+12k}{3}$

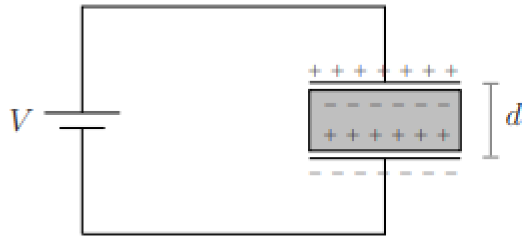
d) $\frac{3}{4+12k}$

e) $\frac{1}{4+12k}$

19. (ITA – 2009)

Na figura, o circuito consiste de uma bateria de tensão V conectada a um capacitor de placas paralelas, de área S e distância d entre si, dispondo de um dielétrico de permissividade elétrica

ε que preenche completamente o espaço entre elas. Assinale a magnitude da carga q induzida sobre a superfície do dielétrico.



a) $q = \varepsilon V d$

b) $q = \varepsilon S V / d$

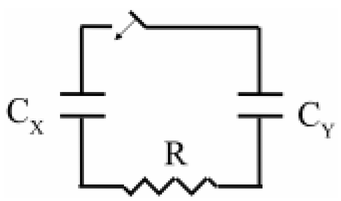
c) $q = (\varepsilon - \varepsilon_0) V d$

d) $q = (\varepsilon - \varepsilon_0) S V / d$

e) $q = (\varepsilon + \varepsilon_0) S V / d$

20. (ITA – 2011)

No circuito ideal da figura, inicialmente aberto, o capacitor de capacitância C_X encontra-se carregado e armazena uma energia potencial elétrica E. O capacitor de capacitância $C_Y = 2C_X$ está inicialmente descarregado. Após fechar o circuito e este alcançar um novo equilíbrio, pode-se afirmar que a soma das energias armazenadas nos capacitores é igual a



a) 0.

b) E/9.

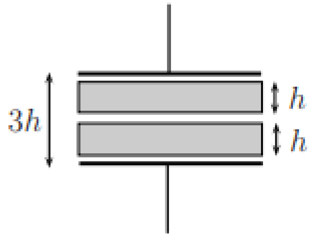
c) E/3.

d) 4E/9.

e) E.

21. (ITA – 2012)

Um capacitor de placas paralelas de área A e distância 3h possui duas placas metálicas idênticas, de espessura h e área A cada uma. Compare a capacitância C deste capacitor com a capacitância C_0 que ele teria sem as duas placas metálicas.



a) $C = C_0$

b) $C > 4C_0$

c) $0 < C < C_0$

d) $C_0 < C < 2C_0$

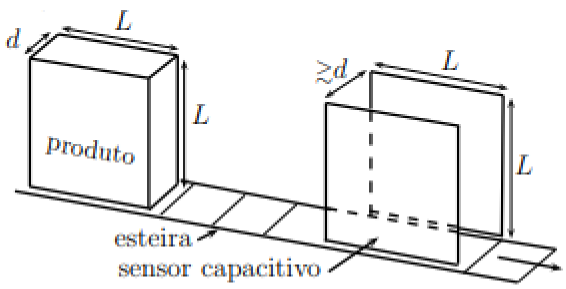
e) $2C_0 < C < 4C_0$

22. (ITA – 2012)

Dois capacitores em série, de capacitância C_1 e C_2, respectivamente, estão sujeitos a uma diferença de potencial V. O Capacitor de capacitância C_1 tem carga Q_1 e está relacionado com C_2 através de $C_2 = xC_1$, sendo x um coeficiente de proporcionalidade. Os capacitores carregados são então desligados da fonte e entre si, sendo a seguir religados com os respectivos terminais de carga de mesmo sinal. Determine o valor de x para que a carga Q_2 final do capacitor de capacitância C_2 seja $Q_1/4$.

23. (ITA – 2013)

Certo produto industrial constitui-se de uma embalagem rígida cheia de óleo, de dimensões $L \times L \times d$, sendo transportado numa esteira que passa por um sensor capacitivo de duas placas paralelas e quadradas de lado L, afastadas entre si de uma distância ligeiramente maior que d, conforme a figura. Quando o produto estiver inteiramente inserido entre as placas, o sensor deve acusar um valor de capacitância C_0. Considere, contudo, tenha havido antes um indesejado vazamento de óleo, tal que a efetiva medida da capacitância seja $C = 3/4C_0$. Sendo dadas as respectivas constantes dielétricas do óleo, $\kappa = 2$; e do ar, $\kappa_{ar} = 1$, e desprezando o efeito da constante dielétrica da embalagem, assinale a percentagem do volume de óleo vazado em relação ao seu volume original.



a) 5%

b) 50%

c) 100%

d) 10%

e) 75%

24. (ITA – 2014)

Um capacitor de placas planas paralelas de área A, separadas entre si por uma distância inicial r_0 muito menor que as dimensões dessa área, tem sua placa inferior fixada numa base isolante e a superior suspensa por uma mola (figura (1)). Dispondo-se uma massa m sobre a placa superior, resultam pequenas oscilações de período T do conjunto placa superior + massa m. Variando-se m, obtém-se um gráfico de T^2 versus m, do qual, após ajuste linear, se extrai o coeficiente angular α. A seguir, após remover a massa m da placa superior e colocando entre as placas um meio dielétrico sem resistência ao movimento, aplica-se entre elas uma diferença de potencial V e monitora-se a separação r de equilíbrio (figuras (2) e (3)). Nestas condições, a permissividade ε do meio entre as placas é

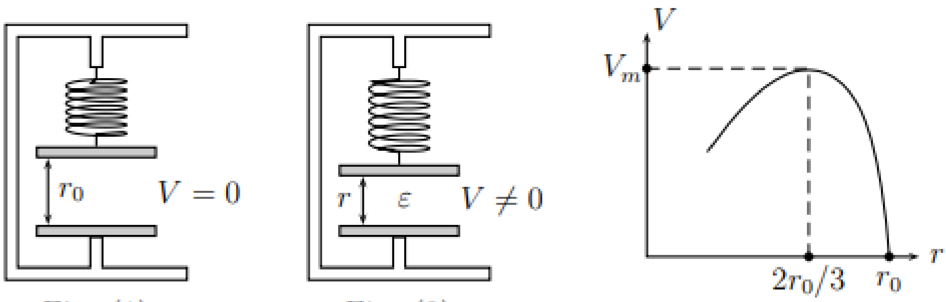


Fig. (1) Fig. (2) Fig. (3)

a) $32\pi^2 r_0^3/(27\alpha A V_m^2)$.

b) $16\pi^2 r_0^3/(27\alpha A V_m^2)$.

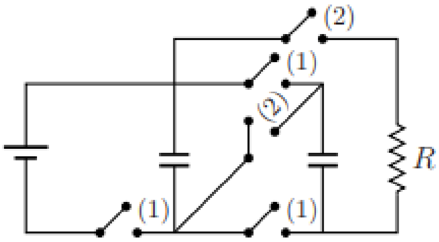
c) $8\pi^2 r_0^3/(27\alpha A V_m^2)$.

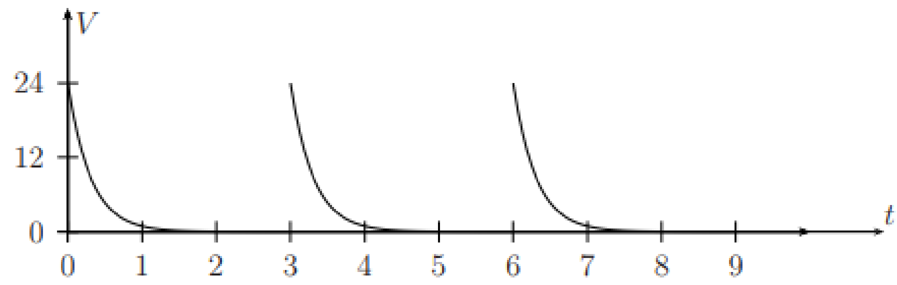
d) $4\pi^2 r_0^3/(\alpha A V_m^2)$.

e) $16\pi^2 r^3/(27\alpha A V^2)$.

25. (ITA – 2016)

No circuito da figura há três capacitores iguais, com C = 1000 µF, inicialmente descarregados. Com as chaves (2) abertas e as chaves (1) fechadas, os capacitores são carregados. Na sequência, com as chaves (1) abertas e as chaves (2) fechadas, os capacitores são novamente descarregados e o processo se repete. Com a tensão no resistor R variando segundo o gráfico da figura, a carga transferida pelos capacitores em cada descarga é igual a





a) $4{,}8 \times 10^{-2} C$

b) $2{,}4 \times 10^{-2} C$

c) $1{,}2 \times 10^{-2} C$

d) $0{,}6 \times 10^{-2} C$

e) $0{,}3 \times 10^{-2} C$

26. (ITA – 2017)

Carregada com um potencial de $100\,V$, flutua no ar uma bolha de sabão condutora de eletricidade, de $10\,cm$ de raio e $3{,}3 \times 10^{-6}\,cm$ de espessura. Sendo a capacitância de uma esfera condutora no ar proporcional ao seu raio, assinale o potencial elétrico da gota esférica formada após a bolha estourar.

a) $6\,kV$

b) $7\,kV$

c) $8\,kV$

d) $9\,kV$

e) $10\,kV$

27. (ITA – 2018)

Dois capacitores em paralelo de igual capacitância C estão ligados a uma fonte cuja diferença de potencial é U. A seguir, com essa fonte desligada, introduz-se um dielétrico de constante dielétrica k num dos capacitores, ocupando todo o espaço entre suas placas. Calcule:

(a) a carga livre que flui de um capacitor para outro;

(b) a nova diferença de potencial entre as placas dos capacitores;

(c) a variação da energia total dos capacitores entre as duas situações.

28. (IME – 1997)

Um bloco de material isolante elétrico, de peso $5\ N$, é abandonado do repouso na situação da figura abaixo. Na queda, o bloco puxa a placa metálica inferior, P_2, de um capacitor enquanto a placa superior, P_1, permanece fixa. Determine a tensão elétrica no capacitor quando a mola atinge a compressão máxima.

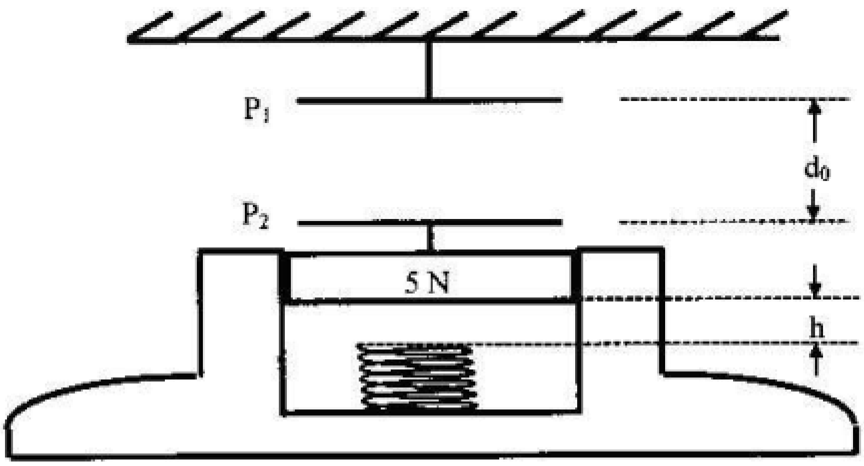
Dados:
constante da mola: $30\ N/m$

carga no capacitor: $q = 18\ \mu C$

capacitância inicial: $C_0 = 9\ \mu F$

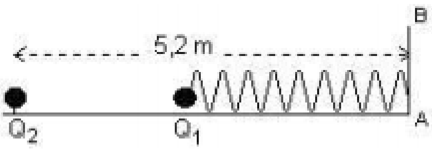
distância inicial entre as placas: $d_0 = 32\ cm$

distância inicial entre o bloco e a mola: $h = 8\ cm$



29. (IME – 1998)

No extremo de uma mola feita de material isolante elétrico está presa uma pequena esfera metálica com carga Q_1. O outro extremo da mola está preso no anteparo AB. Fixa-se uma outra esfera idêntica com carga Q_2, à distância de $5{,}2\ m$ do anteparo, conforme a figura, estando ambas as esferas e a mola colocadas sobre um plano de material dielétrico, perfeitamente liso. Em consequência, a mola alonga-se 20% em relação ao seu comprimento original, surgindo entre as esferas uma força de $0{,}9\ N$.



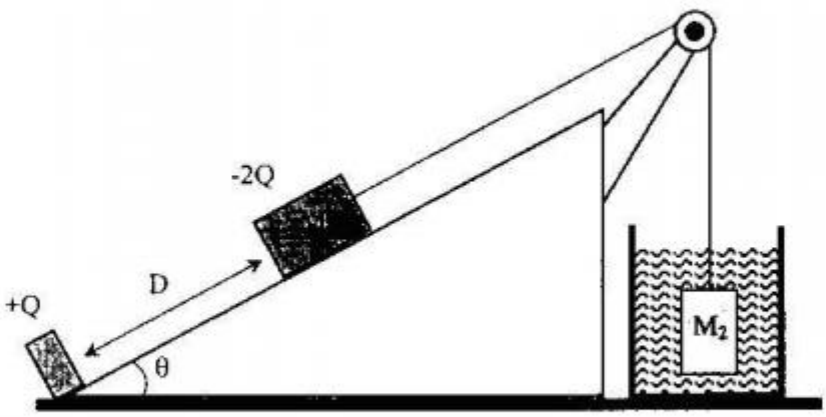
Determine qual deve ser o valor de Q_2 para que a mola se alongue 120% em relação ao seu comprimento original.

Dados: constante eletrostática do ar 9×10^9 (unidades do SI)

$Q_1 = +40\ \mu C$ e $Q_2 = -40\ \mu C$.

30. (IME – 2000)

Na base de um plano inclinado com ângulo θ há uma carga puntiforme $+Q$ fixa. Sobre um plano inclinado a uma distância D há uma massa M_1 de dimensões desprezíveis e carga $-2Q$. O coeficiente de atrito entre M_1 e o plano é μ. Um fio ideal preso em M_1 passa por uma roldana ideal e suspende um corpo de volume V_2 e densidade ρ_2,totalmente imerso em um fluido de densidade ρ_A. Considere a aceleração da gravidade como g e a constante eletroestática do meio onde se encontra o plano K. Determine, em função dos dados literais fornecidos, a expressão do valor mínimo da densidade do fluido ρ_A para que M_1 permaneça imóvel sobre o plano inclinado.



31. (IME – 2001)

Sobre um plano inclinado sem atrito e com ângulo $\alpha = 30°$, ilustrado na figura abaixo, encontram-se dois blocos carregados eletricamente com cargas $q_1 = +2 \times 10^{-3} C$ e $q_2 = +\frac{1}{9} \times 10^{-4} C$. Sabe-se que o bloco 1 está fixado na posição A e que o bloco 2 é móvel e possui massa $m_2 = 0{,}1\ kg$. Num certo instante, o bloco 2 encontra-se a uma altura $h = 8\ m$ e desloca-se com velocidade linear $v = \sqrt{90} \cong 9{,}49\ m/s$, como mostra a figura abaixo. Determine:

a) as distâncias mínima e máxima entre os dois blocos;

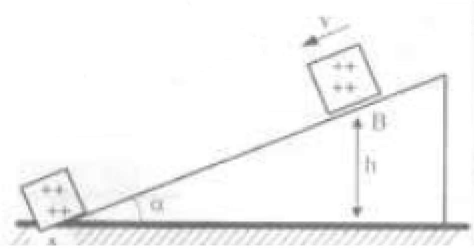
b) a máxima velocidade linear que o bloco 2 atinge.

Obs: para fins de cálculo, considere os blocos puntiformes.

Dados:

Aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$

Constante eletrostática $K = 9 \times 10^9 Nm^2/C^2$



32. (IME – 2002)

A figura ilustra a situação inicial, em que dois blocos, considerados puntiformes e carregados eletricamente com cargas $Q_A = +5 \times 10^{-5} C$ e $Q_B = +4 \times 10^{-4} C$, encontram-se afastados pela distância z. O bloco A desloca-se com velocidade $v_i = 5\ m/s$ e dista x do anteparo. O bloco B encontra-se afixado na parede e o conjunto mola-anteparo possui massa desprezível. Sabendo que a superfície entre o bloco B e o anteparo não possui atrito, e que na região à esquerda do anteparo o coeficiente de atrito dinâmico da superfície é $\mu_C = 0{,}5$. Determine:

a) a velocidade com que o bloco A atinge o anteparo.

b) a compressão máxima y da mola, considerando para efeito de cálculo que $z + x + y \cong z + x$.

c) a energia dissipada até o momento em que a mola atinge sua deformação máxima.

Dados:

Constante eletrostática $K = 9 \times 10^9 N.m^2/C^2$.

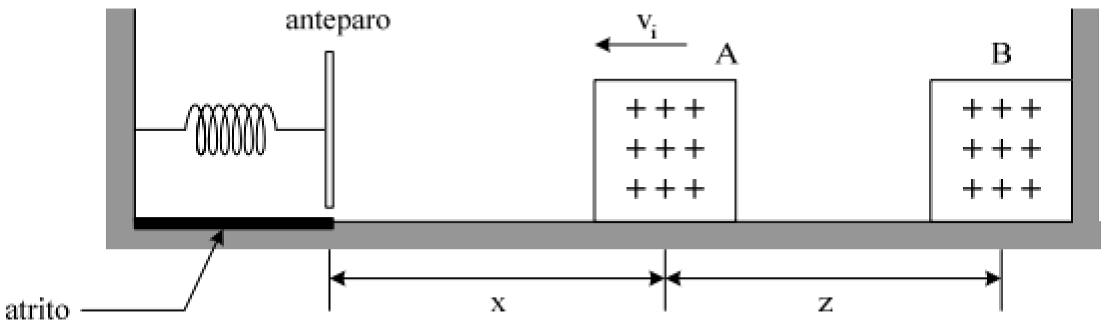
Constante de elasticidade da mola = 52 N/m.

Distância z entre os dois blocos = 9 m.

Distância x entre o bloco A e o anteparo = 11 m.

Massa do bloco A = 2 kg.

Aceleração da gravidade $g = 10 m/s^2$.



33. (IME – 2003)

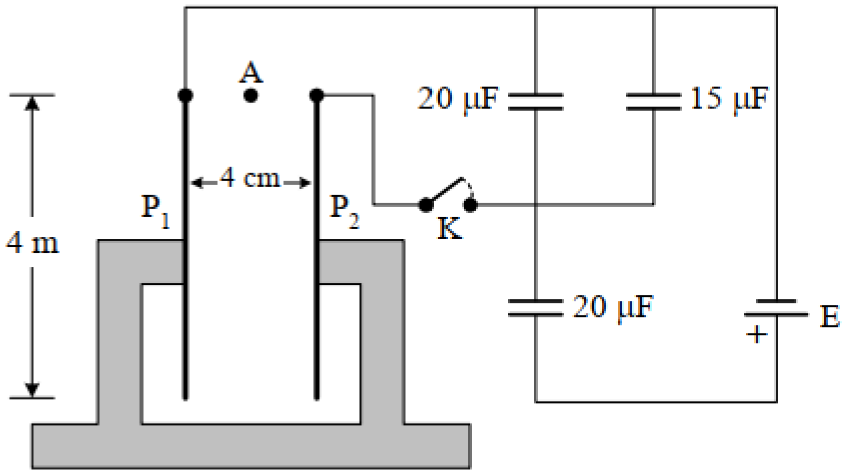
A figura abaixo mostra duas placas metálicas retangulares e paralelas, com 4 m de altura e afastadas de 4 cm, constituindo um capacitor de $5 \mu F$. No ponto A, equidistante das bordas superiores das placas, encontra-se um corpo puntiforme com 2g de massa e carregado com $+4\ \mu C$.

