MATEMÁTICA APLICADA

1 Hugo executou, em sequência, três tarefas que consomem exatamente o mesmo tempo cada uma, mas fez um intervalo de 10 minutos entre a primeira e a segunda e um intervalo de 15 minutos entre a segunda e a terceira. Ele começou a primeira tarefa exatamente às 11h e terminou a segunda tarefa exatamente às 13h20.
A que horas exatamente Hugo terminou a terceira tarefa?

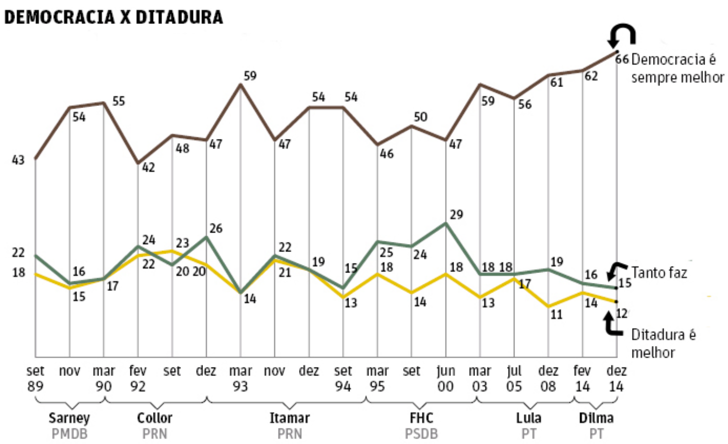
Resolução

De 11h às 13h20 temos um período de 2h20 = 140 minutos. Tirando o intervalo de 10 minutos entre a primeira e a segunda tarefa, temos 130 minutos para as duas primeiras tarefas e, portanto, cada tarefa consome 65 minutos.
Como a segunda tarefa terminou às 13h20 e Hugo fez um intervalo de 15 minutos entre a segunda e a terceira tarefa, devemos somar 15 + 65 = 80 minutos = 1h20 às 13h20, o que nos dará 14h40.
Logo, Hugo terminou a terceira tarefa exatamente às 14h40.

2 A figura mostra o resultado expresso, em porcentagem, da pesquisa realizada por um jornal da cidade de São Paulo, em que o grupo consultado tinha de responder à pergunta:

Com qual das afirmações você mais concorda?

1ª A democracia é sempre melhor.
2ª Em certas circunstâncias, é melhor uma ditadura.
3ª Tanto faz.



Fonte: Datafolha

A Considere que, a partir de fevereiro de 2014, o gráfico da opção “A democracia é sempre melhor” possa ser representado por uma função polinomial do 1º grau $y = ax + b$, em que x = 0 representa o mês fevereiro de 2014, x = 1, o mês março de 2014, e assim por diante.
Determine a função $y = ax + b$. Utilize os valores de y na forma inteira, por exemplo, 62 e 66 ao invés de 0,62 e 0,66.

B Considere que, a partir de fevereiro de 2014, o gráfico da opção “Em certas circunstâncias, é melhor uma ditadura” possa ser expresso por uma função da forma $y = a.e^{bx}$ (e é o número de Euler), em que x = 0 representa fevereiro de 2014, x = 1, março de 2014, e assim por diante.
Determine a função $y = a.e^{bx}$. Se julgar necessário, use as aproximações: $\ln 2 = 0{,}70; \ln 3 = 1{,}10; \ln 7 = 1{,}95$.

C Qual é a maior diferença, expressa em porcentagem, entre as opções “A democracia é sempre melhor” e “Em certas circunstâncias, é melhor uma ditadura”, no intervalo $0 \le x \le 80$ meses? Utilize as aproximações que julgar necessárias.

$$e^{-1} = 0{,}37;\ e^{-1,2} = 0{,}30;\ e^{-1,5} = 0{,}22;\ e^{-2} = 0{,}14$$

Resolução

A (0, 62); (10, 66)   m = 4/10 = 0,4
y – 62 = 0,4 (x – 0)   y = 0,4x + 62

B Para x = 0, y = 14 $y = 14.e^{bx}$
Para x = 10, y = 12 $12 = 14.e^{10b}$

Usamos logaritmos para determinar o valor de b:

$\ln 6 - \ln 7 = 10\,b$
0,70 + 1,10 – 1,95 = 10b   b = - 0,015

A função é $y = 14.e^{-0,015x}$

C A função linear é crescente e a função exponencial, decrescente. Portanto o maior valor ocorre para x = 80.
Temos:

0,4 (80) + 62 – (14. $e^{-0,015(80)}$) =
32 + 62 – (14. $e^{-0,015(80)}$) = 94 – (14. $e^{-1,2}$) = 94 – (14. 0,30) = 89,8.

