

# TURMA ITA

EDIÇÃO 2007



SISTEMA DE ENSINO

# POLIEDRO

CADERNO III



# SUMÁRIO

## FÍSICA

Frente-1: Quantidade de movimento - Série-3 .....	1
Frente-2: Gravitação - Complemento-1 .....	14
Frente-2: Gravitação - Série-3 .....	19
Frente-2: Hidrostática - Série-4 .....	29
Frente-2: Estática - Série-5 .....	38
Frente-3: Ondulatória - Complemento-4 .....	52
Frente-3: Ondulatória - Série-5 .....	65
Frente-4: Demonstração da eq. dos fabricantes de lente - Complemento-3 .....	73
Frente-4: Reflexão da luz - Série-4 .....	74
Frente-4: Óptica - Série-5 .....	76
Frente-4: MHS - 1 - Série-6 .....	80
Frente-4: MHS - 2 - Série-7 .....	83
Módulos: ITA / IME - Física-3 .....	85

## QUÍMICA

Módulos: ITA / IME - Química-3 .....	103
--------------------------------------	-----

## MATEMÁTICA

Frente-1: Números complexos - I - Série-10 .....	130
Frente-1: Números complexos - II - Série-11 .....	132
Frente-1: Polinômios - Série-12 .....	135
Frente-1: Polinômios e equações algébricas - Série-13 .....	137
Frente-2: Problemas de contagem - I - Série-6 .....	140
Frente-2: Problemas de contagem - II - Série-7 .....	142
Frente-2: Problemas de contagem - III - Série-8 .....	144
Frente-2: Problemas de contagem - IV - Série-9 .....	145
Frente-3: Geometria plana - áreas e relações métricas - Série-9 .....	147
Frente-3: Prismas e pirâmides - Série-10 .....	151
Módulos: ITA / IME - Matemática-5 .....	154

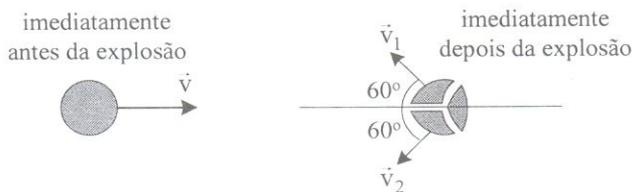
## PORTUGUÊS

Módulos: ITA / IME - Português-3 .....	167
--	-----

## INGLÊS

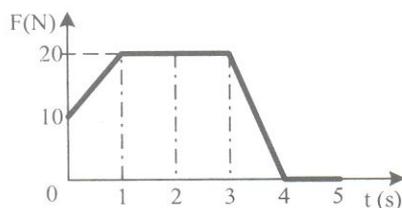
Módulos: ITA / IME - Inglês-3 .....	192
-------------------------------------	-----

- Um projétil de 80 kg é atirado por um canhão, adquirindo uma velocidade de 200 m/s. Sabendo que ele leva 0,001 s para percorrer o cano da arma, determine a intensidade da força média que os gases de combustão da pólvora lhe aplicaram durante a expulsão.
- Um canhão atira uma granada obliquamente, de maneira a atingir o ponto de altura máxima com velocidade horizontal  $\vec{v}$ . Neste instante, sofre uma explosão que a divide em três fragmentos de mesma massa. Dois fragmentos adquirem velocidade  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , cujos módulos são iguais ao da velocidade inicial. Determine a velocidade do terceiro fragmento, imediatamente após a explosão.



- A distância do centro da Terra ao da Lua equivale aproximadamente a 60 vezes o raio da Terra. A massa da Lua é aproximadamente igual a 1/80 da massa da Terra. Determine o centro de massa do sistema Terra - Lua.

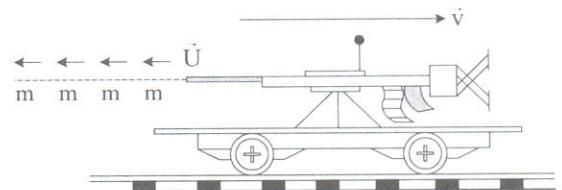
- Determine, para o gráfico abaixo:



- O impulso da força entre 0 e 5 s, em kg.m/s.
  - A aceleração da partícula para  $t = 2$  s, em  $\text{m/s}^2$ .
  - A variação da quantidade de movimento em kg.m/s, entre 1 e 3 s.
  - A velocidade ao fim de 5 s, em m/s, sabendo-se que, para  $t = 0$ ,  $v = 5$  m/s.
- A massa do corpo é igual a 0,1 kg.

- Um corpo de massa  $m = 2$  kg movimenta-se num plano horizontal em trajetória retilínea. No instante  $t = 0$  s sua velocidade é  $v_0 = 10$  m/s e no instante  $t = 10$  s é  $v_1 = 1$  m/s. Calcule a força média resultante que atua no corpo, durante o intervalo de tempo considerado.

- Um bloco, pesando 100 kgf, inicialmente em repouso sobre uma superfície plana e horizontal, recebe a ação de uma força horizontal e constante de 50 kgf. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é constante e igual a 0,2. Adotando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , em quantos segundos a velocidade do bloco crescerá de 1,3 m/s para 7,3 m/s?
- Uma metralhadora dispara seis balas por segundo contra um alvo. A massa de cada bala é 3,0 g e a velocidade com que sai da metralhadora é de 1.000 m/s. Determine a força média para manter a metralhadora na mesma posição.
- Uma metralhadora é fixada sobre um vagão que pode mover-se sem atrito sobre um trecho retilíneo e horizontal de via férrea. A massa do conjunto vagão - metralhadora, não incluídos os projéteis, é  $M$  e a massa de cada projétil é  $m$  ( $M \gg m$ ). A velocidade do vagão num dado instante é, em relação à Terra,  $\vec{v}$ , com direção e sentido indicados na figura. A velocidade de cada projétil, no instante em que é lançado pela metralhadora é  $\vec{U}$ , em relação ao vagão, na direção e sentido indicados.

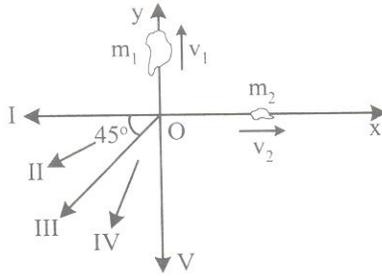


Nestas condições, determine:

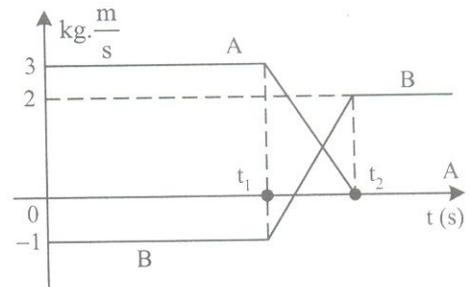
- o acréscimo de velocidade que sofre o vagão cada vez que um projétil é disparado;
  - a aceleração (média) do vagão, supondo que a metralhadora dispare projéteis na frequência de  $n$  projéteis na unidade de tempo;
  - a força (média) exercida pelo projétil sobre o conjunto metralhadora - vagão, nas condições de (b).
- Um homem de massa igual a 80 kg encontra-se sobre um carrinho de massa igual a 20 kg, segurando em sua mão uma bola de 2 kg de massa, com o conjunto todo em repouso. Com que velocidade horizontal o homem deve arremessar a bola, para que ele e o carrinho se desloquem em sentido contrário, com uma velocidade de 0,3 m/s?
  - Uma prancha de massa  $M$ , levando um menino de massa  $m$ , movimenta-se com movimento uniforme de velocidade  $v$ , sobre trilhos horizontais retilíneos, sem atrito. Num determinado instante, o menino dá um salto e atinge o solo em queda vertical.

Determine o módulo da variação da quantidade de movimento da prancha, após o salto do menino.

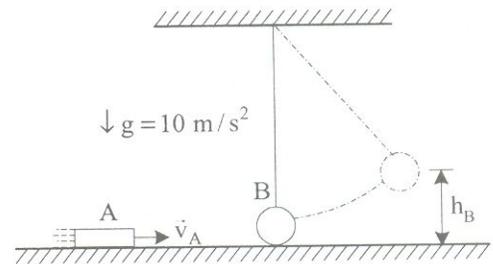
- 11.** Uma granada, originalmente em repouso sobre o plano horizontal sem atrito  $xOy$  da figura, explode e separa-se em três partes de massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , tais que  $m_1 > m_2$ . As duas primeiras saem com velocidades iguais em módulo e orientações (sentidos) mostrados na figura. Qual das setas pode indicar o sentido seguido por  $m_3$ ?



- 12.** Um projétil é atirado do solo, sob um ângulo de  $45^\circ$  e com velocidade  $v_0$ . Ao atingir sua altura máxima, explode dividindo-se em três pedaços de massas iguais. Observa-se que um deles cai verticalmente e que outro sobe também verticalmente. Se a velocidade do terceiro pedaço, logo após a explosão for horizontal, determine seu valor.
- 13.** Uma bomba é lançada para cima, a partir de um plano horizontal, com velocidade inicial  $v_0$ , formando um ângulo  $\theta$  com a horizontal. No ponto de altura máxima, ela explode rompendo-se em duas partes iguais, uma das quais cai na vertical, a uma distância  $d$  do ponto de lançamento. Qual será o alcance da outra metade em função de  $d$ , a partir do ponto do disparo?
- 14.** Uma esfera A, de massa 2 kg e velocidade 10 m/s, choca-se frontalmente com outra esfera B, de massa 3 kg e velocidade 5 m/s em sentido contrário. Sabendo que o coeficiente de restituição deste choque vale  $1/6$ , determine as velocidades finais das esferas.
- 15.** O choque entre duas esferas A e B levou ao traçado do gráfico que se segue. Sendo dados  $m_A = 0,15$  kg,  $m_B = 0,2$  kg e  $t_2 - t_1 = 0,001$  s, determine:  
a) o coeficiente de restituição;  
b) a natureza do choque;  
c) a força de impulso.



- 16.** Um corpo de 80 kg cai da altura de 80 m e após bater no solo, retorna, atingindo 20 m de altura. Determine o coeficiente de restituição entre o corpo e o solo.
- 17.** Um corpo A é lançado em um plano horizontal sem atrito com velocidade  $v_A = 4,0$  m/s. O corpo A, cuja massa é  $m_A = 2,0$  kg, colide com a esfera B, de massa  $m_B = 5,0$  kg. Inicialmente, a esfera encontra-se parada e suspensa por um fio flexível e inextensível de comprimento  $L$ , fixo em O, atingindo a altura  $h_B = 0,20$  m, após a colisão.  
a) Qual a velocidade  $v'_B$ , da esfera B, imediatamente após a colisão?  
b) Qual o módulo e o sentido da velocidade  $v'_A$ , do corpo A, após a colisão?  
c) Qual a variação de energia mecânica do sistema durante a colisão?  
d) A colisão foi perfeitamente elástica? Justifique sua resposta.

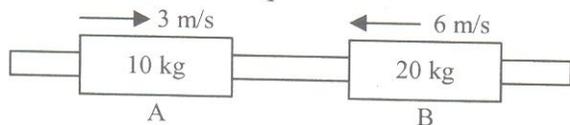


- 18.** Uma massa  $m_1 = 30$  g, com velocidade  $v_1 = 10$  m/s, colide frontalmente com outra massa  $m_2 = 70$  g, inicialmente em repouso, em uma colisão completamente inelástica. Determine:  
a) a energia cinética do sistema antes da colisão;  
b) a energia cinética do sistema depois da colisão;  
c) a fração da energia cinética original convertida em calor.
- 19.** Um bloco de massa  $M = 900$  g encontra-se em repouso numa superfície horizontal perfeitamente lisa. Uma bala de massa  $m = 100$  g, em movimento horizontal, atinge o bloco com velocidade  $v = 100$  m/s e aloja-se nele. Determine a velocidade do bloco após o impacto.

**20.** Um projétil de massa  $m = 20 \text{ g}$  é atirado horizontalmente, com velocidade  $v_0$ , contra um pêndulo vertical cuja massa pendular é  $M = 2 \text{ kg}$  e de fácil penetração. O projétil aloja-se no pêndulo e o conjunto sobe até a altura  $h = 20 \text{ cm}$ . Adotando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , determine a velocidade inicial do projétil.

**21.** Três esferas perfeitamente elásticas de massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  encontram-se inicialmente em repouso com centros alinhados. À massa  $m_1$  confere-se certa velocidade em direção a  $m_2$  que, em seguida, colide com  $m_3$ . Determine a massa  $m_2$  para que  $m_3$  receba energia máxima.

**22.** Sabe-se que o coeficiente de restituição entre os dois cursores da figura é  $5/6$ . Determine suas velocidades após o choque.

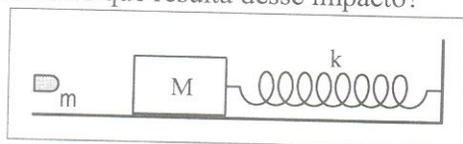


**23.** De um ponto situado a  $12 \text{ m}$  acima do solo, abandona-se uma bola que, após dois choques sucessivos com o solo, alcança uma altura de  $6 \text{ m}$ . Determine o valor do coeficiente de restituição.

**24.** Uma bola de  $0,1 \text{ kg}$  de massa cai de uma altura de  $10 \text{ m}$ . Ao colidir com o solo (superfície horizontal), ela sofre uma variação de quantidade de movimento de  $2,52 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$ . Considerando  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , determine o coeficiente de restituição entre a bola e o solo.

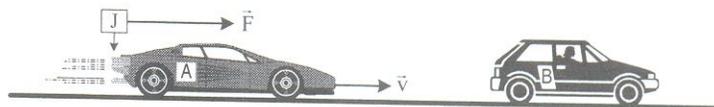
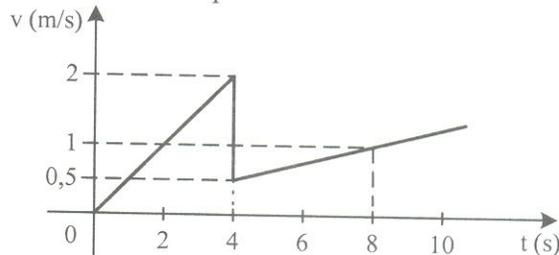
**25.** Uma bola é abandonada do repouso, no instante  $t = 0$ , de uma altura  $H_0 = 120 \text{ m}$ , sobre uma superfície fixa. Para cada choque da bola, a sua velocidade cai para a metade. Achar a distância total percorrida pela bola até o instante em que ela pára e esboçar o gráfico de sua velocidade em função do tempo.

**26.** Na figura temos uma massa  $M = 132 \text{ g}$ , inicialmente em repouso, presa a uma mola de constante  $k = 1,6 \cdot 10^4 \text{ N/m}$ , podendo-se deslocar sem atrito sobre a mesa onde se encontra. Uma bala de massa  $m = 12 \text{ g}$  é atirada e encontra o bloco horizontalmente, com uma velocidade de  $v_0 = 200 \text{ m/s}$ , alojando-se nele. Qual a amplitude do movimento que resulta desse impacto?



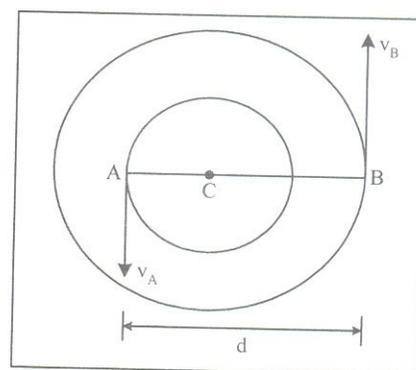
**27.** Um veículo A, de massa  $m_A = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg}$  se move ao longo do eixo dos  $x$ , impulsionado por um motor J que lhe aplica uma força constante  $\vec{F}$ . No instante  $t = 4,0 \text{ s}$ , o veículo A colide com outro B, sem motor, de massa  $m_B$ , que se movimenta livremente ao longo do eixo dos  $x$ . Após a colisão, os dois veículos ficam presos um ao outro e o motor J continua funcionando normalmente. Dado o gráfico da velocidade do móvel A em função do tempo, pede-se:

- a massa  $m_B$  do móvel B;
- a velocidade  $v_0$  do móvel B, antes da colisão;
- a energia dissipada na colisão;
- mostre, tomando o intervalo de tempo  $0 - 8 \text{ s}$ , que a energia dissipada na colisão é igual à diferença entre o trabalho executado pela força e a variação da energia cinética do sistema nesse intervalo de tempo.



**28.** Admita que você está na ponta de uma canoa de  $3 \text{ m}$  de comprimento, num lago onde se despreze a resistência da água, e que sua massa seja  $1/3$  da massa da canoa. Se você andar sobre a canoa até chegar à outra ponta, determine o afastamento do barco de sua posição primitiva.

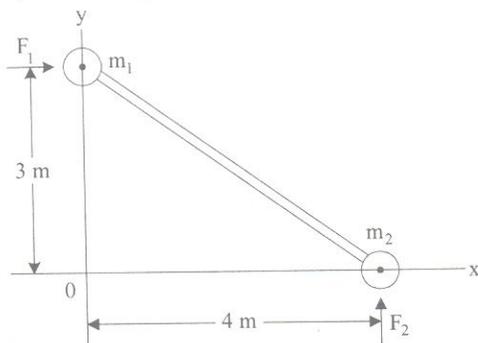
**29.** Um sistema binário isolado é formado por duas estrelas A e B, de massas  $m_A$  e  $m_B$ , que giram ao redor de um centro comum C, em órbitas, animadas de velocidades de translação  $v_A$  e  $v_B$ , conforme a figura. Determine a relação  $v_A/v_B$ , sabendo que a distância entre elas é  $d$ .



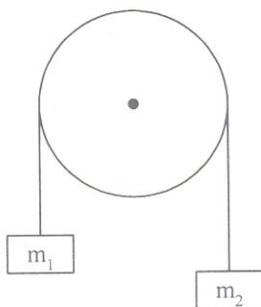
**30.** Um sistema é composto de três partículas com massas 3, 2 e 5 kg. A primeira partícula tem uma velocidade de  $u_y$  (6) m/s. A segunda está se movendo com uma velocidade de 8 m/s numa direção que faz um ângulo de  $-30^\circ$  com o eixo X. Determine a velocidade da terceira de tal modo que o CM do conjunto esteja em repouso relativamente ao observador.

**31.** As massas  $m_1 = 10$  kg e  $m_2 = 6$  kg são ligadas por uma barra rígida de massa desprezível. Estando inicialmente em repouso, elas são submetidas às forças  $F_1 = u_x$  (8) N e  $F_2 = u_y$  (6) N, como está indicado.

- Procure as coordenadas do seu CM como função do tempo.
- Expresse a quantidade de movimento total como função do tempo.



**32.** As duas massas na figura estão inicialmente em repouso. Supondo que  $m_1 > m_2$ , determine a velocidade e a aceleração do CM das duas num instante  $t$ .



**33.** Uma granada de massa  $m$  explode em vários fragmentos. A explosão tem um  $Q$  positivo.

- Mostre que, se a granada se divide em dois fragmentos iguais, suas quantidades de movimento e velocidades no referencial do CM são respectivamente iguais a  $(m.Q/2)^{1/2}$  e  $(2.Q/m)^{1/2}$ .
- Mostre que, se a granada se divide em três fragmentos iguais emitidos simetricamente no referencial do CM, suas quantidades de movimento e velocidades, nesse referencial, são respectivamente  $1/3.(2.m.Q)^{1/2}$  e  $(2.Q/m)^{1/2}$ .

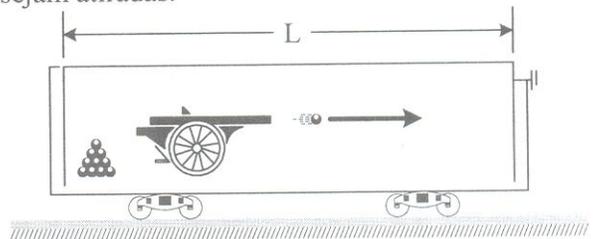
- Repita (b) supondo que dois fragmentos são emitidos com a mesma velocidade relativamente ao referencial do CM, mas em direções que fazem ângulo de  $90^\circ$ .
- Como os resultados de (a) apareceriam para um observador no referencial inercial se, no instante da explosão, a granada estivesse se movendo com uma velocidade igual a  $1/4.(2.Q/m)^{1/2}$ , relativa ao referencial inercial, e na mesma direção do movimento de um dos fragmentos resultantes?

**34.** Um projétil é lançado a um ângulo de  $60^\circ$  com a horizontal e com uma velocidade inicial de 400 m/s. No ponto mais alto da trajetória ele explode em dois fragmentos iguais, um dos quais cai verticalmente.

- A que distância do ponto de partida cai o outro fragmento, supondo-se o solo horizontal?
- Qual foi a energia liberada na explosão?

**35.** Uma granada de massa  $M$ , caindo com uma velocidade  $v_0$ , explode na altura  $h$  em dois fragmentos iguais que, de início, movem-se horizontalmente no referencial do CM. A explosão tem um  $Q$  de valor igual a  $M.v_0^2$ . Determine as posições onde os fragmentos encontram o solo, relativamente ao ponto onde a granada cairia se não explodisse.

**36.** Um canhão e um suprimento de balas estão dentro de um vagão de estrada de ferro completamente fechado. O canhão atira para a direita e o vagão recua para a esquerda. As balas ficam dentro do vagão depois de baterem na parede oposta. Mostre que o vagão, partindo do repouso, não pode sofrer deslocamento superior ao seu comprimento  $L$ , qualquer que seja a maneira pela qual as balas sejam atiradas.



**37.** Uma partícula de massa  $m$ , movendo-se com velocidade  $v$ , colide frontal e elasticamente com outra partícula de massa  $M$  (maior do que  $m$ ) que tem;

- uma quantidade de movimento igual e oposta;
  - a mesma energia cinética, mas com movimento em sentido oposto ao da primeira.
- Determine nos casos (I) e (II) a velocidade da primeira partícula depois da colisão.

b) Mostre que, se  $M$  está em repouso e é muito maior do que  $m$ , a variação relativa da energia cinética de  $m$  é  $\Delta E_c/E_c \approx -4.(m/M)$ .

**38.** Verificou-se experimentalmente que, na colisão frontal de duas esferas sólidas, tais como duas bolas de bilhar, as velocidades depois da colisão são relacionadas com as de antes pela expressão  $v'_1 - v'_2 = -e.(v_1 - v_2)$  onde  $e$  tem valor entre zero e um e é chamado *coeficiente de restituição*. Esse resultado foi descoberto por Newton e tem validade somente aproximada. Ademais, a quantidade de movimento é conservada na colisão. Prove que:

a) as velocidades depois da colisão são dadas por

$$v'_1 = \frac{v_1.(m_1 - m_2.e) + v_2.m_2.(1+e)}{m_1 + m_2} e$$

$$v'_2 = \frac{v_1.m_1.(1+e) + v_2.(m_2 - m_1.e)}{m_1 + m_2};$$

b) o  $Q$  da colisão é  $-\frac{1}{2}(1-e^2) \frac{m_1.m_2}{m_1+m_2} .(v_1 - v_2)^2$ ;

c) qual deveria ser o valor de  $e$  para a colisão elástica?

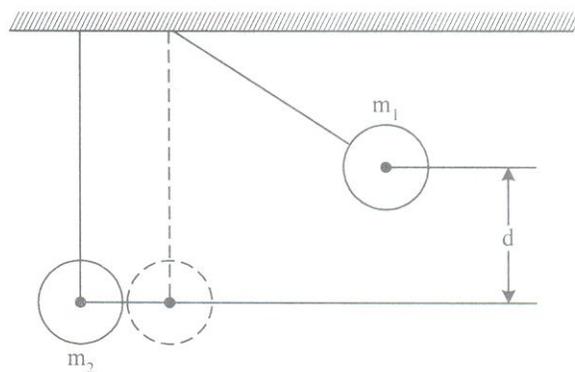
**39.** Supondo que o segundo corpo do problema anterior está em repouso e que sua massa é muito grande comparada com a do primeiro, determine a velocidade de cada corpo após a colisão; procure também o valor de  $Q$ . Aplique esse resultado para determinar a que altura volta um corpo, largado da altura  $h$ , após se chocar contra o solo.

**40.** Prove que o tempo gasto para que a bola do problema anterior pare de pular é  $t = (1+e)/(1-e)\sqrt{2h/g}$ .

**41.** Se as massas das bolas  $m_1$  e  $m_2$  na figura são, respectivamente, 0,1 e 0,2 kg, e se  $m_1$  é abandonada quando  $d = 0,2$  m, procure as alturas às quais elas voltarão depois de colidir se a colisão for:

- elástica;
- inelástica com um coeficiente de restituição igual a 0,8;
- plástica ( $e = 0$ ).

Resolva também o problema para o caso em que a massa  $m_2$  é erguida e abandonada, chocando-se contra a massa  $m_1$  em repouso.

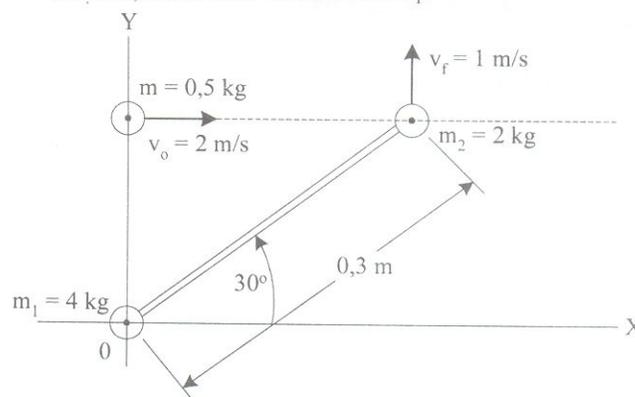


**42.** Se uma bola atinge o solo sob um ângulo  $\alpha$  com a vertical, e com velocidade  $v$ , ela ricocheteia segundo um ângulo  $\beta$ , dado por  $\text{tg } \beta = (1/e) \text{tg } \alpha$ , com uma velocidade  $v' = v\sqrt{e^2.\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}$ , onde  $e$  representa o coeficiente de restituição do choque.

**43.** Prove que, se a energia cinética interna de um sistema de duas partículas é  $E$ , os módulos das velocidades das partículas relativamente ao CM são:

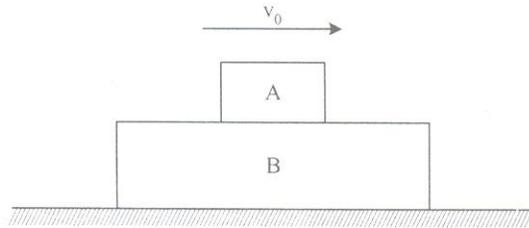
$$v_1 = [2m_2.E/m_1.(m_1 + m_2)]^{1/2} e v_2 = [2m_1.E/m_2.(m_1 + m_2)]^{1/2}$$

**44.** Duas massas ligadas por uma haste leve, conforme a figura, estão em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. Uma terceira partícula com 0,5 kg de massa aproxima-se do sistema com velocidade  $v_0$  e colide com a massa de 2 kg. Qual será o movimento resultante do CM das duas partículas se a massa de 0,5 kg afasta-se, após a colisão, com uma velocidade  $v_f$ ?



**45.** Na figura, as massas dos blocos A e B são  $m_1$  e  $m_2$ . Entre A e B há uma força de atrito de módulo  $F$ , mas B pode deslizar sem atrito sobre a superfície horizontal. Inicialmente A está se movendo com velocidade  $v_0$  enquanto B está em repouso. Se nenhuma outra força agir sobre o sistema, A diminuirá sua velocidade e B acelerará até que os dois blocos se movam com a mesma velocidade  $v$ .

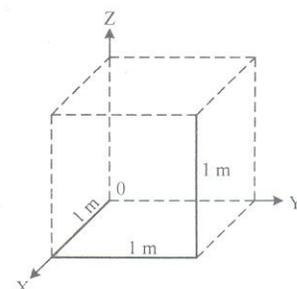
- Que distância A e B se deslocarão antes que isso aconteça, medindo-se essa distância em relação à superfície horizontal?
- Qual será a variação da energia cinética do sistema em termos da distância de deslocamento de A relativamente a B?
- O que acontecerá com a quantidade de movimento total?



- Dois veículos espaciais em órbita estão acoplados. A massa de um deles é de 1.000 kg e a do outro de 2.000 kg. Para separá-los, é detonada entre os dois uma pequena carga explosiva, que comunica uma energia cinética total de 3.000 J ao conjunto dos dois veículos, em relação ao centro de massa do sistema. A separação ocorre segundo a linha que une os centros de massa dos dois veículos. Com que velocidade relativa eles se separam um do outro?
- Um canhão montado sobre uma carreta, apontado numa direção que forma um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal, atira uma bola de 50 kg, cuja velocidade na boca do canhão é de 300 m/s. A massa total do canhão e da carreta é de 5 toneladas.
  - Calcule a velocidade inicial de recuo da carreta.
  - Se o coeficiente de atrito cinético é 0,9, de que distância a carreta recua?
- Uma patinadora e um patinador estão se aproximando um do outro, deslizando com atrito desprezível sobre uma pista de gelo, com velocidades de mesma magnitude, iguais a 0,5 m/s. Ela tem 50 kg, carrega uma bola de 1 kg e patina numa direção  $10^\circ$  a leste da direção norte. Ele, que tem 51 kg, dirige-se para  $10^\circ$  a oeste da direção norte. Antes de colidirem, ela lança a bola para ele, que a apanha. Em conseqüência, passam a se afastar um do outro. Ela se move agora com velocidade de 0,51 m/s, numa direção  $10^\circ$  a oeste da direção norte.
  - Em que direção se move agora o patinador depois de apanhar a bola?
  - Com que velocidade?
  - Qual foi o momento transferido da patinadora para o patinador?
  - Com que velocidade e em que direção a bola foi lançada? [Note que a deflexão das trajetórias,

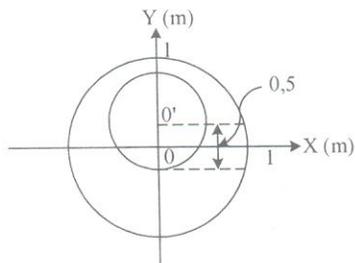
produzida pela troca da bola é análoga ao efeito de uma força repulsiva entre os dois patinadores. Na física das partículas elementares, a interação entre duas partículas é interpretada em termos de troca de uma terceira partícula entre elas].

- No fundo de uma mina abandonada, o vilão, levando a mocinha como refém, é perseguido pelo mocinho. O vilão, de 70 kg, leva a mocinha, de 50 kg, dentro de um carrinho de minério de 540 kg, que corre, com atrito desprezível sobre um trilho horizontal, à velocidade de 10 m/s. O mocinho, de 60 kg, vem logo atrás, num carrinho idêntico, à mesma velocidade. Para salvar a mocinha, o mocinho pula de um carrinho para outro, com uma velocidade de 6 m/s em relação ao carrinho que deixa para trás. Calcule a velocidade de cada um dos carrinhos depois que o mocinho já atingiu o carrinho da frente.
- Um gafanhoto, pousado na beirada superior de uma folha de papel que está boiando sobre a água de um tanque, salta, com velocidade inicial de 4 m/s, em direção à beirada inferior da folha, no sentido do comprimento. As massas do gafanhoto e da folha são de 1 g e 4 g, respectivamente, e o comprimento da folha é de 30 cm. Em que domínio de valores pode estar compreendido o ângulo  $\alpha$  entre a direção do salto e a sua projeção sobre a horizontal, para que o gafanhoto volte a cair sobre a folha?
- Uma mina explode em três fragmentos, de 100 g cada um, que se deslocam num plano horizontal: um deles para oeste e os dois outros em direções  $60^\circ$  ao norte e  $30^\circ$  ao sul da direção leste, respectivamente. A energia cinética total liberada pela explosão é de 4.000 J. Ache as velocidades iniciais dos três fragmentos.
- Uma barra cilíndrica homogênea de 3 m de comprimento é dobrada duas vezes em ângulo reto, a intervalos de 1 m, de modo a formar três arestas consecutivas de um cubo, como na figura. Ache as coordenadas do centro de massa da barra, no sistema de coordenadas da figura.





- 53.** Calcule as coordenadas do CM da placa homogênea indicada na figura, um círculo de 1,0 m de raio do qual foi removido um círculo de 0,5 m de raio, com uma separação de 0,25 m entre os centros  $O$  e  $O'$  dos dois círculos.



- 54.** Um avião a jato viaja a 900 km/h. Em cada segundo, penetram nos jatos  $150 \text{ m}^3$  de ar que, após a combustão, são ejetados com uma velocidade de 650 m/s em relação ao avião. Tome a densidade do ar como  $1,25 \text{ kg/m}^3$ .

- a) Calcule o empuxo exercido sobre o avião, em N e em kgf.  
b) Calcule a potência dos jatos, em W e em hp.

- 55.** Na teoria corpuscular da luz, no século 17, imaginava-se um feixe de luz como constituído de corpúsculos muito pequenos, movendo-se com velocidade muito elevada. A reflexão da luz num espelho seria produzida pela colisão dos corpúsculos luminosos com o mesmo, de forma análoga a uma colisão elástica com uma parede impenetrável. Ao atravessar a superfície de separação entre dois meios transparentes distintos (ar e água, por exemplo), um corpúsculo luminoso teria sua velocidade alterada pelo efeito de uma força impulsiva normal à superfície de separação, prosseguindo depois em seu movimento livre da ação de forças. Sejam  $\theta_1$ ,  $\theta'_1$  e  $\theta_2$  os ângulos de incidência, reflexão e refração, respectivamente. Mostre que este modelo explicaria as leis da reflexão e da refração: raios refletido e refratado no plano de incidência, com:  $\theta'_1 = \theta_1$ ;  $\text{sen } \theta_1 / \text{sen } \theta_2 = n_{12}$ , e calcule o índice de refração relativo  $n_{12}$  do segundo meio em relação ao primeiro em função das velocidades  $v_1$  e  $v_2$  dos corpúsculos nos meios 1 e 2. A velocidade dos corpúsculos seria maior no ar ou na água?

- 56.** Uma bala de 5 g incide sobre um pêndulo balístico de massa igual a 2 kg com uma velocidade de 400 m/s, atravessa-o e emerge do outro lado com uma velocidade de 100 m/s. Calcule a altura de elevação do pêndulo, desprezando a elevação durante o tempo que a bala leva para atravessá-lo. Verifique a veracidade desta aproximação.

- 57.** Durante a madrugada, um carro de luxo, de massa total igual a 2.400 kg, bate na traseira de um carro de massa total 1.200 kg, que estava parado num sinal vermelho. O motorista do carro de luxo alega que o outro estava com as luzes apagadas, e que ele vinha reduzindo a marcha ao aproximar-se do sinal, estando a menos de 10 km/h quando o acidente ocorreu. A perícia constata que o carro de luxo arrastou o outro de uma distância igual a 10 m, e estima o coeficiente de atrito cinético com a estrada no local do acidente em 0,5. Calcule a que velocidade o carro de luxo vinha realmente.

- 58.** O balconista de uma mercearia, para atender a um cliente que pediu 200 g de creme de leite fresco, coloca o recipiente vazio sobre uma balança de mola, acerta o zero e despeja o creme sobre o recipiente desde uma altura de 75 cm. Depois de 2 s, com a balança marcando 200 g, o balconista, mais que depressa, retira o recipiente de cima da balança. Que quantidade de creme de leite o cliente realmente leva?

- 59.** Um caminhão carregado, de massa total 3 toneladas, viajando para o norte a 60 km/h, colide com um carro de massa total 1 tonelada, trafegando para leste a 90 km/h, num cruzamento. Calcule em que direção e de que distância o carro é arrastado pelo caminhão, sabendo que o coeficiente de atrito cinético no local do acidente é 0,5.

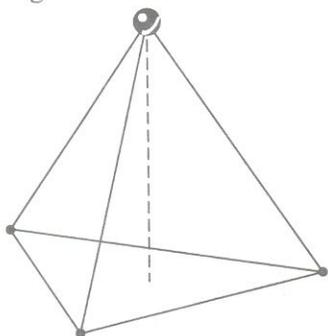
- 60.** Uma partícula de massa  $m$  e velocidade inicial  $\vec{\mu}$  colide elasticamente com outra de massa  $M$  inicialmente em repouso no referencial do laboratório. Após a colisão, a partícula de massa  $m$  foi defletida de um ângulo de  $90^\circ$ , e a magnitude da sua velocidade foi reduzida para  $\mu/\sqrt{3}$ , onde  $\mu = |\vec{\mu}|$ . A partícula de massa  $M$  emerge da colisão com velocidade de magnitude  $v$ , numa direção que faz um ângulo  $\theta$  com  $\vec{\mu}$ .

- a) Determine  $\theta$ .  
b) Calcule a razão  $\lambda = M/m$  e o valor de  $v$ .  
c) Determine os ângulos  $\theta'_m$  e  $\theta'_M$  entre as direções de movimento finais de  $m$  e  $M$ , respectivamente, e a direção de  $\vec{\mu}$ , no referencial do CM.

- 61.** Para explicar a resistência do ar (mais geralmente, de qualquer fluido) ao movimento de um corpo através dele, Newton propôs o seguinte modelo. O fluido é imaginado como sendo composto de um grande número ( $n$  por unidade de volume) de partículas em repouso, de massa  $m$  (muito

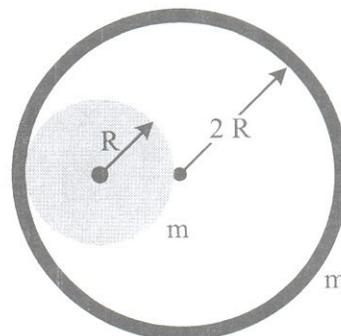
pequena) cada uma. Quando o corpo, de massa  $M \gg m$ , se desloca com velocidade  $\vec{v}$  através do fluido, ele vai colidindo com as partículas e vai-lhes transferindo momento dessa forma. A força  $\vec{F}$  de resistência do fluido resultante é proporcional ao quadrado da velocidade. Calcule essa força, se o corpo é uma placa de área  $A$  que se desloca perpendicularmente ao plano da placa, como função de  $A$ ,  $\vec{v}$  e da densidade  $\rho = nm$  do fluido.

- 62.** Na molécula de amônia ( $\text{NH}_3$ ) os três átomos de hidrogênio (H), de massa  $m_1$  cada, formam um triângulo eqüilátero, sendo  $\ell$  a distância entre os centros dos átomos de hidrogênio (H). O átomo de nitrogênio (N), de massa  $m_2$ , está no vértice de uma pirâmide da qual os três átomos de hidrogênio constituem a base. A distância entre os átomos de hidrogênio e o átomo de nitrogênio vale  $d$ . Localize o centro de massa deste sistema em relação ao átomo de nitrogênio.



- 63.** Um bloco possui massa  $m_1$  e o outro bloco possui massa  $m_2 = 5 \cdot m_1$ . Estes blocos são presos às extremidades de uma mola e colocados sobre um plano horizontal sem atrito. O bloco de massa  $m_1$  se aproxima do centro de massa com velocidade de  $6,5 \text{ m/s}$ . O centro de massa permanece em repouso, uma vez que não existe nenhuma força externa aplicada. Calcule a velocidade do bloco de massa  $m_2$  em relação ao centro de massa.
- 64.** Um homem de massa  $m$  está pendurado em uma escada de corda, suspensa por um balão de massa  $M$ . O balão está estacionário em relação ao solo.
- Se o homem começar a subir pela escada à velocidade  $v$  (com relação à escada), em que direção e com que velocidade (com relação à Terra) o balão se moverá?
  - Qual o estado do movimento após o homem ter parado de subir?
- 65.** Uma bola de massa  $m$  e raio  $R$  é colocada no interior de uma esfera maior, oca, com a mesma massa e raio interno  $2R$ . O sistema está em repouso

sobre uma superfície sem atrito na posição dada pela a figura. A bola menor é solta, gira no interior da esfera oca e, finalmente, pára no fundo desta. Qual a distância que a esfera maior percorreu neste processo?

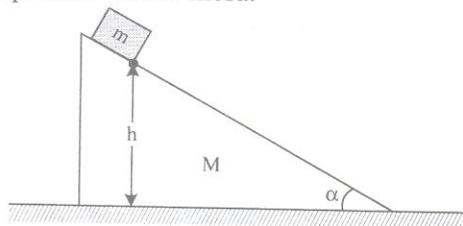


- 66.** Um homem de massa  $m = 50 \text{ kg}$  está parado sobre uma extremidade de uma jangada de  $200 \text{ kg}$ , que se desloca com velocidade constante num lago. A velocidade da jangada em relação à margem é igual a  $3 \text{ m/s}$ . Despreze o atrito. O homem anda até a outra extremidade da jangada, cujo comprimento total vale  $6 \text{ m}$ . A velocidade do homem em relação à jangada vale  $v = 1,5 \text{ m/s}$  e possui a mesma direção e sentido da velocidade da jangada. Mostre que a velocidade do centro de massa do sistema permanece constante e igual a  $3 \text{ m/s}$ . Calcule a distância percorrida pelo centro da jangada e pelo centro de massa do sistema durante o tempo que o homem passa de uma extremidade para outra da jangada.
- 67.** Dois corpos, ambos constituídos por pesos de balança, são interligados por um tênue fio que passa através de uma polia leve, sem atrito, de  $5,0 \text{ cm}$  de diâmetro. Os dois corpos estão no mesmo nível e cada qual tem, originariamente, massa de  $500 \text{ g}$ .
- Localize o centro de massa do sistema.
  - Vinte gramas são transferidos de um corpo a outro, mas os corpos são impedidos de mover. Localize o centro de massa.
  - Os dois corpos são agora liberados. Descreva o movimento do centro de massa e determine sua aceleração.
- 68.** O último estágio de um foguete está se deslocando com uma velocidade de  $8.000 \text{ m/s}$ . Este último estágio é constituído por duas partes engatadas por grampos, a saber, o foguete propriamente dito, com massa de  $400 \text{ kg}$ , e a carga útil, com massa igual a  $100 \text{ kg}$ . Quando os grampos são desconectados uma força interna ao sistema faz com que as duas massas se separem com uma velocidade relativa de  $800 \text{ m/s}$ .

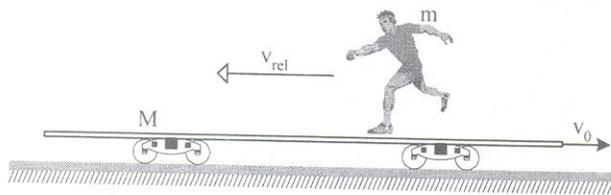
- a) Calcule as velocidades das partes em relação a um observador fixo na Terra. Suponha que todas as velocidades possuam a mesma direção e o mesmo sentido.
- b) Ache a energia cinética total antes e após a separação e explique a diferença entre estes valores (se houver).

**69.** Uma metralhadora especial de um funcionário de um jardim zoológico atira balas de borracha, cada uma delas com massa de 10 g, com velocidade inicial de 1.000 m/s. Calcule o número de balas que devem ser atiradas a fim de deter um animal de 90 kg que avança em direção ao funcionário com velocidade igual a 4 m/s. Suponha que a trajetória das balas seja horizontal e que as balas caiam ao solo tão logo atinjam o alvo.

**70.** Um bloco de massa  $m$  repousa sobre uma cunha de massa  $M$ , que por sua vez repousa sobre uma mesa horizontal, como mostra a figura. Todas as superfícies são sem atrito. Se o sistema parte do repouso, com o bloco a uma distância  $h$  acima da mesa, ache a velocidade da cunha no instante em que o ponto  $P$  toca a mesa.



**71.** Um vagão-prancha de estrada de ferro, de massa  $M$ , pode deslocar-se sem atrito ao longo de um trilho horizontal reto, como mostra a figura. Inicialmente, um homem de massa  $m$  está parado sobre o vagão, que se desloca para a direita com velocidade  $v_0$ . Qual será a variação da velocidade do vagão se o homem correr para a esquerda de modo que sua velocidade em relação ao vagão seja  $v_{rel}$  exatamente antes dele saltar pela extremidade?

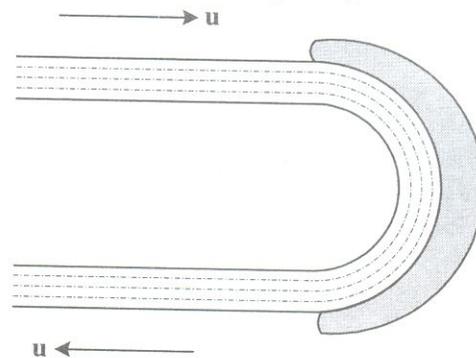


**72.** Suponha que o vagão do problema anterior esteja inicialmente em repouso. Ele conduz  $n$  homens, cada qual com massa  $m$ . Se cada homem corresse sucessivamente, com uma velocidade relativa  $v_{rel}$  e saltasse pela extremidade do vagão, eles transmitiriam ao carro maior velocidade que a que seria transmitida se todos corressem e saltassem ao mesmo tempo?

**73.** Duas barcaças longas se deslocam, no mesmo sentido, em águas paradas. Uma delas possui velocidade de 10 km/h e a outra, 15 km/h. Enquanto uma delas passa pela outra, a mais vagarosa lança, para a mais rápida, 1.500 kg/min de carvão. Que força adicional deve ser produzida pelos motores de cada barcaça de maneira a não alterar suas velocidades? Suponha que o arremesso do carvão seja sempre feito perpendicularmente às barcaças e que as forças de atrito com a água não dependem dos seus respectivos pesos.

**74.** Uma bola de pingue-pongue cai verticalmente sobre o solo com velocidade de 10 m/s. Ela se reflete e retorna com uma velocidade inicial de 8 m/s. Suponha que a força média exercida pela bola sobre o solo seja igual a 180 N e que o tempo em que ela fica em contato com o solo seja igual a  $10^{-3}$  s. Calcule a massa da bola.

**75.** Um jato de água choca-se contra uma pá de uma turbina que tem forma côncava e está em repouso, como mostra a figura. O módulo da velocidade da água é  $u$ , antes e depois que ela atinge a superfície curva da pá; a massa de água que atinge a pá por unidade de tempo é constante e igual a  $\mu$ . Determine a força exercida pela água sobre a pá.



**76.** A força sobre um objeto de 8 kg aumenta linearmente com o tempo. A força é nula no instante inicial e igual a 100 N quando  $t = 10$  s. Determine:

- a expressão do impulso em função do tempo;
- a força média neste intervalo de tempo;
- o impulso total;
- a variação do momento;
- a velocidade do objeto para  $t = 10$  s.

**77.** A água proveniente de uma mangueira é lançada contra uma parede. Se a velocidade da água for igual a 5,0 m/s e se a vazão volumétrica da água que sai da mangueira for igual a  $400 \text{ cm}^3/\text{s}$  e a água cair ao se chocar contra a parede, calcule:



- a) o impulso transmitido para a parede durante um segundo;  
b) a força média exercida sobre a parede.  
Considere a densidade da água igual a  $10^3 \text{ kg/m}^3$ .

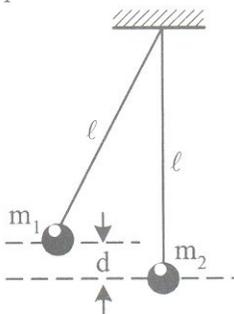
**78.** Um bloco de massa  $m = 10 \text{ kg}$  está em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. Sobre o bloco atua uma força horizontal cujo módulo é dado em função do tempo pela expressão:

$$F = b \cdot t^2 - c \cdot t$$

onde  $b = 4 \text{ N/s}^2$  e  $c = 1 \text{ N/s}$ ,  $t$  é dado em s e  $F$  em N. Obtenha:

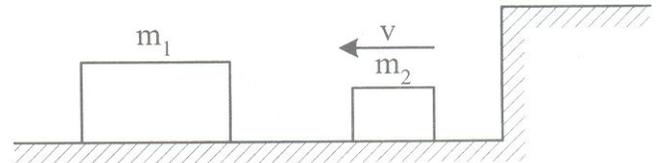
- a) a expressão do impulso em função do tempo;  
b) o impulso total nos 4 segundos iniciais;  
c) a variação do momento linear nos 4 segundos iniciais;  
d) a velocidade do bloco no instante  $t = 4 \text{ s}$ .
- 79.** Um corpo de massa igual a  $5,0 \text{ kg}$  colide elasticamente com outro que se encontra inicialmente em repouso, e continua sua trajetória no mesmo sentido, porém o módulo da velocidade se reduz a um quinto do módulo inicial. Calcule a massa do corpo atingido.
- 80.** Uma bala de massa igual a  $30 \text{ g}$  é disparada horizontalmente num bloco de madeira de massa igual a  $30 \text{ kg}$  em repouso sobre uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície vale  $0,20$ . A bala penetra no bloco e fica retida em seu interior. O centro de massa do bloco se desloca de  $1 \text{ m}$ . Calcule a velocidade da bala.

**81.** Dois pêndulos, cada um de comprimento  $\ell$  estão inicialmente posicionados como mostra a figura. O primeiro pêndulo é solto e atinge o segundo. Suponha que a colisão seja completamente inelástica e despreze a massa dos fios e quaisquer efeitos resultantes do atrito. Até que altura o centro de massa sobe após a colisão?



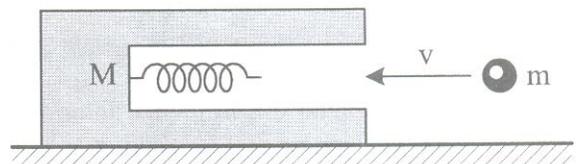
**82.** Duas partículas, uma tendo o dobro da massa da outra, com uma mola comprimida entre elas são mantidas juntas. A energia armazenada na mola é  $60 \text{ J}$ . Que energia cinética tem cada partícula após terem sido soltas?

**83.** Um bloco de massa  $m_1 = 100 \text{ kg}$  está em repouso sobre uma mesa lisa, bem comprida e que tem uma das suas extremidades encostada a uma parede. Um outro bloco de massa  $m_2$  é colocado entre o primeiro bloco e a parede e posto em movimento para a esquerda com velocidade constante  $v$ , como mostra a figura. Supondo que todas as colisões sejam inteiramente elásticas, ache o valor de  $m_2$  para o qual os dois blocos se deslocam com a mesma velocidade após ter  $m_2$  colidido uma vez com  $m_1$  e uma vez com a parede. A parede tem massa praticamente infinita.



**84.** Um elétron de massa  $m$  choca-se frontalmente com um átomo de massa  $M$ , inicialmente em repouso. Em consequência da colisão, uma certa quantidade de energia  $E$  característica, é armazenada internamente no átomo. Qual a velocidade inicial mínima,  $v_0$ , que o elétron deve ter? (Sugestão: Os princípios de conservação conduzem a uma equação quadrática para a velocidade final  $v$  do elétron e a uma equação quadrática para a velocidade final  $V$  do átomo. O valor mínimo  $v_0$  resulta da necessidade de ser real o radical das soluções obtidas para  $v$  e  $V$ .)

**85.** Uma bola de massa  $m$  e velocidade  $v$  é projetada no cano de uma espingarda de mola, de massa  $M$ , inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito. A massa  $m$  adere ao cano no ponto da compressão máxima da mola. Nenhuma energia é perdida em atrito. Que fração da energia cinética inicial da bola fica armazenada na mola?

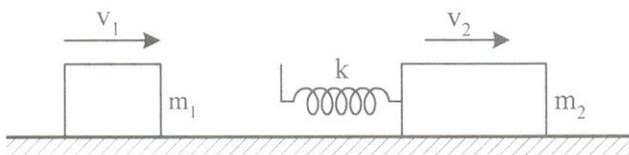


**86.** Uma caixa é colocada sobre uma balança de molas que é ajustada para que a leitura seja zero quando a caixa estiver vazia. Um punhado de seixos é, então, despejado na caixa de uma altura  $h$  à razão  $\mu$

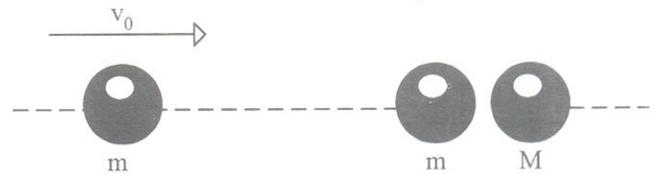
(seixos por segundo). Cada seixo tem uma massa  $m$ . Se os choques entre os seixos e a caixa são inteiramente inelásticos, ache a leitura da balança  $t$  segundos após o instante em que os seixos começaram a encher a caixa.

- 87.** Um elevador sobe com velocidade de 2 m/s. No instante em que o elevador está a uma altura de 7 m da extremidade superior do poço, uma bola cai do alto desta extremidade e se choca elasticamente com o teto do elevador.
- Até que altura acima da extremidade superior do poço a bola subiria caso o poço não fosse fechado?
  - Repita os cálculos para responder a pergunta do item anterior, supondo que o elevador esteja descendo com uma velocidade de 2 m/s.

- 88.** Um bloco de massa  $m_1 = 3,0$  kg desliza ao longo de uma mesa sem atrito com velocidade  $v_1 = 15$  m/s. Na frente dele, e movendo-se na mesma direção e sentido, existe um bloco de massa  $m_2 = 6,0$  kg que se move com velocidade  $v_2 = 5$  m/s. A mola indicada na figura possui massa desprezível e uma constante elástica  $k = 800$  N/m. A *massa reduzida*  $M_r$  de um sistema de duas partículas é definida pela expressão:  $M_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$



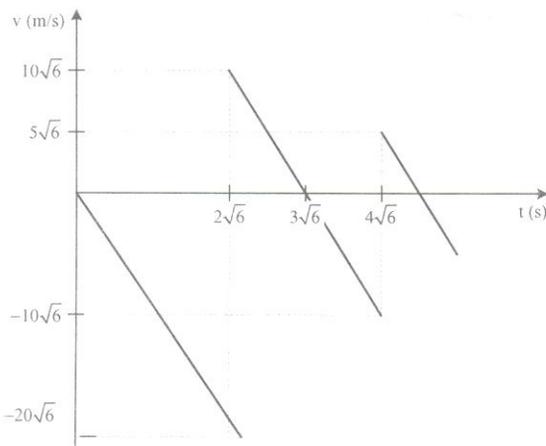
- Obtenha uma expressão para a energia cinética de um sistema de duas massas em relação ao referencial do centro de massa em função da *massa reduzida*  $M_r$  e em função da *velocidade relativa*  $v_r$ .
  - Quando os dois blocos colidem qual deve ser a energia potencial do sistema constituído pelas duas massas que comprimem a mola?
  - Ache o valor numérico da deformação máxima da mola depois do impacto.
- 89.** As duas massas à direita da figura estão ligeiramente separadas e inicialmente em repouso; a massa da esquerda incide sobre as outras duas com velocidade  $v_0$ . Supondo que as colisões sejam frontais e elásticas, mostre que:
- há duas colisões e ache todas as velocidades finais se  $M \leq m$ ;
  - há três colisões e ache todas as velocidades finais se  $M > m$ .



- 90.** Duas bolas A e B, tendo massas diferentes e desconhecidas, colidem. A está inicialmente em repouso, quando B tem uma velocidade  $v$ . Após a colisão, B passa a ter uma velocidade  $v/2$  e se desloca em ângulo reto com a direção de seu movimento original.
- Ache a direção em que a bola A se desloca após a colisão.
  - Pode-se determinar a velocidade de A a partir do enunciado?
- 91.** Prove que, na colisão de uma partícula de massa  $m_1$ , movendo-se com velocidade  $v_1$  no referencial inercial, com uma partícula de massa  $m_2$  em repouso no mesmo referencial, a velocidade da primeira partícula após a colisão tem uma direção em relação à velocidade inicial, dada pelos ângulos  $\text{tg } \theta = \text{sen } \phi / (\cos \phi + 1/A)$ , onde  $A = m_1/m_2$  e os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  dizem respeito aos referenciais inercial e do CM, respectivamente.
- 92.** Verifique, para as partículas do problema anterior, que, se  $m_1 = m_2$ , então  $\theta = \phi/2$ . Qual é então o máximo valor de  $\theta$ ?
- 93.** No problema 14, mostre que o valor máximo de  $\theta$  para A arbitrário é dado por  $\text{tg } \theta = A/\sqrt{1-A^2}$ . Discuta a situação em que A é maior do que um e o caso em que é menor do que um.

**Gabarito**

1.  $16 \cdot 10^6 \text{ N}$ .
2.  $4 \cdot \vec{v}$
3.  $\frac{20}{27} \cdot R_T$  do centro da Terra
4. a)  $65 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ; b)  $200 \text{ m/s}^2$ ; c)  $40 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ; d)  $655 \text{ m/s}$ .
5.  $1,8 \text{ N}$ , no sentido contrário ao do movimento inicial.
6.  $2 \text{ s}$
7.  $18,0 \text{ N}$ .
8. a)  $\text{m} \cdot \text{U/M}$ ; b)  $\text{n.m.U/M}$ ; c)  $\text{n.m.U}$ .
9.  $15 \text{ m/s}$
10.  $\text{m} \cdot \text{v}$
11. IV
12.  $3 \cdot v_0 \cdot \cos 45^\circ$
13.  $3 \cdot d$
14.  $v'_A = -0,5 \text{ m/s}$  e  $v'_B = 2 \text{ m/s}$ , com sentido positivo para a velocidade inicial de A.
15. a)  $0,4$   
b) parcialmente elástico  
c)  $3 \cdot 10^3 \text{ N}$
16.  $0,5$
17. a)  $2 \text{ m/s}$ ;  
b)  $1 \text{ m/s}$ , em sentido contrário ao inicial;  
c)  $-5 \text{ J}$ ;  
d) não,  $e = 0,75$ .
18. a)  $1,50 \text{ J}$ ; b)  $0,45 \text{ J}$ ; c)  $70\%$ .
19.  $10 \text{ m/s}$ .
20.  $202 \text{ m/s}$ .
21.  $\sqrt{m_1 \cdot m_3}$
22.  $v_A = 8 \text{ m/s}$  para a esquerda;  $v_B = 0,5 \text{ m/s}$  para a esquerda
23.  $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$
24.  $0,8$
25. a)  $D = 200 \text{ m}$ ;  
b)



26.  $5,0 \text{ cm}$
27. a)  $3 \cdot 10^3 \text{ kg}$ ;  
b) zero;  
c)  $1,5 \cdot 10^3 \text{ J}$ ;  
d)  $W^F = 3.500 \text{ J}$ ;  $\Delta E_c = 2.000 \text{ J}$ ;  $W^F - \Delta E_c = 1,5 \cdot 10^3 \text{ J}$
28.  $0,75 \text{ m}$

29.  $m_B/m_A$
30.  $-1,6\sqrt{3}\hat{i} - 2\hat{j}$
31. a)  $x_{CM} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \cdot t^2$ ;  $y_{CM} = \frac{15}{8} + \frac{3}{16} \cdot t^2$   
b)  $\vec{p} = 8t\hat{i} + 6t\hat{j}$
32.  $a_{CM} = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) \cdot g$ ;  $v_{CM} = a_{CM} \cdot t$
33. c) 2 fragmentos:  $v = \sqrt{\frac{3Q}{2m}}$ ;  $p = \sqrt{\frac{Qm}{6}}$ ;  
1 fragmento:  $v = \sqrt{\frac{3Q}{m}}$ ;  $p = \sqrt{\frac{Qm}{3}}$ ;  
d) fragmento no mesmo sentido do movimento inicial:  
 $v = \frac{5}{4} \sqrt{\frac{2Q}{m}}$ ;  $p = \frac{5}{2} \sqrt{2Qm}$ ;  
fragmento no sentido contrário ao do movimento inicial:  $v = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2Q}{m}}$ ;  $p = \frac{3}{2} \sqrt{2Qm}$
34. a)  $12.000 \sqrt{3} \text{ m}$   
b)  $20.000 M$ , onde  $M$  é a massa do projétil
35.  $x = \frac{\sqrt{2} \cdot v_0 \cdot [\sqrt{v_0^2 + 2gh} - v_0]}{g}$  de cada lado
37. I.  $-v$   
II.  $-\frac{(M - m + 2 \cdot \sqrt{M \cdot m})}{(M + m)} \cdot v$
38. c)  $e = 1$
39.  $v'_1 = -ev_1$ ;  $v'_2 = 0$ ;  
 $Q = -\frac{1}{2}(1 - e^2) \cdot m_1 \cdot v_1^2$ ;  $h' = e^2 \cdot h$
41. Quando  $m_1$  é erguida:  
a)  $h_1 = \frac{1}{45} \text{ m}$ ,  $h_2 = \frac{4}{45} \text{ m}$ ;  
b)  $h_1 = \frac{1}{125} \text{ m}$ ,  $h_2 = \frac{9}{125} \text{ m}$ ;  
c)  $\frac{1}{45} \text{ m}$   
Quando  $m_2$  é erguida:  
a)  $h_1 = \frac{16}{45} \text{ m}$ ,  $h_2 = \frac{1}{45} \text{ m}$ ;  
b)  $h_1 = \frac{36}{125} \text{ m}$ ,  $h_2 = \frac{4}{125} \text{ m}$ ;  
c)  $\frac{4}{45} \text{ m}$
44.  $\frac{1}{6}\hat{i} - \frac{1}{12}\hat{j}$

45. a)  $\Delta s_A = \frac{m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot (2m_1 + m_2) \cdot \frac{v_0^2}{2F}$   
 $\Delta s_B = \frac{m_1^2 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{v_0^2}{2F}$   
 b)  $\Delta E_c = F \cdot \Delta s_{rel}$   
 c) Permanecerá a mesma.
46. 3 m/s
47. a)  $1,5\sqrt{3}$  m/s; b) 0,375 m
48. a)  $10^\circ$  a E da direção N;  
 b)  $\frac{0,51 \cdot 50}{52}$  m/s;  
 c)  $51 \cdot \text{sen}10^\circ$  kg.m/s na direção E;  
 d)  $51 \cdot \text{sen}10^\circ$  m/s de O para E.
49. O de trás: 9,4 m/s; o da frente: 10,45 m/s
50.  $0^\circ \leq \theta \leq \frac{1}{2} \arcsen(0,15)$  ou  $\frac{1}{2} \arcsen(0,15) + \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
51. 200 m/s, 100 m/s e  $100\sqrt{3}$  m/s, na ordem do enunciado
52.  $\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right)m$
53.  $\left(0; -\frac{1}{12}\right)m$
54. a)  $7,5 \cdot 10^4$  N; b)  $1,875 \cdot 10^7$  W
55.  $n_{12} = v_2/v_1$ ; na água
56.  $\frac{9}{320}$  m
57. 54 km/h
58.  $\frac{2}{10 + \frac{\sqrt{15}}{2}}$  kg
59.  $\arctg(2)$  ao N da direção E;  $\frac{625}{32}$  m
60. a)  $30^\circ$ ; b)  $\lambda = 2$ ;  $v = \frac{\mu}{\sqrt{3}}$ ;  $\theta'_m = 120^\circ$ ;  $\theta'_M = 300^\circ$
61.  $\vec{F}$  tem a direção de  $\vec{v}$  e sentido oposto, e  $|\vec{F}| = 2\rho A \cdot |\vec{v}|^2$
62. Sobre o eixo de simetria, a uma distância de  $\frac{3m_1}{m_2 + 3m_1} \sqrt{d^2 - \frac{\ell^2}{3}}$  do átomo de hidrogênio.
63. 1,3 m/s, em direção ao centro de massa.
64. a)  $\frac{m}{m+M} \cdot v$  para baixo  
 b) o balão estará outra vez estacionário
65. R/2
66. 10,8 m e 12 m, respectivamente
67. a) 2,5 cm de um dos corpos, entre os dois  
 b) 2,4 cm do corpo com maior massa, entre os dois  
 c) movimento descendente com  $a_{CM} = 0,016$  m/s<sup>2</sup>
68. a)  $v_{carga \text{ útil}} = 8.640$  m/s;  $v_{foguetec} = 7.840$  m/s  
 b) antes:  $E_C = 1,6 \cdot 10^{10}$  J; depois:  $E_C = 1,60256 \cdot 10^{10}$  J  
 A diferença é devido à aplicação da força interna ao sistema.
69. 36 balas
70.  $\sqrt{\frac{2m^2 \cdot g \cdot h \cdot \cos^2 \alpha}{(M+m) \cdot (M+m \cdot \text{sen}^2 \alpha)}}$

71.  $\frac{m}{M+m} \cdot v_{rel}$
72. Sim.  
 Sucessivamente:  
 $\Delta v = \left[ \frac{1}{M+nm} + \frac{1}{M+(n-1)m} + \dots + \frac{1}{M+2m} + \frac{1}{M+m} \right] \cdot m \cdot v_{rel}$   
 Juntos:  $\Delta v = \frac{n}{M+nm} \cdot m \cdot v_{rel}$
73. Diminuição em 69,4 N para a barçaça mais vagarosa e aumenta em 104,2 N para a barçaça mais rápida.
74. 10 g
75. 2.u.μ
76. a)  $5 \cdot t^2$ ; b) 50 N; c) 500 N.s; d) 500 N.s; e) 62,5 m/s
77. a) 2,0 N.s; b) 2,0 N
78. a)  $\frac{4t^3}{3} - \frac{t^2}{2}$ ; b)  $\frac{232}{3}$  N.s; c)  $\frac{232}{3}$  N.s; d)  $\frac{232}{30}$  m/s
79. 10/3 kg
80. 2002 m/s.
81.  $\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 \cdot d$
82. 20 J para a partícula mais pesada; 40 J para a mais leve
83. 100/3 kg
84.  $\left(2E \cdot \frac{M+m}{M \cdot m}\right)^{1/2}$
85.  $\frac{M}{M+m}$
86.  $\mu m \left( t + \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)$
87. a) 4,8 m; b) 4,8 m abaixo da extremidade superior
88. a)  $\frac{M_r \cdot v_r^2}{2}$ ; b)  $E = \frac{k \cdot x^2}{2} = \frac{M_r \cdot v_r^2}{2}$ ; c)  $x_{max} = 0,5$  m
89. a) m: 0; m:  $\frac{m-M}{m+M} \cdot v_0$ ; M:  $\frac{2m}{m+M} \cdot v_0$   
 b) m:  $-\frac{M-m}{M+m} \cdot v_0$ ; m: 0; M:  $\frac{2m}{m+M} \cdot v_0$
90. a)  $\arcsen(0,5) + \frac{\pi}{2}$  ° da direção final de B. b) Não.
92.  $\pi/2$

Neste complemento iremos discutir alguns conceitos importantes para que possamos nos aprofundar no estudo da gravitação universal.

Inicialmente iremos tratar de uma grandeza muito importante: O momento angular. Veremos que devido às características da força gravitacional, esta quantidade física se conserva.

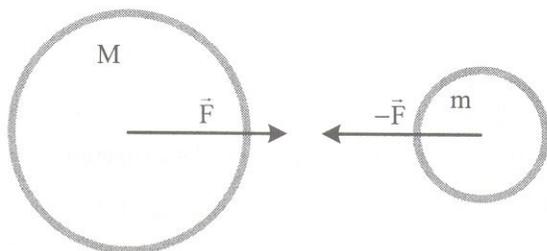
Por fim, faremos um paralelo entre a eletrostática e a gravitação. Faremos o cálculo do potencial gravitacional, o que permitirá determinar o trabalho, já que a força gravitacional é conservativa.

Neste tópico iremos definir uma “Lei de Gauss” da gravitação. Isto nos permitirá calcular o campo gravitacional para distribuições de massa com elevado grau de simetria.

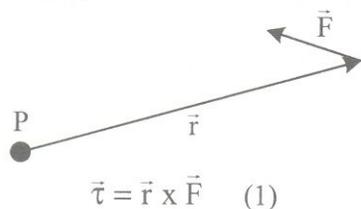
A teoria e os exercícios da apostila, complementados pela teoria e exercícios deste texto, darão a você condições de enfrentar os exercícios dos vestibulares.

### Forças centrais

Existe uma categoria de forças denominadas centrais. Forças centrais são aquelas que agem no centro de massa dos corpos que interagem entre si e cuja direção é a mesma da reta que liga o centro de massa dos dois corpos.



O torque, ou momento ( $\tau$ ) de uma força em relação a um ponto, é definido conforme a figura a seguir de acordo com a equação:



Observando a característica da Força gravitacional, ilustrada na figura 1, verificamos que, pelo fato de ela ser central, ela é incapaz de gerar torque.

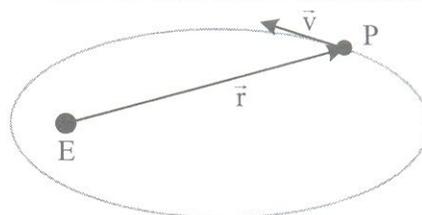
### O momento angular

Certamente você já assistiu a shows de patinação no gelo, no qual, em um dado momento, a patinadora inicia um giro no mesmo ponto. Você também deve ter percebido que a velocidade de giro da manobra é controlada pela abertura que ela dá ao seu corpo.

Se ela recolhe os braços junto a si, a velocidade de giro aumenta, se ao contrário, ela abre os seus braços, o giro diminui sua frequência. Por que isto ocorre?

Para explicar estes e outros fenômenos do cotidiano e também para entendermos o movimento das órbitas dos planetas e estrelas iremos definir uma nova grandeza vetorial denominada momento angular ( $L$ ).

Observe o movimento de um planeta genérico de massa  $m$ , em torno de uma estrela de massa  $M$ .



Conforme visto anteriormente, a velocidade ao longo da órbita não é constante, tal que a velocidade máxima se dá no periélio e a velocidade mínima se dá no afélio. Portanto, a grandeza quantidade de movimento ( $\vec{p}$ ) não se conserva durante a órbita. Tal que:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \neq \text{constante} \quad (2)$$

Todavia, existe um paralelo do vetor quantidade de movimento para corpos em rotação. Esta importante quantidade é chamada de momento angular, definido por:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v} \quad (3)$$

$$L = r \cdot m \cdot v \cdot \text{sen}\theta$$

A fim de compreendermos a utilidade desta grandeza no estudo da gravitação universal, derivemos o vetor momento angular em relação ao tempo.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \quad (4)$$

Observe que para que o primeiro termo entre parênteses é nulo, já que os operandos do produto vetorial são paralelos ( $\frac{d\vec{r}}{dt} // \vec{v}$ ).

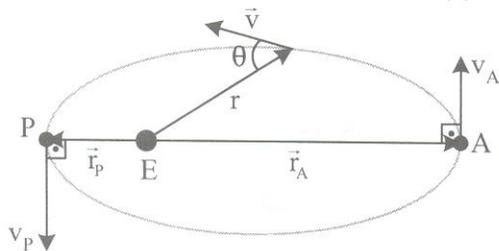
Fica fácil entender agora o porque do movimento da bailarina. Como o torque é pequeno enquanto ela patina, pois o atrito é pequeno, o momento angular da bailarina tende a se conservar, portanto quando ela recolhe os braços (diminui o  $r$ ), a velocidade tende a aumentar (aumento de  $p$ ). Da mesma forma quando ela abre os braços (aumento de  $r$ ) a velocidade tende a diminuir (diminui o  $p$ ). Pois o produto  $r \times mv$  é constante.