O corpo cai livremente e após 0,6 s de queda livre a chave K é fechada, ficando as placas ligadas ao circuito capacitivo em que a fonte E tem $60\ V$ de tensão. Determine:

1. com qual das placas o corpo irá se chocar (justifique sua resposta);

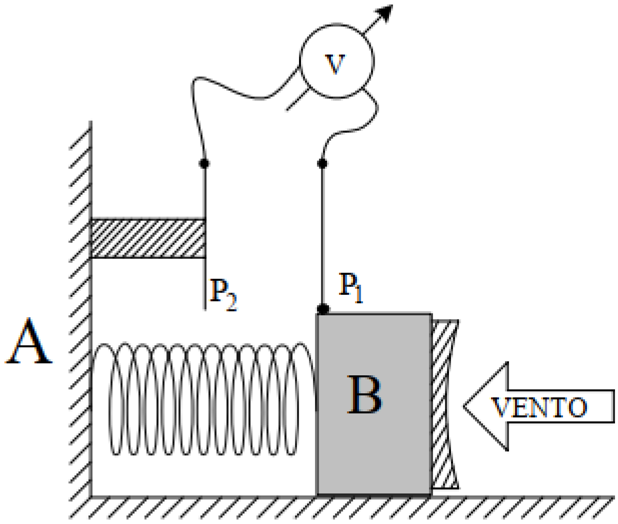
2. a que distância da borda inferior da placa se dará o choque.

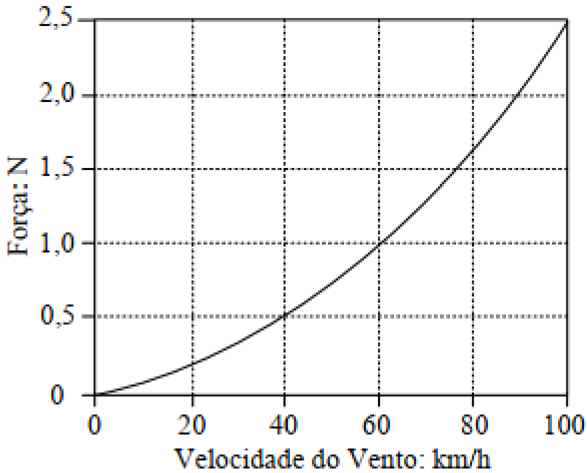
Dado: aceleração da gravidade: $g = 10\ m/s^2$.



34. (IME – 2008)

Um bloco B, de material isolante, sustenta uma fina placa metálica P_1, de massa desprezível, distante 8 cm de outra placa idêntica, P_2, estando ambas com uma carga $Q = 0{,}12\ \mu C$. Presa à parede A e ao bloco está uma mola de constante $k = 80\ N/m$, inicialmente não deformada. A posição de equilíbrio do bloco depende da força exercida pelo vento. Esta força é uma função quadrática da velocidade do vento, conforme apresenta o gráfico abaixo. Na ausência do vento, a leitura do medidor de tensão ideal é de 16 mV. Calcule a velocidade do vento quando o bloco estiver estacionário e a leitura do medidor for de 12 mV. Despreze o atrito.





35. (IME – 2009)

Um capacitor de capacitância inicial C_0 tem suas placas metálicas mantidas paralelas e afastadas de uma distância d pelos suportes e conectadas a uma fonte de V_0 volts, conforme a figura (SITUAÇÃO 1). No interior de tal capacitor, encostada às placas, se encontra uma mola totalmente relaxada, feita de material isolante e massa desprezível. Em determinado instante a fonte é desconectada e, em seguida, a placa superior é liberada dos suportes, deslocando-se no eixo vertical. Considerando que a placa superior não entre em oscilação após ser liberada e que pare a uma distância L da placa inferior (SITUAÇÃO 2), determine:

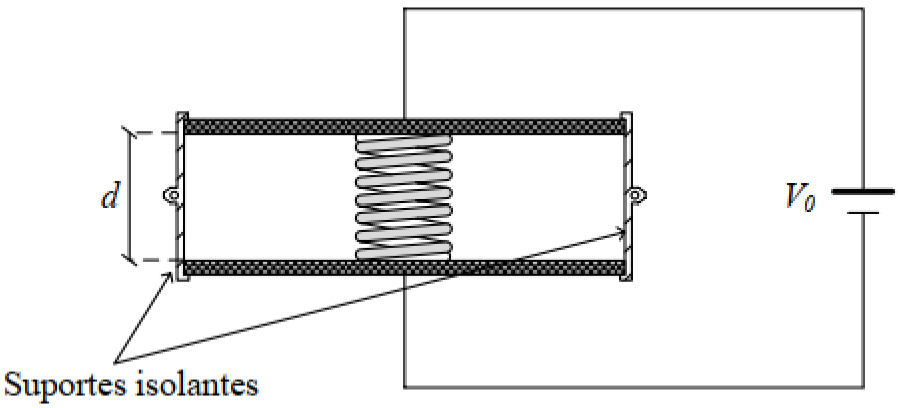
a) a energia total em cada uma das duas situações, em função de C_0, V_0, d e L;

b) a constante elástica da mola em função de C_0, V_0 e d que resulte em um afastamento de $L = d/2$ entre as placas do capacitor.

Observações:

• Despreze o peso da placa superior, o efeito de borda no capacitor e o efeito da mola sobre a capacitância.

• Os suportes são de material isolante



36. (IME – 2012)

Um capacitor de placas paralelas, entre as quais existe vácuo, está ligado a uma fonte de tensão. Ao se introduzir um dielétrico entre as placas,

a) a carga armazenada nas placas aumenta.

b) o campo elétrico na região entre as placas aumenta.

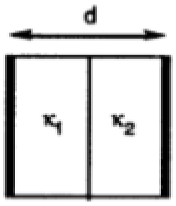
c) a diferença de potencial entre as placas aumenta.

d) a capacitância diminui.

e) a energia armazenada no capacitor diminui.

37. (OBF – 1ª fase – 2010)

Um capacitor é construído a partir de duas placas de metal quadrada de área L^2, separadas por uma distância d. Numa das metades do espaço interno, preenche-se com material de constante dielétrica k_1 e na outra metade com material de constante dielétrica k_2. Calcule a capacitância deste capacitor, assumindo que seu valor é C_0 na situação em que não há material dentro das placas.



a) $5C_0k_1k_2/(k_1 + k_2)$

b) $C_0(k_1 + k_2)$

c) $C_0k_1k_2/(k_1 + k_2)$

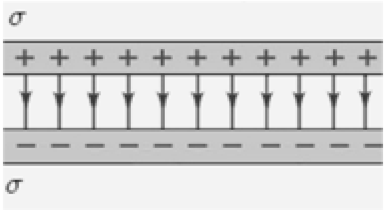
d) $2C_0k_1k_2/(k_1 + k_2)$

e) $C_0(k_1 + k_2)/2$

38. (OBF – 1ª fase – 2015)

Considere que cada uma das placas paralelas de um capacitor possua uma área de $2000\ cm^2$ e que a distância entre as placas seja de $1{,}0\ cm$. Com o capacitor conectado a uma fonte de alimentação o mesmo é carregado até atingir uma diferença de potencial de $3000\ V$. Depois de desconectado da fonte de alimentação, é inserida uma camada de material isolante entre as placas. Verificou-se que a diferença de potencial diminuiu para $1000\ V$. Qual a capacitância depois de inserido o material dielétrico?

Considere a permissividade elétrica no vácuo: $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ F/m$.



a) $300\ pF$

b) $431\ pF$

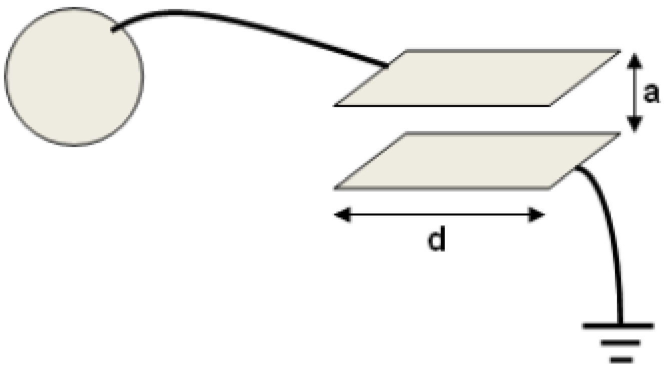
c) $531\ pF$

d) $600\ pF$

e) $750\ pF$

39. (OBF – 3ª fase – 2009)

Duas placas condutoras, planas, paralelas, quadradas de lado d, separadas por uma distância a muito menor que d, estão dispostas isoladamente formando um capacitor plano. Uma das placas é aterrada e a outra é ligada por fio condutor a uma esfera condutora de raio R. A figura 6 mostra um esboço desse sistema.



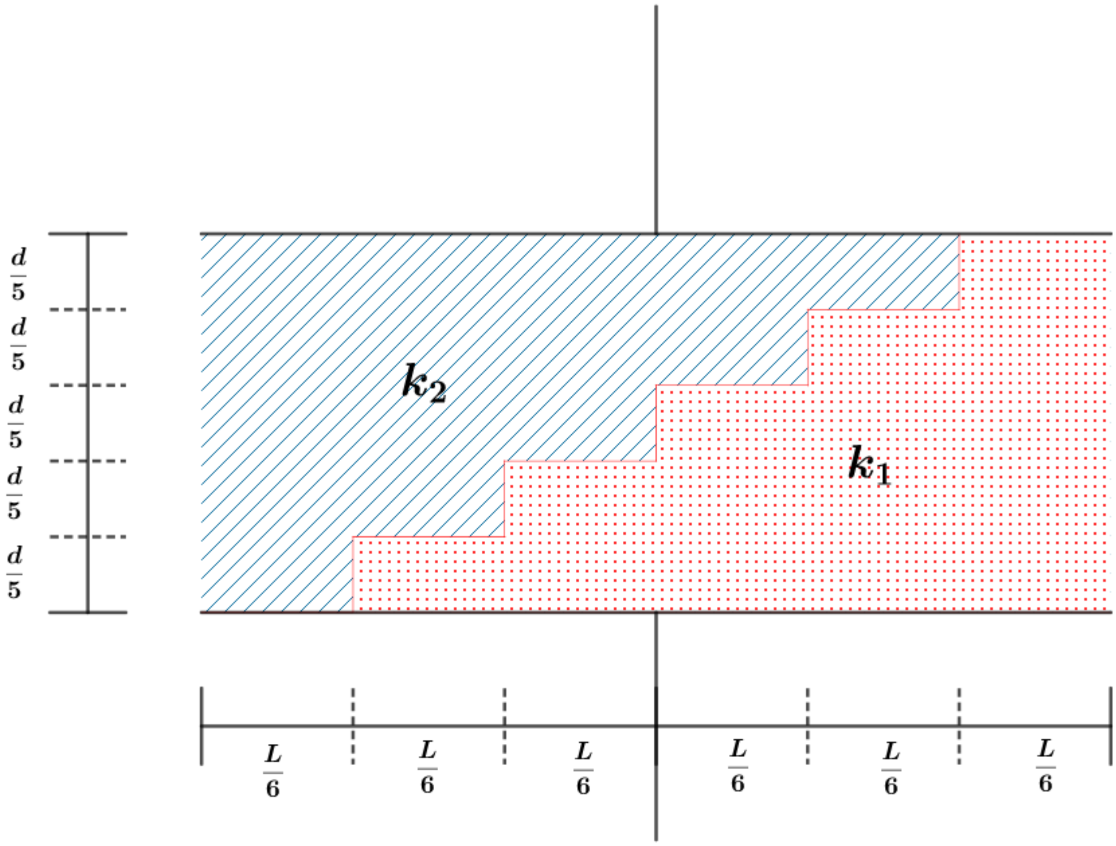
Uma carga elétrica Q, positiva, foi colocada na placa superior do capacitor. Na situação de equilíbrio eletrostático, considere o meio entre as placas como sendo o vácuo, que os efeitos de borda são desprezíveis, bem como a intensidade do campo elétrico de um elemento (esfera, capacitor ou terra) sobre qualquer outro. Determine:

a) A fração de Q que permanece na placa superior.

b) A intensidade do campo elétrico a uma distância 2R do centro da esfera. Expresse seus resultados como função das grandezas citadas no enunciado e constantes universais quando for o caso.

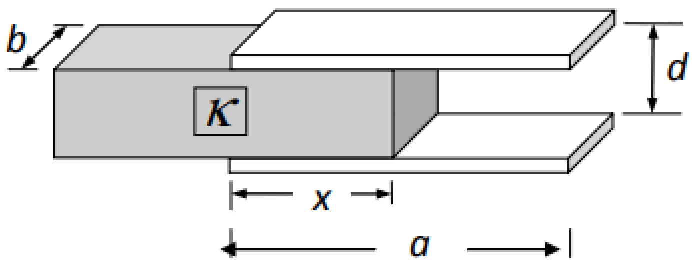
40. (Autoria própria)

Considere o capacitor de placas paralelas da figura abaixo, onde a área das placas é A e a distância entre elas é d. O espaço interno é preenchido com dois dielétricos de tal forma que $k_2 = 2k_1$. Calcule a capacitância desse conjunto em função de k_1, ε_0, A e d.



41. (Tipler – modificada)

Um capacitor de placas paralelas retangulares com comprimento a e largura b possui um dielétrico de largura b parcialmente inserido entre as placas (distância x), conforme mostrado na figura abaixo.



a) Determine a capacitância em função de x. Despreze os efeitos de bordas. Verifique o resultado quando $x = 0$ e $x = a$.

Considere que o capacitor foi carregado com carga Q.

b) Qual é a energia armazenada no capacitor?

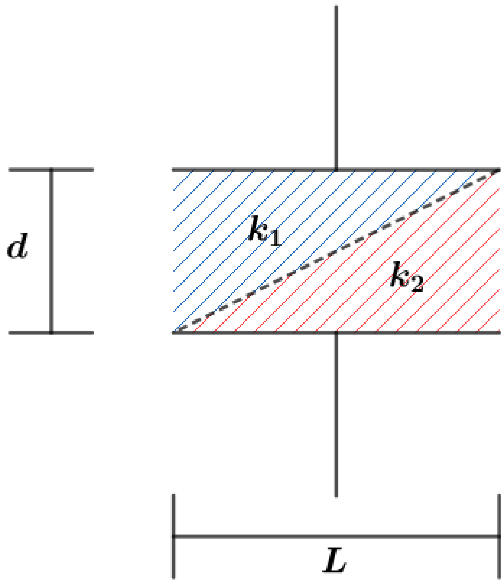
c) Uma vez que a energia do capacitor diminui quando x aumenta, o campo elétrico deve realizar um trabalho positivo sobre o dielétrico, o que significa que deve existir uma força elétrica puxando-o para dentro. Calcule a força examinando como a energia varia com x.

d) Expresse a força em função da capacitância e da tensão.

e) De onde vem essa força?

42. (Desafio)

Considere o capacitor de placas paralelas, de área L^2, preenchido com dois dielétricos da seguinte forma:



Determine a capacitância desse capacitor.

5. Gabarito sem comentários

1) 9V
2) C
3) A
4) C
5) C
6) E
7) D
8) C
9) A
10) A
11) C
12) A
13) E
14) D
15) B
16) C
17) $\frac{Q_f}{Q_i} = \frac{2k}{k+1}$
18) A
19) D
20) C
21) E
22) $x = 1/7$
23) B

24) A

25) C

26) E

27) a) $\Delta Q = UC\left(\frac{k-1}{k+1}\right)$, b) $U' = \frac{2}{1+k} \cdot U$ e c) $\Delta E = CU^2\left(\frac{1-k}{1+k}\right)$

28) $V = 5V$

29) -135 μC

30) $\rho_A = \rho_2 - \frac{1}{V_2 g}\left(M_1 g(sen\theta + \mu cos\theta) + \frac{2KQ^2}{D^2}\right)$

31) a) $d_{min} = 10\ m$ e $d_{máx} = 40\ m$ b) $10\ m/s$

32) a) 6 m/s b) $y = 1\ m$ c) $10\ J$

33) a) placa negativa b) 0,8 m

34) 80 km/h

35) a) $E_{inicial} = \frac{C_0 V_0^2}{2}$ $E_{final} = \frac{C_0 V_0^2 (L+d)}{4d}$ b) $k = \frac{C_0 V_0^2}{d^2}$

36) A

37) D

38) C

39) a) $Q_{Sup} = \frac{Q}{1+\frac{4\pi Ra}{d^2}}$ b) $E = \frac{aQ}{4\varepsilon_0 R(d^2+4\pi Ra)}$

40) $\frac{2131}{1512} \cdot \frac{k_1 \varepsilon_0 A}{d}$

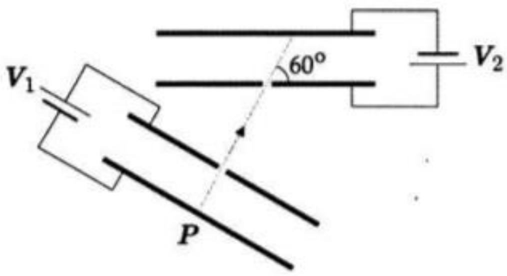
41) a) ver comentário. b) $E_P = \frac{d \cdot Q^2}{2\varepsilon_0 \cdot b[(k-1)x+a]}$ c) $F = \frac{d \cdot Q^2}{2\varepsilon_0 \cdot b} \frac{(k-1)}{((k-1)x+a)^2}$ d) $F = \frac{(k-1)b\varepsilon_0}{2d} \cdot (\Delta V)^2$ e) ver comentário.

42) $\frac{k_1 k_2 \varepsilon_0 L^2}{(k_1-k_2)d} \ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right)$

6. Lista de questões comentadas

1. (ITA-2020 – 2ª FASE)

Um capacitor 1 de placas paralelas está submetido a uma d.d.p. V1 = 12 V, e um capacitor 2, idêntico ao primeiro, a uma d.d.p. V2. Um elétron em repouso parte do ponto P, atravessa um orifício no primeiro capacitor e adentra o segundo através de outro orifício, a 60° em relação à placa, conforme indica a figura.



Desconsiderando a ação da gravidade, determine a d.d.p. V2 para que o elétron tangencie a placa superior do capacitor 2.

Comentários:

Questão difícil.

Primeiramente devemos notar qual o sentido do campo elétrico nos capacitores.

No primeiro circuito, ao analisarmos ele em sentido horário (por exemplo), notamos que a bateria vai do – para o +, logo o capacitor deve ser oposto (o potencial de um sistema fechado sempre se soma em zero), indo do + para o -. A placa de cima é positiva, fazendo um campo elétrico para baixo, e consequentemente acelerando o elétron. Da mesma forma, o circuito de cima desacelera o elétron, de modo que quando o mesmo atinge seu pico ($v_y = 0$), temos que ele tangencia a placa.

O campo elétrico em C_1 vale:

$$E = \frac{V_1}{d}$$

Logo, a aceleração do elétron vale:

$$a = \frac{Ee}{m} = \frac{V_1 e}{md}$$

A velocidade de saída por ser calculada por Torrichelli:

$$V^2 = 0 + 2ad \rightarrow V = \sqrt{\frac{2V_1 e}{m}}$$

No capacitor 2 o elétron basicamente entra em um lançamento oblíquo.

A velocidade vertical horizontal do elétron vale:

$$V_y = Vsen\theta = \sqrt{\frac{2V_1 e}{m}} sen\theta$$

A aceleração em C2 é:

$$a = \frac{V_2 e}{md}$$

Por Torrichelli:

$$0 = V_y^2 - 2ad$$

$$\frac{2V_1 e}{m} sen^2\theta = 2\frac{V_2 e}{m}$$

$$V_2 = V_1 sen^2\theta = 12 \cdot \frac{3}{4} = 9V$$

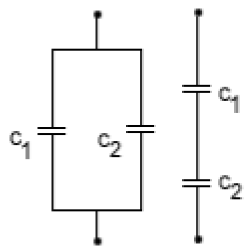
Gabarito: 9V

---

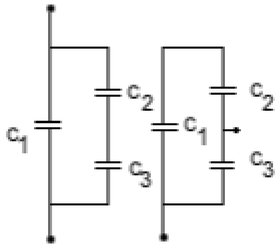
2. (ITA-1972)

Qual dos pares de circuitos abaixo tem a mesma capacitância entre os pontos extremos?