A maior diferença é 89,8%.

3 Uma editora abriu duas lojas para venda direta de seus produtos aos consumidores: uma loja na rua e uma loja no *shopping*. Após um ano, uma pesquisa mostrou os seguintes resultados para as duas opções:

	Loja de Rua	Loja de Shopping
Investimento inicial (dezembro de 2014)	R$210 000,00	R$ 250 000,00
Receita anual de 2015	R$ 382 500,00	R$ 480 000,00
Custo anual de 2015	R$ 120 000,00	R$ 180 000,00

A Determine a taxa anual de juros compostos que a editora conseguiu com o lucro obtido em relação ao investimento inicial feito na Loja de Rua.

B Quanto deveria ter sido a mais a receita anual da Loja de Shopping para obter a mesma taxa de juro anual que a Loja de Rua?

Resolução

A 262 500 = 210 000 (1 + i)
1,25 = 1 + i
I = 0,25 = 25%

B 250 000 (1+25%)=x–180 000
x=492 500
492 500 – 480 000 = 12 500; R$ 12 500,00

4 Rubinho dirigiu seu carro de sua casa até o aeroporto para pegar um voo. Ele dirigiu 20 km nos primeiros 20 minutos, mas percebeu que chegaria 10 minutos atrasado se continuasse na mesma velocidade média. Assim, Rubinho aumentou sua velocidade média em 20 km/h no resto do percurso e chegou ao aeroporto 10 minutos adiantado.
Qual a distância da casa de Rubinho ao aeroporto?

Resolução

Rubinho dirigiu os primeiros 20 km em 20 minutos. Portanto, a uma velocidade média de 60 km/h.
Sendo *d* a distância da casa de Rubinho ao aeroporto, se continuasse a essa mesma velocidade média, Rubinho levaria um tempo $t_1 = \frac{d-20}{60}$ horas para chegar ao aeroporto.
Ao aumentar sua velocidade média em 20 km/h, esta passou a ser de 80 km/h e, assim, Rubinho levou um tempo $t_2 = \frac{d-20}{80}$ horas para chegar ao aeroporto. A diferença entre t_1 e t_2 é de 20 minutos, ou seja, $\frac{1}{3}$ de hora. Portanto:
$\frac{d-20}{60} - \frac{d-20}{80} = \frac{1}{3}$ e, daí, temos $d = 100$ km.

5 Um consumidor deseja comprar um aparelho e possui dois cupons promocionais para obter descontos na compra à vista desse aparelho, mas só pode usar um dos dois cupons:

- Cupom 1: 10% de desconto sobre o preço na etiqueta, se o preço na etiqueta for, no mínimo, igual a R$60,00;
- Cupom 2: R$20,00 de desconto sobre o preço na etiqueta, se o preço na etiqueta for, no mínimo, igual a R$120,00.

Seja *x* o preço na etiqueta de uma mercadoria, em reais.

A Escreva dois modelos funcionais que representem, respectivamente, os preços a serem pagos usando-se o cupom 1 ou usando-se o cupom 2, isto é, escreva duas funções $P_1(x)$ e $P_2(x)$ que expressem o preço a ser pago por uma mercadoria cujo preço na etiqueta seja *x* reais, quando usamos, respectivamente, o cupom 1 ou o cupom 2.

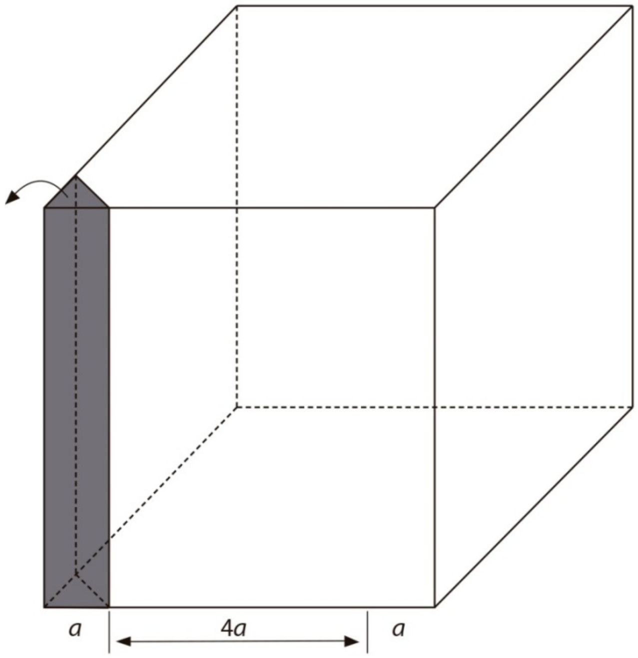
B Para que valores de *x* é financeiramente melhor usar o cupom 2?