Como forças centrais não geram torque, podemos concluir que sistemas sob a ação destas forças terão o momento angular constante durante toda a órbita, ou seja:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad (5)$$

Este fato é sumamente importante já que, conforme notado anteriormente, a velocidade não é a mesma em toda a órbita, ou seja, a quantidade de movimento linear não é constante, porém, o momento angular o é. Assim, tem-se que:

$$L = r \cdot m \cdot v \cdot \sin \theta = \text{constante} \quad (5)$$



Para os pontos notáveis da órbita, periélio e afélio, observa-se na figura anterior que o ângulo entre o vetor posição  $r$  e o vetor velocidade  $v$  é de  $90^\circ$ , desta forma, podemos escrever:

$$\begin{aligned} L_{\text{perigeu}} &= L_{\text{apogeu}} \\ r_p \cdot v_p \cdot m \cdot \sin 90 &= r_a \cdot v_a \cdot m \cdot \sin 90 \quad (6) \\ r_p \cdot v_p &= r_a \cdot v_a \end{aligned}$$

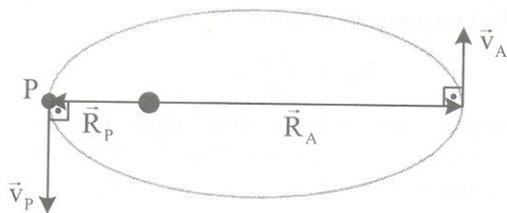
Portanto, para a resolução de problemas de gravitação, temos que:

- A energia mecânica se conserva devido ao fato de que a força gravitacional é conservativa;
- O momento angular se conserva, já que a força gravitacional é uma força central.

**Exemplo 1:**

Um planeta de massa  $m$ , órbita em uma órbita elíptica, em torno de uma estrela de massa  $M$ . os raios de periélio e afélio são conhecidos ( $R_p$  e  $R_a$ ), respectivamente. Nessas condições, determine a velocidade no periélio e no afélio.

**Solução:**



Devido ao fato de que a força gravitacional é conservativa, tem-se que a energia mecânica no periélio é a mesma do afélio, ou seja:

$$E_{M-\text{periélio}} = E_{M-\text{afélio}}$$

$$-\frac{G \cdot M \cdot m}{R_p} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_p^2 = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R_a} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_a^2 \quad (7)$$

Energia potencial periélio
Energia cinética periélio
Energia potencial afélio
Energia cinética afélio

$$-\frac{G \cdot M}{R_p} + \frac{v_p^2}{2} = -\frac{G \cdot M}{R_a} + \frac{v_a^2}{2} \quad (8)$$

Observamos na equação acima que temos duas incógnitas,  $v_p$  e  $v_a$ . Precisamos de mais uma equação. Aplicando-se a condição de conservação do momento angular, temos que:

$$r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a \rightarrow v_a = \frac{r_p \cdot v_p}{r_a} \quad (9)$$

Substituindo a equação (9) em (8) e tirando o mínimo em 9, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{v_p^2}{2} - \frac{r_p^2 v_p^2}{2 \cdot r_a^2} &= \frac{G \cdot M}{r_p} - \frac{G \cdot M}{r_a} \\ \frac{v_p^2 (r_a^2 - r_p^2)}{2 \cdot r_a^2} &= \frac{G \cdot M (r_a - r_p)}{r_a \cdot r_p} \quad (10) \end{aligned}$$

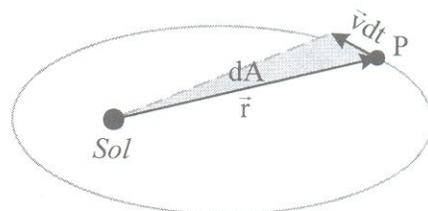
$$v_p^2 (r_a + r_p) = \frac{2G \cdot M \cdot r_a}{r_p}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M \cdot r_a}{r_p (r_a + r_p)}}$$

Substituindo o resultado anterior em (9), temos que:

$$v_a = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M \cdot r_p}{r_a (r_a + r_p)}} \quad (11)$$

Podemos também utilizar a conservação do momento angular para demonstrarmos a segunda lei de Kepler, ou lei das áreas. Observe a figura a seguir:



O elemento de área  $dA$  pode ser escrito em função do módulo do produto vetorial entre os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{v} \cdot dt$ , tal que:

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v} \cdot dt| \quad (12)$$

A velocidade areolar, ou seja, a velocidade com que o vetor posição  $\vec{r}$  "varre" a área ao longo da órbita é dada pela derivada em relação ao tempo do elemento de área  $dA$ , tal que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} \cdot dt + \vec{r} \times \vec{v} \right| = \frac{L}{2m} \quad (13)$$

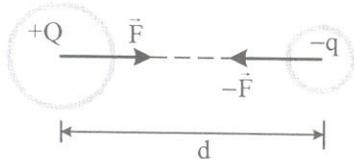
Observe que, devido ao fato de que o momento angular é constante, a velocidade areolar também o será. A conclusão puramente cinemática de Kepler, é facilmente provada utilizando-se o conceito de conservação do momento angular.

A eletrostática e a gravitação

Passemos agora para um paralelo entre a eletrostática e a gravitação, veremos que, por se tratarem de forças com características bem semelhantes, o seu tratamento é bem parecido, exceto que não existem forças repulsivas na gravitação.

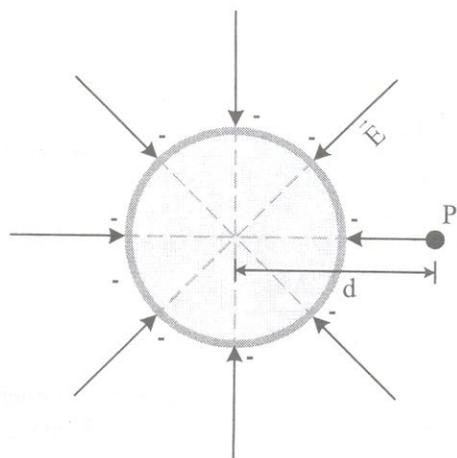
**Eletrostática**

Inicialmente, definimos a lei de Coulomb, que nos dá o módulo da força de interação entre duas cargas puntiformes, separadas a uma distância  $d$  entre si, em um meio de constante eletrostática  $K$ , tal que:



$$F = \frac{K.Q.q}{d^2}$$

Na seqüência, explicamos que as cargas elétricas geram em torno de si, campos elétricos ( $E$ ), tal que se a distribuição de cargas for esférica e em pontos externos, o campo elétrico pode ser escrito como:



$$E = \frac{K.Q}{d^2}$$

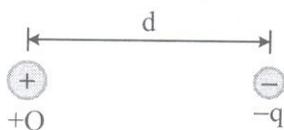
Devido ao fato de que a força elétrica é uma força conservativa, podemos associar a todos os pontos do campo uma grandeza escalar auxiliar, que chamamos de potencial elétrico. O trabalho da força elétrica depende somente do potencial inicial e do potencial final, tal que:

$$\tau_{AB} = q(V_A - V_B)$$

Adotando-se potencial nulo no infinito, e supondo um ponto P externo a uma distribuição esférica de cargas, o potencial gravitacional no ponto P é dado por:

$$V_p = -\frac{\tau_{\infty P}}{q} = \frac{K.Q}{d}$$

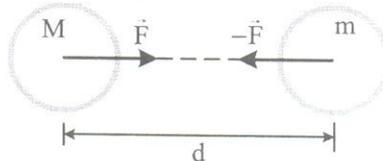
Caso tenhamos um sistema com duas cargas elétricas esféricas separadas por uma distância  $d$  entre si, conforme a figura a seguir, temos uma energia potencial elétrica, armazenada no campo elétrica dada por:



$$E_p = q.V = \frac{K.Q.q}{d}$$

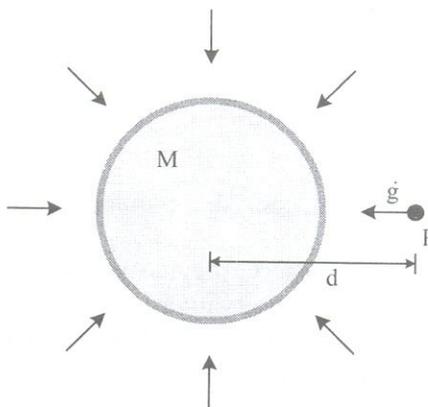
**Gravitação**

Na gravitação, foi apresentada a Lei da Gravitação Universal, que nos dá o módulo da força de interação entre duas massas separadas a uma distância  $d$  entre elas, tal que:



$$F = \frac{G.M.m}{d^2}$$

Após definida a Lei da gravitação Universal de Newton, mostramos que as massas geram em torno de si, campos gravitacionais ( $g$ ), tal que se a distribuição de massa for esférica e em pontos externos a ela, o campo gravitacional pode ser escrito como:



$$g = \frac{G.M}{d^2}$$

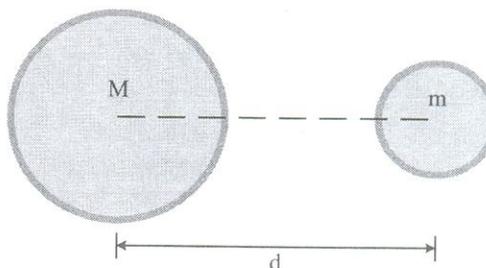
A força gravitacional também é uma força conservativa, desta forma, também podemos associar uma grandeza escalar auxiliar, chamada de potencial gravitacional. O trabalho, da mesma maneira, depende somente dos potenciais gravitacionais inicial e final, tal que:

$$\tau_{AB} = m(V_{gA} - V_{gB})$$

Adotando-se potencial nulo no infinito, e supondo um ponto P externo a uma distribuição esférica de massa, o potencial gravitacional no ponto P, é dado por:

$$V_{gP} = -\frac{\tau_{\infty P}}{m} = -\frac{G.M}{d}$$

Caso tenhamos um sistema com duas massas esféricas separadas entre si por uma distância  $d$ , temos uma energia potencial gravitacional, armazenada no campo gravitacional, dada por:



$$E_p = m.V_g = -\frac{G.M.m}{d}$$

Conforme observado em classe, a energia mecânica de um corpo preso na órbita de um outro é sempre negativa. As famílias de todas as órbitas possíveis são as cônicas, tal que:

- Se  $E_m < 0$  – Tem-se uma elipse
- Se  $E_m = 0$  – Tem-se uma parábola
- Se  $E_m > 0$  – Tem-se uma hipérbole.

Para o caso especial onde se tem uma circunferência, fica como exercício mostrar que a energia cinética é igual à metade do módulo da energia potencial, ou seja:

$$\frac{E_c}{E_p} = -\frac{1}{2} \quad (14)$$

Este resultado é útil na resolução de vários tipos de exercícios.

### A Lei de Gauss da gravitação

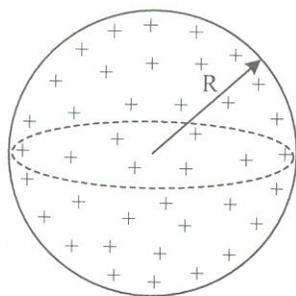
Até agora, falamos do valor do campo gravitacional externo à distribuições esféricas de massa. Porém, para calcularmos o campo gravitacional no interior da terra, ainda não temos a ferramenta matemática necessária.

Porém, como observado anteriormente, é grande a semelhança do tratamento matemático da força elétrica e da força gravitacional.

No capítulo referente à Lei de Gauss, calculamos o campo elétrico de uma esfera isolante uniformemente carregada em função da distância ao seu centro. A pergunta que fica é: Se o tratamento matemático é tão parecido, será que não poderíamos adaptar a lei de Gauss da eletricidade para a gravitação, a fim de resolvermos o mesmo problema?

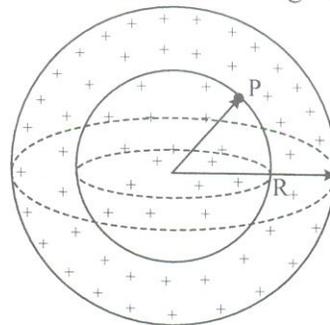
A resposta é sim! Podemos calcular campos gravitacionais de estruturas com elevada simetria, utilizando-se de uma “Lei de Gauss da gravitação”. Antes de prosseguirmos, vamos nos relembrar da utilização da Lei de Gauss da eletricidade para resolvermos o problema do cálculo do campo elétrico de uma distribuição esférica homogênea de cargas.

Considere uma esfera isolante de raio  $R$ , uniformemente carregada com uma densidade de carga  $\rho$  ( $C/m^3$ ), conforme a figura abaixo:



Deseja-se calcular o módulo do campo elétrico em um ponto P a uma distância  $r$  do centro da esfera. A simetria esférica nos permitirá calcular facilmente o campo através da Lei de Gauss.

A escolha da superfície gaussiana é simples pois como a simetria é esférica, a superfície gaussiana adequada é uma esfera, conforme a figura abaixo:



Desta forma temos que o módulo de  $\mathbf{E}$  é o mesmo em todos os pontos da gaussiana e o ângulo  $\theta$  também é constante e igual a zero em todos os pontos da mesma, portanto:

$$\sum E \cdot dA \cdot \cos \theta = E \sum dA = \frac{q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} \quad (15)$$

Portanto, basta calcular o somatório  $\sum dA$  e a carga interna à superfície gaussiana  $q_{\text{interno}}$  e teremos o campo elétrico no ponto P.

O somatório  $\sum dA$  corresponde à própria área da superfície gaussiana, portanto:

$$\sum dA = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \quad (16)$$

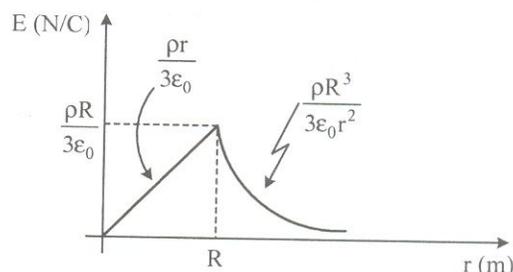
A carga interna à superfície gaussiana  $q_{\text{interna}}$  é definida como sendo o produto pelo volume definido pela superfície gaussiana pela densidade de carga, tal que:

$$q_{\text{interna}} = \rho \cdot V_{\text{gaussiana}} = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \quad (17)$$

Substituindo as equações (17) e (18) na equação (16) temos que:

$$E \sum dA = \frac{q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} \rightarrow E \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \rho \cdot \frac{4}{3 \cdot \epsilon_0} \pi \cdot r^3 \rightarrow E = \frac{\rho \cdot r}{3 \cdot \epsilon_0} \quad (18)$$

Observe que na região que vai do centro da sua esfera até a sua superfície o campo elétrico é uma função linear do distância  $r$ , ou seja, o campo elétrico é nulo no centro ( $r = 0$ ) e vale  $\frac{\rho \cdot R}{3 \cdot \epsilon_0}$  na superfície ( $r = R$ ).



Concluimos que para calcularmos o campo elétrico em um ponto P qualquer gerado por uma distribuição esférica de carga, basta passarmos pelo ponto P uma

esfera centrada no centro da distribuição esférica e observarmos qual é a carga interna  $Q_{\text{interna}}$  à esta superfície gaussiana esférica, ou seja:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_{\text{interna}}}{r^2} \quad (19)$$

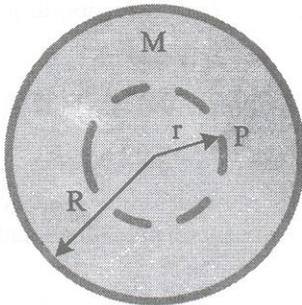
Onde  $r$  é a distância do ponto  $P$  ao centro da esfera.

Para a resolução do problema do cálculo do campo gravitacional no interior da terra, enunciemos a lei de Gauss da gravitação:

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{s} = 4\pi G M_{\text{interna}} \quad (20)$$

A equação acima nos diz que o fluxo do campo gravitacional ao longo de uma superfície fechada é proporcional à massa interna à essa superfície fechada. Este enunciado é idêntico ao da lei de Gauss da eletricidade, adaptado à gravitação. Passemos então à resolução do problema.

Observe a figura a seguir, o nosso objetivo é calcular o campo gravitacional no ponto  $P$ , que dista uma distância  $r$  do centro de uma esfera de massa  $M$  e raio  $R$ , uniformemente distribuída.



**Solução:**

Devemos inicialmente passar pelo ponto  $P$  uma superfície fechada que possua a simetria do problema, no caso, uma esfera.

Assim, podemos escrever pela lei de Gauss da gravitação que:

$$g \oint ds = 4\pi G M_{\text{interna}} \quad (21)$$

Calcular a integral  $\oint ds$  é calcular a própria área da superfície fechada. Portanto:

$$\oint ds = 4\pi r^2 \quad (22)$$

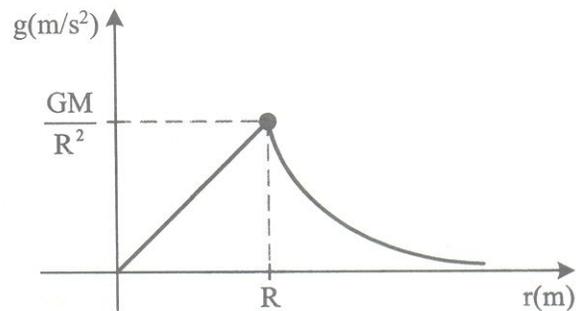
Devido ao fato de que a distribuição de massa é homogênea, a densidade é constante, tal que:

$$\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M_{\text{interna}}}{\frac{4}{3}\pi r^3} \rightarrow M_{\text{interna}} = \frac{M r^3}{R^3} \quad (23)$$

Substituindo os resultados (22) e (23) em (21), tem-se que:

$$g \cdot 4\pi r^2 = 4\pi G \cdot \frac{M r^3}{R^3} \rightarrow g = \frac{G M r}{R^3} \quad (24)$$

Este resultado é válido para pontos internos à superfície terrestre. Desta forma o gráfico do campo gravitacional terrestre em função da distância ao seu centro é visto na figura a seguir:



Observe que este resultado é idêntico ao da esfera isolante uniformemente carregada.

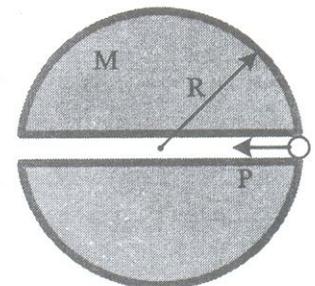
Finalmente, observe que se a distribuição de massa for esférica e homogênea, a determinação do campo gravitacional é imediata e pode ser obtida através da seguinte expressão:

$$g_{\text{esférica}} = \frac{G M_{\text{interna}}}{r^2} \quad (25)$$

Onde  $M_{\text{interna}}$  é a massa que se encontra interior a uma esfera que contenha o ponto considerado e  $r$  é a distância do ponto considerado ao centro da distribuição esférica de massa.

**Exemplo 2:**

Determine o período de oscilação de um corpo de massa  $m$ , abandonado na superfície terrestre em um túnel que compreende o diâmetro da terra. Considere a terra com raio  $R$  e massa  $M$ .



**Solução:**

Adotando-se o eixo  $Ox$ , com origem no centro da terra, conforme visto anteriormente, o corpo fica sujeito a uma força peso dada por:

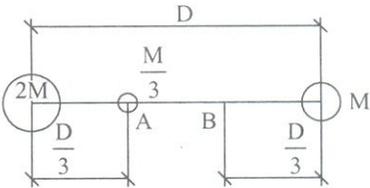
$$P = m \cdot g = m \frac{GMx}{R^3} = \frac{G \cdot M \cdot m}{\underbrace{R^3}_{\text{constante do MHS}}} \cdot x = k \cdot x \quad (26)$$

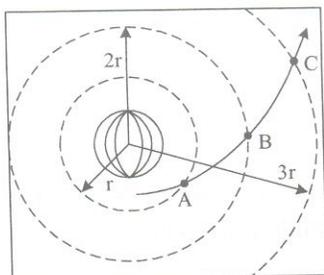
Observamos que a força que age sobre o corpo é do tipo  $k \cdot x$ , portanto o corpo executará um MHS, cujo período é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{G \cdot M \cdot m}{R^3}}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{G \cdot M}} \quad (27)$$

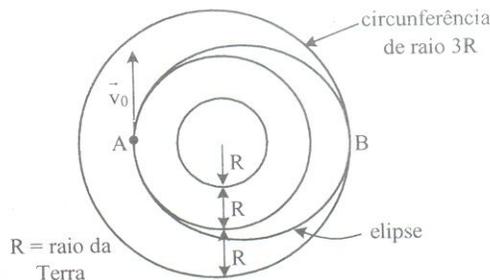
A partir de agora você tem a oportunidade de exercitar-se. Boa sorte!!!



- Marte está 52% mais afastado do Sol do que a Terra. Determine o ano (período do movimento de revolução em torno do Sol) de Marte, expresso em anos terrestres.
- Um rapaz de massa 70 kg encontra-se a 10 m de uma jovem de massa 50 kg. A constante de atração gravitacional  $G$  vale  $6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$ . Determine, aproximadamente, a força de atração gravitacional entre ambos.
- O módulo da força de atração gravitacional entre duas esferas de massas ( $M$ ) é ( $F$ ) quando a distância entre elas é ( $D$ ). Qual é o módulo da força de atração entre duas esferas de massa  $M/2$  quando a distância entre elas for  $2D$ ?
- Determine a aceleração da gravidade a  $3,600 \cdot 10^4 \text{ km}$  acima da superfície da Terra (o raio da Terra é igual a  $6,40 \cdot 10^3 \text{ km}$ ).
- A massa da Terra é 81 vezes a da Lua. A distância à Lua mede 380.000 km. A que distância do centro da Terra se situa o ponto onde o campo gravitacional é nulo?
- Que alteração sofreria o módulo da aceleração da gravidade se a massa da Terra fosse reduzida à metade e o seu raio diminuído de  $\frac{1}{4}$  de seu valor real?
- Qual é o valor da aceleração da gravidade do Sol se o seu raio é 110 vezes maior do que o da Terra e sua massa específica média é  $\frac{1}{4}$  da massa específica média da Terra? A aceleração da gravidade na superfície da Terra é  $9,8 \text{ m/s}^2$ .
- Considere as seguintes informações:
  - um copo de massa 3 kg é atraído por uma força de 4,8 N na superfície da Lua;
  - a aceleração da gravidade na Terra é de  $10 \text{ m/s}^2$ ;
  - a massa da Lua é de aproximadamente 1/100 da massa da Terra;
  - o raio da Lua é aproximadamente  $\frac{1}{4}$  do raio da Terra. Utilizando algumas destas informações, determine a aceleração de um objeto, se este for abandonado próximo à superfície da Lua.
- O diâmetro de um planeta é o dobro do terrestre e sua massa é seis vezes maior que a da Terra. Determine a razão entre a aceleração da gravidade na superfície da Terra.
- Determine o valor da aceleração da gravidade a uma altitude igual a nove raios terrestres.
- A energia potencial de um corpo de massa  $m$  na superfície da Terra é  $-GM_T m/R_T$ . No infinito essa energia potencial é nula. Considerando-se o princípio de conservação de energia (cinética + potencial), que velocidade deve ser dada a esse corpo de massa  $m$  (velocidade de escape) para que ele se livre da atração da Terra, isto é, chegue ao infinito com  $v = 0$ ?  
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^{-2}$ ;  $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ ;  
 $R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ .  
 Despreze o atrito com a atmosfera.
- Determine o trabalho necessário para levar a partícula de massa  $M/3$  do ponto A até o ponto B, em função da constante universal da gravitação  $G$ , quando essa partícula se encontra sob a ação de duas massas,  $M$  e  $2M$ , conforme a figura.
 
- Duas estrelas de massa  $m$  e  $2m$ , respectivamente, separadas por uma distância  $d$  e bastante afastadas de qualquer outra massa considerável, executam movimentos circulares em torno do centro de massa comum. Nestas condições, determine a mínima quantidade de energia necessária para separar completamente as duas estrelas, em função da constante universal de gravitação “ $G$ ”.
- Uma nave espacial move-se no campo gravitacional da Terra seguindo uma trajetória que passa pelos pontos A, B e C. pertencentes a esferas concêntricas à Terra. A massa da nave é 10 toneladas, e adotou-se como nula sua energia potencial gravitacional quando a mesma estiver a uma distância infinita da Terra. Ao passar pelo ponto A, sua energia potencial gravitacional vale  $-240 \cdot 10^9 \text{ J}$ .



- I. Determine o trabalho realizado pela força peso da nave no percurso de A para B.
  - II. O trabalho calculado no item anterior depende do formato da trajetória? Por quê?
  - III. Ao passar pelo ponto C, a nave desliga todos os motores. Que velocidade mínima deverá ter atingido neste instante para poder escapar do campo gravitacional terrestre?
- 15.** 1º Você está no cais de um porto e verifica que o mastro de um navio ancorado ao seu lado tem sua ponta situada 20 m acima de sua cabeça. O navio zarpa e você acompanha sua partida mar afora com binóculos. Num dado instante a ponta do mastro se esconde atrás do horizonte. Qual a distância entre você e o navio neste instante?
- 2º Com que velocidade deve ser lançada uma pedra para que se movimente acompanhado a curvatura da Terra?
- Dado: raio da Terra  $\approx 6.400$  km.
- 16.** Supondo-se perfeitamente esférica e desprovida de atmosfera, qual deverá ser a velocidade de um corpo para que, lançado horizontalmente, entre em órbita circular rasante?
- Dados: raio da Terra  $\approx 6.400$  km;  
 $g$  próximo à superfície  $\approx 10$  m/s<sup>2</sup>
- 17.** Um corpo é lançado horizontalmente a partir de um ponto situado a uma altura, em relação à superfície da Terra igual a 3 raios terrestres. Supondo-se o raio da Terra igual 6.400 km, determine sua velocidade para que se mantenha em órbita circular.
- 18.** Demonstre que, para um corpo em órbita circular, sua energia cinética é igual à metade de sua potencial em valor absoluto.
- 19.** Um corpo é lançado do ponto A (onde tem uma energia potencial de  $-600$  J) com uma energia cinética de 350 J, descrevendo a trajetória elíptica da figura.



- a) Qual a energia cinética do corpo no ponto B?
  - b) Si o corpo tivesse sido lançado do ponto A com uma energia cinética de 600 J, que tipo de trajetória descreveria?
  - c) Se o corpo tivesse sido lançado do ponto A, como indica a figura, com uma energia de 300 J, que tipo de trajetória descreveria?
- 20.** Um satélite de massa  $M$  descreve uma órbita circular de raio  $R$  em torno de um planeta de massa  $M'$ . A constante de gravitação universal é  $G$ . Determine a expressão da velocidade  $v$  do satélite.
- 21.** Um satélite gira em torno da Terra com velocidade  $v$ , mantendo-se à distância  $d$  de sua superfície. Se  $R$  é o raio da Terra, determine a aceleração da gravidade terrestre nos pontos da trajetória do satélite.
- 22.** Um satélite move-se numa órbita cujo raio é 2 vezes maior que o raio terrestre. Determine a aceleração centrípeta deste satélite em torno da Terra, sendo  $g$  a aceleração da gravidade na superfície terrestre.
- 23.** Se fosse possível colocar um satélite em órbita rasante em torno da Terra, o seu período seria  $T$ . Sendo  $G$  a constante de gravitação universal, expresse a massa específica média (densidade média) da Terra em função de  $T$  e  $G$ .
- 24.** A distância média entre Marte e seu satélite Fobos é 9.500 km. O diâmetro de Marte é 6.800 km e sua densidade média é 4.120 kg/m<sup>3</sup>. Determine o período de Fobos.
- 25.** A constante de gravitação universal é  $G$ . O período de rotação de um planeta  $X$  é  $T$ . Sabe-se que, no equador de  $X$ , mesmo um dinamômetro de alta sensibilidade mantém suspenso na vertical qualquer corpo de massa 1 tonelada, acusando força zero. Determine a densidade média do planeta  $X$ .
- 26.** I. Determine a aceleração da gravidade a 3.600.10<sup>4</sup> km acima da superfície da Terra (o raio da Terra é igual a 5,10.10<sup>3</sup> km)

II. Considerando-se os dados e o resultado da questão anterior, determine o período de revolução de um satélite artificial, colocado em órbita circular da Terra, naquela altitude.

**27.** Um planeta em órbita circular em torno de uma estrela dista  $R$  do centro da mesma, e o seu período é  $T$ . Um outro planeta também em órbita circular em torno de mesma estrela tem período igual a  $3\sqrt{3}T$ . Determine o raio de sua órbita.

**28.** Um satélite é colocado em uma órbita circular, a  $D$  km acima da superfície da terra, e sua massa é  $m$  kg. Sendo  $R$  o raio médio da Terra, pede-se, em função desses dados:

- a) a velocidade tangencial do satélite nessa órbita;
- b) o período de cada revolução em torno da Terra;
- c) a energia total do satélite em função da distância ao centro da Terra.

*Observação:* Esta equação deve ser resolvida literalmente, e os resultados, indicados com suas unidades no sistema M.K.S.

**29.** O cometa Halley tem um período de 76 anos. Qual é a sua distância média ao Sol?

**30.** A distância média de Júpiter ao Sol é 5,22 vezes a distância da Terra ao Sol. Qual é o período de Júpiter?

**31.** O raio da órbita da Terra é  $1,49 \cdot 10^{11}$  m, e o da órbita de Urano,  $2,87 \cdot 10^{12}$  m. Qual é o período de Urano?

**32.** Um satélite descreve em torno da Terra uma órbita circular com um período de 1 dia. Determinar o raio da órbita.

**33.** As massas num aparelho de Cavendish são  $m_1 = 10$  kg e  $m_2 = 10$  g; a separação entre os respectivos centros é 5 cm. A haste que suporta as duas pequeninas esferas tem 20 cm de comprimento. Qual é a força de atração entre a esfera grande e a pequena? Qual o torque que deve ser exercido pela suspensão para equilibrar estas forças?

**34.** Uma partícula puntiforme, de massa  $m$ , está sobre o eixo dos  $x$  em  $x = +a$ , e uma segunda partícula de massa igual está em  $x = -a$ .

- a) Qual o campo gravitacional a meio caminho das duas partículas, em  $x = 0$ ?
- b) Determinar o campo gravitacional sobre o eixo dos  $x$ , nos pontos  $x > a$ .

**35.** No caso da distribuição de massa do exercício 34, calcular o trabalho necessário para trazer uma massa de prova  $m_0$  desde  $x = \infty$  até  $x = 0$ .

**36.** Um anel delgado, uniforme de massa  $M$  e raio  $r$  está no plano  $yz$  com o seu centro na origem.

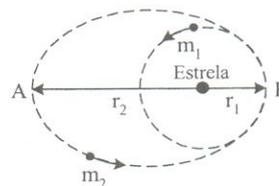
- a) Calcular o potencial gravitacional  $V(x)$  nos pontos sobre o eixo soa  $x$ , que coincide com o eixo do anel.
- b) Esquematizar  $V(x)$  contra  $x$ .
- c) Em que ponto  $V(x)$  tem o módulo máximo? Qual é o campo gravitacional neste ponto?

**37.** Uma casca esférica tem raio  $R = 2$  m e massa 12 kg. Qual é o campo gravitacional:

- a) sobre a superfície, no lado externo;
- b) sobre a superfície, no lado interno?

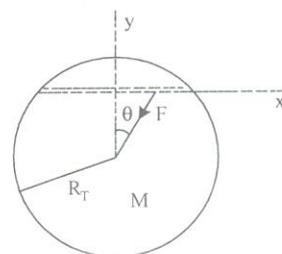
**38.** Dois planetas de massa igual orbitam em torno de uma estrela de massa muito maior que a deles, figura. O planeta  $m_1$  descreve uma órbita circular de raio  $1,10^8$  km, com período de 2 anos. O planeta  $m_2$  descreve uma órbita elíptica com a menor distância (no período) igual a  $r_1 = 1,10^8$  km e maior distância (no afélio)  $r_2 = 1,8 \cdot 10^8$  km, conforme a figura.

- a) Sabendo que o raio médio de uma órbita elíptica é o comprimento do semi-eixo maior, calcular o período da órbita de  $m_2$ .
- b) Qual é a massa da estrela?
- c) Qual o planeta que tem maior velocidade no ponto P? Qual o que tem maior energia total?
- d) Qual a razão entre a velocidade escalar de  $m_2$  no ponto P e a velocidade escalar no ponto A?

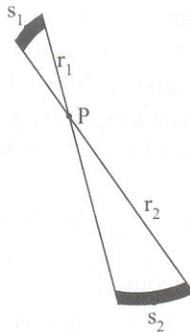


*Conservação do momento angular R.Q.*

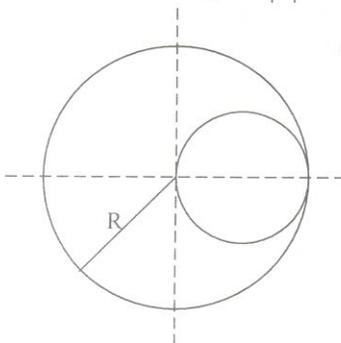
**39.** Uma partícula desliza ao longo de um túnel reto, sem atrito, cavado através da Terra, figura. Admitindo que a Terra tenha densidade constante, mostrar que o movimento é harmônico simples e calcular o período.



- 40.** a) Mostrar que o campo gravitacional de um anel material uniforme é nulo no centro do anel.  
 b) A figura mostra um ponto P no plano do anel, porém não no seu centro. Considere dois elementos do anel, de comprimentos  $s_1$  e  $s_2$ , às distâncias  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente. Qual é a razão entre as massas destes elementos? Qual deles provoca campo maior no ponto P? Qual a direção do campo no ponto P, devido a estes elementos?  
 c) Qual a direção do campo gravitacional no ponto P?  
 d) Suponha que o campo gravitacional, devido a uma massa puntiforme, varia com  $1/r$  e não com  $1/r^2$ . Qual seria então o campo gravitacional resultante, no ponto P, devido aos elementos mencionados?  
 e) Em que as respostas das partes (b) e (c) seriam diferentes se o ponto P estivesse no interior de uma casa esférica e no não no plano de um anel circular?



- 41.** Uma casca esférica espessa tem raio interno  $R_1$  e raio externo  $R_2$ . a sua massa é M e sua densidade uniforme. Calcular o campo gravitacional  $g_r$  como função de r para todos os r.
- 42.** Uma esfera de raio R está com o centro na origem. A sua densidade de massa  $\rho_0$  é uniforme, exceto pela presença de uma cavidade esférica de raio  $r = R/2$ , cujo centro está em  $x = R/2$ , conforme está na figura. Calcular o campo gravitacional nos pontos sobre o eixo dos x para  $|x| > R$ .



- 43.** Mostrar que no interior da cavidade da esfera no Problema 41 o campo gravitacional é uniforme, e calcular o seu módulo e a sua direção.
- 44.** Um túnel reto e liso é escavado através de um planeta esférico cuja densidade  $\rho_0$  é constante. O túnel passa pelo centro do planeta e é perpendicular ao eixo de rotação do planeta, que está fixo no espaço. O planeta gira com velocidade angular  $\omega$ , de modo que os corpos no túnel não têm aceleração em relação ao túnel. Calcular  $\omega$ .
- 45.** Existem vários satélites movendo-se em círculos no planeta equatorial e a uma altura acima da superfície terrestre tal que eles permanecem parados para um observador no nosso planeta. Encontrar essa altura.
- 46.** Um satélite terrestre gira em órbita circular de 7.000 km de raio (cerca de 620 km acima da superfície da Terra) com uma velocidade orbital de 27.200 km/h.  
 a) Determinar o tempo de uma revolução.  
 b) Achar a aceleração da gravidade nesta órbita.
- 47.** Em 1968, a nave espacial Apolo 8 foi colocada numa órbita circular em torno da Lua, a uma altitude de 113 km acima da superfície. O período observado dessa órbita foi de 1 h 59 min. Sabendo que o raio da Lua é de 1.738 km, utilize esses dados para calcular a massa da Lua.
- 48.** Considere um satélite em órbita circular próxima da superfície de um planeta.  
 a) Mostre que o período T dessa órbita só depende de densidade média  $\rho$  do planeta, e não de sua massa total.  
 b) Calcule o valor de T para a Terra, para a qual  $\rho = 5,52 \text{ kg/m}^3$ , desprezando os efeitos da atmosfera sobre a órbita.  
 c) Ainda no caso da Terra, calcule a velocidade do satélite nessa órbita.
- 49.** Para uma partícula em órbita circular em torno de um centro de força gravitacional, demonstre que:  
 a) A energia total da partícula é a metade da energia potencial associada à órbita.  
 b) A velocidade da partícula é inversamente proporcional à raiz quadrada do raio da órbita.
- 50.** O diâmetro angular aparente do Sol visto da Terra (ângulo subtendido pelo disco solar) é  $0,55^\circ$ . A constante gravitacional é  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$ . Utilizando apenas estes dados, juntamente com o

período da órbita da Terra em torno do Sol, aproximada por um círculo, calcule a densidade média  $\mu$  do Sol.

- 51.** Supondo que a atração gravitacional da nossa galáxia, de massa total  $M_g$  e raio  $R_g$ , atua como se toda a massa estivesse concentrada no seu centro, e comparando a órbita circular de uma estrela situada na beirada da galáxia, de velocidade  $v_g$ , com a órbita da Terra em torno do Sol, de raio médio  $R$ , mostre que

$$M_g / M_s = (R_g v_g^2) / (R v^2),$$

onde  $M_s$  é a massa do Sol e  $v$  é a velocidade orbital da Terra em torno do Sol. Sabendo que a velocidade orbital do Sistema Solar em torno do centro da galáxia é de aproximadamente 200 km/s e que a distância dele ao centro é de aproximadamente  $3R_g/5$ ,

- a) estime  $v_g$ , usando o resultado do problema 48;  
b) estime  $M_g/M_s$ , sabendo que  $R_g \approx 5.104$  anos-luz.

- 52.** Em 1795, Pierre-Simon de Laplace antecipou a existência de buracos negros, afirmando: “Uma estrela luminosa de mesma densidade que a Terra, cujo diâmetro fosse 250 vezes maior que o do Sol, não permitiria, em consequência de sua atração, que os seus raios luminosos nos atingissem; é possível, portanto, que os maiores corpos luminosos existentes no Universo sejam invisíveis para nós.” Embora este raciocínio não relativístico não se justifique, deduza o resultado de Laplace. Para isto, calcule a velocidade de escape a partir de uma estrela hipotética de mesma densidade que a Terra em função do seu diâmetro e ache o valor crítico do diâmetro.

- 53.** Considere um sistema de três partículas de mesma massa  $m$ , ocupado os vértices de um triângulo equilátero de lado  $d$ .

- a) Calcule a força gravitacional que atua sobre cada partícula, em módulo, direção e sentido.  
b) Mostre que as três partículas mantêm essa configuração triangular descrevendo órbitas circulares em torno do CM do sistema com velocidade angular  $\omega$ , calcule o valor de  $\omega$ . Este caso particular solúvel do problema de três corpos foi considerado por Laplace.

- 54.** Considere uma estrela binária cujas componentes, de massas  $m_1$  e  $m_2$ , separadas por uma distância  $r$ , descrevem órbitas circulares de período  $T$  e torno do CM do par. Seja  $T_s$  o período da órbita da Terra, de raio médio  $R$ , em torno do Sol, de massa  $M_s$ .

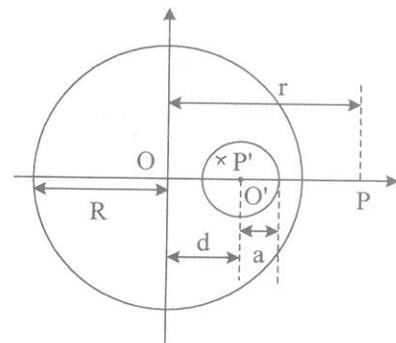
- a) Mostre que  $(T/T_s)^2 = [M_s / (m_1 + m_2)] \cdot (r/R)^3$ .  
b) Aplique este resultado para calcular o período da estrela dupla Sirius A – Sirius B, sabendo que a massa de Sirius A é  $2,2 M_s$  e a de Sirius B é  $0,9 M_s$ . A separação do par é de 19,9 U.A.; despreze a excentricidade das órbitas.  
c) Calcule os raios  $r_a$  e  $r_b$  das órbitas de Sirius A e Sirius B.

- 55.** Duas partículas de massa  $m_1$  e  $m_2$  são soltas em repouso, separadas de uma distância inicial  $r_0$ , movendo-se apenas sob o efeito de sua atração gravitacional mútua. Calcule as velocidades das duas partículas quando se aproximam até uma distância  $r$  ( $< r_0$ ) uma da outra.

- 56.** Calcule o campo gravitacional produzido por uma camada esférica homogênea de densidade  $\rho$ , raio interno  $a$  e raio externo  $b$ , num ponto situado dentro da camada, à distância  $r$  do centro ( $a \leq r \leq b$ ). Mostre que, para uma camada delgada, o campo varia linearmente (com boa aproximação) entre as superfícies interna e externa.

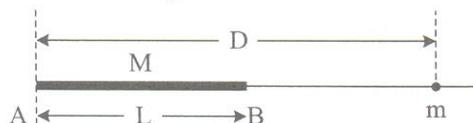
- 57.** Dentro de uma esfera de raio  $R$  de densidade  $\rho$  existe uma cavidade esférica de raio  $a$ . a distância entre os centros  $O$  e  $O'$  da esfera e da cavidade é  $d$ , figura.

- a) Para um ponto  $P$  externo, alinhado com os centros  $O$  e  $O'$  e à distância  $r$  de  $O$ , calcule a razão entre o campo gravitacional (força por unidade de massa) da esfera com a cavidade e aquele que existiria se a esfera fosse maciça.  
b) Calcule o campo gravitacional (módulo, direção e sentido) num ponto  $P'$  qualquer situado dentro da cavidade.

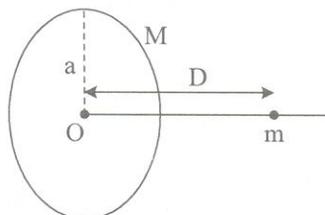


- 58.** Considere um fio retilíneo homogêneo de massa  $M$  e comprimento  $L$  e uma partícula de massa  $m$  alinhada com o fio, à distância  $D$  de uma extremidade, figura. Mostre que a força de atração gravitacional exercida pelo fio sobre a partícula é a mesma que se teria se a massa total do fio estivesse concentrada num único ponto, à distância  $d$  da

massa  $m$ , onde  $d = \sqrt{D(D-L)}$  é a média geométrica das distâncias de  $m$  às extremidades A e B do fio. Nota:  $\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ .



59. Um fio homogêneo de massa  $M$  tem a forma de um anel circular de raio  $a$ . Calcule a força de atração gravitacional exercida pelo fio sobre uma partícula de massa  $m$  situada sobre o eixo (perpendicular ao plano do anel que passa pelo seu centro), à distância  $D$  do centro do anel.

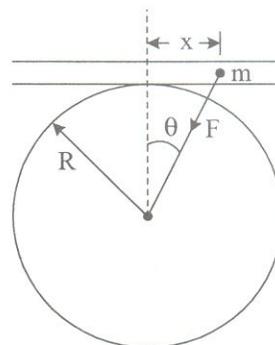


60. Um homem pesa 70 kgf. Supondo que o raio da terra dobrasse, quanto ele pesaria.  
 a) se a massa da Terra permanecesse constante;  
 b) se a densidade média da Terra permanecesse constante?

61. A altura que devemos subir acima da superfície da Terra numa órbita cujo raio é um quarto do raio da órbita da Lua? O período da Lua é de aproximadamente 28 dias. Calcule a razão entre as velocidades do satélite e da Lua.

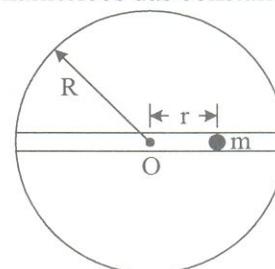
62. Qual seria o período de um satélite que gira em torno da Terra numa órbita cujo raio é um quarto do raio da órbita da Lua? O período da Lua é de aproximadamente 28 dias. Calcule a razão entre as velocidades do satélite e da Lua.

63. Uma partícula de massa  $m$  pode mover-se num tubo horizontal sem atrito, figura, sob a ação da atração gravitacional na Terra. Supondo que  $x$  seja muito pequeno, comparado com  $R$ , demonstre que a partícula executa um movimento harmônico simples e que seu período é  $P = 2\pi\sqrt{R/g}$ . Calcule o valor de  $P$ . Esse valor corresponde ao período mais longo de um pêndulo na superfície da Terra. Você pode demonstrar essa afirmação?

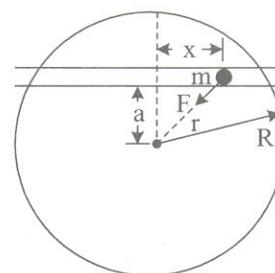


64. Suponhamos que fosse aberto um canal que atravessasse a Terra completamente, ao longo de um diâmetro, figura.

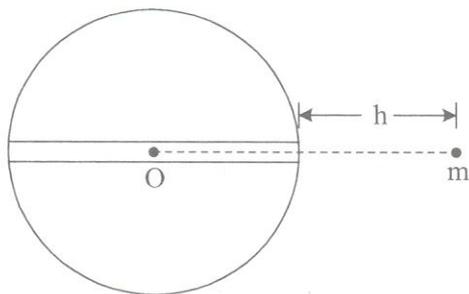
- a) Mostre que a força, sobre uma massa  $m$ , a uma distância  $r$  do centro da Terra, será  $F = -mgr/R$ , se admitirmos que a densidade seja uniforme.  
 b) Mostre que o movimento de  $m$  seria harmônico simples, com um período de aproximadamente 90 min.  
 c) Escreva as equações para a posição velocidade e aceleração como funções do tempo, dando os valores numéricos das constantes.



65. Mostre que o movimento, sem atrito, de uma massa, num orifício feito através da Terra ao longo de uma corda, seria harmônico simples. Calcule o período.



66. Uma massa  $m$  é deixada cair de uma grande altura  $h$  acima do orifício na Terra, como indica a figura.  
 a) Com que velocidade a massa  $m$  passaria pelo centro da Terra?  
 b) O movimento seria harmônico simples?  
 c) O movimento seria periódico? Justifique suas respostas.



**67.** Determine a energia potencial gravitacional interna de 8 corpos, cada um de massa  $m$ , localizados nos vértices de um cubo de lado  $a$ . Aplique para o caso de as massas serem da ordem da massa do Sol e cada lado do cubo medir 1 par sec.

**68.** Um satélite artificial move-se numa órbita cujo perigeu é 640 km e cujo apogeu é 4.000 km, acima da superfície da Terra. Calcule:

- o semi-eixo maior,
- a excentricidade,
- a equação da órbita,
- as velocidades no perigeu e no apogeu,
- o período de revolução,
- a energia total, sendo a massa 100 kg.
- Utilizando um papel de gráfico polar, faça um gráfico da trajetória do satélite.

**69.** Dois corpos de massa  $m$  e  $3m$  estão separadas por uma distância  $a$ . Determine os pontos em que:

- o campo gravitacional resultante é nulo;
- as duas massas produzem campos gravitacionais que têm o mesmo módulo, direção e sentido;
- as duas massas produzem potenciais gravitacionais idênticos.

**70.** Dois corpos de massa  $m$  e  $3m$  estão por uma distância  $13a$ . Determine o campo gravitacional e o potencial num ponto  $P$ , a uma distância  $5a$  da primeira massa, sendo que as retas que ligam  $P$  às duas massas estão em ângulo reto.

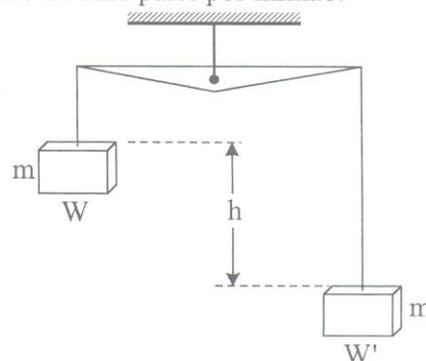
**71.** Escreva a dimensão da constante gravitação universal  $G$ .

**72.** Considere uma partícula livre situada sobre a linha equatorial da superfície de um astro de raio  $R$  que gira com velocidade angular  $\omega$ . Ache a massa mínima deste astro para que a partícula não seja centrifugada da superfície do astro.

**73.** Foi chamada a atenção ao fato de que  $g$  varia de lugar para lugar sobre a superfície da Terra quando Jean Richer, em 1672, levou um relógio de pêndulo de Paris para Caiena, na Guiana Francesa, e descobriu que o relógio atrasava 2,5 min/dia. Se  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  em Paris, qual é o valor de  $g$  em Caiena?

**74.** Massas  $m$ , supostas iguais pendem de cordas de diferentes comprimentos dos braços de uma balança na superfície da Terra, como mostra a figura no comprimento por  $h$ .

- Mostre que o erro de pesagem, associado ao fato de que  $W'$  está mais próximo do que  $W$ , é  $W' - W = 8\pi G\rho mh/3$  e que  $\rho$  é a densidade média da Terra ( $5,5 \text{ g/cm}^3$ ).
- Determine a diferença de comprimento que dará um erro de uma parte por milhão.



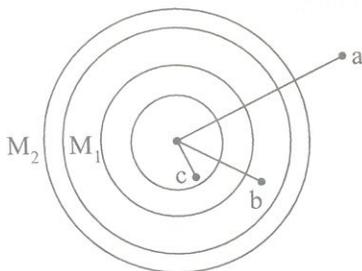
**75.** Um observador se encontra no interior de um trem que se desloca em linha reta com uma aceleração  $a$ . (a) O observador resolve medir o valor da aceleração da gravidade no interior deste trem usando um pêndulo simples preso ao teto do trem; qual é a expressão correta para o cálculo da aceleração da gravidade  $g'$  no interior do trem? (b) Determine o período das pequenas oscilações de um pêndulo simples de comprimento  $L$  preso ao teto do trem.

**76.** Um corpo está suspenso de um dinamômetro em um navio que viaja ao longo da linha do equador, com velocidade  $v$ .

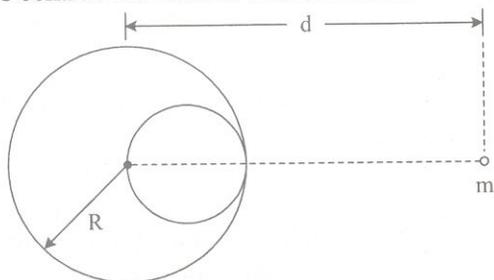
- Mostra que a leitura do dinamômetro será aproximadamente  $W_0 (1 \pm 2\omega v/g)$ , sendo  $\omega$  a velocidade angular da Terra e  $W_0$  a leitura em repouso.
- Explica o duplo sinal.

**77.** Duas cascas esféricas concêntricas, de massa  $M_1$  e  $M_2$  estão situadas conforme indicado na figura. As massas específicas são iguais e constantes em todos os pontos das cascas. Desejamos determinar a força que atuam sobre uma partícula de massa  $m$  quando a partícula estiver em:

- $r = a$
- $r = b$
- $r = c$ . a distância  $r$  é medida a partir do centro de cascas.



**78.** Faz-se uma cavidade esférica em uma esfera de chumbo de raio  $R$ , tal que sua superfície toque a superfície externa da esfera de chumbo e passe pelo centro desta. A massa primitiva da esfera de chumbo era  $M$ . De acordo com a lei de gravitação universal, qual será a força com que a esfera de chumbo atrairá uma pequena esfera de massa  $m$  localizada à distância  $d$  ao longo da reta que passa pelos centros das esferas e da cavidade?



**79.** Um satélite descreve uma órbita elíptica em torno da Terra. Sabendo que no perigeu sua distância à superfície da Terra vale 400 km e que no apogeu esta distância é igual a 1,800 km calcule a razão entre a velocidade no apogeu.

**80.** Considere uma esfera homogênea com massa específica  $\rho$  constante em todos os pontos do interior da esfera, que possui raio  $R$  e massa total  $M$ . Determine o campo gravitacional para os pontos situados:

- no exterior da esfera;
- no interior da esfera;
- sobre a superfície da esfera.

**81.** Um astronauta transporta da Terra para a Lua um recipiente fechado contendo um gás com temperatura elevada. Ao chegar na Lua o astronauta abre o recipiente. Verifique se o gás liberado ficará retido pela atração gravitacional da Lua ou se o gás escapará para o espaço cósmico. Suponha que a velocidade média das moléculas do gás transportado permaneça constante, ou seja, suponha que a temperatura do gás permaneça constante. Considere o seguinte valor para a velocidade média das partículas do gás:  $\bar{v} = 2.700$  m/s.

**82.** a) Obtenha uma expressão aproximada para a determinação da altura atingir por um projétil lançado verticalmente da superfície terrestre.  
b) Determine uma expressão exata conveniente para o cálculo da distância  $r$  ao centro da Terra quando o projétil mencionado o item anterior atinge a altura máxima.

**83.** Um foguete é acelerado, para cima, até uma velocidade  $v = 2\sqrt{gR_T}$ , perto da superfície terrestre e, a seguir, sua propulsão é desligada.

- Mostre que ele escapará da Terra.
- Mostre que sua velocidade será  $V = 2\sqrt{gR_T}$  em pontos muito afastados da Terra.

**84.** Duas partículas de massas  $m$  e  $M$ , estão em repouso, separadas por uma distância infinita. Mostra que em qualquer instante, sua velocidade relativa de aproximação, atribuível à atração gravitacional, é  $\sqrt{2G(M+m)/d_T}$  sendo  $d$  a distância entre elas naquele instante.

**85.** Uma partícula de massa igual a  $4m$  está situada a uma distância  $a$  de uma outra partícula de massa  $m$ .

- Calcule as distâncias entre o centro de massa deste conjunto e os pontos onde o campo gravitacional se anula.
- Existe algum ponto entre as partículas em que o potencial gravitacional se anula?
- Calcule a energia de ligação deste sistema (energia potencial gravitacional).
- Determine o lugar geométrico dos pontos para os quais o potencial gravitacional produzido pela partícula de massa  $4m$  é igual ao potencial produzido pela partícula de massa  $m$ .

**86.** Considere dois satélites A e B mesma massa  $m$ , que se movem na mesma órbita circular de raio em torno da Terra T, os satélites têm sentidos de rotação opostos, de forma que irão chocar-se, figura.

- Determinar a energia mecânica total  $E_A + E_B$  do sistema Terra + satélites, antes da colisão, em função de  $G$ ,  $M_T$ ,  $m$  e  $r$ .
- Se a colisão for completamente inelástica, de forma que os destroços permaneçam unidos comum emaranhado de massa  $2m$ , determine a energia mecânica total imediatamente após o choque
- Descrever o movimento subsequente dos destroços.

**87.** a) É necessária mais energia para elevar um satélite à altura de 1.600 km do que para colocá-lo em órbita a essa altura?

- E a 32.000 km?
- E a 4.800 km? Considere o raio da Terra igual a 6.400 km.

**88.** Um par de estrelas gira em torno do centro de massa comum. A massa de uma delas é  $M$ , o dobro da massa  $m$  da outra,  $m = 2M$ . a distância  $d$  entre os centros das estrelas é grande, comparada ao tamanho de qualquer delas.

- Deduza uma expressão para o período de rotação das estrelas em torno de seu centro de massa, em função de  $d$ ,  $m$  e  $G$ .
- Compare as energias cinéticas delas, determinando a razão  $K_m/K_M$ .

**89.** Qual seria a duração do dia se a velocidade de rotação da Terra fosse tal que  $g = 0$  no equador?

**Gabarito**

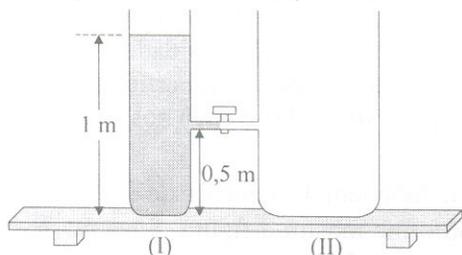
- 1,87
- $2,3 \cdot 10^{-9}$  Newtons
- $\frac{F}{16}$
- $2,23 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2$
- $x = 342.000 \text{ km}$
- Ficaria reduzido de  $\frac{1}{9}$
- $269,5 \text{ m/s}^2$
- $1,6 \text{ m/s}^2$
- $\frac{3}{2}$
- $\frac{1}{10} \text{ m/s}^2$
- 11,3 km/s
- $+ GM^2/2D$
- $+ 4GM^2/d$
- a)  $L = 120.109 \text{ J}$ ;  
b) Não, pois trata-se de um trabalho de uma força conservativa;  
c)  $-4 \text{ km/s}$ .
- 1°  $L = 16 \text{ km}$ ; 2°)  $8 \text{ km/s}$
- $8 \text{ km/s}$
- $4 \text{ km/s}$
- $E_C = \frac{1}{2}|E_P|$
- a)  $150 \text{ J}$ ;  
b) parabólica;  
c) circular de raio  $2R$ .
- $\sqrt{\frac{M'G}{R}}$
- $v^2/(R + d)$
- $g/4$
- $D = \frac{3\pi}{GT^2}$
- $T = 7,6 \text{ h}$
- $\frac{3\pi}{GT^2}$
- a)  $2,23 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2$ ;  
b)  $24 \text{ h}$
- $3 R$
- a)  $\sqrt{\frac{GM}{R + D}} \text{ m/s}$   
b)  $T = 2\pi \sqrt{\frac{(R + D)^3}{GM}} \text{ (s)}$   
c)  $\frac{3 GM m}{2 (R + D)} \text{ (J)}$
- $4,37 \cdot 10^{11} \text{ m}$
- $84,6 \text{ anos}$
- a) 0



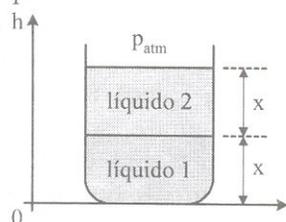
- b)  $g = -[4 G_{\text{max}}/(x^2 - a^2)^2] i$
35.  $-2 Gmm_0/a$
36. a)  $V(x) = GM/(x^2 + r^2)^{1/2}$   
c) em  $x = 0$ ,  $V$  é máximo e  $g = 0$
37. a)  $g = -2,0 \cdot 10^{-10} r \text{ N/kg}$   
b)  $g = 0$
38. a) 3,31 anos  
b)  $1,49 \cdot 10^{29} \text{ kg}$   
c)  $m_2$  tem maior velocidade e maior energia total  
d)  $v_P = 1,8 v_A$
39. 84,4 min
41.  $g_r = 0$ ,  $r < R_1$
42.  $g_x = -(\pi G \rho R^3/6)[1/(x - 1/2R)^2 - 8/x^2]$
44.  $\omega = \sqrt{4\pi G \rho/3}$
47.  $7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
48. a)  $T^2 = 3\pi/(G\rho)$   
b) 84,3 min  
c) 7,9 km/s
50.  $\pi \approx 1,3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
51. a)  $v_g \approx 155 \text{ km/s}$   
b)  $M_g/M_s \sim 10^{11}$
52.  $v_e = c$
53. a) As forças apontam para o GM ( $\equiv$  centro do triângulo) e têm magnitude  $\sqrt{3} Gm^2/d^2$   
b)  $\omega = \sqrt{3 Gm/d^3}$
54. b) 50,4 anos  
c)  $r_A \approx 5,8 \text{ U.A.}$ ;  $r_B \approx 14,1 \text{ U.A.}$
55.  $v_1 = m_2 \sqrt{\frac{2G}{m} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}$ ;  $v_2 = m_1 \sqrt{\frac{2G}{m} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}$ , onde  $M = m_1 + m_2$ .
56.  $\frac{F(r)}{m} - \frac{4}{3} \pi \rho G \left( r - \frac{a^3}{r^3} \right) \approx -4\pi \rho G(r - a)$  para  $b - a \ll a$ .
57. a)  $\left[ 1 - \frac{(a/R)^3}{(1 - d/R)^2} \right]$   
b)  $-4/3 \pi \rho G \bar{d}$ , onde  $\bar{d} = O\bar{O}$  (campo uniforme).
59. Magnitude  $\frac{GmMD}{(a^2 + D^2)^{3/2}}$ , dirigida para o centro O do anel
60. a) 17,5 kgf  
b) 140 kgf
61. 32,1 km; 64,1 km
62. 3,5 dias; 2 : 1
64. c)  $r = 6,37 \cdot 10^6 \cos(1,24 \cdot 10^{-3} t) \text{ m}$ ;  $v = 7,90 \cdot 10^3 \sin(1,24 \cdot 10^{-3} t) \text{ m.s}^{-1}$ ;  $a = -9,80 \cos(1,24 \cdot 10^{-3} t) \text{ m.s}^{-2}$
66. a)  $\sqrt{2\gamma m_e/h + R_e}$   
b) não  
c) sim
67.  $-(4\gamma m^2/a)[3(1 + 1/\sqrt{2}) + 1/\sqrt{3}]$ ;  $-4,74 \cdot 10^{35} \text{ J}$
68. a)  $8,69 \cdot 10^6 \text{ m}$
- b) 0,193  
c)  $8,36 \cdot 10^6/r = 1 + 0,193 \cos \theta$   
d)  $1,62 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $1,10 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$   
e)  $8,06 \cdot 10^3 \text{ s}$   
f)  $-2,295 \cdot 10^9 \text{ J}$
70.  $-3,01 \cdot 10^{-12} \text{ m/a}^2$ ;  $3,0 \cdot 10^{-11} \text{ m/a}$
72.  $M = \omega^2 R^3/G$
75. a)  $g' = (g^2 + a^2)^{1/2}$   
b)  $T = 2\pi (1/g')^{1/2}$
77. a)  $G(M_1 + M_2) \text{ m/a}^2$ ;  
b)  $G M_1 \text{ m/b}^2$ ;  
c) Nula.
78.  $\frac{GmM}{d^2} \left[ 1 - \frac{1}{8(1 - R/2d)^2} \right]$
82. a)  $h = v^2/2g$ ;  
b)  $-GM_T/r = (v^2/2) - GM_T/R_T$
85. a)  $x_1 = 2a$ ,  $x_2 = 2a/3$ ;  
b) Não, o potencial gravitacional só se anula no infinito.  
c)  $U - Gm_1m_2/a$ ;  
d) Para um sistema cartesiano ortogonal com origem sobre a partícula de massa  $4m$ , o lugar geométrico mencionado é o plano  $x = 4^a/5$ .
87. a) Não;  
b) A mesma;  
c) Sim.
88. a)  $2\pi d^{3/2} / \sqrt{3 Gm}$ ;  
b) 2
89. 1,41 h



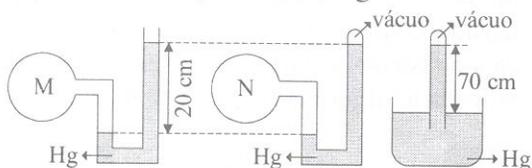
1. Um vaso cilíndrico I contém água até a altura de 1,0 m e está ligado, por um tubo fino, a outro vaso cilíndrico II, vazio com diâmetro duas vezes maior que o de I. O tubo de comunicação está a 0,5 m de altura e fechado, no início, por uma torneira, como mostra a figura. Considerando a pressão atmosférica  $p_a = 10^5 \text{ N/m}^2$ , pergunta-se:



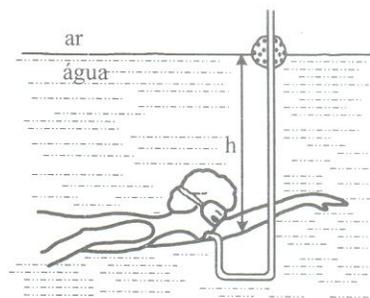
- abrindo a torneira, que altura atingira a água no vaso II?
  - antes de abrir a torneira, qual era o valor da pressão no fundo do vaso I?
2. Dois líquidos imiscíveis (água e óleo, por exemplo) estão em equilíbrio num copo, conforme a figura. Faça um gráfico que ilustre a variação da pressão hidrostática com a altura  $h$ , medida a partir do fundo do copo.



3. Os três aparelhos abaixo estão situados no interior da mesma sala. Determine as pressões dos gases contidos em M e N, em cm de Hg.

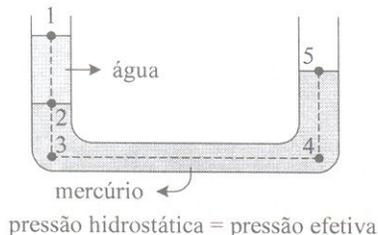


4. Mesmo para alguém em boa forma física é impossível respirar (por expansão da caixa torácica), se a diferença de pressão entre o meio externo e o ar dentro dos pulmões for maior que um vigésimo ( $1/20$ ) de atmosfera. Assim sendo, determine (aproximadamente) a profundidade máxima ( $h$ ) em que um mergulhador pode respirar por meio de um tubo de ar, cuja extremidade superior é mantida fora da água.

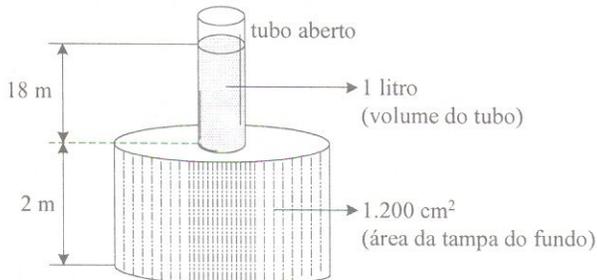


5. Um tubo em U de seção uniforme de  $2 \text{ cm}^2$  contém água até a metade de sua altura. Sendo  $d_{\text{água}} = 1 \text{ g/cm}^3$ , determine que massa de óleo de densidade  $0,8 \text{ g/cm}^3$  deve ser posta num dos ramos, para que no outro a água suba 8 cm.
6. Os êmbolos de certa prensa hidráulica têm, respectivamente, 5 cm e 25 cm de raio. Sobre o menor está aplicada uma força de 10 kgf, perpendicular ao êmbolo.
- Sabendo-se que a prensa está em equilíbrio, determine a intensidade da força que deve estar aplicada ao outro êmbolo, perpendicular a ele.
  - Se o êmbolo menor sofrer um deslocamento de 50 cm, determine o deslocamento do maior.
7. Um cilindro de 200 g é pendurado em uma mola, produzindo nesta uma distensão de 10,0 cm. A seguir, ele é totalmente mergulhado num frasco com água e observa-se que a distensão da mola diminui para 5,0 cm. Sendo  $g = 10,0 \text{ m/s}^2$  e a massa específica da água  $= 1,00 \text{ g/cm}^3$ , qual o volume do cilindro?
8. Um barco de massa igual a 200 kg está flutuando na água. Espalham-se moedas de 10 gramas no seu fundo, até que o volume da parte submersa passe a ser  $0,25 \text{ m}^3$ . Sabendo que o barco continua a flutuar, determine o número de moedas espalhadas.
9. Três recipientes cilíndricos A, B e C, cujos raios são  $r$ ,  $2r$  e  $3r$  respectivamente, contêm água até a altura  $h$ . Determine a relação entre as pressões nas bases dos cilindros.
10. Uma bolha de ar desprende-se do fundo de um lago e quando atinge a superfície livre do líquido, está com seu volume quadruplicado. Admitamos que a temperatura é constante ao longo da camada do líquido. Se designarmos por  $k$  o peso específico da água e por  $P$  a pressão atmosférica local, determine a profundidade do lago.

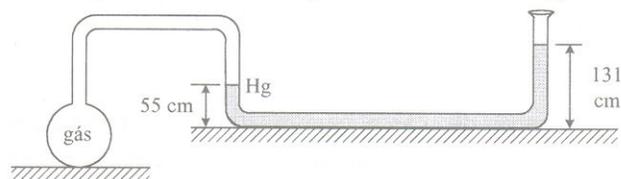
**11.** O tubo em U contém mercúrio e água, com indica a figura. Ambos os ramos estão abertos para a atmosfera. Faça um gráfico que melhor represente a variação da pressão hidrostática  $p$ , em função da posição 1 ao longo do caminho 1-2-3-4-5?



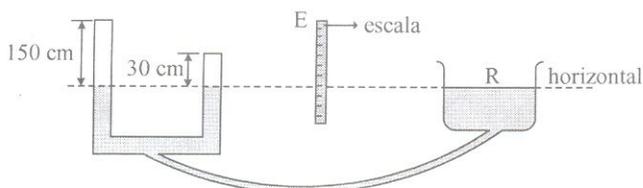
**12.** Na figura a seguir, um tubo e um barril, cheios de água (densidade =  $1 \text{ g/cm}^3$ ), se intercomunicam. Sendo a aceleração da gravidade  $10 \text{ m/s}^2$  e a pressão atmosférica  $10 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$ , determine a força total no fundo do barril em N.



**13.** De acordo com a figura abaixo, calcule a pressão atmosférica local, sabendo que o gás dentro do recipiente está a uma pressão de  $136 \text{ cmHg}$ .



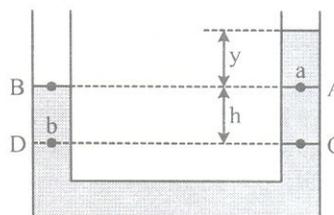
**14.** Um tubo em U, de seção transversal constante, está fechado em ambas as extremidades. É então ligado por um tubo flexível ao reservatório R, aberto, que contém mercúrio. O sistema fica inicialmente em equilíbrio, na situação indicada na figura. Elevando-se o reservatório, verificamos que o nível de mercúrio sobe  $50 \text{ cm}$  no ramo esquerdo e  $15 \text{ cm}$  no ramo direito do tubo em U. Considerando que durante o processo, a temperatura mantém-se constante, determine:



a) a pressão atmosférica em centímetros de Hg e  
b) quanto sobe o nível livre de mercúrio no reservatório R, em relação à escala fixa E, graduada em centímetros.

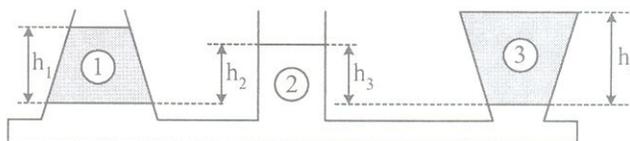
**15.** Um tubo em U contém mercúrio. Sobre este, em um dos ramos, observamos uma coluna de água com  $24 \text{ cm}$  de altura. No outro, uma coluna de  $13 \text{ cm}$  de óleo, cuja densidade é  $0,8 \text{ g/cm}^3$ . Calcule a diferença entre as superfícies de separação do mercúrio ( $d = 13,6 \text{ g/cm}^3$ ) nos dois ramos.

**16.** Um tubo em U contém dois líquidos imiscíveis, conforme mostra a figura. Suas massas específicas são  $a = 5,0 \text{ g/cm}^3$  e  $b = 10,0 \text{ g/cm}^3$ . Sendo  $h = 1,0 \text{ cm}$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e a pressão atmosférica  $p = 10 \text{ N/cm}^2$ , qual a pressão no ponto A?