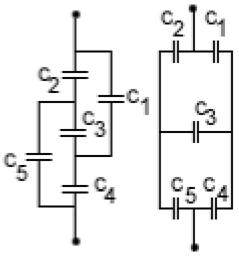
a)



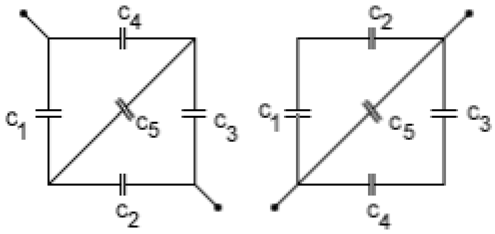
b)



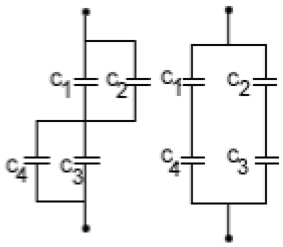
c)



d)



e)



Comentários:

a) **Incorreta**. No primeiro e segundo circuito temos capacitores em paralelo e série respectivamente.

$$C_{eq}(1) = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$
$$C_{eq}(2) = C_1 + C_2$$

b) **Incorreta**.
Primeiro circuito:

Capacitores C_2 e C_3 em série: $C_* = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$

Capacitores C_* e C_1 em paralelo: $C_{eq}(1) = C_1 + C_* = \frac{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1}{C_2 + C_3}$

Segundo circuito:

Capacitores C_1 e C_2 em : $C_* = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$
Capacitores C_* e C_3 em paralelo: $C_{eq}(1) = C_1 + C_* = \frac{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1}{C_1 + C_2}$

c) **Correta**. Note que os circuitos são idênticos, basta rearranjar os fios, ambos são pontes de Wheatstone.

d) **Incorreta**. No primeiro circuito trata-se de circuito onde precisamos usar a transformação delta-estrela e no segundo circuito, temos apenas $(C_1 + C_2)\backslash\backslash C_5 \backslash\backslash (C_3 + C_4)$. Claramente, temos combinações diferentes.

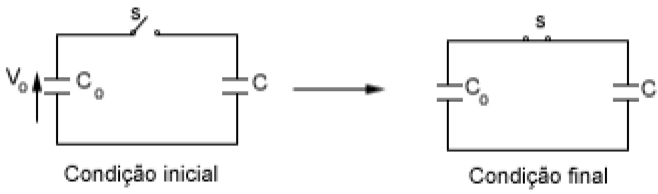
e) **Incorreta.** Na primeira temos $(C_1\backslash\backslash C_2) + (C_3\backslash\backslash C_4)$. Na segunda $(C_1 + C_4)\backslash\backslash(C_2 + C_3)$. Notamos que se trata de associações diferentes.

Gabarito: C

---

3. (ITA-1978)

Aplica-se, com a chave S aberta, uma tensão V_0 às armaduras do capacitor de capacitância C_0, armazenando no mesmo uma quantidade de energia U_i.



Fechada a chave S, pode-se afirmar que a tensão V no capacitor de capacitância C, e a variação U na energia de natureza elétrica, armazenada nos capacitores, serão dadas por:

a) $V = \frac{V_0 C_0}{C_0 + C}$ e $\Delta U = -\frac{C U_i}{C_0 + C}$

b) $V = \frac{V_0 C_0}{C_0 + C}$ e $\Delta U = +\frac{C U_i}{C_0 + C}$

c) $V = V_0$ e $\Delta U = 0$

d) $V = V_0/C$ e $\Delta U = -\frac{C U_i}{C_0 + C}$

e) $V = \frac{V_0}{C_0 + C}$ e $\Delta U = -\frac{C_0 U_i}{2(C_0 + C)}$

Comentários:

$$Q_0 = Q_{eq} = V_0 C_0$$

$$U_i = \frac{C_0 V_0^2}{2}$$

$$V_{eq} = \frac{Q_{eq}}{C_0 + C} = \frac{V_0 C_0}{C_0 + C}$$

$$\Delta E_p = \frac{C_{eq} V_{eq}^2}{2} - \frac{C_0 V_0^2}{2} = \left(\frac{C + C_0}{2}\right)\frac{(V_0^2 C_0^2)}{(C_0 + C)^2} - \frac{C_0 V_0^2}{2} = \frac{V_0^2 C_0^2}{2(C_0 + C)} - \frac{C_0 V_0^2}{2}$$

$$\Delta E_p = -\frac{C_0 C}{2(C_0 + C)} V_0^2 = -\frac{C}{C_0 + C} U_i$$

Gabarito: A

---

4. (ITA-1985)

Dispõem-se de capacitores de capacitância $2\ \mu F$ cada um e capazes de suportar até $10^3 V$ de tensão. Deseja-se associá-los em série e em paralelo de forma a ter uma capacitância equivalente a $10\ \mu F$, capaz de suportar $4 \times 10^3\ V$. Isso pode ser realizado utilizando-se:

a) Cinco capacitores.

b) Quatro capacitores.

c) Oitenta capacitores.

d) Cento e vinte capacitores.

e) Vinte capacitores.

Comentários:

Deveremos ter 4 conjuntos de capacitores em série e nesses conjuntos os capacitores estarão em paralelo. Quando os capacitores são colocados em paralelo, eles estão submetidos à mesma tensão, logo essa configuração assegura que a tensão máxima suportado pelos 4 conjuntos seja $4 \cdot 10^3\ V$.

Assumindo que cada conjunto possui n capacitores, temos:

$$\frac{nC}{4} = C_{eq}$$

$$n \cdot \frac{2}{4} = 10$$

$$n = 20$$

Como temos 4 conjuntos desse tipo, ao todo são 80 capacitores.

Gabarito: C

---

5. (ITA-1986)

Quantas vezes podemos carregar um capacitor de $10\ \mu F$, com auxílio de uma bateria de $6{,}0V$, extraindo dela a energia total de $1{,}8 \times 10^4\ J$?

a) $1{,}8 \times 10^4$ vezes.

b) $1{,}0 \times 10^6$ vezes.

c) $1{,}0 \times 10^8$ vezes.

d) $1{,}0 \times 10^{10}$ vezes.

e) $9{,}0 \times 10^{12}$ vezes.

Comentários:

A energia total que um capacitor é capaz de armazenar é dada por:

$$U_{cap} = \frac{1}{2} C V^2$$

Assim, o número de cargas para o capacitor deve ser:

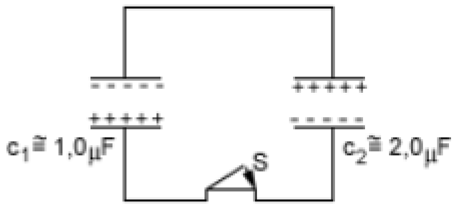
$$n_{cargas} = \frac{U_{disponivel}}{U_{cap}} = \frac{1{,}8 \cdot 10^4}{\frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \cdot 36} = 1{,}0 \cdot 10^8$$

Gabarito: C

---

6. (ITA-1986)

Dois capacitores, um C1 1,0 F e outro C2 2,0 F, foram carregados a uma tensão de 50V. Logo em seguida estes capacitores assim carregados foram ligados conforme mostra a figura.



O sistema atingirá o equilíbrio a uma nova diferença de potencial entre as armaduras dos capacitores, com carga Q1 no capacitor C1 e com carga Q2 no capacitor C2, dados respectivamente por:

	(V)	$Q_1(\mu C)$	$Q_2(\mu C)$
a)	zero	50/3	100/3
b)	zero	50	100
c)	50	50	100

d)	50	50/3	100/3
e)	50/3	50/3	100/3

Comentários:

Calculando as cargas iniciais nos capacitores:

Capacitor 1 –

$$q_{0,1} = C_1 V = 50\ C$$

Capacitor 2 –

$$q_{0,2} = C_2 V = 100\ C$$

Sejam q_1 e q_2 as cargas nos capacitores 1 e 2 nos seus estados finais.

Os capacitores estão em paralelo, logo a tensão sobre eles deve ser a mesma:

$$V_1 = V_2$$

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} \quad (eq. 1)$$

Note que a carga em cada ramo do circuito deve ser conservada, além disso os capacitores estão com polaridades opostas, logo:

$$q_{eq} = 100 - 50$$

$$q_2 + q_1 = 50 \quad (eq. 2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$q_1 = \frac{50}{3}\ C$$

$$q_2 = \frac{100}{3}\ C$$

Calculando a tensão:

$$V = V_1 = V_2$$

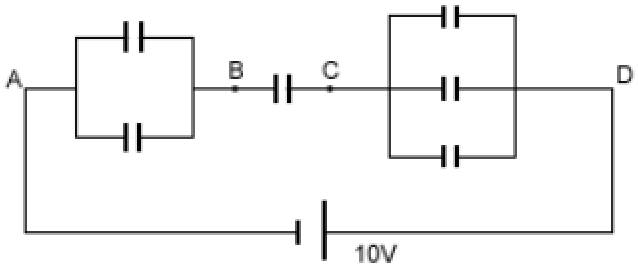
$$V = \frac{q_1}{C_1} = \frac{50}{3}\ V$$

Gabarito: E

---

7. (ITA-1990)

No arranjo de capacitores abaixo, onde todos têm 1,0 F de capacitância e os pontos A e D estão ligados a um gerador de 10,0V, pergunta-se: qual é a diferença de potencial entre os pontos B e C?



a) 0,1 V.

b) 10,0 V.

c) 1,8 V.

d) 5,4 V.

e) Outro valor.

Comentários:

Note que capacitores em paralelo que possuem a mesma capacitância devem ter a mesma carga. $(V = CQ)$

Suponha que o capacitor entre B e C tenha carga q, como os ramos devem ter carga nula, cada capacitor entre A e B tem carga $\frac{q}{2}$ e entre C e D, carga $\frac{q}{3}$.

Temos:

$$V_{AD} = V_{AB} + V_{BC} + V_{CD}$$

$$\frac{\left(\frac{q}{2}\right)}{C} + \frac{q}{C} + \frac{\left(\frac{q}{3}\right)}{C} = 10$$

$$\frac{11q}{6} = 10$$

$$q = \frac{60}{11}\,C \approx 5{,}4\,C$$

Gabarito: D

---

8. (ITA-1994)

Um capacitor de $1{,}0\ \mu F$ carregado com $200V$ e um capacitor de $2{,}0\ \mu F$ carregado com $400V$ são conectados após terem sido desligados das baterias de carga, com a placa positiva de um ligada à placa negativa do outro. A diferença de potencial e a perda de energia armazenada nos capacitores serão dadas por:

a) 20 V; 1,0 J.

b) 200 V; 1,2 J.

c) 200 V; 0,12 J.

d) 600 V; 0,10 J.

e) 100 V; 1,2 J.

Comentários:

Calculando a carga inicial dos capacitores:

$$q_{0,1} = C_1 V_{0,1} = 200\ \mu C$$

$$q_{0,2} = C_2 V_{0,2} = 800\ \mu C$$

Na situação final os capacitores possuem a mesma tensão:

$$V = V_1 = V_2$$

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$$

$$q_2 = 2q_1 \quad (eq. 1)$$

Onde q_1 é a carga final no capacitor 1 e q_2 a carga final em 2.

A carga em cada ramo é conservada, além disso como as polaridades são opostas, assim:

$$q_2 + q_2 = |q_{0,1} - q_{0,2}|$$

Substituindo o valor das cargas iniciais e (1) na equação acima, obtemos:

$$3q_1 = 600$$

$$q_1 = 200\ \mu C$$

Calculando a tensão:

$$V = \frac{q_1}{C_1} = \frac{200}{1} = 200\ V$$

Calculando a variação nas energias armazenadas:

$$\Delta U = U_f - U_i$$

$$\Delta U = \left(\frac{1}{2} C_1 V^2 + \frac{1}{2} C_2 V^2\right) - \left(\frac{1}{2} C_1 V_{0,1}^2 + \frac{1}{2} C_2 V_{0,2}^2\right)$$

$$\Delta U = (2 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-2}) - (2 \cdot 10^{-2} + 16 \cdot 10^{-2})$$

$$\Delta U = -12 \cdot 10^{-2} = -0{,}12\ J$$

Gabarito: C

---

9. (ITA-1994)

Um capacitor é formado por duas placas metálicas retangulares e paralelas, cada uma de área S e comprimento L, separadas por uma distância d. Uma parte de comprimento X é preenchida com um dielétrico de constante dielétrica k. A capacitância desse capacitor é:

a) $\varepsilon_0 S[l + x(k-1)]/(dl)$

b) $\varepsilon_0 S[l - x(k+l)]/(dl)$

c) $\varepsilon_0 S\left[\frac{1}{x-l} + \frac{k}{x}\right]/d$

d) $\varepsilon_0 S\left[\frac{1}{l-x} + \frac{k}{x}\right]/d$

e) $\varepsilon_0 S[k(l-x) + x]/(dl)$

Comentários:

Podemos considerar o capacitor acima como uma associação com dois capacitores em paralelo (apresentam a mesma ddp entre as placas), um deles com um material dielétrico e o outro à vácuo.

Por definição da constante dielétrica, temos que:

$$C_{dietrico} = kC$$

Lembre-se que a capacitância no vácuo para capacitores (ideais) de placas planas é: $C = \frac{A\varepsilon_0}{d}$

A parte que contém o dielétrico tem comprimento x, assim:

$$C_1 = k\left(\frac{S\frac{x}{l}\varepsilon_0}{d}\right)$$

A parte que contém o vácuo tem comprimento $l - x$, assim:

$$C_2 = \frac{S\frac{l-x}{l}\varepsilon_0}{d}$$

Como os capacitores estão em paralelo, temos:

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

$$\boxed{C_{eq} = \frac{S[l + x(k-1)]\varepsilon_0}{dl}}$$

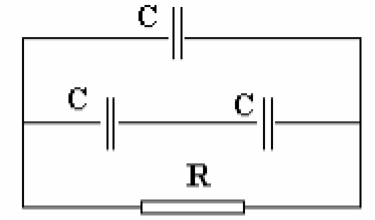
Gabarito: A

---

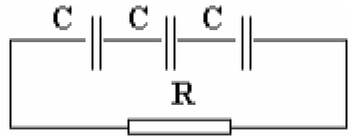
10. (ITA – 1996)

Você tem três capacitores iguais, inicialmente carregados com a mesma carga, e um resistor. O objetivo é aquecer o resistor através da descarga dos três capacitores. Considere então as seguintes possibilidades:

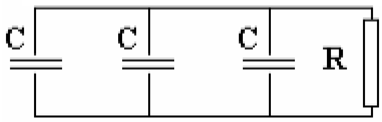
III.



IV.



III.



IV. descarregando cada capacitor individualmente, um após o outro, através do resistor.

Assim, se toda energia dissipada for transformada em calor, ignorando as perdas para o ambiente, pode se afirmar que:

a) o circuito I é o que corresponde à maior geração de calor no resistor.

b) o circuito II é o que gera menos calor no resistor.

c) o circuito III é o que gera mais calor no resistor.

d) a experiência IV é a que gera mais calor no resistor.

e) todas elas geram a mesma quantidade de calor no resistor.

Comentários:

Quando a associação é ligada à resistência, as cargas se distribuem internamente rapidamente para os circuitos com capacitores em paralelo, de modo que esses obtenham o mesmo potencial. O processo é quase instantâneo já que os fios ligando os capacitores apresentam resistência quase nula. Perceba que temos essa redistribuição apenas em I, onde o ramo com dois capacitores teria voltagem $2V_0$ e o outro teria V_0. O processo descrito acima leva a perda de energia nos fios e não no resistor, logo essa configuração é a que gera menos calor no resistor.

No fim de todas as configurações os capacitores estarão descarregados, logo toda a energia armazenada no capacitor é transformada em calor.

Matematicamente –

I. Temos carga total de $3Q$ no capacitor equivalente e capacitância $\frac{3C}{2}$, assim:

$$Q_1 + 2Q_2 = 3Q$$
$$Q_1 = C \cdot \Delta V$$
$$Q_2 = \frac{C}{2} \cdot \Delta V$$

$$Q_1 = \frac{3}{2}Q \text{ e } Q_2 = \frac{3}{4}Q$$
$$Q_{eq} = C_{eq}\Delta V = \frac{3C}{2}\frac{Q_1}{C} = \frac{3}{2}Q_1 = \frac{3}{2}\frac{3}{2}Q = \frac{9}{4}Q$$

$$U_1 = \frac{1}{2\left(\frac{3C}{2}\right)}\left(\frac{9}{4}Q\right)^2 = \frac{27}{16}\frac{Q^2}{C} \cong 1{,}7\frac{Q^2}{C}$$

II. Temos carga total de q (a carga total é a localizada nos terminais finais) no capacitor equivalente e capacitância $\frac{C}{3}$, assim:

$$U_2 = \frac{1}{2\left(\frac{C}{3}\right)}q^2 = \frac{3}{2}\frac{q^2}{C}$$

III. Temos carga total de $3q$ no capacitor equivalente e capacitância $3C$, assim:

$$U_3 = \frac{1}{2(3C)}(3q)^2 = \frac{3}{2}\frac{q^2}{C}$$

IV. Temos carga total de q e capacitância C em cada capacitor, assim:

$$U_4 = 3 \cdot \frac{1}{2C}q^2 = \frac{3}{2}\frac{q^2}{C}$$

Como $\frac{9}{4} > \frac{3}{2}$, temos:

$$\boxed{U_1 > U_2 = U_3 = U_4}$$

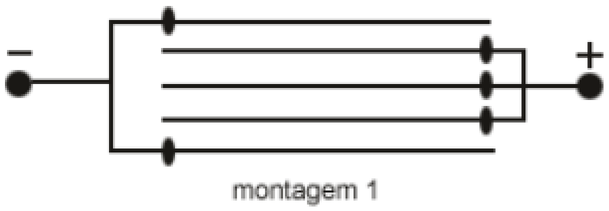
Assim, o circuito I gerará maior calor no resistor, já que possui maior energia potencial eletrostática.

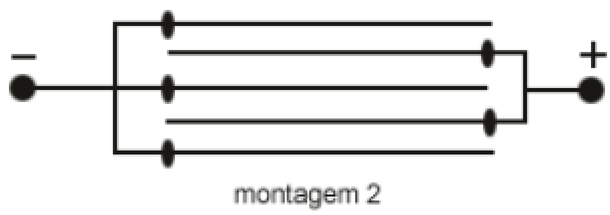
Gabarito: A

---

11. (ITA-1999)

Dois conjuntos de capacitores de placas planas e paralelas são construídos como mostram as montagens 1 e 2 abaixo. Considere que a área de cada placa seja igual a A e que as mesmas estejam igualmente espaçadas de uma distância d. Sendo a permissividade elétrica do vácuo, as capacitâncias equivalentes c_1 e c_2 para as montagens 1 e 2, respectivamente, são:





a) $c_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$; $c_2 = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}$

b) $c_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$; $c_2 = \frac{4\varepsilon_0 A}{d}$

c) $c_1 = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}$; $c_2 = \frac{4\varepsilon_0 A}{d}$

d) $c_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}$; $c_2 = \frac{2\varepsilon_0 A}{4d}$

e) $c_1 = c_2 = \frac{4\varepsilon_0 A}{d}$

Comentários:

As placas serão denominadas de 1, 2, 3, 4 e 5, de cima para baixo.

