MÓDULO 2

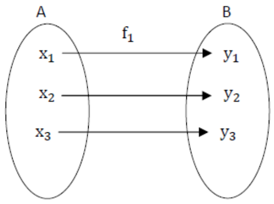
1. FUNÇÃO INJETORA

Uma função $f: A \to B$ é injetora, quando não existe elemento do contradomínio B que seja imagem de mais de um elemento do domínio A.

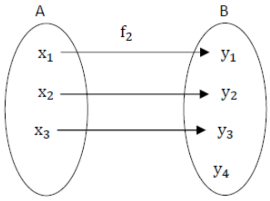
Em cada elemento de B que é imagem de um elemento de A chega apenas uma flecha.

Ex.:

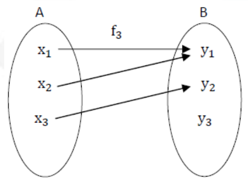
a) A função $\mathbf{f_1}$ **é injetora**, pois cada elemento do contradomínio B é imagem de um único elemento do domínio A.



b) A função $\mathbf{f_2}$ **é injetora**, pois cada elemento do contradomínio B é imagem de um único elemento do domínio A.



c) A função $\mathbf{f_3}$ **não é injetora**, pois existe elemento do contradomínio B que é imagem de mais de um elemento do domínio A.



2. FUNÇÃO SOBREJETORA

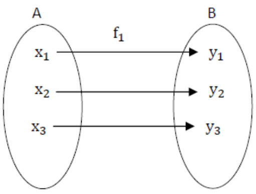
Uma função $f: A \to B$ é sobrejetora, quando não existe elemento do contradomínio B que não seja imagem de um elemento do domínio A.

As flechas chegam em todos os elementos de B.

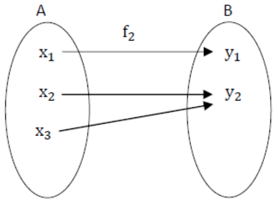
O conjunto imagem é igual ao contradomínio da função.

Ex.:

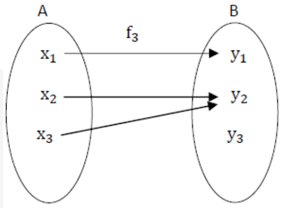
a) A função $\mathbf{f_1}$ **é sobrejetora**, pois não existe elemento do contradomínio B que não seja imagem de um elemento do domínio A.



b) A função $\mathbf{f_2}$ **é sobrejetora**, pois não existe elemento do contradomínio B que não seja imagem de um elemento do domínio A.



c) A função $\mathbf{f_3}$ **não é sobrejetora**, pois existe elemento do contradomínio B que não é imagem de um elemento do domínio A.



3. FUNÇÃO BIJETORA

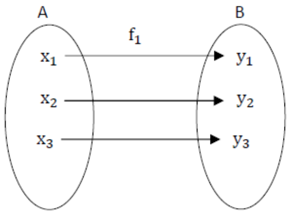
Uma função $f: A \to B$ é bijetora, quando é, ao mesmo tempo, sobrejetora e injetora.

Não existe elemento do contradomínio B que não seja imagem de um elemento do domínio A (f é sobrejetora).

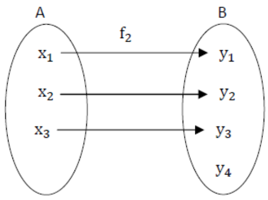
Cada elemento do contradomínio B é imagem de um único elemento do domínio a (f é injetora).

Ex.:

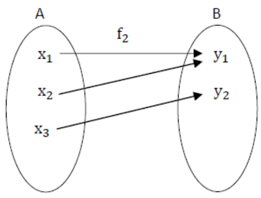
a) A função $\mathbf{f_1}$ **é bijetora**, pois é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.



b) A função $\mathbf{f_2}$ **não é bijetora**, pois é injetora, mas não é sobrejetora.



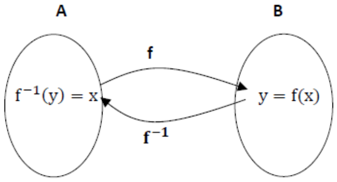
c) A função $\mathbf{f_3}$ **não é bijetora**, pois é sobrejetora, mas não é injetora.



4. FUNÇÃO INVERSA

A função bijetora $f: A \to B$, chama-se **função inversa de f**, indicada por $\mathbf{f^{-1}}$, a função $f^{-1}: B \to A$ que associa cada y de B ao elemento x de A.