**17.** Um tubo em U, de seção transversal constante, contém mercúrio até a altura de  $15 \text{ cm}$  em cada ramo. Num deles, coloca-se uma coluna de água com  $7,2 \text{ cm}$  de altura e, sobre esta, uma de óleo ( $d_{\text{óleo}} = 0,8 \text{ g/cm}^3$ ) com  $8,0 \text{ cm}$ . Sabendo que  $d_{\text{mercúrio}} = 13,6 \text{ g/cm}^3$ , de quanto se eleva, no outro ramo, o nível de mercúrio?

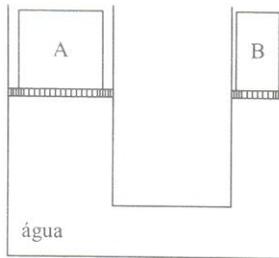
**18.** Na figura, são mostrados três recipientes abertos e ligados por um tubo em suas bases. Neles estão os líquidos 1, 2 e 3, que não se misturam e possuem densidades  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  e  $\rho_3$ , respectivamente. A situação após o sistema alcançar a posição de equilíbrio, é a indicada na figura com  $h_4 > h_1 > h_3 > h_2$ .



Nestas condições, podemos afirmar que:

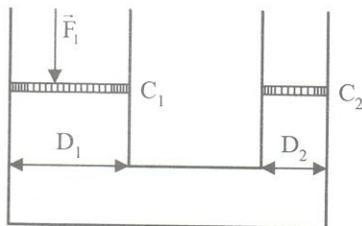
- A. ( )  $\rho_2 > \rho_1$  e  $\rho_3 < \rho_2$
- B. ( )  $\rho_3 > \rho_2$  e  $\rho_2 < \rho_1$
- C. ( )  $\rho_3 > \rho_2 > \rho_1$
- D. ( ) n.d.a.

**19.** Seja uma prensa hidráulica com as seguintes dimensões: no lado A, uma área de  $1 \text{ m}^2$  e uma massa de  $100 \text{ kg}$ ; no lado B uma área de  $10^2 \text{ cm}^2$  e uma massa de  $10 \text{ kg}$ .



- a) Podemos afirmar que:
- A. ( ) o nível em A é superior ao de B;  
 B. ( ) o nível em B é superior ao de A;  
 C. ( ) o nível é o mesmo em A e B;  
 D. ( ) o nível depende da pressão externa do meio que circunda a prensa;  
 E. ( ) n.d.a.
- b) Para a mesma prensa, coloca-se um líquido duas vezes mais denso que a água. A diferença de nível fica então:
- A. ( ) a metade da anterior;  
 B. ( ) o dobro da anterior;  
 C. ( ) a mesma da anterior;  
 D. ( ) o quádruplo da anterior;  
 E. ( ) n.d.a.

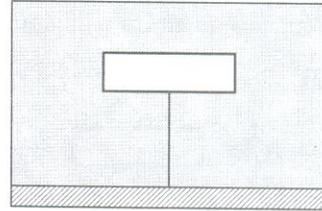
20. Na prensa hidráulica esquematizada,  $D_1$  e  $D_2$  são os diâmetros dos tubos verticais. Aplicando uma força  $\vec{F}_1$  ao cilindro  $C_1$ , transmitimos a  $C_2$ , através do líquido de compressibilidade desprezível, uma força  $\vec{F}_2$ . Se  $D_1 = 50$  cm e  $D_2 = 5$  cm, determine a relação entre  $F_1$  e  $F_2$ .



21. Uma bomba injeta óleo num cilindro e empurra um pistão, que levanta um peso de 100 toneladas-força. Tendo o pistão área igual a 0,25 metros quadrados, determine:
- a) a pressão do óleo no S.I.;
- b) a razão fornecida pela bomba, em litros/segundo, quando o pistão é levantado com uma velocidade de 1 cm/min;
- c) com os dados fornecidos nas questões (a) e (b), calcule a potência da bomba de óleo, em watts.

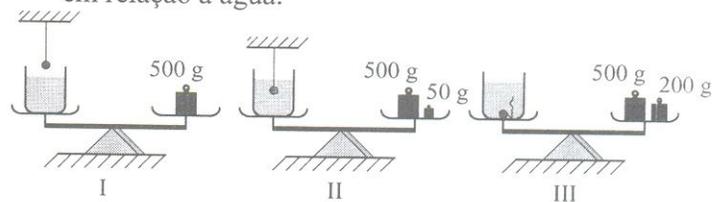
22. Certa esfera rígida tem 6,0 g de massa e está totalmente imersa num líquido (massa específica 0,90 g/cm<sup>3</sup>). Sabendo que a aceleração local da gravidade é 10 m/s<sup>2</sup> e que a massa específica da esfera é 0,80 g/cm<sup>3</sup>, calcule o empuxo exercido sobre ela em newtons.

23. Um bloco de madeira (densidade igual a 0,6 g/cm<sup>3</sup>) é ancorado, totalmente, imerso em água, por meio de um fio, num local onde  $g = 10$  N/kg. Sabendo que o volume do bloco é de 2.000 cm<sup>3</sup>, determine a força que o fio exerce sobre ele.

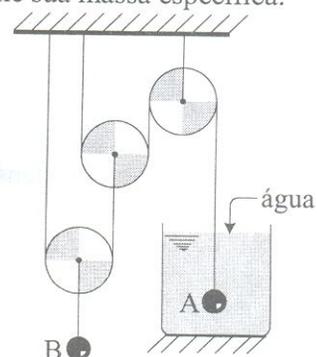


24. Um cofre de massa 1.800 kg e volume 1,5 m<sup>3</sup>, hermeticamente fechado, caiu no fundo do mar, num local onde a profundidade da água é 15 m. Para seu resgate, foi usado um guindaste que, exercendo uma força vertical constante  $F$  elevou o cofre até a superfície, com movimento uniforme. Sendo a densidade da água do mar = 1.050 kg/m<sup>3</sup>, determine:
- a) a intensidade de  $F$  e
- b) o valor do trabalho realizado por  $F$  nessa operação.

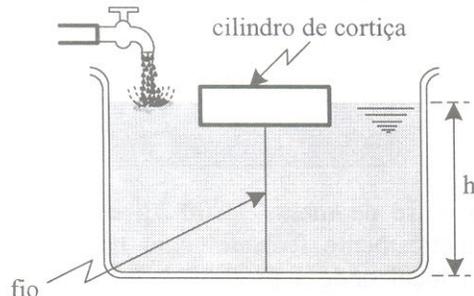
25. Considere as fases sucessivas de uma experiência realizada com uma balança de braços iguais, um recipiente contendo água e um sódio. Na fase I, equilibra-se tão somente o recipiente com água. Na fase II, a balança com o sólido suspenso e mergulhado na água. E na fase III, a balança com o sólido, no fundo do recipiente (o fio de suspensão foi rompido). Determine a densidade do corpo sólido em relação à água.



26. No sistema esquematizado, as polias e os fios são ideais e as forças de atrito desprezíveis. Os corpos A e B têm massas respectivamente iguais a 1,5 g e 4,8 g. Totalmente imerso na água (massa específica 1 g/cm<sup>3</sup>), o corpo A permanece em repouso. Determine sua massa específica.

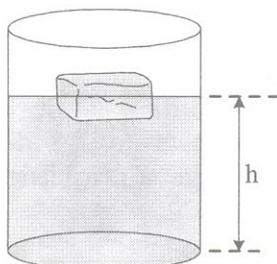


- 27.** Um cilindro de cortiça, de 5 cm de altura, está preso ao fundo de um recipiente por um fio de 3 cm de comprimento. A altura do recipiente é de 15 cm e verte-se água até enchê-lo. Faça um gráfico que melhor represente a variação da força de tração  $T$  do fio, em função da altura  $h$  da água no recipiente.



- 28.** Um bloco compacto de ferro (densidade  $7,5 \text{ g/cm}^3$ ) é jogado num recipiente contendo mercúrio líquido (densidade  $13,6 \text{ g/cm}^3$ ). Determine a fração emersa de seu volume para a qual ele flutuará.

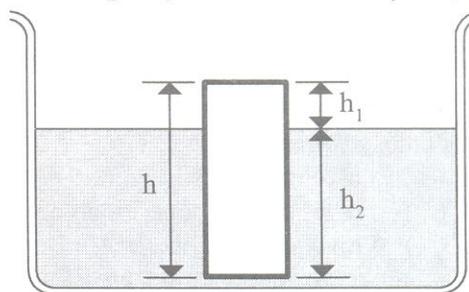
- 29.** Um copo contém água e um bloco de gelo fundente. Determine se o nível da água no copo subirá, baixará ou permanecerá o mesmo, quando o gelo acabar de fundir.



- 30.** Um bloco de gelo em forma de paralelepípedo, com altura  $h$ , flutua na água do mar. Sabendo que as bases do bloco permanecem horizontais, que 13 cm de sua altura estão emersos e que as densidades no gelo e do líquido são respectivamente 0,90 e 1,03 (em relação à água), determine o valor de  $h$ .

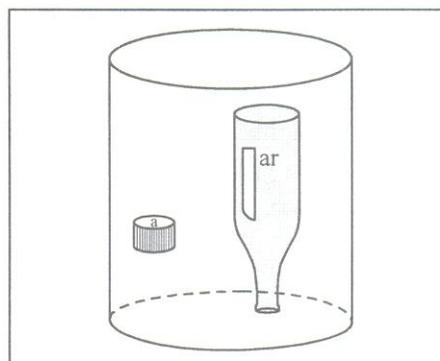
- 31.** Um cone maciço tem a propriedade de flutuar com a mesma linha de água, com a base ou com o vértice para baixo. É correto afirmar que:
- a distância da linha de água ao vértice é a metade da altura do cone;
  - não existe cone com esta propriedade;
  - o material do cone tem densidade 0,5 em relação ao líquido;
  - o material do cone tem densidade 0,25 em relação ao líquido;
  - nada do que foi dito está certo.

- 32.** Um cilindro maciço de base  $S$  e altura  $h$ , constituído por um material homogêneo de densidade  $d_1$ , flutua verticalmente num líquido de densidade  $d_2 > d_1$ . Determine a relação  $h_1/h_2$ .



- 33.** Um bloco de madeira flutua em água com volume imerso igual a 60% de seu total. Determine com que volume imerso flutuará em óleo de densidade  $0,80 \text{ g/cm}^3$ .

- 34.** Na figura temos dois corpos **a** e **b** em equilíbrio dentro da água; **a** é um corpo sólido maciço e **b** é um frasco em que existe uma porção de ar. Se damos um deslocamento para baixo a ambos os corpos e os abandonamos:



- os dois voltam à posição inicial;
- a** permanece na nova posição e **b** passa a descrever um movimento oscilatório;
- a** volta à posição inicial e **b** permanece na posição;
- a** e **b** permanecem na nova posição;
- a** permanece na nova posição e **b** continua descendo até o fundo.

- 35.** Uma esfera maciça é formada por dois hemisférios homogêneos, de densidades diferentes,  $d_1$  e  $d_2$ . Ao ser colocada num líquido de densidade  $d$ , ela flutua, ficando com metade de seu volume (densidade =  $d_2$ ) submerso. Ao ser colocada num outro líquido, de densidade  $d'$ , ela submerge, ficando emersa uma parte desprezível de seu volume. Determine a relação entre  $d$  e  $d'$ .

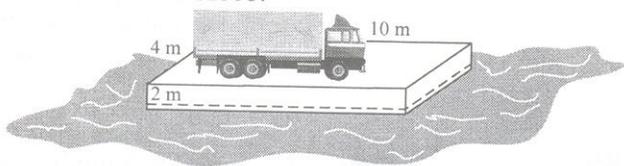
36. Que volume de chumbo ( $d_1 = 11 \text{ g/cm}^3$ ) deve ser associado a um bloco cúbico de madeira ( $d_2 = 0,5 \text{ g/cm}^3$ ) de 10 cm de aresta, para que o conjunto fique em equilíbrio indiferente em água ( $d_{\text{água}} = 1 \text{ g/cm}^3$ )?

37. Um corpo de densidade menor que a água é abandonada de uma determinada distância da superfície de um lago. Sobre o movimento do corpo, dentro da água, podemos afirmar que será:

- A. ( ) uniforme;  
 B. ( ) primeiramente acelerado e depois retardado;  
 C. ( ) inicialmente uniforme e depois acelerado;  
 D. ( ) retardado e em seguida acelerado;  
 E. ( ) acelerado e depois uniforme.

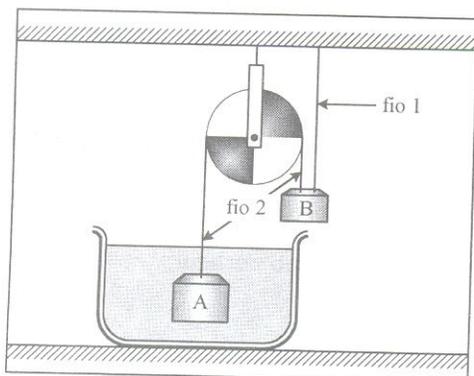
38. Uma pequena esfera de vidro penetra verticalmente, com velocidade  $v = 0,5 \text{ m/s}$ , numa cuba de mercúrio. Quanto tempo leva a bola para ser devolvida ao ar? Com que velocidade ela volta? Despreze o atrito da bola com o mercúrio e considere  $d_{\text{mercúrio}} = 14 \text{ g/cm}^3$ ,  $d_{\text{vidro}} = 4 \text{ g/cm}^3$  e  $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ .

39. Um bloco, com as dimensões indicadas na figura e material de densidade  $0,2 \text{ g/cm}^3$ , flutua em água pura servindo como ponte. Quando um caminhão passa sobre ele, o volume da parte submersa é 25% do volume do bloco.



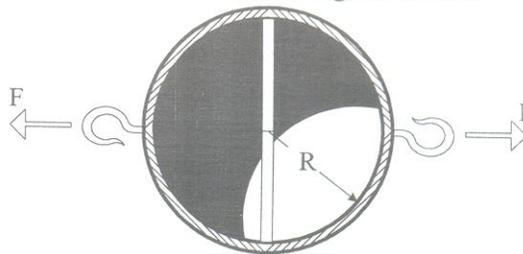
Determine a massa do caminhão.

40. A figura mostra dois corpos, A e B, ambos com 10 kg de massa, presos a um fio flexível e inextensível (identificado pelo número 2), que passa por uma polia, de eixo e massa desprezíveis. O corpo A tem o volume  $10.000 \text{ cm}^3$  e está imerso num líquido de massa específica  $1.000 \text{ kg/m}^3$ . O fio 1, que mantém inicialmente o sistema em equilíbrio, é cortado num determinado instante. Desprezando a massa dos fios e adotando a aceleração da gravidade  $10 \text{ m/s}^2$ , determine:



- a) as tensões nos fios 1 e 2, antes de cortar o fio 1;  
 b) a tensão no fio 2 e a aceleração do sistema, logo após o corte do fio 1;  
 c) a tensão no fio 2 e a aceleração do sistema, após o corpo A sair completamente do líquido.

41. Em 1654 Otton von Guericke fez o vácuo interior dos hemisférios indicados na figura abaixo.



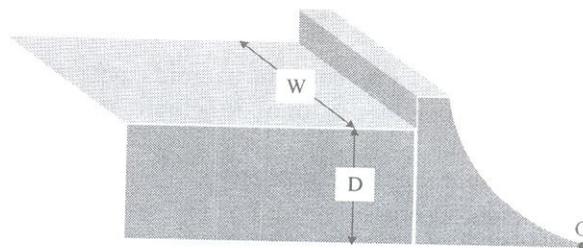
Mostre que a força  $F$  necessária para separar os dois hemisférios em função de  $R$  e da diferença de pressão  $p'$  entre a pressão atmosférica  $p$  e a pressão absoluta  $p_0$  no interior dos hemisférios é dada por  $F = \pi R^2 p'$ .

42. Um tubo em U contém mercúrio. Despeja-se num dos lados do tubo um líquido imiscível com o mercúrio até que a altura do líquido atinja um nível de 48 cm acima do nível do mercúrio. O nível do mercúrio no outro ramo sobe de 1,5 cm. Calcule a massa específica do líquido introduzido no tubo. Densidade do mercúrio =  $13,6 \text{ g/cm}^3$ .

43. Um tanque aberto de água possui profundidade 2 m, largura 1 m e comprimento 0,5 m.

- a) Determine a pressão num ponto situado no fundo do tanque. Considere a pressão atmosférica igual a  $10^5 \text{ Pa}$ .  
 b) Calcule a força total exercida pela água sobre o fundo do tanque.  
 c) Determine o módulo da força total resultante que atua sobre a parede lateral do tanque que possui largura de 1 m e profundidade de 2 m.  
 d) Determine a altura  $z$  do ponto de aplicação da força obtida em (c).

44. A face vertical de uma barragem retém água à altura  $D$ , como mostra a figura. Seja  $W$  a largura da barragem.



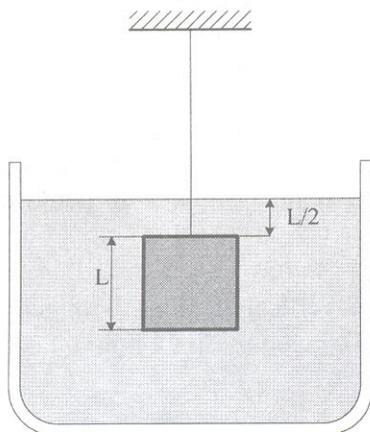


- a) Ache a força horizontal resultante exercida na barragem devido à pressão manométrica da água.
- b) O torque da força, devido à pressão manométrica da água, em relação à linha que passa pelo ponto O e que é paralela à largura da barragem.
- c) Qual é a linha de ação da força resultante.

- 45.** Considere um recipiente contendo um líquido com massa específica  $\rho$ . O recipiente está apoiado no piso de um elevador. Determine a pressão manométrica em função da profundidade  $h$  nos seguintes casos:
- a) o elevador sobe com aceleração  $a$ ,
- b) o elevador desce com aceleração  $a$ ,
- c) o elevador desce em queda livre.

- 46.** Um balão ascende porque o gás do seu interior é menos denso do que o ar ambiente. Isto pode ser facilmente conseguido com a combustão de uma bucha, pois o ar quente é menos denso do que o ar ambiente. Suponha que o volume total do balão seja de  $10 \text{ m}^3$  e que a massa total do material do balão é de  $1,2 \text{ kg}$ . Sabendo-se que a aceleração inicial do balão é de  $0,5 \text{ m/s}^2$ , calcular a força de empuxo sobre o balão e a massa específica do gás do interior do balão.
- Dados:  $\rho_{\text{ar}} = 1,25 \text{ kg/m}^3$  e  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

- 47.** Um objeto cúbico cuja dimensão lateral é  $L$  ( $0,6 \text{ m}$ ) e peso  $W$  ( $4.000 \text{ N}$ ), no vácuo, é suspenso por uma corda em um tanque aberto, com água de densidade  $\rho$  ( $1,0 \text{ g/cm}^3$ ), como indica a figura. Determine:



- a) a força total descendente exercida pela água e pela atmosfera no topo do objeto de área  $A$  ( $0,36 \text{ m}^2$ ).
- b) a força total na base do objeto.
- c) a tensão na corda.

- 48.** Um corpo de massa  $m = 2 \text{ kg}$  e volume  $V = 400 \text{ cm}^3$  está suspenso na vertical a uma mola de constante  $k = 200 \text{ N/m}$ . Inicialmente o sistema estava no interior de um recipiente sob vácuo. O corpo a seguir é imerso num recipiente contendo água. Calcule para o equilíbrio:
- a) a elongação da mola antes de mergulhar o corpo na água;
- b) a elongação da mola depois de mergulhar o corpo na água.

- 49.** Uma esfera é feita de um material de massa específica  $d$  e volume  $V$ . Determine o volume  $V'$  da cavidade esférica existente em seu interior para que ela flutue num líquido de massa específica  $\rho$ , mantendo uma fração  $V/n$  do seu volume dentro do líquido.

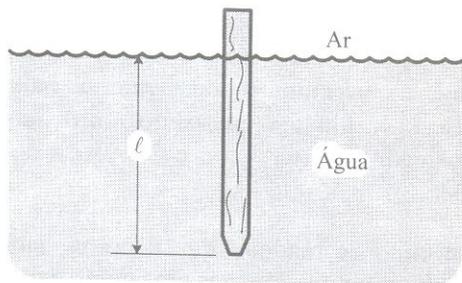
- 50.** Um bloco de madeira flutua na água com dois terços de seu volume submersos. No óleo,  $0,90$  do seu volume fica submerso. Ache a massa específica:
- a) da madeira e
- b) do óleo.

- 51.** Uma esfera oca de ferro flutua quase completamente imersa na água. O seu diâmetro externo mede  $50 \text{ cm}$  e a massa específica do ferro vale  $7,8 \text{ g/cm}^3$ . Calcule o diâmetro interno da esfera.

- 52.** Um cubo que flutua no mercúrio tem um quarto de seu volume submerso. Se acrescentarmos água suficiente para cobrir o cubo:
- a) que a fração de seu volume estará então imersa no mercúrio?
- b) sua resposta dependerá da forma do corpo?

- 53.** Um tubo em U contém um líquido homogêneo. Durante certo tempo, um êmbolo faz baixar o nível do líquido em um dos ramos. Retirando o pistão, os níveis do líquido nos dois ramos oscilam. Mostre que o período de oscilação é  $\pi\sqrt{2L/g}$ , sendo  $L$  o comprimento total do líquido no tubo.

- 54.** Um bastão cilíndrico, de madeira, é lastreado com chumbo em uma das extremidades, de tal modo que ele flutue verticalmente na água, como mostra a figura. A parte submersa mede  $\ell = 2,4 \text{ m}$ . O bastão é posto em oscilação vertical.



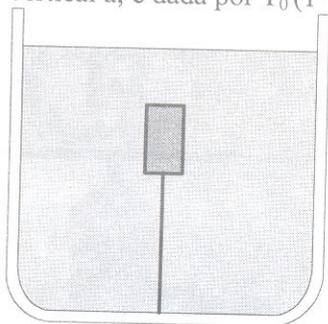
- Mostre que o movimento é harmônico simples.
- Determine o período em segundos. Despreze o amortecimento que a água produz nas oscilações.

**55.** Um caminhão transporta um aquário cúbico de aresta igual a  $b$ . O aquário contém água até a metade da sua altura. Calcule a aceleração máxima do caminhão para que a água não transborde do aquário.

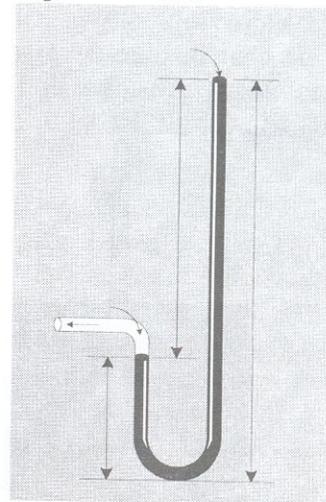
**56.** Três meninos, cada um de peso  $W$  (360 N), fazem uma jangada amarrando toras, cujos diâmetros e comprimentos são, respectivamente,  $D$  (0,3 m) e  $L$  (1,8 m). Quantas toras serão necessárias para construir a jangada e mantê-la em flutuação? Considere a densidade relativa da madeira como sendo 0,80.

**57.** a) Qual é a área mínima de um bloco de gelo de 0,3 m de espessura para que flutue na água, suportando sobre si um automóvel de massa igual a 1.200 kg?  
b) Importa o local onde o carro seja colocado sobre o bloco de gelo, importa?  
Suponha  $\rho_{\text{gelo}} = 0,9 \text{ g/cm}^3$ .

**58.** A tensão em uma corda prendendo um bloco maciço abaixo da superfície de um líquido (de densidade maior que o bloco) é  $T_0$  quando o vaso que o encerra (figura) está em repouso. Mostre que a tensão  $T$ , quando o vaso sofre uma aceleração ascendente vertical  $a$ , é dada por  $T_0(1 + a/g)$ .



**59.** O manômetro na figura contém água. O ramo da direita do tubo em U está aberto para a atmosfera, enquanto que o ramo da esquerda está ligado a um gás que possui pressão absoluta  $p$  menor do que a pressão atmosférica. A diferença entre o nível superior da água e o nível inferior da água do manômetro é igual a 12 cm.



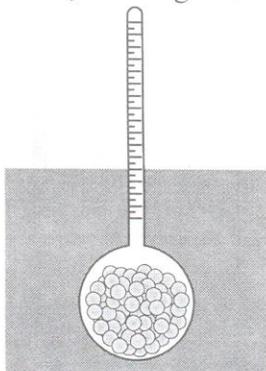
- O nível da água do ramo direito do manômetro está acima do nível da água do ramo esquerdo?
- Ache o módulo da pressão manométrica.
- Calcule o valor da pressão absoluta  $p$ .

**60.** Um béquer de massa 1 kg contém 2 kg de água e está em repouso sobre o prato de uma balança. Um bloco de alumínio (densidade relativa 2,70) está pendurado a um dinamômetro e submerso na água, conforme está na figura. Se o volume do bloco vale  $500 \text{ cm}^3$ , calcule as leituras das duas balanças.



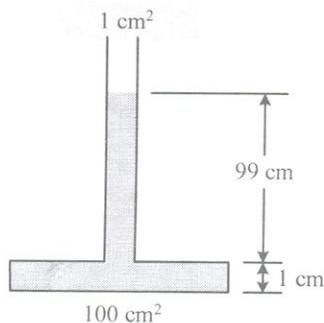
**61.** Um navio navega na água salgada (densidade relativa 1,03) para a água doce e afunda ligeiramente nesta passagem. Quando se removem 600 ton da sua carga, a linha d'água retorna ao nível na linha d'água. Calcular a massa do navio antes da descarga.

- 62.** O hidrômetro que aparece na figura é um dispositivo para medir a densidade de líquidos. O bulbo contém granalha de chumbo, e a densidade do líquido é lida diretamente na haste calibrada, pela posição do nível do líquido. Suponhamos que o volume do bulbo seja 20 mL, a haste tenha 15 cm de comprimento e 5,00 mm de diâmetro, e que a massa do vidro seja 6,0 g. Qual a massa da granalha de chumbo que deve ser adicionada de modo que a menor densidade do líquido que possa ser medida seja de  $0,90 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ?



- 63.** Um método comum para testar a pureza do ouro consiste em medir a sua densidade pesando-o no ar e na água. Numa época de preços crescentes do ouro, um falsificador propôs a fabricação de um lingote falso, usando uma lâmina oca de irídio (densidade de  $22,5 \text{ g/cm}^3$ ) e o recobrando-o com uma camada fina de ouro (densidade de  $19,3 \text{ g/cm}^3$ ).
- Para um lingote de 0,5 kg qual será o volume total?
  - Qual o volume vazio no interior do lingote?
  - será o irídio realmente mais barato que o ouro?

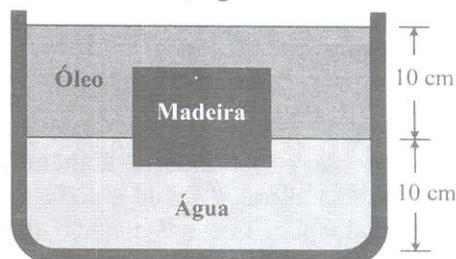
- 64.** Um tubo de seção reta de  $1,0 \text{ cm}^2$  é ligado ao topo de um recipiente de 1,0 cm de altura e  $100 \text{ cm}^2$  de área transversal. Derrama-se água no sistema, enchendo-o a uma altura de 100 cm acima do fundo,



- Qual a força exercida somente pela água contra o fundo do recipiente?
- Qual o peso da água no sistema?
- Explicar por que os resultados em (a) e (b) não são iguais.

- 65.** Uma peça de uma liga de ouro e alumínio pesa 5,86 kgf. Quando suspensa por uma balança de mola e mergulhada na água, a balança indica 4,86 kgf. Qual o peso do ouro na liga se a densidade relativa do ouro é 19,3 e a do alumínio é 2,5?

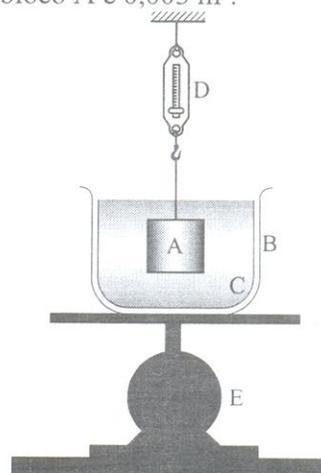
- 66.** Um cubo de madeira de 10 cm de lado flutua na interface entre óleo e água, como na figura, com sua face inferior 2 cm abaixo da interface. A densidade do óleo é  $0,6 \text{ g/cm}^3$ .



- Qual a massa do cubo de madeira?
- Qual a pressão manométrica na sua face inferior?

- 67.** Um bloco cúbico de madeira de 10 cm de lado e de densidade  $0,50 \text{ g/cm}^3$  é colocado em um vaso com água. Derrama-se óleo de densidade  $0,80 \text{ g/cm}^3$  dentro do vaso, até que a parte superior da camada de óleo fique 4,0 cm abaixo do topo do bloco.
- Qual a profundidade da camada do óleo?
  - Qual a pressão manométrica na face inferior do bloco?

- 68.** O bloco A da figura está suspenso por um fio ligado a uma balança de mola, D, e imerso num líquido C contido num béquer B. A massa do béquer é 1,0 kgf e a do líquido 1,5 kgf. A balança D indica 2,5 kgf e a balança E indica 7,5 kgf. O volume do bloco A é  $0,003 \text{ m}^3$ .



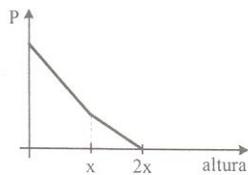
- Qual será a massa por unidade de volume do líquido?
- Qual será a leitura de cada balança se o bloco A for retirado para fora do líquido?

- 69.** Uma esfera oca de raios internos e externos iguais a 9 cm e 10 cm, respectivamente, flutua com metade de seu volume submerso em um líquido de densidade relativa 0,8.
- Calcular a densidade do material de que é feita a esfera.
  - Qual seria a densidade de um líquido no qual essa esfera flutuaria completamente submersa?

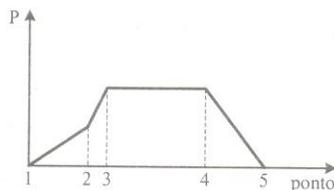
- 70.** Um salva-vidas com volume de  $3 \cdot 10^4 \text{ cm}^3$  m completamente imerso na água do mar (densidade relativa = 1,03), suporta um homem de 75 kgf (densidade relativa = 1,2) com 2/10 do volume do homem acima da água. Qual o peso por unidade de volume do material que constitui o salva-vidas?

**Gabarito**

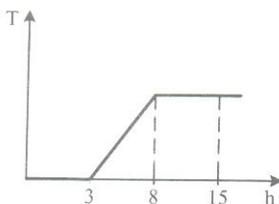
1. a) 12,5 cm; b)  $1,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$   
2.



3.  $P_M = 90 \text{ cmHg}$      $P_N = 20 \text{ cmHg}$   
4. 50 cm  
5. 32 g  
6. a) 250 kgf; b) 2 cm  
7.  $100 \text{ cm}^3$   
8. 5.000  
9.  $P_A = P_B = P_C$   
10.  $3P/k$   
11.

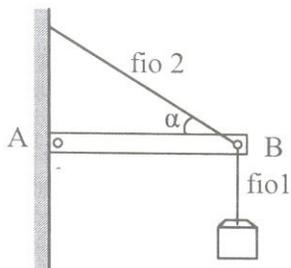


12. 36.000 N  
13. 60 cmHg  
14. a) 70 cmHg; b) 85 cm  
15. 1 cm  
16.  $10,05 \text{ N/cm}^2$   
17. 0,5 cm  
18. A  
19. a) A; b) A  
20.  $\frac{F_1}{F_2} = 100$   
21. a)  $4 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ ; b)  $\frac{1}{24} \text{ L/s}$ ; c)  $\frac{500}{3} \text{ W}$   
22.  $6,75 \cdot 10^{-3} \text{ N}$   
23. 8 N  
24. a) 2.250 N; b) 33.750 J  
25. 4  
26.  $5 \text{ g/cm}^3$   
27.

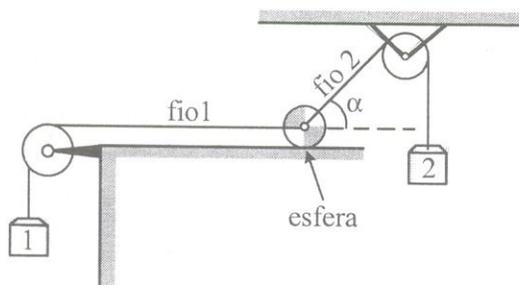


28. 61/136  
29. permanecerá o mesmo  
30. 103 cm  
31. C  
32.  $\frac{d_2 - d_1}{d_1}$   
33. 75%  
35.  $d = 2d'$   
36.  $50 \text{ cm}^3$   
37. D  
38.  $t = 0,04 \text{ s}$ ;  $v = 0,5 \text{ m/s}$   
39. 4000 kg  
40. a)  $T_1 = 100 \text{ N}$      $T_2 = 0$   
b)  $T = 50 \text{ N}$      $a = 5 \text{ m/s}^2$   
c)  $T = 100 \text{ N}$      $a = 0$   
42.  $\rho = 0,85 \text{ g/cm}^3$   
44. a)  $\frac{\rho g D^2 W}{2}$   
b)  $\frac{\rho g D^3 W}{6}$   
c)  $\frac{D}{3}$  acima de O e no meio da barragem  
45. a)  $\rho \cdot (g + a) \cdot h$ ; b)  $\rho \cdot (g - a) \cdot h$ ; c) 0  
46.  $E = 125 \text{ N}$  e  $\rho = \frac{1,4}{103} \text{ kg/m}^3 \cong 0,0136 \text{ kg/m}^3$   
47. a) 37.080 N; b) 39.240 N; c) 1.840 N  
48. a) 10 cm; b) 8 cm  
49.  $\left(1 - \frac{\rho}{nd}\right) V$   
50. a)  $\frac{2}{3} \text{ g/cm}^3$ ; b)  $\frac{2}{2,7} \text{ g/cm}^3$   
51.  $50\sqrt[3]{\frac{34}{39}} \text{ cm}$   
52. a)  $\frac{4}{21} \%$ ; b) não  
53. Demonstração  
54. a)  $Res = \rho_{AG} \cdot S \cdot g \cdot x = kx$ ; b)  $2\pi\sqrt{0,24} \text{ s}$   
55.  $10 \text{ m/s}^2$   
56. 5  
57. a)  $40 \text{ m}^2$   
b) Sim, devido ao momento  
59. a) abaixo; b) 1200 Pa; c) 98.800 Pa  
60. Balança: 35 N; Dinamômetro: 8,5 N  
61. 20.600 ton  
62.  $\left(12 + \frac{13,5\pi}{16}\right) \text{ g} \cong 14,65 \text{ g}$   
63. a)  $\frac{500}{19,3} \text{ cm}^3 \cong 25,9 \text{ cm}^3$   
b)  $\frac{3,2 \times 500}{19,3 \times 22,5} \text{ cm}^3 \cong 3,68 \text{ cm}^3$   
64. a) 100 N  
b) 1,99 N  
c) Porque a pressão no fundo depende da altura e não do volume da água.  
65. 3,86 kgf  
66. a) 680 g; b) 800 Pa  
67. a) 5 cm; b) 500 Pa  
68. a)  $\frac{5}{3} \text{ g/cm}^3$   
b) D: 7,5 kgf    E: 2,5 kgf  
69. a)  $\frac{400}{271}$ ; b) 0,4  
70.  $800 \text{ N/m}^3$

- 1.** Um corpo de peso  $P = 60 \text{ N}$  está preso por meio de um fio (1) a uma barra  $AB$  horizontal, de peso desprezível e que está articulada em  $A$ . Por meio de outro (2), preso em  $B$ , impede-se a barra de girar. Considerando-se os fios ideais e  $\sin \alpha = 0,6$ , determine:

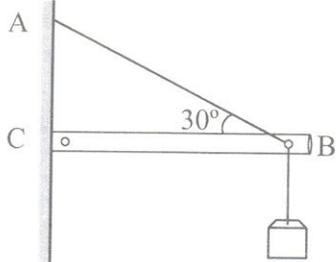


- a) a força de tração no fio 1;  
b) a força de tração no fio 2;  
c) a força transmitida pela barra;  
d) se a barra sofre tração ou compressão.
- 2.** No sistema esquematizado na figura, determine o valor do ângulo  $\alpha$  e a reação do apoio sobre a esfera, quando em equilíbrio.

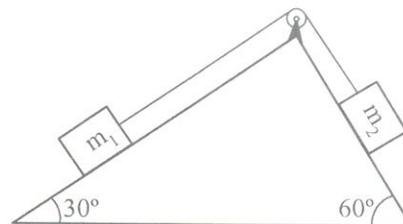


Dados: peso do corpo 1: 30 kgf; peso do corpo 2: 60 kgf; peso da esfera: 80 kgf.

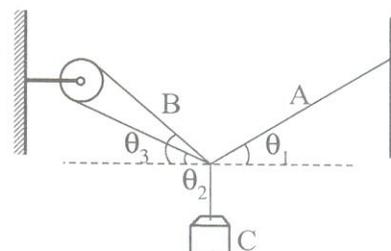
- 3.** No esquema vertical, consideram-se dois pontos fixos  $A$  e  $C$ . Em  $C$  está articulada uma haste rígida horizontal ( $CB$ ) de peso  $Q = 40 \text{ kgf}$ , segura na extremidade  $B$  por um fio  $AB$  de tal forma que o ângulo  $ABC$  é  $30^\circ$ . Suspende-se em  $B$  um corpo de peso  $P = 180 \text{ kgf}$ . Calcule as forças suportadas pelo fio e pela haste.



- 4.** Qual a relação  $m_1/m_2$  para que o sistema esquematizado abaixo fique em equilíbrio?

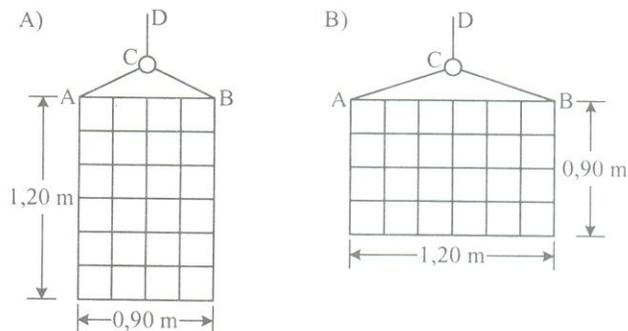


- 5.** Na figura, um bloco  $C$  de peso  $P$  está suspenso por duas cordas  $A$  e  $B$ . A corda  $B$  passa por uma roldana sem atrito, presa a uma parede fixa e tem suas extremidades ligadas ao bloco  $C$ . A corda  $A$  tem uma de suas extremidades presa a uma parede vertical e a outra ao bloco  $C$ .

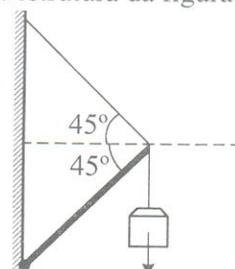


Considerando:  $\theta_1 = \theta_2 = 30^\circ$  e  $\theta_3 = 60^\circ$ , determine a tensão  $T_A$  na corda  $A$  e a tensão  $T_B$  na corda  $B$ .

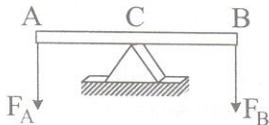
- 6.** Um caixote de 750 kgf é levantado por um cabo de guindaste  $CD$ . Uma alça  $ACB$ , de 1,5 m de comprimento, é afixada ao caixote de cada uma das maneiras mostradas. Determine a tração na alça em cada caso.



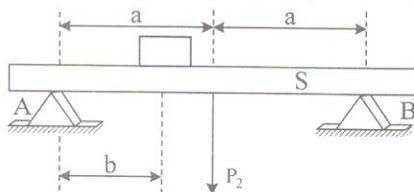
- 7.** Veja a figura abaixo. A tração máxima que a corda superior pode suportar é de  $400\sqrt{2} \text{ N}$  e a compressão máxima que a escora pode agüentar é de  $600\sqrt{2} \text{ N}$ . A corda vertical é suficientemente resistente para tolerar qualquer peso envolvido no problema. Calcule o maior peso que pode ser sustentado pela estrutura da figura.



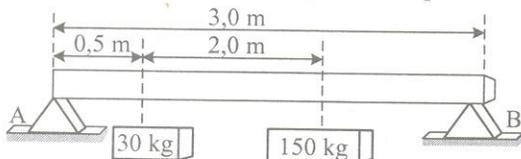
8. Uma barra homogênea é dobrada em ângulo reto, cujos lados medem 42 cm e 56 cm. Onde se encontra seu centro de gravidade?
9. Uma barra de peso desprezível está apoiada no ponto C e encontra-se em equilíbrio. Sabendo que duas forças de mesma direção e sentido, de intensidades 18 N e 24 N, estão aplicadas respectivamente às extremidades A e B da barra, determine a reação no apoio e a distância do mesmo à extremidade A. Considere o comprimento da barra igual a 0,84 m.



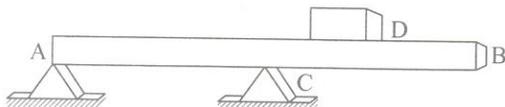
10. Determine os valores das reações A e B, sabendo que a viga S está em equilíbrio. O peso próprio da viga é  $P_2 = 400$  N. O peso do corpo 1 apoiado sobre ela é  $P_1 = 100$  N. Considere  $a = 1,0$  m e  $b = 0,5$  m.



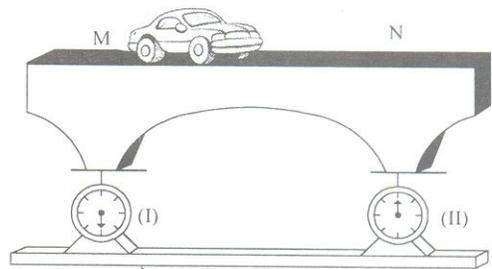
11. A barra AB é uniforme e tem massa igual a 100 kg. Ela está apoiada nas suas extremidades e suporta as massas ilustradas na figura abaixo. Adotando  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>, determine as reações nos apoios.



12. A barra AB é uniforme, pesa 50,0 N e tem 10,0 m de comprimento. O bloco D pesa 30,0 N e dista 8,0 m de A. A distância entre os pontos de apoio da barra é  $\overline{AC} = 7,0$  m. Calcule a reação na extremidade A.

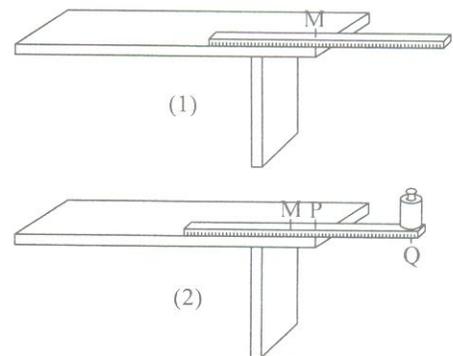


13. Um modelo (maquete) de uma ponte é recortado em material homogêneo (madeira pesada, por exemplo) e repousa sobre duas balanças, como mostra a figura. Um automóvel de brinquedo anda sobre a ponte com velocidade constante.



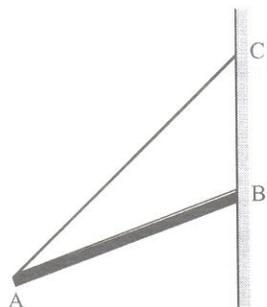
No instante em que o automóvel passa por P, tal que  $MP = \frac{1}{4}MN$ , as indicações das balanças são: balança (I) = 16 N e balança (II) = 12 N. A partir dessas informações, determine os pesos do modelo da ponte e do automóvel.

14. Um estudante quer determinar a massa de uma régua graduada, dispondo somente de uma “massa calibrada” de 5,0 g. Para isso, realiza as experiências mostradas nas figuras abaixo.



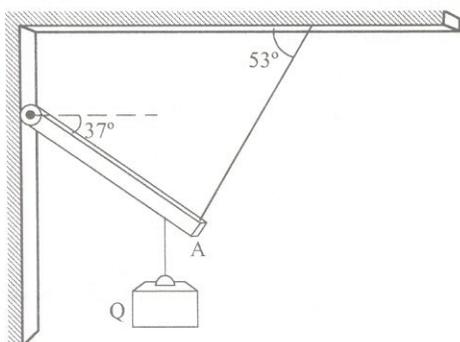
- I. Apóia a régua sobre a beira de uma mesa horizontal, de modo que ela permaneça em perfeito equilíbrio (isto é, na iminência de cair). Registra, então, a graduação da régua, que coincide com a beira da mesa (M na figura 1).
- II. A seguir, coloca a “massa calibrada” na extremidade Q da régua, obedecendo às mesmas condições descritas anteriormente. Mais uma vez, registra sua graduação e observa que ela coincide com a beira da mesa (P na figura 2).
  - o ponto Q coincide com a divisão 0, origem da escala da régua;
  - o ponto P coincide com a divisão 48 da régua;
  - o ponto M coincide com a divisão 50 da régua.
 Determine, portanto, a massa da régua.

15. Na figura abaixo, a barra de peso P é mantida em equilíbrio, com o extremo B apoiado numa parede vertical lisa e com o extremo A preso pela corda AC. Sendo  $BC = 2$  m e o comprimento da barra  $\overline{AB} = 4$  m, determine o comprimento da corda.

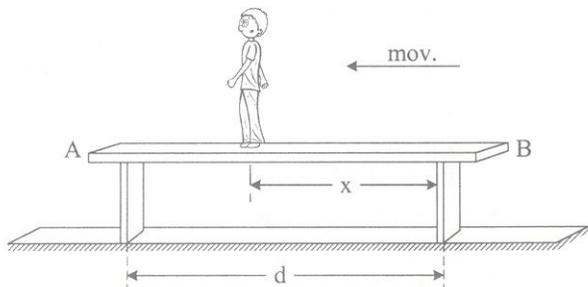


- 16.** A barra da figura é homogênea e pesa 50 kgf. Se  $Q = 100$  kgf e está a uma distância de  $l/4$  da extremidade A, determine a intensidade da tração na corda e os componentes vertical e horizontal da força na articulação. Considere o comprimento da barra igual a  $l$ .

Considere:  $\sin 37^\circ = 0,6$ .

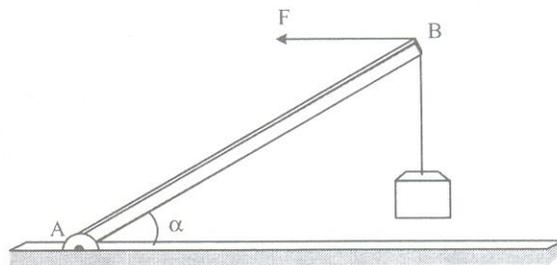


- 17.** Uma pessoa de peso  $P$  desloca-se ao longo de uma prancha rígida, apoiada em duas paredes verticais paralelas, separadas por uma distância  $d$ , como mostra a figura. Ao passar de um extremo ao outro, o esforço  $E$  sobre a parede A, desprezado o peso da prancha, varia. Faça um diagrama representando esta variação.

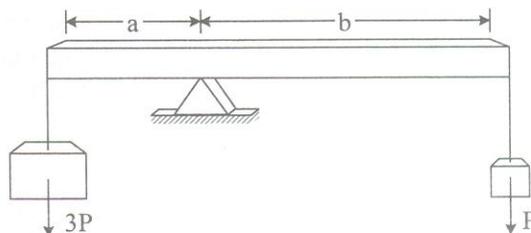


- 18.** Uma barra indeformável e retilínea AB homogênea, de seção constante e massa  $m$ , pode girar em torno de um pino horizontal fixo, normal à barra em A. Em B, suspenso por meio de uma corda de peso desprezível, está um corpo de massa  $M$ . Sendo  $m = 10$  kg,  $M = 90$  kg,  $\alpha = 30^\circ$  e  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>, calcule:

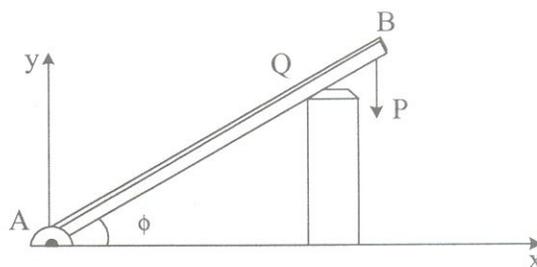
- a) o valor numérico da força horizontal  $F$ , situada no plano da figura e capaz de manter a barra em equilíbrio, formando um ângulo  $\alpha$  com a horizontal;  
b) a força correspondente à reação do pino em A.



- 19.** A barra rígida da figura tem um peso  $P$ . Está sobre um apoio e, em suas extremidades, são penduradas cargas de pesos  $3P$  e  $P$ . Determine qual deve ser a relação  $a/b$  para que a barra fique em equilíbrio.



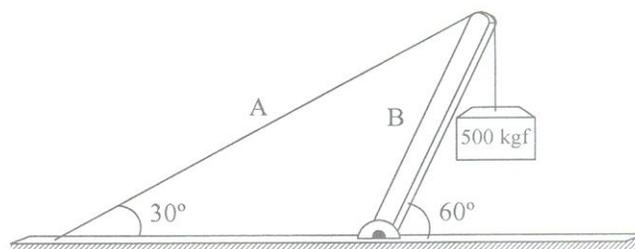
- 20.** Uma barra rígida de peso desprezível, articulada em A e apoiada em Q, sustenta na extremidade B um peso  $P = 100\sqrt{3}$  N.



As distâncias AQ e QB valem, respectivamente, 60 cm e 40 cm. O ângulo  $\phi$  mede  $30^\circ$ . Nestas condições, determine:

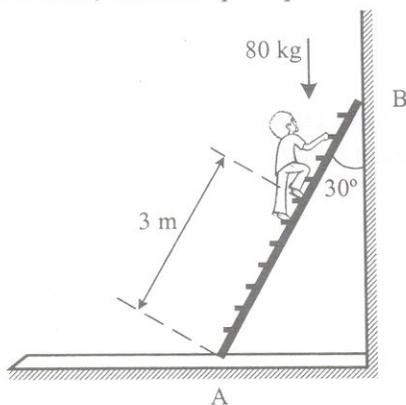
- a) a reação desenvolvida no ponto de apoio Q;  
b) a reação horizontal em A;  
c) A reação vertical em A.

- 21.** Na figura abaixo, desprezando-se o peso da barra B, determine a tração no cabo A.

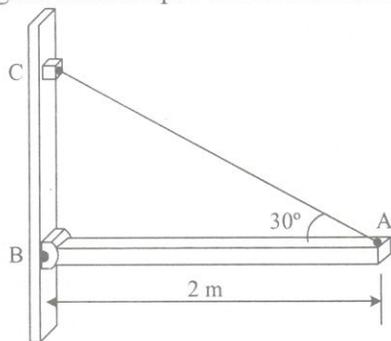




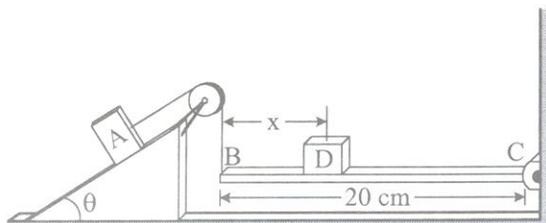
- 22.** Uma escada de 4 m de comprimento e 10 kgf de peso está apoiada contra uma parede vertical, conforme a figura. Quando um homem de 80 kgf de peso alcança um ponto situado a 3 m do extremo inferior A, a escada está a ponto de deslizar. Determine o coeficiente de atrito estático entre a escada e o chão, sabendo que a parede é lisa.



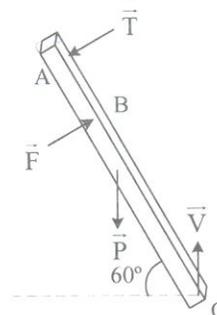
- 23.** Na figura abaixo, a barra AB é articulada em B e está suspensa do ponto C por meio de um fio inextensível e sem peso. Sendo o peso específico da barra igual a 100 kgf/m, determine a reação em B e o ângulo formado por ela com a barra AB.



- 24.** Na figura, o bloco A está em equilíbrio estático, pesa 100 N e o coeficiente de atrito entre ele e o plano inclinado é 0,5. A barra BC tem sua extremidade B presa à corda que está atada a A e está articulada em C. Um peso D de 100 N pode se movimentar sobre a barra, que tem 20 cm de comprimento. Desprezando o peso da barra e da corda, bem como o atrito na polia, determine a posição do peso D em relação à extremidade B da barra, para que o bloco A fique na iminência de descer.  
Dado:  $\sin \theta = 0,8$ .

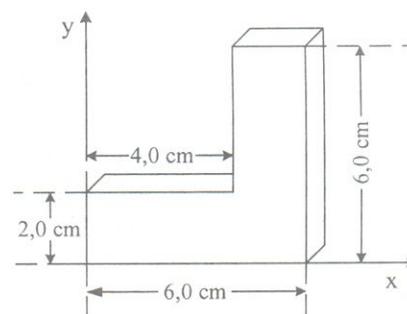


- 25.** Uma barra de seção uniforme e de comprimento  $\ell$  tem uma metade de material com densidade duas vezes maior que da outra metade. A que distância do centro (geométrico) dessa barra se encontra o seu centro de gravidade?
- 26.** Uma barra homogênea de comprimento 5 m pesa 40 kgf e está sob a ação das forças  $\vec{T}$ ,  $\vec{F}$  e  $\vec{V}$ , conforme mostra o esquema. Sabe-se que  $V = P$  e  $T = F = 50$  kgf, que a distância AB vale 2 m e o ângulo entre a barra e a horizontal é  $60^\circ$ . Adote o sentido anti-horário como positivo.

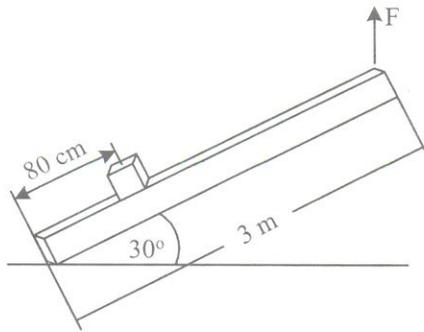


Determine:

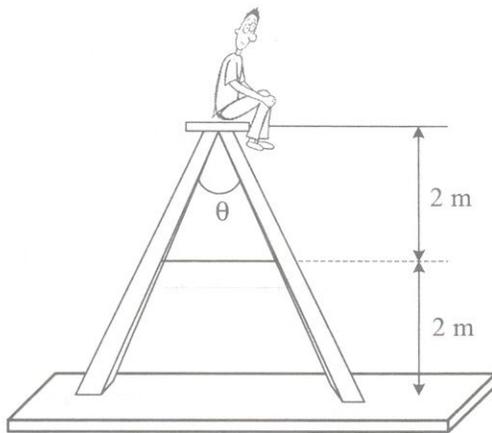
- o momento de  $\vec{P}$  em relação a O;
  - o momento de  $\vec{T}$  em relação a O;
  - o momento de  $\vec{F}$  em relação a O;
  - o momento de  $\vec{V}$  em relação a O.
- 27.** A figura abaixo indica uma chapa homogênea de espessura uniforme. Determine as coordenadas do centro de gravidade da chapa.



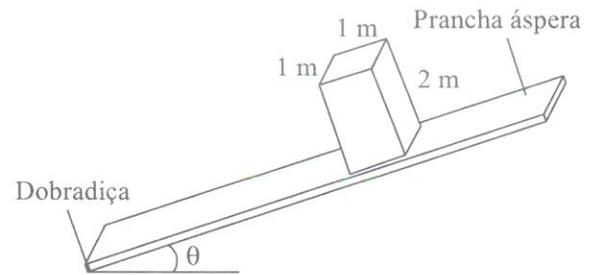
- 28.** Uma tábua de 3 m e 5 kg está articulada numa extremidade. A força F aplica-se à outra extremidade, para elevar um corpo de 60 kg, que está a 80 cm da extremidade articulada, conforme a figura.
- Determinar o módulo da força F capaz de manter a tábua estacionária com  $\theta = 30^\circ$ .
  - Determinar a força exercida pela articulação, neste ângulo.
  - Determinar a força F e a força exercida pela articulação no caso de F atuar perpendicularmente à tábua, que está fazendo o ângulo  $\theta = 30^\circ$ .



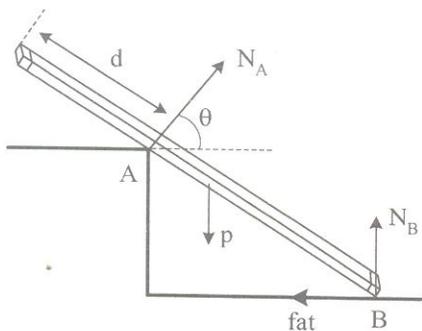
- 29.** Um garoto, de 900 N, está no topo de uma escada de pintor, de peso desprezível, apoiada sobre um piso sem atrito. A escada tem um tirante a meia altura, como na figura. O ângulo do vértice é  $\theta = 60^\circ$ .
- Qual é a força exercida pelo piso sobre cada perna da escada?
  - Determine a tensão no tirante.
  - Se o tirante for deslocado mais para a base da escada (com o mesmo ângulo do vértice), a tensão será maior ou menor?



- 30.** Sobre um plano inclinado áspero e articulado, está uma caixa de 2 por 1 por 1 m, com massa uniforme, conforme a figura. O plano faz um ângulo  $\theta$  com a horizontal, e este ângulo é lentamente aumentado. O coeficiente de atrito é suficientemente grande para impedir que a caixa escorregue antes de tombar.
- Determine o maior ângulo que pode ser alcançado sem a caixa tombar. (Sugestão: Mostre inicialmente que o centro de gravidade deve estar acima de uma certa parte da base para que possa ser satisfeita a condição de equilíbrio estático.)
  - Qual é o valor mínimo  $\mu_s$  no caso de a caixa tombar antes de escorregar?



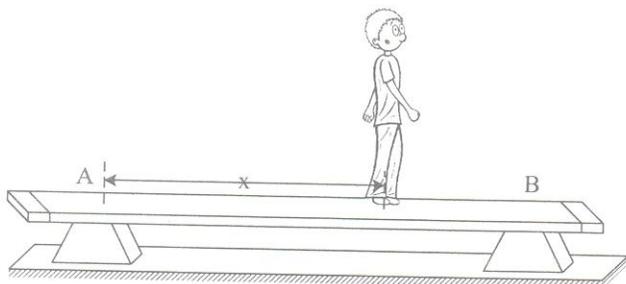
- 31.** Uma porta uniforme, de 2,0 m de altura por 0,8 m de largura, tem a massa de 18 kg e apóia-se em duas dobradiças colocadas a 20 cm do topo e a 20 cm da base, respectivamente. Admitindo que cada dobradiça suporte a metade do peso da porta, determinar o módulo e a direção das duas componentes horizontais das forças exercidas pelas dobradiças sobre a porta.
- 32.** Dois pintores estão trabalhando num andaime de 5,0 m suspenso ao topo do edifício por duas cordas presas às extremidades da armação. Cada corda romper-se-á se a tensão exceder 1 kN. O pintor A (massa 90 kg) está trabalhando a 1,0 m de uma extremidade. Determinar o intervalo das posições possíveis do pintor B se a sua massa é de 60 kg e andaime pesa 20 kg.
- 33.** Uma escada de pequeno peso está apoiada num piso áspero e encostada numa parede vertical sem atrito, fazendo um ângulo  $\theta$  com a horizontal. Mostrar que, sendo  $L$  o comprimento da escada, uma pessoa não pode subir além de  $\mu_s \cdot L \cdot \text{tg } \theta$  sem que a escada escorregue; nesta expressão,  $\mu_s$  é o coeficiente de atrito entre o piso e a escada, e admite-se que o peso da escada seja desprezível em comparação com a da pessoa.
- 34.** Uma roda, de massa  $M$  e raio  $R$ , está sobre uma superfície horizontal e de encontro a um degrau de altura  $h$  ( $h < R$ ). A roda deve subir o degrau pela ação de uma força horizontal de módulo  $F$  aplicada ao eixo. Determinar a força  $F$  necessária para fazer a roda subir o degrau.
- 35.** Uma barra de comprimento  $L$  está apoiada no solo e contra um apoio A em ângulo reto, conforme indicado na figura. Não existe atrito entre o apoio A e a barra, mas entre a barra e o solo o coeficiente de atrito é igual a  $\mu$ . Calcule o coeficiente de atrito entre a barra e o solo em função do ângulo  $\theta$  para que a barra não escorregue sobre o plano.



- 36.** Um motor elétrico pesado deve ser carregado por dois homens que o põem sobre uma prancha leve de 2,0 m de comprimento. Um dos homens exerce em uma das extremidades uma força de 600 N e o outro uma força de 400 N, na outra extremidade.
- Determine o peso do motor e onde ele está situado na prancha;
  - Supondo que a prancha não seja leve, mas pese 200 N, determine o peso do motor e a sua localização na prancha.

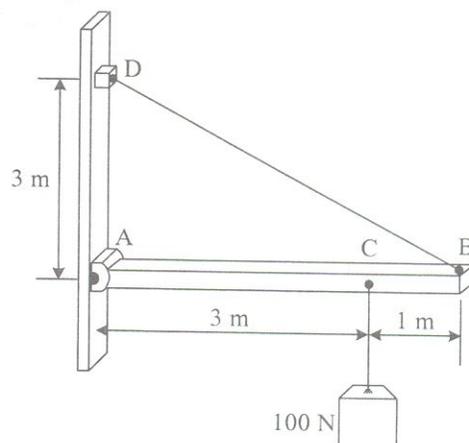
- 37.** Dois homens carregam uma escada de ferro de 6 m de comprimento e pesando 800 N. Se um dos dois agüenta levantar um máximo de 320 N e segura na extremidade, em que posição deve o outro segurar para não ultrapassar a capacidade do primeiro?

- 38.** Uma prancha uniforme de 15 m de comprimento pesando 400 N repousa simetricamente em dois suportes afastados 8 m, como na figura. Um rapaz pesando 640 N sai de A e caminha para B.
- Construir, no mesmo diagrama, dois gráficos mostrando as forças para cima,  $F_A$  e  $F_B$ , exercidas sobre as pranchas nos pontos A e B como funções da abscissa  $x$  do rapaz.
  - Pelo diagrama, determinar até que ponto, além de B o mesmo pode ir sem levantar a prancha.
  - A que distância da extremidade direita o suporte B deve ser colocado, para que o menino possa andar até o fim, sem levantar a prancha?

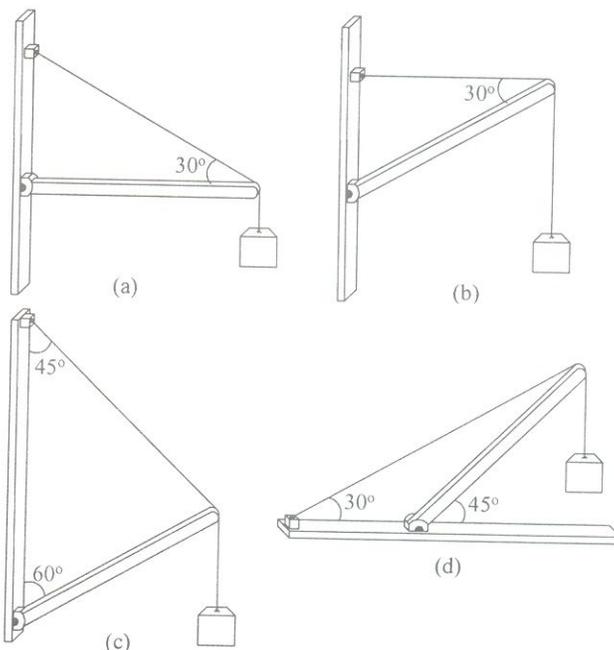


- 39.** Determinar a tração no cabo BD, figura, e as componentes horizontal e vertical da força exercida sobre a escora AB na articulação A:

- Usando a primeira e a segunda condições de equilíbrio ( $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$ ,  $\sum T = 0$ ) e tomando os torques em relação a um eixo que passa por A, perpendicularmente ao plano do diagrama.
- Usando apenas a segunda condição e tomando primeiro torques em relação a um eixo que passe por A, depois por B e, finalmente por D. O peso da escora é desprezível.
- Representar graficamente por meio de vetores, as forças calculadas. Traçando o diagrama em escala, mostrar que as linhas de ação das forças exercidas sobre a escora em A, B e C interceptam-se em um ponto comum.

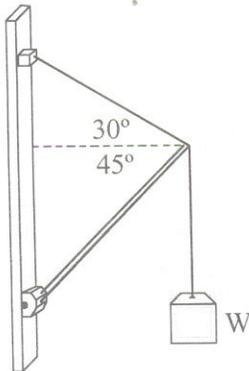


- 40.** Achar a tensão T em cada cabo e a força exercida na escora pela articulação em cada um dos arranjos da figura. Considerar o peso do objeto suspenso em cada caso igual a 1.000 N. Desprezar o peso da escora.



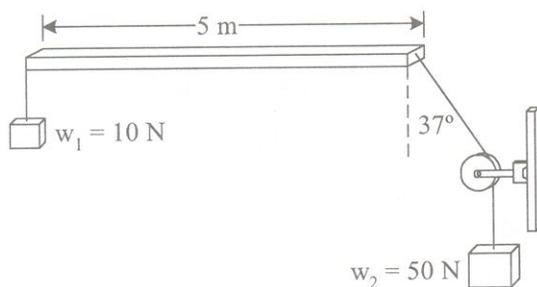
**41.** Uma viga horizontal de 4 m está presa a uma parede vertical numa extremidade, sustentando um peso de 500 N na outra. A viga está suspensa por um cabo preso em sua extremidade externa e a um ponto na parede na vertical acima do ponto de apoio da viga. Como a tensão no cabo não deve exceder 1.000 N, qual a menor distância entre o ponto de apoio e o ponto ao qual está preso o cabo?

**42.** Achar o maior peso  $W$  que a estrutura da figura pode suportar, se a tensão máxima a que a corda superior resiste é de 1.000 N e a compressão máxima que a escora suporta é de 2.000 N. A corda vertical é suficientemente forte para suportar qualquer carga. Desprezar o peso da escora.



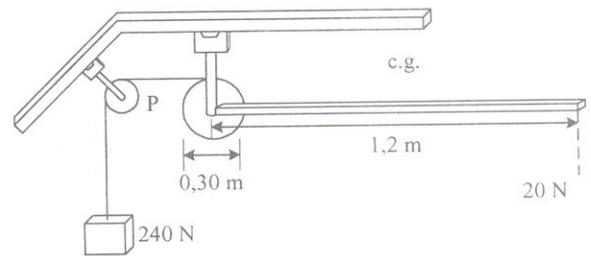
**43.** Uma única força deve ser aplicada na barra, figura, para mantê-la em equilíbrio na posição indicada. Desprezar o peso da barra.

- Quais são os componentes  $x$  e  $y$  dessa força?
- Qual é a tangente do ângulo que a força faz com a barra?
- Qual é a sua intensidade?
- Onde se deve aplicá-la?



**44.** Em um disco com 30 cm de diâmetro que gira em torno de um eixo horizontal, enrolou-se uma corda que passa pela roldana  $P$ , sem atrito. A corda está ligada a um corpo que pesa 240 N. Prende-se ao disco uma barra uniforme de 1,2 m de comprimento, com uma extremidade coincidindo com o centro do disco. O sistema está em equilíbrio e a barra está na horizontal, como na figura.

- Qual é o peso da barra?
- Qual a nova direção de equilíbrio da mesma, quando se pendura um segundo corpo de 20 N, indicado pelas linhas tracejadas?

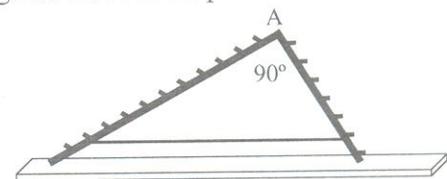


**45.** Um cilindro com 1 m de diâmetro pesa 360 N. Qual é a força horizontal necessária para puxá-lo sobre um paralelepípedo de 0,1 m de altura, quando a força é aplicada:

- em seu centro;
- no seu ponto mais alto.

**46.** Duas escadas de 4 m e 3 m de comprimento estão articuladas no ponto  $A$  e ligadas por uma corda horizontal a 0,6 m acima do solo, como na figura. As escadas pesam 400 N e 300 N e os centros de gravidade e geométrico de cada uma coincidem. Considerando o solo sem atrito, determine:

- a força para cima, na base de cada escada;
- a tração na corda;
- a força que uma escada exerce sobre a outra, no ponto  $A$ ;
- a tração na corda, quando se dependura uma carga de 1.000 N no ponto  $A$ .



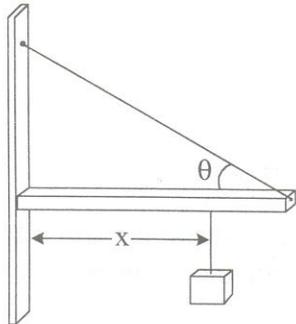
**47.** Uma escada uniforme de 10 m de comprimento e pesando 400 N é encostada a uma parede vertical sem atrito, a extremidade inferior estando a 6 m da parede. O coeficiente de atrito estático entre a escada e o chão é 0,40. Um homem pesando 800 N sobe lentamente a escada.

- Qual o valor máximo da força de atrito que o chão pode exercer sobre a escada?
- Tendo o homem subido 3 m ao longo da escada, qual o valor da força de atrito nesse instante?
- Quanto pode o homem subir a escada antes da mesma começar a deslizar?

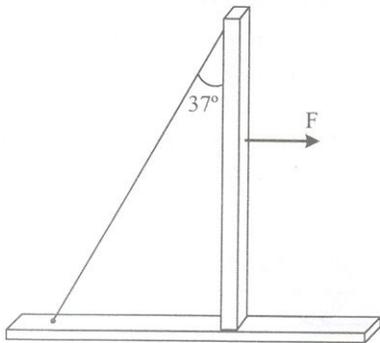
**48.** A extremidade de uma régua de 1,0 m é colocada de encontro a uma parede vertical, como na figura. Suspende-se a outra extremidade por uma corda leve, fazendo um ângulo  $\theta$  com a régua. O coeficiente de atrito estático entre a extremidade da régua e a parede é 0,30.