Montagem 1:

Perceba que 2,3 e 4 possuem o mesmo potencial, portanto não temos capacitância entre essas placas. As placas 1 – 2 e 4 – 5 constituem capacitores de placas planas, com a mesma diferença de potencial, ou seja, em paralelo:

$$C_1 = C_{1-2} + C_{4-5}$$

$$C_1 = \frac{A\varepsilon_0}{d} + \frac{A\varepsilon_0}{d}$$

$$\boxed{C_1 = \frac{2A\varepsilon_0}{d}}$$

Montagem 2:

Perceba que a ddp entre as placas 1 – 2, 2 – 3, 3 – 4 e 4 – 5 são as mesmas e cada par constitui um capacitor de placas planas. Logo podemos considerar o sistema como a associação de 5 capacitores em paralelo:

$$C_2 = C_{1-2} + C_{2-3} + C_{3-4} + C_{4-5}$$

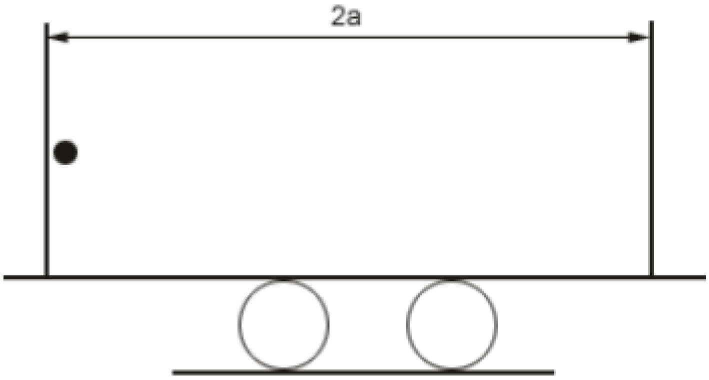
$$\boxed{C_2 = \frac{4A\varepsilon_0}{d}}$$

Gabarito: C

---

12. (ITA-2001)

Um capacitor plano é formado por duas placas planas paralelas, separadas entre si de uma distância $2a$, gerando em seu interior um campo elétrico uniforme E. O capacitor está rigidamente fixado em um carrinho que se encontra inicialmente em repouso. Na face interna de uma das placas encontra-se uma partícula de massa m e carga $q > 0$ presa por um fio curto e inextensível. Considere que não haja atritos e outras resistências a qualquer movimento e que seja M a massa do conjunto capacitor mais carrinho. Por simplicidade, considere ainda a inexistência da ação da gravidade sobre a partícula. O fio é rompido subitamente e a partícula move-se em direção à outra placa. A velocidade da partícula no momento do impacto resultante, vista por um observador fixo no solo, é:



a) $\sqrt{\frac{4qEMa}{m(M+m)}}$

b) $\sqrt{\frac{2qEMa}{m(M+m)}}$

c) $\sqrt{\frac{qEa}{(m+M)}}$

d) $\sqrt{\frac{4qEma}{M(M+m)}}$

e) $\sqrt{\frac{4qEa}{m}}$

Comentários:

Seja v a velocidade da partícula quando esta atinge a outra placa. Conservando quantidade de movimento para o sistema carro-partícula, obtemos:

$$Q_{antes} = Q_{depois}$$

$$0 = mv - M\_v_{carro}$$

$$Mv_{carro} = mv$$

$$\boxed{v_{carro} = \frac{mv}{M}}$$

Onde v_{carro} tem sentido para a esquerda.

Conservando energia: (considere a placa da esquerda com potencial nulo, lembrando que só a diferença de potencial tem significado físico)

$$E_i = E_f$$

$$0 = -q \cdot \Delta V + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv_{carro}^2$$

Substituindo (1) na equação acima, obtemos:

$$q \cdot (2aE) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}v^2$$

$$v^2 = \frac{4MaEq}{m(M+m)}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{4MaEq}{m(M+m)}}}$$

Gabarito: A

---

13. (ITA-2002)

Um capacitor de capacitância igual a $0{,}25 \times 10^{-6}\, F$ é carregado até um potencial de $1{,}00 \times 10^{5}\, V$, sendo então descarregado até $0{,}40 \times 10^{5}\, V$ num intervalo de tempo de $0{,}10\, s$, enquanto transfere energia para um equipamento de raios-X. A carga total, Q, e a energia, ε, fornecidas ao tubo de raios-X, são melhor representadas, respectivamente, por:

a) $Q = 0{,}005\, C; \varepsilon = 1250\, J.$
b) $Q = 0{,}025\, C; \varepsilon = 1250\, J.$
c) $Q = 0{,}025\, C; \varepsilon = 1050\, J.$
d) $Q = 0{,}015\, C; \varepsilon = 1250\, J.$
e) $Q = 0{,}015\, C; \varepsilon = 1050\, J.$

Comentários:

Desconsideraremos a dissipação de energia, assim a energia fornecida ao tubo deve ser menos a variação da energia armazenada no capacitor:

$$\varepsilon = U_i - U_f$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}CV_0^2 - \frac{1}{2}CV^2$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 0{,}25 \cdot 10^{-6}(1 - 0{,}16) \cdot 10^{10}$$

$$\boxed{\varepsilon = 1050\, J}$$

A carga fornecida ao tubo é a diferença entre a carga inicial e final no capacitor:

$$Q = Q_i - Q_f$$

$$Q = CV_0 - CV$$

$$Q = 0{,}25 \cdot 10^{-6}(1 - 0{,}4) \cdot 10^{5}$$

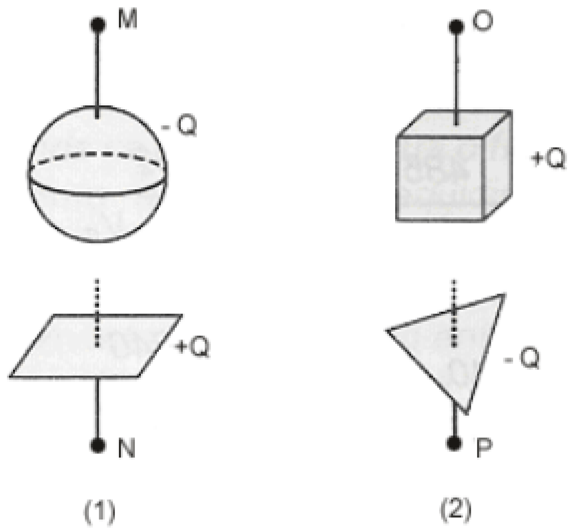
$$\boxed{Q = 0{,}015\, C}$$

Gabarito: E

---

14. (ITA-2003)

A figura mostra dois capacitores, 1 e 2, inicialmente isolados um do outro, carregados com uma mesma carga Q. A diferença de potencial (ddp) do capacitor 2 é a metade da ddp do capacitor 1. Em seguida, as placas negativas dos capacitores são ligadas à Terra e as positivas ligadas uma a outra por meio de um fio metálico, longo e fino.



a) Antes das ligações, a capacitância do capacitor 1 é maior do que a do capacitor 2.

b) Após as ligações, as capacitâncias dos dois capacitores aumentam.

c) Após as ligações, o potencial final em N é maior do que o potencial em O.

d) A ddp do arranjo final entre O e P é igual a 2/3 da ddp inicial no capacitor 1.

e) A capacitância equivalente do arranjo final é igual a duas vezes a capacitância do capacitor 1.

Comentários:

Calculando a relação entre a capacitância desses capacitores:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\frac{Q}{V_2}}{\frac{Q}{V_1}} = \frac{V_1}{V_2} = 2$$

a) **Incorreta**. Veja acima.
b) **Incorreta**. A capacitância é uma propriedade constante do capacitor e depende apenas de sua geometria.
c) **Incorreta**. Não há sentido físico em comparar esses potenciais.
d) **Correta**. Considere $C_1 = C$, assim, no fim temos uma associação de capacitores C e $2C$ em paralelo:

$$C_{eq} = 3C$$

Logo, a diferença de potencial deve ser:

$$V = \frac{q_{total}}{C_{eq}} = \frac{2q}{3C} = \frac{2}{3}V_1$$

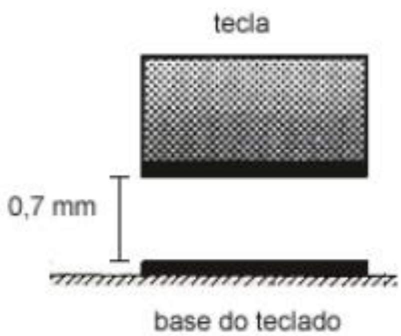
e) **Incorreta**. Veja d).

Gabarito: D

---

15. (ITA-2005)

Considere o vão existente entre cada tecla de um computador e a base do teclado. Em cada vão existem duas placas metálicas, uma presa na base do teclado e a outra na tecla. Em conjunto, elas funcionam como um capacitor plano de placas paralelas imersas no ar. Quando se aciona a tecla, diminui a distância entre as placas e a capacitância aumenta. Um circuito elétrico detecta a variação da capacitância, indicativa do movimento da tecla. Considere então um dado teclado, cujas placas metálicas têm $40\ mm^2$ de área e $0,7\ mm$ de distância inicial entre si. Considere ainda que a permissividade do ar seja $\varepsilon_0 = 9 \times 10^{-12}\ F/m$. Se o circuito eletrônico é capaz de detectar uma variação de capacitância de $0,2\ pF$, então qualquer tecla deve ser deslocada de pelo menos:



a) 0,1 mm.

b) 0,2 mm.

c) 0,3 mm.

d) 0,4 mm.

e) 0,5 mm.

Comentários:

Vejamos a variação da capacitância para um pequeno deslocamento x:

$$\Delta C = \frac{A\varepsilon_0}{d-x} - \frac{A\varepsilon_0}{d} = \frac{A\varepsilon_0 x}{d(d-x)}$$

$$d - x = \frac{A\varepsilon_0 x}{d\Delta C}$$

$$x = \frac{d}{1 + \frac{A\varepsilon_0}{d\Delta C}}$$

Substituindo os valores fornecidos pelo enunciado:

$$x = \frac{0{,}7}{1 + \frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 9 \cdot 10^{-12}}{0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-12}}}$$

$$\boxed{x \approx 0.2\ mm}$$

Gabarito: B

---

16. (ITA-2006)

Algumas células do corpo humano são circundadas por paredes revestidas externamente por uma película com carga positiva e internamente por outra película semelhante, mas com carga negativa de mesmo modulo. Considere que sejam conhecidas: densidade superficial de ambas as cargas $\sigma = \pm\, 0{,}50 \times 10^{-6}\ C/m^2$; $\varepsilon_0 = 9{,}0 \times 10^{-12}\ C^2/N.m^2$; parede com volume de $4{,}0 \times 10^{-16}\ m^3$; constante dielétrica $k = 5{,}0$. Assinale, então, a estimada da energia total acumulada no campo elétrico dessa parede.

a) 0,7 e V.

b) 1,7 e V.

c) 7,0 e V.

d) 17 e V.

e) 70 e V.

Comentários:

Com essa descrição temos um capacitor de placas planas. Essa generalização pode ser feita em toda situação na qual a tensão nas duas superfícies é constante e a distância entre elas é muito pequena comparada à sua área. Isso significa que as superfícies, mesmo não sendo paralelas, podem ser consideradas em pequenas áreas, e esses capacitores planos são então ligados em paralelo para formar o capacitor total.

O volume da membrana é dado por: (pelo mesmo argumento dado acima) $V = Ad$

Onde A é a área de uma camada e d é a distância entre as camadas.

Calculando a capacitância desse capacitor:

$$C = \frac{kA\varepsilon_0}{d}$$

A energia armazenada em um capacitor de capacitância C é dada por:

$$U = \frac{1}{2C}Q^2$$

$$U = \frac{d}{2Ak\varepsilon_0}Q^2$$

$$U = \frac{Ad}{2k\varepsilon_0}\frac{Q^2}{A^2} = \frac{V}{2k\varepsilon_0}\sigma^2$$

Substituindo os valores dados no enunciado, temos:

$$U = \frac{4 \cdot 10^{-16}}{10 \cdot 9 \cdot 10^{-12}} 0{,}25 \cdot 10^{-12}$$

$$U = \frac{100}{9} \cdot 10^{-19}\ C \cdot V$$

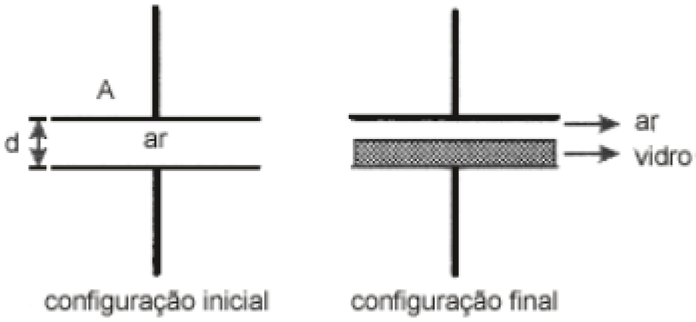
$$\boxed{U \approx 6{,}94\ eV}$$

Gabarito: C

---

17. (ITA-2006)

A figura mostra um capacitor de placas paralelas de área A separadas pela distância d. Inicialmente o dielétrico entre as placas é o ar e a carga máxima suportada é Q_i. Para que esse capacitor suporte uma carga máxima Q_f foi introduzida uma placa de vidro de constante dielétrica k e espessura $d/2$. Sendo mantida a diferença de potencial entre as placas, calcule a razão entre as cargas Q_f e Q_i.



Comentários:

Denotaremos por C a capacitância de um capacitor de placas planas no vácuo, com área A e distância $d/2$ entre placas.

Logo, concluímos que a configuração inicial é a associação em série de capacitores de capacitância C e C:

$$C_i = \frac{C}{2}$$

Além disso, concluímos que a configuração final é a associação em série de capacitores de capacitância C e kC:

$$C_f = \frac{kC}{k+1}$$

Lembre-se que a voltagem é a mesma para as duas configurações, logo:

$$Q_i = C_i V = \frac{CV}{2} \quad (eq\,.1)$$

$$Q_f = C_f V = \frac{2k}{k+1}\frac{CV}{2} \quad (eq.2)$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

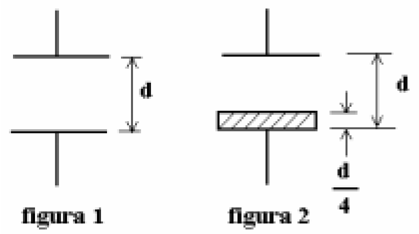
$$\boxed{\frac{Q_f}{Q_i} = \frac{2k}{k+1}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{\frac{Q_f}{Q_i} = \frac{2k}{k+1}}$

---

18. (ITA – 2008)

A figura 1 mostra um capacitor de placas paralelas com vácuo entre as placas, cuja capacitância é C_0. Num determinado instante, uma placa dielétrica de espessura $d/4$ e constante dielétrica K é colocada entre as placas do capacitor, conforme a figura 2. Tal modificação altera a capacitância do capacitor para um valor C_1. Determine a razão C_0/C_1.



a) $\frac{3k+1}{4k}$

b) $\frac{4k}{3k+1}$

c) $\frac{4+12k}{3}$

d) $\frac{3}{4+12k}$

e) $\frac{1}{4+12k}$

Comentários:

Denotaremos por C a capacitância de um capacitor de placas planas no vácuo, com área A e distância $d/4$ entre placas.

Logo, concluímos que a configuração inicial é a associação em série de quatro capacitores de capacitância C:

$$C_0 = \frac{C}{4} \quad (eq. 1)$$

Além disso, concluímos que a configuração final é a associação em série de três capacitores de capacitância C e um de capacitância kC:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{kC}$$

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C}\frac{3k+1}{k} \quad (eq. 2)$$

Multiplicando (1) por (2), obtemos:

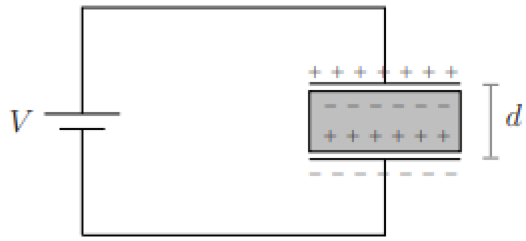
$$\frac{C_0}{C_1} = \frac{3k+1}{4k}$$

Gabarito: A

---

19. (ITA – 2009)

Na figura, o circuito consiste de uma bateria de tensão V conectada a um capacitor de placas paralelas, de área S e distância d entre si, dispondo de um dielétrico de permissividade elétrica ε que preenche completamente o espaço entre elas. Assinale a magnitude da carga q induzida sobre a superfície do dielétrico.



a) $q = \varepsilon V d$

b) $q = \varepsilon SV/d$

c) $q = (\varepsilon - \varepsilon_0)Vd$

d) $q = (\varepsilon - \varepsilon_0)SV/d$

e) $q = (\varepsilon + \varepsilon_0)SV/d$

Comentários:

Pela Lei de Gauss adaptada encontramos:

$$E_{total} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{V}{d} \quad (eq. 1)$$

Onde o campo foi considerado no meio dielétrico. Contudo, também podemos considerar o campo elétrico total como a soma do campo devido às cargas do dielétrico mais as cargas externas, no vácuo. Note que o campo das cargas do dielétrico tem sentido oposto ao das cargas no capacitor:

$$E_{total} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_{induzido}}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{q_{induzida}}{S\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - E_{total}$$

$$\frac{q_{induzida}}{S\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon \frac{V}{d}}{\varepsilon_0} - \frac{V}{d}$$

$$\frac{q_{induzida}}{S\varepsilon_0} = \frac{V}{d}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right)$$

$$\frac{q_{induzida}}{S\varepsilon_0} = \frac{V}{d}\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{q_{induzida} = \frac{VS(\varepsilon - \varepsilon_0)}{d}}$$

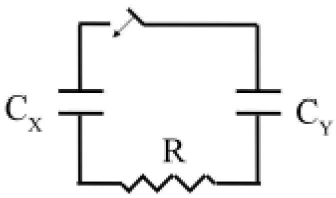
Lembre-se que vimos esse conceito quando estudamos a carga ligada no item 3.5.

Gabarito: D

---

20. (ITA – 2011)

No circuito ideal da figura, inicialmente aberto, o capacitor de capacitância C_X encontra-se carregado e armazena uma energia potencial elétrica E. O capacitor de capacitância $C_Y = 2C_X$ está inicialmente descarregado. Após fechar o circuito e este alcançar um novo equilíbrio, pode-se afirmar que a soma das energias armazenadas nos capacitores é igual a



a) 0.
b) E/9.
c) E/3.
d) 4E/9.
e) E.

Comentários:

Calculando a carga inicial do capacitor C_X:

$$E = \frac{1}{2C_X}Q^2 \quad (eq.*)$$

Quando o equilíbrio no circuito for atingido, os capacitores apresentarão a mesma diferença de potencial, logo:

$$V = \frac{q_X}{C_X} = \frac{q_Y}{C_Y} = \frac{q_X + q_Y}{C_X + C_Y} = \frac{q_X + q_Y}{3C_X} \quad (eq. 1)$$

Por conservação de carga no sistema, temos:

$$q_X + q_Y = Q \quad (eq. 2)$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$q_X = \frac{Q}{3}$$

$$q_Y = \frac{2Q}{3}$$

Logo, a soma das energias armazenadas é:

$$U_f = \frac{1}{2C_X}q_X^2 + \frac{1}{2C_Y}q_Y^2$$

$$U_f = \frac{1}{9}\frac{1}{2C_X}Q^2 + \frac{2}{9}\frac{1}{2C_X}Q^2$$

Substituindo (*) na equação acima, obtemos:

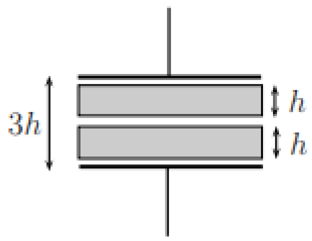
$$\boxed{U_f = \frac{E}{3}}$$

Gabarito: C

---

21. (ITA – 2012)

Um capacitor de placas paralelas de área A e distância 3h possui duas placas metálicas idênticas, de espessura h e área A cada uma. Compare a capacitância C deste capacitor com a capacitância C_0 que ele teria sem as duas placas metálicas.



a) $C = C_0$

b) $C > 4C_0$

c) $0 < C < C_0$

d) $C_0 < C < 2C_0$

e) $2C_0 < C < 4C_0$

Comentários:

Pela simetria do problema sabemos que o campo deve ser perpendicular às placas (Estamos admitindo que a área das placas é muito maior comparada com a distância entre elas). Admita que o potencial positivo seja o de cima. Seja q a carga da primeira placa. (Temos 4 placas, começando de cima)

Usando a Lei de Gauss com uma gaussiana cilíndrica Ω de área da base δA muito menor que a área das placas, a qual passa por dentro da primeira e segunda placa, teremos que a carga na superfície das placas internas também é q:

$$\sum_{\Omega} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

$$0 = \frac{q_2 + q_1}{\varepsilon_0}$$

$$q_2 = -q$$

Por conservação de carga a parte de baixo da segunda placa deve ter carga q e assim por diante.

