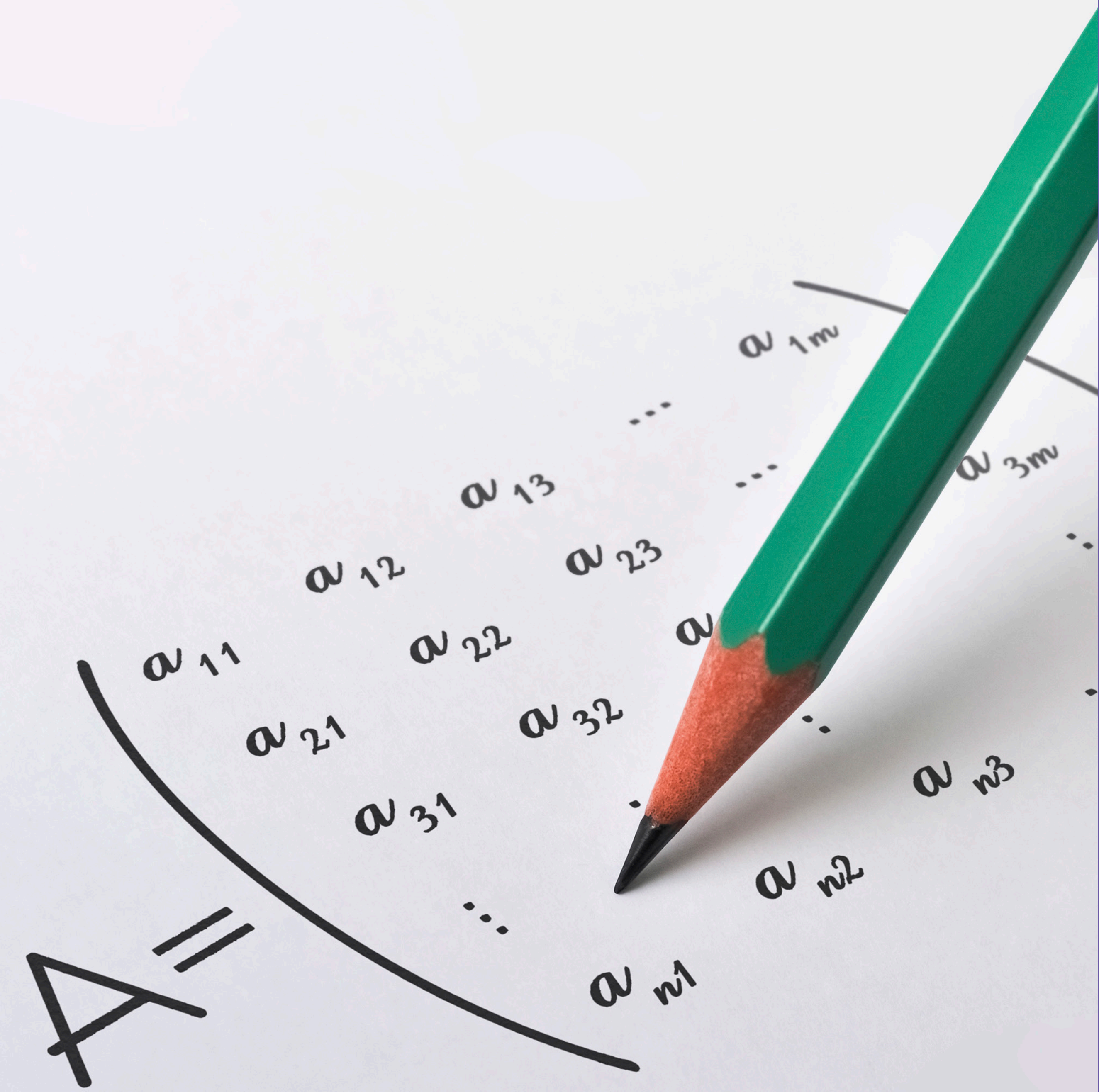

MATRIZES

2020 - 2022

MATRIZES

Aqui você aprenderá os conceitos iniciais de matrizes, aprenderá a operar matrizes e a calcular seus determinantes.

Esta subárea é composta pelos módulos:

1. Matrizes
2. Operações com Matrizes
3. Determinantes
4. Cálculo da Matriz Inversa
5. Propriedades dos Determinantes

MATRIZES

No nosso dia a dia, frequentemente lidamos com elementos dispostos em linhas (filas horizontais) e colunas (filas verticais), que forma um quadro retangular ou uma tabela. Em linguagem matemática, essa tabela ou quadro é denominada de **matriz**.

As matrizes podem ser apresentadas a partir de situações-problema do cotidiano, principalmente relacionadas ao mundo do trabalho, como uma forma simplificada de escrever informações e, por isso, tornam-se instrumentos de interpretação de dados da realidade.