Resolução

A O cupom 1 oferece 10% desconto para valores de $x \geq 60$ e não tem desconto para valores menores do que 60. Assim, $P_1(x) = \begin{cases} x & ,\text{se } x < 60 \\ 0{,}9x & ,\text{se } x \geq 60 \end{cases}$.
O cupom 2 oferece R$20,00 de desconto para valores de $x \geq 120$ e não tem desconto para valores menores do que 120. Assim, $P_2(x) = \begin{cases} x & ,\text{se } x < 120 \\ x-20 & ,\text{se } x \geq 120 \end{cases}$.

B Para valores menores do que 60 reais nenhum dos dois cupons oferece desconto e, portanto, são equivalentes.
Para valores de *x* satisfazendo a condição $60 \leq x < 120$, o cupom 1 oferece 10% de desconto e o cupom 2 não oferece desconto e, portanto, o cupom 1 é melhor.
Para valores de *x* satisfazendo a condição $x \geq 120$, o cupom 1 oferece 10% e o cupom 2 oferece R$20,00 de desconto. Para que o cupom 2 seja financeiramente melhor, devemos ter: $x - 20 < 0{,}9x$.
Daí, $0{,}1x < 20$ e, portanto, $x < 200$.
Logo, o cupom 2 é financeiramente melhor do que o cupom 1 para valores de *x* que satisfaçam a condição $120 \leq x < 200$.

6 Os quatro cantos de um cubo de aresta $6a$ são cortados, obtendo-se um novo sólido geométrico sem os quatro prismas retos, como o prisma indicado como exemplo na figura abaixo.



A Qual é a área do sólido geométrico formado em termos de a?

B Qual é o volume do novo sólido geométrico formado em termos de a?

Resolução

A A área do sólido geométrico é igual à soma das áreas:

- dos 4 retângulos de lados $a\sqrt{2}$ e $6a$: $4.(a\sqrt{2}.6a) = 24a^2\sqrt{2}$

- dos 4 retângulos de lados 4a e 6a: $4(4a.6a) = 96a^2$

- dos dois octógonos de área: $(6a.6a)-4.(a^2/2)=34a^2$ cada um

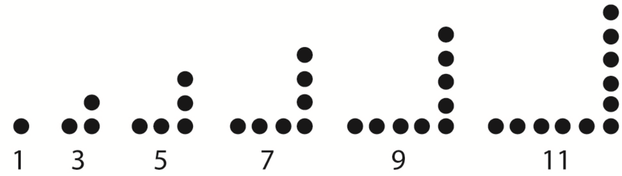
Portanto, a área é igual a: $24a^2\sqrt{2} + 96a^2 + 2.(34a^2) = 24a^2\sqrt{2} + 164a^2$

B O volume do novo sólido é igual ao volume do cubo menos a soma dos volumes dos quatro prismas:

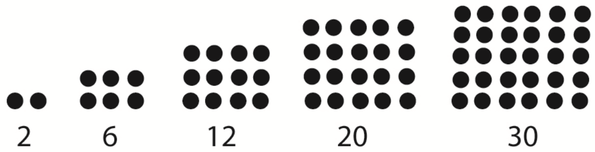
$$(6a)^3 - 4\left(\frac{a.a}{2}.6a\right) = 204a^3$$

7

A Gnomos são representações geométricas de números como pontos nos lados de um ângulo reto. Acrescentando gnomos, os babilônios descobriam muitas conexões entre os números. Qual é a soma dos 100 primeiros termos da sequência de gnomos da figura abaixo?



B Qual é a diferença de gnomos entre o centésimo primeiro e o centésimo termos da sequência da figura abaixo?



Resolução

A $S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}).100}{2} = (1+199).50 = 10000$ gnomos

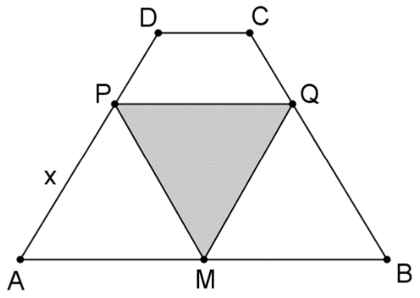
B Note que:

$$a_2 - a_1 = 4$$
$$a_3 - a_2 = 6$$
$$a_4 - a_3 = 8$$
$$....$$

A diferença entre $a_{101} - a_{100}$ é o centésimo termo da PA: (4, 6, 8, ...).

Portanto: $a_{100} = 4 + 99.2 = 202$ gnomos.

8 A figura abaixo mostra o trapézio isósceles *ABCD* de bases *AB* e *DC*, o segmento variável *PQ* paralelo a *AB* e o ponto *M*, médio de *AB*.