Note que as placas metálicas devem ter o mesmo potencial em toda a sua extensão.

Inicialmente só temos a primeira e a quarta placa, então:

$$C_0 = \frac{A\varepsilon_0}{3h} \quad (eq.1)$$

Lembre-se que o campo entre duas placas carregadas com cargas opostas é: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{A\varepsilon_0}$

Ao introduzirmos as duas placas condutoras, obtemos:

$$V_{1,4} = V_{1,2} + V_{2,3} + V_{3,4}$$

$$V_{1,4} = \frac{qd_{1,2}}{A\varepsilon_0} + \frac{qd_{2,3}}{A\varepsilon_0} + \frac{qd_{3,4}}{A\varepsilon_0} = \frac{q}{A\varepsilon_0}\left(d_{1,2} + d_{2,3} + d_{3,4}\right) \quad (eq.2)$$

Note que:

$$d_{1,4} = d_{1,2} + espessura\ placa + d_{2,3} + espessura\ placa + d_{3,4}$$

$$3h = d_{1,2} + h + d_{2,3} + h + d_{3,4}$$

$$d_{1,2} + d_{2,3} + d_{3,4} = h \quad (eq.3)$$

Substituindo (2) em (3), temos:

$$V_{1,4} = \frac{qh}{A\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{q}{V_{1,4}} = \frac{A\varepsilon_0}{h}$$

Substituindo (1) na equação acima, obtemos:

$$\boxed{C = 3C_0}$$

Gabarito: E

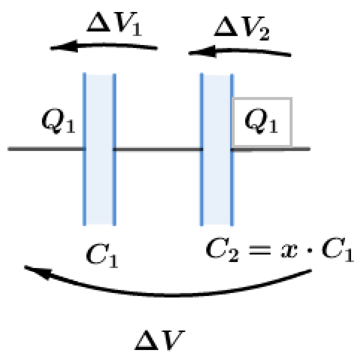
---

22. (ITA – 2012)

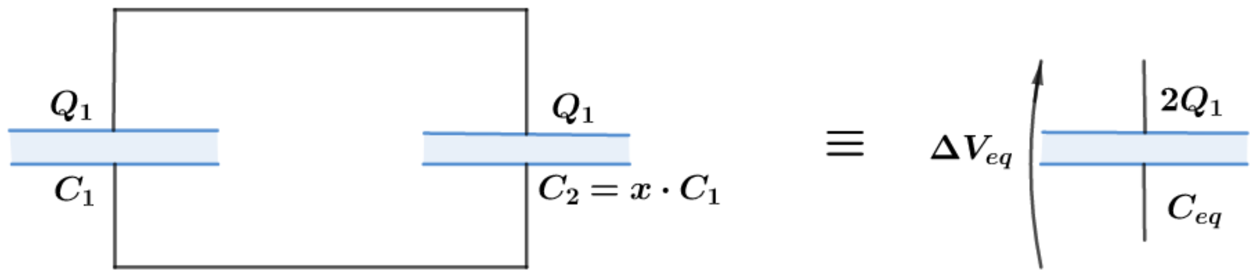
Dois capacitores em série, de capacitância C_1 e C_2, respectivamente, estão sujeitos a uma diferença de potencial V. O Capacitor de capacitância C_1 tem carga Q_1 e está relacionado com C_2 através de $C_2 = xC_1$, sendo x um coeficiente de proporcionalidade. Os capacitores carregados são então desligados da fonte e entre si, sendo a seguir religados com os respectivos terminais de carga de mesmo sinal. Determine o valor de x para que a carga Q_2 final do capacitor de capacitância C_2 seja $Q_1/4$.

Comentários:

Quando os dois capacitores estão em série, temos que:



Ao colocar em paralelo, temos a seguinte disposição dos capacitores:



Portanto:

$$\Delta V_{eq} = \frac{2Q_1}{C_{eq}} \text{ e } C_{eq} = C_1 + xC_1 = (1 + x)C_1$$

A carga no capacitor 2 na segunda configuração pode ser expressa por:

$$Q_2' = C_2 \cdot \Delta V_{eq}$$

$$Q_2' = xC_1 \frac{2Q_1}{(1 + x)C_1}$$

Do enunciado, $Q_2' = \frac{Q_1}{4}$, então:

$$Q_2' = \frac{Q_1}{4}$$

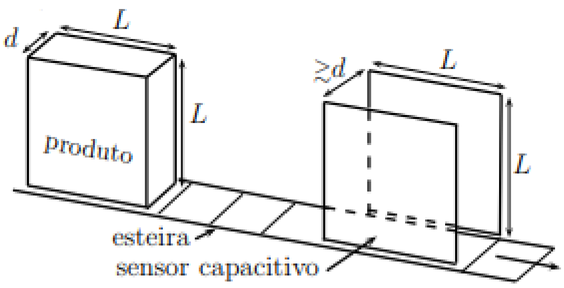
$$Q_2' = xC_1 \frac{2Q_1}{(1+x)C_1}$$
$$\frac{Q_1}{4} = xC_1 \frac{2Q_1}{(1+x)C_1}$$
$$\frac{1}{4} = \frac{2x}{1+x}$$
$$1 + x = 8x$$
$$\boxed{x = \frac{1}{7}}$$

Gabarito: $x = 1/7$

---

23. (ITA – 2013)

Certo produto industrial constitui-se de uma embalagem rígida cheia de óleo, de dimensões $L \times L \times d$, sendo transportado numa esteira que passa por um sensor capacitivo de duas placas paralelas e quadradas de lado L, afastadas entre si de uma distância ligeiramente maior que d, conforme a figura. Quando o produto estiver inteiramente inserido entre as placas, o sensor deve acusar um valor de capacitância C_0. Considere, contudo, tenha havido antes um indesejado vazamento de óleo, tal que a efetiva medida da capacitância seja $C = 3/4C_0$. Sendo dadas as respectivas constantes dielétricas do óleo, $\kappa = 2$; e do ar, $\kappa_{ar} = 1$, e desprezando o efeito da constante dielétrica da embalagem, assinale a percentagem do volume de óleo vazado em relação ao seu volume original.



a) 5%

b) 50%

c) 100%

d) 10%

e) 75%

Comentários:

Após o vazamento a altura do líquido haverá reduzido $x < L$. Nessa configuração podemos considerar a caixa como uma associação em paralelo de capacitores, um no vácuo e o outro em meio dielétrico.

No início temos somente vácuo:

$$C_0 = k_{die}\frac{L^2\varepsilon_0}{d}$$

Após o vazamento temos uma associação de capacitores de área Lx e $L(L-x)$:

$$C_{eq} = \ k_{vac}\frac{Lx\varepsilon_0}{d} + k_{die}\frac{(L-x)L\varepsilon_0}{d} = k_{die}\frac{L^2\varepsilon_0}{d} - (k_{die} - k_{vac})\frac{Lx\varepsilon_0}{d}$$

$$C_{eq} = C_0 - \left(1 - \frac{k_{vac}}{k_{die}}\right)\frac{x}{L}\frac{L^2\varepsilon_0}{d} = C_0\left(1 - \frac{f}{2}\right)$$

Onde $f = \frac{x}{L}$ representa a percentagem de produto vazado. O enunciado nos fornece $C_{eq} = \frac{3}{4}C_0$, logo:

$$1 - \frac{f}{2} = \frac{3}{4}$$

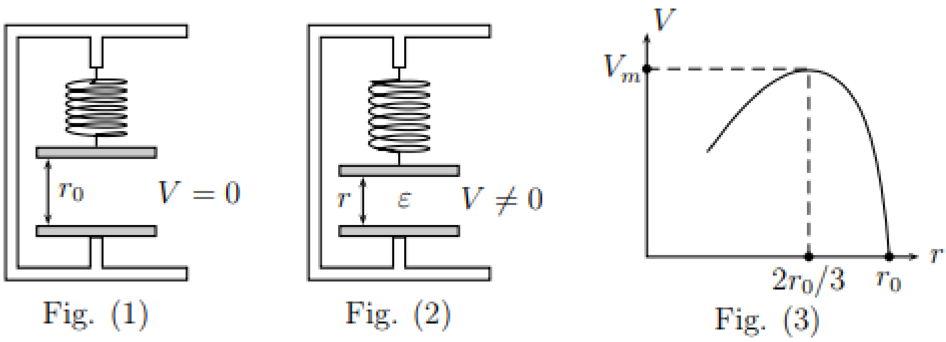
$$\boxed{f = 0.5}$$

Gabarito: B

---

24. (ITA – 2014)

Um capacitor de placas planas paralelas de área A, separadas entre si por uma distância inicial r_0 muito menor que as dimensões dessa área, tem sua placa inferior fixada numa base isolante e a superior suspensa por uma mola (figura (1)). Dispondo-se uma massa m sobre a placa superior, resultam pequenas oscilações de período T do conjunto placa superior + massa m. Variando-se m, obtém-se um gráfico de T^2 versus m, do qual, após ajuste linear, se extrai o coeficiente angular α. A seguir, após remover a massa m da placa superior e colocando entre as placas um meio dielétrico sem resistência ao movimento, aplica-se entre elas uma diferença de potencial V e monitora-se a separação r de equilíbrio (figuras (2) e (3)). Nestas condições, a permissividade ε do meio entre as placas é



a) $32\pi^2 r_0^3/(27\alpha A V_m^2)$.

b) $16\pi^2 r_0^3/(27\alpha A V_m^2)$.

c) $8\pi^2 r_0^3/(27\alpha A V_m^2)$.

d) $4\pi^2 r_0^3/(\alpha A V_m^2)$.

e) $16\pi^2 r^3/(27\alpha A V^2)$.

Comentários:

Inicialmente temos um MHS do sistema massa-mola. Seja M a massa da placa superior, temos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}m + \frac{4\pi^2}{k}M$$

$$\alpha = \frac{4\pi^2}{k}$$

$$k = \frac{4\pi^2}{\alpha} \quad (eq.1)$$

Antes da aplicação do potencial, o equilíbrio da placa superior nos fornece:

$$Mg = kx_0 \quad (eq.2)$$

Após a aplicação de tensão entre as placas, no equilíbrio, temos:

$$Mg + Eq = kx \quad (eq.3)$$

Onde E é o campo produzido pela placa inferior: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$, e q é o módulo da carga nas placas.

Subtraindo (3) de (2), obtemos:

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon}(\sigma A) = k(x - x_0) \quad (eq.4)$$

Perceba que a distância entre os suportes é constante, logo:

$$l_{natural} + x_0 + r_0 = l_{natural} + x + r$$

$$x - x_0 = r_0 - r \quad (eq.5)$$

Substituindo (5) em (4), temos:

$$\frac{\sigma^2 A}{2\varepsilon k} = r_0 - r \quad (eq.6)$$

Sabemos que o campo total entre um capacitor de placas planas é:

$$E_t = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{V}{r}$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon V}{r} \quad (eq.7)$$

Substituindo (1) e (7) em (6), obtemos:

$$\frac{\varepsilon V^2 A}{2r^2}\frac{\alpha}{4\pi^2} = r_0 - r$$

Substituindo o ponto no gráfico onde $V = V_m$ e $r = \frac{2}{3}r_0$, temos:

$$\varepsilon = \frac{8\pi^2}{V_m^2 A\alpha}\left(\frac{2}{3}r_0\right)^2 \frac{1}{3}r_0$$

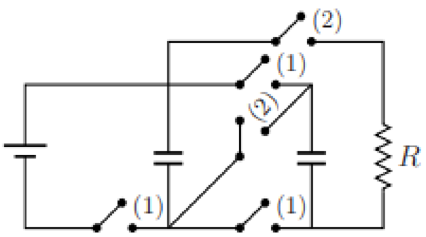
$$\boxed{\varepsilon = \frac{32\pi^2 r_0^3}{27V_m^2 A\alpha}}$$

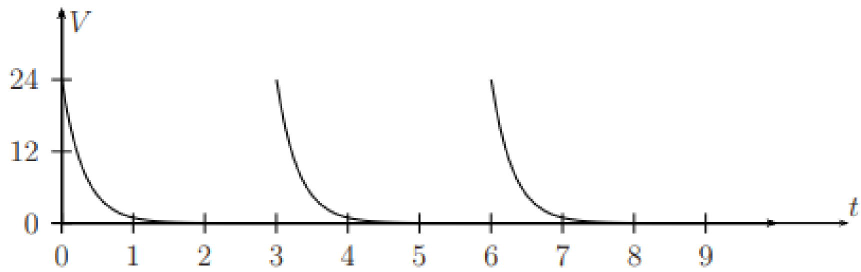
Gabarito: A

---

25. (ITA – 2016)

No circuito da figura há três capacitores iguais, com C = 1000 μF, inicialmente descarregados. Com as chaves (2) abertas e as chaves (1) fechadas, os capacitores são carregados. Na sequência, com as chaves (1) abertas e as chaves (2) fechadas, os capacitores são novamente descarregados e o processo se repete. Com a tensão no resistor R variando segundo o gráfico da figura, a carga transferida pelos capacitores em cada descarga é igual a





f) $4{,}8 \times 10^{-2} C$
g) $2{,}4 \times 10^{-2} C$
h) $1{,}2 \times 10^{-2} C$
i) $0{,}6 \times 10^{-2} C$
j) $0{,}3 \times 10^{-2} C$

Comentários:

Quando os capacitores são carregados adquirem cargas q e $-q$. Note que quando estão sendo descarregados, os capacitores são ligados em série com a placa que contém carga negativa ligada à placa que contém carga positiva, assim, a tensão inicial da associação é a soma da tensão nos dois capacitores.

Calculando a carga q após a carga:

$$q = CV_{fonte} = C\left(\frac{V_m}{2}\right)$$

$$q = 1000 \cdot 10^{-6} \cdot 12$$

$$\boxed{q = 1{,}2 \cdot 10^{-2}\ C}$$

Gabarito: C

---

26. (ITA – 2017)

Carregada com um potencial de $100\ V$, flutua no ar uma bolha de sabão condutora de eletricidade, de $10\ cm$ de raio e $3{,}3 \times 10^{-6}\ cm$ de espessura. Sendo a capacitância de uma esfera condutora no ar proporcional ao seu raio, assinale o potencial elétrico da gota esférica formada após a bolha estourar.

f) $6\ kV$

g) $7\ kV$

h) $8\ kV$

i) $9\ kV$

j) $10\ kV$

Comentários:

Após estourar teremos uma esfera sólida, com a mesma massa da bolha. Como a massa específica é constante, temos que o volume deve ser igual nos dois casos:

$$V_{bolha} = V_{gota}$$

$$4\pi r_{bolha}^2 d = \frac{4}{3}\pi r_{gota}^3$$

$$r_{gota} = (3d)^{\frac{1}{3}} r_{bolha}^{\frac{2}{3}} \quad (eq\ .*)$$

Pela definição de capacitância:

$$V_{gota} = \frac{q}{C_{gota}} \quad (eq. 1)$$

$$V_{bolha} = \frac{q}{C_{bolha}} \quad (eq. 2)$$

Onde a carga se conserva e, portanto, é a mesma nas duas expressões.

Dividindo (1) por (2), obtemos:

$$V_{gota} = V_{bolha}\frac{C_{bolha}}{C_{gota}}$$

Lembre-se da dependência da capacitância com o raio:

$$V_{gota} = V_{bolha}\frac{r_{bolha}}{r_{gota}}$$

Substituindo (*) na equação acima, temos:

$$V_{gota} = V_{bolha}\left(\frac{r_{bolha}}{3d}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$V_{gota} = 100 \cdot \left(\frac{10}{10 \cdot 10^{-6}}\right)^{\frac{1}{3}} = 100 \cdot 10^2$$

$$\boxed{V_{gota} = 10\ kV}$$

Gabarito: E

---

27. (ITA – 2018)

Dois capacitores em paralelo de igual capacitância C estão ligados a uma fonte cuja diferença de potencial é U. A seguir, com essa fonte desligada, introduz-se um dielétrico de constante dielétrica k num dos capacitores, ocupando todo o espaço entre suas placas. Calcule:

(a) a carga livre que flui de um capacitor para outro;

(b) a nova diferença de potencial entre as placas dos capacitores;

(c) a variação da energia total dos capacitores entre as duas situações.

Comentários:

Calculando a carga inicial nos capacitores:

$$q = CU$$

Logo, em cada ramo temos, em módulo, carga $2CU$.

Sejam q_v e q_k respectivamente a carga na placa positiva do capacitor no vácuo e no dielétrico, respectivamente. Por conservação de carga, temos:

$$q_v + q_k = 2CU$$

Como a tensão nos dois capacitores deve permanecer a mesma, temos:

$$V = \frac{q_v}{C} = \frac{q_k}{kC} = \frac{q_v + q_k}{C(k+1)}$$

$$\boxed{V = \frac{2U}{k+1}}$$

$$q_v = \frac{2CU}{k+1} \quad (eq. 2)$$

$$q_k = \frac{2kCU}{k+1} \quad (eq. 3)$$

Logo, a carga que flui pode ser encontrada na diferença de cargas armazenadas no início e fim:

$$\Delta Q = |q_v - q| = |q_k - q| = q_k - CU$$

$$\boxed{\Delta Q = \frac{k-1}{k+1} CU}$$

Calculando a variação da energia armazenada:

$$\Delta E = E_{final} - E_{inicial}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} C V^2 + \frac{1}{2}(kC)V^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} C U^2$$

$$\Delta E = CU^2 \left[\frac{2}{k+1} - 1\right]$$

$$\boxed{\Delta E = CU^2 \left(\frac{1-k}{1+k}\right)}$$

Gabarito: a) $\Delta Q = UC\left(\frac{k-1}{k+1}\right)$, b) $U' = \frac{2}{1+k} \cdot U$ e c) $\Delta E = CU^2\left(\frac{1-k}{1+k}\right)$

---

28. (IME – 1997)

Um bloco de material isolante elétrico, de peso $5\ N$, é abandonado do repouso na situação da figura abaixo. Na queda, o bloco puxa a placa metálica inferior, P_2, de um capacitor enquanto a placa superior, P_1, permanece fixa. Determine a tensão elétrica no capacitor quando a mola atinge a compressão máxima.