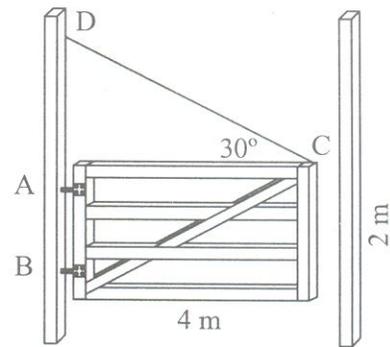
- Qual o máximo valor de  $\theta$  que mantém a régua em equilíbrio?
- Seja  $\theta = 10^\circ$ . Um corpo de mesmo peso que a régua é suspenso da mesma, como mostrado pelas linhas tracejadas, a uma distância  $x$  da parede. Qual é o mínimo valor de  $x$  para que a régua permaneça em equilíbrio?
- Seja  $\theta = 10^\circ$  e pendure o corpo na extremidade esquerda da régua. Qual deve ser o coeficiente de atrito estático para que a régua não escorregue?



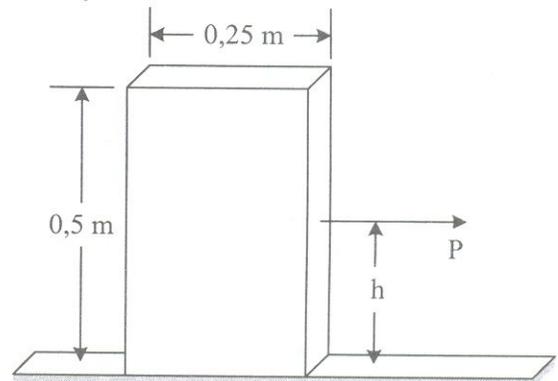
- 49.** A extremidade de um poste de 500 N apóia-se em uma superfície horizontal rugosa, com  $\mu_s = 0,3$ . A extremidade superior está presa por uma corda amarrada ao solo e que faz um ângulo de  $37^\circ$  com o poste, como na figura. Uma força horizontal  $F$  é aplicada ao poste. Se  $F$  for aplicada no ponto médio do poste, qual o valor máximo de sua intensidade para o qual não se inicia ainda o deslizamento?



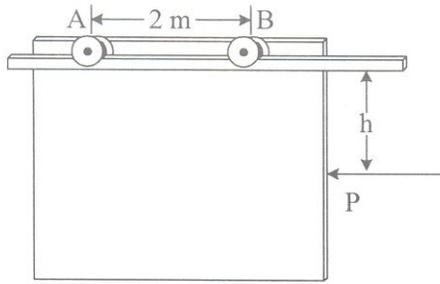
- 50.** Um portão tem 4 m de comprimento e 2 m de altura e pesa 400 N. Os centros geométrico e de gravidade coincidem e as dobradiças ficam em A e B. Para diminuir o esforço na dobradiça superior, colocou-se um tirante CD, como na figura. A tração no tirante foi ajustada de modo a anular a força horizontal em A.
- Qual a tensão no tirante?
  - Qual a intensidade da componente horizontal da força na dobradiça B?
  - Qual a força vertical conjunta exercida pelas dobradiças A e B?



- 51.** Um corpo de forma retangular, com 0,25 m de largura e 0,50 m de altura, é arrastado para a direita sobre uma superfície horizontal à velocidade constante, por uma força horizontal  $P$ , como na figura. O coeficiente de atrito cinético é 0,40, o corpo pesa 25 N e os centros de gravidade e geométrico coincidem. Determinar:
- A intensidade de  $P$ .
  - A posição da linha de ação da normal  $N$  exercida pela sua superfície sobre o bloco quando  $h = 0,125$  m.
  - O valor mínimo de  $h$  para o qual o corpo começa a tombar.

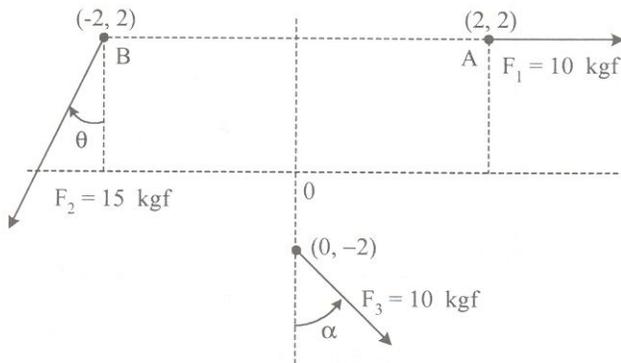


- 52.** Uma porta de garagem é montada sobre trilhos, como na figura. As rodas em A e B estão enferrujadas, de modo que não rodam, mas deslizam ao longo do trilho. O coeficiente de atrito de deslizamento é 0,5. A distância entre as rodas é de 2 m e cada uma está a 0,5 m da borda da porta. Esta é simétrica e pesa 800 N. Ela é empurrada para a esquerda, a velocidade constante, por uma força horizontal  $P$ .
- Se a distância  $h$  é de 1,5 m, qual a componente vertical da força exercida em cada roda pelo trilho?
  - Encontrar o máximo valor de  $h$  sem que uma roda saia do trilho.

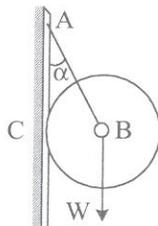


- 53.** a) Duas forças paralelas, de mesmo sentido, estão a 0,20 m de distância. Se uma das forças é de 13 N e a resultante tem uma linha de ação a 0,08 m de distância da outra força, calcule a intensidade da resultante e a intensidade da outra força.
- b) Duas forças paralelas de mesmo sentido, apresentam intensidade de 20 N e 30 N. A distância da linha de ação da resultante à força maior é de 0,80 m. Calcule a distância entre as forças.
- c) Resolva (a) e (b) assumindo que as forças têm sentidos opostos.

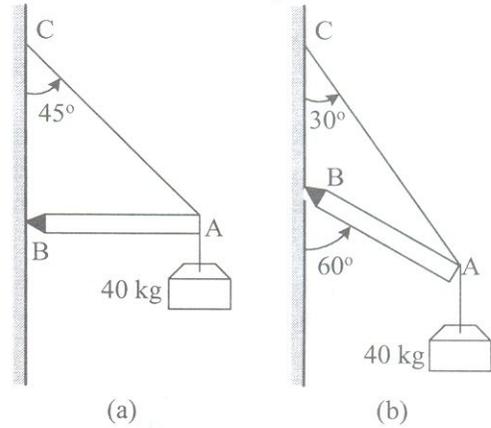
- 54.** Calcule a intensidade e a posição da resultante do sistema de forças representado na figura. As coordenadas dos pontos A, B e C são dadas em m,  $\cos \theta = 0,8$  e  $\cos \alpha = 0,6$ .



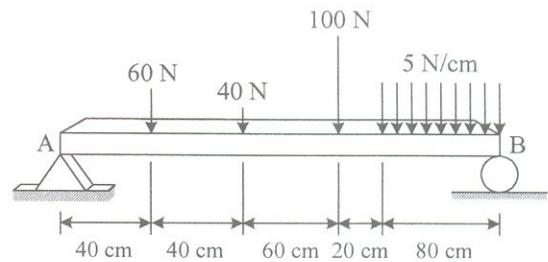
- 55.** Uma esfera cujo peso é de 50 kgf está apoiada em dois planos lisos inclinados a  $30^\circ$  e  $45^\circ$ , respectivamente, em relação ao plano horizontal. Calcular as reações dos dois planos sobre a esfera.
- 56.** Uma esfera de peso W está suspensa pela corda AB e se apóia na parede vertical sem atrito AC. Se  $\alpha$  é o ângulo entre a corda e a parede, determine a tração na corda e a reação da parede sobre a esfera.



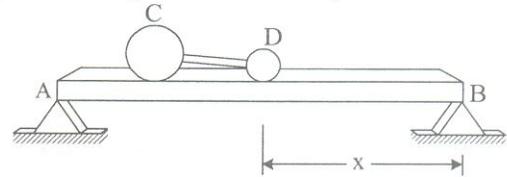
- 57.** Determine a tensão no cabo AC e as reações horizontal e vertical no ponto B, admitindo-se que a barra tem a massa de 20 kg.



- 58.** Várias forças atuam na barra AB, como mostra a figura. Determine a intensidade e a posição da resultante.

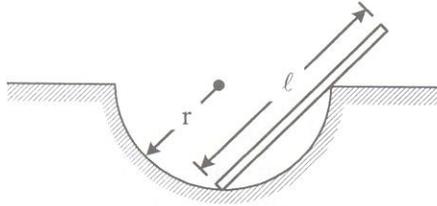


- 59.** Na figura, a barra AB tem 1,2 m de comprimento e peso desprezível. As esferas C e D (40 e 20 kg respectivamente), ligadas pela haste CD, estão apoiadas sobre ela. A distância entre os centros das esferas é 0,3 m. Calcular a distância x tal que a reação em B seja metade da reação em A.

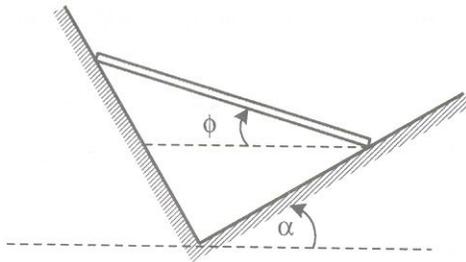


- 60.** a) Uma ponte de 100 m de comprimento e 10.000 kgf de peso está apoiada por duas colunas nas suas extremidades A e B. Quais são as reações nas colunas quando três carros estão na ponte a 30, 60 e 80 m de distância de uma extremidade A, e cujos pesos são 1.500, 1.000 e 1.200 kgf, respectivamente?
- b) Considere os três carros movendo-se à mesma velocidade, 10 m/s, e no mesmo sentido, em direção a A. Determine as reações das colunas em função do tempo, tomando-se  $t = 0$  na posição dada em (a). Estenda os cálculos até que todos os carros estejam fora da ponte.

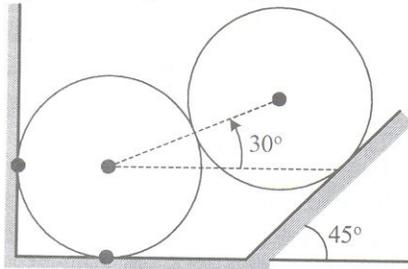
- 61.** Uma vara de massa  $m$  e comprimento  $\ell$ , como na figura, é colocada num hemisfério de raio  $r$  completamente sem atrito. Determine a posição de equilíbrio da vara. Calcule as reações do hemisfério sobre a vara. Discuta as soluções correspondentes a  $\ell > 2r$  e  $\ell < 2r$ .



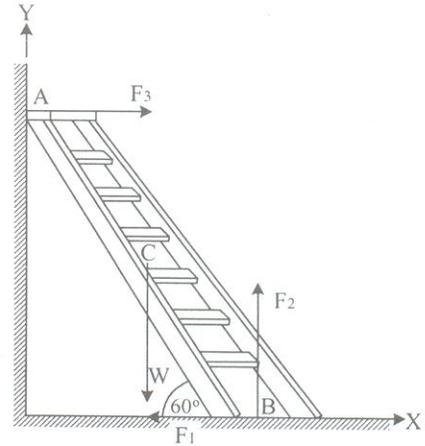
- 62.** Uma vara de peso  $W$  e comprimento  $0,8\text{ m}$  é colocada sobre as superfícies planas sem atrito, que formam ângulo reto, conforme mostra a figura. Determine a posição de equilíbrio  $\phi$  da vara e as forças de reação dos planos inclinados.



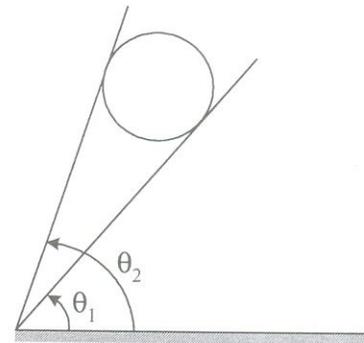
- 63.** Duas esferas idênticas são colocadas no sistema mostrado na figura. Calcule as reações das superfícies sobre as esferas. Mostre que cada esfera está em equilíbrio separadamente.



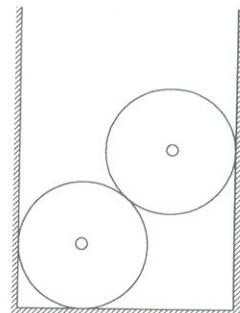
- 64.** a) Uma escada  $AB$ , pesando  $40\text{ kgf}$ , apóia-se numa parede vertical e faz um ângulo de  $60^\circ$  com o assoalho. Calcule as forças que atuam sobre a escada nos pontos  $A$  e  $B$ . A escada é provida de rodas em  $A$ , de tal forma que se pode desprezar o atrito na parede vertical.  
b) Repita (a) para uma força de atrito vertical que vale sempre exatamente  $0,3F_3$ .



- 65.** Uma esfera de peso  $W$  está em repouso, presa entre dois planos inclinados de ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , como na figura.  
a) Suponha que não haja atrito e determine as forças que os planos exercem sobre a esfera.  
b) Que mudança haveria, em princípio, se o atrito fosse levado em consideração?



- 66.** Duas esferas lisas, idênticas e uniformes, cada uma de peso  $W$ , repousam, como mostra a figura, no fundo de um recipiente retangular, fixo. Determine, em termos de  $W$ , as forças atuantes sobre as esferas.  
a) pelas superfícies do recipiente;  
b) por uma sobre a outra se a linha que une os centros das esferas forma um ângulo de  $45^\circ$  com a horizontal.

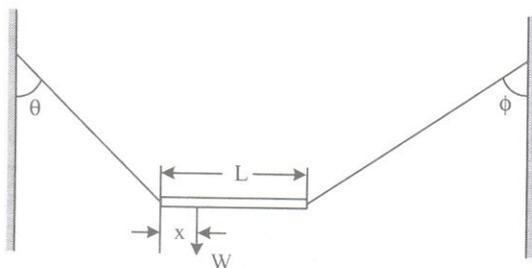


**67.** Uma corrente flexível de peso  $W$  está suspensa entre dois pontos fixos A e B, de mesmo nível, conforme a figura. Determine:

- a força (vetor) exercida pela corrente em cada ponto extremo;
- a tração na corrente, no ponto mais baixo.



**68.** Uma barra não uniforme de peso  $W$  está suspensa, em repouso, na posição horizontal, por duas cordas leves, como indica a figura. O ângulo que uma das cordas forma com a vertical é  $\theta = 30^\circ$  e o que a outra corda forma com a vertical é  $\phi = 60^\circ$ . Se o comprimento  $L$  da barra é 8 m, calcule a distância  $x$  de sua extremidade esquerda ao centro de gravidade.



**69.** Em um disco uniforme de raio  $R$ , faz-se uma seção circular de raio  $r$ , cujo centro está à distância  $R/2$  do centro do disco original. Localize o centro de gravidade do corpo resultante.

**70.** Uma viga é transportada por três homens, um deles segurando-a em uma extremidade e os outros dois suportando-a por uma peça transversal colocada de modo que a carga esteja igualmente dividida entre as três pessoas. Determine em que ponto a peça transversal deve ser colocada. Despreze a massa da peça.

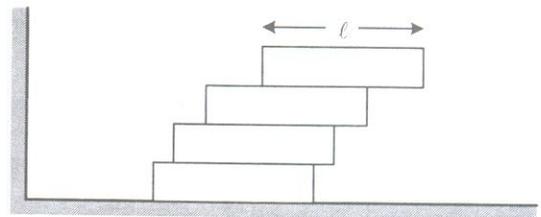
**71.** Uma régua está apoiada sobre uma parede vertical sem atrito. A outra extremidade da régua está apoiada sobre um piso horizontal. O coeficiente de atrito estático entre a régua e o piso vale 0,5. Calcule o maior ângulo que a régua pode fazer com a parede sem que ocorra o escorregamento da régua.

**72.** Uma balança é constituída de um travessão que pode girar livremente em torno de um eixo que não

passa pelo centro do travessão. Ela é equilibrada por massas desiguais, colocadas em cada um dos pratos, situados nas extremidades do travessão. Quando uma massa desconhecida  $m$  é colocada no prato esquerdo, obtém-se equilíbrio colocando uma massa  $m_1$  no prato direito. Analogamente, quando se põe a massa  $m$  no prato direito, ela é equilibrada por uma massa  $m_2$ , colocada no prato esquerdo. Mostre que  $m = \sqrt{m_1 m_2}$ .

**73.** Quatro tijolos, cada um de comprimento  $\ell$ , estão empilhados um sobre o outro (veja figura), de forma que parte de cada um se projete além do tijolo de baixo. Mostre que para haver equilíbrio, as duas maiores saliências possíveis são:

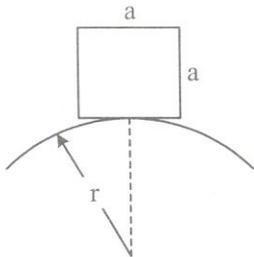
- o tijolo de cima projetando-se além do de baixo de  $\ell/2$ ;
- o segundo tijolo, a partir do topo, projetando-se ao inferior de  $\ell/4$ ;
- o terceiro tijolo, a partir do topo, projetando-se ao inferior de  $\ell/6$ ;



**74.** Colocam-se, uns sobre os outros, vários tijolos uniformes de tal modo que tenham a máxima saliência. Consegue-se isso, colocando o centro de gravidade do tijolo de cima diretamente acima da borda do tijolo abaixo dele, o centro de gravidade dos dois anteriores combinados diretamente acima da borda do terceiro, a contar do topo, e assim por diante.

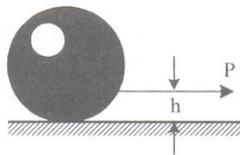
- Justifique este critério de saliência máxima.
- Mostre que, se o processo for continuado para baixo, pode ser obtida uma saliência tão grande quanto quisermos. (Martin Gardner, em um artigo, afirma: "Com 52 cartas de baralho, a primeira colocada de forma que sua extremidade fique alinhada com a borda da mesa, a saliência máxima é um pouco maior que 2,25 comprimentos de carta...")
- Suponha que, em lugar do processo acima, os tijolos uniformes sejam empilhados de forma que a extremidade de um deles fique saliente em relação à borda do que este embaixo, de uma fração constante,  $1/n$  do comprimento  $\ell$  de um tijolo. Qual o número  $N$  de tijolos que podem ser empilhados dessa maneira, antes da pilha cair? Comprove a plausibilidade de sua resposta para  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = \infty$ .

**75.** Um cubo de densidade uniforme e aresta  $a$  é equilibrado sobre uma superfície cilíndrica, de raio  $r$ , como mostra a figura. Mostre que o critério para estabelecer o equilíbrio estável do cubo, supondo que o atrito seja suficiente para evitar o deslizamento, é  $r > a/2$ .

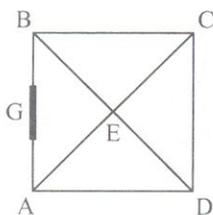


**76.** Uma esfera homogênea de raio  $r$  e peso  $W$  escorrega sobre o assoalho, sob a ação de uma força horizontal constante,  $P$ , aplicada como se mostra na figura.

- Mostre que, sendo  $\mu$  o coeficiente de atrito entre a esfera e o assoalho, a altura  $h$  é dada por  $h = r \cdot (1 - \mu \cdot W/P)$ .
- Mostre que a esfera não está em equilíbrio de translação nessas circunstâncias. Há algum ponto em torno do qual a esfera esteja em equilíbrio rotacional?
- A esfera pode estar em equilíbrio tanto rotacional como translacional, mediante uma escolha diferente de  $h$ ? E variando a direção de  $P$ ? Explique.



**77.** Por meio de um esticador  $G$ , uma força de tração  $T$  é produzida na barra  $AB$  da estrutura quadrada  $ABCD$ , como indica a figura. Determine as forças produzidas nas outras barras. As diagonais  $AC$  e  $BD$  cruzam-se em  $E$  sem se tocar. Mostre que considerações de simetria podem levar a uma considerável simplificação nesse problema e em outros semelhantes.

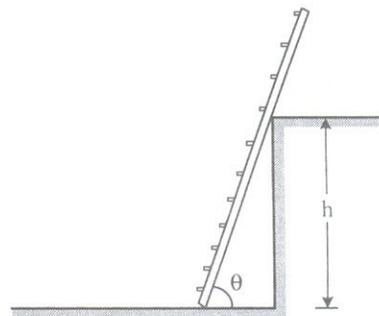


**78.** Uma escada está apoiada sobre uma parede vertical sem atrito. A outra extremidade da escada está apoiada sobre o piso horizontal. O coeficiente de

atrito estático entre o piso e a base da escada vale  $0,4$ . Um homem, cuja massa é igual a 4 vezes a da escada deve chegar até a extremidade superior da escada sem que ela escorregue. Calcule o valor do ângulo limite entre a escada e a parede para que isto seja possível.

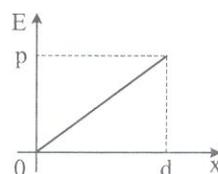
**79.** Uma escada de  $40 \text{ kg}$  e de comprimento igual a  $8 \text{ m}$  repousa no solo e sobre um rolamento (não mostrado), sem atrito, no topo de um muro de altura  $h = 3 \text{ m}$  (veja figura). O centro de gravidade da escada coincide com o seu centro. Ela permanece em equilíbrio para qualquer valor do ângulo  $\theta \geq 70^\circ$ , mas escorrega se  $\theta < 70^\circ$ .

- Desenhe um diagrama que mostre todas as forças que atuam na escada.
- Ache o coeficiente de atrito estático entre a prancha e o solo.



**Gabarito**

- a)  $60 \text{ N}$ ; b)  $100 \text{ N}$ ; c)  $80 \text{ N}$ ; d) compressão
- $\alpha = 60^\circ$  e  $N = (80 - 30\sqrt{3}) \text{ kgf}$
- $T = 400 \text{ kgf}$ ;  $C_x = 200\sqrt{3} \text{ kgf}$  e  $C_y = 20 \text{ kgf}$
- $\sqrt{3}$
- $T_A = P(\sqrt{3} - 1)$  e  $T_B = P(2\sqrt{3} - 3)$
- a)  $468,75 \text{ kgf}$ ; b)  $625 \text{ kgf}$
- $800 \text{ N}$
- Sobre a reta que une os pontos médios dos dois lados e a  $20 \text{ cm}$  do lado menor.
- $42 \text{ N}$  e  $0,48 \text{ m}$
- $R_A = 275 \text{ N}$  e  $R_B = 225 \text{ N}$
- $R_A = 1.000 \text{ N}$  e  $R_B = 1.800 \text{ N}$
- $10,0 \text{ N}$
- Ponte:  $20 \text{ N}$  e Automóvel:  $8 \text{ N}$
- $120 \text{ g}$
- $2\sqrt{7} \text{ m}$
- Respectivamente:  $80 \text{ kgf}$ ,  $86 \text{ kgf}$  e  $48 \text{ kgf}$
- 





18. a)  $950\sqrt{3}$  N; b)  $A_x = 950\sqrt{3}$  N e  $A_y = 1.000$  N

19.  $3/7$

20. a) 250 N

b) 125 N, para a direita

c)  $25\sqrt{3}$  N, para baixo

21. 500 kgf

22.  $\frac{13\sqrt{3}}{54}$

23. 200 kgf;  $30^\circ$

24. 10 cm

25.  $l/12$

26. a) 50 kgf.m; b)  $-250$  kgf.m; c) 150 kgf.m; d) zero

27. (3,8; 2,2) m

28. a) 185 N

b) 465 para cima

c)  $F = \frac{185\sqrt{3}}{2}$  N; Articulação:  $A_x = \frac{185\sqrt{3}}{4}$  N

para a direita e  $A_y = 511,25$  N

29. a) 450 N; b)  $300\sqrt{3}$  N; c) menor

30. a)  $\arctg 0,5$ ; b) 0,5

31. 45 N para fora, em cima; 45 N para dentro, em baixo

32. de 2,5 m a 4 m do pintor A

34.  $F = \frac{M.g.\sqrt{2Rh - h^2}}{R - h}$

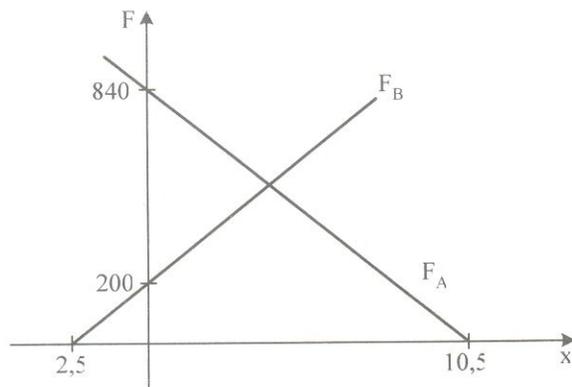
35.  $\mu = \frac{L.\cos\theta.\sen\theta}{2.(L - d) - L.\sen^2\theta}$

36. a) 1.000 N a 0,8 m da extremidade de 600 N

b) 800 N a 0,75 m da extremidade de 600 N

37. a 1 m da outra extremidade

38. a)



b) 2,5 m

c)  $\frac{75}{26}$  m

39.  $T = 125$  N,  $A_x = 100$  N para a direita,  $A_y = 25$  N para cima

40. a)  $T = 2.000$  N,  $A_x = 1.000\sqrt{3}$  N e  $A_y = 0$

b)  $T = 1.000\sqrt{3}$  N,  $A_x = 1.000\sqrt{3}$  N e  $A_y = 1.000$  N

c)  $T = 500(3\sqrt{2} - \sqrt{6})$  N,  $A_x = 500(3 - \sqrt{3})$  N e  $A_y = 500(\sqrt{3} - 1)$

d)  $T = 1.000(\sqrt{3} + 1)$  N,  $A_x = 500(\sqrt{3} + 3)$  N e  $A_y = 500(\sqrt{3} + 3)$  N

41.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$  m

42.  $500(\sqrt{3} + 1)$  N

43. a) x: 30 N para a esquerda, y: 50 N para cima;

b)  $5/3$

c)  $10\sqrt{34}$  N

d) 1,0 m da extremidade direita

44. a) 60 N; b)  $\arccos 0,6$

45. a) 270 N; b) 120 N

46. a) 326 N e 374 N

b) 224 N

c) em x: 224 N, em y: 74 N

d) 864 N

47. a) 480 N; b) 195 N; c) 5,5 m

48. a)  $\arctg(0,3) \cong 16,7^\circ$

b)  $\frac{1}{0,15.\cot g 10^\circ + 0,5} - 0,5$  m

c)  $3.1g 10^\circ$

49. 500 N

50. a)  $800(2 - \sqrt{3})$  N

b)  $400(2\sqrt{3} - 3)$  N

c)  $400(2 - \sqrt{3})$  N

51. a) 10 N

b) 7,5 cm da extremidade direita; 31,25 cm

52. a) A: 100 N, B: 700 N; b) 2 m

53. a) 32,5 N e 19,5 N; b) 2 m; c) 32,5 N, 45,5 N e 0,4 m

54.  $\vec{R} = 9\hat{i} - 20\hat{j}$ , aplicada sobre a reta:  $20x + 9y + 38 = 0$

55.  $25(\sqrt{6} - \sqrt{2})$  kgf;  $50(\sqrt{3} - 1)$  kgf

56.  $W.\sec \alpha$  e  $W.\tg \alpha$

57. a)  $50\sqrt{2}$  kgf, 50 kgf, 10 kgf

b)  $50\sqrt{3}$  kgf,  $25\sqrt{3}$  kgf, 15 kgf

58. 600 N a 166 cm à direita de A

59. 0,6 m

60. a) A = 6.690 kgf, B = 7.010 kgf

b) A = 6.690 + 370.t, B = 7.010 - 370t, para  $0 \leq t \leq 3$  s;

A = 5.640 + 220.t, B = 6.560 - 220t, para  $3 \leq t < 6$  s;

A = 5.240 + 120.t, B = 5.960 - 120t, para  $6 \leq t < 8$  s;

A = 5.000, B = 5.000, para  $t \geq 8$  s.



61.  $\ell < 2r$ : nos dois pontos de contato temos  
 $N = \frac{P}{2\text{sen}\alpha}$ , com  $\cos\alpha = \frac{\ell}{2r}$ , onde  $\alpha$  é o ângulo formado pela normal com a horizontal  
 $\ell > 2r$ : no contato com a quina:  $N = \frac{W.\ell}{4r}$ , no contato com o hemisfério:  $N = W.\text{tg}\alpha$ , com  $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} = \frac{\ell}{4r}$ , onde  $\alpha$  é o ângulo formado pela vara com a horizontal
62. plano direito:  $W.\cos \alpha$ , plano esquerdo:  $W.\text{sen } \alpha$ ;  
 $\phi = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$
63. plano inclinado:  $\frac{W.(3\sqrt{2} - \sqrt{6})}{2}$   
 plano lateral:  $\frac{W.(3 - \sqrt{3})}{2}$   
 plano inferior:  $\frac{W.(\sqrt{3} + 1)}{2}$
64. a)  $F_1 = F_3 = \frac{20\sqrt{3}}{3}$  kgf,  $F_2 = 40$  kgf  
 b)  $F_1 = F_3 = \frac{20}{0,3 + \sqrt{3}}$  kgf,  $F_2 = 40 - \frac{6}{0,3 + \sqrt{3}}$  kgf
65. a)  $F_1 = \frac{W.\text{sen}\theta_2}{\text{sen}(\theta_2 - \theta_1)}$ ;  $F_2 = \frac{W.\text{sen}\theta_1}{\text{sen}(\theta_2 - \theta_1)}$   
 b) nenhuma
66. a) lateral esquerda:  $W$ , lateral direita:  $W$ , fundo:  $2W$   
 b)  $W\sqrt{2}$
67. a)  $\frac{W}{2.\text{sen}\theta}$ , tangencialmente à corrente  
 b)  $\frac{W.\cot g\theta}{2}$
68.  $2\sqrt{3}$  m
69. Ao longo da reta que une o centro do buraco ao centro do disco, no ponto  $x_{\text{cm}} = -\frac{R.r^2}{2.(R^2 - r^2)}$
70. A uma distância de  $3/4$  do comprimento da viga do primeiro homem.
71.  $\theta_{\text{máx}} = 45^\circ$
74. c)  $N \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$
76. b) o centro  
 c) só com uma inclinação  $\alpha$  dada pela equação  $P.(\cos\alpha + \mu.\text{sen}\alpha) = \mu.W$  e passando pelo ponto de contato da esfera com o solo.
77. Barras AD, BC e DC: tração de módulo  $T$ ; barras AC e BD: compressão de módulo  $T\sqrt{2}$

78.  $\theta_{\text{máx}} = \text{arctg}(4/9)$

79.  $\frac{3}{6 - \sqrt{3}}$

Neste complemento trataremos de importantes assuntos relacionados à ondulatória, todos sobre ondas eletromagnéticas, principalmente a luz.

Iniciaremos discutindo a polarização de ondas eletromagnéticas e os polaróides, discutindo sua ação para ondas linearmente polarizadas e circularmente polarizadas.

Na seqüência trataremos da interferência da luz em películas delgadas, tais como bolhas de sabão. Ainda trataremos do fenômeno da difração em fenda simples, fendas circulares e em redes de difração. Descreveremos brevemente o critério de resolução de Rayleigh.

Finalmente discutiremos o fenômeno do espalhamento da luz. Em anexo você encontrará uma tabela com a utilização do espectro eletromagnético em função da freqüência.

### Polarização

A polarização é uma característica de ondas transversais, pois está relacionada com o plano que contém a vibração, chamado plano de polarização. Desta forma, não faz sentido falar de polarização de ondas longitudinais. Na figura a seguir, observamos a propagação de um pulso transversal em uma corda.

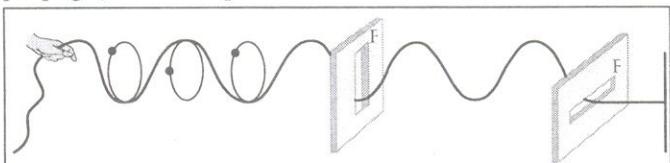


Fig.01 - Polarizador.

No lado direito observa-se uma placa com uma fenda, tal que somente uma polarização (plano de vibração) é permitida passar para o outro lado. Esta placa é denominada polarizador.

Note que se o plano de polarização for perpendicular ao plano de polarização do polarizador, nenhuma componente de campo irá passar para o outro lado do polarizador.

Através de experiências de interferência e difração não é possível demonstrar que ondas eletromagnéticas são transversais, pois estes fenômenos também ocorrem com ondas longitudinais.

Porém, em 1817, Thomas Young analisando resultados experimentais de Dominique-François Arago e Augustin Jean Fresnel, os quais obtiveram dois feixes coerentes e distintos ao incidirem um feixe em um cristal de calcita, propôs que estes feixes não formavam franjas de interferência pois possuíam polarizações distintas. Esta proposição alterou a percepção da comunidade científica da época, que imaginava a luz como oscilação longitudinal.

### Polarização de ondas eletromagnéticas

A análise da polarização de ondas eletromagnéticas é feita levando-se em consideração o plano de vibração do campo elétrico.

De acordo com esta análise, podemos definir dois tipos de polarizações muito importantes: Ondas linearmente polarizadas e ondas circularmente polarizadas.

### Ondas eletromagnéticas linearmente polarizadas

Um caso importante de polarização é aquela onde a onda eletromagnética encontra-se linearmente polarizada, também chamada de plano-polarizada. Neste caso, o plano de vibração do campo elétrico é único, conforme se observa na figura abaixo:

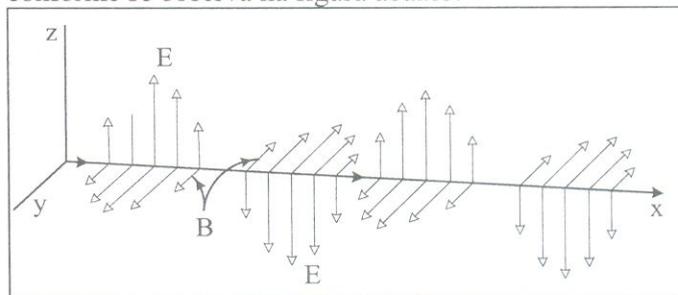


Fig.02 - Onda linearmente polarizada.

E ele pode ser escrito, considerando a propagação na direção x, como:

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega.t - k.x)\hat{z} \quad (1)$$

Que é a equação de onda unidimensional.

### Ondas eletromagnéticas circularmente polarizadas

Outro caso importante de polarização é aquela onde a onda eletromagnética encontra-se circularmente polarizada. Neste caso o campo elétrico não se encontra em um único plano de vibração. Se analisarmos um ponto fixo ao longo da onda, verificaremos que a extremidade do campo elétrico descreve um movimento circular uniforme, conforme se observa na figura a baixo:

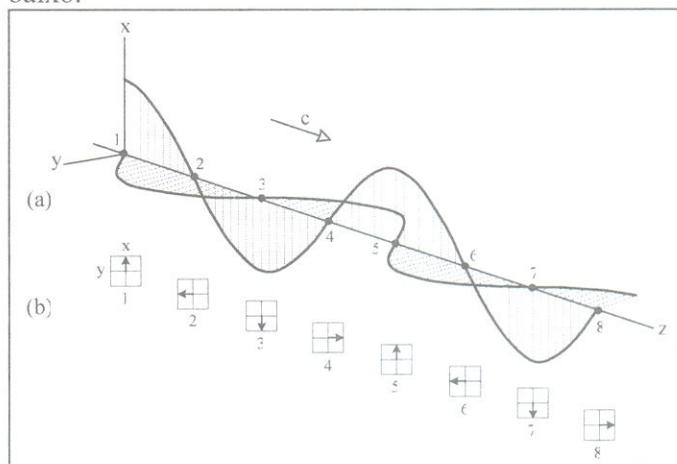


Fig.03 - Onda circularmente polarizada, mostrada como a composição de duas linearmente polarizadas.

Podemos entender uma onda circularmente polarizada como a composição de duas ondas linearmente polarizadas defasadas de 90° entre si, ou

seja, uma figura de Lissajous da composição de dois MHS perpendiculares, de mesma amplitude e defasados de  $90^\circ$ . Assim, podemos escrever uma onda circularmente polarizada, propagando-se na direção  $x$ , como:

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega.t - k.z)\hat{x} + E_0 \sin(\omega.t - k.z)\hat{y} \quad (2)$$

**Observação:** Caso as amplitudes das componentes ortogonais não seja iguais, temos o caso de onda elipticamente polarizada.

#### Intensidade de ondas eletromagnéticas

As ondas eletromagnéticas, como qualquer outra onda transporta energia. A frente de onda pode ser plana, esférica, de tal forma que tem-se uma intensidade associada a esta frente de onda, tal que conforme visto anteriormente:

$$I = \frac{\text{Potência}}{\text{Área}} \quad (\text{W/m}^2) \quad (3)$$

Esta intensidade pode ser determinada fazendo-se uma analogia. A potencia  $P$  dissipada em uma resistência  $R$  pode ser escrita como:

$$P = \frac{U^2}{R} = R.i^2 \quad (\text{W}) \quad (4)$$

Em uma onda eletromagnética, a energia está distribuída no campo elétrico e no campo magnético. Da mesma forma a potência dissipada na resistência depende do produto da tensão pela corrente elétrica. Assim, pensando-se na tensão elétrica associada ao campo elétrico, podemos escrever que a potência de uma onda eletromagnética é proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico  $E$ , tal que:

$$P \sim E^2 \quad (5)$$

Como a intensidade  $I$  de uma onda eletromagnética é proporcional à sua potência, podemos finalmente escrever que:

$$I \sim E^2 \quad (6)$$

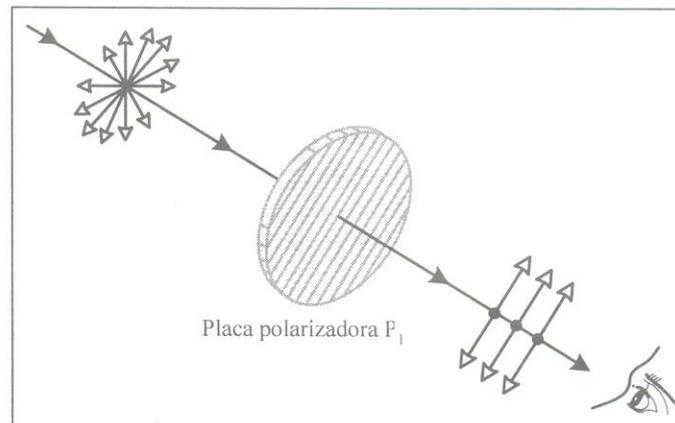
A conclusão que se chega é que a intensidade de uma onda eletromagnética é proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico.

Se a onda eletromagnética estiver na faixa do visível, então a intensidade estará associada ao brilho. Tão maior a intensidade, maior o brilho e vice versa. A título de exemplo, se multiplicarmos a amplitude do campo elétrico por dois, a intensidade ficará quatro vezes maior.

#### Polaróides

Polaróides são dispositivos polarizadores para ondas eletromagnéticas, ou seja, eles permitem que somente a componente de campo paralela ao seu plano

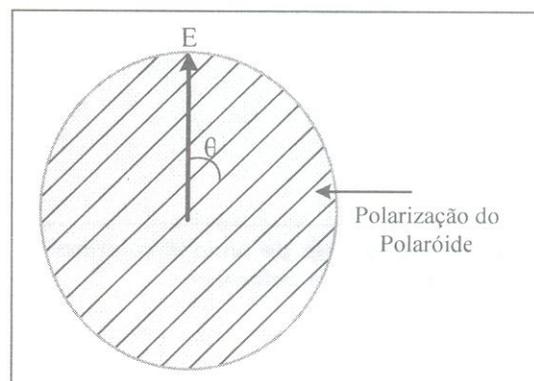
de polarização passe por ele. A importante conclusão deste parágrafo é que uma onda com uma polarização qualquer ao atingir um polaróide, sairá dele *linearmente polarizada*, de tal forma que esta onda linearmente polarizada tem exatamente a mesma polarização do polaróide, conforme a figura abaixo:



**Fig.04 - Polarização linear à saída do polaróide.**

#### Polaróides e ondas linearmente polarizadas

O nosso problema é agora determinar qual a intensidade na saída de um polaróide quando nele incide uma onda eletromagnética, linearmente polarizada, de intensidade  $I_0$  de tal forma que a sua polarização faz um ângulo  $\theta$  com o plano de polarização do polaróide, conforme a figura abaixo:



**Fig.05 - Incidência de uma onda linearmente polarizada em um polaróide.**

Conforme observado na definição inicial de polaróides, ele só permitirá a passagem da componente do campo elétrico paralela ao seu plano de polarização, conforme na figura 4.

Matematicamente, podemos escrever que a intensidade incidente no polaróide  $I_0$  é proporcional ao quadrado do campo incidente  $E_0$ , tal que:

$$I_0 \sim E_0^2 \quad (7)$$

À saída do polaróide tem-se a componente de campo paralela ao polaróide dada por:

$$E = E_0 \cos \theta \quad (8)$$

Portanto, a intensidade à saída do polaróide será proporcional à:

$$I \sim (E_0 \cos \theta)^2 = E_0^2 \cos^2 \theta \quad (9)$$

Comparando-se as equações (7) e (9), tem-se finalmente que:

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad (10)$$

A expressão acima, também conhecida como fórmula de Malus, nos diz que uma onda linearmente polarizada, de intensidade  $I_0$ , ao incidir em um polaróide, terá uma intensidade  $I$  à saída do mesmo proporcional ao quadrado do cosseno do ângulo entre a sua polarização e o plano de polarização do polaróide.

#### Polaróides e ondas circularmente polarizadas

Um outro caso importante de estudo de polaróides é quando sobre ele incide perpendicularmente uma onda circularmente polarizada, como se observa na figura abaixo:

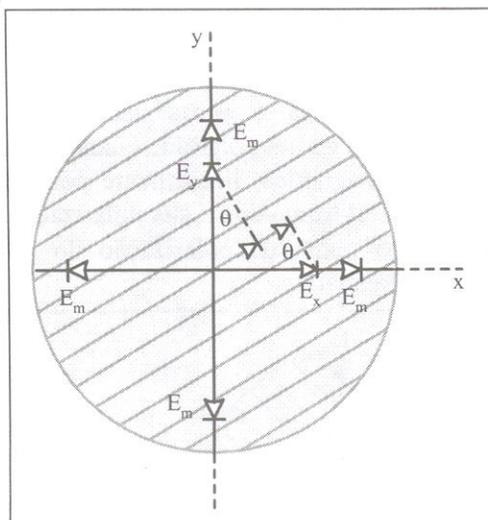


Fig.06 - Incidência de onda circularmente polarizada em um polaróide.

Da mesma forma que na onda linearmente polarizada, somente as componentes de campo paralelas ao plano de polarização do polaróide irão passar por ele. Para que possamos fazer os cálculos necessários, observemos a figura 6.

Neste caso, adotando-se a referência no polaróide, temos que o campo elétrico da onda incidente pode ser escrito em funções das componentes  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$ , tal que:

$$E_{0x} = E_0 \cos \omega t; \quad E_{0y} = E_0 \sin \omega t \quad (11)$$

A amplitude do campo elétrico é então dada pela soma vetorial das componentes  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$ , portanto:

$$E_{\text{incidente}} = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} = \sqrt{E_0^2 \cos^2 \omega t + E_0^2 \sin^2 \omega t} = E_0 \quad (12)$$

Portanto, a intensidade incidente, sendo proporcional ao quadrado do campo elétrico incidente pode ser escrita como:

$$I_0 \sim E_0^2 \quad (13)$$

Estando o eixo x da referência fazendo um ângulo  $\theta$  com o plano de polarização do polaróide, temos que o campo na saída do polaróide pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} E_{\text{saída}} &= E_{0x} \cos \theta + E_{0y} \sin \theta = \\ E_0 \cos \omega t \cos \theta + E_0 \sin \omega t \sin \theta &= \quad (14) \\ E_0 \cos(\omega t - \theta) & \end{aligned}$$

A intensidade instantânea na saída é proporcional ao quadrado do campo elétrico na saída, ou seja:

$$I \sim E_0^2 \cdot \cos^2(\omega t - \theta) \quad (15)$$

A intensidade média é calculada, tomando-se um período  $T$  da onda, tal que:

$$I \sim \frac{1}{T} \int_0^T E_0^2 \cos^2(\omega t - \theta) dt = \frac{E_0^2}{2} \quad (16)$$

Combinando-se as equações (13) e (16), podemos finalmente escrever que a intensidade  $I$  a saída de um polaróide, quando uma onda de intensidade  $I_0$  circularmente polarizada incide sobre ele é dada por:

$$I = \frac{I_0}{2} \quad (17)$$

A equação acima nos mostra que quando uma onda de intensidade  $I_0$  incide normalmente sobre um polaróide, teremos na sua saída uma onda linearmente polarizada, de intensidade  $I_0/2$ , cujo plano de polarização coincide com o plano de polarização do polaróide.

Este resultado também é válido para ondas não polarizadas.

#### Polarização por reflexão – ângulo de Brewster

Além dos polaróides, existem outras maneiras de deixar ondas eletromagnéticas linearmente polarizadas, uma delas é a polarização por reflexão.

Na figura a seguir, temos uma onda não polarizada (contendo componentes perpendiculares de polarização) incidente na superfície de separação de dois meios com um ângulo  $\theta_B$ , denominado ângulo de Brewster.

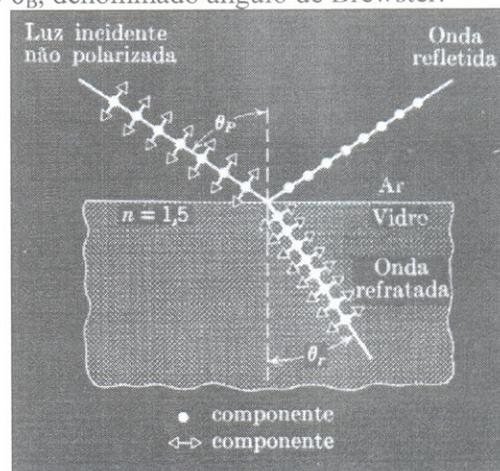


Fig.07 - Incidência de uma onda não polarizada no ângulo de Brewster

Observe que nesta figura, a onda refletida é linearmente polarizada. Isto ocorre porque quando o ângulo de incidência coincide com o ângulo de Brewster, uma das polarizações é totalmente transmitida, assim, a parcela que reflete conterá uma única polarização, sendo portanto linearmente polarizada.

O ângulo de Brewster  $\theta_B$  é o ângulo para o qual o raio refratado e o refletido fazem um ângulo de  $90^\circ$ , fica como exercício provar que:

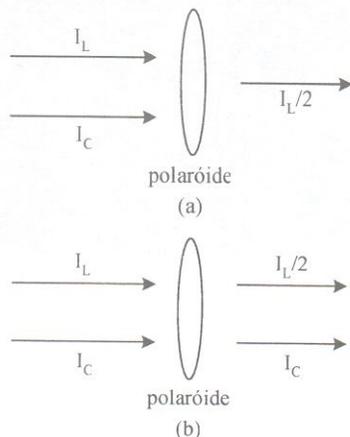
$$\theta_B = \arctg\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (18)$$

Onde  $n_2$  e  $n_1$  são os índices de refração dos meios de refração e incidência respectivamente.

**Exemplo 1:**

Duas ondas, uma linearmente polarizada e a outra circularmente polarizada incidem normalmente em um polaróide. Rotacionando-se o polaróide em torno do seu eixo, observa-se que a relação entre a maior e a menor intensidades observadas é igual a 7. Determine a relação entre as intensidades das ondas linearmente polarizada ( $I_L$ ) e circularmente polarizada ( $I_C$ ).

**Resolução:**



Na situação (a) corresponde a intensidade mínima, a qual acontece quando a polarização da onda linearmente polarizada incidente é perpendicular ao plano de polarização do polaróide. Já na situação (b) temos a situação de máxima intensidade que corresponde à situação que acontece quando a polarização da onda linearmente polarizada coincide com o plano de polarização do polaróide (rotação de  $90^\circ$  em relação a situação anterior).

Observe que independentemente da posição do polaróide, metade da intensidade da onda circularmente polarizada está sempre presente à saída do polaróide.

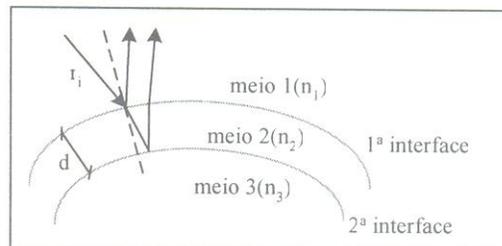
Assim, de acordo com os dados do problema:

$$\frac{I_{\text{Máximo}}}{I_{\text{Mínimo}}} = \frac{I_L + \frac{I_C}{2}}{\frac{I_C}{2}} = 7 \rightarrow I_L = 3 \cdot I_C \rightarrow \frac{I_L}{I_C} = 3$$

**Interferência em películas delgadas**

Dando prosseguimento ao nosso estudo teórico complementar de ondulatória, passaremos a tratar de fenômenos de interferência em películas delgadas, tais como bolhas de sabão, películas de óleo sobre a água.

O princípio físico para o entendimento do fenômeno é bem simples. Observe a figura abaixo:



**Fig.08 - Esquema genérico de interferência em película delgada.**

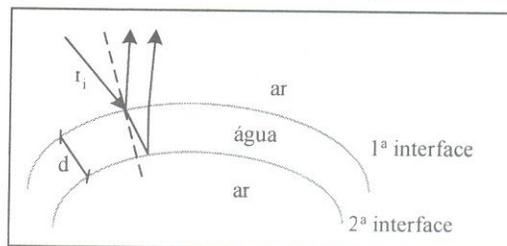
Na figura acima temos o meio 1, meio 2 e meio 3, cada um com os seus índices de refração. A incidência do raio  $r_i$  na película é normal, o desenho foi feito com uma pequena inclinação para facilitar o entendimento.

Ao incidir o raio  $r_i$  na interface 1, temos uma reflexão, que poderá ser com ou sem inversão de fase, dependendo da relação entre os índices de refração dos meios 1 e 2. O raio  $r_i$  também tem uma parcela que se refrata e se propaga no meio 2, quando então encontra a interface 2, sofrendo uma reflexão, que também poderá ser com ou sem inversão de fase. O raio refletido na segunda interface é então refratado de volta para o meio 1, interferindo construtivamente ou destrutivamente com o raio refletido na primeira interface. Sendo a incidência normal, a diferença de caminho entre os dois raios (refletido na primeira interface e o refratado) é igual a duas vezes a espessura da película. É importante ressaltar que tais películas devem ser bastante finas, a fim de que tenhamos a coerência entre os dois raios.

Resta saber agora, em que condições teremos interferência construtiva e interferência destrutiva.

**Interferência em película delgada com inversão de fase em somente uma interface**

Este é o caso das bolhas de sabão, no qual a película, feita basicamente de água, tem o ar nas suas duas interfaces, conforme mostra a figura abaixo:



**Fig.09 - Esquema de interferência em película delgada ar-água-ar.**

Neste caso, o raio incidente  $r_i$ , vindo do ar, encontra a interface 1(ar-água), neste caso ele se reflete com inversão de fase, pois o ar é menos refringente que a água. O raio  $r_i$  também se refrata e o raio refratado encontra a interface 2 (água-ar), refletindo-se sem inversão de fase, pelo mesmo motivo anterior.

Assim, tem-se que somente um dos raios sofreu inversão de fase, agindo como duas fontes em oposição de fase. Assim sendo, podemos escrever que:

$$\frac{2 \cdot d}{\lambda_n} = n_{\text{par}} \cdot \frac{\lambda_n}{2} \rightarrow \text{Interferência destrutiva; } n_{\text{par}} = 0, 2, 4, 6, \dots \quad (19)$$

$$\frac{2 \cdot d}{\lambda_n} = n_{\text{impar}} \cdot \frac{\lambda_n}{2} \rightarrow \text{Interferência construtiva; } n_{\text{impar}} = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (20)$$

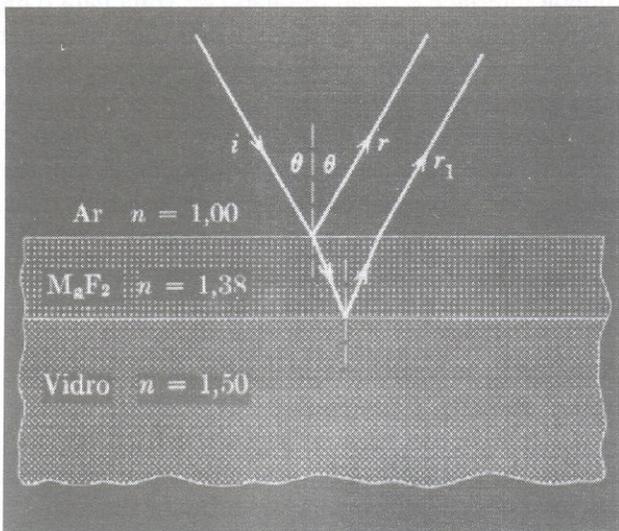
Observe que como a diferença de caminho se dá dentro do meio da película, o comprimento de onda a ser considerado deve ser o comprimento de onda na película ( $\lambda_n$ ), dado por:

$$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n} \quad (21)$$

Onde  $\lambda_0$  é o comprimento de onda no vácuo e  $n$  é o índice de refração do meio da película.

**Interferência em película delgada com inversão de fase em duas interfaces ou sem inversão de fase**

É o caso onde temos, por exemplo, três meios de índices de refração crescentes, tais como ar,  $MgF_2$  e vidro. Observe a figura abaixo:



**Fig.10 - Esquema de interferência em película delgada ar- $MgF_2$ -vidro**

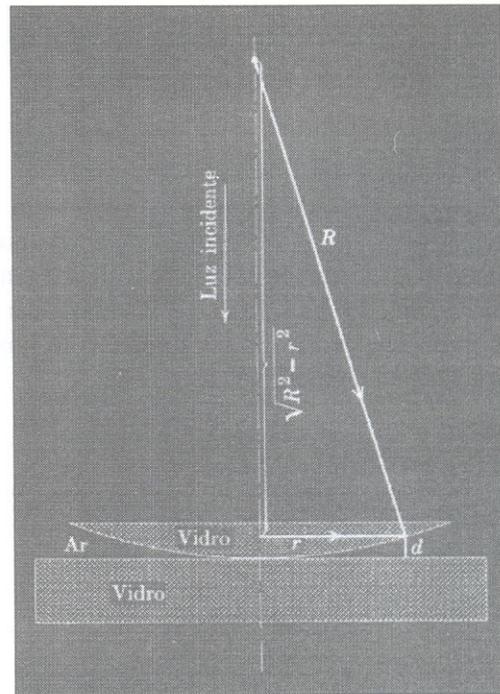
Neste caso, o raio incidente  $r_i$  reflete-se na primeira interface (ar-  $MgF_2$ ) com inversão de fase, devido à relação dos índices de refração. Uma parcela do raio  $r_i$  também refrata-se, indo incidir na interface 2( $MgF_2$ -vidro), onde também ocorre reflexão com inversão de fase. Como houve inversão de fase nas duas interfaces, é como se elas fossem em fase, ou ainda é como se não tivesse havido nenhuma inversão de fase. Nessas condições, podemos escrever que:

$$\frac{2 \cdot d}{\lambda_n} = n_{\text{par}} \cdot \frac{\lambda_n}{2} \rightarrow \text{Interferência construtiva; } n_{\text{par}} = 0, 2, 4, 6, \dots \quad (22)$$

$$\frac{2 \cdot d}{\lambda_n} = n_{\text{impar}} \cdot \frac{\lambda_n}{2} \rightarrow \text{Interferência destrutiva; } n_{\text{impar}} = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (23)$$

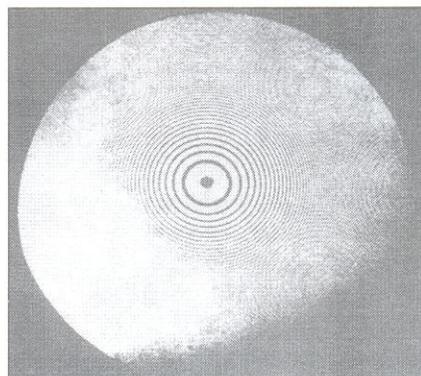
**Discos de Newton**

Um exemplo interessante de películas delgadas são os discos de Newton, a sua montagem é feita colocando-se sobre uma superfície plana de vidro uma lente Planoconvexa, tal como se observa na figura abaixo:



**Fig.11 - Montagem dos discos de Newton.**

Como você pode observar, temos aqui um caso onde a película é feita de ar, que fica entre as duas lâminas de vidro. Assim sendo, temos uma primeira interface (vidro-ar) onde não ocorre inversão de fase na reflexão e uma segunda interface(ar-vidro) onde ocorre inversão de fase na reflexão. Desta forma temos inversão de fase em somente uma interface. Portanto as condições de interferência construtiva e destrutiva são dadas pelas equações (19) e (20). As figuras de interferência podem ser vistas abaixo:



**Fig.12 - Figura de interferência dos discos de Newton.**

Observe que no centro temos uma interferência destrutiva (escuro central), já que à medida que a espessura ( $d$ ) tende a zero, temos que o raio refletido na primeira interface e o na segunda não tem espaço para mudar a sua fase, estando os dois em oposição de fase, ocasionando a interferência destrutiva.

Sucedem-se o primeiro anel claro, o primeiro anel escuro e daí por diante.

### Fendas simples

O nosso próximo tópico é o estudo das fendas simples. O seu tratamento é extremamente simplificado utilizando-se o princípio de Huygens.

Observe a figura abaixo, onde se observa uma fenda de largura  $a$ , sendo iluminada uniformemente por uma frente de onda plana (portanto equifásica, ou de mesma fase):

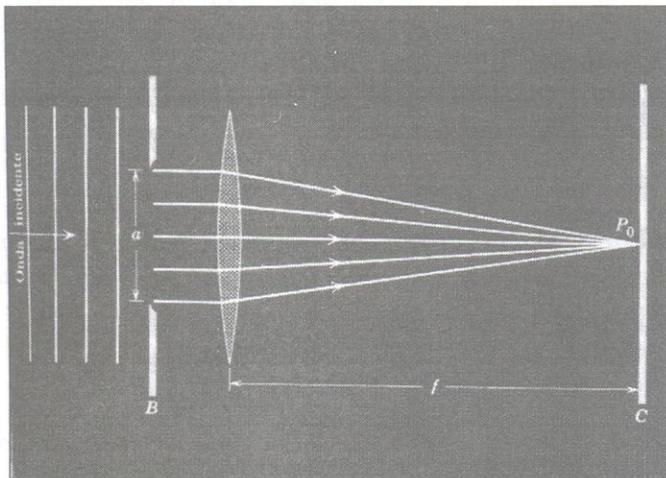


Fig.13 - Frente de onda equifásica atingindo uma fenda de largura  $a$ .

De acordo com o princípio de Huygens todos os pontos da fenda ao serem atingidos, tornam-se irradiadores pontuais, e neste caso, em fase.

Para que se obtenha simetria no problema, tomemos um irradiador central e um mesmo número de irradiadores acima e abaixo deste irradiador central. Inicialmente, tomemos um acima e um abaixo, conforme se observa na figura abaixo:

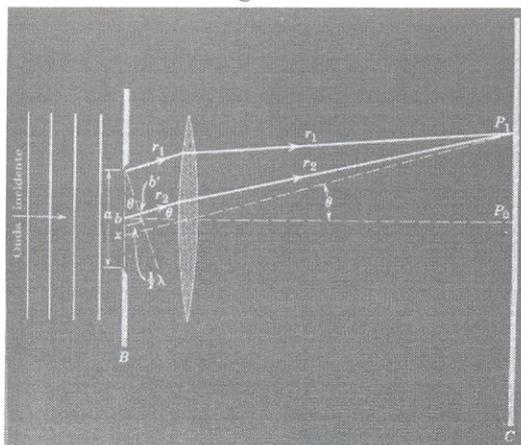


Fig.14 - Análise tomando-se 3 irradiadores.

Os irradiadores, estando em fase e supondo que a distância até o anteparo seja bem maior que a fenda ( $D \gg a$ ), podemos escrever que a diferença de caminho entre o irradiador superior e o central é dado por  $\frac{a}{2} \sin \theta$ . Assim sendo, tem-se que:

Se  $\frac{a}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \rightarrow$  interferência destrutiva, ou seja se  $a \cdot \sin \theta = \lambda$ , temos interferência destrutiva.

No prosseguimento da análise, tomemos dois irradiadores acima e dois abaixo do central, conforme a figura abaixo:

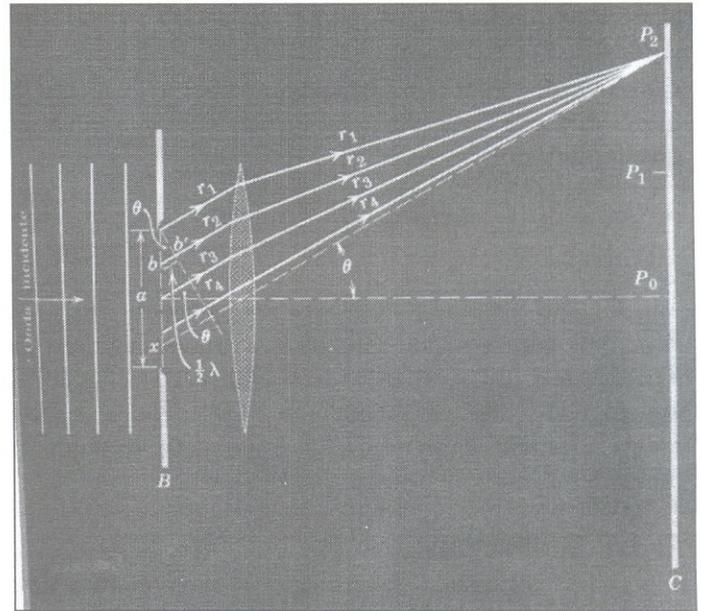


Fig.15 - Análise feita tomando-se 4 irradiadores.

Se  $\frac{a}{4} \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \rightarrow$  interferência destrutiva, ou seja se  $a \cdot \sin \theta = 2 \cdot \lambda$ , temos interferência destrutiva.

Poderíamos fazer para mais casos e a conclusão é que se a diferença de caminho for um número inteiro de meios comprimentos de onda, teremos mínimos, ou seja:

$$a \cdot \sin \theta = m \lambda \rightarrow \text{interferência destrutiva; } m = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (24)$$

Observe que, se esta condição é oposta à condição de interferência destrutiva da experiência de Young.

Note que os máximos (interferência construtiva) ocorrerão em aproximadamente para  $m = 1, 5; 2, 5; 3, 5; \dots$

### Exemplo 2:

Uma fenda de largura  $a$  é iluminada por luz branca. Qual o valor de  $a$ , a fim de que o primeiro mínimo da luz vermelha ( $\lambda = 6500 \text{ \AA}$ ), corresponda a  $\theta = 30^\circ$ ?

### Resolução:

Obtém-se o primeiro mínimo, tomando-se  $m = 1$  na equação 24, tal que:

$$a = \frac{m \cdot \lambda}{\sin \theta} = \frac{1 \cdot 6500}{\sin 30^\circ} = 13000 \text{ \AA}$$

**Exemplo 3:**

No exemplo anterior, qual será o comprimento de onda  $\lambda'$ , da luz, cujo primeiro máximo de difração (sem contar o máximo central) ocorre em  $\theta = 30^\circ$ , coincidindo, portanto, com o primeiro máximo da luz vermelha?

**Resolução:**

Neste caso basta tomar  $m$  igual a aproximadamente  $m = 1,5$ . Tal que, utilizando a equação 24:

$$a \cdot \sin \theta = 1,5 \lambda' \rightarrow \lambda' = \frac{a \cdot \sin \theta}{1,5} = \frac{13500 \cdot 0,5}{1,5} = 4500 \text{ \AA}$$

**Observação:** Esta equação mostra o porquê do fato de que a difração é mais notada quanto menor o tamanho da abertura, pois:

$$\sin \theta = \frac{n_{\text{par}} \cdot \lambda}{2 \cdot a} \quad (25)$$

Quanto menor o tamanho da abertura, maior o ângulo  $\theta$  para que se obtenha o primeiro mínimo de interferência, ou seja, abriu-se o campo de difração. O oposto ocorre quando aumentamos a abertura  $a$ , pois assim fazendo diminuimos o ângulo  $\theta$ , diminuindo também o campo de difração.

**Redes de difração**

Ainda no estudo da difração, iremos agora a uma importante classe de dispositivos utilizados em diversas aplicações, tais como medida de comprimento de onda e análise da estrutura e intensidade dos espectros de raios de emissão de átomos.

Por rede de difração, entenderemos aqui um conjunto de  $N$  fendas paralelas e equidistantes, tal como visto na figura abaixo:

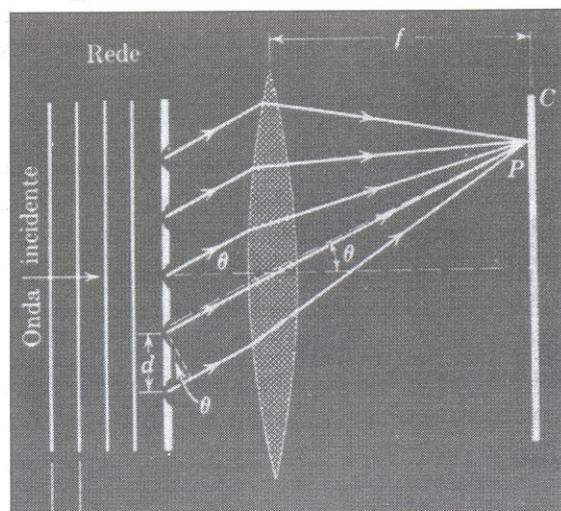


Fig.16 - Rede de difração com fendas separadas por distância  $d$ .

A lente é colocada somente para que se possa observar o campo distante em um anteparo próximo.

Observa-se que para o caso da rede de difração, a condição de máxima interferência construtiva é obtida quando:

$$d \cdot \sin \theta = n_{\text{par}} \frac{\lambda}{2}, \quad n_{\text{par}} = 0, 2, 4, 6, \dots \quad (26)$$

Normalmente, as redes de difração são especificadas em termos do número de linhas por unidade de comprimento. Portanto, para se obter a distância entre estas fendas basta tomar o inverso deste valor.

**Exemplo 4:**

Uma rede de difração de 8000 linhas por polegada é iluminada por luz branca, com incidência normal. Descrever o espectro de difração. Supor que os comprimentos de onda vão desde  $4000 \text{ \AA}$  até  $7000 \text{ \AA}$ .

**Resolução:**

Seja  $l$  igual a  $2,54 \text{ cm}$ , tem-se que o espaçamento entre as fendas é dado por:

$$d = \frac{2,54}{8000} = 31700 \text{ \AA}$$

Para o menor comprimento de onda, tem-se o menor ângulo para o primeiro máximo, tal que para  $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ , tem-se que:

$$\theta = \arcsen \left( \frac{m \cdot \lambda}{d} \right) = \arcsen \left( \frac{1 \cdot 4000}{31700} \right) = 7,3^\circ$$

Para o maior comprimento de onda, tem-se que o ângulo  $\theta$  é dado por:

$$\theta = \arcsen \left( \frac{m \cdot \lambda}{d} \right) = \arcsen \left( \frac{1 \cdot 7000}{31700} \right) = 12,8^\circ$$

**Difração em fendas circulares**

Se observarmos o primeiro mínimo do espectro de difração em uma fenda simples, longa e estreita, verificaremos que ele ocorre quando:

$$a \cdot \sin \theta = 1 \cdot \lambda \rightarrow \sin \theta = \frac{\lambda}{a} \quad (27)$$

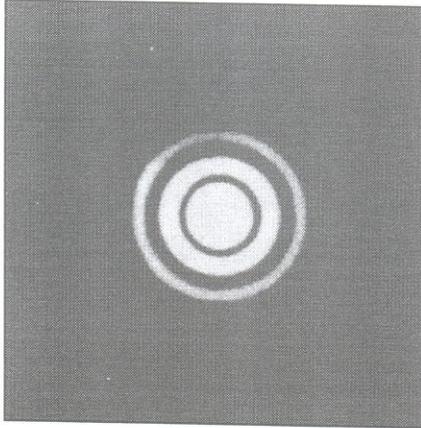
Esse resultado é obtido quando analisamos a fenda sob o ponto de vista do princípio de Huygens e somamos os resultados obtidos para todos os irradiadores pontuais.

Realizando o mesmo procedimento para uma fenda circular, obteremos como resultado que o primeiro mínimo ocorre quando o ângulo  $\theta$  é tal que:

$$\sin \theta = 1,22 \frac{\lambda}{d} \quad (28)$$

Onde  $d$  é o diâmetro da fenda circular e  $\lambda$  é o comprimento de onda da onda incidente.

Desta forma, ao incidirmos uma onda eletromagnética monocromática em uma fenda circular, obteremos o espectro de difração apresentado na figura abaixo:



**Fig.17 - Espectro de difração em fenda circular.**

As imagens de estrelas formadas por lentes são exemplos de figuras de difração em orifícios circulares, onde o diâmetro da lente é o próprio diâmetro da fenda circular. Como se observa na figura acima, teremos um máximo central, circundado de anéis com intensidade

cada vez menor, o anel escuro entre os dois anéis claros é exatamente o primeiro mínimo de difração.

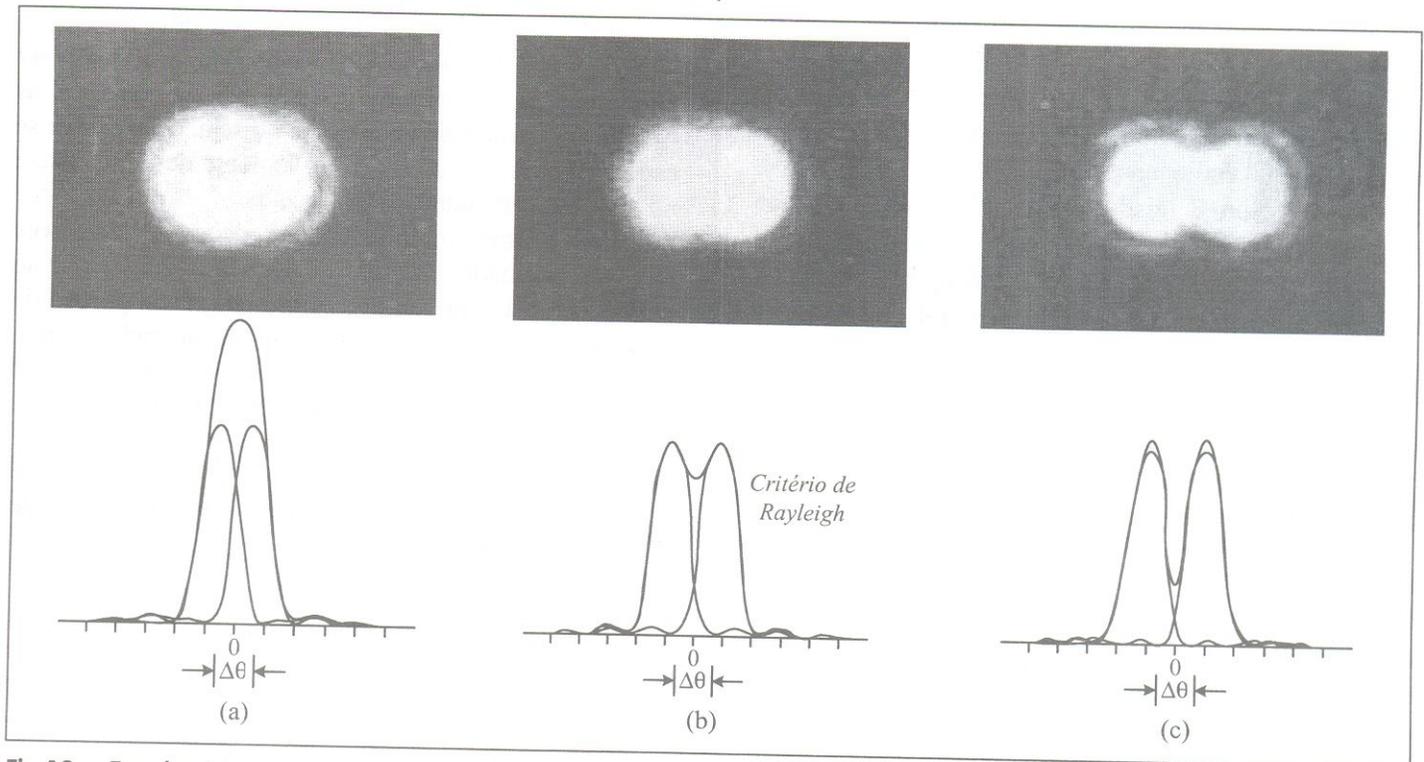
Suponha que dois objetos muito distantes estejam muito próximos um do outro.