Logo: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$



a) Para obter a função inversa, basta permutar as variáveis **x** e **y**.

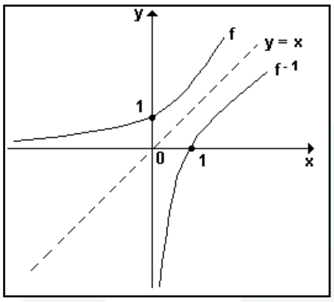
$$\boxed{(x\,,\,y) \in f \Leftrightarrow (y\,,\,x) \in f^{-1}}$$

b) O domínio de **f** $^{-1}$ é igual ao conjunto imagem de **f**.

c) O conjunto imagem de **f** $^{-1}$ é igual ao domínio de **f**.

$$\boxed{D\,(f^{-1}) = Im\,(f) \;\text{ e }\; Im\,(f^{-1}) = D\,(f)}$$

d) Os gráficos de **f** e de **f** $^{-1}$ são curvas simétricas em relação à reta **y = x**, ou seja, à bissetriz do primeiro quadrante.



Ex.:

A função $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$, calcule $f^{-1}(x)$.

Isola-se, num dos membros a variável x;

$$y = 2x + 1 \Rightarrow 2x = y - 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

Trocando as variáveis

$$y = \frac{x-1}{2}$$

Logo, $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

5. EXERCÍCIOS

1) (ESA – 2018)

Com relação às funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras podemos afirmar que:

a) se, é injetora e não é sobrejetora, então ela é bijetora.
b) se, é sobrejetora, então ela é injetora.
c) se, é injetora e sobrejetora, então ela é bijetora.
d) se, é injetora, então ela é sobrejetora.
e) se, é sobrejetora e não injetora, então ela é bijetora.

2) (EEAR – 2013)

Para que uma função seja invertível, é necessário que ela seja:

a) sobrejetora e positiva
b) bijetora e positiva
c) apenas bijetora
d) apenas injetora

3) (EEAR – 2011)

A função $g: [-5,5] \to B$ tem como imagem o conjunto $I = [20,30]$. Para que ela seja sobrejetora é necessário que B seja igual ao intervalo:

a) [5,20]
b) [−5,20]
c) [−5,30]
d) [20,30]

4) (EEAR – 2010)

A função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(x) = 3x + 2$.

a) é apenas injetora
b) é apenas sobrejetora
c) é injetora e sobrejetora
d) não é injetora e nem sobrejetora

5) (EEAR – 2006)

Considere a função abaixo:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, se\ n\ é\ par \\ \frac{n+1}{2}, se\ n\ é\ ímpar \end{cases}$$

Se f define uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, então:

a) f é apenas injetora
b) f é bijetora
c) f não é injetora, nem sobrejetora
d) f é apenas sobrejetora

6) (ESA – 2017)

Funções bijetoras possuem função inversa porque elas são invertíveis, mas devemos tomar cuidado com o domínio da nova função obtida. Identifique a alternativa que apresenta a função inversa de $f(x) = x + 3$.

a) $f(x)^{-1} = x - 3$
b) $f(x)^{-1} = x + 3$
c) $f(x)^{-1} = -x - 3$
d) $f(x)^{-1} = -x + 3$
e) $f(x)^{-1} = 3x$

7) (EEAR – 2014)

Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x - 3$. Se f^{-1} é a função inversa de f, então $f^{-1}(5)$ é:

a) 17
b) $\frac{1}{17}$
c) 2
d) $\frac{1}{2}$

8) (EEAR – 2015)

Seja $f(x) = 4x + 3$ uma função inversível. A fórmula que define a função inversa $f^{-1}(x)$ é:

a) $\frac{x-4}{3}$
b) $\frac{x-3}{4}$
c) $\frac{2x+3}{4}$
d) $\frac{2x+4}{3}$

9) (EEAR – 2015)

Seja a função f de $\mathbb{R} - \{3\}$ em $\mathbb{R} - \{1\}$, definida por $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$. Pela inversa de f, o número 5 é imagem do número:

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{3}$
c) 4
d) 3

10) (EEAR – 2018)

Se $f(x) = \frac{1+3x}{x+3}$, com $x \in IR$ e $x \neq -3$, é uma função invertível, o valor de $f^{-1}(2)$ é:

a) –2
b) –1
c) 3
d) 5

6. GABARITO

1) C
2) C
3) D
4) A
5) D
6) A
7) C
8) B
9) C
10) D

7. ANOTAÇÕES