Dados:

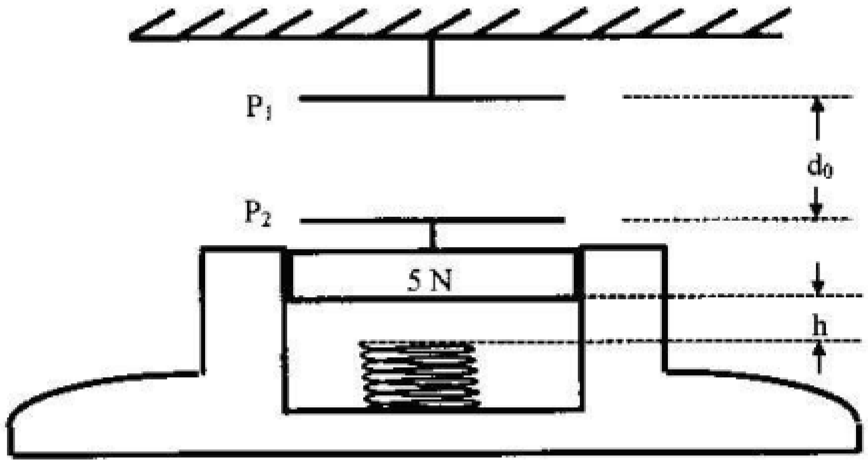
constante da mola: $30\ N/m$

carga no capacitor: $q = 18\ \mu C$

capacitância inicial: $C_0 = 9\ \mu F$

distância inicial entre as placas: $d_0 = 32\ cm$

distância inicial entre o bloco e a mola: $h = 8\ cm$



Comentários:

Seja x a deformação da mola quando esta atinge a compressão máxima. Nessa ocasião, a velocidade do bloco voltará a ser nula:

$$E_0 = E_f$$

$$K_0 + U_{0,capacitor} + U_{0,mola} + U_{0,g} = K_f + U_{capacitor} + U_{mola} + U_g$$

$$0 + \frac{1}{2C_0}q^2 + P(h + x) = 0 + \frac{1}{2C}q^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (eq. 1)$$

Lembre-se que a capacitância em um capacitor de placas planas é inversamente proporcional à distância entre as placas, logo:

$$C = C_0 \frac{d_0}{d_0 + h + x}$$

Substituindo a equação acima em (1), obtemos:

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2C_0}q^2 \frac{h + x}{d_0} = P(h + x)$$

$$15x^2 + \frac{18 \cdot 10^{-6}}{32 \cdot 10^{-2}}(0{,}08 + x) = 5(0{,}08 + x)$$

$$15x^2 \approx 5(0{,}08 + x)$$

$$3x^2 = 0{,}08 + x$$

A solução positiva dessa equação é: $x \approx 0{,}4\ m$

Calculando a tensão final com a capacitância:

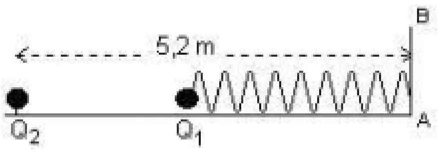
$$V = \frac{q}{C} = \frac{q}{C_0} \frac{d_0 + h + x}{d_0} = 2 \frac{8 + 32 + 40}{32} = 5\ V$$

Gabarito: $V = 5V$

---

29. (IME – 1998)

No extremo de uma mola feita de material isolante elétrico está presa uma pequena esfera metálica com carga Q_1. O outro extremo da mola está preso no anteparo AB. Fixa-se uma outra esfera idêntica com carga Q_2, à distância de $5{,}2\ m$ do anteparo, conforme a figura, estando ambas as esferas e a mola colocadas sobre um plano de material dielétrico, perfeitamente liso. Em consequência, a mola alonga-se 20% em relação ao seu comprimento original, surgindo entre as esferas uma força de $0{,}9\ N$.



Determine qual deve ser o valor de Q_2 para que a mola se alongue 120% em relação ao seu comprimento original.

Dados: constante eletrostática do ar 9×10^9 (unidades do SI)

$Q_1 = +40\ \mu C$ e $Q_2 = -40\ \mu C$.

Comentários:

Seja l o comprimento natural da mola. Na posição de equilíbrio a distância entre as cargas deve ser $5{,}2 - 1{,}2l$ e a deformação da mola deve ser $0{,}2l$.

A intensidade da força entre as cargas é fornecida:

$$\frac{k_{ele}Q_1Q_2}{(5{,}2 - 1{,}2l)^2} = 0{,}9$$

$$1{,}2l = 5{,}2 - 4$$

$$l = 1\ m$$

$$k_{elas}(0{,}2l) = 0{,}9$$

$$k_{elas} = 4{,}5\ N/m$$

Na nova situação a distância entre as cargas será $5{,}2 - 1{,}2l$ e a deformação da mola será $1{,}2l$.

Equilibrando as forças em Q_1 na situação final, obtemos:

$$\frac{k_{ele}Q_1'Q_2}{(5{,}2 - 2{,}2l)^2} = -k_{elas}(1{,}2l)$$

$$\frac{9 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot Q_1'}{9} = -4{,}5 \cdot 1{,}2$$

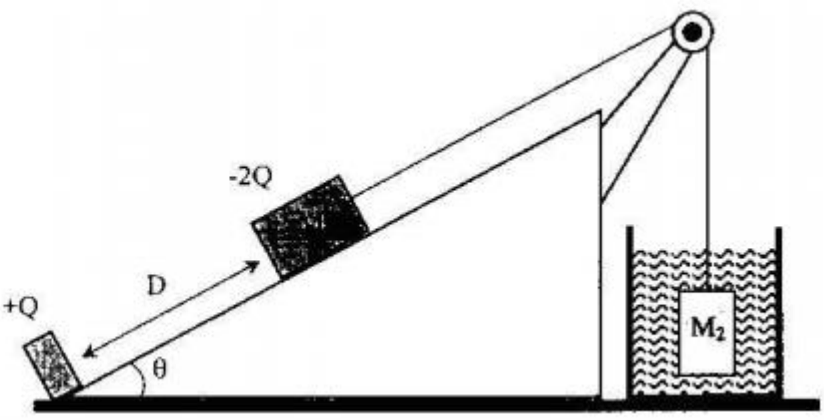
$$Q_1' = -135\ \mu C$$

Gabarito: -135 µC

---

30. (IME – 2000)

Na base de um plano inclinado com ângulo θ há uma carga puntiforme $+Q$ fixa. Sobre um plano inclinado a uma distância D há uma massa M_1 de dimensões desprezíveis e carga $-2Q$. O coeficiente de atrito entre M_1 e o plano é μ. Um fio ideal preso em M_1 passa por uma roldana ideal e suspende um corpo de volume V_2 e densidade ρ_2,totalmente imerso em um fluido de densidade ρ_A. Considere a aceleração da gravidade como g e a constante eletroestática do meio onde se encontra o plano K. Determine, em função dos dados literais fornecidos, a expressão do valor mínimo da densidade do fluido ρ_A para que M_1 permaneça imóvel sobre o plano inclinado.



Comentários:

A força de empuxo é proporcional à densidade do líquido, assim para densidade mínima teremos M_1 na iminência de subir o plano. Seja T a tração no fio que liga M_1 e M_2. Equilibrando as forças nas duas massas, obtemos:

Massa 1 – direção do plano

$$T = \mu M_1 g cos\,\theta + \frac{2KQ^2}{D^2} + M_1 g\,\text{sen}\,\theta \quad (eq. 1)$$

Massa 2 – vertical

$$T + \rho_A V_2 g = \rho_2 V_2 g \quad (eq. 2)$$

Subtraindo (1) de (2), obtemos:

$$\boldsymbol{\rho_A = \rho_2 - \frac{1}{V_2 g}\left(M_1 g(sen\theta + \mu cos\theta) + \frac{2KQ^2}{D^2}\right)}$$

Gabarito: $\boldsymbol{\rho_A = \rho_2 - \frac{1}{V_2 g}\left(M_1 g(sen\theta + \mu cos\theta) + \frac{2KQ^2}{D^2}\right)}$

---

31. (IME – 2001)

Sobre um plano inclinado sem atrito e com ângulo $\alpha = 30°$, ilustrado na figura abaixo, encontram-se dois blocos carregados eletricamente com cargas $q_1 = +2 \times 10^{-3} C$ e $q_2 = +\frac{1}{9} \times 10^{-4} C$. Sabe-se que o bloco 1 está fixado na posição A e que o bloco 2 é móvel e possui massa $m_2 = 0{,}1\ kg$. Num certo instante, o bloco 2 encontra-se a uma altura $h = 8\ m$ e desloca-se com velocidade linear $v = \sqrt{90} \cong 9{,}49\ m/s$, como mostra a figura abaixo. Determine:

a) as distâncias mínima e máxima entre os dois blocos;

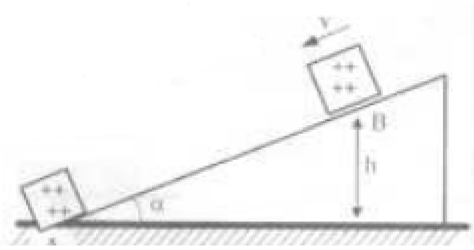
b) a máxima velocidade linear que o bloco 2 atinge.

Obs: para fins de cálculo, considere os blocos puntiformes.

Dados:

Aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$

Constante eletrostática $K = 9 \times 10^9 Nm^2/C^2$



Comentários:

a) As distâncias mínima e máxima devem ocorrer quando a velocidade do bloco 2 for nula. Conservando energia, devemos achar uma equação do segundo grau, onde uma solução será a máxima e outra será a mínima, já que nos dois casos as expressões literais serão as mesmas, com a única diferença dos valores das alturas e distâncias:

$$E_0 = E_f$$
$$\frac{1}{2}m_2v^2 + m_2gh + \frac{Kq_1q_2}{\frac{h}{\text{sen}\,\alpha}} = m_2gh_f + \frac{Kq_1q_2\,\text{sen}\,\alpha}{h_f}$$
$$4{,}5 + 8 + \frac{200}{16} = h_f + \frac{100}{h_f}$$
$$h_f^2 - 25h_f + 100 = 0$$
$$h_{min} = 5\ m$$
$$h_{max} = 20\ m$$

Lembrando que $d = \frac{h}{\sin\alpha}$, temos:

$$d_{min} = 10\ m$$
$$d_{max} = 40\ m$$

b) Enquanto a força gravitacional for maior que a repulsão elétrica o bloco 2 continuará a ser acelerado. Quando a distância entre as cargas for suficientemente pequena para a força elétrica se sobressair a força peso o bloco começará a perder velocidade. Em luz do que foi exposto, a velocidade será máxima no ponto onde para de acelerar, logo antes de começar a ser desacelerada, ou seja, no ponto de força resultante nula:

$$\frac{Kq_1q_2}{d_{eq}^2} = m_2 g \operatorname{sen}\alpha$$
$$\frac{200}{d_{eq}^2} = \frac{1}{2}$$
$$d_{eq} = 20\ m$$

Conservando energia entre a configuração inicial e a encontrada acima:

$$\frac{1}{2}m_2v^2 + m_2gh + \frac{Kq_1q_2}{\frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}} = \frac{1}{2}m_2v_{max}^2 + m_2gh_{eq} + \frac{Kq_1q_2 \operatorname{sen}\alpha}{h_{eq}}$$
$$25 = \frac{v_{max}^2}{20} + 10 + \frac{100}{10}$$
$$v_{max} = 10\ m/s$$

Gabarito: a) $d_{min} = 10\ m$ e $d_{máx} = 40\ m$ b) $10\ m/s$

---

32. (IME – 2002)

A figura ilustra a situação inicial, em que dois blocos, considerados puntiformes e carregados eletricamente com cargas $Q_A = +5 \times 10^{-5} C$ e $Q_B = +4 \times 10^{-4} C$, encontram-se afastados pela distância z. O bloco A desloca-se com velocidade $v_i = 5\ m/s$ e dista x do anteparo. O bloco B encontra-se afixado na parede e o conjunto mola-anteparo possui massa desprezível. Sabendo que a superfície entre o bloco B e o anteparo não possui atrito, e que na região à esquerda do anteparo o coeficiente de atrito dinâmico da superfície é $\mu_C = 0{,}5$. Determine:

a) a velocidade com que o bloco A atinge o anteparo.

b) a compressão máxima y da mola, considerando para efeito de cálculo que $z + x + y \cong z + x$.

c) a energia dissipada até o momento em que a mola atinge sua deformação máxima.

Dados:

Constante eletrostática $K = 9 \times 10^9 N.m^2/C^2$.

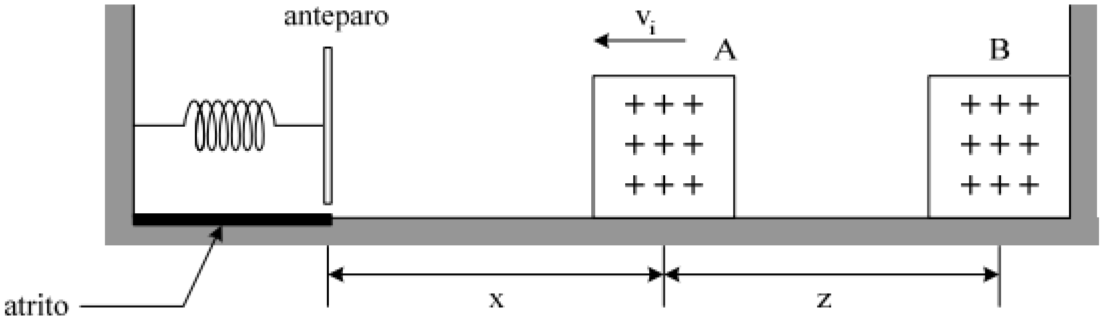
Constante de elasticidade da mola = 52 N/m.

Distância z entre os dois blocos = 9 m.

Distância x entre o bloco A e o anteparo = 11 m.

Massa do bloco A = 2 kg.

Aceleração da gravidade $g = 10 m/s^2$.



Comentários:

a) Conservando energia:

$$E_0 = E_f$$
$$K_0 + U_0 = K_f + U_f$$
$$\frac{1}{2}m_A v_i^2 + \frac{kQ_AQ_B}{z} = \frac{1}{2}m_A v^2 + \frac{kQ_AQ_B}{x+z}$$
$$25 + \frac{9 \cdot 2 \cdot 10}{9} = v^2 + \frac{9 \cdot 2 \cdot 10}{20}$$
$$v^2 = 36$$
$$v = 6\, m/s$$

b) Conservando energia novamente, entre o ponto inicial e o ponto de parada do bloco A:

$$K_0 + U_0 = K_f + U_f$$
$$\frac{1}{2}m_A v_i^2 + \frac{kQ_AQ_B}{z} = 0 + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{kQ_AQ_B}{x+z+y} + \tau_{atrito}$$

Segundo o enunciado, para efeito de cálculos, podemos fazer $x + z + y \cong x + z$:

$$25 + \frac{9 \cdot 2 \cdot 10}{9} = 26y^2 + \frac{9 \cdot 2 \cdot 10}{20} + 10y$$
$$26y^2 + 10y - 36 = 0$$

A única solução que nos interessa é a positiva:

$$y = 1\, m$$

c) A energia dissipada é igual ao trabalho feito pelo atrito:

$$\tau_{atrito} = \mu m g y = 10\, J$$

Gabarito: a) 6 m/s b) $y = 1\, m$ c) $10\, J$

---

33. (IME – 2003)

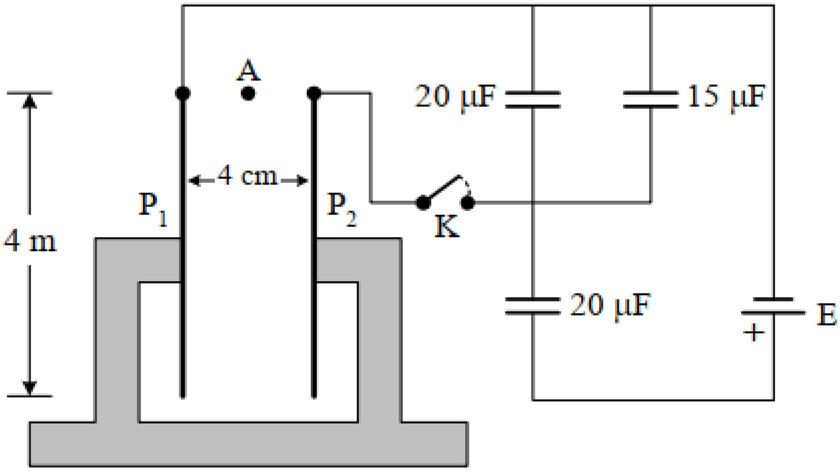
A figura abaixo mostra duas placas metálicas retangulares e paralelas, com 4 m de altura e afastadas de 4 cm, constituindo um capacitor de $5\mu F$. No ponto A, equidistante das bordas superiores das placas, encontra-se um corpo puntiforme com 2g de massa e carregado com $+4\,\mu C$.

O corpo cai livremente e após 0,6 s de queda livre a chave K é fechada, ficando as placas ligadas ao circuito capacitivo em que a fonte E tem $60\ V$ de tensão. Determine:

1. com qual das placas o corpo irá se chocar (justifique sua resposta);

2. a que distância da borda inferior da placa se dará o choque.

Dado: aceleração da gravidade: $g = 10\ m/s^2$.



Comentários:

a) A carga é atraída pela placa da esquerda, a qual será negativa pelo sentido da fonte de tensão.
b) Devemos calcular a diferença de potencial entre as placas. Perceba que os 3 primeiros capacitores estão em paralelo:

$$C_{eq,1} = 5\mu F\ //20\mu F//15\mu F$$

$$C_{eq,1} = 40\mu F$$

O capacitor equivalente acima está em série com o capacitor de $20\mu F$:

$$C_{eq,total} = \frac{40}{3}\mu F = \frac{q}{E}$$

A tensão entre as placas deve ser, então:

$$V_1 = \frac{q}{C_{eq,1}} = \frac{E}{3} = 20\ V$$

O campo entre as placas é dado por;

$$E(campo) = \frac{V_1}{d} = \frac{20}{4 \cdot 10^{-2}} = 500\ V/m$$

Aplicando $F = ma$ a partícula, na direção horizontal, obtemos:

$$a_x = \frac{E(campo)q}{m} = 1\ m/s^2$$

Calculando o tempo que a partícula leva para percorrer metade da distância entre as placas na horizontal, momento na qual colidirá com uma delas:

$$\frac{a_x^2 t_{col}^2}{2} = \frac{d}{2}$$

$$t = 0{,}2\ s$$

Esse é o tempo que se passa após o fechamento da chave K, assim, o tempo total, desde que a partícula é abandonada, é dado por:

$$t_{total} = 0{,}8\ s$$

A partícula se desloca na direção vertical com aceleração constante durante todo o intervalo t_{total}:

$$\Delta y = \frac{g t_{total}^2}{2} = 3{,}2\ m$$

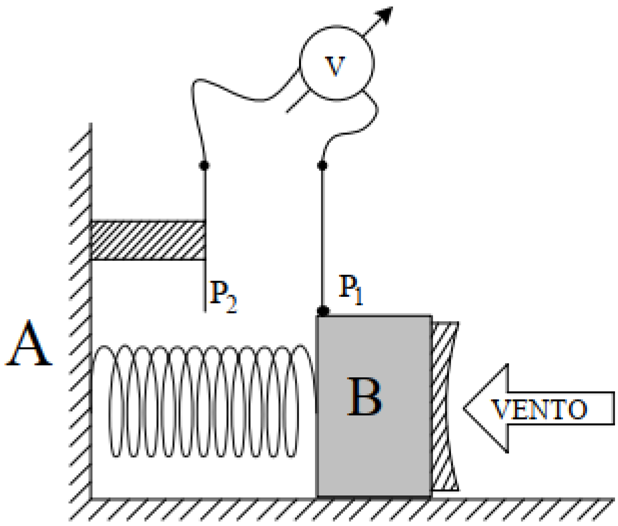
Logo, dos 4 metros, restam $0.8\ m$.

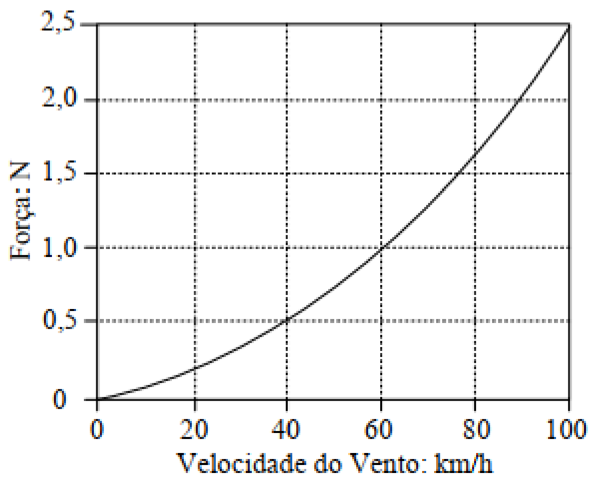
Gabarito: a) placa negativa b) 0,8 m

---

34. (IME – 2008)

Um bloco B, de material isolante, sustenta uma fina placa metálica P_1, de massa desprezível, distante 8 cm de outra placa idêntica, P_2, estando ambas com uma carga $Q = 0{,}12\ \mu C$. Presa à parede A e ao bloco está uma mola de constante $k = 80\ N/m$, inicialmente não deformada. A posição de equilíbrio do bloco depende da força exercida pelo vento. Esta força é uma função quadrática da velocidade do vento, conforme apresenta o gráfico abaixo. Na ausência do vento, a leitura do medidor de tensão ideal é de 16 mV. Calcule a velocidade do vento quando o bloco estiver estacionário e a leitura do medidor for de 12 mV. Despreze o atrito.