A pergunta é: será que eles poderão ser diferenciados através de uma lente do telescópio?

A resposta é depende do afastamento angular um do outro. Este critério é conhecido como critério de resolução de Rayleigh, que nos diz que dois objetos estão resolvidos, ou seja, podem ser diferenciados um do outro se a separação angular ( $\theta_R$ ) entre eles, é igual ao ângulo do primeiro mínimo de difração, tal que:

$$\theta_R = \arcsen\left(\frac{1,22 \cdot \lambda}{d}\right) \quad (29)$$

Se a separação entre os objetos for maior que  $\theta_R$ , eles podem ser resolvidos, se for menor não, conforme se observa na figura abaixo:



**Fig 18. - Estrelas (a) não resolvidas (b) no limite da resolução (c) resolvidas**

**Exemplo 5:**

Uma lente convergente, de 3,0 cm de diâmetro tem uma distância foca  $f$  de 20 cm. (a) que separação angular devem ter dois objetos puntiformes distantes para satisfazerem ao critério de resolução de Rayleigh?

Suponha  $\lambda = 5500 \text{ \AA}$

(b) Qual a distância, entre os centros das figuras de difração existente no plano focal da lente?

**Resolução:**

a) O critério de resolução de Rayleigh (eq. 29) estabelece que:

$$\theta = \frac{1,22 \cdot \lambda}{d} = \frac{1,22 \cdot (5,5 \cdot 10^{-7})}{3 \cdot 10^{-2}} = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

b) Tomando-se o ângulo pequeno, a distância  $x$  entre os máximos é dada por:

$$x = f\theta = 20 \cdot 2,2 \cdot 10^{-5} = 44000 \text{ \AA}$$

## Ressonância

O fenômeno de ressonância ocorre quando um sistema é excitado em uma frequência harmônica de sua frequência natural de oscilação. Este é um fenômeno corriqueiro no nosso dia a dia, algumas vezes desejado, como no caso de sistemas de detecção de ondas eletromagnéticas (circuitos ressonantes), ou quando uma criança impulsiona o corpo a fim de aumentar a amplitude da sua oscilação no balanço. Porém, às vezes o fenômeno é indesejado, como no caso da ponte de Tacoma.

A ressonância acontece quando um corpo que possui uma dada frequência de natural de oscilação é submetido a uma oscilação de mesma frequência. Ele passa então a oscilar espontaneamente, com amplitudes cada vez maiores.

Outros exemplos podem ser dados, tais como uma taça quebrar ao ser exposta a uma nota aguda, próxima a sua frequência de ressonância, ou uma corda de violão começar a vibrar ao se aproximar um diapasão com uma frequência harmônica de sua frequência fundamental de oscilação.

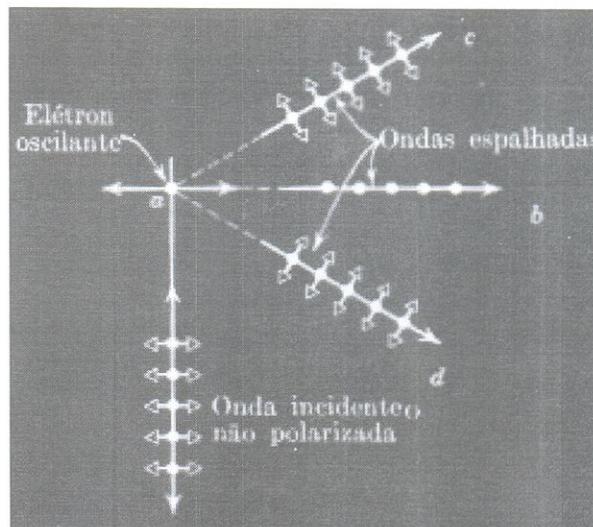
Como exemplo final, tem-se o forno de microondas. Os alimentos, sendo na sua maioria, ricos em água, são colocados no forno de microondas. Quando o forno é ligado, uma onda eletromagnética com frequência na faixa de microondas é lançada dentro do forno, que forma assim uma cavidade ressonante. A frequência da onda eletromagnética é tal que coincide com a frequência natural de ressonância da água. As moléculas de água então aumentam a amplitude de suas oscilações ocasionando um aumento da temperatura.

## Espalhamento

A propagação de ondas eletromagnéticas em sólidos é estudada supondo que a onda propague-se em linha reta. Isto pode ser considerado assim pois, os elétrons oscilam coerentemente em função do campo elétrico da onda incidente, gerando assim uma propagação na mesma direção do feixe incidente. Assim, o espalhamento lateral da onda é cancelado por interferências destrutivas.

Já no caso de um gás, como não há uma estrutura cristalina que permita uma oscilação coerente dos elétrons que compõem o material, é de se esperar que os espalhamentos laterais ocorram, já que eles podem oscilar livremente uns dos outros. Este fenômeno é conhecido como espalhamento da luz.

O fenômeno pode ser observado na figura a seguir:



**Figura 19 - Modelo para o espalhamento da luz.**

Observe que para o observador que se encontra em b, a luz é linearmente polarizada. Isto se deve à sua posição relativa em relação à molécula do gás que oscila devido ao campo elétrico da onda incidente.

O espalhamento explica o porque do céu ser azul. O elétron, no interior do átomo, possui uma frequência natural de oscilação que se aproxima do violeta. Ao ser atingido pela luz branca do sol, ele irá espalhar as frequências mais próximas desta, ou seja, o azul. É de se esperar, portanto, que a luz proveniente de um céu sem nuvens, seja parcialmente polarizada.

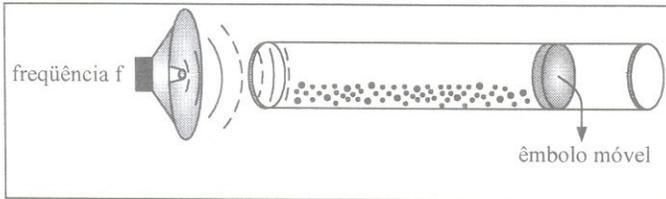
Pelo mesmo motivo, ao entardecer, o sol parece mais avermelhado. Tal fato se explica devido a que ao entardecer, a luz do sol percorre uma grande porção do ar atmosférico. A luz azul é espalhada, pelo motivo anteriormente exposto e o que chega até nós é uma cor bastante avermelhada. A atmosfera age, desta forma, como um filtro para o azul.

## Determinação prática da velocidade de propagação do som

Sabemos que a velocidade do som é dada por  $v = \lambda \cdot f$ , onde  $V$  = velocidade de propagação do som;  $\lambda$  = comprimento da onda sonora no meio de propagação; e  $f$  = frequência da onda sonora (frequência da fonte).

Atualmente, pode-se construir fontes sonoras com frequências conhecidas. Sendo assim, precisaríamos determinar  $\lambda$ , para que pudéssemos determinar a velocidade do som no respectivo meio de propagação. Vejamos três processos onde podemos determinar o comprimento da onda sonora.

Considere um tubo horizontal com partículas de pó em seu interior, como mostrado na figura:

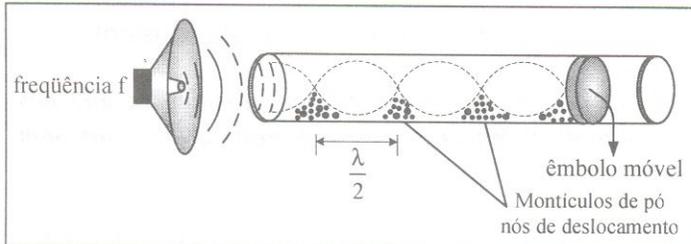


O tubo é provido de um êmbolo móvel, que pode aumentar ou diminuir o comprimento do tubo, nos permitindo assim, mudar as frequências de ressonância do tubo. Assim, se uma fonte sonora emite ondas para o interior do tubo com frequência  $f$  bem definida, as partículas de pó, atingidas pela onda irão vibrar.

Se a frequência emitida pela fonte não for igual a nenhuma das frequências de ressonância do tubo, o movimento das partículas de pó será “desordenado”. Sendo a frequência da fonte sonora fixa, podemos fazer com que essa frequência da fonte seja igual a uma das frequências de ressonância do tubo (alterando comprimento).

Quando isto acontecer, ocorrerá a formação de ondas sonoras estacionárias dentro do tubo.

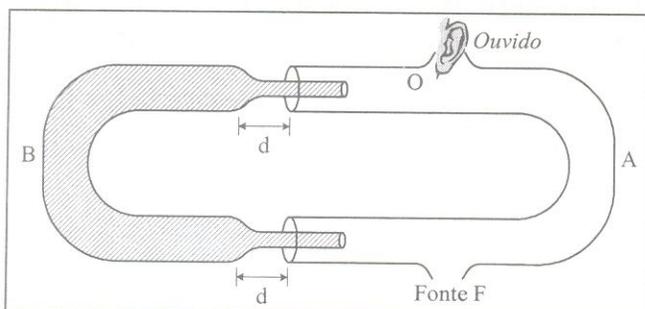
Assim, o pó irá se concentrar nas regiões onde não ocorrem vibrações, ou seja, nos nós de deslocamento. Vejamos uma figura que ilustra esta situação:



Note que sendo conhecida a frequência  $f$  poderemos calcular a velocidade do som no interior do tubo, pois agora temos o valor do comprimento da onda sonora (duas vezes a distância entre dois montículos consecutivos de pó).

O tubo acima recebe a denominação de tubo de KUNDT.

Vejamos agora outro modo de determinarmos a velocidade de propagação do som. Seja o tubo abaixo, denominado tubo de Koenig ou trombone de Quincke:



Veja que o tubo é formado por um ramo B e um ramo A, (ambos com mesmo comprimento) sendo que o ramo B, está acoplado ao ramo A, e que pode se locomover (veja figura).

Quando o ramo B está perfeitamente encaixado ao ramo A, ou seja,  $d = 0$ , as ondas sonoras que por ventura sejam produzidas pela fonte F percorrerão a mesma distância até o ouvinte, ou seja,  $\Delta_{AB} = 0$  (diferença de percurso entre as ondas pelos ramos A e B) implicando, portanto, uma *interferência construtiva*.

Se o ramo B for deslocado de uma distância  $d$ , poderá ocorrer:

Interferência construtiva se:

$$\Delta_{AB} = n \cdot \frac{\lambda}{2}, n = 0, 2, 4, 6, \dots$$

ou interferência destrutiva se:

$$\Delta_{AB} = i \cdot \frac{\lambda}{2}, i = 1, 3, 5, 7, \dots$$

Sendo  $\Delta_{AB} = 2d$  temos: (*constate isso na figura*)

Interferência construtiva se  $2d = n \cdot \frac{\lambda}{2}, n = 0, 2, 4, 6, \dots$

Interferência destrutiva se  $2d = i \cdot \frac{\lambda}{2}, i = 1, 3, 5, 7, \dots$

Onde “ $\lambda$ ” é o comprimento de onda da onda sonora no gás dentro do tubo.

Vejamos com determinar  $\lambda$ :

Entre uma interferência construtiva e uma destrutiva consecutiva teremos:

interferência construtiva  $\Rightarrow \Delta_{AB} = n \cdot \frac{\lambda}{2}, n = 0, 2, 4, 6, \dots$

interferência destrutiva consecutiva  $\Rightarrow$

$$\Delta_{AB} + 2d = \underbrace{(n+1)}_i \cdot \frac{\lambda}{2}, n = 0, 2, 4, \dots$$

Subtraindo as duas equações obteremos:

$$\cancel{\Delta_{AB}} + 2d - (\cancel{\Delta_{AB}}) = (n+1) \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow n \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} - n \cdot \frac{\lambda}{2} \text{ ou,}$$

$$2d = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \boxed{\lambda = 4d}$$

A velocidade do som no gás que existe dentro do tubo, sendo conhecida a frequência da fonte F.

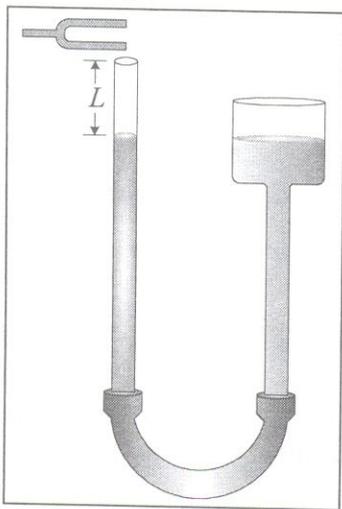
Resta uma última análise: “Quando saberemos o instante entre uma interferência construtiva e uma destrutiva? É simples: quando o ouvinte estiver ouvindo um máximo sonoro é porque está ocorrendo interferência construtiva”.

Para sabermos quando haverá a interferência destrutiva basta deslocarmos o ramo B até que o ouvinte não ouça mais o som emitido por F.

Quando isto acontecer, estará ocorrendo interferência destrutiva. Veja que o valor de “ $d$ ” é medido no próprio trombone.

**Observação:** O ouvinte pode ser substituído pela chama de uma vela. Assim, quando a chama estiver sendo altamente perturbada estará ocorrendo interferência construtiva. Quando a chama da vela permanecer em repouso estará ocorrendo interferência destrutiva.

Para finalizar, vejamos um último processo de determinação prática da velocidade das ondas sonoras. Este último exemplo é geralmente chamado de *Tubo de Ressonância* e tem o aspecto mostrado na figura abaixo:



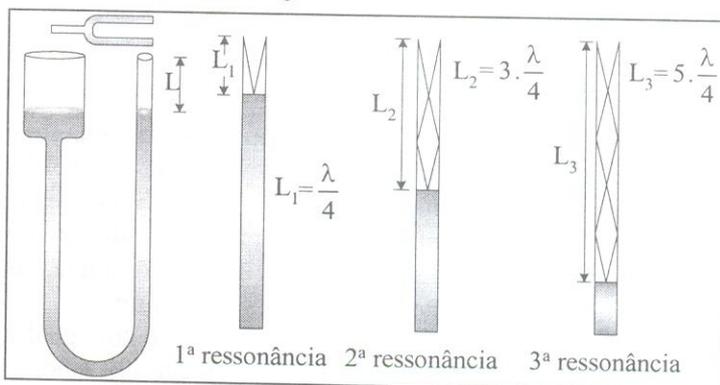
Aparelho para determinar a velocidade do som no ar. O diapasão excita ondas sonoras de frequências conhecidas, na boca do tubo da esquerda. O comprimento deste tubo pode ser ajustado pela movimentação do nível da água. Ocorre ressonância quando o comprimento efetivo do tubo for igual a  $\lambda/4$ ,  $3\lambda/4$ ,  $5\lambda/4$ , etc., onde  $\lambda$  é o comprimento de onda do som.

O tubo de ressonância consiste em um tubo com uma das extremidades livres, e cujo comprimento pode ser alterado pela elevação ou diminuição do nível da água ( $L$  é variável). Já conhecemos os aspectos das ondas sonoras estacionárias em tubos sonoros com uma extremidade livre. Assim, fazendo um diapasão de frequência conhecida vibrar em cima da coluna de ar, poderemos determinar o comprimento das ondas sonoras estacionárias formadas.

Sabemos que a formação de ondas estacionárias ocorre quando a frequência do diapasão coincide com uma das frequências naturais do tubo, ou seja, quando ocorrer ressonância. Na prática, podemos notar a ocorrência da ressonância quando, posto o diapasão a vibrar em cima da coluna de ar, ocorrer um aumento no som emitido pelo tubo. Considerando o comprimento  $L = 0$ , inicialmente temos:

Ao fazermos o diapasão vibrar em cima da coluna de ar de comprimento " $L = 0$ ", não haverá aumento na intensidade do som, ou seja, não ocorrerá ressonância. Fazendo o comprimento  $L$  aumentar, chegará um momento em que detectaremos um reforço no som do

tubo. Assim, terá ocorrido a formação da "primeira" ressonância que constitui o modo fundamental de vibração. Vejamos a figura:



Os comprimentos de ondas estacionárias para os quais ocorre ressonância são do tipo  $1 \cdot \frac{\lambda}{4}$ ,  $3 \cdot \frac{\lambda}{4}$ ,  $5 \cdot \frac{\lambda}{4}$ , ...,  $i \cdot \frac{\lambda}{4}$ , onde  $i = 1, 3, 5, 7, \dots$ , assim, observando-se os esforços do som durante a ressonância podemos calcular o valor de " $\lambda$ " e, portanto, calcular o valor de " $V$ " já que  $f =$  frequência conhecida do diapasão.

### Altura de um som. Intervalo. Escala Musical

**Altura de um som é a qualidade fisiológica que nos permite discernir entre um som mais grave e um som mais agudo.**

A agudez e a gravidade de um som estão intimamente relacionados à frequência da onda sonora. Relação esta que é:

- Quanto maior a frequência  $\Rightarrow$  mais agudo o som
- Quanto menor a frequência  $\Rightarrow$  mais grave o som

De um modo geral, nota-se que a mulher tem uma voz mais estridente (mais aguda) que o homem. Isto é de fato verdade.

Em média, o som emitido pelas mulheres tem frequências no intervalo de 200 Hz a 400 Hz, enquanto que para o homem temos um intervalo que varia de 100 Hz a 200 Hz.

Intervalo entre dois sons de frequência  $f_2$  e  $f_1$ , onde  $f_2 \geq f_1$ , é definido pela relação matemática:

$$\text{intervalo} = \frac{f_2}{f_1} \text{ ou } \overset{\circ}{I} = \frac{f_2}{f_1}$$

+ Quando  $f_2 = f_1 \Rightarrow \overset{\circ}{I} = 1$ , fala-se que o intervalo entre os dois sons é de UNÍSSONO.

Quando  $f_2 = 2f_1 \Rightarrow \overset{\circ}{I} = 2$ , fala-se que o intervalo entre os dois sons é de OITAVA.

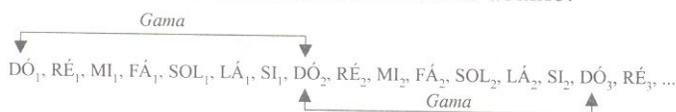
**Escala musical natural, diatônica ou de Zarlin**

A maioria das pessoas conhece as notas musicais DÓ, RE, MI, FÁ, SOL, LÁ, SI. Estas são as setes notas musicais, utilizadas pelo mundo ocidental. Na China, por exemplo, existem apenas cinco notas musicais.

As notas musicais correspondem a determinadas freqüências sonoras, de tal modo que:

$$\begin{matrix} \text{DÓ, RÉ, MI, FÁ, SOL, LÁ, SI} \\ \xrightarrow{\text{aumento da freqüência}} \end{matrix}$$

Olhando o esquema acima, pode-se ter a impressão errônea que existe apenas uma freqüência associada ao DÓ, ao RÉ, ao FÁ, ... . Na verdade, a seqüência das notas musicais seria melhor escrita como abaixo:



Veja que chamamos de **Gama** o conjunto de notas que se inicia em uma nota **DÓ** e termina na nota **DÓ consecutiva**.

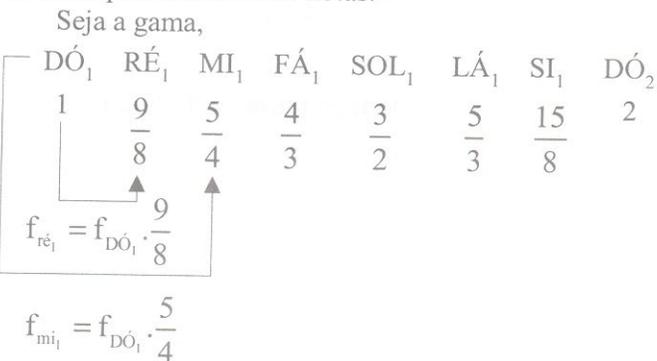
Veja que uma Gama possui 8 notas. Sendo assim, podemos constatar que existem inúmeras notas DÓ (DÓ<sub>1</sub>, DÓ<sub>2</sub>, ... DÓ<sub>n</sub>), valendo o mesmo para as demais notas. Deve-se saber que  $f_{DÓ1} < f_{DÓ2} < \dots < f_{DÓn}$ . Valendo o mesmo para as outras notas.

De uma maneira mais específica,  $f_{DÓ2} = 2 \cdot f_{DÓ1}$ ,  $f_{DÓ3} = 2 f_{DÓ2}$ , ...  $f_{DÓn} = 2 f_{DÓ(n-1)}$ , valendo o mesmo para a freqüência das outras notas.

Assim, o intervalo entre DO<sub>1</sub> e DO<sub>2</sub> = OITAVA, pois  $\frac{f_{DO_2}}{f_{DO_1}} = 2$ ; do mesmo modo,  $\frac{f_{DO_3}}{f_{DO_2}} = 2$  e  $\frac{f_{MI_3}}{f_{MI_2}} = 2$ , assim por diante.

Em cada gama de notas, a primeira nota recebe o nome de nota fundamental.

Numa gama podemos montar um esquema que nos dá as freqüências entre as notas:



Veja que os números abaixo de cada nota correspondem ao intervalo da nota sob qual está o número, pela nota fundamental da Gama. Assim,

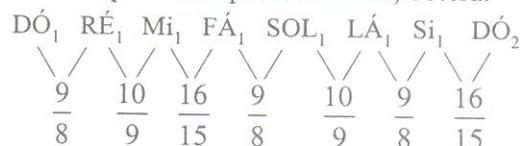
$$\text{DÓ}_1 \dots \text{FÁ}_1 \Rightarrow I_{\text{FÁ}_1, \text{DÓ}_1} = \frac{f_{\text{FÁ}_1}}{f_{\text{DÓ}_1}} = \frac{4}{3}$$

Este esquema acima nos dá os intervalos entre as notas da gama e a nota fundamental da gama. E se quisermos os intervalos entre as notas consecutivas da gama, como fazer? Isso é fácil! Veja o artifício usado abaixo:

Dá nota Dó<sub>1</sub> para o Ré<sub>1</sub> o intervalo é 9/8 e da nota Mi<sub>1</sub> para a nota Ré<sub>1</sub>, qual o intervalo?

$$\begin{aligned} \text{Veja que } \frac{f_{\text{RÉ}_1}}{f_{\text{DÓ}_1}} = \frac{9}{8} &\Rightarrow f_{\text{RÉ}_1} = f_{\text{DÓ}_1} \cdot \frac{9}{8} \\ \text{e } \frac{f_{\text{MI}_1}}{f_{\text{DÓ}_1}} = \frac{5}{4} &\Rightarrow f_{\text{MI}_1} = f_{\text{DÓ}_1} \cdot \frac{5}{4} \end{aligned} \Rightarrow \frac{f_{\text{MI}_1}}{f_{\text{RÉ}_1}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{9}{8}} = \frac{10}{9}$$

Se você repetir esse procedimento, obterá:



Veja que na gama natural (ou de Zarlin) existem apenas três intervalos entre notas consecutivas, que são:

- $\frac{9}{8} \rightarrow$  chamado de TOM MAIOR
- $\frac{10}{9} \rightarrow$  chamado de TOM MENOR
- $\frac{16}{15} \rightarrow$  chamado de SEMITOM

Para terminarmos o assunto sobre notas musicais falaremos em SUSTENIDOS E BEMÓIS:

“SUSTENIR” uma nota consiste em *aumentar* a sua freqüência, multiplicando-a por 25/24. Para indicarmos que uma nota foi sustenida escrevemos à sua direita o símbolo #. Assim, para a nota Lá<sub>4</sub> obteremos Lá<sub>4#</sub>, onde  $f_{Lá_{4\#}} = 25/24 \cdot f_{Lá_4}$

“BEMOLIZAR” uma nota consiste em *diminuir* a sua freqüência, multiplicando-a por 24/25. Para indicarmos que uma nota foi bemolizada, escrevemos à sua direita o símbolo b. Assim, se “bemolizarmos” a nota Si<sub>5</sub> obteremos Si<sub>5b</sub>, onde vale a relação  $Si_{5b} = 24/25 \cdot Si_5$ .

**Observação:** Quando o *intervalo* entre dois sons for diferente de 1, mas for um número inteiro, exemplo:

$$f_1 = 400 \text{ Hz}, f_2 = 800 \text{ Hz}, f_3 = 1200 \text{ Hz}$$

Deste modo, diz-se que o som de freqüência mais baixa é o **som fundamental** e os sons de freqüência maior são denominados **harmônicos**.

Como  $f_2 = 2 \cdot f_1$  ( $I=2$ )  $\Rightarrow$  o som de freqüência  $f_2$  é o segundo harmônico. Da mesma maneira o som de freqüência  $f_3$  é chamado de terceiro harmônico, e assim por diante.

### Efeito Doppler

Estudamos o efeito Doppler, na teoria da apostila, e vimos que é o fato de a freqüência percebida pelo observador variar, quando temos um movimento relativo entre fonte e observador. Vimos também que não podemos simplesmente tomar a velocidade relativa entre fonte e observador, pois há uma assimetria, ou seja, o observador caminhar em direção à fonte, é diferente de a fonte caminhar em relação ao observador.

Porém tal assimetria não ocorre para ondas eletromagnéticas, pois a velocidade da luz é independente do referencial, segundo a teoria da relatividade restrita. Assim, o efeito Doppler para ondas eletromagnéticas deve levar em conta estes fatos, tal que, para uma velocidade relativa entre fonte e observador igual a  $u$ , a freqüência Doppler  $f'$ , com a qual uma onda eletromagnética de freqüência  $f$ , será percebida é dada por:

$$f' = f \frac{1 \pm \left(\frac{u}{c}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

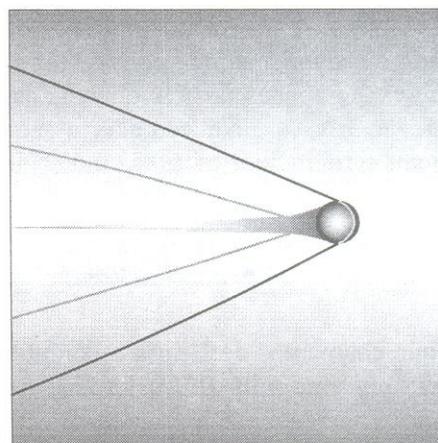
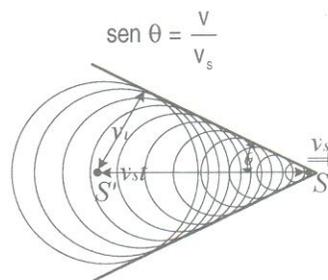
O sinal positivo é usado caso a velocidade relativa seja de aproximação, e a negativa caso a velocidade relativa seja de afastamento.

Assim, os cientistas podem afirmar que o universo está se expandindo pois as freqüências que recebemos tendem ao vermelho (menor freqüência), assim, a velocidade relativa é de afastamento.

### Ondas de choque

Quando  $V_f > V_{som}$ , dizemos que  $V_f$  é supersônica. Como exemplo temos os aviões supersônicas, as projéteis supersônicas, .... Se  $V_f > V_{som}$ , não haverá ondas na frente da fonte sonora (turbina de um avião supersônico, por exemplo), assim, atrás da fonte de ondas sonoras se acumulam frente de onda que formam uma *onda de choque*, a qual será ouvida por um determinado observador como um *estruído sônico*.

Vejamos o esquema das frentes de onda geradas por uma fonte de velocidade supersônica:



Na figura mais acima, um grupo de frentes de ondas, resultantes do movimento de um projétil em velocidade supersônica. As frentes de ondas são esféricas e seu envoltório é um cone. O estudante deve observar a relação entre esta figura e a anterior. Na figura logo acima fotografia de um projétil executando o mesmo tipo de movimento. (Fotografia da Marinha Norte-Americana.)

Veja que a fonte ao se movimentar de  $S'$  para  $S$  gasta um tempo ( $t$ ), que é o mesmo tempo para que a frente de onda emitida em  $S'$  percorra a distância  $V \cdot t$ . Veja que a envoltória das frentes de onda tem a forma de um "vê". Para as ondas tridimensionais a envoltória é um cone, chamado de cone de March. Chama-se número de March ao inverso do seno do ângulo mostrado na figura acima) assim:

$$\text{sen} \theta = \frac{V \cdot t}{V_s \cdot t}$$

$\therefore \text{sen} \theta = \frac{V}{V_s}$  deste modo, o número de Mach será:

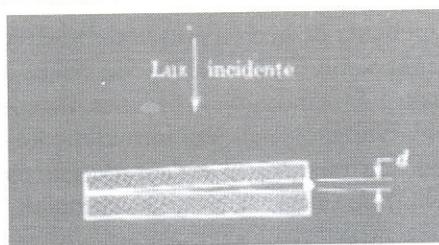
$$N_{\text{Mach}} = \frac{V_s}{V}$$

Assim, quando você ouvir que um avião desloca-se a Mach 3,0, deverá apreender que a velocidade do avião é igual a três vezes a velocidade do som.

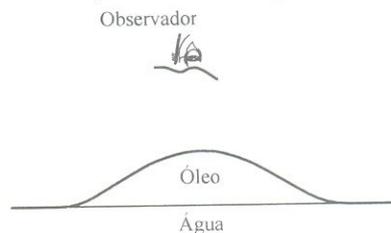


1. Luz circularmente polarizada incide em dois polarizadores superpostos. Qual o ângulo que deverá haver entre os planos de polarização das duas placas, a fim de que a intensidade do feixe transmitido seja:
  - a) Um terço da intensidade máxima do feixe transmitido
  - b) Um terço da intensidade do feixe incidente.
  
2. Um feixe de onda circularmente polarizada incide sobre um conjunto de cinco placas superpostas. A direção característica de cada placa se encontra deslocada, no sentido horário, de  $30^\circ$  em relação à precedente, sendo  $I_0$  a intensidade do feixe não polarizado incidente; encontre a intensidade  $I$  do feixe emergente da última placa do conjunto em função de  $I_0$ .
  
3. Um feixe de luz é uma mistura de luz plano-polarizada com luz não polarizada. Quando esse feixe atravessa uma lâmina do polaróide, incidindo perpendicularmente à lâmina, verifica-se que a intensidade do feixe transmitido varia, desde um valor mínimo  $I_m$  até um valor máximo igual a  $5I_m$ , à medida que giramos o polaróide em torno da direção do feixe transmitido. Determinar a intensidade relativa  $I_p/I_n$  dessas duas componentes do feixe incidente, sendo  $I_p$  a intensidade da componente linearmente polarizada e  $I_n$  a intensidade da componente não-polarizada.
  
4. Luz parcialmente polarizada (uma mistura de feixes não polarizados e de feixes plano-polarizados) pode ser representado por dois feixes planos polarizados de intensidades desiguais,  $I$  ao longo do eixo dos  $x$  e  $i$  ao longo do eixo dos  $y$ , e com uma defasagem aleatória. O grau de polarização é definido por  $p = (I - i)/(I + i)$ .
  - a) supor que um feixe de luz parcialmente polarizada atravessa uma placa Polaróide com a sua direção característica fazendo um ângulo  $\theta$  com o eixo dos  $x$ . Mostrar que a intensidade transmitida  $I_t$  é:
 
$$I_t = I \frac{1 + p \cdot \cos 2\theta}{1 + p}$$
  - b) Esta expressão reduz-se a valores esperados para  $p = 1$  e  $p = 0$ ?
  
5. Desejamos fazer girar de  $90^\circ$  o plano de polarização de um feixe plano-polarizado. Usando-se duas folhas de polaróide. Isto pode ser feito de diversos modos. Determine o ângulo entre a direção do campo elétrico do feixe incidente e a direção característica do primeiro polaróide para que a intensidade luminosa do feixe emergente do segundo polarizador (que está polarizado num plano ortogonal ao do feixe incidente inicial) seja máxima possível, entre as diversas soluções do problema.
  
6. Com que ângulo de incidência um feixe luminoso, refletido na água, ficará completamente polarizado? (b) dependerá o valor desse ângulo do comprimento de onda da luz?
  
7. Deseja-se cobrir um pedaço de vidro plano ( $n = 1,50$ ) com um material transparente ( $n = 1,35$ ), de modo que a luz de comprimento de onda  $6.000 \text{ \AA}$  (no vácuo), incidindo, normalmente, não seja refletida. Como pode isso ser feito?
  
8. Uma película de um líquido com índice de refração  $1,65$  está apoiada sobre uma superfície plana de vidro ( $n = 1,5$ ). A película é iluminada ortogonalmente, por um feixe de luz branca. A espessura da película é constante e igual a  $10000 \text{ \AA}$ . Determine os comprimentos de onda, dentro do espectro visível, que serão intensificados depois de sofrerem interferência por reflexão nas interfaces da película.
  
9. A luz branca possui no espectro visível, ao ser refletida após incidir normalmente sobre uma bolha de sabão, um só máximo de interferência (com  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ ) e um único mínimo na extremidade violeta do espectro. Calcular a espessura da película, sabendo que  $n = 1,33$ .
  
10. Uma onda plana de luz monocromática incide perpendicularmente sobre uma fina película de óleo, de espessura uniforme e que cobre uma placa de vidro. O comprimento de onda da fonte pode ser variado continuamente. Observam-se interferências completamente destrutivas da luz refletida, para os comprimentos de onda de  $5000 \text{ \AA}$  e  $7000 \text{ \AA}$  e para nenhum outro do citado intervalo. O índice de refração do vidro é  $1,5$ . Faça uma estimativa do índice de refração do óleo.
  
11. Uma película de acetona (índice de refração  $1,25$ ) é colocada sobre uma lâmina de vidro (índice de refração  $1,5$ ). Ondas de luz planas, de comprimento de onda variável, incidem normalmente à película. Quando se observa a onda refletida, nota-se que uma interferência destrutiva completa ocorre a  $4400 \text{ \AA}$  e uma construtiva a  $6600 \text{ \AA}$ . Determine a espessura da película.

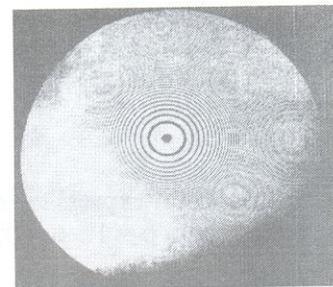
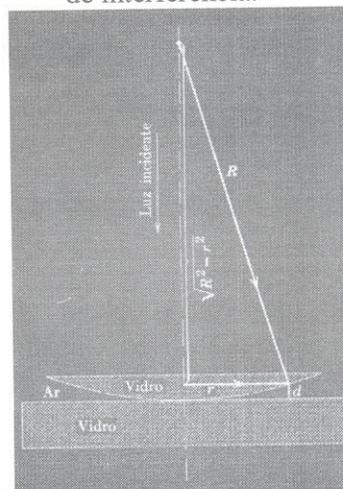
- 12.** A luz branca apresenta, após ser refletida sob incidência normal de uma bolha de sabão, um máximo de interferência em  $6000 \text{ \AA}$  e um mínimo em  $4500 \text{ \AA}$ , ambos no espectro visível e sem nenhum mínimo entre si. Supondo que a película tenha  $n = 1,33$ , qual é a sua espessura, a qual se admite ser uniforme.
- 13.** As lentes são, freqüentemente, recobertas por películas finas de substâncias transparentes, como  $\text{MgF}_2$  ( $n = 1,38$ ), para reduzir a reflexão na superfície do vidro, aproveitando o fenômeno de interferência. Qual a espessura necessária dessa película, para produzir um mínimo de reflexão no centro do espectro visível ( $5500 \text{ \AA}$ )?
- 14.** No problema anterior considere que seja nula a intensidade da reflexão, para a luz de comprimento de onda de  $5500 \text{ \AA}$ , em incidência normal. Calcular a taxa com que fica reduzida a reflexão, devido ao revestimento, para os comprimentos de onda de  $4500 \text{ \AA}$  e  $6500 \text{ \AA}$ .
- 15.** Um navio tanque espalhou uma grande quantidade de querosene ( $n = 1,2$ ) na Baía de Guanabara, provocando o aparecimento de uma enorme mancha na superfície da água ( $n = 1,3$ ).
- Olhando-se de um avião diretamente para baixo, para uma região da mancha onde a sua espessura é  $800 \text{ nm}$ , para que comprimento(s) de onda da luz visível a reflexão será máxima?
  - nadando-se diretamente por baixo dessa mesma região, para que comprimento de onda da luz visível a intensidade transmitida será máxima?
- 16.** Uma fonte extensa de luz ( $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ ) ilumina perpendicularmente duas placas de vidro e  $12 \text{ cm}$  de comprimento que se tocam, numa das extremidades e na outra estão separadas por um arame de  $0,048 \text{ mm}$  de diâmetro, conforme a figura abaixo). Quantas franjas claras aparecem ao longo dos  $12 \text{ cm}$  de extensão?



- 17.** Uma gota de óleo ( $n = 1,2$ ) flutua sobre uma superfície de água ( $n = 1,33$ ) e é observada de cima pela luz refletida, conforme a figura abaixo.



- as porções externas (mais finas) da gota corresponderão a regiões brilhantes ou escuras?
  - Qual a espessura aproximada da película de óleo onde se observa a terceira região azul vista do exterior da gota?
  - Suponha que a espessura da película de óleo varie de zero até uma espessura máxima de  $1 \text{ cm}$  no centro da gota: é possível observar a interferência da luz refletida no centro da gota?
- 18.** O diâmetro do décimo anel claro, produzido em um dispositivo de anéis de Newton passa de  $1,5 \text{ cm}$  para  $1,2 \text{ cm}$  quando se introduz um líquido entre a lente e a placa. Determine o índice de refração do líquido.
- 19.** Numa experiência de anéis de Newton, a Lente tem um raio de curvatura  $R$  de  $8,0 \text{ m}$  e diâmetro  $2 \text{ cm}$ . (a) Quantos anéis serão produzidos? (b) Quantos anéis seriam vistos se o dispositivo fosse imerso em água ( $n = 1,33$ ). Admitir  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ .
- 20.** A figura abaixo representa uma lente de raio de curvatura  $R$ , apoiada em uma lâmina de vidro, rigorosamente plana, e iluminada de cima por luz de comprimento  $\lambda$ . A outra figura mostra o aparecimento de franças circulares de interferência (anéis de Newton), associadas com a camada de ar, de espessura variável, existente entre a lente e a lâmina. Calcular os raios dos máximos circulares de interferência.





**21.** Para o problema anterior, mostre que a diferença entre os raios de dois anéis adjacentes é dado aproximadamente por:

$$\Delta r = r_{m+1} - r_m \cong \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda \cdot R}{m}}$$

**22.** Um feixe de luz branca incide ortogonalmente sobre uma fenda de largura  $a$ . Qual deve ser a relação entre os dois comprimentos de onda dessa luz para que o primeiro mínimo de uma das cores coincida com o primeiro máximo da outra cor (depois do máximo central)?

**23.** Uma fenda de largura  $a$  é iluminada por um feixe colimado de luz monocromática ( $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ ) que incide ortogonalmente ao plano da fenda. O anteparo está situado a uma distância de 40 cm do plano da fenda. A distância entre o primeiro mínimo e o quarto mínimo da figura de interferência é igual a 0,4 mm. Calcule a largura  $a$ .

**24.** Em um espectro de difração de fenda única, a distância entre os primeiros mínimos, um à direita e outro à esquerda, é de 5,2 mm. O anteparo onde se produz o espectro está a 80 cm da fenda e usa-se um comprimento de onda de  $6900 \text{ \AA}$ . Calcule a largura da fenda.

**25.** Suponha que o primeiro mínimo de difração através de uma fenda única ocorre para  $\theta = 60^\circ$ . Determine a razão entre a largura da fenda e o comprimento de onda do feixe monocromático incidente para que isto ocorra.

**26.** Uma fenda possui largura  $a = 0,8 \text{ mm}$ . Quando ela é iluminada por luz monocromática ( $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ ) forma-se o espectro produzido pela difração na fenda sobre uma tela situada a uma distância de 3,5 m do plano da fenda. Encontra a distância entre o centro da figura e um ponto situado no terceiro mínimo.

**27.** Considere o critério de resolução de Rayleigh, usado para determinar o limite de resolução de duas fontes pontuais distantes. Determine a separação angular  $\theta_R$  entre o máximo central e o primeiro mínimo de difração numa lente cujo diâmetro é igual a  $d$ , supondo que as fontes estejam no limite de resolução. (b) Suponha que a distância entre o centro das duas fontes e o centro da lente seja igual a  $r$ . Este a distância  $x$  entre as duas fontes através do conhecimento do limite mencionado no item anterior.

**28.** Um astronauta num satélite afirma que duas fontes puntiformes na superfície da Terra, a 200 km abaixo dele, se encontram no limite de resolução.

Qual é a separação das fontes? Supor  $\lambda = 5500 \text{ \AA}$  e o diâmetro da pupila como 5,0 mm.

**29.** a) Qual deve ser o afastamento angular mínimo entre duas estrelas, para que suas imagens se encontram no limite de resolução do telescópio Thaw de refração, do Allegheny Observatory, em Pittsburgh? A lente tem um diâmetro de 0,75 m e uma distância focal de 13,8 m. supor  $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ .

b) Calcular a distância entre as aludidas estrelas (no limite da resolução) Supondo-se que elas se acham a 10 anos-luz da Terra.

c) Calcular o diâmetro do primeiro anel escuro do espectro de difração de uma dessas estrelas produzido em uma placa fotográfica colocada no plano focal da lente do mesmo telescópio.

**30.** A distância entre os dois faróis de um automóvel é igual a 130 cm. O automóvel se aproxima de um observador numa estrada retilínea. Suponha que o diâmetro da pupila do observador seja igual a 4,0 mm. Considere um comprimento de onda igual a  $5500 \text{ \AA}$ . Estime a distância máxima do automóvel para que os dois faróis estejam no limite da resolução.

**31.** Estimar, sob condições ideais, a separação linear de dois objetos no planeta Marte, que se encontram no limite de resolução para um observador na Terra, usando (a) o olho nu, (b) o Telescópio de 5,0 m do monte Palomar. Utilizar os seguintes dados: Distância a Marte =  $8.10^7 \text{ km}$ ; diâmetro da pupila = 5,0 mm; comprimento de onda da luz =  $5500 \text{ \AA}$ .

**32.** Um foguete afasta-se da Terra com velocidade 0,35  $c$ . Uma luz, dentro do foguete, possui comprimento de onda de  $460 \text{ \mu m}$  (luz azul). Qual seria a cor desta luz para um observador fixo na terra?

**33.** A diferença de comprimentos de onda de um feixe e microondas incidente refletido por um carro, que se aproxima ou se afasta, é usada na determinação da velocidade de automóveis nas estradas.

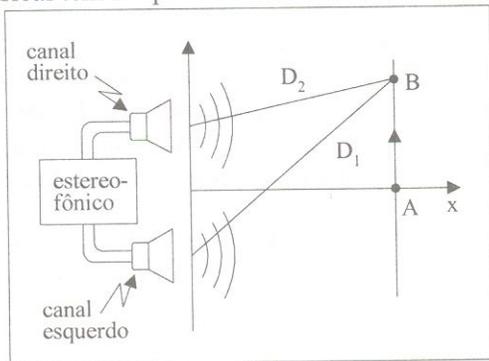
a) Mostre que, sendo  $v$  a velocidade do carro e  $f$  a frequência do feixe incidente, a variação de frequência é dada aproximadamente por  $2v \cdot f/c$ , onde  $c$  é a velocidade da radiação eletromagnética.

b) Para microondas de frequência igual a 24 GHz, qual será a variação de frequência, por km/h de velocidade?

**34.** O “deslocamento para o vermelho” da radiação de uma nebulosa distante consiste no fato da raia cujo comprimento de onda conhecido é de  $4,34 \cdot 10^{-8}$  cm, quando observado em laboratório, apresentar um comprimento de onda de  $7,054 \cdot 10^{-8}$  cm.

- a) Qual é a velocidade radial da nebulosa em relação à Terra?  
b) Estar-se-á aproximando ou afastando de nós?

**35.** (USJT) Um sistema estereofônico está emitindo uma nota musical pura. Uma pessoa, partindo do ponto A da figura abaixo e se deslocando paralelamente a y, percebe, pela primeira vez, a intensidade sonora passar por um mínimo na posição B. Se as distâncias do ponto B aos alto-falantes esquerdo e direito são, respectivamente,  $D_1$  e  $D_2$  e sendo v a velocidade do som no ar, a nota musical tem frequência:



- A. ( )  $f = \frac{3v}{2(D_1 - D_2)}$     B. ( )  $f = \frac{2v}{3(D_1 - D_2)}$   
C. ( )  $f = \frac{v}{D_1 - D_2}$     D. ( )  $f = \frac{2v}{D_1 - D_2}$   
E. ( )  $f = \frac{v}{2(D_1 - D_2)}$

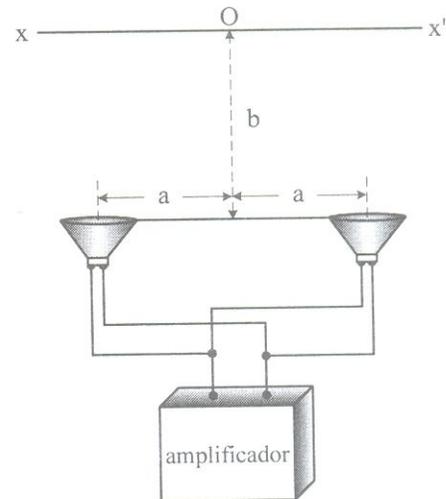
**36.** (MACK) Podemos afirmar que batimentos:

- A. ( ) são situações de amplitude produzidas por duas ondas de frequências rigorosamente iguais.  
B. ( ) são flutuações de amplitude produzidas por duas ondas de frequências ligeiramente diferentes.  
C. ( ) independem das frequências das ondas.  
D. ( ) são flutuantes de amplitude produzidas por duas ondas de frequências rigorosamente diferentes.  
E. ( ) n.d.a.

**37.** (MACK) Duas fontes sonoras A e B, próximas, emitem sons no ar com frequências respectivamente iguais a 320,00 Hz e 320,50 Hz. Uma pessoa colocada perto dessas fontes ouve um som fraco e outro forte após:

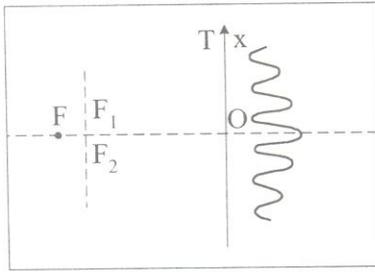
- A. ( ) 0,25 s    B. ( ) 0,50 s    C. ( ) 1,00 s  
D. ( ) 1,50 s    E. ( ) 2,00 s

**38.** (ITA) A figura abaixo representa dois alto-falantes montados em dois furos de uma parede e ligados ao mesmo amplificador. Um ouvinte que se desloca sobre a reta  $xx'$  observa-se que a intensidade sonora resultante é máxima exatamente no ponto O, situado a igual distância dos dois alto-falantes. Para que o ponto O passe a corresponder a um mínimo de intensidade sonora será preciso:



- A. ( ) inverter a ligação dos fios nos terminais de um dos alto-falantes;  
B. ( ) reduzir a distância b entre parede e ouvinte;  
C. ( ) aumentar a distância 2a entre os alto-falantes;  
D. ( ) reduzir a distância 2a entre os alto-falantes;  
E. ( ) inverter a ligação dos fios na saída do amplificador.

**39.** (USP) Repetiu-se a experiência de Young com todos os componentes colocados numa cuba com água. A distância entre o anteparo A e a tela T é  $D = 20$  cm; a distância entre as fenda  $F_1$  e  $F_2$ , por onde passam os raios de luz provenientes da fonte coerente F, é  $a = 0,10$  mm. O gráfico da intensidade das franjas de interferência é dado ao lado das franjas. A distância entre os centros de duas franjas brilhantes consecutivas é  $y = 1$  mm. Sabe-se que o comprimento  $\lambda$  das ondas usadas pode ser obtido por  $\lambda = \frac{ay}{D}$ .

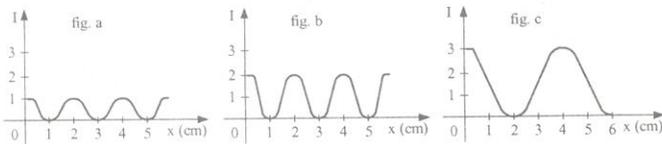


Sabe-se ainda que o índice de refração da água para a radiação utilizada é 1,4. Qual o comprimento dessa onda no vácuo?

- A. ( ) 0,36  $\mu\text{m}$
- B. ( ) 0,50  $\mu\text{m}$
- C. ( ) 0,70  $\mu\text{m}$
- D. ( ) 0,98  $\mu\text{m}$
- E. ( ) depende do valor de  $y$ .

**40.** (IME) Numa experiência de Young sobre a interferência luminosa, foram obtidas franjas de 1,4 mm de largura num anteparo situado a 80 cm de duas fendas paralelas distantes 0,2 mm uma da outra. Determinar o comprimento de onda e a frequência da luz utilizada na experiência. É dada a velocidade da luz:  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s.

**41.** (CESCEA) Os gráficos abaixo representam intensidades  $I$  de 3 espectros distintos de interferência de luz por um sistema adequado de fenda dupla. Com relação às figuras **a**, **b** e **c**, podemos afirmar que:



- A. ( ) as três foram obtidas alterando-se apenas o comprimento de onda da luz incidente;
- B. ( ) as três foram obtidas alterando-se apenas a distância entre as fendas;
- C. ( ) a figura c foi obtida com distância de separação entre as fendas maior que as demais;
- D. ( ) as duas primeiras figuras foram obtidas alterando-se apenas as distâncias entre as fendas;
- E. ( ) as posições dos mínimos nos espectros dependem da razão entre o comprimento de onda da luz incidente e a distância entre as fendas.

**42.** (ENG. STA. RITA DO SAPUCAÍ)

- a) Quantas pulsações por segundo se ouvem quando dois diapasões, de frequências 200 e 205 Hz, vibram juntamente?

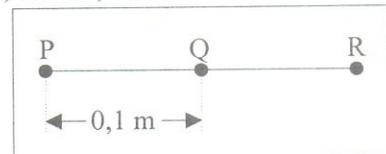
- b) Qual é a frequência de um diapásão que produz 4 pulsações/segundo, quando vibra com um diapásão de frequência 300 Hz?

**43.** Uma película fina, com o índice de refração 1,5, está imerso no ar. A película é iluminada normalmente por luz branca e observada por reflexão. A análise da luz refletida mostra que os comprimentos de onda de 360, 450 e 602 nm são os únicos comprimentos de onda que estão ausentes, nas vizinhanças do espectro visível ou no espectro visível. Isto é, para estes comprimentos de onda, há interferência destrutiva.

- a) Qual a espessura da película?
- b) Quais os comprimentos de onda no visível que são mais brilhantes na figura de interferência por reflexão?
- c) Se a película estivesse sobre uma chapa de vidro, com índice de refração 1,6, quais os comprimentos de onda no espectro visível que estariam faltando na luz refletida?

**44.** A luz branca apresenta, após ser refletida sob incidência normal de uma bolha de sabão, um máximo de interferência em 6.000 Å, ambos no espectro visível e sem nenhum mínimo entre si. Supondo que a película tenha  $n = 1,33$ , qual é a sua espessura, a qual se admite ser uniforme?

**45.** (CAXIAS DO SUL) Dois alto-falantes, colocados um em P e outro em Q, emitem sons de mesma frequência e em fase. A velocidade do som no ar é 340 m/s. A frequência dos alto-falantes, que pode variar continuamente a partir de 100 Hz, alcança um valor tal que um observador em R deixa de ouvir o som. A frequência nos alto-falantes, nesse momento, em Hz, vale:



- A. ( ) 1 700    B. ( ) 1 300    C. ( ) 1 020
- D. ( ) 680    E. ( ) 340

**46.** (ITA) Uma bolha de sabão tem, espessura de 5 000 Å ( $1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$ ). O índice de refração deste filme fino é 1,35. Ilumina-se esta bolha com luz branca. Conhecem-se os intervalos aproximados em comprimento de onda para a região do visível, conforme a seguir:

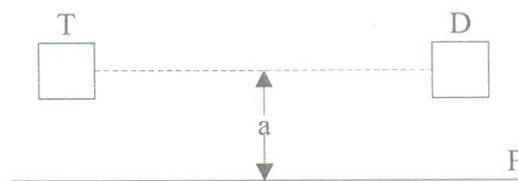
- 3 800 - 4 400 Å - violeta
- 4 400 - 4 900 Å - azul
- 4 900 - 5 600 Å - verde

- 5 600 - 5 900 Å - amarelo  
5 900 - 6 300 Å - laranja  
6 300 - 7 600 Å - vermelho

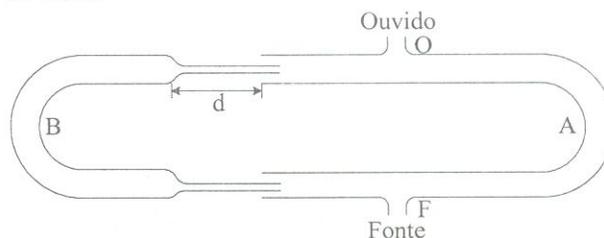
Quais são as cores que não serão refletidas pela bolha de sabão?

- 47.** (ITA) Sobre uma película de água e sabão com índice de refração  $n = 1,35$ , incide perpendicularmente uma luz branca. Qual a espessura mínima para que os raios refletidos tenham coloração verde ( $\lambda = 5,25 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ )?
- 48.** Uma espira de arame é mergulhada numa solução de sabão em água e mantida de tal forma que a película de sabão fica na vertical.
- Observada por reflexão, com luz branca, a parte de cima da película parece negra. Explicar a razão deste efeito.
  - Depois da região negra aparecem, na película, franjas coloridas. A primeira franja colorida é violeta ou vermelha?
  - Descreva a aparência da película examinada por luz transmitida.
- 49.** Considere-se uma película de água ( $n = 1,33$ ) no ar, com  $3.200 \text{ Å}$  de espessura. Quando iluminada por luz branca em incidência normal, de cor parecerá a luz refletida?
- 50.** Uma delgada camada de material transparente, com índice de refração  $1,30$ , é usada como revestimento não-refletor sobre a superfície de um vidro com o índice de refração  $1,50$ . Qual deve ser a espessura do material para que a camada seja não-refletora para a luz de comprimento de onda (no vácuo) de  $600 \text{ nm}$ ?

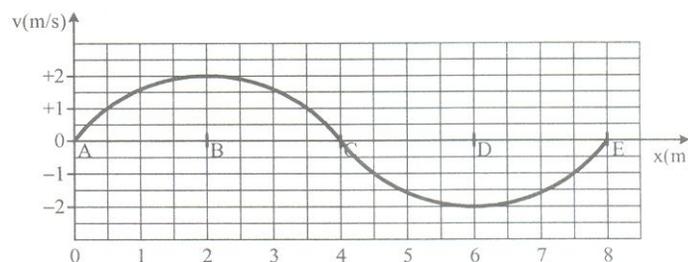
- 51.** (ITA) Um pequeno transdutor piezoelétrico (T), excitado por um sinal elétrico, emite ondas esféricas de frequência igual a  $34 \text{ kHz}$ . Um detector (D) recebe essas ondas colocado a uma distância fixa,  $L = 30 \text{ cm}$ , do emissor. As ondas emitidas podem refletir num plano (P) antes de chegar o receptor. Este registra uma interferência entre as ondas que chegam diretamente e as ondas refletidas. A velocidade de propagação das ondas é de  $340 \text{ m/s}$ . Na figura, o conjunto T-D pode deslocar-se perpendicularmente a P. Pergunta-se: para que distância a ocorre o primeiro mínimo na intensidade registrada por D?



- 52.** (FATEC) O esquema abaixo representa um trombone de Quincke. A fonte é um diapasão próximo a F. O ouvido constante intensidade mínima para  $d_1 = 5 \text{ cm}$  e novamente para  $d_2 = 15 \text{ cm}$ . Qual o comprimento de onda do som dentro do tubo?



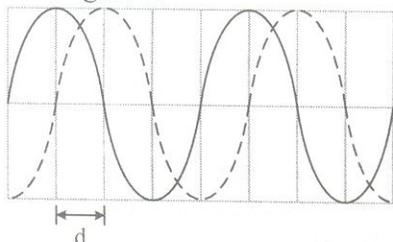
- 53.** O gráfico representa, num dado instante, a velocidade transversal dos pontos de uma corda, na qual se propaga uma onda senoidal na direção do eixo dos x. A velocidade de propagação da onda na corda é  $24 \text{ m/s}$ . Sejam A, B, C, D e E pontos da corda.



Considere, para o instante representado, as seguintes afirmações:

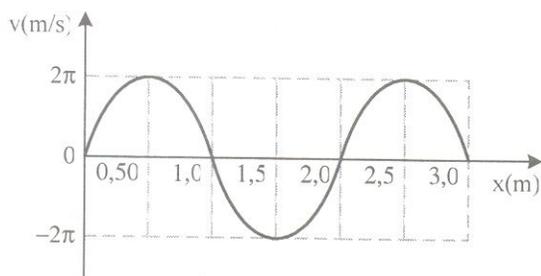
- A frequência da onda é  $0,25 \text{ Hz}$ .
  - Os pontos A, C e E têm máxima aceleração transversal (em módulo).
  - Os pontos A, C e E têm máximo deslocamento transversal (em módulo).
  - Todos os pontos da corda se deslocam com velocidade de  $24 \text{ m/s}$  na direção do eixo x.
- São corretas as afirmações:
- ( ) todas
  - ( ) somente IV
  - ( ) somente II e III
  - ( ) somente I e II
  - ( ) somente II, III e IV
- 54.** Para uma corda vibrando com uma onda senoidal, determine, em função da frequência, amplitude e massa da corda M, a energia total da onda que se propaga.

- 55.** A figura mostra uma onda progressiva em dois instantes de tempo:  $t_1 = 1,0$  s (— linha cheia) e  $t_2 = 9,0$  s (---- linha tracejada). Se a distância indicada for  $d = 2,0$  m, o período (em segundos) da onda não poderá ser igual a:



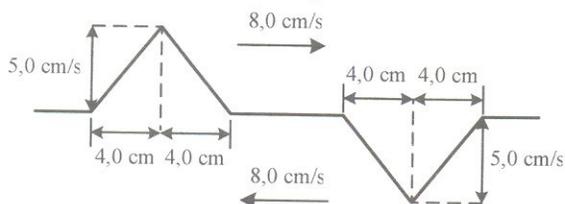
- A. ( ) 32      B. ( ) 16      C. ( ) 6,4  
D. ( ) 3,5      E. ( ) 2,5

- 56.** Considere uma onda senoidal propagando-se com velocidade igual a  $4,0$  m/s ao longo de uma corda elástica coincidente com um eixo de referência  $0x$ . O gráfico mostra, em determinado instante, os valores algébricos das velocidades transversais de alguns pontos da corda, compreendidos entre as posições  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 3,0$  m.



- a) Determine a frequência e a amplitude da onda.  
b) Esboce, no instante considerado, o perfil da corda compreendido entre as posições  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 3,0$  m.  
c) Calcule, no instante considerado, o valor algébrico da aceleração do ponto da corda situado na posição  $x = 2,0$  m.

- 57.** Dois pulsos triangulares, de mesma largura e amplitude, propagam-se em oposição de fase ao longo de uma corda elástica, não dispersiva e de densidade linear igual a  $10$  g/cm.



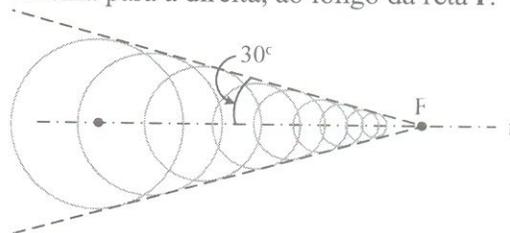
Suas velocidades são opostas, apresentando módulo de  $8,0$  cm/s. Sabendo que cada pulso transporta uma energia potencial elástica de  $4,0 \cdot 10^{-4}$  J, calcule.

- a) a energia cinética transportada por pulso antes de eles estarem superpostos;  
b) a energia cinética total associada ao sistema no instante em que os pulsos estiverem perfeitamente superpostos.

- 58.** Uma fonte sonora emitindo um som puro (única frequência) de frequência igual a  $440$  Hz é colocada sucessivamente junto à extremidade aberta de cinco tubos cilíndricos **A**, **B**, **C**, **D** e **E**, fechados na outra extremidade, de comprimentos respectivamente iguais a  $6,25$  cm,  $15,00$  cm,  $18,75$  cm,  $37,50$  cm e  $93,75$  cm. Sabendo que a velocidade de propagação do som no ar existente dentro dos tubos é igual a  $330$  m/s, determine que tubo (s) entrou (entraram) em ressonância com a fonte.

- 59.** Um automóvel e uma ambulância movem-se numa estrada, lado a lado, no mesmo sentido, com velocidades constantes e iguais a  $72$  km/h. A sirene da ambulância emite um som de frequência igual a  $1280$  Hz. A partir de certo instante, o motorista do automóvel imprime à sua viatura a aceleração de  $1$  m/s<sup>2</sup> no sentido do movimento. Sabendo que a velocidade de propagação do som no ar é de  $340$  m/s, determine o espaço percorrido pelo automóvel até seu motorista ouvir um som de frequência igual a  $1240$  Hz. Admita que o ar esteja parado em relação à Terra, à qual são referidas as velocidades mencionadas.

- 60.** A figura ilustra as frentes de onda esféricas emitidas por uma fonte sonora **F**, que se movimentava para a direita, ao longo da reta **r**:

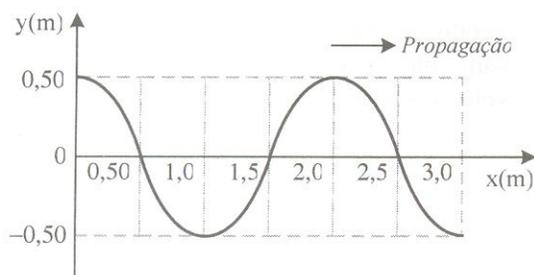


Sendo de  $340$  m/s a velocidade de propagação do som nas condições da experiência, calcule a velocidade da fonte **F**.

- 61.** (ITA-SP) Um pelotão desfila num ritmo de  $120$  passos por minuto, ao som de uma fanfarra, que o precede; nota-se que a última fila está com o pé esquerdo à frente, quando os componentes da fanfarra estão com o direito à frente. Sabendo que a velocidade do som no ar é de  $340$  m/s, determine, aproximadamente, o comprimento do pelotão, incluindo a fanfarra.

**Gabarito**

8.  $6100 \text{ \AA}$ ,  $5076 \text{ \AA}$ ,  $4400 \text{ \AA}$
12.  $5280 \text{ \AA}$
17. a) brilhantes; b)  $594 \text{ nm}$ ; c) não.
19. a) 25; b) 33
22.  $\lambda_2 = 1,5 \lambda_1$
24.  $0,21 \text{ mm}$
26.  $7,87 \text{ mm}$
27. a)  $\theta_R = 1,22 \lambda/d$ ; b)  $x = 1,22 \lambda.r/d$
30.  $7,7 \text{ km}$ .
31. a)  $1,07 \cdot 10^7 \text{ m}$ ;  $10,7 \text{ km}$
32. Vermelha.
34. a)  $1,3 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}$ ; b) afastando.
35. E
37. C
38. A
39. C
40.  $7 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ ;  $4,29 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$
41. E
42. a) 9; b) 304 ou 286 Hz.
43. a)  $0,6 \text{ \mu m}$ ;  
b)  $400 \text{ nm}$ ;  $514 \text{ nm}$ ,  $720 \text{ nm}$ ;  
c)  $400 \text{ nm}$ ,  $514 \text{ nm}$ ,  $720 \text{ nm}$ .
44.  $d = 3,38 \cdot 10^{-7}$
45. A
46. azul e vermelha.
47.  $d_{\min} = 9,72 \cdot 10^{-8} \text{ m}$
48. a) A espessura na parte superior  $\rightarrow 0$ ,  $\therefore$  diferença de percurso é nula. Como os raios refletidos na superfície superior e inferior possuem diferença de fase de  $180^\circ \Rightarrow$  interferência destrutiva.  
b) primeira franja é violeta.
49. Amarela
50.  $115 \text{ nm}$
51.  $Q = 3,9 \text{ cm}$
52.  $20 \text{ cm}$
53. C
55. B
56. a)  $f = 2,0 \text{ Hz}$   
b)



c)  $\gamma = -8 \pi^2 \text{ m/s}^2$

57. a)  $E_c = 4,0 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ ; b)  $E_T = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ J}$
58. As frequências de ressonância de um tubo fechado são dadas por  $f = \frac{Nv}{4L}$ , sendo **N** um número **ímpar**.

Temos:  $L = N \frac{v}{4f} = N \frac{33000 \text{ cm/s}}{4 \cdot 4440 \text{ Hz}}$

$L = N \cdot 18,75 \text{ cm}$

Fazendo:

$N = 1: L = 18,75 \text{ cm} \Rightarrow$  Tubo **C**;

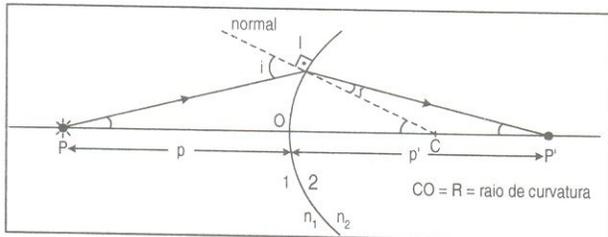
$N = 3: L = 56,25 \text{ cm} \Rightarrow$  Nenhum dos tubos;

$N = 5: L = 93,75 \text{ cm} \Rightarrow$  Tubo **E**.

59.  $\Delta s = 250 \text{ m}$
60.  $v_{\text{fonte}} = 680 \text{ m/s}$
61.  $\Delta s = 170 \text{ m}$

1ª. parte: dioptra esférica

Consideremos uma superfície esférica separando dois meios homogêneos, (1) e (2), de índices de refração  $n_1$  e  $n_2$ . Vamos supor que  $n_1 < n_2$ . Tudo se passa como se fossem, por exemplo, o ar e o vidro. A figura abaixo nos mostra a formação da imagem de um ponto P em (I), por refração.



Dioptra esférica

A refração obedece à Lei de Snell. Vale a equação:  
 $n_1 \cdot \sin i = n_2 \cdot \sin r$

Como o ângulo de incidência é muito pequeno (condições de Gauss), podemos fazer:  
 $\sin i \cong i$  e  $\sin r \cong r \Rightarrow n_1 \cdot i \cong n_2 \cdot r$  (I)

No triângulo PIC, temos:

$$i = \alpha + \beta$$

No triângulo CIP', temos:

$$\beta = r + \gamma \Rightarrow r = \beta - \gamma$$

Voltando com essas equações a (I), temos:

$$\begin{aligned} n_1 \cdot (\alpha + \beta) &= n_2 \cdot (\beta - \gamma) \\ n_1 \cdot \alpha + n_1 \cdot \beta &= n_2 \cdot \beta - n_2 \cdot \gamma \\ n_1 \cdot \alpha + n_2 \cdot \gamma &= (n_2 - n_1) \beta \quad \text{(II)} \end{aligned}$$

Como os ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são pequenos, podemos considerar OI retilíneo e perpendicular ao eixo principal do dioptra.

Voltando ao triângulo POI, onde  $\alpha$  é muito pequeno, podemos escrever:

$$\text{tg } \alpha = \frac{OI}{OP} \quad \text{tg } \alpha \cong \alpha \Rightarrow \alpha \cong \frac{OI}{p} \quad \text{(A)}$$

No triângulo OIP', onde  $\gamma$  é muito pequeno, podemos escrever:

$$\text{tg } \gamma = \frac{OI}{OP'} \quad \text{e } \text{tg } \gamma \cong \gamma \Rightarrow \gamma \cong \frac{OI}{p'} \quad \text{(B)}$$

No triângulo OIC, onde  $\beta$  é muito pequeno, podemos escrever:

$$\text{tg } \beta = \frac{OI}{OC} \quad \text{e } \text{tg } \beta \cong \beta \Rightarrow \beta \cong \frac{OI}{R} \quad \text{(C)}$$

Substituindo as equações A, B e C em (II), vem:

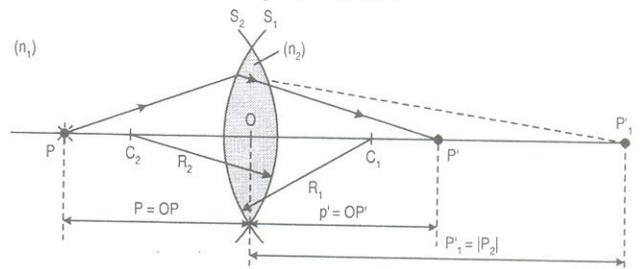
$$n_1 \cdot \frac{OI}{p} + n_2 \cdot \frac{OI}{p'} = (n_2 - n_1) \cdot \frac{OI}{R}$$

Simplificando, temos:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = (n_2 - n_1) \cdot \frac{1}{R}$$

2ª parte: lente esférica

Uma lente esférica é um conjunto de dois dioptras esféricos, como o da figura abaixo.



Lente delgada (espessura desprezível)

A imagem  $P'_1$ , do objeto P, conjugada pelo primeiro dioptra, de superfície  $S_1$ , tem abscissa  $p'_1$ . Vale:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'_1} = (n_2 - n_1) \cdot \frac{1}{R_1} \quad \text{(III)}$$

A imagem real  $P'_1$  é objeto virtual para o dioptra de superfície  $S_2$ . Ele conjuga a imagem final  $P''$ .