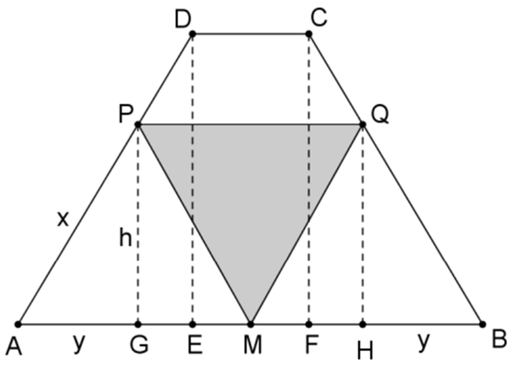
Considere as medidas a seguir:

$AB = 8$, $DC = 2$, $AD = BC = 5$ e $AP = x$ $(0 < x \leq 5)$

A Calcule a área do triângulo *MPQ* quando $x = 2$.

B Determine o valor máximo para a área do triângulo *MPQ*.

Resolução



Traçamos *DE*, *CF*, *PG* e *QH* perpendiculares a *AB* como na figura acima.
Como $EF = DC = 2$ e $AB = 8$ temos $AE = FB = 3$, pois o trapézio é isósceles. Assim, no triângulo retângulo *AED*, temos $DE = 4$.
Sejam $PG = h$ e $AG = y$.
Da semelhança entre os triângulos *AGP* e *AED* temos $\frac{h}{DE} = \frac{x}{AD} = \frac{y}{AE}$, ou seja, $\frac{h}{4} = \frac{x}{5} = \frac{y}{3}$ o que dá $h = \frac{4x}{5}$ e $y = \frac{3x}{5}$.
A base do triângulo *MPQ* é:

$$PQ = GH = AB - AG - HB = AB - 2y = 8 - \frac{6x}{5} = \frac{40 - 6x}{5}$$

A área $S(x)$ do triângulo *MPQ* é igual a $\frac{PQ \cdot h}{2}$, ou seja,

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{40 - 6x}{5} \cdot \frac{4x}{5} = \frac{-12x^2 + 80x}{25} = \frac{1}{25}(-12x^2 + 80x)$$

A $S(2) = \frac{-48 + 160}{25} = \frac{112}{25} = 4{,}48$.

B O valor máximo de $S(x)$ ocorre para $x = -\frac{80}{2(-12)} = \frac{10}{3}$.
Assim, o valor máximo da área do triângulo *MPQ* é:

$$S(\frac{10}{3}) = \frac{1}{25}(-12 \cdot \frac{100}{9} + 80 \cdot \frac{10}{3}) = 4(-\frac{12}{9} + \frac{8}{3}) = \frac{16}{3} .$$

$(\cong 5{,}33)$

9 Em um quarto escuro, dez meias brancas e dez meias pretas estão em uma gaveta.

A Uma pessoa, sem conseguir ver as cores das meias, quer retirar dois pares que combinem. Quantas meias deve retirar, no mínimo, para ter certeza de conseguir os pares desejados? Pares que combinem significa que cada par deve ter duas meias com a mesma cor.

B Se ele pretende retirar somente dois pares, qual é a probabilidade de retirar um par de meias brancas e um par de meias pretas?

Resolução

A Cinco meias.

B $\frac{C_{10,2} . C_{10,2}}{C_{20,4}} = \frac{135}{323}$

10 O casal de cães King e Queen têm dois filhotes: Valente e Formosa. Os quatro cães deverão ser distribuídos para três *petshops* e nenhum dos pais (King ou Queen) poderá ficar na mesma *petshop* de qualquer filhote. Não há a exigência de que toda *petshop* receba pelo menos um cão.
De quantas maneiras diferentes pode ser feita essa distribuição?

Resolução

Há duas hipóteses para os filhotes: ou eles vão para uma mesma *petshop* ou vão para *petshops* diferentes.
1ª hipótese: Os filhotes vão para uma mesma *petshop*. Há 3 escolhas para a *petshop* dos filhotes; para cada uma delas, King pode ir para qualquer uma das outras duas, bem como Queen também pode ir para qualquer uma das outras duas. Temos, assim, $3 \times 2 \times 2 = 12$ maneiras diferentes de fazer a distribuição.
2ª hipótese: Os filhotes vão para *petshops* diferentes. Valente pode ser mandado para qualquer uma das 3 *petshops*. Uma vez escolhida a *petshop* do Valente, há duas escolhas para a *petshop* da Formosa. Escolhidas as duas *petshops* dos filhotes, King e Queen terão que ir, obrigatoriamente, para a *petshop* que restou. Temos, assim, $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras diferentes de fazer a distribuição.
Logo, o total é: $12 + 6 = 18$ maneiras diferentes de fazer a distribuição.

Fim da Prova de Matemática Aplicada