Comentários:

Seja x_1 a deformação da mola quando não há vento e x_2 a deformação da mola quando a leitura do voltímetro for $12\ mV$. A placa 1 sofre uma força devida ao campo elétrico produzido pela placa 2, o qual é metade do campo total entre as placas:

$$E_2 = \frac{E_{total}}{2} = \frac{V}{2d} \quad (eq. 1)$$

Onde d é uma distância arbitrária entre as placas.

Equilibrando as forças na configuração 1 (sem vento):

$$kx_1 = E_2 Q$$

$$kx_1 = \frac{V_1 Q}{2(0{,}08 - x_1)}$$

$$80x_1 = \frac{16 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}12 \cdot 10^{-6}}{2(0{,}08 - x_1)}$$

$$x_1(0{,}08 - x_1) = 1{,}2 \cdot 10^{-11}$$

$$x_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-10}\ m$$

De (1) temos:

$$V = dE_{total} = d \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Como a densidade de cargas nas placas é constante temos que o potencial é proporcional à distância entre as placas:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{0{,}08 - x_1}{0{,}08 - x_2} \approx \frac{0{,}08}{0{,}08 - x_2} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$x_2 = 0{,}02\ m$$

Equilibrando as forças na configuração 2:

$$kx_2 = F_{vento} + \frac{V_2 Q}{2(0{,}08 - x_2)}$$

$$1{,}6 = F_{vento} + \frac{16 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}12 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 0{,}06}$$

$$F_{vento} \approx 1{,}6\ N$$

Segundo o gráfico o valor acima corresponde a $80\ km/h$.

Gabarito: 80 km/h

---

35. (IME – 2009)

Um capacitor de capacitância inicial C_0 tem suas placas metálicas mantidas paralelas e afastadas de uma distância d pelos suportes e conectadas a uma fonte de V_0 volts, conforme a figura (SITUAÇÃO 1). No interior de tal capacitor, encostada às placas, se encontra uma mola totalmente relaxada, feita de material isolante e massa desprezível. Em determinado instante a fonte é desconectada e, em seguida, a placa superior é liberada dos suportes, deslocando-se no eixo vertical. Considerando que a placa superior não entre em oscilação após ser liberada e que pare a uma distância L da placa inferior (SITUAÇÃO 2), determine:

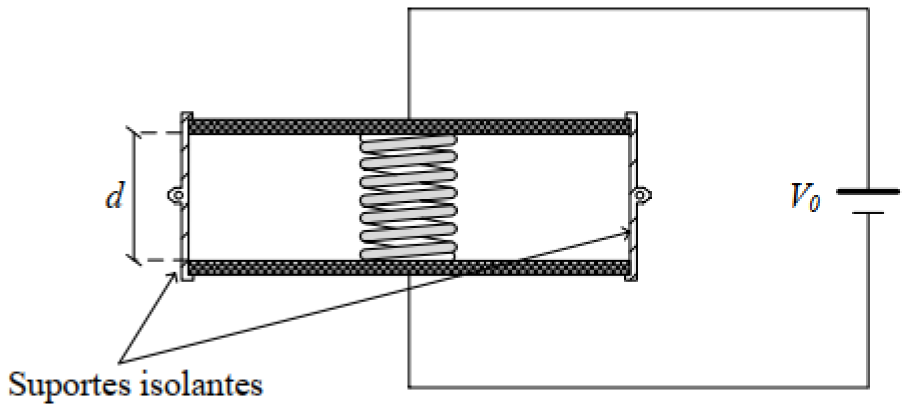
a) a energia total em cada uma das duas situações, em função de C_0, V_0, d e L;

b) a constante elástica da mola em função de C_0, V_0 e d que resulte em um afastamento de $L = d/2$ entre as placas do capacitor.

Observações:

• Despreze o peso da placa superior, o efeito de borda no capacitor e o efeito da mola sobre a capacitância.

• Os suportes são de material isolante



Comentários:

a) Como a mola está relaxada no início, a energia total é igual à armazenada no capacitor:

$$E_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 \quad (*)$$

Após desconectar-se a bateria teremos uma carga constante nas placas do capacitor:

$$q = C_0 V_0 \quad (eq.1)$$

A capacitância de um capacitor de placas planas é inversamente proporcional a distância entre as placas, assim:

$$C_{final} = C_0 \frac{d}{L} \quad (eq.2)$$

Pelo equilíbrio da placa superior:

$$k(d - L) = E_{placa,inf} q = \frac{E_{total}}{2} q = q \frac{V_{final}}{2L} = \frac{q^2}{2C_{final} L} \quad (eq.3)$$

A energia total na situação final será a soma da energia no capacitor mais a energia potencial da mola:

$$E_{final} = \frac{1}{2C_{final}} q^2 + \frac{1}{2} k(d - L)^2$$

Substituindo (1), (2) e (3) na equação acima, obtemos:

$$E_{final} = \frac{L}{2d} C_0V_0^2 \left(\frac{L+d}{2L}\right)$$

$$E_{final} = \frac{C_0V_0^2(L+d)}{4d} \quad (**)$$

b) Desenvolvendo (3) para $L = \frac{d}{2}$, temos:

$$k \cdot \frac{d}{2} = \frac{(C_0V_0)^2L}{2C_0dL}$$

$$k = \frac{C_0V_0^2}{d^2}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{E_{inicial} = \frac{C_0V_0^2}{2}}$ $\boldsymbol{E_{final} = \frac{C_0V_0^2(L+d)}{4d}}$ **b)** $\boldsymbol{k = \frac{C_0V_0^2}{d^2}}$

---

36. (IME – 2012)

Um capacitor de placas paralelas, entre as quais existe vácuo, está ligado a uma fonte de tensão. Ao se introduzir um dielétrico entre as placas,

a) a carga armazenada nas placas aumenta.

b) o campo elétrico na região entre as placas aumenta.

c) a diferença de potencial entre as placas aumenta.

d) a capacitância diminui.

e) a energia armazenada no capacitor diminui.

Comentários:

a) **Correta**. O campo elétrico gerado pelas placas cria pequenos dipolos na matéria, o que resulta em uma carga negativa se acumulando próxima ao lado positivo das placas e positiva no lado negativo.

O campo entre as placas é dado por: $E = Vd$

Portanto se mantém constante, já que o potencial também o é

Perceba que as cargas que se acumulam no dielétrico produzem um campo que se opõe ao original, logo para o campo se manter constante o campo das placas deve aumentar e, com isso, sua carga também. ($E = \frac{q}{A\varepsilon_0}$)

b) **Incorreta**. Veja a).

c) **Incorreta.** Obviamente se mantém constante, devido à fonte de tensão.

d) **Incorreta.** Por definição:

$$C = \frac{q}{V}$$

Como a carga aumenta e voltagem mantém constante temos um aumento na capacitância.

e) **Incorreta.** A energia armazenada no capacitor é dada por:

$$U = \frac{1}{2} C V^2$$

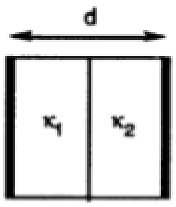
Como a capacitância aumenta, temos um aumento no armazenamento de energia também

Gabarito: A

---

37. (OBF – 1ª fase – 2010)

Um capacitor é construído a partir de duas placas de metal quadrada de área L^2, separadas por uma distância d. Numa das metades do espaço interno, preenche-se com material de constante dielétrica k_1 e na outra metade com material de constante dielétrica k_2. Calcule a capacitância deste capacitor, assumindo que seu valor é C_0 na situação em que não há material dentro das placas.



a) $5C_0 k_1 k_2/(k_1 + k_2)$

b) $C_0(k_1 + k_2)$

c) $C_0 k_1 k_2/(k_1 + k_2)$

d) $2C_0 k_1 k_2/(k_1 + k_2)$

e) $C_0(k_1 + k_2)/2$

Comentários:

A capacitância C_0 é dada por:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d}$$

Para cada região preenchida com um dielétrico, temos uma capacitância:

$$C_1 = \frac{k_1 \varepsilon_0 L^2}{\frac{d}{2}} = 2k_1 \left(\frac{\varepsilon_0 L^2}{d} \right) = 2k_1 C_0$$

$$C_2 = \frac{k_2 \varepsilon_0 L^2}{\frac{d}{2}} = 2k_2 \left(\frac{\varepsilon_0 L^2}{d} \right) = 2k_2 C_0$$

Para obtermos a capacitância do nosso capacitor basta ver que C_1 e C_2 estão em série, formando a capacitância desejada. Portanto:

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C = \frac{(2k_1C_0) \cdot (2k_2C_0)}{2k_1C_0 + 2k_2C_0}$$

$$\boxed{C = \left(\frac{2k_1k_2}{k_1 + k_2}\right) C_0}$$

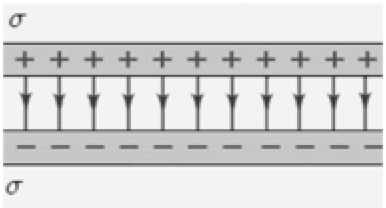
Gabarito: D.

---

38. (OBF – 1ª fase – 2015)

Considere que cada uma das placas paralelas de um capacitor possua uma área de $2000\ cm^2$ e que a distância entre as placas seja de $1,0\ cm$. Com o capacitor conectado a uma fonte de alimentação o mesmo é carregado até atingir uma diferença de potencial de $3000\ V$. Depois de desconectado da fonte de alimentação, é inserida uma camada de material isolante entre as placas. Verificou-se que a diferença de potencial diminuiu para $1000\ V$. Qual a capacitância depois de inserido o material dielétrico?

Considere a permissividade elétrica no vácuo: $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}\ F/m$.



a) $300\ pF$
b) $431\ pF$
c) $531\ pF$
d) $600\ pF$
e) $750\ pF$

Comentários:

Antes de inserir o dielétrico entre as placas do capacitor, sua capacitância era dada por:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{8,85 \times 10^{-12}(2000 \times 10^{-4})}{1 \times 10^{-2}} = 177\ pF$$

Portanto, a carga armazenada quando se aplica $3000\ V$ é de:

$$Q = (177\ pF) \cdot (3000\ V)$$

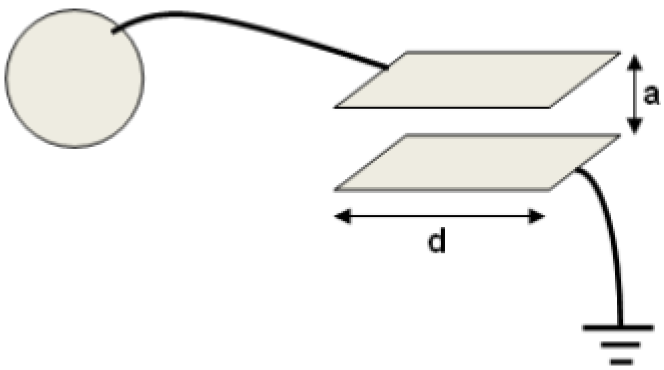
Assim, a nova capacitância será de:

$$C = \frac{Q}{\Delta V'} = \frac{(177\ pF) \cdot (3000\ V)}{1000\ V} = 531\ pF$$

Gabarito: C.

39. (OBF – 3ª fase – 2009)

Duas placas condutoras, planas, paralelas, quadradas de lado d, separadas por uma distância a muito menor que d, estão dispostas isoladamente formando um capacitor plano. Uma das placas é aterrada e a outra é ligada por fio condutor a uma esfera condutora de raio R. A figura 6 mostra um esboço desse sistema.



Uma carga elétrica Q, positiva, foi colocada na placa superior do capacitor. Na situação de equilíbrio eletrostático, considere o meio entre as placas como sendo o vácuo, que os efeitos de borda são desprezíveis, bem como a intensidade do campo elétrico de um elemento (esfera, capacitor ou terra) sobre qualquer outro. Determine:

a) A fração de Q que permanece na placa superior.

b) A intensidade do campo elétrico a uma distância 2R do centro da esfera. Expresse seus resultados como função das grandezas citadas no enunciado e constantes universais quando for o caso.

Comentários:

a) Quando atingido o equilíbrio eletrostático, o potencial da placa superior do capacitor é o mesmo potencial da esfera, devido a conexão feita através de um fio. Tal conexão permite transferência de elétrons de um condutor para o outro. Na situação de equilíbrio, vamos admitir que a esfera tem carga Q_e e a placa superior tem carga Q_{Sup}, obedecendo a condição:

$$V_{esf} = V_{superior}$$

$$\frac{KQ_e}{R} = \frac{Q_{Sup}}{C}$$

Dado que $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ e $C = \frac{\varepsilon_0 d^2}{a}$, temos a relação das cargas:

$$\frac{Q_e}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q_{Sup}\cdot a}{\varepsilon_0 d^2}$$

$$Q_e = \frac{4\pi Ra}{d^2} Q_{Sup}$$

Pelo Princípio da Conservação das Cargas, temos:

$$Q_e + Q_{Sup} = Q$$

Portanto:

$$\frac{4\pi Ra}{d^2} Q_{Sup} + Q_{Sup} = Q$$

$$\boxed{Q_{Sup} = \frac{Q}{1 + \frac{4\pi Ra}{d^2}}}$$

b) Por definição, ao passar a gaussiana, o campo dependerá só da carga interna, assim, temos que:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_e}{(2R)^2}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi Ra}{d^2}\frac{Q}{\left(1 + \frac{4\pi Ra}{d^2}\right)}\frac{1}{4R^2}$$

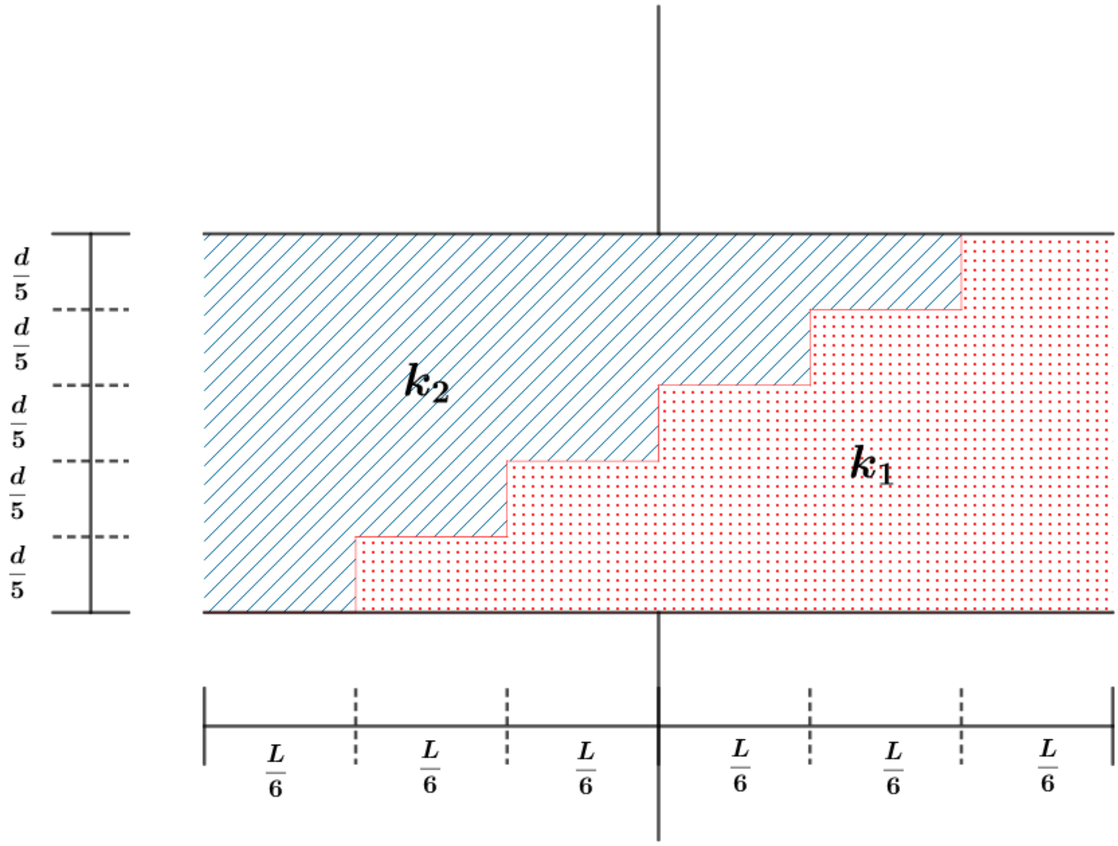
$$\boxed{E = \frac{aQ}{4\varepsilon_0 R(d^2 + 4\pi Ra)}}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{Q_{Sup} = \frac{Q}{1+\frac{4\pi Ra}{d^2}}}$ **b)** $\boldsymbol{E = \frac{aQ}{4\varepsilon_0 R(d^2+4\pi Ra)}}$

---

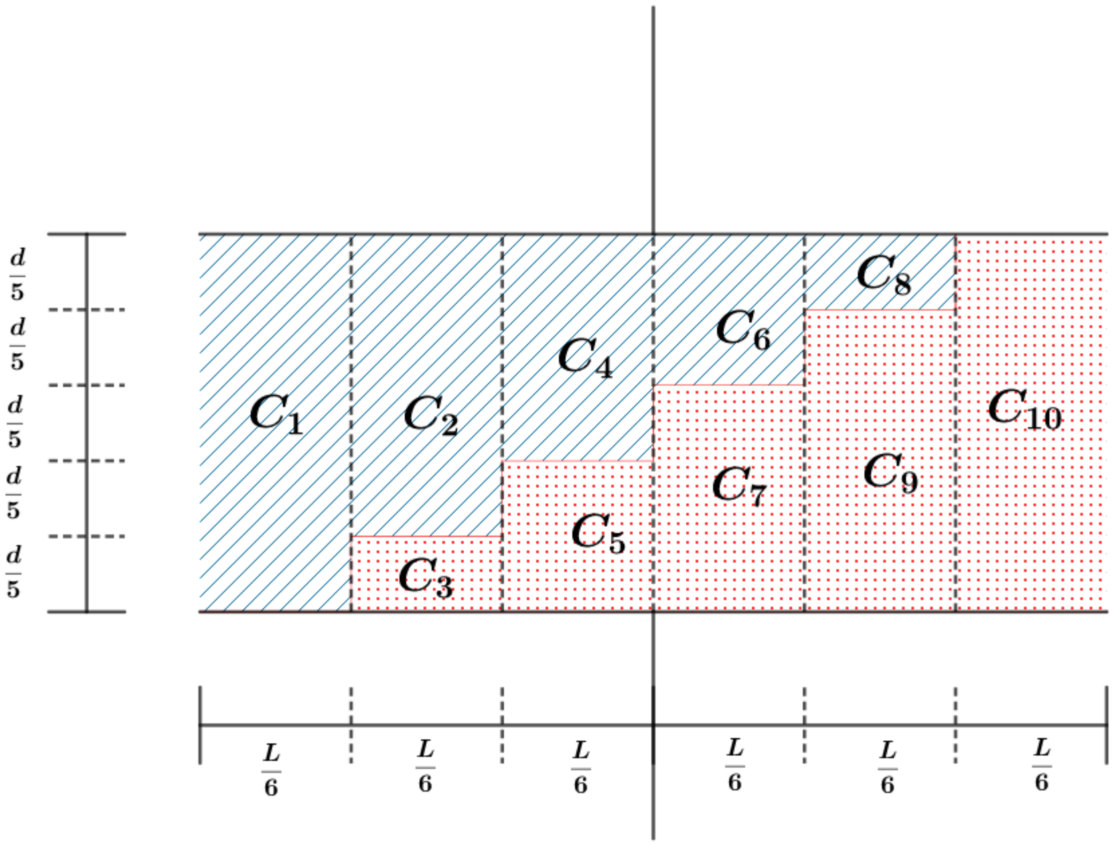
40. (Autoria própria)

Considere o capacitor de placas paralelas da figura abaixo, onde a área das placas é A e a distância entre elas é d. O espaço interno é preenchido com dois dielétricos de tal forma que $k_2 = 2k_1$. Calcule a capacitância desse conjunto em função de k_1, ε_0, A e d.