Temos, então,  $p_2 = -p'_1$

$$\frac{n_2}{p_2} + \frac{n_1}{p'} = (n_2 - n_1) \cdot \frac{1}{R_2} \Rightarrow \frac{n_2}{-p'_1} + \frac{n_1}{p'} = (n_2 - n_1) \cdot \frac{1}{R_2} \quad \text{(IV)}$$

Somemos as equações (III) e (IV) membro a membro:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'_1} + \frac{n_2}{-p'_1} + \frac{n_1}{p'} = (n_2 - n_1) \cdot \frac{1}{R_1} + (n_2 - n_1) \cdot \frac{1}{R_2}$$

Fazendo a simplificação, ao dividir por  $n_1$  vem:

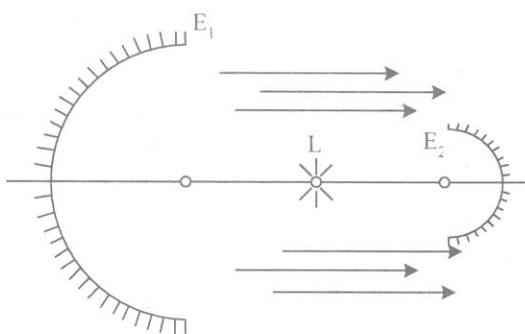
$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_1}{p'} = (n_2 - n_1) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

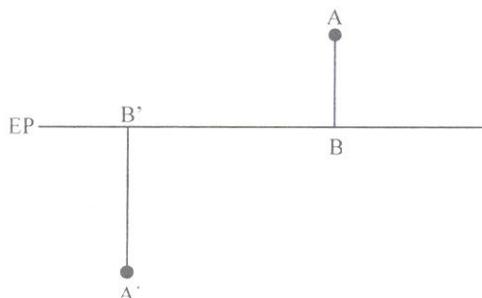
ou

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

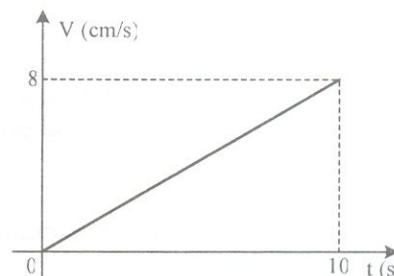
- Uma partícula M encontra-se inicialmente em repouso, a uma distância de 0,50 m de um espelho plano. A partir do instante  $t = 0$ , M adquire movimento uniformemente acelerado, numa direção perpendicular ao espelho plano, afastando-se do mesmo. Ao passar por um ponto B distante 2,0 m de seu ponto de partida, sua velocidade é de 1,0 m/s. Determine a função horária  $S = f(t)$  da partícula.
- Um holofote é constituído por dois espelhos esféricos côncavos  $E_1$  e  $E_2$ , de modo que a quase totalidade da luz proveniente da lâmpada L seja projetada pelo espelho maior  $E_1$ , formando um feixe de raios quase paralelos. Neste arranjo, os espelhos devem ser posicionados de forma que a lâmpada esteja aproximadamente
  - ( ) nos focos dos espelhos  $E_1$  e  $E_2$
  - ( ) no centro de curvatura de  $E_2$  e no vértice de  $E_1$
  - ( ) no foco de  $E_2$  e no centro de curvatura de  $E_1$
  - ( ) nos centros de curvatura de  $E_1$  e  $E_2$
  - ( ) no foco de  $E_1$  e no centro de curvatura de  $E_2$



- Utilizando-se um espelho esférico côncavo, projeta-se sobre uma parede a imagem de uma vela diminuída 2 vezes. A vela está a 2 m da parede. Determine a distância focal do espelho.
- A figura representa um objeto AB e sua imagem A'B', ambos reais, obtida com o auxílio de um espelho esférico, de eixo principal EP. Determine graficamente a posição do espelho, seu foco principal e seu centro de curvatura.

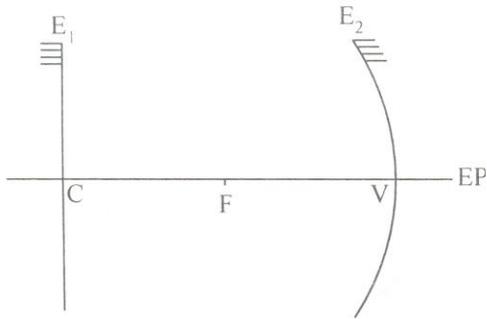


- Um espelho convexo de raio de curvatura 20 cm está situado a 20 cm de um espelho côncavo de distância focal igual a 20 cm. Os espelhos estão montados coaxialmente e as superfícies refletoras se defrontam. Coloca-se um objeto no ponto médio do segmento que une os vértices dos dois espelhos. Localize a imagem fornecida pelo espelho convexo ao receber os raios luminosos que partem do objeto e são refletidos pelo espelho côncavo.
- Dois espelhos esféricos de raios iguais a 60 cm, um côncavo e outro convexo, são associados coaxialmente com as superfícies refletoras se defrontando. De um mesmo objeto frontal situado entre os espelhos, o côncavo produz uma imagem real a 40 cm de distância de seu vértice e o convexo produz uma imagem a 20 cm de seu vértice. Determine a distância entre os espelhos.
- A imagem do Sol é formada em um espelho esférico côncavo, de distância focal igual a 1 m. Considerando a distância do Sol à Terra 250 vezes maior que o diâmetro do Sol, calcule o tamanho do diâmetro da imagem formada.
- Considere um ponto material deslocando-se ao longo do eixo principal de um espelho côncavo de distância focal igual a 40 cm, a partir de seu vértice. A figura abaixo nos mostra como varia a velocidade do ponto material ao longo de sua trajetória. Com base nessas informações, determine:
  - a razão entre as velocidades médias  $V_{MO}$  do objeto e  $V_{MI}$  da imagem até o instante 10 s
  - qual deveria ser o raio de curvatura do espelho para que essa razão fosse igual a 1

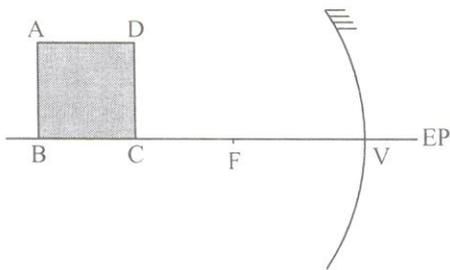


- Considere a composição de espelhos abaixo, formada por dois espelhos  $E_1$  e  $E_2$ , onde  $E_1$  é um espelho plano e  $E_2$  um espelho esférico gaussiano côncavo de raio de curvatura  $R$  cm, C, F e V são respectivamente, em relação espelho esférico, o centro de curvatura, o foco e o vértice do espelho. Determine, em função de  $R$ , a distância do objeto (fonte), à sua imagem formada por tripla reflexão,

primeiramente no espelho  $E_1$ , seguida de reflexão em  $E_2$  e, posteriormente, novamente em  $E_1$ .



- 10.** O quadrado ABCD da figura a seguir tem um lado BC apoiado sobre o eixo principal do espelho esférico, de centro de curvatura C e raio 12 cm. O lado do quadrado mede 8,0 cm. Determine a razão entre a área do quadrado ABCD e a área de sua imagem.

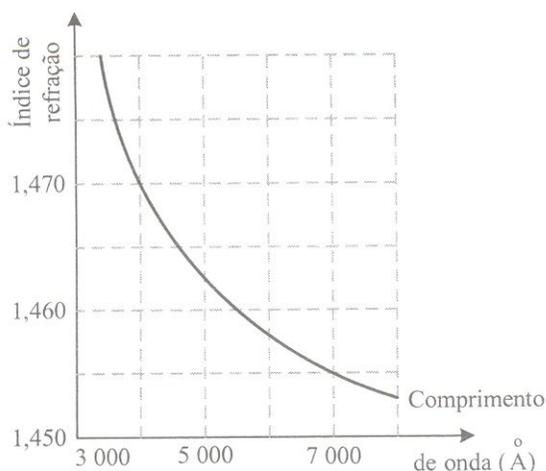


1. Uma vela acesa de 18 cm de comprimento é colocada sobre o eixo principal de um espelho esférico, a 60 cm do vértice. A imagem real correspondente forma-se a 30 cm do espelho. Determine:
- se o espelho é côncavo ou convexo;
  - o comprimento da imagem;
  - o traçado gráfico do objeto e de sua imagem conjugada pelo espelho.

2. Um espelho esférico côncavo é utilizado para projetar, sobre uma tela, a imagem do Sol. A distância focal do espelho é de 2,0 metros. Qual é, aproximadamente, a distância entre a imagem do Sol e o espelho?

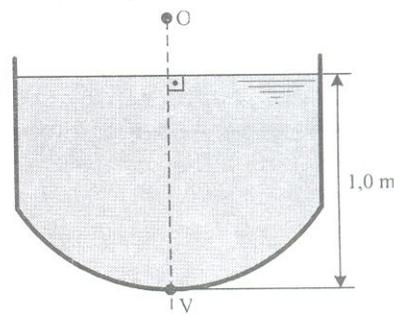
3. (MACK-SP) Um objeto real se encontra diante de um espelho esférico côncavo, a 10 cm de seu vértice, sobre o eixo principal. O raio de curvatura desse espelho é de 40 cm. Se esse objeto se deslocar até o centro de curvatura do espelho, qual será a distância entre a imagem inicial e a imagem final?

4. O gráfico abaixo mostra como varia o índice de refração de um cristal em função do comprimento de onda da radiação, medido no vácuo:



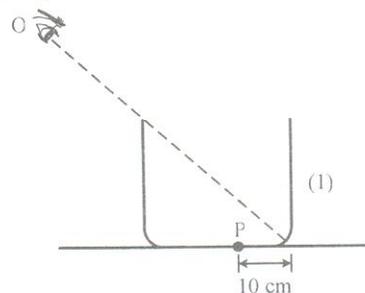
- Qual o índice de refração do cristal para uma radiação de  $4\ 000\ \text{Å}$ ?
  - Qual radiação visível terá, no meio citado, a menor velocidade? Justifique.
  - O que acontece com a luz branca quando atravessa obliquamente a fronteira entre o ar e o cristal?
5. Na figura seguinte, tem-se um reservatório cujo fundo é constituído por um espelho esférico côncavo. O reservatório contém água, de índice de refração  $4/3$ , até a altura de 1,0 m em relação ao

vértice **V** do espelho. Raios luminosos paralelos entre si, provenientes do Sol a pino, incidem normalmente na superfície líquida, refratando-se para o interior da água.



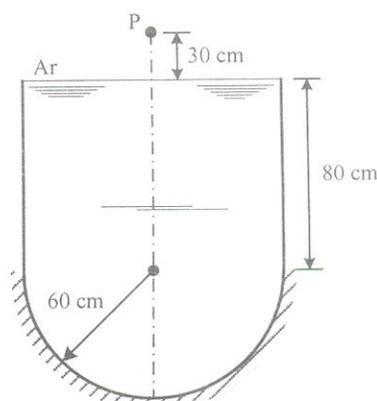
Sabendo-se que para um observador cujo globo ocular situa-se no ponto **O** a imagem do Sol conjugada pelo sistema parece estar a uma profundidade de 30 cm, calcular a distância focal do espelho.

6. Na figura, temos um recipiente cúbico de paredes opacas, vazio, de 40 cm de aresta:



Na posição em que se encontra, o observador **O** não vê o fundo do recipiente, mas vê completamente a parede (1). Calcule a altura mínima da água que se deve despejar no recipiente, para que o observador passe a ver a partícula **P**. Adote o índice de refração da água em relação ao ar igual a  $4/3$ .

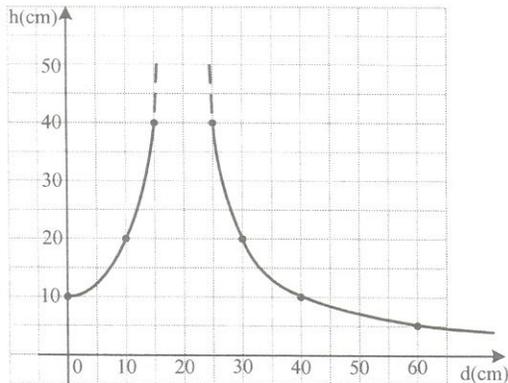
7. Consideremos um recipiente de base hemisférica, cheio de água. A base está extremamente recoberta de prata e seu raio vale 60 cm.



Admitamos que apenas raios paraxiais emitidos pela fonte **P** atravessam a fronteira ar-água e

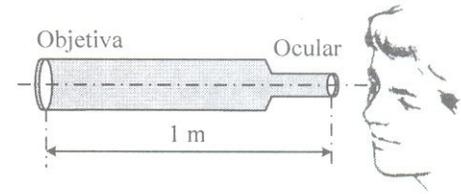
incidam na superfície hemisférica, que produz a imagem  $P'$ . Supondo o índice de refração da água igual a  $4/3$ , determine a posição de  $P'$  em relação à superfície livre da água.

8. Uma lente delgada conjuga uma imagem de altura  $h$  a um objeto (segmento de reta que intercepta perpendicularmente o eixo óptico principal da lente). No gráfico, o valor absoluto de  $h$  está representado em função da distância  $d$  entre o objeto e a lente:



Qual a vergência da lente?

9. Uma lente delgada biconvexa tem raios de curvatura iguais. Essa lente, quando imersa no ar (índice de refração igual a 1), tem 6 di e quando imersa na água (índice de refração igual a  $4/3$ ), tem 2 di. Nessas condições, podemos afirmar que os raios das superfícies diópticas que constituem essa lente são de:
- A. ( ) 100 cm.                      B. ( ) 50 cm.  
C. ( ) 20 cm.                        D. ( ) 10 cm.  
E. ( ) 5 cm.
10. Uma luneta é constituída por uma objetiva e uma ocular, associadas coaxialmente e acopladas a um tubo, cujo interior é fosco. Com o uso do referido instrumento, focaliza-se um corpo celeste e a imagem final visada pelo observador forma-se a 60 cm da ocular. Sabendo-se que a objetiva e a ocular têm distâncias focais de 80 cm e 20 cm, respectivamente, calcular o comprimento da luneta (distância entre a objetiva e a ocular).
11. O esquema abaixo ilustra uma luneta rudimentar, em que tanto a objetiva como a ocular são sistemas refratores convergentes. O instrumento está focalizado para um astro muito afastado, e sua objetiva dista 1 m da ocular, cuja abscissa focal vale 4 cm. Sabendo que a imagem final visada pelo observador situa-se a 12 cm da ocular, calcule a abscissa focal da objetiva.



12. Um projetor rudimentar fornece, para um *slide* quadrado de 5,0 cm de lado, uma imagem também quadrada, porém com 50 cm de lado. Sabendo que a objetiva do projetor é constituída pela justaposição de duas lentes com vergências de  $-1,0$  di e  $+6,0$  di, calcule:
- a) a distância do *slide* ao centro óptico da objetiva;  
b) a distância da tela ao centro óptico da objetiva.
13. (VUNESP-SP) Dispondo-se de duas lentes convergentes de distâncias focais iguais a 1,00 cm, colocadas a uma distância  $d$  uma da outra e com seus eixos principais coincidentes, pretende-se obter uma imagem virtual 100 vezes ampliada de um pequeno objeto colocado a 2,00 cm da primeira lente. Qual deve ser a distância entre as lentes?
14. (PUC-SP) Uma luneta foi construída com duas lentes convergentes de distâncias focais respectivamente iguais a 100 cm e 10 cm. Uma pessoa de vista normal regula a luneta para observar a Lua e depois focaliza um objeto situado a 20 metros de distância. Para tanto, deve deslocar a ocular de aproximadamente:
- A. ( ) 10 cm, aproximando-a da objetiva.  
B. ( ) 10 cm, afastando-a da objetiva.  
C. ( ) 5 cm, aproximando-a da objetiva.  
D. ( ) 5 cm, afastando-a da objetiva.  
E. ( ) 1 cm, afastando-a da objetiva.
15. Considere os dois senhores usuários de óculos representados a seguir. Devido às suas lentes corretivas, o da figura 1 aparenta ter os olhos muito pequenos em relação ao tamanho do seu rosto, ocorrendo o oposto com o da figura 2:

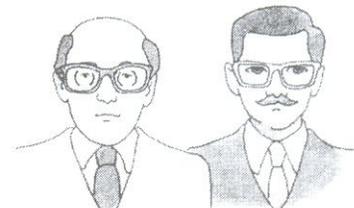


Figura 1

Figura 2

É correto concluir que:

- A. ( ) o senhor da figura 1 é míope e usa lentes convergentes.  
B. ( ) o senhor da figura 1 é hipermetrope e usa lentes divergentes.

- C. ( ) o senhor da figura 2 é míope e usa lentes divergentes.
- D. ( ) o senhor da figura 2 é hipermetrope e usa lentes convergentes.
- E. ( ) os dois senhores têm o mesmo defeito visual.
- 16.** É sabido que para o olho emetrope o ponto remoto situa-se no “infinito”. Um garoto de vista normal coloca as lentes de contato de sua irmã, cuja convergência é de +2,0 di. Nessas condições, qual passa a ser sua distância máxima de visão distinta?
- 17.** Uma lupa de distância focal igual a 5,0 cm é utilizada por um estudante para a observação de um inseto de 2,0 mm de comprimento, situado sobre uma superfície iluminada. Sabe-se que a distância mínima de visão distinta do estudante vale 25 cm e que o inseto é colocado a 4,0 cm da lupa.
- a) A que distância da lupa deverá o estudante dispor seu globo ocular, para perceber a imagem do inseto com tamanho máximo?
- b) Qual o aumento linear transversal fornecido pela lupa e qual o comprimento da imagem do inseto?
- 18.** Um feixe luminoso homogêneo penetra no interior de uma esfera transparente de índice de refração  $n$ , sob ângulo de incidência  $i$ ; ele sofre três reflexões e emerge ao ar.
- Calcular o ângulo  $\theta$  que o raio emergente forma com o incidente, em função de  $i$  e do ângulo de refração  $r$  correspondente.
- 19.** É dado um cubo de vidro, apoiado por uma de suas faces num plano horizontal. A uma das faces verticais cola-se um cartão de mesma altura que a face, porém mais largo do que ela. Expõe-se o sistema à luz solar de tal forma que os raios luminosos sejam paralelos às faces verticais normais ao cartão. Nestas condições, o cartão projeta duas sombras sobre o plano de apoio, uma interior ao cubo de vidro, outra exterior ao mesmo. Pede-se determinar o ângulo de incidência da luz solar sobre o plano horizontal, para que a sombra externa ao cubo seja duas vezes mais longa do que a sombra interna, em função de  $n$  (índice de refração do cubo).
- 20.** Um anteparo acha-se uma distância fixa de uma lente delgada, ocupando a posição de seu plano focal; a convergência da lente é de 8 dioptrias. Quer-se utilizar esse sistema para obter, sobre o anteparo, a imagem de um quadro com as dimensões lineares reduzidas a  $1/5$ . Pergunta-se:
- a) Qual deve ser a distância focal de uma segunda lente, a ser justaposta à primeira?
- b) Qual a distância do quadro ao anteparo?
- 21.** Um ponto luminoso P situado sobre o eixo principal de uma lente convergente de 1 m de distância focal dá uma imagem real  $P_i$  a 11 m da lente.
- a) Qual a distância do ponto luminoso à lente?
- b) Os raios que formam essa imagem são interceptados por um espelho plano, inclinado de  $45^\circ$  sobre o eixo principal, e que secciona o eixo principal num ponto O tal que  $\overline{OP} = 5$  m; em seguida, são recebidos por um espelho côncavo W, com centro em O, e raio de curvatura igual a 5 m. Procurar a imagem final do ponto P através de todo o sistema, e traçar a marcha de um pequeno feixe luminoso proveniente de P.
- c) Faz-se girar o espelho plano em torno de um eixo passando por O, normal ao plano da figura; ele efetua  $N = 500$  rotações por segundo. A imagem final sofre um deslocamento de 0,1 mm. Deduzir dessa experiência a velocidade de propagação da luz.
- 22.** Uma lente delgada convergente de 10 cm de distância focal dá uma imagem real de um objeto, sobre um anteparo situado a 50 cm da lente. Entre a lente e o anteparo, no meio da distância que os separa, coloca-se uma lente divergente de distância focal igual a 5 cm.
- Determine a nova posição do objeto para que sua imagem continue sobre o anteparo.
- 23.** Duas lentes delgadas são postas à distância de 90 cm uma da outra, com eixos principais coincidentes. Uma é convergente, e tem distância focal igual a 60 cm; a outra é divergente.
- Um filamento incandescente é colocado a 140 cm da primeira lente. Seus raios, após atravessarem as duas lentes, definem uma imagem de mesmo tamanho que o objeto, sobre um anteparo. Demonstrar que as duas lentes têm distâncias focais iguais, em módulo.
- 24.** Uma objetiva fotográfica é constituída de duas lentes delgadas justapostas, uma biconvexa de crown, e outra convexo-côncava de flint. Os raios de curvatura das faces da lente convergente, e da face côncava da lente divergente, são iguais em módulo. O raio de curvatura da face convexa da lente divergente é duas vezes maior. Os índices de refração valem:
- $n_c = 1,52$  para o crown, e  $n_f = 1,68$  para o flint.

A distância focal da objetiva mede  $f = 15$  cm.

Pedem-se:

- a) O módulo R do raio de curvatura das faces da lente convergente.
- b) A distância focal individual de cada lente.

**25.** Um objeto retilíneo de comprimento  $y$  e um anteparo E estão paralelamente à distância  $d$  um do outro. Colocamos entre eles uma lente delgada convergente  $L_1$ , cujo eixo é normal ao objeto, e obtemos em E uma imagem de altura  $|y'| = 2 \cdot |y|$ . A seguir intercalamos entre  $L_1$  e E uma lente delgada divergente  $L_2$ , de distância focal igual à de  $L_1$ , em valor absoluto. Nestas condições recebemos no anteparo E, deslocado de 20 cm, e situado no plano focal objeto de  $L_2$ , a imagem  $y''$  dada pelas duas lentes  $L_1$  e  $L_2$ . Pedem-se:

- a) a distância  $l$  entre as duas lentes.
- b) a distância  $d$  do objeto ao anteparo E em sua primeira posição.

**26.** Um objeto acha-se à distância de 1 m de uma lente divergente D de potencial igual a 1 dioptria. Atrás da lente D dispõe-se uma lente convergente C, de potência igual a 2 dioptrias, de tal modo que os eixos principais das duas lentes coincidam. Pedem-se:

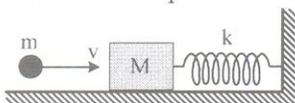
- a) A distância entre os centros óticos das duas lentes, para que o sistema produza uma imagem final real de grandeza igual à do objeto.
- b) A distância D do objeto à imagem.

20. a) 62,5 cm; b) 75 cm
21. a) 1,1 m; c) 314.160.000 m/s
22. 15,22 cm
23.  $f = -60$  cm
24. a) 10,5 cm; b) 10,1 cm e  $-30,86$  cm
25. 100 cm e 180 cm
26. 0,25 m e 2,75 m

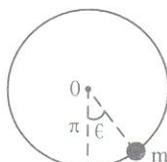
**Gabarito**

1. a) côncavo; b) 9 cm
2. 2 m
3. 60 cm
4. a) 1,47; b) violeta; c) dispersão
5. 60 cm
6.  $\cong 26$  cm
7. 104 cm
8. 5,0 di
9. C
10. 95 cm
11. 97 cm
12. a) 22 cm; b) 2,2 m
13. 2,99 cm
14. D
15. D
16. 50 cm
17. a) 5 cm; b) 5 e 10 mm
18.  $\pi - 2(4\hat{r} - \hat{i})$
19.  $\beta = \text{arc sen} \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$

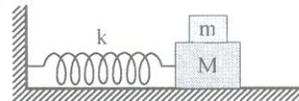
- Um bloco de madeira, cuja densidade relativa à água é  $P$ , tem as dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Enquanto flutua na água, com o lado "a" na vertical, o bloco é empurrado para baixo e abandonado. Calcule o período de oscilação resultante.
- Um pêndulo simples está fixado ao teto de um vagão de trem. Este vagão, desce um plano que tem inclinação  $\theta$ . Sabendo-se que não há atrito entre o vagão e o plano, calcule o período de oscilação do pêndulo.
- Um pêndulo de comprimento  $\ell$  é montado no teto de um vagão de trem, desce um plano inclinado de ângulo  $\alpha$ . Sabendo que o coeficiente de atrito entre o trem e o plano é  $k < \tan \alpha$ , ache a frequência de oscilação do pêndulo.
- Um pêndulo de comprimento  $\ell$  está fixado ao teto de um avião. Calcule o período de oscilação deste pêndulo durante a decolagem do avião, sabendo que na decolagem o avião tem uma aceleração a constante, numa direção que forma  $\theta$  graus com a horizontal.
- Uma esfera de carga negativa  $q$  de massa  $m$  é atada a um fio de comprimento  $\ell$  e sem massa, constituindo um pêndulo simples. Ache o período de oscilação do pêndulo, quando que este é colocado numa região onde atua um campo elétrico  $\vec{E}$  de módulo ascendente e vertical.
- Um bloco de massa  $M$ , capaz de deslizar com atrito desprezível sobre um trilho de ar horizontal, está preso a uma extremidade do trilho por uma mola de massa desprezível e constante elástica  $k$ , inicialmente relaxada  $v$ , atinge-o no instante  $t = 0$  e fica grudada nele (fig.). Ache a expressão do deslocamento  $x$  do sistema para  $t > 0$ .



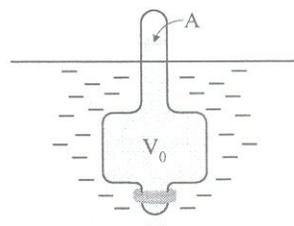
- Uma conta de massa  $m$  enfiada num aro vertical fixo de raio  $r$ , no qual desliza sem atrito, desloca-se em torno do ponto mais baixo, de tal forma que o ângulo  $\theta$  (fig.) permanece pequeno. Mostre que o movimento é harmônico simples e calcule o período.



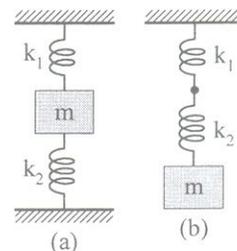
- Um disco de massa  $M$ , preso por uma mola de constante elástica  $k$  e massa desprezível a uma parede vertical, desliza sem atrito sobre uma mesa de ar horizontal. Um bloquinho de massa  $m$  está colocado sobre o disco, com cuja superfície tem um coeficiente de atrito elástico  $\mu_e$ . Qual é a amplitude máxima de oscilação do disco para que o bloquinho não escorregue sobre ele?



- Um densímetro (Cap.1, Probl. 11), fluando em equilíbrio na água, tem um volume  $V_0$  submerso (fig.); a área da seção transversal da porção cilíndrica é  $A$ . Empurrando-o verticalmente para baixo, o densímetro entra em pequenas oscilações na direção vertical. Calcule a frequência angular de oscilação.



- Um oscilador harmônico começa a oscilar em  $t = 0$ . Após  $1/4$  de período, sua energia cinética é 3 vezes maior que a energia potencial. Qual é a fase inicial? (Dê todos os valores possíveis).
- Com um bloco de massa  $m$  e duas molas, de constantes elásticas  $k_1$  e  $k_2$ , montam-se os dois arranjos indicados nas figs. (a) e (b). Calcule as respectivas frequências angulares  $\omega_a$  e  $\omega_b$  de pequenas oscilações verticais em torno do equilíbrio.



- (ITA-SP) Uma partícula move-se no plano  $(x, y)$  de acordo com as equações:

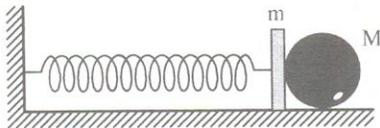
$$x = v_0 t \quad y = A \cos \omega t$$

onde  $v_0 = 3,0$  m/s,  $A = 1,00$  m e  $\omega = 8,0$  rad/s. Calcule o módulo da velocidade da partícula no instante em que  $\omega t = \frac{\pi}{6}$  rad.

- 13.** Num oscilatório, elétrons executam movimentos que são composições de dois movimentos harmônicos simples em direções perpendiculares. Considerando que esses movimentos são descritos pelas equações  $x = A \cos \omega t$  e  $y = B \sin \omega t$ , determine a forma das trajetórias, supondo:
- $A = B$ ;
  - $A \neq B$ .

- 14.** (ITA-SP) A equação  $x = 1,0 \sin(2,0 t)$  expressa a posição de uma partícula em unidades do Sistema Internacional. Qual seria a forma do gráfico  $v(\text{velocidade}) \times x(\text{posição})$  desta partícula?

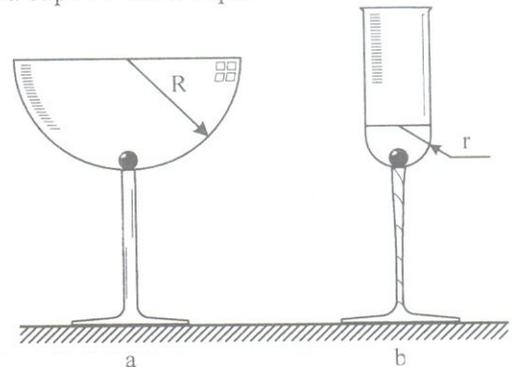
- 15.** Uma mola de constante  $K = 100 \text{ N/m}$  está ligada a uma massa  $m = 0,6 \text{ kg}$  que pode deslizar sem atrito sobre uma mesa horizontal. Comprime-se a mola fazendo-a encurtar  $0,1 \text{ m}$ . Encosta-se à massa  $m$  uma esfera de massa  $M = 0,4 \text{ kg}$ , liberta-se a mola.



Supondo que a esfera desliza sem rolar, qual a velocidade com que se separa de  $m$ ?

- 16.** Um passageiro com  $80 \text{ kg}$  entra num carro. As molas dos amortecedores são comprimidas de  $1,2 \text{ cm}$ . Sendo a massa total suportada pelas molas (incluindo o passageiro)  $900 \text{ kg}$ , qual a frequência característica de oscilação do carro com o passageiro?
- 17.** Um pêndulo simples tem um período de  $1,5 \text{ s}$  na Terra. Quando é posto a oscilar na superfície de outro planeta, o pêndulo passa a  $0,75 \text{ s}$ . Qual é a aceleração de gravidade nesse outro planeta?
- 18.** A frequência característica de uma massa presa a uma mola é de  $5 \text{ Hz}$ .
- Qual a aceleração da massa quando o deslocamento é de  $0,51 \text{ m}$ ?
  - Porque factor se devia aumentar a massa para duplicar o período de oscilação?
- 19.** As aranhas têm sensores nas pernas que lhes permitem capturar as presas através das vibrações na teia. Quando apanhado na rede um insecto de massa igual a  $1 \text{ g}$  provoca uma vibração na teia de  $15 \text{ Hz}$ .
- Qual a constante elástica da teia?
  - Qual a frequência provocada por insecto de  $4 \text{ g}$  ao ser apanhado na teia?

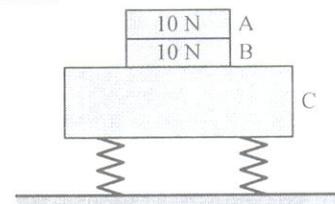
- 20.** Uma ginja oscila no fundo de um copo (figura a). A superfície do copo é esférica, de raio  $3 \text{ cm}$  e a ginja tem  $10 \text{ g}$  de massa. Despreze o atrito da ginja com a superfície do copo.



- Sabendo que a ginja foi largada a partir do bordo do copo sem velocidade inicial calcule a velocidade e a velocidade angular máximas atingidas.
- Calcule a frequência angular e o período da ginja para pequenas oscilações junto do fundo do copo. ( $\theta$  pequeno)
- Se a ginja for ligada a uma mola, que constante elástica deverá ter esta para a frequência angular das oscilações ser idêntica à calculada em b)?
- Se a ginja fosse largada num copo estreito, como se mostra na Figura b, a frequência angular das oscilações na maior ou menor? Porquê?

- 21.** A análise do movimento de um ponto material mostra uma aceleração máxima de  $30 \text{ m/s}^2$  e uma frequência de  $120$  ciclos por minuto. Supondo que o movimento é harmônico simples, determine (a) a amplitude, (b) a velocidade máxima.

- 22.** O período de vibração do sistema ilustrado é de  $0,8 \text{ s}$ . Se o bloco  $A$  é removido, o período é de  $0,7 \text{ s}$ . Determine (a) o peso do bloco  $C$ , (b) o período e vibração quando ambos os blocos  $A$  e  $B$  tiverem sido removidos.



- 23.**
- Calcule a frequência de um pêndulo simples de  $3,0 \text{ m}$  de comprimento.
  - Calcule sua frequência supondo que a extremidade superior do fio seja acelerada para cima a  $2,5 \text{ m/s}^2$ .



c) Qual seria sua frequência supondo que a aceleração mencionada no item anterior seja orientada para *baixo*?

**24.** Em um osciloscópio os elétrons são defletidos por dois campos elétricos perpendiculares entre si, de tal modo que, a qualquer instante, o deslocamento é dado por

$$x = A \cos \omega t \quad y = A \cos(\omega t + \alpha)$$

- a) Descrever a trajetória dos elétrons e determinar sua equação quando  $\alpha = 0^\circ$ ;  
 b) Quando  $\alpha = 30^\circ$ ;  
 c) Quando  $\alpha = 90^\circ$ .

#### Desafios:

**I.** Ache o movimento resultante de dois movimentos harmônicos simples na mesma direção, dados por:

$$x_1 = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right), \quad x_2 = \sin(\omega t)$$

Represente graficamente os respectivos vetores girantes.

**II.** Trace as figuras de Lissajous correspondentes à composição dos seguintes movimentos harmônicos simples em direções perpendiculares:

- a)  $x = A \cos(\omega t)$ ,  $y = A \sin(2\omega t)$   
 b)  $x = A \sin(\omega t)$ ,  $y = A \cos(2\omega t)$

**III.a)** Determinar a massa reduzida de cada uma das seguintes moléculas diatômicas:  $O_2$ ,  $HCl$ ,  $CO$ . Expressar as respostas em unidades de massa atômica, sendo a massa do hidrogênio igual aproximadamente a 1,00 u.m.a.

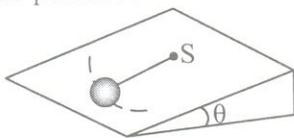
b) Sabe-se que a molécula de  $HCl$  vibra com a frequência fundamental  $\nu = 8,7 \cdot 10^{13}$  Hz. Qual a “constante elástica” efetiva  $k$  para as forças de acoplamento entre os átomos da molécula? Em termos de sua experiência com molas comuns, você diria que “mola das moléculas” é relativamente dura ou não?

#### Gabarito

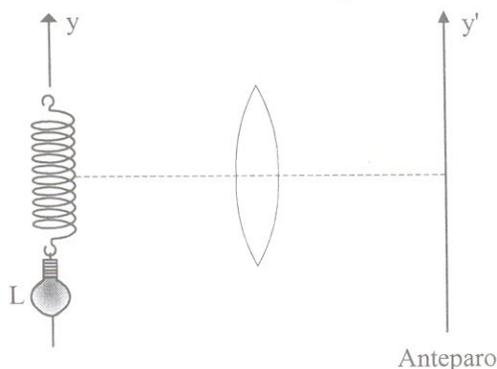
- $T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$
- $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g \cdot \cos \theta}}$
- $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L} (1 - K \sin^2 \alpha + K^2 \cos^2 \alpha)}$
- $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g^2 + a^2 + 2ag \sin \theta}}$
- $T = 2\pi \sqrt{\frac{L \cdot m}{g \cdot m + q \cdot E}}$
- $x = A \sin \omega t$ ; com  $\omega = \sqrt{\frac{K}{m+M}}$  e  $A = \frac{mv}{\omega(m+M)}$
- $T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$
- $A = \mu e \cdot g(m+M)/K$
- $\omega = \sqrt{gA/V_0}$
- $\pm \frac{\pi}{6}$  e  $\pm \pi$
- $\omega = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{m}}$  e  $\omega' = \sqrt{\frac{K_1 K_2}{m(K_1 + K_2)}}$
- 5 m/s
- Circunferência e elipse
- Elipse
- 1 m/s
- 1,36 Hz
- 3,9 m/s<sup>2</sup>
- a) 503,3 m/s<sup>2</sup>  
b) 4
- a) 8,88 N/m  
b) 7,5 Hz
- a) 76,7 cm/s e 25,6 rad/s  
b) 18 rad/s;  $T = 0,35$  s  
c)  $K = 3,267$  N/m  
d) aumentaria
- a) 0,19 m  
b) 2,4 m/s
- a) 2,3 Kg  
b) ,58 s
- a) 0,29 Hz  
b) 0,32 Hz  
c) 0,25 Hz
- a) reta  $y = |x|$   
b) elipse,  $y^2 - \sqrt{3}xy + x^2 = \frac{A^2}{4}$   
c) circunferência:  $x^2 + y^2 = A^2$



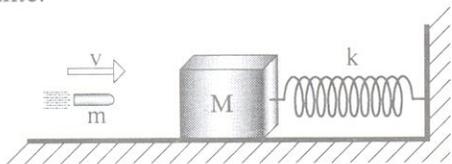
1. Temos um pêndulo simples de comprimento  $\ell$ , suspenso a um ponto S de um plano inclinado que a forma um ângulo  $\theta$  com o horizonte. A massa pendular oscila mantendo-se em contato com o plano inclinado, sem atrito. Determinar o período de oscilação do pêndulo.



2. (ITA) Uma lâmpada L pende de uma mola e executa oscilações verticais, cuja equação é  $y = 2,0 \cos 4,0 t$ , sendo  $y$  medido em mm e  $t$  segundos. Uma lente delgada convergente, de distância focal  $f = 15$  cm é colocada a 20 cm do centro de oscilações da lâmpada e a imagem é projetada num anteparo. Qual é a equação que apresenta o movimento dessa imagem?



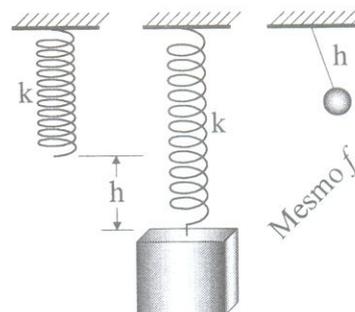
3. Um bloco de massa  $M$ , em repouso numa mesa horizontal sem atrito, é ligado a um suporte rígido por uma mola de constante  $k$ . Uma bala de massa  $m$  e velocidade  $v$  atinge o bloco como mostrado na figura. A bala penetra no bloco. Determine (a) a velocidade do bloco imediatamente após a colisão e (b) a amplitude do movimento harmônico simples resultante.



4. Um corpo de massa 2 kg está sobre uma superfície horizontal sem atrito e ligado a uma mola cuja constante é 600 N/m. Um segundo corpo, de massa 1 kg desliza sobre a superfície, na direção do primeiro, a 6 m/s. (a) Achar a amplitude da oscilação no caso de a colisão ser perfeitamente inelástica e de os dois corpos ficarem juntos depois da colisão. Qual o período de oscilação? (b) Achar a amplitude e o período de oscilação se a colisão for elástica. (c) Com cada tipo de colisão, escrever

uma expressão da posição  $x$  em função do tempo  $t$  para o corpo ligado à mola, admitindo que a colisão ocorra no instante  $t = 0$ . Qual o impulso proporcionado, em cada caso, ao corpo de 2 kg?

5. Dois sistemas oscilantes que você estudou são o massa-mola e o pêndulo simples. Há uma relação interessante entre eles. Suponha que você suspenda um peso da extremidade de uma certa mola e, quando o peso está em repouso, ela fica esticada de uma distância  $h$ . Mostre que a frequência deste sistema massa-mola é a mesma que o de um pêndulo simples cujo comprimento é  $h$ . Veja figura.



6. Determine o período de oscilação de um pêndulo de comprimento " $\ell$ " que está pendurado ao teto de um vagão que possui uma aceleração horizontal  $= \bar{a}$ .
7. Um bloco de madeira, cuja densidade relativa à água é  $P$ , tem as dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Enquanto flutua na água, com o lado " $a$ " na vertical, o bloco é empurrado para baixo e abandonado. Calcule o período de oscilação resultante.
8. Um pêndulo simples está fixado ao teto de um vagão de trem. Este vagão, desce um plano que tem inclinação  $\theta$ . Sabendo-se que não há atrito entre o vagão e o plano, calcule o período de oscilação do pêndulo.
9. Um pêndulo de comprimento  $\ell$  é montado no teto de um vagão de trem. Este trem, desce um plano inclinado de ângulo  $\alpha$ . Sabendo que o coeficiente de atrito entre o trem e o plano é  $k < \tan \alpha$ , ache a frequência de oscilação do pêndulo.
10. Um pêndulo de comprimento  $\ell$  está fixado ao teto de um avião. Calcule o período de oscilação deste pêndulo durante a decolagem do avião, sabendo que na decolagem o avião tem uma aceleração a constante, numa direção que forma  $\theta$  graus com a horizontal.

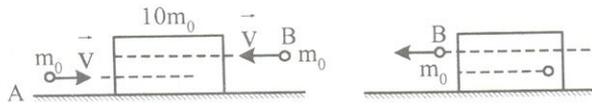
11. Uma esfera de carga negativa  $q$  de massa  $m$  é atada a um fio de comprimento  $\ell$  e sem massa, constituindo um pêndulo simples. Ache o período de oscilação do pêndulo, quando que este é colocado numa região onde atua um campo elétrico  $\vec{E}$  de módulo ascendente e vertical.

Gabarito

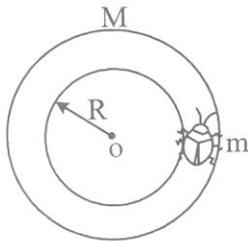
1.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g \sin \theta}}$
2.  $y' = 6 \cdot \cos(4t + \pi)$
3. a)  $\frac{mV}{(M+m)}$   
b)  $\frac{mV}{\sqrt{k \cdot (M+m)}}$
4. a)  $A = 0,141 \text{ m}; T = 0,444 \text{ s}$   
b)  $A = 0,231 \text{ m}; T = 0,63 \text{ s}$   
c) colisão inelástica  $X = 0,141 \cdot \cos(14,1 \cdot t - \pi/2)$ ;  
 $I_2 = 4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ .  
colisão elástica  $X = 0,231 \cdot \cos(17,3 \cdot t - \frac{T}{2})$ ;  
 $I_2 = 8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
6.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$
7.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$
8.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g \cdot \cos \theta}}$
9.  $f = (1/2\pi) \cdot \sqrt{(g/\ell) \cdot (1 - k \cdot \sin^2 \alpha + k^2 \cdot \cos^2 \alpha)}$
10.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g^2 + a^2 + 2ag \cdot \sin \theta}}$
11.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell \cdot m}{g \cdot m + q \cdot E}}$

Frente 1 – ITA

1. (ITA-86) Dois projéteis de igual massa  $m_0$  e mesma velocidade, movem-se em sentidos opostos e colidem simultaneamente com um bloco de madeira de massa  $10m_0$ , conforme mostra a figura. O bloco, inicialmente em repouso, pode deslizar sem atrito sobre a superfície em que se apóia. O projétil A, que se desloca para a direita, fica aprisionado ao bloco, enquanto que o projétil B, que se desloca para a esquerda, atravessa o bloco, e mantém a direção original. A velocidade do projétil B, após atravessar o bloco de madeira é  $100 \text{ ms}^{-1}$ . Podemos afirmar que a velocidade final do bloco de madeira será da ordem de:



- A. ( )  $-8,2 \text{ ms}^{-1}$   
 B. ( )  $+8,2 \text{ ms}^{-1}$   
 C. ( )  $9,1 \text{ ms}^{-1}$   
 D. ( )  $110 \text{ ms}^{-1}$   
 E. ( ) indeterminado, pois não são conhecidas as posições e velocidades iniciais dos projéteis.
2. (ITA-86) Sobre uma superfície perfeitamente lisa, encontra-se em repouso um anel de massa  $M$  e raio  $R$ . Sobre este anel encontra-se em repouso uma joaninha de massa “ $m$ ”.



Se a joaninha caminhar sobre o anel, podemos afirmar que:

- A. ( ) a joaninha não ira se deslocar. Somente o anel adquirirá um movimento de rotação em torno de seu centro de simetria;  
 B. ( ) a joaninha descreverá órbitas circulares em torno do centro do anel, enquanto que o anel girará em sentido contrário em torno do seu centro;  
 C. ( ) a joaninha e o centro de massa (C.M.) do sistema descreverão respectivamente órbitas circulares de raios  $r = R$  e

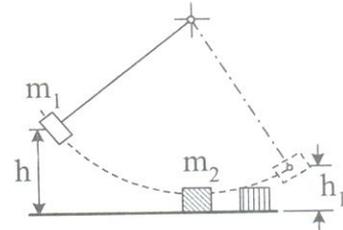
$$R_{CM} = \frac{mR}{(m + M)};$$

- D. ( ) O centro de massa (C.M.) do sistema permanecerá em repouso, enquanto que a joaninha descreverá órbitas circulares de

$$\text{raio } r = \frac{MR}{(m + M)};$$

- E. ( ) Nenhuma das afirmações acima está correta.

3. (ITA-87) O martelo da figura, cuja massa  $m_1$  pode ser considerada concentrada na sua extremidade, cai de uma altura  $h$  e imprime velocidade  $v_2$  à massa  $m_2$  localizada, inicialmente em repouso, no ponto mais baixo da trajetória de  $m_1$ . Esta última ( $m_1$ ) ainda atinge a altura  $h_1$ , após o choque. Podemos afirmar que:



- A. ( )  $h_1 \geq h$   
 B. ( ) Se o choque for elástico e  $m_1 = m_2$ ,  $h_1 = 0$   
 C. ( )  $m_1gh = m_2v_2^2/2$   
 D. ( )  $m_1gh_1 = m_2v_2^2/2$   
 E. ( ) A quantidade de calor gerada no choque é  $m_1gh - m_2v_2^2/2$

4. (ITA-87)



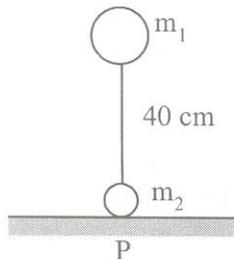
Um bloco de madeira de massa  $M$  está oscilando horizontalmente sobre uma mesa sem atrito, sob a ação de uma mola de constante elástica  $k$ . A amplitude de sua oscilação é  $A$ .

Quando a elongação da mola é máxima, o bloco é atingido por uma bala de massa  $m$ , viajando horizontalmente. A bala se engasta instantaneamente no bloco e a amplitude do movimento passa a ser  $2A$ . Pedem-se:

- a) a velocidade  $v$  da bala antes de atingir o bloco.  
 b) a máxima velocidade que o sistema atingirá após o choque.  
 c) a quantidade de calor gerada no choque, supondo que toda a energia dissipada se transforme em calor.

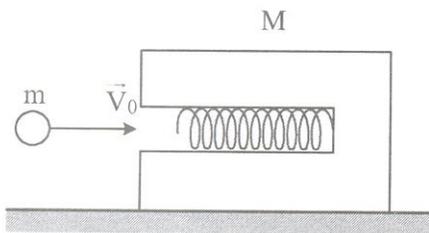
São dados:  $M, K, A, m$ .

5. (ITA-88) As massas  $m_1 = 3,0 \text{ kg}$  e  $m_2 = 1,0 \text{ kg}$ , foram fixadas nas extremidades de uma haste homogênea, de massa desprezível e  $40 \text{ cm}$  de comprimento. Este sistema foi colocado verticalmente sobre uma superfície plana, perfeitamente lisa, conforme mostra a figura, e abandonado. A massa  $m_1$  colidirá com a superfície a uma distância  $x$  do ponto P dada por:



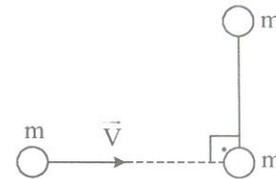
- A. ( )  $x = 0$  (no ponto P)  
 B. ( )  $x = 10 \text{ cm}$   
 C. ( )  $x = 20 \text{ cm}$   
 D. ( )  $x = 30 \text{ cm}$   
 E. ( )  $x = 40 \text{ cm}$

6. (ITA-88) Uma bola de massa  $m$  é lançada, com velocidade inicial  $\vec{v}_0$ , para o interior de um canhão de massa  $M$ , que se acha inicialmente em repouso sobre uma superfície lisa e sem atrito, conforme mostra a figura. O canhão é dotado de uma mola. Após a colisão, a mola, que estava distendida, fica comprimida ao máximo e a bola fica aderida ao sistema, mantendo a mola na posição de compressão máxima. Supondo que a energia mecânica do sistema permaneça constante, a fração da energia cinética inicial da bola que ficará armazenada em forma de energia potencial elástica será igual a:



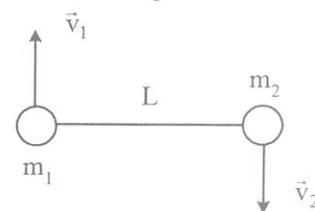
- A. ( )  $m/M$   
 B. ( )  $M/m$   
 C. ( )  $M/(m + M)$   
 D. ( )  $m/(m + M)$   
 E. ( )  $1,0$
7. (ITA-88) Uma haste rígida e de massa desprezível possui presas em suas extremidades duas massas idênticas  $m$ . Este conjunto acha-se sobre uma superfície horizontal perfeitamente lisa (sem

atrito). Uma terceira partícula também de massa  $m$  e velocidade  $\vec{v}$  desliza sobre esta superfície numa direção perpendicular à haste e colide inelasticamente com uma das massas da haste, ficando colada à mesma após a colisão. Podemos afirmar que a velocidade do centro de massa  $V_{CM}$  (antes e após a colisão), bem como o movimento do sistema após a colisão serão:



	$V_{CM}$ (antes)	$V_{CM}$ (após)	Mov. Subseqüente do sistema
A. ( )	0	0	circular e uniforme
B. ( )	0	$v/3$	translacional e rotacional
C. ( )	0	$v/3$	só translacional
D. ( )	$v/3$	$v/3$	translacional e rotacional
E. ( )	$v/3$	0	só rotacional

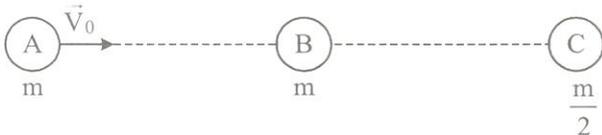
8. (ITA-88) Nas extremidades de uma haste homogênea, de massa desprezível e comprimento  $L$ , acham-se presas as massas  $m_1$  e  $m_2$ . Num dado instante, as velocidades dessas massas são, respectivamente,  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , ortogonais à haste (ver figura). Seja  $\vec{V}_{CM}$  a velocidade do centro da massa, em relação ao laboratório e seja  $\omega_0$  módulo da velocidade angular com que a haste se acha girando em torno de um eixo que passa pelo centro de massa. Pode-se mostrar que:



	$\vec{V}_{CM}$	$\omega$
A. ( )	$\frac{m_1 \vec{v}_1 - m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$	$\frac{ v_1 - v_2 }{L}$
B. ( )	$\frac{m_2 \vec{v}_2 - m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}$	$\frac{ v_2 - v_1 }{L}$
C. ( )	$\frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$	$\frac{ v_1 - v_2 }{L}$
D. ( )	$\frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$	$\frac{(v_1 + v_2)}{L}$
E. ( )	$\frac{m_1 \vec{v}_1 - m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$	$\frac{(v_1 + v_2)}{L}$

**9.** (ITA-88) Um plano inclinado de ângulo  $\alpha$  e massa  $M$  encontra-se em repouso numa mesa horizontal perfeitamente lisa. Uma joaninha de massa  $m$  inicia a subida deste plano inclinado a partir da mesa. Ela mantém em relação ao plano inclinado sua velocidade  $u$  constante. Determinar a velocidade do plano inclinado.

**10.** (ITA-88) A figura abaixo esquematiza o estudo de colisões unidimensionais.



A partícula (A) de massa  $m$  com uma velocidade inicial  $\vec{v}_0$  colide com a partícula (B) também de massa  $m$  que se acha em repouso. A colisão é perfeitamente elástica. Após a primeira colisão a partícula (B) colide com a partícula (C) de massa  $m/2$ , que se acha em repouso. No processo acima descrito, calcular:

- a) a velocidade  $V_{CM}$  do Centro de Massa deste sistema de partículas;
- b) a velocidade  $V_B$  da partícula B após a colisão perfeitamente elástica com a partícula C.

**11.** (ITA-89) Se o impulso de uma força  $\vec{F}$  aplicada a um corpo de massa  $m$  e velocidade  $\vec{v}$  durante um intervalo de tempo  $\Delta t$  tem sentido contrário ao da velocidade, podemos afirmar que:

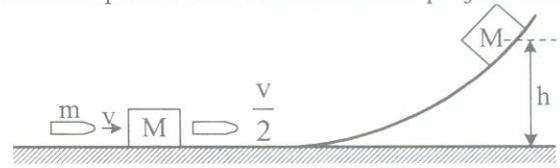
- A. ( ) o sentido da velocidade do corpo certamente mudou.
- B. ( ) o sentido da velocidade do corpo certamente permaneceu inalterado.
- C. ( ) o sentido da velocidade do corpo pode ter mudado como pode ter permanecido inalterado.
- D. ( ) o módulo da quantidade de movimento do corpo diminuiu.
- E. ( ) o módulo da quantidade de movimento do corpo aumentou.

**12.** (ITA-90) Uma metralhadora dispara 200 balas por minuto. Cada bala tem 28 g e uma velocidade de 60 m/s. Neste caso a metralhadora ficará sujeita a uma força média, resultante dos tiros, de:

- A. ( ) 0,14 N                      B. ( ) 5,6 N
- C. ( ) 55 N                        D. ( ) 336 N
- E. ( ) outro valor.

**13.** (ITA-90) Um projétil de massa  $m$  e velocidade  $v$  atinge um objeto de massa  $M$ , inicialmente imóvel. O projétil atravessa o corpo de massa  $M$  e sai dele

com velocidade  $v/2$ . O corpo que foi atingido desliza por uma superfície sem atrito, subindo uma rampa até a altura  $h$ . Nestas condições podemos afirmar que a velocidade inicial do projétil era de:



- A. ( )  $v = \frac{2M}{m} \sqrt{2gh}$       B. ( )  $v = 2 \sqrt{2 \frac{M}{m} gh}$
- C. ( )  $v = 2 \sqrt{\frac{M}{m} gh}$       D. ( )  $v = \sqrt{8gh}$
- E. ( )  $v = \sqrt{2gh}$

**14.** (ITA-91) Segundo um observador acoplado a um referencial inercial, duas partículas de massa  $m_A$  e  $m_B$  possuem velocidades  $\vec{v}_A$  e  $\vec{v}_B$ , respectivamente. Qual a quantidade de movimento  $\vec{p}_A$  que um observador preso ao centro de massa do sistema mede para a partícula A?

- A. ( )  $\vec{p}_A = m_A \cdot \vec{v}_A$
- B. ( )  $\vec{p}_A = m_A \cdot (\vec{v}_A - \vec{v}_B)$
- C. ( )  $\vec{p}_A = \left( \frac{m_A \cdot m_B}{m_A + m_B} \right) \cdot \vec{v}_A$
- D. ( )  $\vec{p}_A = \left( \frac{m_A \cdot m_B}{m_A + m_B} \right) \cdot (\vec{v}_A - \vec{v}_B)$
- E. ( ) nenhuma das anteriores.

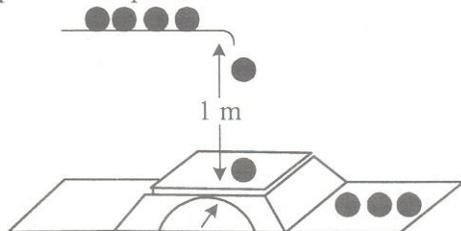
**15.** (ITA-91) Um pêndulo simples de comprimento  $\ell$  e massa  $m$  é posto a oscilar. Cada vez que o pêndulo passa pela posição de equilíbrio atua sobre ele, durante um pequeno intervalo de tempo  $t$ , uma força  $F$ . Esta força é constantemente ajustada para, a cada passagem, ter mesma direção e sentido que a velocidade de  $m$ . Quantas *oscilações completas* são necessárias para que o pêndulo forme um ângulo reto com a direção vertical de equilíbrio?

- A. ( )  $n = \frac{m \sqrt{g\ell}}{2 Ft}$                       B. ( )  $n = \frac{m g\ell \sqrt{2}}{2 Ft}$
- C. ( )  $n = \frac{m \sqrt{2 g\ell}}{2 Ft}$                       D. ( )  $n = \frac{mg\ell}{Ft} + 1$
- E. ( ) nenhuma das anteriores.

**16.** (ITA-92) Um objeto de massa  $M$  é deixado cair de uma altura  $h$ . Ao final do 1º segundo de queda o objeto é atingido horizontalmente por um projétil de massa  $m$  e velocidade  $v$ , que nele se aloja. Calcule o desvio  $x$  que o objeto sofre ao atingir o solo, em relação ao alvo pretendido.

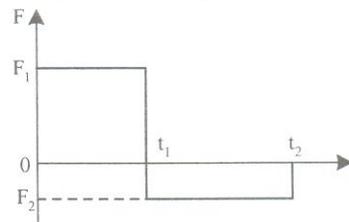
- A. ( )  $\sqrt{2h/g} \cdot (M + m) \cdot v.$   
 B. ( )  $\sqrt{2h/g} \cdot \frac{m}{M + m} \cdot v.$   
 C. ( )  $(\sqrt{2h/g} - 1) \cdot \frac{m}{M + m} \cdot v.$   
 D. ( )  $(\sqrt{2h/g} - 1) \cdot \frac{m}{M + m} \cdot v.$   
 E. ( )  $(1 - \sqrt{2h/g}) \cdot (M + m) \cdot v.$

- 17.** (ITA-92) No dispositivo da figura, bolas de gude de 20 g cada uma estão caindo, a partir do repouso, de uma altura de 1 metro, sobre a plataforma de uma balança. Elas caem a intervalos de tempo iguais  $\Delta t$  e após o choque estão praticamente paradas, sendo imediatamente retiradas da plataforma. Sabendo que o ponteiro da balança indica, em média 20 kg, e que a aceleração da gravidade vale  $10 \text{ m/s}^2$ , podemos afirmar que a frequência de queda é:



- A. ( )  $\sqrt{20}$  bolas por segundo.  
 B. ( )  $20\sqrt{5}$  bolas por segundo.  
 C. ( )  $1/60$  bolas por segundo.  
 D. ( )  $10^3\sqrt{5}$  bolas por segundo.  
 E. ( )  $10^2$  bolas por segundo.
- 18.** (ITA-94) Uma granada de massa  $m$  é lançada a partir de um ponto do gramado de um campo de futebol com velocidade inicial  $v_0 = 30 \text{ m/s}$  que forma com a horizontal um ângulo  $\theta = 45^\circ$ . Segundo o relato de um observador: "No ponto mais alto de sua trajetória a granada explodiu em dois fragmentos iguais, cada um de massa  $m/2$ , um dos quais (o primeiro), aí sofreu uma "parada" e caiu verticalmente sobre o campo. O segundo fragmento também caiu sobre o campo". Nestas condições, desprezando-se a resistência do ar pode-se afirmar que o segundo fragmento atingiu o campo a uma distância do ponto de lançamento igual a:
- A. ( ) 45,0 m  
 B. ( ) 67,5 m  
 C. ( ) 135 m  
 D. ( ) 90,0 m  
 E. ( ) o relato do observador contraria a lei de conservação da quantidade de movimento.

- 19.** (ITA-95) A figura mostra o gráfico da força resultante agindo numa partícula de massa  $m$ , inicialmente em repouso. No instante  $t_2$  a velocidade da partícula,  $V_2$ , será:



- A. ( )  $V_2 = [(F_1 + F_2) \cdot t_1 - F_2 \cdot t_2] / m$   
 B. ( )  $V_2 = [(F_1 - F_2) \cdot t_1 - F_2 \cdot t_2] / m$   
 C. ( )  $V_2 = [(F_1 - F_2) \cdot t_1 + F_2 \cdot t_2] / m$   
 D. ( )  $V_2 = [F_1 \cdot t_1 - F_2 \cdot t_2] / m$   
 E. ( )  $V_2 = [(t_2 - t_1) \cdot (F_1 - F_2)] / 2m$
- 20.** (ITA-95) Uma massa  $m_1$  em movimento retilíneo com velocidade de  $8,0 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$  colide frontal e elasticamente com outra massa  $m_2$  em repouso e sua velocidade passa a ser  $5,0 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$ . Se a massa  $m_2$  adquire a velocidade de  $7,5 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$  podemos concluir que a massa  $m_1$  é:
- A. ( )  $10 m_2$                       B. ( )  $3,2 m_2$   
 C. ( )  $0,5 m_2$                       D. ( )  $0,04 m_2$   
 E. ( )  $2,5 m_2$
- 21.** (ITA-95) Todo caçador ao atirar com um rifle, mantém a arma firmemente apertada contra o ombro evitando assim o "coice" da mesma. Considere que a massa do atirador é 95,0 kg, a massa do rifle é 5,00 kg, e a massa do projétil é 15,0 g a qual é disparada a uma velocidade de  $3,00 \cdot 10^4 \text{ cm/s}$ . Nestas condições, a velocidade de recuo do rifle ( $v_r$ ) quando se segura muito frouxamente a arma e a velocidade de recuo do atirador ( $v_a$ ) quando ele mantém a arma firmemente apoiada no ombro serão respectivamente:
- A. ( ) 0,90 m/s;  $4,7 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$   
 B. ( ) 90,0 m/s; 4,7 m/s  
 C. ( ) 90,0 m/s; 4,5 m/s  
 D. ( ) 0,90 m/s;  $4,5 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$   
 E. ( ) 0,10 m/s;  $1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$
- 22.** (ITA-96) Um avião a jato se encontra na cabeceira da pista com a sua turbina ligada e com os freios acionados, que o impedem de se movimentar. Quando o piloto aciona a máxima potência, o ar é expelido a uma razão de 100 kg por segundo, a uma velocidade de 600 m/s em relação ao avião. Nessas condições:
- A. ( ) a força transmitida pelo ar expelido ao avião é nula, pois um corpo não pode exercer força sobre si mesmo.

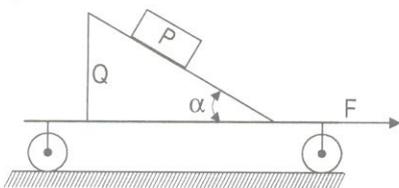
- B. ( ) as rodas do avião devem suportar uma força horizontal igual a 60 kN.
- C. ( ) se a massa do avião é de  $7 \cdot 10^3$  kg o coeficiente de atrito mínimo entre as rodas e o piso deve ser de 0,2.
- D. ( ) não é possível calcular a força sobre o avião com os dados fornecidos.
- E. ( ) nenhuma das afirmativas acima é verdadeira.

**Frente 1 – IME**

**23.** (IME-86) Um automóvel de massa igual a 800 kg desloca-se com uma velocidade de 10 m/s. Em um dado momento, dá-se uma explosão interna e o carro parte-se em dois pedaços de 400 kg cada um. Devido à explosão, uma energia de translação de 1600 joules é comunicada ao sistema constituído pelas duas partes do carro. Ambos os pedaços continuaram a se mover na mesma linha do movimento inicial. Determine o módulo e o sentido das velocidades de cada um dos fragmentos após a explosão.

**24.** (IME-88) Um carro de peso  $Q$ , provido de uma rampa fixa e inclinada de ângulo  $\alpha$ , suporta um bloco de peso  $P$ . O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a rampa vale  $\mu$ . Não há atrito entre o carro e o chão. Determine:

- a) o maior valor da aceleração com a qual o carro pode ser movimentado sem que o corpo comece a subir a rampa.
- b) a intensidade  $F$  da força horizontal correspondente.

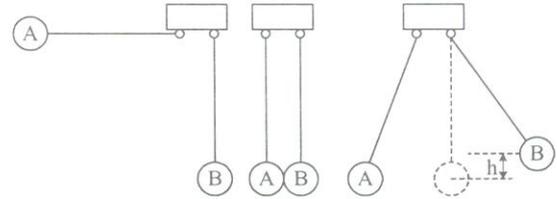


Dados:  $P = 100$  N       $Q = 500$  N  
 $\mu = 0,5$        $\cos \alpha = 0,8$   
 $\sin \alpha = 0,6$        $g = 10$  m/s<sup>2</sup>

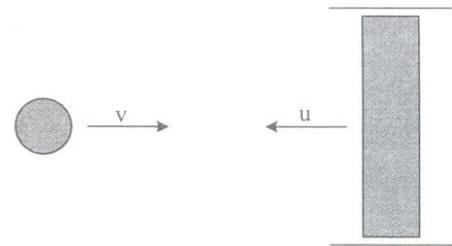
- a) a velocidade angular da barra;
  - b) a tração no fio.
- Dado:  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>

**25.** (IME-88) Um pêndulo A, de peso  $P_A = 10$  N, é solto com velocidade nula de uma posição horizontal e oscila livremente até a posição vertical, atingindo o pêndulo B, de peso  $P_B = 17$  N, que está inicialmente em repouso. Os pêndulos têm o mesmo comprimento  $\ell = 0,45$  m. Devido ao choque (com coeficiente de restituição  $e = 0,8$ ), o

pêndulo B oscila até uma altura  $h$  desde a sua posição inicial. Calcule esta altura  $h$ . Considere  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.



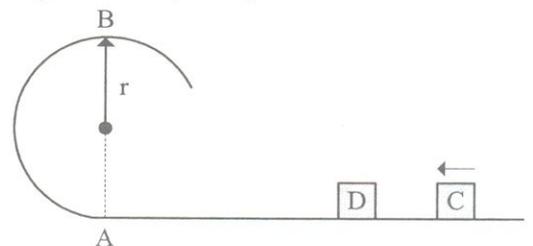
**26.** (IME-89) Uma bola elástica de massa  $M$  move-se, com velocidade  $v$ , na direção de um anteparo que se move no sentido contrário, com velocidade  $u$ . Considere a massa do anteparo como infinitamente grande quando comparada com a massa da bola. Determine:



- a) a velocidade da bola depois do choque;
- b) o trabalho das forças elásticas durante o choque.

**27.** (IME-90) Um bloco C desliza com velocidade constante sobre o trecho horizontal da pista e choca-se com o bloco D, de mesma massa, inicialmente em repouso. Em consequência, o bloco D desloca-se e ao passar no ponto mais alto B não exerce qualquer esforço sobre a pista. O bloco C continua em movimento e chega a subir na parte curva da pista até a altura de 0,2 m em relação ao trecho horizontal. Desprezando a resistência do ar e o atrito entre as superfícies, determine a velocidade do bloco C antes do choque.

Dados:  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>;  $r = 2,88$  m.



**28.** (IME-90) Uma bola cai de uma altura  $H = 5$  m e saltita sobre uma placa rígida na superfície da terra. Um pesquisador observa que o tempo decorrido entre o início de sua queda e o instante em que a bola atinge a altura máxima após dois choques com a placa é de 3,24 segundos. Desprezando-se as

resistências e admitindo que os choques tenham o mesmo coeficiente de restituição, determine:

- a) o coeficiente de restituição dos choques;  
b) a altura máxima após o 2º choque.

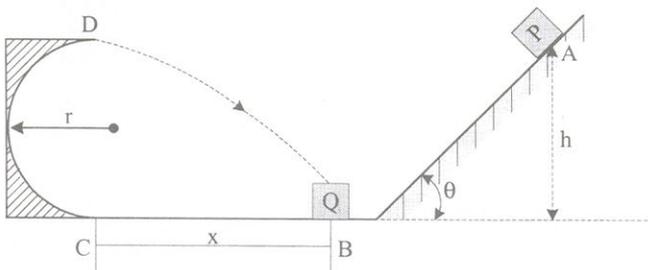
Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$

- 29.** (IME-91) A figura mostra um bloco "P" de massa 10 kg que parte do repouso em "A" e desce o plano inclinado com atrito cujo coeficiente cinético é  $\mu = 0,2$ . Em "B", o bloco "P" choca-se com o bloco "Q" de massa 2 kg, inicialmente em repouso. Com o choque, "Q" desloca-se na pista horizontal, desliza sobre sua parte semicircular e vai cair sobre o ponto "D".

Sabendo que as partes horizontal e semicircular da pista não têm atrito e que o coeficiente de restituição entre "P" e "Q" é 0,8, determine a altura "D".

Dados:

$$g = 10 \text{ m/s}^2; r = 2,5 \text{ m}; x = 2\sqrt{11} \text{ m}; \theta = 45^\circ$$



Obs: Despreze a resistência do ar e as dimensões dos blocos.

- 30.** (IME-93) Na borda de uma mesa há várias esferas pequenas de massas variadas.

No solo, sobre a extremidade de uma gangorra, está um rato de 200g de massa, como mostra a figura.

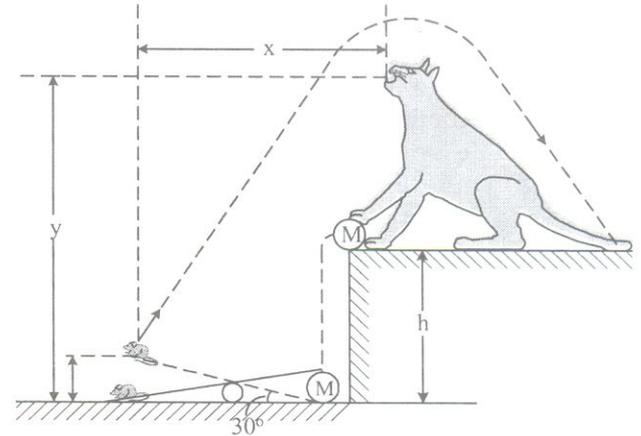
Um gato empurra uma esfera de massa  $M$  para cair na extremidade da gangorra oposta ao rato, na esperança de que este seja arremessado diretamente à sua boca, ao passar pelo ponto mais alto da trajetória.

O rato arremessado pela gangorra, passa sobre a cabeça do gato, caio sobre a sua cauda e foge...

O gato despontado, pede que você determine qual deveria ter sido a massa  $M$  da esfera para que seu plano tivesse dado certo.

Dados:  $h = 1 \text{ m}; y = 1,6 \text{ m}; x = \frac{3}{\sqrt{3}} \text{ m}; z = 0,6 \text{ m}$

Obs.: Despreze a existência do ar, as resistências passivas e o peso da gangorra. Considere que a metade da energia da queda da esfera é absorvida pelo solo.