Por exemplo, podemos colocar em uma tabela as notas de um aluno em diferentes disciplinas durante os três trimestres:

Disciplina / Trimestre	1° Trimestre	2° Trimestre	3° Trimestre
Matemática	5	8	7
Português	6	7	7
História	8	9	9
Geografia	7	6	8

Observando a tabela acima, podemos escrevê-la em forma de matriz da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 7 \\ 8 & 9 & 9 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

A partir de agora, vamos estudar a matemática das matrizes.

DEFINIÇÃO, ORDEM E REPRESENTAÇÃO DE UMA MATRIZ

Matriz é toda tabela numérica numa disposição de linhas e colunas.

Notação: letras maiúsculas do alfabeto.

Chamando a matriz do exemplo acima de B temos a seguinte representação:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 7 \\ 8 & 9 & 9 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Essa matriz possui 4 linhas e 3 colunas. Dizemos que seu tamanho é 4×3.

O tamanho da matriz é chamado de **ordem da matriz**.

Dada uma matriz genérica com m linhas e n colunas, dizemos que essa matriz tem ordem $m \times n$ e a representamos da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Perceba que primeiro representamos a matriz B por colchetes e depois a matriz A por parênteses. **Isso não é um problema**, pois existem três formas de representar uma matriz: parênteses, colchetes ou dupla barra vertical. Veja abaixo alguns exemplos de matrizes:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

Lemos: matriz A de ordem dois por três, ou seja, duas linhas e três colunas.

2. $B = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 4 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 2}$

Lemos: matriz B de ordem três por dois, ou seja, três linhas e duas colunas.

3. $C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & \sqrt{3} & \frac{3}{4} \\ -5 & 2 & 6 \end{Vmatrix}_{3\times 3}$

Lemos: matriz C de ordem três por três, ou seja, três linhas e três colunas.

Agora que já vimos alguns exemplos, voltemos à matriz genérica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{11} **representa** o elemento que está na posição: 1ª linha da matriz e 1ª coluna da matriz. Também, a_{12} **representa** o elemento que está na posição: 1ª linha e 2ª coluna da matriz. Da mesma forma, a_{22} **representa** o elemento que está na posição: 2ª linha e 2ª coluna da matriz. Continuamos esse padrão até chegarmos em a_{mn}, que **representa** o elemento que está na linha m da matriz e na coluna n.

Percebemos então que o número de linhas cresce de cima para baixo, enquanto o número de colunas cresce da esquerda para a direita. Veja a representação abaixo:

$$\begin{array}{cc} & \xrightarrow{\textbf{Colunas}} \\ \textbf{Linhas}\ \downarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Mas e quanto ao número de elementos de uma matriz? Uma matriz de ordem 3×2 possui $3\cdot2=6$ elementos, uma matriz de ordem 3×3 possui $3\cdot3=9$ elementos, então, uma matriz de ordem $m\times n$ possui $m\cdot n$ elementos.

A partir deste questionamento surge outra pergunta: se a matriz possui tantos elementos assim, como referenciamos um elemento qualquer?

A representação para um elemento qualquer da matriz é a_{ij}. Tal representação significa que o elemento ocupa a i-ésima linha e a j-ésima coluna da matriz.

LEI DE FORMAÇÃO DE UMA MATRIZ

Vimos anteriormente a representação genérica de uma matriz de ordem $m\times n$ e alguns exemplos de matrizes. Vimos também qual é a representação de um elemento qualquer dessa matriz. É possível, ainda, encontrar uma matriz através de **uma lei de formação**: tal lei é uma condição imposta aos valores de i e j e, a partir dessa condição, somos capazes de encontrar o valor de cada elemento da matriz.

Antes de continuarmos, vale ressaltar que a representação

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

É equivalente à representação:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \text{ em que } 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

Vejamos agora alguns exemplos:

1. Encontre a matriz $A=(a_{ij})_{2\times2}$, em que $a_{ij}=i+j$.

Solução: Começaremos representando a matriz de forma genérica. Como é uma matriz de ordem 2×2, significa que ela terá duas linhas e duas colunas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Feito isso, utilizaremos a lei de formação $a_{ij}=i+j$ para encontrar o valor de cada elemento:

$$a_{11} \Rightarrow i = 1\ e\ j = 1\ \Rightarrow a_{11} = 1 + 1 = 2$$

$$a_{12} \Rightarrow i = 1\ e\ j = 2 \Rightarrow a_{12} = 1 + 2 = 3$$

$$a_{21} \Rightarrow i = 2\ e\ j = 1 \Rightarrow a_{21} = 2 + 1 = 3$$

$$a_{22} \Rightarrow i = 2\ e\ j = 2 \Rightarrow a_{22} = 2 + 2 = 4$$

Substituindo esses valores na matriz A, temos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Encontre a matriz $B=(b_{ij})_{2\times3}$, em que $b_{ij}=2i-j$.