Comentários:

Vamos dividir nosso capacitor na soma de capacitores em serie e em paralelo:



Dessa forma, temos que definir cada capacitância menor, da seguinte forma:

$$C_1 = \frac{k_2 \varepsilon_0 \left(\frac{A}{6}\right)}{d} = \frac{k_2 \varepsilon_0 A}{6d}$$

$$C_2 = \frac{k_2 \varepsilon_0 \left(\frac{A}{6}\right)}{\frac{4d}{5}} = \frac{5k_2 \varepsilon_0 A}{24d}$$

$$C_3 = \frac{k_1 \varepsilon_0 \left(\frac{A}{6}\right)}{\frac{d}{5}} = \frac{5k_1 \varepsilon_0 A}{6d}$$

$$C_4 = \frac{k_2 \varepsilon_0 \left(\frac{A}{6}\right)}{\frac{3d}{5}} = \frac{5k_2 \varepsilon_0 A}{18d}$$

$$C_5 = \frac{k_1 \varepsilon_0 \left(\frac{A}{6}\right)}{\frac{2d}{5}} = \frac{5k_1 \varepsilon_0 A}{12d}$$

$$C_6 = \frac{k_2 \varepsilon_0 \left(\frac{A}{6}\right)}{\frac{2d}{5}} = \frac{5k_2 \varepsilon_0 A}{12d}$$

$$C_7 = \frac{k_1 \varepsilon_0 \left(\frac{A}{6}\right)}{\frac{3d}{5}} = \frac{5k_1 \varepsilon_0 A}{18d}$$

$$C_8 = \frac{k_2 \varepsilon_0 \left(\frac{A}{6}\right)}{\frac{d}{5}} = \frac{5k_2 \varepsilon_0 A}{6d}$$

$$C_9 = \frac{k_1 \varepsilon_0 \left(\frac{A}{6}\right)}{\frac{4d}{5}} = \frac{5k_1 \varepsilon_0 A}{24d}$$

$$C_{10} = \frac{k_1 \varepsilon_0 \left(\frac{A}{6}\right)}{d} = \frac{k_1 \varepsilon_0 A}{6d}$$

Notamos que C_2 está em série com C_3, o mesmo acontece com C_4 e C_5, C_6 e C_7, C_8 e C_9.

Assim temos que:

$$C_{2,3} = \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3}$$

$$C_{2,3}=\frac{\left(\frac{5k_2\varepsilon_0A}{24d}\right)\cdot\left(\frac{5k_1\varepsilon_0A}{6d}\right)}{\frac{5k_2\varepsilon_0A}{24d}+\frac{5k_1\varepsilon_0A}{6d}}$$

$$\boxed{C_{2,3}=\frac{5k_1k_2\varepsilon_0A}{(k_2+4k_1)6d}}$$

$$C_{4,5}=\frac{C_4\cdot C_5}{C_4+C_5}$$

$$C_{4,5}=\frac{\left(\frac{5k_2\varepsilon_0A}{18d}\right)\cdot\left(\frac{5k_1\varepsilon_0A}{12d}\right)}{\frac{5k_2\varepsilon_0A}{18d}+\frac{5k_1\varepsilon_0A}{12d}}$$

$$\boxed{C_{4,5}=\frac{5k_1k_2\varepsilon_0A}{(2k_2+3k_1)6d}}$$

$$C_{6,7}=\frac{C_6\cdot C_7}{C_6+C_7}$$

$$C_{6,7}=\frac{\left(\frac{5k_2\varepsilon_0A}{12d}\right)\left(\frac{5k_1\varepsilon_0A}{18d}\right)}{\frac{5k_2\varepsilon_0A}{12d}+\frac{5k_1\varepsilon_0A}{18d}}$$

$$\boxed{C_{6,7}=\frac{5k_1k_2\varepsilon_0A}{(3k_2+2k_1)6d}}$$

$$C_{8,9}=\frac{C_8\cdot C_9}{C_8+C_9}$$

$$C_{8,9}=\frac{\left(\frac{5k_2\varepsilon_0A}{6d}\right)\cdot\left(\frac{5k_1\varepsilon_0A}{24d}\right)}{\frac{5k_2\varepsilon_0A}{6d}+\frac{5k_1\varepsilon_0A}{24d}}$$

$$\boxed{C_{8,9}=\frac{5k_1k_2\varepsilon_0A}{(4k_2+k_1)6d}}$$

Assim, notamos que os capacitores C_1, $C_{2,3}$, $C_{4,5}$, $C_{6,7}$, $C_{8,9}$ e C_{10} estão em paralelo. É comum usar a seguinte representação:

$$C_1//C_{2,3}//C_{4,5}//C_{6,7}//C_{8,9}//C_{10}$$

Portanto, a capacitância equivalente é dada por:

$$C_{eq}=C_1+C_{2,3}+C_{4,5}+C_{6,7}+C_{8,9}+C_{10}$$

$$C_{eq}=\frac{k_2\varepsilon_0A}{6d}+\frac{5k_1k_2\varepsilon_0A}{(k_2+4k_1)6d}+\frac{5k_1k_2\varepsilon_0A}{(2k_2+3k_1)6d}+\frac{5k_1k_2\varepsilon_0A}{(3k_2+2k_1)6d}+\frac{5k_1k_2\varepsilon_0A}{(4k_2+k_1)6d}+\frac{k_1\varepsilon_0A}{6d}$$

Aplicando que $k_2=2k_1$, vem:

$$C_{eq}=\frac{2k_1\varepsilon_0 A}{6d}+\frac{5k_1 2k_1\varepsilon_0 A}{(2k_1+4k_1)6d}+\frac{5k_1 2k_1\varepsilon_0 A}{(2(2k_1)+3k_1)6d}+\frac{5k_1 2k_1\varepsilon_0 A}{(3(2k_1)+2k_1)6d}+\frac{5k_1 2k_1\varepsilon_0 A}{(4(2k_1)+k_1)6d}+\frac{k_1\varepsilon_0 A}{6d}$$

$$C_{eq}=\frac{k_1\varepsilon_0 A}{6d}\left(3+\frac{10}{6}+\frac{10}{7}+\frac{10}{8}+\frac{10}{9}\right)$$

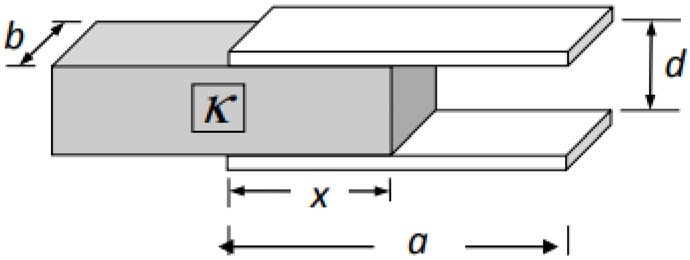
$$\boxed{C_{eq}=\frac{2131}{1512}\cdot\frac{k_1\varepsilon_0 A}{d}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{\frac{2131}{1512}\cdot\frac{k_1\varepsilon_0 A}{d}}$

---

41. (Tipler – modificada)

Um capacitor de placas paralelas retangulares com comprimento a e largura b possui um dielétrico de largura b parcialmente inserido entre as placas (distância x), conforme mostrado na figura abaixo.



f) Determine a capacitância em função de x. Despreze os efeitos de bordas. Verifique o resultado quando $x=0$ e $x=a$.

Considere que o capacitor foi carregado com carga Q.

g) Qual é a energia armazenada no capacitor?

h) Uma vez que a energia do capacitor diminui quando x aumenta, o campo elétrico deve realizar um trabalho positivo sobre o dielétrico, o que significa que deve existir uma força elétrica puxando-o para dentro. Calcule a força examinando como a energia varia com x.

i) Expresse a força em função da capacitância e da tensão.

j) De onde vem essa força?

Comentários:

a) Devido ao fato de o campo elétrico ser considerado perpendicular às placas do capacitor, orientado do maior potencial para o menor potencial e desprezado os efeitos nas bordas, a parte do dielétrico que fica fora da região entre as placas não interfere na polarização das moléculas na região dentro das placas. Assim, tudo se passa como se o tivéssemos dois capacitores em paralelo, sendo que o primeiro preenche uma região até x com um dielétrico k e o segundo (de $a-x$ até a) sem dielétrico.

Assim, a capacitância é expressa por:

$$C=\frac{k\varepsilon_0 bx}{d}+\frac{\varepsilon_0 b(a-x)}{d}$$

$$\boxed{C(x)=\frac{\varepsilon_0 b}{d}[(k-1)x+a]}$$

Note que, se $x=0$, não existe material dielétrico no interior do capacitor, logo:

$$C=\frac{\varepsilon_0(a\cdot b)}{d}$$

De fato, temos que:

$$C(0)=\frac{\varepsilon_0 b}{d}[(k-1)0+a]=\frac{\varepsilon_0(a\cdot b)}{d}$$

Por outro lado, se $x=a$ temos:

$$C(a)=\frac{\varepsilon_0 b}{d}[(k-1)a+a]=\frac{k\varepsilon_0(a\cdot b)}{d}$$

Resultado esperado, já que todo o capacitor está preenchido com o material dielétrico de constante k.

b) A energia armazenada no capacitor em função de x é dada por:

$$E_P=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$E_P=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{\varepsilon_0 b}{d}[(k-1)x+a]}$$

$$\boxed{E_P=\frac{d\cdot Q^2}{2\varepsilon_0\cdot b[(k-1)x+a]}}$$

c) Para x, temos a energia $(E_P)_x=\frac{d\cdot Q^2}{2\varepsilon_0\cdot b[(k-1)x+a]}$. Se aumentarmos x em δ, a energia é diminuída para:

$$(E_P)_{x+\delta}=\frac{d\cdot Q^2}{2\varepsilon_0\cdot b[(k-1)(x+\delta)+a]}$$

A diferença entre as energias será o trabalho da força procurada para o deslocamento pequeno δ. Assim:

$$\tau_F=(E_P)_x-(E_P)_{x+\delta}$$

$$\tau_F=\frac{d\cdot Q^2}{2\varepsilon_0\cdot b}\left(\frac{1}{(k-1)x+a}-\frac{1}{(k-1)(x+\delta)+a}\right)$$

$$\tau_F=\frac{d\cdot Q^2}{2\varepsilon_0\cdot b}\left(\frac{(k-1)(x+\delta)+a-[(k-1)x+a]}{\big((k-1)x+a\big)\big((k-1)(x+\delta)+a\big)}\right)$$

$$\tau_F=\frac{d\cdot Q^2}{2\varepsilon_0\cdot b}\left(\frac{(k-1)\delta}{\big((k-1)x+a\big)\big((k-1)(x+\delta)+a\big)}\right)$$

Se considerarmos δ muito pequeno, poderemos desprezar ele no denominador e o trabalho se resume a:

$$\tau_F = \frac{d \cdot Q^2}{2\varepsilon_0 \cdot b} \frac{(k-1)}{\big((k-1)x + a\big)^2} \delta$$

Assim, podemos escrever que:

$$\tau_F = F \cdot \delta = \frac{d \cdot Q^2}{2\varepsilon_0 \cdot b} \frac{(k-1)}{\big((k-1)x + a\big)^2} \delta$$

Portanto:

$$\boxed{F = \frac{d \cdot Q^2}{2\varepsilon_0 \cdot b} \frac{(k-1)}{\big((k-1)x + a\big)^2}}$$

d) Pela definição de capacitância, temos que:

$$Q = C \cdot \Delta V$$

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{\frac{\varepsilon_0 b}{d}[(k-1)x + a]} = \frac{d \cdot Q}{\varepsilon_0 b[(k-1)x + a]}$$

Portanto a força em função da diferença de potencial é de:

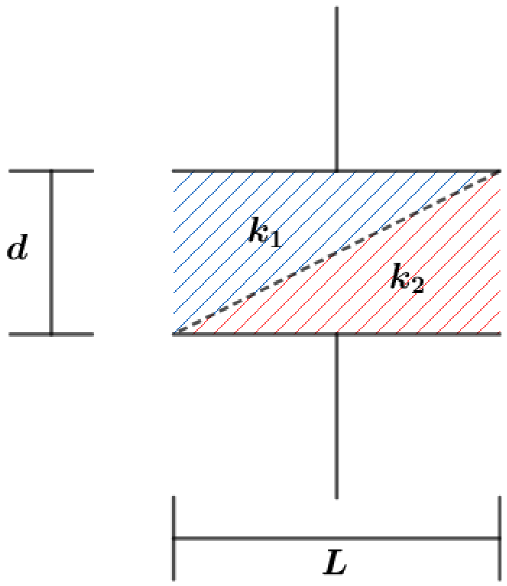
$$F = \frac{(k-1)b\varepsilon_0}{2d} \left(\frac{d \cdot Q}{\varepsilon_0 b[(k-1)x + a]}\right)^2$$

$$\boxed{F = \frac{(k-1)b\varepsilon_0}{2d} \cdot (\Delta V)^2}$$

e) Essa força é devido ao efeito do campo no entorno das bordas do capacitor. Dessa forma, a força puxa o dielétrico para dentro do espaço entre as placas do capacitor.

42. (Desafio)

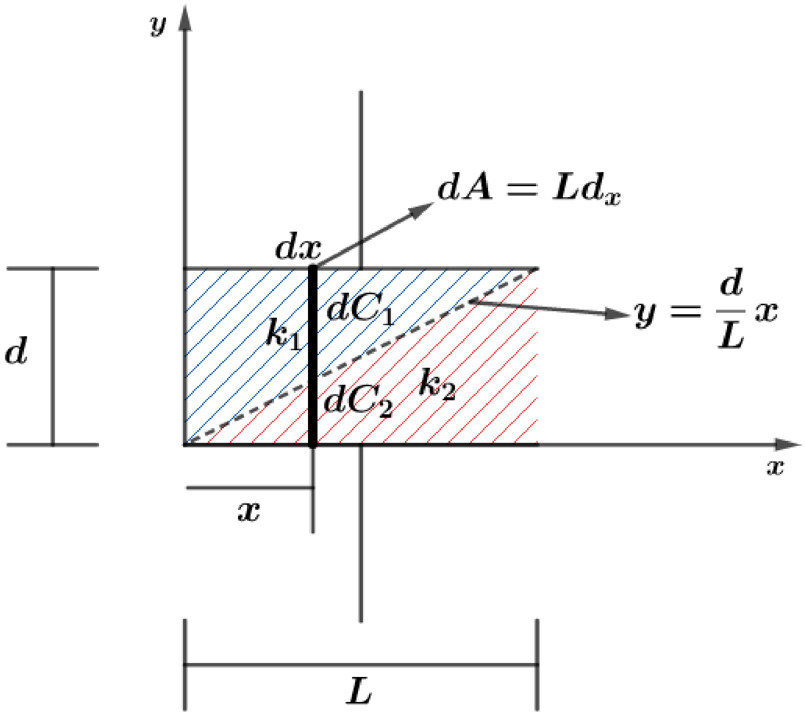
Considere o capacitor de placas paralelas, de área L^2, preenchido com dois dielétricos da seguinte forma:



Determine a capacitância desse capacitor.

Comentários:

Vamos adotar um eixo e calcular a capacitância em um dado por ponto x.



Assim, quando pegamos um elemento de área dA, para um dado "capacitorzinho" dC, temos que dois capacitores em série dC_1 e dC_2 definem esse "capacitorzinho". Assim, temos que:

$$dC = \frac{dC_1 \cdot dC_2}{dC_1 + dC_2} = \frac{\left(\frac{k_1 \varepsilon_0 L dx}{d-y}\right) \cdot \left(\frac{k_2 \varepsilon_0 L dx}{y}\right)}{\left(\frac{k_1 \varepsilon_0 L dx}{d-y}\right) + \left(\frac{k_2 \varepsilon_0 L dx}{y}\right)}$$

$$dC = \frac{k_1 k_2 \varepsilon_0 L}{(k_1 - k_2)y + k_2 d} \cdot dx$$

Como $y = \frac{d}{L}x$, então:

$$dC = \frac{k_1 k_2 \varepsilon_0 L}{(k_1 - k_2)\frac{d}{L}x \ + k_2 d} \cdot dx$$

Ao longo do eixo x temos diversos "capacitorzinhos", em paralelo, definindo a capacitância total.

Como bem sabemos, a capacitância em paralelo é dada por:

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Ou seja, somamos as capacitâncias em paralelo. Portanto, basta somarmos todas as capacitâncias de 0 a L, isto é:

$$C = \int_0^L \frac{k_1 k_2 \varepsilon_0 L}{(k_1 - k_2)\frac{d}{L}x \ + k_2 d} \cdot dx$$

$$C = (k_1 k_2 \varepsilon_0 L) \int_0^L \frac{1}{(k_1 - k_2)\frac{d}{L}x \ + k_2 d} \cdot dx$$

Da tabela de integração, temos que:

$$\int \frac{1}{a + bx} dx = \frac{\ln(a + bx)}{b}$$

Portanto:

$$C = (k_1 k_2 \varepsilon_0 L) \left[\frac{\ln\left((k_1 - k_2)\frac{d}{L}x \ + k_2 d \right)}{(k_1 - k_2)\frac{d}{L}} \right]_0^L$$

$$C = \frac{k_1 k_2 \varepsilon_0 L}{(k_1 - k_2)\frac{d}{L}} \left[\ln\left((k_1 - k_2)\frac{d}{L} \cdot L \ + k_2 d \right) - \ln\left((k_1 - k_2)\frac{d}{L} \cdot 0 \ + k_2 d \right) \right]$$

$$C = \frac{k_1 k_2 \varepsilon_0 L}{(k_1 - k_2)\frac{d}{L}} [\ln(k_1 d) - \ln(k_2 d)]$$

$$C = \frac{k_1 k_2 \varepsilon_0 L^2}{(k_1 - k_2)d} \ln\left(\frac{k_1 d}{k_2 d} \right)$$

$$\boxed{C = \frac{k_1 k_2 \varepsilon_0 L^2}{(k_1 - k_2)d} \ln\left(\frac{k_1}{k_2} \right)}$$

Gabarito: $\frac{k_1 k_2 \varepsilon_0 L^2}{(k_1 - k_2)d} \ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right)$

7. Considerações finais da aula

Com essa aula, fechamos toda eletrostática. Saliento que ainda não vimos alguns casos especiais de associação de capacitores que será abordado junto com resistores, por questões de didática.

O assunto dessa aula é de grande importância nos nossos vestibulares. Por isso, estude com calma e faça todos os exercícios do ITA e do IME. As duas últimas questões da lista são desafios. Não fique chateado se não conseguir resolver, pois não é tão simples assim. Na penúltima questão, eu acredito que alguma parte dela pode vir a cair no ITA, já que ela não aborda Cálculo para fazer e traz uma ideia um pouco diferente.

Além disso, vamos sempre colocar algumas questões de olimpíadas de física no nosso material. Alguns problemas possuem bastante semelhanças com as questões do ITA e do IME. Claro, lembre-se sempre de ter os pés no chão. Não precisa ser medalhista de olimpíada interplanetária de física para passar no ITA/IME.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@proftoniburgatto

8. Referências bibliográficas

[1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica volume 5. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.

[2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Selecionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.

[3] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física volume 3. 11ª ed. Saraiva, 1993. 303p.

[4] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física volume 3. 9ª ed. Moderna. 490p.

[5] Resnick, Halliday, Jearl Walker. Fundamentos de Física volume 3. 10ª ed. LTC. 365p.

[6] Paul A. Tipler, Gene Mosca. Física para Cientistas e Engenheiros volume 2. 5ª ed. LTC, 2006. 499 f.

9. Versão de aula

Versão de Aula	Data da última atualização
1.0	26/04/2019

123