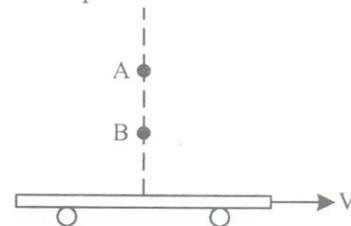


- 31.** (IME-95) Em uma fábrica de bombons, tabletes de balas caem continuamente sobre o prato de uma balança, que originalmente indicava leitura nula. Eles caem de uma altura de 1,8 m à razão de 6 por segundo. Determine a leitura da escala da balança, ao fim de 10 s, sabendo que cada tablete tem massa de 10 g e as colisões são completamente inelásticas.

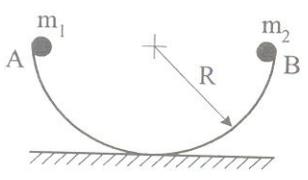
Nota: Despreze a resistência do ar.

Considere  $g = 10 \text{ m/s}^2$

- 32.** (IME-95) De dois pontos A e B situados sobre a mesma vertical, respectivamente, a 45 metros e 20 metros do solo, deixa-se cair no mesmo instante duas esferas, conforme mostra a figura abaixo. Uma prancha se desloca no solo, horizontalmente, com movimento uniforme. As esferas atingem a prancha em pontos que distam 2,0 metros. Supondo a aceleração local da gravidade igual a  $10 \text{ m/s}^2$  e desprezando a resistência do ar, determine a velocidade da prancha.



- 33.** (IME-96) A figura abaixo mostra um hemisfério oco e liso, cujo plano equatorial é mantido fixo na horizontal. Duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  são largadas no mesmo instante, de dois pontos diametralmente opostos, A e B, situados na borda do hemisfério. As partículas chocam-se e, após o choque,  $m_1$  sobe até uma altura  $h_1$  e  $m_2$  sobe até uma altura  $h_2$ . Determine o coeficiente de restituição do choque. Sabe-se que  $h_1 = R/2$  e  $h_2 = R/3$ , onde  $R$  é o raio do hemisfério.



Frente 2 – ITA

- 34.** (ITA-86) Se colocarmos um satélite artificial de massa “m” girando ao redor de Marte ( $6,37 \cdot 10^{23}$  kg) numa órbita circular, a relação entre a sua energia cinética (T) e a potencial gravitacional (U) será:
- A. ( )  $T = \frac{U}{2}$       B. ( )  $T = 2U$   
 C. ( )  $T = \frac{U}{2m}$       D. ( )  $T = mU$   
 E. ( )  $T = U$
- 35.** (ITA-87) A respeito da lei da gravitação universal podemos afirmar que:
- A. ( ) Exprime-se pela fórmula  $P = mg$ .  
 B. ( ) Pode ser deduzida das leis de Kepler do movimento planetário.  
 C. ( ) Evidencia a esfericidade da Terra.  
 D. ( ) Implica em que todos os movimentos planetários sejam circulares.  
 E. ( ) É compatível com as leis de Kepler do movimento planetário.
- 36.** (ITA-89) Comentando as leis de Kepler para o movimento planetário, um estudante escreveu:
- I) Os planetas do sistema solar descrevem elipses em torno do Sol que ocupa o centro dessas elipses.  
 II) Como o dia (do nascer ao pôr-do-sol) é mais curto no inverno e mais longo no verão, conclui-se que o vetor posição da Terra (linha que une esta ao Sol) varre uma área do espaço menor no inverno do que no verão, para o mesmo período de 24 horas.  
 III) Como a distância média da Terra ao Sol é de  $1,50 \cdot 10^8$  km e a de Urano ao Sol é de  $3,00 \cdot 10^9$  km, pela 3ª lei de Kepler conclui-se que o “ano” de Urano é igual a 20 vezes o ano da Terra.  
 IV) As leis de Kepler não fazem referência à força de interação entre o Sol e os planetas.
- Verifique quais as afirmações que estão corretas e assinale a opção correspondente.
- A. ( ) I e IV estão corretas.  
 B. ( ) Só a I está correta.  
 C. ( ) II e IV estão corretas.  
 D. ( ) Só a IV está correta.  
 E. ( ) II e III estão corretas.

- 37.** (ITA-89) Um astronauta faz experiências dentro do seu satélite esférico, que está em órbita circular ao redor da Terra. Colocando com cuidado um objeto de massa m bem no centro do satélite o astronauta observa que o objeto mantém sua posição ao longo do tempo. Baseando na 2ª lei de Newton, um observador no Sol tenta explicar esse fato com as hipóteses abaixo. Qual delas é correta?
- A. ( ) Não existem forças atuando sobre o objeto (o próprio astronauta sente-se imponderável).  
 B. ( ) Se a força de gravitação da Terra  $F_g = G \frac{M_T m_o}{r^2}$  está atuando sobre objeto e este fica imóvel é porque existe uma força centrífuga oposta que a equilibra.  
 C. ( ) A carcassa do satélite serve de blindagem contra qualquer força externa.  
 D. ( ) As forças aplicadas pelo Sol e pela Lua equilibram a atração da Terra.  
 E. ( ) A força que age sobre o satélite é a da gravitação, mas a velocidade tangencial v do satélite deve ser tal que  $mv^2/r = G \frac{M_T m_o}{r^2}$
- 38.** (ITA-91) Considere um planeta cuja massa é o triplo da massa da Terra e seu raio, o dobro do raio da Terra. Determine a relação entre a velocidade de escape deste planeta e a da Terra ( $v_p/v_T$ ) e a relação entre a aceleração gravitacional na superfície do planeta e da Terra ( $g_p/g_T$ ).
- A. ( )  $\frac{v_p}{v_T} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)}$  e  $\frac{g_p}{g_T} = \frac{3}{4}$   
 B. ( )  $\frac{v_p}{v_T} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)}$  e  $\frac{g_p}{g_T} = \frac{3}{4}$   
 C. ( )  $\frac{v_p}{v_T} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)}$  e  $\frac{g_p}{g_T} = \frac{3}{2}$   
 D. ( )  $\frac{v_p}{v_T} = \left(\frac{3}{2}\right)$  e  $\frac{g_p}{g_T} = \frac{3}{4}$   
 E. ( ) nenhuma das anteriores.
- 39.** (ITA-92) Na 3ª lei de Kepler, a constante de proporcionalidade entre o cubo do semi-eixo maior da elipse (a) descrita por um planeta e o quadrado do período (P) de translação do planeta, pode ser deduzida do caso particular do movimento circular. Sendo G a constante da gravitação universal, M a massa do Sol, R o raio do Sol temos:
- A. ( )  $\frac{a^3}{p^2} = \frac{GMR}{4\pi^2}$       B. ( )  $\frac{a^3}{p^2} = \frac{GR}{4\pi^2}$

C. ( )  $\frac{a^3}{p^2} = \frac{GM}{2\pi^2}$       D. ( )  $\frac{a^3}{p^2} = \frac{GM^2}{R}$   
 E. ( )  $\frac{a^3}{p^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$

**40.** (ITA-94) As distâncias médias ao Sol dos seguintes planetas são: Terra,  $R_T$ ; Marte,  $R_M = 1,5 R_T$  e Júpiter,  $R_J = 5,2 R_T$ . Os períodos de revolução de Marte e Júpiter em anos terrestres (A) são:

MARTE      JÚPITER

- A. ( ) 1,5 A      9,7 A  
 B. ( ) 1,5 A      11,0 A  
 C. ( ) 1,8 A      11,9 A  
 D. ( ) 2,3 A      14,8 A  
 E. ( ) 3,6 A      23,0 A

**41.** (ITA-97) O primeiro planeta descoberto fora do sistema solar, 51 Pegasi B, órbita a estrela 51 Pegasi, completando uma revolução a cada 4,2 dias. A descoberta do 51 Pegasi B, feita por meios espectroscópicos, foi confirmada logo em seguida por observação direta do movimento periódico da estrela devido ao planeta que a órbita. Conclui-se que 51 Pegasi B orbita a estrela 51 Pegasi à 1/20 da distância entre o Sol e a Terra.

Considere as seguintes afirmações: se o semi-eixo maior da órbita do planeta 51 Pegasi B fosse 4 vezes maior do que é, então

- I. A amplitude do movimento periódico da estrela 51 Pegasi, como visto da Terra, seria 4 vezes maior do que é.  
 II. A velocidade máxima associada ao movimento periódico da estrela 51 Pegasi, como visto da Terra, seria 4 vezes maior do que é.  
 III. O período de revolução do planeta 51 Pegasi B seria de 33,6 dias.

Das afirmativas mencionadas:

- A. ( ) Apenas I é correta.  
 B. ( ) I e II são corretas.  
 C. ( ) I e III são corretas.  
 D. ( ) II e III são corretas.  
 E. ( ) As informações fornecidas são insuficientes para concluir quais são corretas.

**Frente 2 – IME**

**42.** (IME-86) O raio e a massa de um planeta x, sem atmosfera, valem respectivamente  $0,5R_T$  e  $0,2M_T$ .  $R_T$  e  $M_T$  são raio e massa da Terra. Sendo de  $10 \text{ m/s}^2$  a aceleração da gravidade na superfície da Terra, determine:

1. a aceleração da gravidade na superfície do planeta x.

2. a velocidade mínima, com que um corpo deveria ser lançado do planeta x, para escapar de seu campo gravitacional.

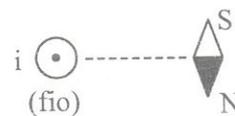
**43.** (IME-86) Na superfície de uma planeta hipotético, de raio igual ao da Terra, um pêndulo simples oscila com um período de 2,0s. Sabendo que, na própria Terra, o período de oscilação do mesmo pêndulo vale  $\sqrt{2} \text{ s}$ , determine a razão entre as massas do planeta e da Terra.

**Frente 3 – ITA**

**44.** (ITA-86) Coloca-se uma bússola nas proximidades de um fio retilíneo, vertical, muito longo, percorrido por uma corrente elétrica, contínua “i”. A bússola é disposta horizontalmente e assim a agulha imantada pode girar livremente em torno de seu eixo. Nas figuras abaixo, o fio é perpendicular ao plano do papel, com a corrente no sentido indicado (saindo).

Assinalar a posição de equilíbrio estável, da agulha imantada, desprezando-se o campo magnético terrestre (Explicar).

A. ( )



B. ( )



C. ( )

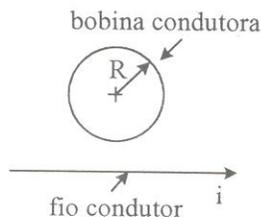


D. ( )



E. ( ) nenhuma das situações anteriores.

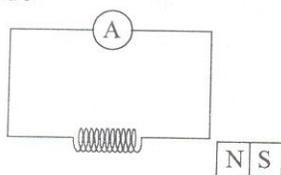
**45.** (ITA-86) Um fio retilíneo e longo acha-se percorrido por uma corrente “i” que pode aumentar ou diminuir com o tempo. Uma espira condutora circular de raio “R” acha-se nas proximidades deste fio, com o seu eixo de simetria disposto perpendicularmente ao fio como mostra a figura. Qualquer variação na corrente “i” que percorre o fio, irá, segundo a lei de indução de Faraday, induzir uma corrente “ $I_{ind}$ ” na bobina cujo sentido será ditado pela lei de Lenz, ou seja, esta corrente induzida “ $I_{ind}$ ” tem sentido tal que tende a criar um fluxo de  $\vec{B}_{ind}$  através da bobina, oposto à variação do fluxo de  $\vec{B}$  que lhe deu origem. Se a corrente “i” que percorre o fio, estiver crescendo ou decrescendo no tempo, a corrente “ $I_{ind}$ ” deverá ter seu sentido indicado na configuração:



- A. ( )
- B. ( )
- C. ( )
- D. ( )
- E. ( ) nenhuma das configurações acima acha-se correta.

46. (ITA-87) Um quadro retangular de lados  $a$  e  $b$  é formado de fio condutor com resistência total  $R$ . Ele é disposto perpendicularmente às linhas de força de um campo de indução uniforme  $\vec{B}$ . A intensidade desse campo é reduzida a zero num tempo  $T$ . A carga elétrica total que circula pelo quadro nesse tempo é:
- A. ( ) zero                      B. ( )  $B ab/RT$
- C. ( )  $B ab/R$                       D. ( )  $\frac{B(a^2 + b^2)}{R}$
- E. ( )  $\frac{B\sqrt{ab}(a+b)}{R}$

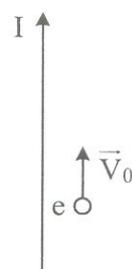
47. (ITA-87) A figura representa um ímã com seus pólos Norte e Sul, próximo a um circuito constituído por uma bobina e um medidor sensível de corrente.
- Impondo-se à bobina e ao ímã determinados movimentos o medidor poderá indicar passagem de corrente quando



- A. ( ) o ímã e a bobina se movimentam, aproximando-se.
- B. ( ) a bobina se aproxima do ímã, que permanece parado.

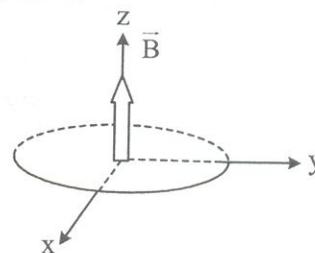
- C. ( ) o ímã se desloca para a direita e a bobina para a esquerda.
- D. ( ) o ímã e a bobina se deslocam ambos para a direita, com a mesma velocidade.
- E. ( ) o ímã se aproxima da bobina e esta permanece parada.

48. (ITA-88) Um fio retilíneo, muito longo, é percorrido por uma corrente contínua  $I$ . Próximo do fio, um elétron é lançado com velocidade inicial  $\vec{v}_0$ , paralela ao fio, como mostra a figura. Supondo que a única força atuante sobre o elétron seja a força magnética devida à corrente  $I$ , o elétron descreverá uma:

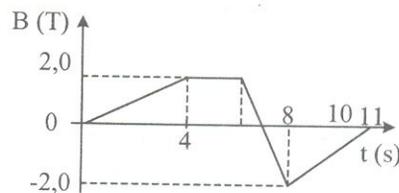


- A. ( ) trajetória retilínea
- B. ( ) circunferência
- C. ( ) curva reversa
- D. ( ) curva plana não circular
- E. ( ) espiral

49. (ITA-88) Aplica-se um campo de indução magnética uniforme  $\vec{B}$  perpendicularmente ao plano de uma espira circular de área  $A = 0,5\text{m}^2$  como mostra a figura.

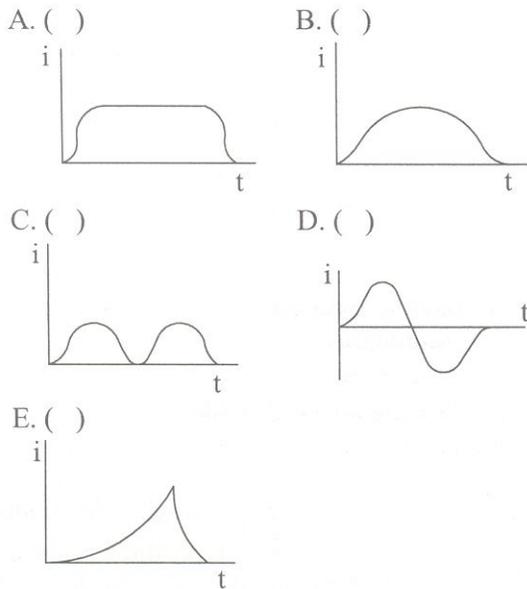
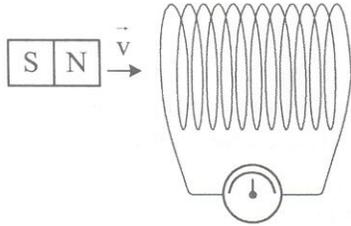


O vetor  $\vec{B}$  varia com o tempo segundo o gráfico a seguir.



- a) Esquematize em escala a força eletromotriz induzida como função do tempo, adotando como positiva a força eletromotriz que coincide com o sentido horário, e negativa a que coincide com o sentido anti-horário.
- (Obs.: Supor que a espira seja vista de cima).
- b) Explique o seu raciocínio

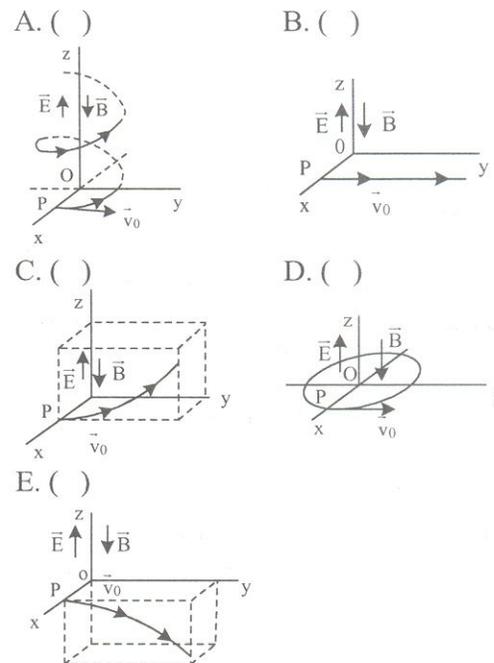
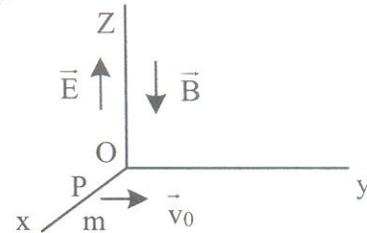
- 50.** (ITA-89) Uma barra imantada atravessa uma bobina cilíndrica como indica a figura com velocidade constante coaxialmente à mesma. Qual dos gráficos abaixo representa melhor a corrente indicada pelo galvanômetro como função do tempo?



- 51.** (ITA-89) Ao fazer a sua opção na questão anterior você deve ter-se baseado numa lei física. Deve ter sido a lei de:
- A. ( ) Ampère                      B. ( ) Lenz  
C. ( ) Biot-Savart                D. ( ) Coulomb  
E. ( ) Ohm

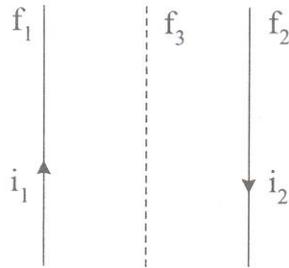
- 52.** (ITA-89) Uma bobina circular de raio  $R = 1,0$  cm e 100 espiras de fio de cobre, colocada num campo de indução magnética constante e uniforme, tal que  $B = 1,2$  T, está inicialmente numa posição tal que o fluxo de  $\vec{B}$  através dela é máximo. Em seguida, num intervalo de tempo  $\Delta t = 1,5 \cdot 10^{-2}$  s ela é girada para uma posição em que o fluxo de  $\vec{B}$  através dela é nulo. Qual é a força eletromotriz média induzida entre os terminais da bobina?
- A. ( )  $2,5 \cdot 10^{-2}$  V  
B. ( )  $5,9 \cdot 10^{-4}$  V  
C. ( ) 2,5 V  
D. ( )  $5,9 \cdot 10^{-6}$  V  
E. ( ) 80 V

- 53.** (ITA-89) Uma partícula de massa  $m$  e carga  $q > 0$  é produzida no ponto P do plano (x,y) com velocidade  $\vec{v}_0$  paralela ao eixo y, dentro de uma região onde existe um campo elétrico  $\vec{E}$  e um campo de indução magnética  $\vec{B}$ , ambos uniformes e constantes, na direção do eixo z e com os sentidos indicados. Qual deverá ser, aproximadamente, a trajetória da partícula? (Despreze o efeito da gravidade).

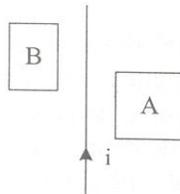


- 54.** (ITA-89) Dois fios condutores, paralelos, muito longos estão separados por uma distância  $d = 8,0$  cm. O fio  $f_1$  conduz uma corrente contínua  $i_1 = 60$  A e o fio  $f_2$  conduz  $i_2 = 35$  A em sentido oposto. A permeabilidade magnética do ar é:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m. Calcule:

- a) o valor do campo de indução magnética ( $\vec{B}$ ) numa linha coplanar com os dois fios e a meia distância entre eles;
- b) idem numa linha paralela a  $f_1$  e  $f_2$  mas a 7,0 cm de  $f_2$  e 15 cm de  $f_1$ ;
- c) a força por unidade de comprimento sobre um terceiro fio  $f_3$ , longo, paralelo aos outros dois e situado a meia distância entre eles, que transporta uma corrente de 15 A no mesmo sentido de  $i_2$ . Qual o sentido dessa força?



55. (ITA-90) A figura representa um fio retilíneo pelo qual circula uma corrente de  $i$  ampères no sentido. Próximo do fio existem duas espiras retangulares A e B planas e coplanares com o fio. Se a corrente no fio retilíneo está crescendo com o tempo pode-se afirmar que:



- A. ( ) aparecem correntes induzidas em A e B, ambas no sentido horário.
- B. ( ) aparecem correntes induzidas em A e B, ambas no sentido anti-horário.
- C. ( ) aparecem correntes induzidas no sentido anti-horário em A e horário em B.
- D. ( ) neste caso só se pode dizer o sentido da corrente induzida se conhecermos as áreas das espiras A e B.
- E. ( ) o fio atrai as espiras A e B.

56. (ITA-91) Em uma região do espaço onde existe um campo elétrico uniforme  $\vec{E}$ , dois pêndulos simples de massas  $m = 0,20$  kg e comprimento  $\ell$  são postos a oscilar. A massa do primeiro pêndulo está carregada com  $q_1 = +0,20$  C e a massa do segundo pêndulo com  $q_2 = -0,20$  C. São dados que a aceleração da gravidade local é  $g = 10,0$  m/s<sup>2</sup>, que o campo elétrico tem mesmas direção e sentido que  $\vec{g}$  e sua intensidade é  $|\vec{E}| = 6,0$  V/m. A razão  $(p_1/p_2)$ , entre os períodos  $p_1$  e  $p_2$  dos pêndulos 1 e 2, é:

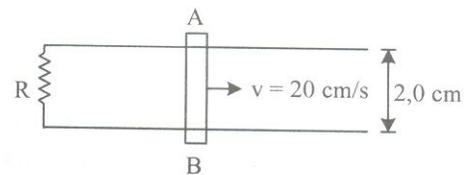
- A. ( ) 1/4
- B. ( ) 1/2
- C. ( ) 1
- D. ( ) 2
- E. ( ) 4

57. (ITA-91) Um atirador, situado sobre a linha do equador, dispara um projétil dirigido de oeste para leste. Considere que, devido ao atrito no cano da arma, o projétil adquiriu carga  $q$ . A interação do campo magnético da Terra com a carga do projétil tende a desviá-lo para:

- A. ( ) o norte geográfico independente do sinal de  $q$ .

- B. ( ) o sul geográfico independente do sinal de  $q$ .
- C. ( ) o norte geográfico se  $q$  for positivo.
- D. ( ) o norte geográfico se  $q$  for negativo.
- E. ( ) nenhuma das anteriores.

58. (ITA-91) Uma espira em forma de U está ligada a um condutor móvel AB. Este conjunto é submetido a um campo de indução magnética  $B = 4,0$  T, perpendicular ao papel e dirigido para dentro dele. Conforme mostra a figura, a largura do U é de 2,0 cm. Determine a tensão induzida e o sentido da corrente, sabendo-se que a velocidade de AB é de 20 cm/s.

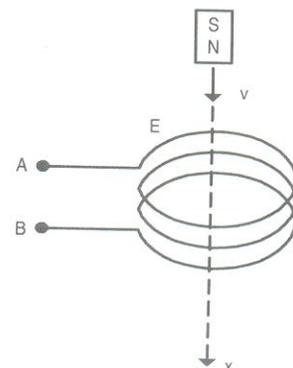


- A. ( ) 1,6 V e a corrente tem sentido horário
- B. ( ) 1,6 V e a corrente tem sido anti-horário
- C. ( ) 0,16 V e a corrente tem sido horário
- D. ( ) 0,16 V e a corrente tem sido anti-horário
- E. ( ) nenhuma das anteriores

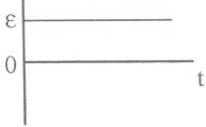
59. (ITA-92) Consideremos uma carga elétrica  $q$  entrando com velocidade  $\vec{v}$  num campo magnético  $\vec{B}$ . Para que a trajetória de  $q$  seja uma circunferência é necessário e suficiente que:

- A. ( )  $\vec{v}$  seja perpendicular a  $\vec{B}$  e que  $\vec{B}$  seja uniforme e constante.
- B. ( )  $\vec{v}$  seja paralela a  $\vec{B}$ .
- C. ( )  $\vec{v}$  seja perpendicular a  $\vec{B}$ .
- D. ( )  $\vec{v}$  seja perpendicular a  $\vec{B}$  e que  $\vec{B}$  tenha simetria circular.
- E. ( ) Nada se pode afirmar pois não é dado o sinal de  $q$ .

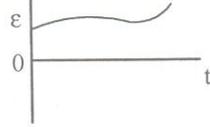
60. (ITA-92) Um ímã se desloca com velocidade constante ao longo do eixo  $x$  da espira E, atravessando-a. Tem-se que a f.e.m.  $\epsilon$  induzida entre A e B varia em função do tempo mais aproximadamente, de acordo com a figura:



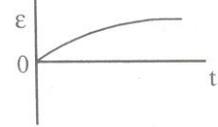
A. ( )



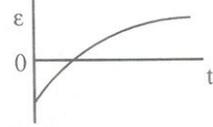
B. ( )



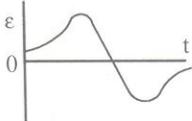
C. ( )



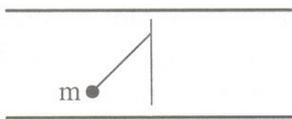
D. ( )



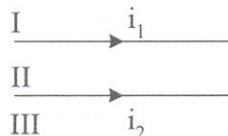
E. ( )



61. (ITA-93) Uma pequena esfera metálica de massa  $m$ , está suspensa por um fio fino de massa desprezível, entre as placas de um grande capacitor plano, como mostra a figura. Na ausência de qualquer carga tanto no capacitor quanto na esfera o período de oscilação da esfera é  $T = 0,628$  s. Logo em seguida uma carga  $+e$  é colocada sobre a esfera e a placa superior do capacitor é carregada positivamente. Nessas novas condições o período de oscilação da esfera torna-se  $T = 0,314$  s. Qual é a força que o campo elétrico do capacitor exerce sobre a esfera?



- A. ( )  $F = 3.m.g$   
 B. ( )  $F = 2.m.g$   
 C. ( )  $F = m.g$   
 D. ( )  $F = 6.m.g$   
 E. ( )  $F = 3.m.g/2$
62. (ITA-93) Correntes  $i_1$  e  $i_2$  fluem na mesma direção ao longo de dois condutores paralelos, separados por uma distância  $a$ , com  $i_1 > i_2$ . Em qual das três regiões I, II ou III, e para que distância  $x$  medida a partir do condutor onde passa a corrente  $i_1$ , é a indução magnética igual a zero?



- A. ( ) Região I,  $x = i_2 a / (i_1 + i_2)$   
 B. ( ) Região II,  $x = i_2 a / (i_1 - i_2)$   
 C. ( ) Região II,  $x = i_1 a / (i_1 + i_2)$   
 D. ( ) Região III,  $x = i_1 a / (i_1 - i_2)$   
 E. ( ) Região III,  $x = i_1 i_2 a / (i_1 + i_2)$

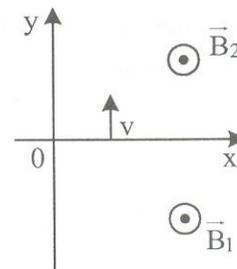
63. (ITA-95) Uma partícula com carga  $q$  e massa  $M$  move-se ao longo de uma reta com velocidade  $v$  constante numa região onde estão presentes um campo elétrico de  $500$  V/m e um campo de indução magnética de  $0,10$  T. Sabe-se que ambos os campos e a direção de movimento da partícula são mutuamente perpendiculares. A velocidade da partícula é:

- A. ( )  $500$  m/s  
 B. ( ) constante para quaisquer valores dos campos elétrico e magnético  
 C. ( )  $(M/q) 5,0 \cdot 10^3$  m/s  
 D. ( )  $5,0 \cdot 10^3$  m/s  
 E. ( ) Faltam dados para o cálculo.

64. (ITA-95) Um pêndulo simples é construído com uma esfera metálica de massa  $m = 1,0 \cdot 10^{-4}$  kg carregada com uma carga elétrica de  $3,0 \cdot 10^{-5}$  C e um fio isolante de comprimento  $l = 1,0$  m de massa desprezível. Este pêndulo oscila com período  $P$  num local em que  $g = 10,0$  m/s<sup>2</sup>. Quando um campo elétrico uniforme e constante  $\vec{E}$  é aplicado verticalmente em toda região do pêndulo o seu período dobra de valor. A intensidade do campo elétrico  $E$  é de:

- A. ( )  $6,7 \cdot 10^3$  N/C    B. ( )  $42$  N/C  
 C. ( )  $6,0 \cdot 10^{-6}$  N/C    D. ( )  $33$  N/C  
 E. ( )  $25$  N/C.

65. (ITA-96) Na figura abaixo, numa experiência hipotética, o eixo  $x$  delimita a separação entre duas regiões com valores diferentes de campo de indução magnética,  $B_1$  para  $y < 0$  e  $B_2$  para  $y > 0$ , cujos sentidos são iguais (saindo da página). Uma partícula de carga positiva,  $+q$ , é lançada de um ponto do eixo  $x$  com velocidade  $v$  no sentido positivo do eixo  $y$ . Nessas condições pode-se afirmar que:



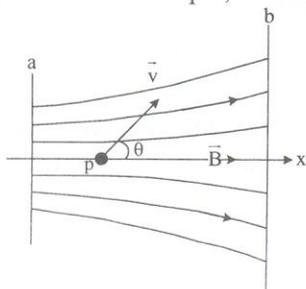
- A. ( ) a partícula será arrastada, com o passar do tempo, para a esquerda (valores de  $x$  decrescentes) se  $B_1 < B_2$ .  
 B. ( ) a partícula será arrastada, com o passar do tempo, para a esquerda (valores de  $x$  decrescentes) se  $B_1 > B_2$ .  
 C. ( ) a partícula seguirá uma trajetória retilínea.

- D. ( ) a partícula descreverá uma trajetória circular.  
 E. ( ) nenhuma das afirmativas acima é correta.
- 66.** (ITA-96) A agulha de uma bússola está apontando corretamente na direção norte-sul. Um elétron se aproxima a partir do norte com velocidade  $v$ , segundo a linha definida pela agulha. Neste caso:  
 A. ( ) a velocidade do elétron deve estar necessariamente aumentando em módulo.  
 B. ( ) a velocidade do elétron estará certamente diminuindo em módulo.  
 C. ( ) o elétron estará se desviando para leste.  
 D. ( ) o elétron se desviará para oeste.  
 E. ( ) nada do que foi dito acima é verdadeiro.

**67.** (ITA-96) O valor da indução magnética no interior de uma bobina em forma de tubo cilíndrico é dado, aproximadamente, por  $B = \mu.n.i$  onde  $\mu$  é a permeabilidade do meio,  $n$  o número de espiras por unidade de comprimento e  $i$  é a corrente elétrica. Uma bobina deste tipo é construída com um fio fino metálico de raio  $r$ , resistividade  $\rho$  e comprimento  $L$ . O fio é enrolado em torno de uma forma de raio  $R$  obtendo-se assim uma bobina cilíndrica de uma única camada, com espiras uma ao lado da outra. A bobina é ligada aos terminais de uma bateria ideal de força eletromotriz igual a  $V$ . Neste caso pode-se afirmar que o valor de  $B$  dentro da bobina é:

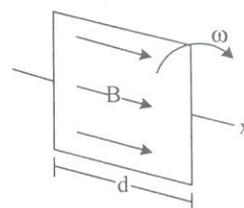
- A. ( )  $\frac{\mu.\pi.r.V}{2.\rho.L}$       B. ( )  $\frac{\mu.\pi.R.V}{2.\rho.L}$   
 C. ( )  $\frac{\mu.\pi.r^2.V.L}{2.\rho}$       D. ( )  $\frac{\mu.\pi.r.V}{2.R^2.L}$   
 E. ( )  $\frac{\mu.r^2.V}{2.R^2.L}$

**68.** (ITA-97) Na região do espaço entre os planos  $a$  e  $b$ , perpendiculares ao plano do papel, existe um campo de indução magnética, simétrico ao eixo  $x$ , cuja magnitude diminui com o aumento de  $x$ , como mostrado na figura abaixo. Uma partícula de carga  $q$  é lançada a partir do ponto  $p$  no eixo  $x$ , com uma velocidade formando um ângulo  $\theta$  com o sentido positivo desse eixo. Desprezando o efeito da gravidade, pode-se afirmar que, inicialmente:



- A. ( ) A partícula seguirá uma trajetória retilínea, pois o eixo  $x$  coincide com uma linha de indução magnética.  
 B. ( ) A partícula seguirá uma trajetória aproximadamente em espiral com raio constante.  
 C. ( ) Se  $\theta < 90^\circ$ , a partícula seguirá uma trajetória aproximadamente em espiral com raio crescente.  
 D. ( ) A energia cinética da partícula aumentará ao longo da trajetória.  
 E. ( ) Nenhuma das alternativas acima é correta.

**69.** (ITA-97) Uma espira quadrada de lado  $d$  está submersa numa região de campo de indução magnética uniforme e constante, de magnitude  $B$ , como mostra a figura abaixo. A espira gira ao redor de um eixo fixo  $x$  com velocidade angular  $\omega$  constante, de tal maneira que o eixo permanece sempre paralelo às linhas do campo magnético. A força eletromotriz induzida na espira pelo movimento é:



- A. ( ) 0  
 B. ( )  $B.d^2.\text{sen } \omega t$   
 C. ( )  $B.d^2.\omega.\text{cos } \omega t$   
 D. ( )  $B.d^2.\omega$   
 E. ( ) Depende da resistência da espira.

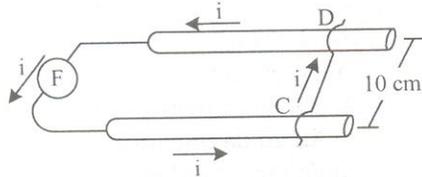
**70.** (ITA-97) Um violinista deixa cair um diapasão de frequência 440 Hz. A frequência que o violinista ouve na iminência do diapasão tocar no chão é de 436 Hz. Desprezando o efeito da resistência do ar, a altura da queda é:

- A. ( ) 9,4 m  
 B. ( ) 4,7 m  
 C. ( ) 0,94 m  
 D. ( ) 0,47 m  
 E. ( ) Inexistente, pois a frequência deve aumentar à medida que o diapasão se aproxima do chão.

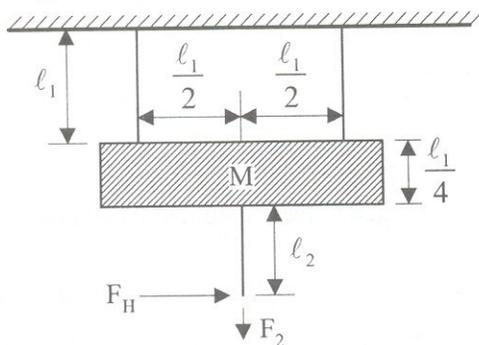
Frente 3 – IME

**71.** (IME-86) A haste condutora rígida  $CD$ , de massa 0,05 kg pode deslizar sem atrito ao longo de duas guias fixas paralelas, horizontais, distanciadas de 10 cm, como mostrado na figura. A haste conduz uma corrente  $i = 2A$  no sentido indicado, mantida constante pela fonte  $F$ , e está submetida a um

campo magnético uniforme e constante, dirigido verticalmente de baixo para cima, valor  $B = 0,05 \text{ weber/m}^2$ . Indicar o sentido em e calcular o valor da velocidade adquirida pela haste em  $t = 2$  segundos, supondo que ela estivesse em repouso no instante  $t = 0$ .

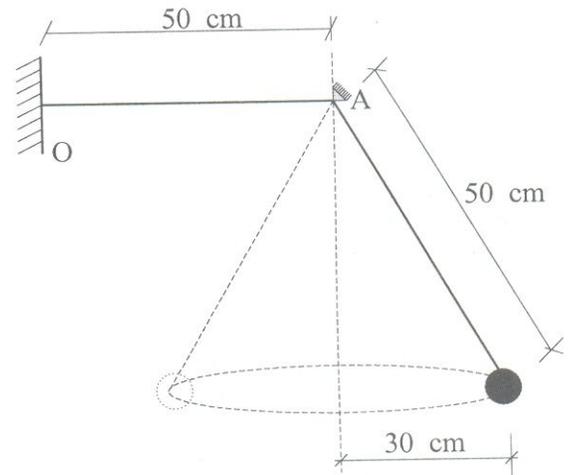


- 72.** (IME-90) Uma placa infinitamente rígida encontra-se suspensa do teto por duas cordas elásticas de comprimento  $\ell_1$ . Uma terceira corda, igualmente elástica e de comprimento  $\ell_2$ , tem uma extremidade fixada à placa e outra submetida a uma força vertical  $F_2$ . Num dado instante, um pulso horizontal  $F_H$  é aplicado nesta última extremidade. Determine o tempo transcorrido entre a aplicação do pulso e a chegada das ondas transversais no teto, considerando a massa das cordas desprezível na presença da massa da placa e uma tração constante ao longo das cordas.

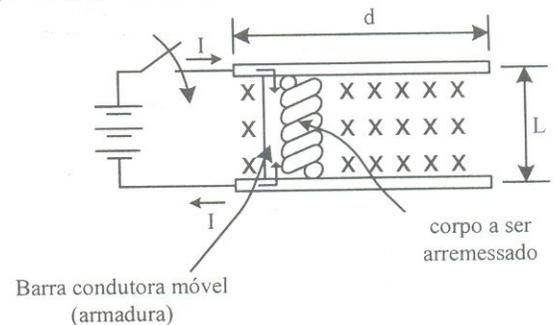


- Dados: - massa da placa:  $M = 210 \text{ kg}$   
 - comprimento  $\ell_1 = 0,5 \text{ m}$   
 - comprimento  $\ell_2 = 1,0 \text{ m}$   
 - força  $F_2 = 300 \text{ N}$   
 - aceleração da gravidade:  $g = 10 \text{ m/s}^2$   
 - massa por unidade de comprimento das cordas:  $\mu = 0,030 \text{ kg/m}$ .

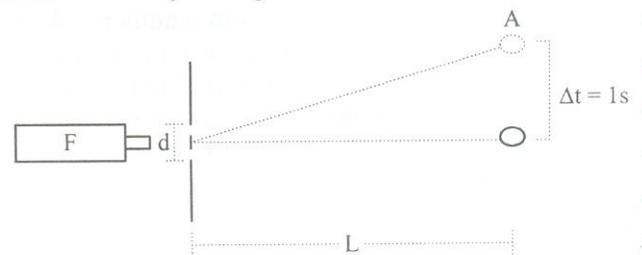
- 73.** (IME-91) Um fio preso na extremidade o atravessa a argola fixa A e sustenta um corpo de massa  $m = 3,2 \text{ kg}$ . A densidade linear de massa do fio é de  $4 \text{ g/m}$ . O corpo move-se formando um pêndulo cônico conforme a figura. Determine a menor frequência possível para uma onda estacionária que oscile na parte horizontal do fio.  
 Dado:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



- 74.** (IME-95) A figura abaixo mostra um canhão magnético sem atrito, que tem dimensões  $d = 10 \text{ m}$ ,  $L = 0,1 \text{ m}$  e campo magnético  $B = 100 \text{ T}$ . Determine a corrente na armadura necessária para acelerar  $100 \text{ g}$  (incluindo a armadura) de zero a  $11,3 \text{ km/s}$  no final do canhão.



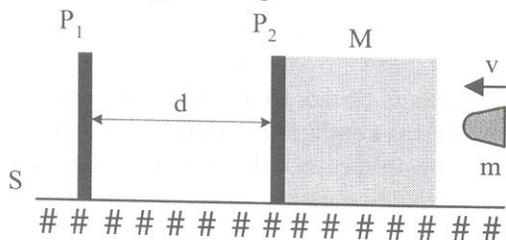
- 75.** (IME-97) Na figura a seguir, a partícula A, que se encontra em queda livre, passa pelo primeiro máximo de interferência com velocidade de  $5 \text{ m/s}$  e, após um segundo, atinge o máximo central. A fonte de luz F é monocromática com comprimento de onda de  $5.000 \text{ \AA}$  e a distância  $d$  entre os centros da fenda dupla é igual a  $10^{-6} \text{ m}$ . Calcule a distância L.  
 Dado: aceleração da gravidade =  $10 \text{ m/s}^2$ .



- 76.** (IME-97) Na figura abaixo, as placas metálicas  $P_1$  e  $P_2$  estão inicialmente separadas por uma distância  $d = 12 \text{ cm}$ . A placa  $P_1$  está fixada na superfície plana S e a placa  $P_2$  está colocada na face de um cubo de madeira de massa M, que pode deslizar sem atrito

sobre  $S$ . A capacitância entre as placas é de  $6 \mu\text{F}$ . Dispara-se um tiro contra o bloco de madeira com uma bala de massa  $m$ , ficando a bala encravada no bloco. Oito milisegundos após o impacto, a capacitância iguala-se a  $9 \mu\text{F}$ . Determine a velocidade da bala antes do impacto. (Despreze a resistência do ar e a massa de  $P_2$ ).

Dados:  $M = 600 \text{ g}$ ;  $m = 6 \text{ g}$

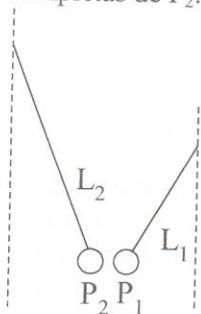


Frente 4 – ITA

**77.** (ITA-87) Dois pêndulos simples, respectivamente de massas  $m_1$  e  $m_2$  e comprimentos  $\ell_1$  e  $\ell_2$  são simultaneamente abandonados para pôr-se em oscilação. Constata-se que a cada quatro ciclos do primeiro a situação inicial é restabelecida identicamente. Nessas condições pode-se afirmar que *necessariamente*:

- A. ( ) O pêndulo 2 deve oscilar mais rapidamente que o pêndulo 1.
- B. ( ) O pêndulo 2 deve oscilar mais lentamente que o pêndulo 1.
- C. ( )  $8\sqrt{\ell_1/\ell_2}$  é um número inteiro.
- D. ( )  $6\sqrt{\ell_1/\ell_2}$  é um número inteiro
- E. ( )  $m_1\ell_1 = 2m_2\ell_2$

**78.** (ITA-89) Dois pêndulos simples,  $P_1$  e  $P_2$ , de comprimentos  $L_1$  e  $L_2$ , estão indicados na figura. Determine  $L_2$  em função de  $L_1$  para que a situação indicada se repita a cada 5 oscilações completas de  $P_1$  e 3 oscilações completas de  $P_2$ .



- A. ( )  $L_2 = 1,66 \dots L_1$
- B. ( )  $L_2 = 2,77 \dots L_1$
- C. ( )  $L_2 = 0,60 \dots L_1$
- D. ( )  $L_2 = 0,36 \dots L_1$
- E. ( )  $L_2 = 15 L_1$

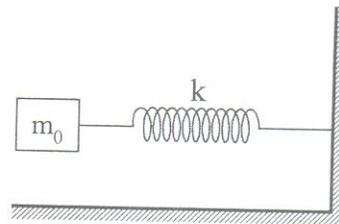
**79.** (ITA-90) Uma experiência foi realizada para se determinar a diferença no valor da aceleração da gravidade,  $g(A)$  e  $g(B)$ , respectivamente, em dois pontos A e B de uma certa área. Para isso construiu-se um pêndulo simples de comprimento  $\ell$  e mediu-se no ponto A o tempo necessário para 100 oscilações obtendo-se 98 s. No ponto B, para as mesmas 100 oscilações, obteve-se 100 s. Neste caso pode-se afirmar que:

- A. ( )  $g(A) < g(B)$  e a diferença é aproximadamente de 5%.
- B. ( )  $g(A) < g(B)$  e a diferença é aproximadamente de 4%.
- C. ( )  $g(A) > g(B)$  e a diferença é aproximadamente de 2%.
- D. ( ) somente se pode fazer qualquer afirmativa a respeito dos valores de  $g(A)$  e  $g(B)$  se conhecermos o valor de  $\ell$ .
- E. ( ) nenhuma das respostas acima é satisfatória.

**80.** (ITA-91) Um edifício iluminado pelos raios solares projeta uma sombra de comprimento  $L = 72,0 \text{ m}$ . Simultaneamente, uma vara vertical de  $2,50 \text{ m}$  de altura, colocada ao lado do edifício projeta uma sombra de comprimento  $\ell = 3,00 \text{ m}$ . Qual é a altura do edifício?

- A. ( )  $90,0 \text{ m}$
- B. ( )  $86,0 \text{ m}$
- C. ( )  $60,0 \text{ m}$
- D. ( )  $45,0 \text{ m}$
- E. ( ) nenhuma das anteriores.

**81.** (ITA-92) Uma forma de medir a massa  $m$  de um objeto em uma estação espacial com gravidade zero é usar um instrumento como mostrado na figura. Primeiro o astronauta mede a frequência  $f_0$  de oscilação de um sistema elástico de massa  $m_0$  conhecida. Após, a massa desconhecida é adicionada a este sistema e uma nova medida da frequência,  $f$ , de oscilação é tomada. Como podemos determinar a massa desconhecida a partir dos dois valores de medida da frequência?



- A. ( )  $m = m_0 \frac{f_0^2}{f^2}$
- B. ( )  $m = m_0(f_0^2 - f^2)$

C. ( )  $m = m_0 \left( \frac{f_0^2}{f^2} - 1 \right)$

D. ( )  $m = m_0 \left( \frac{f_0^2}{f^2} - 2 \right)$

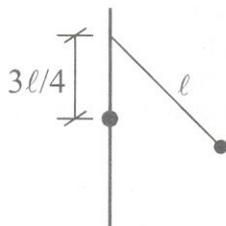
E. ( )  $m = m_0 \left( \frac{f_0^2}{f^2} + 1 \right)$

**82.** (ITA-92) Um jovem estudante para fazer a barba mais eficientemente, resolve comprar um espelho esférico que aumente duas vezes a imagem do seu rosto quando ele se coloca a 50 cm dele. Que tipo de espelho ele deve usar e qual o raio de curvatura?

- A. ( ) Convexo com  $r = 50$  cm.  
 B. ( ) Côncavo com  $r = 200$  cm.  
 C. ( ) Côncavo com  $r = 33,3$  cm.  
 D. ( ) Convexo com  $r = 67$  cm.  
 E. ( ) Um espelho diferente dos mencionados.

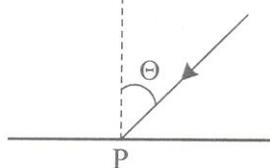
**83.** (ITA-93) Um pêndulo simples oscila com um período de 2,0 s. Se cravarmos um pino a uma distância  $\frac{3}{4} \ell$  do ponto de suspensão e na vertical

que passa por aquele ponto, como mostrado na figura, qual será o novo período do pêndulo? Desprezar os atritos. Considere ângulos pequenos tanto antes quanto depois de atingir o pino.



- A. ( ) 1,5 s;  
 B. ( ) 2,7 s;  
 C. ( ) 3,0 s;  
 D. ( ) 4,0 s;  
 E. ( ) o período de oscilação não se altera.

**84.** (ITA-93) Um raio luminoso incide com um ângulo  $\Theta$  em relação à normal, sobre um espelho plano refletor. Se esse espelho girar de um ângulo igual a  $\Theta$  em torno de um eixo que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano da figura, qual o ângulo de rotação do raio refletido?



- A. ( )  $\Theta$   
 B. ( )  $3,5 \Theta$   
 C. ( )  $2,1 \Theta$   
 D. ( )  $2,0 \Theta$   
 E. ( )  $4,0 \Theta$

**85.** (ITA-94) Deixa-se cair um corpo de massa  $m$  da boca de um poço que atravessa a Terra, passando pelo seu centro. Desprezando atritos e rotação da Terra, para  $|x| < R$  o corpo fica sob ação da força  $F = -mgx/R$ , onde a aceleração gravitacional  $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ , o raio da Terra  $R = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$  e  $x$  é a distância do corpo ao centro da Terra (origem de  $x$ ). Nestas condições podemos afirmar que o tempo de trânsito da boca do poço ao centro da Terra e a velocidade no centro são:

- A. ( ) 21 min e  $11,3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$   
 B. ( ) 21 min e  $8,0 \cdot 10^3 \text{ m/s}$   
 C. ( ) 84 min e  $8,0 \cdot 10^3 \text{ m/s}$   
 D. ( ) 42 min e  $11,3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$   
 E. ( ) 42 min e  $8,0 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ .

**86.** (ITA-96) Uma técnica muito empregada para medir o valor da aceleração da gravidade local é aquela que utiliza um pêndulo simples. Para se obter a maior precisão no valor de  $g$  deve-se:

- A. ( ) usar uma massa maior.  
 B. ( ) usar um comprimento menor para o fio.  
 C. ( ) medir um número maior de períodos.  
 D. ( ) aumentar a amplitude das oscilações.  
 E. ( ) fazer várias medidas com massas diferentes.

**87.** (ITA-96) Dois estudantes se propõem a construir cada um deles uma câmara fotográfica simples, usando uma lente convergente como objetiva e colocando-a numa caixa fechada de modo que o filme esteja no plano focal da lente. O estudante A utilizou uma lente de distância focal igual a 4,0 cm e o estudante B uma lente de distância focal igual a 10,0 cm. Ambos foram testar suas câmaras fotografando um objeto situado a 1,0 m de distância das respectivas objetivas. Desprezando-se todos os outros efeitos (tais como aberrações das lentes), o resultado da experiência foi:

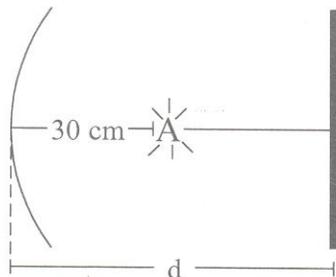
- I. que a foto do estudante A estava mais “em foco” que a do estudante B.  
 II. que ambas estavam igualmente “em foco”.  
 III. que as imagens sempre estavam entre o filme e a lente.

Neste caso você concorda que:

- A. ( ) apenas a afirmativa II é verdadeira.  
 B. ( ) somente I e III são verdadeiras.  
 C. ( ) somente III é verdadeira.  
 D. ( ) somente a afirmativa I é verdadeira.  
 E. ( ) não é possível obter uma fotografia em tais condições.

88. (ITA-97) Uma partícula em movimento harmônico simples oscila com frequência de 10 Hz entre os pontos L e -L de uma reta. No instante  $t_1$  a partícula está no ponto  $\sqrt{3} L/2$  caminhando em direção a valores inferiores, e atinge o ponto  $-\sqrt{2} L/2$  no instante  $t_2$ . O tempo gasto nesse deslocamento é:  
 A. ( ) 0,021 s      B. ( ) 0,029 s  
 C. ( ) 0,15 s      D. ( ) 0,21 s  
 E. ( ) 0,29 s.

89. (ITA-97) Um espelho plano está colocado em frente de um espelho côncavo, perpendicularmente ao eixo principal. Uma fonte luminosa A, centrado no eixo principal entre os dois espelhos, emite raios que se refletem sucessivamente sobre os dois espelhos e formam sobre a própria fonte A, uma imagem real da mesma. O raio de curvatura do espelho é 40 cm e a distância do centro da fonte A até o centro do espelho esférico é de 30 cm. A distância d do espelho plano até o centro do espelho côncavo é, então:



- A. ( ) 20 cm      B. ( ) 30 cm  
 C. ( ) 40 cm      D. ( ) 45 cm  
 E. ( ) 50 cm
90. (ITA-97) Um aluno do ITA levou um relógio, a pêndulo simples, de Santos, no litoral paulista, para São José dos Campos, a 600 m acima do nível do mar. O relógio marcava a hora correta em Santos, mas demonstra uma pequena diferença em São José. Considerando a Terra como uma esfera com seu raio correspondendo ao nível do mar, pode-se *estimar* que, em São José dos Campos, o relógio:  
 A. ( ) atrasa 8 min por dia.  
 B. ( ) atrasa 8 s por dia.  
 C. ( ) adianta 8 min por dia.  
 D. ( ) atrasa 8 s por dia.  
 E. ( ) foi danificado, pois deveria fornecer o mesmo horário que em Santos.

Frente 4 – IME

91. (IME-86) Um objeto está colocado a meia distância entre dois espelhos planos e paralelos, como é mostrado na figura. Se os espelhos se aproximam do objeto na razão de 5 m/s, determine a velocidade relativa entre as duas imagens próximas do objeto.



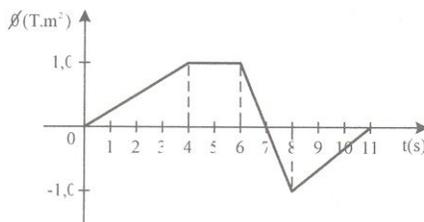
92. (IME-93) Determine o comprimento L mínimo de um espelho de parede, de modo que uma pessoa com altura h possa se ver por inteiro no espelho, desde o topo da cabeça até os pés.

Gabarito

1. C
2. D
3. B
4. a)  $v = \frac{A}{m} \sqrt{3K(m+M)}$   
 b)  $v = 2A \sqrt{\frac{K}{(m+M)}}$   
 c)  $Q = \frac{3KA^2M}{2m}$
5. B
6. C
7. D
8. D
9.  $v = \frac{mU \cos \alpha}{m+M}$
10. a)  $\vec{v}_B = \vec{v}_0$   
 b)  $\vec{v}_B = \frac{\vec{v}_0}{3}$
11. C
12. B
13. A
14. D
15. C
16. C
17. D
18. C
19. C
20. E
21. D
22. B

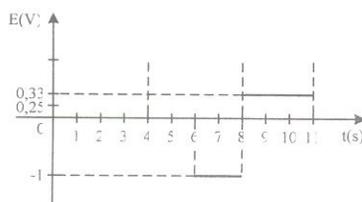


23. 12 m/s e 8 m/s no mesmo sentido da velocidade inicial
- 24.
25. 20 cm
26. a)  $v + u$  para a esquerda  
b)  $W = (m/2)(2uv + u^2)$
27. 14 m/s
28. a) o coeficiente de restituição é 0,8 ou 80%.  
b) 2,048 m
29. 3,5 m
30. 940 g
31. A solução depende da constante elástica da mola que constitui a balança ou do tempo necessário para parar cada um dos tabletes
32. 2 m/s
33. 6,5% ou 64,5%
34. A
35. E
36. D
37. E
38. B
39. E
40. C
41. C
- 42.
- 43.
44. B
45. D
46. C
47. D
48. D
49. Gráfico de fluxo magnético  $\phi = B.A$  em relação ao tempo:



A força eletromotriz induzida é a variação do fluxo magnético em relação ao tempo

$$\left( E = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \right). \text{ Portanto:}$$



**Obs.:** Quando o fluxo aumenta, a corrente tem sentido horário (Lei de Lenz). Portanto, nesses intervalos de tempo a força eletromotriz é positiva e no intervalo de 6 a 8 s é negativa.

50. D

51. B
52. C
53. A
54. a)  $B = 4,8 \cdot 10^{-4}$  T  
b)  $B = 2,0 \cdot 10^{-5}$  T  
c)  $f_3$  para  $f_2$
55. C
56. B
57. E
58. E
59. A
60. E
61. A
62. C
63. D
64. E
65. A
66. E
67. A
68. E
69. A
70. D
- 71.
72. 12,5 ms
73. 100 Hz
74.  $i = 6,4 \cdot 10^4$  A
75. 20 m
76. 505 m/s
77. C
78. B
79. E
80. C
81. C
82. B
83. A
84. D
85. B
86. C
87. D
88. B
89. D
90. B
- 91.
92.  $L = h/2$

Frente 1 – ITA

1. (ITA-86) A respeito das substâncias  $\text{CCl}_{4(l)}$ ;  $\text{I}_{2(c)}$ ;  $\text{NH}_{3(l)}$ ;  $\text{CsF}_{(c)}$  e  $\text{CO}_{2(g)}$  qual das opções abaixo contém a afirmação *falsa*?
- A. ( ) Já que a ligação C–Cl é polar, segue necessariamente que a molécula  $\text{CCl}_4$  é polar.
- B. ( ) A coesão entre as moléculas no iodo cristalino pode ser explicada por interações do tipo dipolo induzido-dipolo induzido.
- C. ( ) No amoníaco liquefeito ocorrem tanto ligações covalentes como por pontes de hidrogênio.
- D. ( ) Tanto no CsF sólido quanto no CsF líquido encontram-se cátions e ânions que se atraem por forças de natureza eletrostática.
- E. ( ) A geometria linear simétrica da molécula  $\text{CO}_2$  pode ser explicada em termos de uma hibridização sp dos orbitais do carbono.

**Pergunta:**

Por que a opção A é *falsa* ou *verdadeira*?

2. (ITA-87) Qual das moléculas abaixo deve possuir maior momento de dipolo elétrico permanente enquanto no estado gasoso?
- A. ( ) Trans – dicloro – eteno
- B. ( ) Cis – dicloro – eteno
- C. ( ) Para – dicloro – benzeno
- D. ( ) Tetracloreto de carbono
- E. ( ) Cloro
3. (ITA-87) Certo tipo de extintor de incêndio é constituído de dois compartimentos. Um contém uma solução aquosa de hidrogeno-carbonato de sódio, enquanto o outro contém uma solução aquosa de sulfato de alumínio. Estas soluções só entram em contato quando o extintor é acionado. Qual das opções abaixo contém a afirmação *incorreta* em relação ao que ocorre quando este tipo de extintor é acionado?
- A. ( ) Forma-se uma espuma contendo um gás incolor e um sólido branco e floculento.
- B. ( ) O gás formado é mais denso do que o ar e o momento de dipolo de suas moléculas é nulo.
- C. ( ) Forma-se um óxido hidratado de alumínio pouco solúvel em água, de aspecto gelatinoso e natureza anfótera.
- D. ( ) A solução inicial de  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$  é bastante ácida, enquanto a solução inicial de  $\text{NaHCO}_3$  não o é.

E. ( ) O extintor atua em virtude do grande abaixamento de temperatura devido a reação de dupla troca que resulta em sulfato de sódio e hidrogeno-carbonato de alumínio.

4. (ITA-88) Qual das moléculas abaixo deve possuir maior momento de dipolo elétrico permanente enquanto no estado gasoso?
- A. ( ) Tetracloreto de carbono
- B. ( ) Trans-dicloro-eteno
- C. ( ) Hexabromo-benzeno
- D. ( ) Para-dicloro-benzeno
- E. ( ) Cis-dicloro-eteno
5. (ITA-89) Em relação à molécula de amônia, são feitas as seguintes afirmações.
- I. O ângulo entre as ligações N–H é de  $120^\circ$ .
- II. Os três átomos de H e o átomo de N estão num mesmo plano.
- III. A geometria da molécula é piramidal.
- IV. Cada ligação, nesta molécula, pode ser entendida como resultante da interpenetração do orbital s de um dos hidrogênios com um dos orbitais p do nitrogênio.
- V. O momento dipolar da molécula é nulo.

Destas afirmações são *corretas*:

- A. ( ) I, II e III
- B. ( ) I, II, IV e V
- C. ( ) I e IV
- D. ( ) II, IV e V
- E. ( ) III e IV

6. (ITA-90) Entre as opções abaixo, assinale aquela que contém a molécula que apresenta *menor* dipolo elétrico.
- A. ( ) Fluoreto de iodo
- B. ( ) Trans-dicloro eteno
- C. ( ) Orto-dicloro benzeno
- D. ( ) Para-cloro iodo benzeno
- E. ( ) Cis-dicloro eteno

7. (ITA-90) Considere a reação representada pela equação seguinte:



Em relação a esta reação são feitas as afirmações seguintes:

- I. Nenhum dos átomos envolvidos sofre alteração do seu número de oxidação.
- II. Em ambos os números da equação, o número de coordenação do ferro é 6.
- III. Nesta reação, o cátion  $[\text{Fe}(\text{H}_2\text{O})_6]^{3+}(\text{aq})$  age como um ácido segundo Lowry e Brønsted.
- IV. Trata-se de uma reação de dissolução de precipitado.
- V. Esta reação deve tender a um equilíbrio com constante finita.

Em relação a estas afirmações, podemos dizer que:

- A. ( ) todas são certas.  
 B. ( ) todas são erradas.  
 C. ( ) só as de número par são certas.  
 D. ( ) apenas IV é errada.  
 E. ( ) apenas II e III são erradas.

8. (ITA-91) Considere os momentos de dipolo elétrico ( $\mu$ ) das seguintes moléculas no estado gasoso:



Pensando na geometria destas moléculas e na eletronegatividade dos átomos envolvidos, podemos prever que:

- A. ( )  $\mu_1 = \mu_2 < \mu_3 < \mu_4$   
 B. ( )  $\mu_1 = \mu_2 < \mu_4 < \mu_3$   
 C. ( )  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$   
 D. ( )  $\mu_1 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_2$   
 E. ( )  $\mu_1 < \mu_4 < \mu_3 < \mu_2$

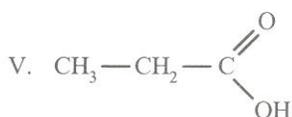
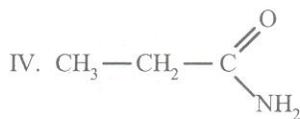
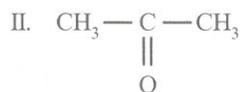
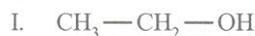
9. (ITA-91) Em qual dos pares de substâncias puras abaixo, ambas no estado sólido, são encontradas em cada uma delas, simultaneamente, ligações covalentes e ligações de Van der Waals?

- A. ( ) Iodo de dióxido de carbono  
 B. ( ) Dióxido de silício e naftaleno  
 C. ( ) Iodo e óxido de magnésio  
 D. ( ) Magnésio e dióxido de carbono  
 E. ( ) Cloreto de amônio e sulfato de chumbo

10. (ITA-91) Assinale a opção que contém, respectivamente, a geometria das moléculas  $NH_3$  e  $SiCl_4$  no estado gasoso:

- A. ( ) Plana, plana  
 B. ( ) Piramidal, plana  
 C. ( ) Plana, tetragonal  
 D. ( ) Piramidal, piramidal  
 E. ( ) Piramidal, tetragonal

11. (ITA-92) Considere os compostos seguintes



Entre as opções seguintes, qual é aquela que contém a afirmação. *Falsa* em relação a estes compostos?

- A. ( ) Da reação de (I) com (V) resulta um éster e água.  
 B. ( ) (II) não é polar.  
 C. ( ) Dos compostos acima (III) é o mais básico.  
 D. ( ) (III) é uma amina e (IV) é uma amida.  
 E. ( ) (I) é um ácido muitíssimo mais fraco que (V).

12. (ITA-94) Considere as substâncias seguintes:

- I.  $LiF_{(g)}$   
 II.  $HF_{(g)}$   
 III.  $F_{2(g)}$   
 IV.  $CF_{4(g)}$

A opção que apresenta a *comparação correta* do dipolo elétrico ( $\mu$ ) das substâncias acima é:

- A. ( )  $\mu_I > \mu_{II} > \mu_{III} > \mu_{IV}$   
 B. ( )  $\mu_I \simeq \mu_{II} > \mu_{III} > \mu_{IV}$   
 C. ( )  $\mu_I > \mu_{II} > \mu_{III} \simeq \mu_{IV}$   
 D. ( )  $\mu_I > \mu_{II} > \mu_{IV} > \mu_{III}$   
 E. ( )  $\mu_I \simeq \mu_{II} > \mu_{III} \simeq \mu_{IV}$

13. (ITA-94) Em cristais de cloreto de sódio, cada íon de sódio tem como vizinhos mais próximos quantos íons cloreto?

- A. ( ) 1                      B. ( ) 2                      C. ( ) 4  
 D. ( ) 6                      E. ( ) 8

14. (ITA-94) Assinale a opção que contém a afirmação *falsa*:

- A. ( ) Nos átomos dos metais das terras raras temos orbitais do tipo **f** parcialmente preenchidos.  
 B. ( ) A configuração eletrônica  $1s^1 3p^1$ , em torno de um núcleo de lítio, corresponde a um estado excitado do cátion  $Li^+$ .  
 C. ( ) O átomo com uma configuração eletrônica  $1s^2 2p^3$  é diamagnético.  
 D. ( ) O momento de dipolo elétrico do monóxido de carbono é maior do que o do dióxido de carbono.  
 E. ( ) A primeira energia de ionização do  $Mg_{(g)}$  é maior do que a do  $Na_{(g)}$ .

15. (ITA-95) Se laranjas são empilhadas numa caixa, na forma mais compacta possível, tal como na estrutura cristalina cúbica de face centrada, cada laranja terá como vizinhas mais próximas quantas outras laranjas?

- A. ( ) 6                      B. ( ) 8                      C. ( ) 10  
 D. ( ) 12                      E. ( ) 14

16. (ITA-95) Assinale a opção que contém a afirmação *falsa*:

- A. ( )  $\text{NH}_3$  tem três momentos de dipolo elétrico cujo somatório não é nulo.
- B. ( )  $\text{CH}_4$  tem quatro momentos de dipolo elétrico cujo somatório é nulo.
- C. ( )  $\text{CO}_2$  tem dois momentos de dipolo elétrico cujo somatório é nulo.
- D. ( ) O momento de dipolo elétrico total do acetileno é zero.
- E. ( ) A ligação  $\text{C} = \text{C}$  tem momento de dipolo elétrico menor do que a ligação  $\text{C} \equiv \text{C}$ .

17. (ITA-96) Assinale a opção que contém a afirmação *errada* a respeito das seguintes espécies químicas, todas no estado gasoso:



- A. ( ) A ligação no  $\text{H}_2$  é a mais covalente e a no  $\text{HF}$  é a mais iônica.
- B. ( ) O  $\text{H}_2$  e o  $\text{HCl}$  são, ambos diamagnéticos.
- C. ( ) O  $\text{PCl}_5$  tem um momento de dipolo elétrico maior do que o  $\text{PCl}_3$ .
- D. ( ) O  $\text{H}_2$  e o  $\text{PCl}_5$  não possuem momento de dipolo elétrico permanente.
- E. ( ) O  $\text{H}_2$  pode ter momento de dipolo elétrico induzido.

18. (ITA-96) Em relação à estrutura eletrônica do tetrafluoreto de carbono, assinale a opção que contém a afirmativa *errada*.

- A. ( ) Em torno do átomo de carbono tem-se um octeto de elétrons.
- B. ( ) Em torno de cada átomo de flúor tem-se um octeto de elétrons.
- C. ( ) A molécula é apolar, embora contenha ligações apolares entre os átomos.
- D. ( ) A molécula contém um total de  $5 \cdot 8 = 40$  elétrons.
- E. ( ) Os ângulos das ligações flúor-carbono-flúor são consistentes com a hibridização  $\text{sp}^3$  do carbono.

19. (ITA-97) Qual das moléculas abaixo, todas no estado gasoso, apresenta um momento de dipolo elétrico permanente igual a zero?

- A. ( ) Metanol
- B. ( ) Metanal
- C. ( ) 1, 3, 5-tricloro-benzeno
- D. ( ) 1, 2, 3-tricloro-benzeno
- E. ( ) Diclorometano

20. (ITA-97) Sobre a temperatura de ebulição de um líquido são feitas as afirmações:

- I. Aumenta com o aumento da força da ligação química *intramolecular*.
- II. Aumenta com o aumento da força da ligação química *intermolecular*.
- III. Aumenta com o aumento da pressão exercida sobre o líquido.
- IV. Aumenta com o aumento da quantidade de sólido dissolvido.

Estão *corretas*:

- A. ( ) Apenas I e II
- B. ( ) Apenas I e IV
- C. ( ) Apenas III e IV
- D. ( ) Apenas II, III e IV
- E. ( ) Todas

21. (ITA-97) (Anulada) Ainda sobre os óxidos de nitrogênio  $\text{NO}$ ,  $\text{N}_2\text{O}$  e  $\text{NO}_2$ , considere as afirmações:

- I. Sabendo-se que o  $\text{N}_2\text{O}$  é linear e apolar, segue que a seqüência de átomos nesta molécula é  $\text{NON}$  e não  $\text{NNO}$ .
- II. Sabendo-se que o  $\text{NO}_2$  é polar, o ângulo entre as ligações  $\text{N-O}$  é diferente de  $180^\circ$ .
- III. Sabendo-se que o  $\text{NO}_2$  é polar, segue que o íon  $(\text{NO}_2^+)_g$  deve necessariamente ter geometria linear.

Est(á) (ão) *correta(s)*:

- A. ( ) Todas
- B. ( ) Apenas I e III
- C. ( ) Apenas I e II
- D. ( ) Apenas II
- E. ( ) Apenas I

22. (ITA-97) Considere as afirmações:

- I. Cristais apresentam um arranjo regular e repetitivo de átomos ou de íons ou de moléculas.
- II. Materiais policristalinos são formados pelo agrupamento monocristais.
- III. Monocristais de  $\text{NaCl}$  são transparentes à luz visível.
- IV. Cristais metálicos e iônicos difratam ondas eletromagnéticas com comprimento de onda na região dos raios-X.
- V. Alumínio, quartzo e naftaleno podem ser sólidos cristalinos nas condições ambientes.

Est(á) (ão) *correta(s)*:

- A. ( ) Todas
- B. ( ) Apenas I, II, IV e V
- C. ( ) Apenas II e V
- D. ( ) Apenas III e IV
- E. ( ) Apenas I

**23.** (ITA-97) Por que a afirmação II da questão 20 está certa ou errada?

Frente 1 – IME

**24.** (IME-86) Complete os quadros abaixo:

Óxidos	
Fórmula mínima	Nomenclatura
CaO <sub>2</sub>	
	óxido cuproso
Cl <sub>2</sub> O <sub>7</sub>	
Mn <sub>3</sub> O <sub>4</sub>	
N <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	

Ácidos			
Nome do Ânion	Ânion	Fórmula Molecular	Nomenclatura
	S <sub>2</sub> O <sub>3</sub> <sup>2-</sup>		
		H <sub>4</sub> P <sub>2</sub> O <sub>7</sub>	
			ácido fosforoso
	Fe(CN) <sub>6</sub> <sup>4-</sup>		
		H <sub>3</sub> ASO <sub>4</sub>	

Bases			
Nome do Cátion	Cátion	Fórmula Mínima	Nomenclatura
platinoso			
	Co <sup>3+</sup>		
		RbOH	
estânico			
			hidróxido auroso

Sais	
Fórmula Mínima	Nomenclatura
Bi(OH) <sub>2</sub> Cl	
	cloreto hipoclorito de cálcio
NaH <sub>2</sub> PO <sub>2</sub>	
Fe <sub>2</sub> (SO <sub>3</sub> ) <sub>3</sub>	
NaH <sub>2</sub> PO <sub>4</sub>	

**25.** (IME-87)

- a) Admitindo-se que na formação da molécula de H<sub>2</sub>O sejam usados, para as ligações, os orbitais atômicos do oxigênio no estado fundamental, prediga, justificando, que ângulo seria formado entre as ligações nesta molécula.
- b) Na realidade, o ângulo observado entre as ligações na molécula de H<sub>2</sub>O é de aproximadamente 105°. Que modelo foi adotado para explicar este fato? Justifique sucintamente sua resposta.