Solução: Começaremos representando a matriz de forma genérica. Como é uma matriz de ordem 2×3, significa que ela terá duas linhas e três colunas:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

Utilizando a lei de formação $b_{ij}=2i-j$, temos:

$$b_{11} \Rightarrow i = 1\ e\ j = 1 \Rightarrow b_{11} = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$b_{12} \Rightarrow i = 1\ e\ j = 2 \Rightarrow b_{12} = 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

$$b_{13} \Rightarrow i = 1\ e\ j = 3 \Rightarrow b_{13} = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

$$b_{21} \Rightarrow i = 2\ e\ j = 1 \Rightarrow b_{21} = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$b_{22} \Rightarrow i = 2\ e\ j = 2 \Rightarrow b_{22} = 2 \cdot 2 - 2 = 2$$

$$b_{23} \Rightarrow i = 2\ e\ j = 3 \Rightarrow b_{23} = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

Desta forma a matriz B é:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

TIPOS DE MATRIZES

Algumas matrizes recebem uma denominação especial por causa dos seus formatos. Vejamos abaixo os tipos de matrizes:

- **Matriz Retangular:** matriz em que o número de linhas é diferente do número de colunas.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

- **Matriz Quadrada:** matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas.

Exemplos:

$B=\begin{bmatrix}6 & 3\\ 7 & 4\end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2×2.

$C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 6\\ 10 & 8 & 52\end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3×3.

Observação: para matrizes quadradas de ordem $n\times n$, dizemos que elas possuem ordem n, ou seja, a matriz B acima é uma matriz quadrada de ordem 2 e a matriz C acima é uma matriz quadrada de ordem 3.

Uma matriz quadrada genérica de ordem n é representada da seguinte forma:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

Os elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$, formam uma diagonal, a chamada **diagonal principal** da matriz. Já, os elementos $a_{n1}, \dots, a_{1n}$ formam outra diagonal, a chamada **diagonal secundária**, veja imagem abaixo:

Diagonal Principal   Diagonal Secundária

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

Cuidado! Apenas as matrizes quadradas possuem diagonal!

Nas matrizes quadradas podemos calcular o chamado **traço da matriz**: o traço de uma matriz é a soma dos elementos da diagonal principal e é representado por $tr(A)$.

Na matriz C acima temos $tr(C)=1+5+52=58$.

- **Matriz Linha:** matriz formada por uma única linha.

Exemplo: $A=[2 \quad 8 \quad 3]$ é uma matriz linha de ordem 1×3.

- **Matriz Coluna:** matriz formada por uma única coluna.

Exemplo: $B=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 9\\ 5\end{bmatrix}$ é uma matriz coluna de ordem 4×1.

▶ **Matriz Nula:** matriz cujos elementos são todos iguais a zero. A notação para a matriz nula de ordem $m \times n$ é $O_{m \times n}$.

Exemplo: $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz nula de ordem 2.

Observação: a matriz nula é o elemento neutro da soma de matrizes, assunto que será visto na próxima apostila.

▶ **Matriz Diagonal:** matriz quadrada em que apenas os elementos da diagonal principal são diferentes de zero.

Exemplo: $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

▶ **Matriz Identidade (Matriz Unidade):** matriz diagonal em que cada elemento da diagonal principal vale 1. A notação para a matriz identidade de ordem n é I_n.

Exemplos:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz identidade de ordem 2.

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz identidade de ordem 3.

Observação: a matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação de matrizes, assunto que será visto na próxima apostila.

▶ **Matriz Triangular:** matriz quadrada em que todos os elementos acima da diagonal principal ou todos os elementos abaixo da diagonal principal valem zero.

Exemplos:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 11 & 15 & 6 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 14 & 7 & 8 \\ 0 & 13 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Nos exemplos acima, a matriz T é uma matriz **triangular inferior** e a matriz W é uma matriz **triangular superior.**

▶ **Matriz Transposta:** é a matriz obtida a partir da troca ordenada de linhas e colunas de A. A notação para matriz transposta é A^t.

Exemplos:

1. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, a sua transposta será $A^t = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Dada a matriz $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, a sua transposta será $B^t = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Ou seja, na matriz transposta, a 1ª linha vira a 1ª coluna, a 2ª linha vira a 2ª coluna e vice-versa.

- **Matriz Simétrica:** uma matriz é simétrica quando $A = A^t$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 5 & 2 & 4 \\ 8 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

- **Matriz Antissimétrica:** uma matriz é antissimétrica quando $A = -A^t$.

Exemplos:

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 \\ -5 & 0 & 3 \\ -10 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

Observação: Perceba que na matriz antissimétrica, os elementos da diagonal principal são sempre zero.

ANOTAÇÕES