**26.** (IME-89) Complete a quadro abaixo, conforme o exemplo:

Fórmula	Nº de Orbitais Híbridos	Nº de Pares de Elétrons não Compartilhados	Forma Geométrica	Hibridação
BeF <sub>2</sub>	2	0	linear	sp
BF <sub>3</sub>	3		trigonal	sp <sup>2</sup>
NH <sub>3</sub>	4	1	pirâmide trigonal	
PCl <sub>5</sub>	5	0		sp <sup>3</sup> d
SF <sub>6</sub>	6	0		sp <sup>3</sup> d <sup>2</sup>
AsCl <sub>3</sub>		1	pirâmide trigonal	sp <sup>3</sup>

**27.** (IME-89) O cloro, em meio alcalino, oxida o iodeto de cromo (III) a cromato e periodato, passando a cloreto. Determine o volume mínimo de cloro gasoso, medido a 27,0°C e 1,00 atm, necessário para converter integralmente 4,00 x 10<sup>-3</sup> moles do iodeto.

**28.** (IME-90) Preencha o quadro abaixo, conforme o exemplo.

Nome do composto	Fórmula molecular	Número de oxidação do ânion	Número quântico principal do elétron de valência do elemento sublinhado no estado fundamental	Distribuição eletrônica do cátion
carbonato de <u>lítio</u>	Li <sub>2</sub> CO <sub>3</sub>	-2	2	1s <sup>2</sup>
borato de <u>sódio</u>				
óxido de <u>alumínio</u>				
nitrate de <u>zinco</u>				
ferrocianeto de <u>cobre</u> II				
fluoreto de <u>enxofre</u> VI				

**29.** (IME-92) Complete a tabela seguinte, preenchendo os espaços em branco segundo o exemplo:

Composto	Estrutura de Lewis	Hibridização do Átomo Central	Forma geométrica definida pelos orbitais de valência do At. Central	Forma da Molécula
SF <sub>6</sub>				
BrF <sub>3</sub>				
O <sub>3</sub>				
NO <sub>2</sub> <sup>+</sup>				
I <sub>3</sub> <sup>-</sup>				
NH <sub>3</sub>	$\begin{array}{c} \text{H}-\ddot{\text{N}}-\text{H} \\   \\ \text{H} \end{array}$	Sp <sup>3</sup>	Tetraédrica	pirâmide trigonal

Obs.: Repita o quadro acima na folha de resposta da 3ª Questão.

30. (IME-92) Faça o balanceamento da seguinte equação, cuja reação ocorre em meio ácido:



31. (IME-93) Na evolução do conceito ácido-base surge inicialmente a sua definição segundo Arrhenius, seguido pelo conceito de Brønsted-Lowry e mais tarde pelo de Lewis. Responda:

- qual a limitação do conceito inicial de ácido-base que deu origem à definição de Brønsted-Lowry, e
- quais as limitações dos dois conceitos já existentes que levaram Lewis a postular sua teoria?

Frente 2 – ITA

32. (ITA-86) A respeito da reação reversível

$\text{N}_{2(\text{g})} + 3\text{H}_{2(\text{g})} \rightleftharpoons 2\text{NH}_{3(\text{g})}$  e levando em conta os princípios que regem a síntese do amoníaco, são feitas as seguintes afirmações:

- O princípio de Le Chatelier prevê que um aumento na pressão total da mistura gasosa deve deslocar o equilíbrio acima para o lado direito.
- É constante, para cada valor de temperatura, a relação  $K = \frac{[\text{NH}_3]_{\text{eq}}}{[\text{N}_2]_{\text{eq}}^{1/2} \cdot [\text{H}_2]_{\text{eq}}^{3/2}}$  onde  $[ ]_{\text{eq}}$  representa a concentração de equilíbrio da espécie considerada.
- No processo industrial de preparação do amoníaco, empregam-se catalisadores cuja função é reduzir o tempo para o estabelecimento do equilíbrio.
- Os gases que entram em contato com o catalisador não devem conter certas impurezas, como  $\text{H}_2\text{S}$ , que poderiam desativar o catalisador.
- A síntese industrial do amoníaco constitui um processo contínuo em que a mistura dos gases reagentes, em proporção estequiométrica, entra no reator, que já contém o catalisador, e sai dele parcialmente convertida em amoníaco.

Das afirmações feitas são *verdadeiras*:

- Apenas I, II e III
- Apenas I, III e V
- Apenas II e IV
- Apenas IV e V
- Todas

**Pergunta:**

Desenhe a aparelhagem que permite obter amoníaco a partir de soda cáustica e solução aquosa de um sal de amônio. Escreva a equação química envolvida no processo.

33. (ITA-86) Todas as afirmações a seguir referem-se ao processo de obtenção do ácido sulfúrico.

- $\text{FeS}_2$  empregado na obtenção do  $\text{SO}_2$  é conhecido como blenda.
- Um dos catalisadores utilizados na oxidação do  $\text{SO}_2$  a  $\text{SO}_3$  é um óxido de vanádio.
- Sabendo-se que para a reação  $\text{SO}_{2(\text{g})} + \frac{1}{2}\text{O}_{2(\text{g})} \rightleftharpoons \text{SO}_{3(\text{g})}$  o  $\Delta H$  é negativo, pode-se concluir que o equilíbrio será deslocado para a direita se a temperatura for aumentada.
- Aumentando a temperatura, a velocidade da reação representada em (III) deverá aumentar.
- A oxidação, por oxigênio, do  $\text{SO}_2$  dissolvido em água é mais rápida do que a do  $\text{SO}_2$  gasoso.

Dessas afirmações são *verdadeiras* apenas:

- ( ) I, II e IV
- ( ) I, II e V
- ( ) II, III e IV
- ( ) II, IV e V
- ( ) III, IV e V

**Pergunta:**

Explique porque ácido sulfúrico não pode ser preparado aquecendo ácido nítrico e sulfato de sódio, apesar de essas matérias primas serem de baixo custo.

34. (ITA-86) A tabela a seguir refere-se a quatro substâncias líquidas pouco voláteis e muito solúveis em água, utilizáveis como anti-congelantes para água empregada em radiadores de automóveis em regiões muito frias.

	Líquidos	P.M. (g/mol)
I.	$\text{C}_3\text{H}_5(\text{OH})_3$	92
II.	$\text{CH}_3\text{O}(\text{CH}_2)_2\text{OCH}_3$	90
III.	$\text{C}_2\text{H}_5\text{O}(\text{CH}_2)_2\text{OH}$	90
IV.	$\text{C}_2\text{H}_4(\text{OH})_2$	62

Em relação à produção de um mesmo abaixamento da temperatura de início de solidificação, qual das opções abaixo contém a afirmação *falsa*?

- ( ) Soluções aquosas de mesma molalidade de I e IV apresentam praticamente a mesma temperatura de início de solidificação.
- ( ) O abaixamento da temperatura de início de solidificação, pela adição de 1 mol de I é duas vezes maior do que aquele provocado pela adição de 1 mol de III, a um mesmo volume água
- ( ) A mesma massa, para um mesmo volume de água, só teria praticamente o mesmo efeito para II e III.
- ( ) A substância IV resulta mais econômica se o preço, por quilograma, for o mesmo para as quatro substâncias.

- E. ( ) O abaixamento de temperatura de início de solidificação do solvente, pela adição de soluto, em princípio independe do número de átomos e de sua posição relativa na molécula do soluto.

**Pergunta:**

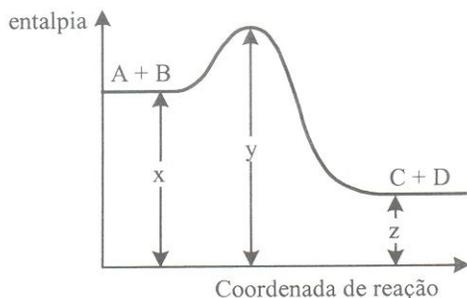
Por que a afirmação C é verdadeira ou falsa?

- 35.** (ITA-86) Assinale a única opção que contém a afirmação *falsa* dentre as seguintes:
- A. ( ) Em medidas de pressão osmótica deve ser empregada uma membrana permeável apenas ao solvente.
- B. ( ) Em experiências de purificação por **diálise** costumam ser usadas membranas permeáveis a íons e/ ou moléculas relativamente pequenos, mas impermeáveis a íons e/ ou moléculas muito grandes.
- C. ( ) O fenômeno da osmose só é observado para soluções moleculares, não ocorrendo para soluções iônicas.
- D. ( ) Numa dada pressão, a temperatura de início de ebulição de uma solução aquosa 0,10 M de  $\text{CaCl}_2$  é praticamente igual à de uma solução 0,10 M de  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ .
- E. ( ) Se duas soluções aquosas, no resfriamento, têm a mesma temperatura de início de solidificação, elas serão muito provavelmente isotônicas.

**Pergunta:**

Deseja-se desdobrar 2 litros de uma solução aquosa 0,15 M de  $\text{NaCl}$  em: 1 litro de água pura e 1 litro de solução 0,30 M de  $\text{NaCl}$ , isto sem haver afastamento da temperatura ambiente e sem usar destilação, mas utilizando apenas os princípios envolvidos no fenômeno da osmose. Explique como isto poderia ser feito e que tipo de trabalho estaria em jogo. Ilustre sua resposta com uma figura que deixe claro a aparelhagem a ser utilizada.

- 36.** (ITA-86) Um equilíbrio químico genérico representado por  $A + B \rightleftharpoons C + D$  pode ser discutido em termos de um diagrama do tipo apresentado.



Qual das opções abaixo explica o comportamento observado quando da adição de um catalisador?

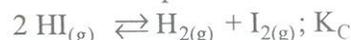
- A. ( ) Só aumenta x  
B. ( ) Só diminui z  
C. ( ) Só diminui y  
D. ( ) Só diminuem y e z  
E. ( ) Diminuem igualmente x, y e z

**Pergunta:**

Dê o significado das grandezas  $(y - x)$ ,  $(y - z)$ ,  $(z - x)$  e  $(x - z)$ .

- 37.** (ITA-87) Uma solução 0,005 molar de hidróxido de bário em água à temperatura ambiente, terá pH aproximadamente igual a:  
A. ( ) 0,010    B. ( ) 2    C. ( ) 5  
D. ( ) 9    E. ( ) 12
- 38.** (ITA-87) Para uma certa solução sabe-se que o pH = 6,8 e o pOH também tem o mesmo valor, isto é, pOH = 6,8. Destas informações pode-se concluir que a solução em apreço  
A. ( ) é neutra, mas sua temperatura está acima de 25 °C.  
B. ( ) é neutra, mas sua temperatura está abaixo de 25 °C.  
C. ( ) é ácida, para qualquer temperatura.  
D. ( ) é básica, para qualquer temperatura.  
E. ( ) não pode ser neutra porque seu pH é diferente de 7,0.

- 39.** (ITA-87) Considere o equilíbrio:



Sabe-se que a reação no sentido da esquerda para a direita é endotérmica na faixa de temperatura considerada.

Qual das opções abaixo contém a afirmação *incorreta* a respeito deste equilíbrio?

- A. ( ) O valor da constante de equilíbrio a 50 °C será maior do que o valor a 25 °C.  
B. ( ) Se  $[\text{I}_2]$  for aumentada por acréscimo de iodo,  $[\text{HI}]$  também aumentará.  
C. ( ) O equilíbrio será deslocado para a direita se a pressão for aumentada.  
D. ( ) O equilíbrio não será afetado pela adição de um catalisador.  
E. ( ) Das afirmações no enunciado também segue que:



- 40.** (ITA-87) Um copo contém inicialmente 20 ml de uma solução aquosa 0,10 molar de ácido acético. A ela se adicionam gradualmente, sob constante agitação, de 0 a 40 ml de uma solução aquosa 0,10 molar de metil-amina contida numa bureta. A

condutividade elétrica da mistura resultante no copo, a medida que se acrescenta a segunda solução, irá:

- A. ( ) diminuir até um mínimo e depois aumentar.
- B. ( ) aumentar sempre.
- C. ( ) diminuir sempre.
- D. ( ) aumentar até um máximo e depois diminuir.
- E. ( ) aumentar num trecho inicial e depois permanecer constante.

41. (ITA-87) Um copo contém inicialmente 20 ml de uma solução aquosa 0,10 molar de BaS. A ela se adicionam gradualmente, sob constante agitação, de 0 a 40 ml de uma solução aquosa de ZnSO<sub>4</sub>, da mesma concentração, contida numa bureta.

A condutividade elétrica da mistura resultante no copo, à medida que se acrescenta a segunda solução, irá:

- A. (X) diminuir até um mínimo e depois aumentar.
- B. ( ) aumentar sempre.
- C. ( ) diminuir sempre.
- D. ( ) aumentar até um máximo e depois diminuir.
- E. ( ) permanecer constante num trecho inicial e depois aumentar.

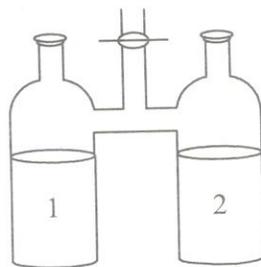
42. (ITA-87) Em dois recipientes ligados entre si, são colocadas as substâncias conforme indicada ao lado da figura abaixo:

Lado 1:

10,0 milimols de MgCl<sub>2</sub>  
180 gramas de água

Lado 2:

5,0 milimols de sacarose  
5,0 milimols de NaCl  
180 gramas de água



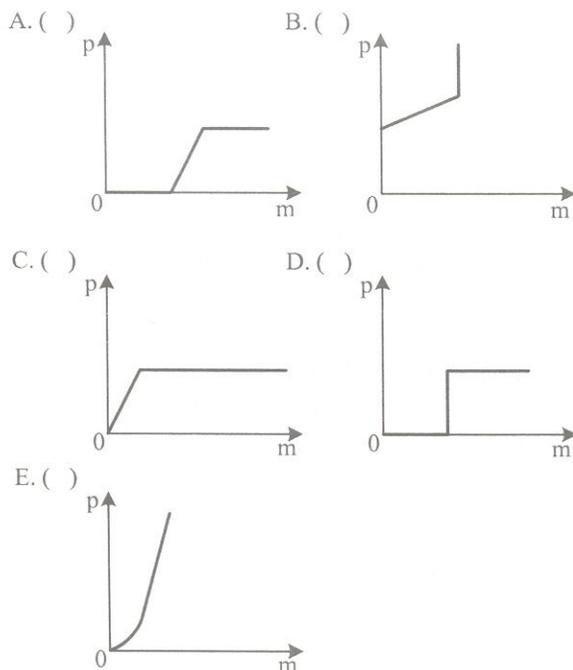
Após a introdução dos solutos de das porções de solvente indicadas, são fechadas as duas tampas e o ar é removido por sucção através da torneira. Uma vez removido o ar, a torneira é fechada. Desta forma, o espaço dentro do recipiente acima das soluções contém apenas vapor de água. O recipiente carregado e fechado é mantido sob temperatura constante. Em face dos princípios físico-químicos em questão num dos lados o volume da solução aumenta e no outro ele diminui até que seja atingido o equilíbrio. Vamos supor que MgCl<sub>2</sub> e NaCl estejam 100% dissociados e que a quantidade de água na forma de vapor é desprezível em relação aos (180 + 180) gramas postos. Dadas estas informações pedem-se *respostas justificadas* para as seguintes perguntas:

- a) Em que lado a quantidade de água vai aumentar?
- b) Quais serão as massas de água no lado 1 e no lado 2 quando o equilíbrio for atingido?
- c) Discuta que princípios, leis e tipo de equilíbrio estão em jogo.
- d) Discuta: faz diferença, ou não, se a temperatura constante for 70 °C ao invés de 20 °C?

43. (ITA-88) Assinale a afirmação *incorreta* relativa à comparação das duas soluções aquosas seguintes: a primeira foi preparada dissolvendo-se 1,0 mol de ácido forte (HX) em 1 litro de água; a segunda, dissolvendo-se em 1 litro de água 1,0 mol de ácido fraco (AH) com constante de dissociação da ordem de 10<sup>-6</sup>.

- A. ( ) A solução de HX tem uma concentração de H<sup>+</sup> muito maior do que a solução de AH
- B. ( ) Enquanto que a dissociação iônica, na primeira solução, pode ser representada por  $HX \rightarrow H^+ + X^-$ , na segunda solução ela é melhor representada por  $AH \rightleftharpoons A^- + H^+$ .
- C. ( ) Enquanto que não se deve esperar uma modificação apreciável do pH da primeira solução, por acréscimo de sais do tipo NaX, deve-se esperar um aumento do pH da segunda solução, quando a ela são acrescentados sais do tipo NaA
- D. ( ) A adição de mais 0,5 mol do ácido HX a cada uma das duas soluções fará com que a concentração de H<sup>+</sup> em ambas aumente igualmente cerca de 0,5 mol/litro
- E. ( ) A adição de 0,5 mol de NaOH às duas soluções fará com que a concentração de H<sup>+</sup> em ambas diminua de aproximadamente 0,5 mol por litro

44. (ITA-88) Consideremos um recipiente de paredes inertes e indeformáveis. A capacidade desse recipiente é de aproximadamente 25 litros. Ele é provido de um manômetro absoluto e é mantido numa sala termostataada a 20 °C. A única comunicação do recipiente com o exterior é feita através de um tubo provido de torneira. Inicialmente extraímos todo o ar contido no recipiente com o auxílio de uma bomba de vácuo. Feito isso, introduzimos no recipiente, contínua e lentamente, água pura (isenta de ar) até um total de 40 g de água. Qual dos gráficos abaixo descreve *corretamente* a variação da pressão no recipiente versus massa de água introduzida após evacuação prévia do recipiente?



45. (ITA-88) Dentre as afirmações abaixo, todas relativas a ação de catalisadores, assinale a *errada*:

- A. ( ) Um bom catalisador para uma certa polimerização também é um bom catalisador para a respectiva despolimerização.
- B. ( ) Enzimas são catalisadores, via de regra, muito específicos.
- C. ( ) As vezes, as próprias paredes de um recipiente podem catalisar uma reação numa solução contida no mesmo.
- D. ( ) A velocidade de uma reação catalisada depende da natureza do catalisador, mas não de sua concentração na fase reagente.
- E. ( ) Fixadas as quantidades iniciais dos reagentes postos em contato, as concentrações no equilíbrio final independem da concentração do catalisador adicionado.

46. (ITA-88) A sacarose dissolvida em certo volume de água com traços de ácido é completamente hidrolisada. Chamemos de I a solução antes da hidrólise e de II a solução depois da hidrólise. Admite-se que o volume da solução não varia com a hidrólise. A afirmação *certa* a respeito das soluções I e II é:

- A. ( ) A pressão osmótica das duas soluções é a mesma.
- B. ( ) A elevação da temperatura de início de ebulição da solução II é maior que a da solução I.
- C. ( ) O valor da pressão de vapor da água da solução I é a metade do da solução II.
- D. ( ) A fração molar da água na solução II é igual a fração molar da água na solução I.

E. ( ) A temperatura de início de solidificação da água na solução I é mais baixa do que na solução II.

47. (ITA-88) Num cilindro provido de pistão e torneira, conforme figura abaixo, foram introduzidos  $N_{2(g)}$ ,  $H_{2(g)}$  e um catalisador adequado para a formação  $NH_{3(g)}$ . A temperatura é constante e o pistão é mantido fixo até ser atingido o equilíbrio  $N_{2(g)} + 3H_{2(g)} \rightleftharpoons 2NH_{3(g)}$ .



Após atingir o equilíbrio, querendo aumentar a quantidade de  $NH_{3(g)}$  dentro do cilindro por variação de pressão, mantendo a temperatura constante podem ser efetuados os seguintes procedimentos:

- I. Reduzir o volume por deslocamento do pistão, a torneira permanecendo fechada.
- II. Aumentar o volume por deslocamento do pistão, a torneira permanecendo fechada.
- III. Retirar parte da mistura pela torneira, o pistão ficando fixo.
- IV. Deixar entrar um gás inerte (p. ex.: hélio) pela torneira, o pistão ficando fixo.
- V. Deixar entrar mais  $N_{2(g)}$  pela torneira, o pistão ficando fixo.
- VI. Deixar entrar mais  $H_{2(g)}$  pela torneira, o pistão ficando fixo.

Destas formas de alterar a pressão, qual é a opção *certa* para aumentar a quantidade de  $NH_3$  no cilindro?

- A. ( ) Apenas I  
B. ( ) Apenas II  
C. ( ) I e III  
D. ( ) I, IV, V e VI  
E. ( ) I, V e VI

48. (ITA-88) Existem reações que, apesar de termodinamicamente possíveis, ocorrem com velocidade tão pequena que pode levar dias para que sua ocorrência seja percebida, ao passo que outras ocorrem com velocidade tão grande que chegam a ser explosivas. Como, num laboratório de química, você procederia para:

- a) acelerar uma reação muito lenta? (Cite alguns procedimentos, justificando-os).
- b) retardar uma reação muito rápida? (Cite alguns procedimentos, justificando-os).

49. (ITA-89) Chamemos a conceituação de ácido-base segundo Arrhenius de I, a de Lowry-Brønsted de II e a de Lewis de III.

Consideremos a reação do íon cúprico com quatro moléculas de água para formar o composto de coordenação  $[\text{Cu}(\text{H}_2\text{O})_4]^{2+}_{(\text{aq})}$ .

Esta é uma reação de um ácido com uma base segundo.

- A. ( ) I e II                      B. ( ) I e III  
C. ( ) apenas II.                D. ( ) II e III.  
E. ( ) apenas III.

**50.** (ITA-89) Em quatro copos são colocados  $100 \text{ cm}^3$  de água e quatro gotas de azul de bromotimol, um indicador que adquire cor amarela em  $\text{pH} < 6,0$ ; verde em  $\text{pH}$  entre  $6,0$  e  $7,6$ ; azul em  $\text{pH} > 7,6$ . Adicionando ao primeiro copo sulfato férrico, ao segundo acetato de sódio, ao terceiro sulfato de sódio e ao quarto cloreto de amônio (aproximadamente uma colher de chá do respectivo sólido), a seqüência de cores das soluções finais será:

- A. ( ) amarela; verde; azul e amarela.  
B. ( ) amarela; azul; verde e amarela.  
C. ( ) verde; azul; verde e verde.  
D. ( ) verde; azul; verde e azul.  
E. ( ) azul; amarela; verde e azul.

**51.** (ITA-89) Considere as duas soluções aquosas seguintes, ambas na mesma temperatura.

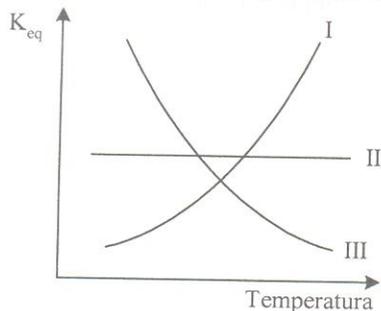
Solução I: contém  $1,0$  milimol de glicose e  $2,0$  milimols de cloreto de cálcio,  $\text{CaCl}_2$ , por quilograma de água.

Solução II: contém apenas sulfato férrico dissolvido em água.

Supondo soluções ideais e eletrólitos completamente dissociados, as duas soluções terão os mesmos valores para suas propriedades coligativas se a solução II contiver, por quilograma de água, a seguinte quantidade de  $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$ :

- A. ( )  $(6,0/5)$  milimol            B. ( )  $(3,0/1)$  milimol  
C. ( )  $(4,0/5)$  milimol            D. ( )  $(7,0/5)$  milimol  
E. ( )  $(5,0/7)$  milimol

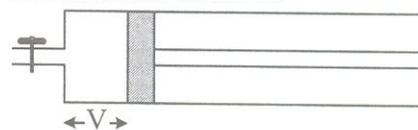
**52.** (ITA-89) No gráfico abaixo estão esquematizadas as variações das constantes de equilíbrio, com a temperatura, para três reações distintas: I, II e III. Partindo dos respectivos reagentes, todas as três reações são espontâneas na temperatura ambiente.



A partir destas informações, é *correto* se prever que

- A. ( ) a reação I deve ser exotérmica, a II praticamente atérmica e a III endotérmica.  
B. ( ) o aquecimento, sob volume constante, do sistema onde ocorre a reação I acarretará a formação de maior quantidade do produto.  
C. ( ) se as três reações são espontâneas, elas necessariamente ocorrerão com liberação de calor.  
D. ( ) a velocidade da reação I aumentará, a da II praticamente independerá e a de III diminuirá com o aumento da temperatura.  
E. ( ) a reação I é endotérmica para temperaturas altas e exotérmica para baixas temperaturas, enquanto que para a reação III ocorre o oposto.

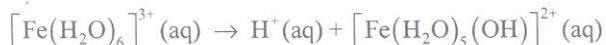
**53.** (ITA-89) Num grande cilindro provido de torneira e pistão com êmbolo, conforme figura abaixo, foi introduzido um pouco de água líquida, tomando o cuidado de não deixar entrar ar.



Após a admissão da porção de água, a torneira foi fechada. Variando o volume, por movimento lento do pistão, mantendo a temperatura, no interior do cilindro, igual a  $20^\circ\text{C}$ , o gráfico de pressão no cilindro versus volume, corresponde a:

- A. ( )      B. ( )   
C. ( )      D. ( )   
E. ( )

54. (ITA-90) Considere a reação representada pela equação seguinte:



Em relação a esta reação são feitas as afirmações seguintes:

- I. Nenhum dos átomos envolvidos sofre alteração do seu número de oxidação.
- II. Em ambos os números da equação, o número de coordenação do ferro é 6.
- III. Nesta reação, o cátion  $[\text{Fe}(\text{H}_2\text{O})_6]^{3+}(\text{aq})$  age como um ácido segundo Lowry e Brønsted
- IV. Trata-se de uma reação de dissolução de precipitado.
- V. Esta reação deve tender a um equilíbrio com constante finita.

Em relação a estas afirmações, podemos dizer que:

- A. ( ) todas são certas
- B. ( ) todas são erradas
- C. ( ) só as de número par são certas
- D. ( ) apenas IV é errada
- E. ( ) apenas II e III são erradas

55. (ITA-90) Entre os solutos abaixo assinale aquele que, quando dissolvido em água, a 25°C, confere à sua solução milimolar a maior condutividade elétrica

- A. ( ) Etanol
- B. ( ) Iodeto de etila
- C. ( ) Etilamina
- D. ( ) Amônia
- E. ( ) Cloreto de tetrametilamônio

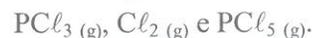
56. (ITA-90) O Produto de Solubilidade, PS, do carbonato de cálcio em água vale  $8,7 \cdot 10^{-9}$ , a 25°C. Partindo desta informação, é *correto* concluir que:

- A. ( ) O valor do PS indica que o carbonato de cálcio deve ser um eletrólito fraco;
- B. ( ) Espera-se que o PS do carbonato de cálcio, quando dissolvido em solução que já contenha íons de cálcio, seja maior do que  $8,7 \cdot 10^{-9}$ ;
- C. ( ) O valor do PS indica que deve ser muito pequena a velocidade com que se consegue dissolver carbonato de cálcio em água;
- D. ( ) Espera-se que os PS do carbonato de cálcio em etanol também valha  $8,7 \cdot 10^{-9}$ ;
- E. ( ) Espera-se precipitação de  $\text{CaCO}_3$  se, a uma solução  $1,0 \cdot 10^{-3}$  molar em íons de cálcio, se acrescenta volume igual de solução de igual concentração de íons carbonato.

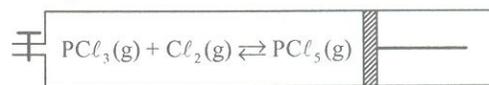
57. (ITA-90) Assinale a opção que contém a afirmação *errada* a respeito da velocidade de transformações físico-químicas.

- A. ( ) As velocidades de desintegrações radioativas espontâneas, impedem da temperatura;
- B. ( ) O aumento de temperatura, torna mais rápidas tanto as reações químicas exotérmicas;
- C. ( ) Reações entre íons com cargas opostas podem ser rápidas;
- D. ( ) Um bom catalisador para uma reação num sentido, também é um bom catalisador para a reação no sentido oposto;
- E. ( ) Se a solubilidade de um sólido num líquido decresce com a temperatura, a dissolução do sólido no líquido é tanto mais rápida quanto mais baixa for a temperatura.

58. (ITA-90) Um cilindro provido de pistão móvel e de uma torneira para entrada de gases, conforme esquema abaixo, contendo  $\text{PCl}_3(\text{g})$ ,  $\text{Cl}_2(\text{g})$  e  $\text{PCl}_5(\text{g})$ , é mantido numa temperatura constante  $T_1$ .

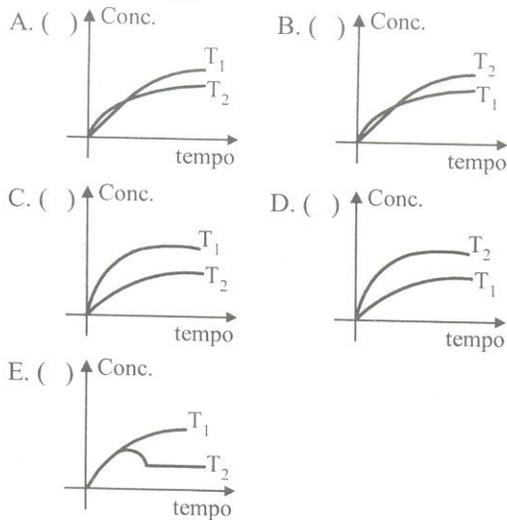


Uma vez estabelecido o equilíbrio, temos dentro do cilindro: 0,4 mols de  $\text{PCl}_3(\text{g})$ ; 0,3 mols de  $\text{Cl}_2(\text{g})$  e 0,5 mols de  $\text{PCl}_5(\text{g})$ . Das opções abaixo, qual é aquela que resultará numa *pressão total final dupla* dentro do pistão?

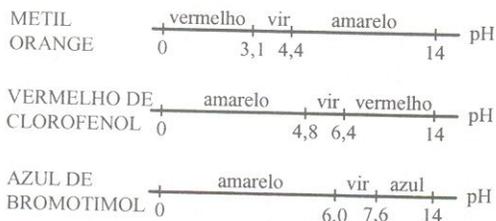


- A. ( ) A torneira ficando fechada, mantido o pistão fixo, duplica-se a temperatura absoluta.
  - B. ( ) A torneira ficando fechada, mantida a temperatura fixa, desloca-se o pistão de tal forma que o volume total caia à metade.
  - C. ( ) Mantendo a temperatura e o pistão fixos, deixa-se entrar, pela torneira, mais 0,4 mols de  $\text{PCl}_3(\text{g})$ , mais 0,3 mols de  $\text{Cl}_2(\text{g})$  e mais 0,5 mols de  $\text{PCl}_5(\text{g})$ .
  - D. ( ) Mantendo a temperatura e o pistão fixos, introduz-se, pela torneira, 1,2 mols de Argônio;
  - E. ( ) Mantendo a torneira fechada, duplica-se a temperatura absoluta e reduz-se o volume à metade por deslocamento do pistão.
59. (ITA-90) Sabe-se que a solubilidade de certo sal em água decresce com o aumento de temperatura. Em dois copos contendo a mesma quantidade de água, introduz-se, num mesmo instante, o mesmo excesso deste sal pulverizado. O conteúdo dos dois copos é agitado, simultaneamente, da mesma forma. A única diferença entre os dois copos é que um é mantido numa temperatura mais baixa,  $T_1$ ,

enquanto o outro é mantido numa temperatura mais elevada  $T_2$ . Qual dos gráficos abaixo corresponde à evolução temporal da concentração de sal dissolvido na água?



60. (ITA-90) Adicionando um pouco de indicador ácido / base a uma solução aquosa inicialmente incolor, a solução irá adquirir uma cor que depende da natureza do indicador e do pH da solução original, conforme esquema seguinte válido para a temperatura ambiente:



onde *vir* indica a faixa de pH em que a cor varia gradualmente entre as tonalidades externas assinaladas. Utilizando estas informações, tentou-se descobrir o pH de uma solução problema, inicialmente incolor, a partir dos ensaios seguintes:

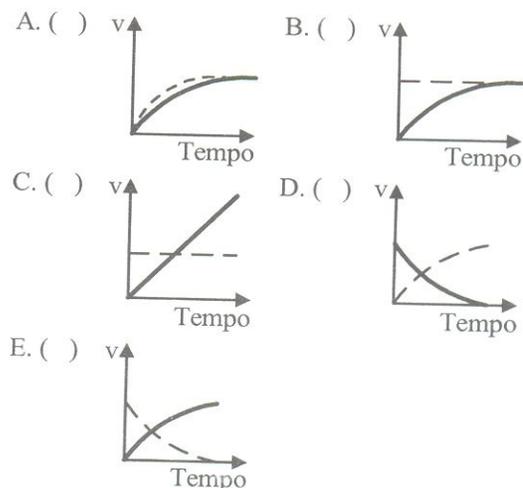
- ao primeiro terço da solução problema, foi adicionado um pouco de metil orange e a coloração ficou amarela.
- a outro terço da solução problema, foi adicionado um pouco de vermelho de clorofenol e a coloração ficou laranja.
- ao último terço da solução problema, foi adicionado um pouco de azul de bromotimol e a coloração ficou amarela.

Com base nestas observações assinale, entre as opções abaixo, aquela que tenha o limite superior e o limite inferior mais próximos do pH da solução problema.

- A. ( )  $1,0 < \text{pH} < 6,0$   
 B. ( )  $4,4 < \text{pH} < 6,0$   
 C. ( )  $4,4 < \text{pH} < 14$   
 D. ( )  $4,8 < \text{pH} < 6,0$   
 E. ( )  $4,8 < \text{pH} < 6,4$

61. (ITA-90) Por que a afirmação III está *certa* ou *errada*? Esta pergunta refere-se a questão 64.
62. (ITA-90) A solução contendo o soluto etilamina deverá, ou não, conduzir eletricidade? Por quê? Esta pergunta refere-se a questão 65.
63. (ITA-90) Justifique por que a conclusão contida na opção E está *certa* ou *errada*. Esta pergunta refere-se a questão 66.
64. (ITA-90) Por que a opção A está *certa* ou *errada*? Esta pergunta refere-se a questão 67.
65. (ITA-90) Por que a opção B está *certa* ou *errada*? Esta pergunta refere-se a questão 68.
66. (ITA-90) Por que a opção C está *certa* ou *errada*? Esta pergunta refere-se a questão 69.
67. (ITA-90) Supondo que a temperatura seja  $25^\circ\text{C}$  e que as soluções tenham comportamento ideal, com que solutos, facilmente disponíveis, e com que concentrações respectivas, podemos obter:  
 a) uma solução cujo pH seja igual a  $-0,5$  (negativo)?  
 b) uma solução cujo pH seja igual a  $+14,5$ ?  
 Esta pergunta refere-se a questão 70.

68. (ITA-91) Um balão fechado, previamente evacuado, contém uma ampola cheia de água. Quebrando-se a ampola, nota-se que no equilíbrio ainda sobra água líquida. O sistema é mantido na temperatura ambiente constante. Assinale a opção que mostra, *corretamente*, como variam com o tempo ( $t$ ) as taxas ( $v$ ) de evaporação (linha *tracejada*) e de condensação (linha *cheia*). Estas taxas são expressas em quantidade de substâncias que passa de uma fase para outra, pôr unidade de tempo e pôr unidade de área de contato entre as duas fases.

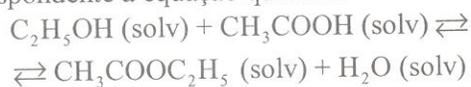


- 69.** (ITA-91) Considere as seguintes soluções diluídas:
- X mol de sacarose / quilograma de água
  - Y mol de cloreto de sódio / quilograma de água
  - Z mol de sulfato de magnésio / quilograma de água
  - W mol de cloreto de magnésio / quilograma de água

Para que nestas quatro soluções, durante o resfriamento, possa começar a aparecer gelo na mesma temperatura, digamos a  $- \gamma, 3^{\circ}\text{C}$ , é necessário que, em primeira aproximação, tenhamos:

- $x = y = z = w$
  - $1x = 2y = 4z = 4w$
  - $1x = 2y = 2z = 3w$
  - $x/1 = y/2 = z/2 = w/3$
  - $x/2 = y/2 = z/4 = w/4$
- 70.** (ITA-91) Em 1,0 litro de uma solução aquosa não tamponada, a  $25^{\circ}\text{C}$ , ocorre uma reação química que produz ânion  $\text{OH}^-$ . Sabendo-se que ao se iniciar a reação a solução tinha  $\text{pH} = 6$ , após a produção de  $1,0 \cdot 10^{-3}$  mol de  $\text{OH}^-$  o  $\text{pH}$  da solução será:
- 3
  - 6
  - 7
  - 9
  - 11

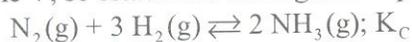
- 71.** (ITA-91) Num recipiente mantido a pressão e temperatura ambiente, foram introduzidos 1,00 mol de etanol, X mol de ácido acético, um pouco de catalizador adequado e um solvente inerte para que o volume final da mistura homogênea líquida fosse 5,0 l. Nestas condições se estabelece o equilíbrio correspondente à equação química:



A constante deste equilíbrio é 4,0 na temperatura ambiente. Uma vez atingido o equilíbrio, verifica-se que o sistema contém 0,50 mol de acetato de etila. Destas informações podemos concluir que a quantidade X inicialmente posta de ácido acético é:

- 0,25
- 0,50
- 0,75
- 0,38
- 0,63

- 72.** (ITA-91) Dentro de um recipiente fechado, de volume V, se estabelece um seguinte equilíbrio:



As quantidades (mol) de  $\text{N}_2$ ,  $\text{H}_2$  e  $\text{NH}_3$  no equilíbrio são respectivamente,  $n\text{N}_2$ ,  $n\text{H}_2$ , e  $n\text{NH}_3$ . Assinale a opção que contém a expressão que representa

corretamente a constante  $K_c$  para o equilíbrio equacionado acima:

- $n_{\text{NH}_3}^2 / (n_{\text{H}_2}^3 \cdot n_{\text{N}_2})$
- $(n_{\text{NH}_3} \cdot V) / (n_{\text{H}_2} \cdot n_{\text{N}_2})$
- $(n_{\text{NH}_3}^2 \cdot V^2) / (n_{\text{H}_2}^3 \cdot n_{\text{N}_2})$
- $(n_{\text{H}_2}^3 \cdot n_{\text{N}_2}) / (n_{\text{NH}_3}^2 \cdot V^2)$
- $(4 \cdot n_{\text{NH}_3}^2 \cdot V^2) / (27 \cdot n_{\text{H}_2}^3 \cdot n_{\text{N}_2})$

- 73.** (ITA-91) Num copo se estabelece o seguinte equilíbrio heterogêneo:



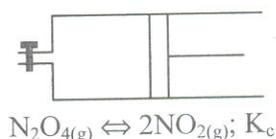
Com relação à possibilidade de se deslocar este equilíbrio para a direita, mantendo a temperatura constante são feitas as seguintes sugestões:

- Acrescentar  $\text{AgCl}_{(\text{s})}$
  - Retirar uma parte do  $\text{AgCl}_{(\text{s})}$
  - Acrescentar um pouco de  $\text{NaCl}_{(\text{s})}$
  - Acrescentar água.
  - Evaporar parte da água
- Das sugestões acima irá (irão) deslocar, efetivamente, o equilíbrio no sentido desejado apenas:
- III
  - I e IV
  - II e III
  - III e V
  - II, III e V

- 74.** (ITA-91) Dentre as substâncias abaixo assinale aquela que, quando dissolvida em água, produz solução alcalina:

- $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$
- $\text{NaCl}$
- $\text{CH}_3\text{COONa}$
- $\text{NH}_4\text{Cl}$
- $\text{KNO}_3$

- 75.** (ITA-92) Num cilindro pistão móvel provido de torneira, conforme a figura abaixo, se estabeleceu o equilíbrio:



Mantendo a temperatura constante, pode-se realizar as seguintes modificações:

- Reduzir o volume, por deslocamento do pistão.
- Introduzir mais  $\text{NO}_{2(\text{g})}$  pela torneira, o pistão permanecendo fixo.

- III. Introduzir mais  $N_2O_{4(g)}$  pela torneira, o pistão permanecendo fixo.  
IV. Introduzir Argônio pela torneira, o pistão permanecendo fixo.

Qual ou quais das alternativas acima irá ou irão provocar um deslocamento do equilíbrio para a esquerda, isto é, irá ou irão acarretar a produção de mais  $N_2O_{4(g)}$  dentro do cilindro?

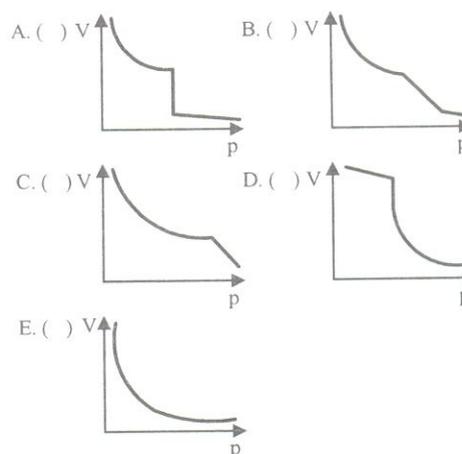
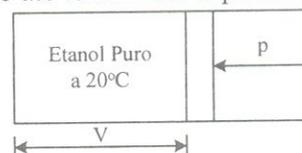
- A. ( ) Apenas I  
B. ( ) Apenas III  
C. ( ) Apenas I e II  
D. ( ) Apenas II e IV  
E. ( ) Apenas I, II e III.
- 76.** (ITA-92) A massa molar do  $Mg(OH)_2$  é 58,3 g/mol e seu produto de solubilidade em água é  $4,6 \cdot 10^{-24}$  para 25°C. Colocando excesso de hidróxido de magnésio sólido em contato com 1,0 litro de água pura, o máximo de  $Mg(OH)_2$  que irá se dissolver neste volume de água, a 25°C, será
- A. ( )  $\sqrt[3]{4,6 \cdot 10^{-24}} / 4$  mol  
B. ( )  $\sqrt[3]{4,6 \cdot 10^{-24}}$  mol  
C. ( )  $\sqrt[3]{4,6 \cdot 10^{-24}} / 58,3$  g  
D. ( )  $4,6 \cdot 10^{-24}$  mol  
E. ( )  $(4,6 \cdot 10^{-24} \cdot 58,3 / 3)$  g
- 77.** (ITA-92) Dissolvendo-se 1,0 mol de ácido acético em água para obter 1,0 l de líquido, resulta uma solução que tem uma concentração de íons  $H^+$  igual a  $4,2 \cdot 10^{-3}$  mol/l. Com relação a esta solução é falso afirmar que:
- A. ( ) a quantidade de ácido acético na forma molecular é  $(1,0 - 4,2 \cdot 10^{-3})$  mol.  
B. ( ) a quantidade de ânion acetato é  $4,2 \cdot 10^{-3}$  mol.  
C. ( ) ela se torna neutra ( $pH = 7$ ) pela adição de  $4,2 \cdot 10^{-3}$  mols de  $NaOH_{(c)}$ .  
D. ( ) ela se torna alcalina ( $pH > 7$ ) pela adição de 1,0 mol de  $NaOH_{(c)}$ .  
E. ( ) ela se torna mais ácida, pela adição de gotas de ácido sulfúrico concentrado.
- 78.** (ITA-92) Sabendo que a dissociação de  $N_2O_{4(g)}$  em  $NO_{2(g)}$  é endotérmica, preveja como a constante de equilíbrio ( $K_c$ ) deve variar com a temperatura, explicando o tipo de raciocínio utilizado para esta previsão. Esta pergunta refere-se a questão 85.
- 79.** (ITA-92) A 25°C, excesso de  $Mg(OH)_{2(c)}$  é posto em contato com 1,0 litro de uma solução aquosa 0,20 molar em NaOH. Calcule o número de mols e a massa (em gramas) de íons  $Mg^{++}$  que poderão se

dissolver na solução. O raciocínio precisa ser deixado claro, mas basta deixar os cálculos indicados, como nas alternativas do teste acima. Esta pergunta refere-se a questão 86.

- 80.** (ITA-92) Justifique se o acréscimo de mais água a uma solução aquosa de ácido acético 0,10 molar irá efetuar:
- a) o grau de dissociação do ácido.  
b) o total de íons presentes na solução.  
c) a condutividade elétrica da solução.  
d) o pH da solução.
- Esta pergunta refere-se a questão 87.
- 81.** (ITA-93) Considere as duas soluções seguintes, ambas aquosas e a 25°C:
- I. 0,005 molar de hidróxido de bário.  
II. 0,010 molar de hidróxido de amônio.
- Estas soluções terão respectivamente os seguintes valores de pH:

	I	II
A. ( )	pH $\approx$ 12	pH < 12
B. ( )	pH $\approx$ 12	pH $\approx$ 12
C. ( )	pH $\approx$ 12	pH > 12
D. ( )	pH $\approx$ 0,010	pH < 0,010
E. ( )	pH $\approx$ 2	pH > 2

- 82.** (ITA-93) O cilindro provido de um pistão móvel, esquematizado abaixo, contém apenas etanol puro e é mantido sob temperatura constante de 20°C. Assinale a alternativa que melhor representa a variação do volume (V) com a pressão (p) aplicada, abrangendo etanol desde completamente vaporizado até totalmente liquefeito.



83. (ITA-93) A síntese de metanol a partir de gás de água é representada por



Com base no princípio de Le Chatelier é possível prever como se pode aumentar a quantidade de metanol, partindo de uma certa quantidade de monóxido de carbono. A alteração que *não* contribuiria para este aumento é:

- A. ( ) Aumento da quantidade de hidrogênio a volume constante.  
 B. ( ) Aumento da pressão pela introdução de argônio a volume constante.  
 C. ( ) Diminuição da temperatura pelo resfriamento do sistema.  
 D. ( ) Aumento da pressão pela redução do volume.  
 E. ( ) Condensação do metanol à medida que ele se forma.

84. (ITA-93) Considere as soluções aquosas saturadas, recém - preparadas, todas a 25°C e pressão de 1 atm, dos seguintes solutos:

- I. Cloro  
 II. Sulfeto de sódio  
 III. Iodeto de potássio  
 IV. Nitrato de cobre  
 V. Sulfato de bário

Em relação às propriedades destas soluções, assinale a opção que contém a afirmação *errada*:

- A. ( ) A solução II é básica e a III é neutra.  
 B. ( ) A solução III é incolor e a IV é azul.  
 C. ( ) Na mistura das soluções I e III se forma iodo.  
 D. ( ) As soluções I e V são as que têm menor condutividade elétrica.  
 E. ( ) Em misturas de II e V irá aparecer precipitado de sulfeto de bário.

85. (ITA-93) Considere as seguintes soluções aquosas:

- I. 0,030 molar de glicose;  
 II. 0,030 molar de ácido acético; e  
 III. 0,010 molar de cloreto de cálcio.

Em relação a essas soluções são feitas as seguintes afirmações:

- a) A pressão de vapor da água nessas soluções obedece à ordem:  $p_{II} < p_I \cong p_{III}$ .  
 b) A pressão osmótica nessas soluções obedece à ordem:  $\pi_I < \pi_{II} < \pi_{III}$ .  
 c) A elevação da temperatura de ebulição nessas soluções está na ordem:  $\Delta T_{III} < \Delta T_{II} \cong \Delta T_I$ .

Dentre as afirmações acima está(estão) *certa(s)*

- A. ( ) Apenas a                      B. ( ) Apenas a e b  
 C. ( ) Apenas a e c                D. ( ) Apenas b e c  
 E. ( ) Todas.

86. (ITA-93) Calcule a variação da massa da chapa A, ligada ao pólo positivo da bateria, da experiência descrita no enunciado do teste 7, se a carga que circula pela célula for igual a 4,83 Coulomb. Deixe claro na sua resposta se a massa da chapa aumenta ou diminui.

87. (ITA-93) Estime os valores de pH das duas soluções mencionadas no teste 9, apresentando o raciocínio empregado.

88. (ITA-93) Justifique algebricamente por que a opção D do teste 11 está *certa* ou está *errada*, partindo da expressão da constante de equilíbrio da reação em questão.

89. (ITA-93) Com o auxílio de equações químicas, justifique se uma solução aquosa de sulfeto de sódio é ácida, básica ou neutra.

90. (ITA-94) Considere três frascos contendo, respectivamente, soluções aquosas com concentração  $1.10^{-3}$  mol/l de:

- I. KCl  
 II. NaNO<sub>3</sub>  
 III. AgNO<sub>3</sub>

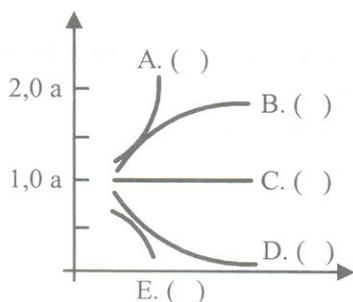
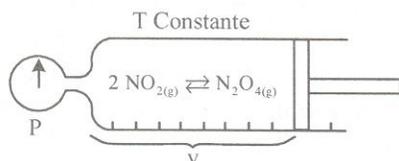
Com relação à informação acima, qual das seguintes opções contém a afirmação *correta*?

- A. ( ) 100 ml da solução I apresenta o dobro da condutividade elétrica específica do que 50 ml desta mesma solução;  
 B. ( ) O líquido obtido misturando volumes iguais de I com II apresenta o mesmo "abaixamento de temperatura inicial de solidificação" do que o obtido misturando volumes iguais de I com III;  
 C. ( ) Aparece precipitado tanto misturando volumes iguais de I com II, como misturando volumes iguais de II com III;  
 D. ( ) Misturando volumes iguais de I e II, a pressão osmótica da mistura final é a metade da pressão osmótica das soluções de partida;  
 E. ( ) Misturando volumes iguais de I e III, a condutividade elétrica específica cai a aproximadamente metade da condutividade elétrica específica das soluções de partida;

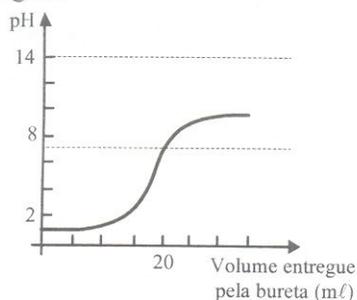
91. (ITA-94) A chama de um bico de Bunsen ou de um palito de fósforo é "avivada" (aumentam temperatura da chama e velocidade de queima), quando colocada numa atmosfera de N<sub>2</sub>O. Este fenômeno ocorre porque:

- A. ( )  $N_2O$  é oxidado a  $NO$ , o que aumenta a quantidade de calor liberado.  
 B. ( )  $N_2O$  é oxidado a  $NO_2$ , o que aumenta a quantidade de calor liberado.  
 C. ( )  $N_2O$  é decomposto em  $NO$  e  $N$  atômico, o que acelera reações em cadeia.  
 D. ( )  $N_2O$  é decomposto em oxigênio e nitrogênio, o que aumenta a concentração de  $O_2$  na mistura.  
 E. ( )  $N_2O$  é transformado em  $N_4O$ , o que diminui a concentração de nitrogênio na mistura.

92. (ITA-94) Sob temperatura constante, um cilindro graduado provido de pistão móvel e manômetro, conforme mostrado na figura ao lado, contém uma mistura gasosa e  $N_2O_4$  e  $NO_2$  em equilíbrio. Para cada nova posição do pistão, esperamos o equilíbrio se restabelecer e anotamos os valores de  $p$  e  $V$ . Feito isso, fazemos um gráfico do produto  $pV$  versus  $V$ . Qual das curvas abaixo se aproxima mais da forma que devemos esperar para o gráfico em questão?



93. (ITA-94) Um copo contém, inicialmente, 20 ml de uma solução aquosa 0,1 molar de uma substância desconhecida. De uma bureta se deixa cair, gota a gota, uma solução aquosa 0,1 molar de outra substância, também desconhecida. Sabe-se que uma das substâncias em questão é um ácido e a outra uma base. Após a adição de cada gota da bureta, o  $pH$  do conteúdo do corpo é monitorado e o resultado desta monitoração do  $pH$  é mostrado no gráfico a seguir:



Da observação do gráfico acima, qual era a natureza das soluções iniciais no copo e na bureta?

	Substância no copo	Substância na bureta
A. ( )	ácido forte	base forte
B. ( )	base forte	ácido fraco
C. ( )	ácido fraco	base forte
D. ( )	ácido forte	base fraca
E. ( )	base fraca	ácido fraco

94. (ITA-94) Justifique por que a opção E da questão 100 está certa ou está errada.
95. (ITA-94) Justifique por que a opção A da questão 102 está certa ou está errada.
96. (ITA-94) Justifique a resposta encontrada para a questão 103.
97. (ITA-94) Descreva como se poderia determinar, experimentalmente, a pressão de vapor do etanol na temperatura de  $30^\circ C$ . Sua descrição deve incluir um esquema da aparelhagem que poderia ser utilizada.
98. (ITA-94) O método de Haber para a produção de amônia é baseado no estabelecimento do seguinte equilíbrio
- $$N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g); K$$
- a partir de misturas de nitrogênio e hidrogênio comprimido. Pensando em alguns dos aspectos do problema, poderia se chegar à conclusão de que é mais interessante trabalhar em temperaturas mais baixas. Pensando em outros aspectos, poderia se chegar à conclusão contrária. Discuta o problema envolvido em um e em outro caso.
99. (ITA-95) Em três frascos rotulados A, B e C e contendo 100 ml de água cada um, são colocados 0,1 mol, respectivamente, de hidróxido de potássio de hidróxido de cobre (II) e hidróxido de níquel (II). Após agitar o suficiente para garantir que todo soluto possível de se dissolver já esteja dissolvido, mede-se a condutividade elétrica das misturas. Obtém-se que as condutividades das misturas dos frascos B e C são semelhantes e muito menores do que a do frasco A. Assinale a opção que contém a afirmação falsa.

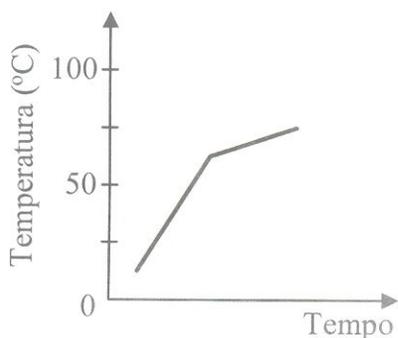
- A. ( ) Nos frascos B e C, a parte do hidróxido que está dissolvida encontra-se dissociada ionicamente.
- B. ( ) Os hidróxidos dos copos B e C são bases fracas, porque nem toda quantidade dissolvida está dissociada ionicamente.

- C. ( ) A condutividade elétrica da mistura do frasco A é a maior porque se trata de uma solução 1 molar de eletrólito forte.
- D. ( ) Os três solutos são bases fortes, porém os hidróxidos de cobre (II) e de níquel (II) são pouco solúveis.
- E. ( ) Soluções muito diluídas com igual concentração normal destes 3 hidróxidos deveriam apresentar condutividades elétricas semelhantes.

- 100.** (ITA-95) Dentro de um forno, mantido numa temperatura constante, temos um recipiente contendo 0,50 mols de  $\text{Ag}_{(c)}$ , 0,20 mols de  $\text{Ag}_2\text{O}_{(c)}$  e oxigênio gasoso exercendo uma pressão de 0,20 atm. As três substâncias estão em equilíbrio químico. Caso a quantidade de  $\text{Ag}_2\text{O}_{(c)}$  dentro do recipiente, na mesma temperatura, fosse 0,40 mols, a pressão, em atm, do oxigênio no equilíbrio seria:
- A. ( ) 0,10                      B. ( ) 0,20  
C. ( ) 0,40                      D. ( )  $\sqrt{0,20}$   
E. ( ) 0,80

- 101.** (ITA-95) As opções abaixo se referem a equilíbrios químicos que foram estabelecidos dentro de cilindros providos de êmbolos. Se o volume interno em cada cilindro for reduzido à metade, a temperatura permanecendo constante, em qual das opções abaixo o ponto de equilíbrio será alterado?
- A. ( )  $\text{H}_{2(g)} + \text{I}_{2(g)} \rightleftharpoons 2\text{HI}_{(g)}$   
B. ( )  $\text{CaCO}_{3(s)} \rightleftharpoons \text{CaO}_{(s)} + \text{CO}_{2(g)}$   
C. ( )  $\text{PbS}_{(s)} + \text{O}_{2(g)} \rightleftharpoons \text{Pb}_{(s)} + \text{SO}_{2(g)}$   
D. ( )  $\text{CH}_{4(g)} + 2\text{O}_{2(g)} \rightleftharpoons \text{CO}_{2(g)} + 2\text{H}_2\text{O}_{(g)}$   
E. ( )  $\text{Fe}_2\text{O}_{3(s)} + 3\text{CO}_{(g)} \rightleftharpoons 2\text{Fe}_{(s)} + 3\text{CO}_{2(g)}$

- 102.** (ITA-95) Uma porção de certo líquido, contido numa garrafa térmica sem tampa, é aquecido por uma resistência elétrica submersa no líquido e ligada à uma fonte de potência constante. O que se nota é mostrado no gráfico abaixo. Considerando o local onde a experiência é realizada, este líquido poderia ser:



- A. ( ) Água pura e a experiência realizada acima do nível do mar.
- B. ( ) Uma solução aquosa de um sal e a experiência realizada ao nível do mar.
- C. ( ) Uma solução de água e acetona e a experiência realizada ao nível do mar.
- D. ( ) Acetona pura e a experiência realizada ao nível do mar.
- E. ( ) Água pura e a experiência realizada abaixo do nível do mar.

- 103.** (ITA-95) Um cilindro provido de um pistão contém água até a metade do seu volume. O espaço acima da água é ocupado por ar atmosférico. Para aumentar a quantidade de  $\text{CO}_2$  dissolvido na água alunos propuseram os seguintes procedimentos:
- Manter a temperatura constante e aumentar a pressão total introduzindo nitrogênio.
  - Manter a temperatura constante e aumentar a pressão total introduzindo  $\text{CO}_2$ .
  - Manter a temperatura e a pressão constantes e substituir parte do ar por  $\text{CO}_2$ .
  - Manter a temperatura constante e diminuir a pressão total retirando oxigênio.
  - Aumentar a temperatura e manter a pressão total constante, aumentando o volume do sistema.

Quais destes procedimentos servem para atingir o objetivo desejado?

- A. ( ) Apenas I e II  
B. ( ) Apenas II e III  
C. ( ) Apenas I, II e III  
D. ( ) Apenas I, III e IV  
E. ( ) Apenas II, IV e V

- 104.** (ITA-95) Um cilindro provido de um pistão móvel e mantido em temperatura constante contém éter etílico no estado líquido em equilíbrio com seu vapor. O pistão é movido lentamente de modo a aumentar o volume da câmara. Com relação a este sistema são feitas as seguintes afirmações:
- Atingido o novo equilíbrio entre o líquido e o vapor, a pressão dentro do cilindro diminui.
  - Atingido o novo equilíbrio entre o líquido e o vapor, o produto da pressão dentro do cilindro pelo volume da fase gasosa aumenta.
  - Quando não existir mais líquido dentro do cilindro, o produto da pressão pelo volume dentro do cilindro aumenta com o aumento do volume.
- Destas afirmações estão *corretas*:
- A. ( ) Apenas I                      B. ( ) Apenas II  
C. ( ) Apenas III                      D. ( ) Apenas I e III  
E. ( ) Apenas II e III

**105.** (ITA-95) Em uma amostra de água do mar dissolve-se um pouco de sacarose. Em relação à consequência deste acréscimo de sacarose, são feitas as seguintes afirmações:

- I. A pressão de vapor da água diminui.
- II. A pressão osmótica da solução aumenta.
- III. A condutividade elétrica da solução permanece praticamente a mesma.
- IV. A temperatura precisará descer mais para que possa começar a solidificação.
- V. O grau de dissociação dos sais presentes na água do mar permanecerá praticamente o mesmo.

Das afirmações acima estão *corretas*:

- A. ( ) Apenas I, II e III
- B. ( ) Apenas II, III e IV
- C. ( ) Apenas III, IV e V
- D. ( ) Apenas II, III, IV e V
- E. ( ) Todas

**106.** (ITA-95) A  $60^\circ\text{C}$  o produto iônico da água,  $[\text{H}^+] \times [\text{OH}^-]$ , é igual a  $1,0 \cdot 10^{-13}$ . Em relação a soluções aquosas nesta temperatura são feitas as seguintes afirmações:

- I. Soluções ácidas são aquelas que têm  $\text{pH} < 6,5$ .
- II. Soluções neutras têm  $\text{pH} = 6,5$ .
- III. Soluções básicas têm  $\text{pH} > 6,5$ .
- IV.  $\text{pH} + \text{pOH}$  tem que ser igual a 13,0.
- V. Solução com  $\text{pH} 14$  é impossível de ser obtida.

Das afirmações acima estão *corretas*:

- A. ( ) Apenas V
- B. ( ) Apenas I e III
- C. ( ) Apenas II e IV
- D. ( ) Apenas I, II, III e IV
- E. ( ) Nenhuma

**107.** (ITA-95) Determine a massa de hidróxido de potássio que deve ser dissolvida em 0,500 ml de água para que a solução resultante tenha um  $\text{pH} \approx 13$  a  $25^\circ\text{C}$ .

**108.** (ITA-95) Explique por que cada um dos cinco procedimentos citados no teste 113 atinge ou não o objetivo desejado.

**109.** (ITA-96) Qual das opções abaixo contém a sequência *correta* de ordenação da pressão de vapor saturante das substâncias seguintes, na temperatura de  $25^\circ\text{C}$ :



- A. ( )  $\text{pCO}_2 > \text{pBr}_2 > \text{pHg}$ .
- B. ( )  $\text{pCO}_2 \approx \text{pBr}_2 > \text{pHg}$ .
- C. ( )  $\text{pCO}_2 \approx \text{pBr}_2 \approx \text{pHg}$ .
- D. ( )  $\text{pBr}_2 > \text{pCO}_2 > \text{pHg}$ .
- E. ( )  $\text{pBr}_2 > \text{pCO}_2 \approx \text{pHg}$ .

**110.** (ITA-96) Juntando 1,0 litro de uma solução aquosa de  $\text{HCl}$  com  $\text{pH} = 1,0$  a 10,0 litros de uma solução

aquosa de  $\text{HCl}$  com  $\text{pH} = 6,0$ , qual das opções abaixo contém o valor de  $\text{pH}$  que mais se aproxima do  $\text{pH}$  de 11,0 litros da mistura obtida?

- A. ( )  $\text{pH} \approx 0,6$
- B. ( )  $\text{pH} \approx 1,0$
- C. ( )  $\text{pH} \approx 2,0$
- D. ( )  $\text{pH} \approx 3,5$
- E. ( )  $\text{pH} \approx 6,0$

**111.** (ITA-96) Considere as três soluções aquosas contidas nos frascos seguintes:

- Frasco 1: 500 ml de  $\text{HCl}$  1,0 molar
- Frasco 2: 500 ml de  $\text{CH}_3\text{COOH}$  1,0 molar
- Frasco 3: 500 ml de  $\text{NH}_4\text{OH}$  1,0 molar

Para a temperatura de  $25^\circ\text{C}$  e sob pressão de 1 atm, são feitas as seguintes afirmações:

- I. A concentração de íons  $\text{H}^+$  no frasco 1 é aproximadamente 1,0 mol/litro.
- II. A concentração de íons  $\text{H}^+$  no frasco 2 é aproximadamente 1,0 mol/litro
- III. A concentração de íons  $\text{OH}^-$  no frasco 3 é aproximadamente 1,0 mol/litro.
- IV. A mistura de 100 ml do conteúdo do frasco 1 com igual volume do conteúdo do frasco 2 produz 200 ml de uma solução aquosa cuja concentração de íons  $\text{H}^+$  é aproximadamente 2,0 mol/litro.
- V. A mistura de 100 ml do conteúdo do frasco 1 com igual volume do conteúdo do frasco 3 produz 200 ml de uma solução aquosa cujo  $\text{pH}$  é menor do que sete.

Das afirmações acima estão *erradas* apenas:

- A. ( ) I e V
- B. ( ) I, II e III
- C. ( ) I, III e IV
- D. ( ) III, IV e V
- E. ( ) IV e V

**112.** (ITA-96) Num recipiente de volume constante igual a 1,00 litro, inicialmente evacuado, foi introduzido 1,00 mol de pentacloreto de fósforo gasoso e puro. O recipiente foi mantido a  $250^\circ\text{C}$  e no equilíbrio final foi verificada a existência de 0,47 mols de gás cloro. Qual das opções abaixo contém o valor aproximado da constante ( $K_c$ ) do equilíbrio estabelecido dentro do cilindro e representado pela seguinte equação química:



- A. ( ) 0,179
- B. ( ) 0,22
- C. ( ) 0,42
- D. ( ) 2,38
- E. ( ) 4,52

**113.** (ITA-96) Considere as informações seguintes, todas relativas à temperatura de  $25^\circ\text{C}$ :

1.  $\text{NH}_4^+_{(\text{aq})} \rightleftharpoons \text{NH}_3_{(\text{aq})} + \text{H}^+_{(\text{aq})}; K_c \approx 10^{-10}$
2.  $\text{HNO}_2_{(\text{aq})} \rightleftharpoons \text{H}^+_{(\text{aq})} + \text{NO}_2^-_{(\text{aq})}; K_c \approx 10^{-4}$
3.  $\text{OH}^-_{(\text{aq})} \rightleftharpoons \text{H}^+_{(\text{aq})} + \text{O}^{2-}_{(\text{aq})}; K_c < 10^{-36}$

Examinando estas informações, alunos fizeram as seguintes afirmações:

- I.  $\text{OH}^-$  é um ácido muitíssimo fraco.
- II. O ânion  $\text{NO}_2^-$  é a base conjugada do  $\text{HNO}_2$ .
- III.  $\text{HNO}_2$  é o ácido conjugado da base  $\text{NO}_2^-$ .
- IV.  $\text{NH}_4^+$  é um ácido mais fraco do que  $\text{HNO}_2$ .
- V. Para



devemos ter  $K_c < 1$ .

Das afirmações acima está(ão) *correta(s)*:

- A. ( ) Todas
- B. ( ) Apenas I
- C. ( ) Apenas I, II e III
- D. ( ) Apenas I, II, III e IV
- E. ( ) Apenas II e III

- 114.** (ITA-96) Um copo, com capacidade de 250 ml, contém 100 ml de uma solução aquosa 0,10 molar em ácido acético na temperatura de 25°C. Nesta solução ocorre o equilíbrio:



A adição de mais 100 ml de água pura a esta solução, com a temperatura permanecendo constante, terá as seguintes conseqüências:

	Concentração de íons acetato (mol/litro)	Quantidade de íons acetato (mol)
A. ( )	Vai aumentar	Vai aumentar
B. ( )	Vai aumentar	Vai diminuir
C. ( )	Fica constante	Fica constante
D. ( )	Vai diminuir	Vai aumentar
E. ( )	Vai diminuir	Vai diminuir

- 115.** (ITA-96) Um cilindro provido de torneira contém uma mistura de  $\text{N}_2\text{O}_4$  (g) e  $\text{NO}_2$  (g). Entre estas substâncias se estabelece, rapidamente, o equilíbrio



Mantendo o volume (V) constante, a temperatura é aumentada de 27 para 57°C.

Diante deste aumento de temperatura, re-estabelecido o equilíbrio, podemos concluir que a pressão total ( $p_t$ ) vai:

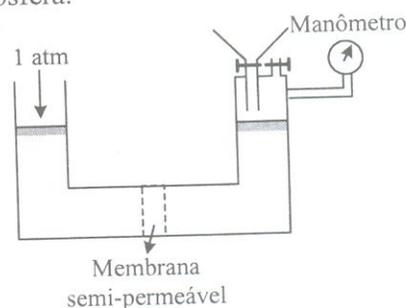
- A. ( ) Aumentar cerca de 10%.
- B. ( ) Aproximadamente duplicar.
- C. ( ) Permanecer aproximadamente constante.
- D. ( ) Aumentar mais que 10%, sem chegar a duplicar.
- E. ( ) Aumentar menos do que 10%, porém mais que 1%.

- 116.** (ITA-96) Três recipientes *iguais* de 4 litros de capacidade, chamados de 1, 2 e 3, mantidos na mesma temperatura contêm 180 ml de água. A cada um destes recipientes se junta, respectivamente,

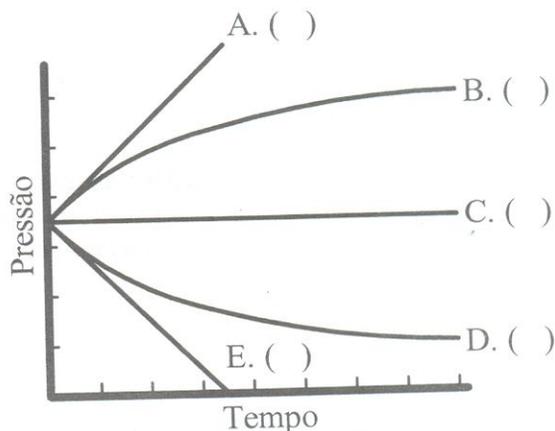
0,10 mol de cada uma das seguintes substâncias: *óxido de cálcio, cálcio metálico e hidreto de cálcio*. Após a introdução do respectivo sólido, cada frasco é bem fechado. Atingido o equilíbrio e descartada a hipótese de ocorrência de explosão, a pressão final dentro de cada recipiente pode ser colocada na seguinte ordem:

- A. ( )  $p_1 = p_2 = p_3$
- B. ( )  $p_1 < p_2 < p_3$
- C. ( )  $p_1 < p_2 \approx p_3$
- D. ( )  $p_1 \approx p_2 < p_3$
- E. ( )  $p_1 > p_2 \approx p_3$

- 117.** (ITA-96) A aparelhagem esquematizada abaixo é mantida a 25°C. Inicialmente, o lado direito contém uma solução aquosa *um* molar em cloreto de cálcio, enquanto que o lado esquerdo contém uma solução aquosa *um décimo* molar do mesmo sal. Observe que a parte superior do lado direito é fechada depois da introdução da solução e é provida de um manômetro. No início de uma experiência as alturas dos níveis dos líquidos nos dois ramos são iguais, conforme indicados na figura, e a pressão inicial no lado direito é igual a *uma* atmosfera.



Mantendo a temperatura constante, à medida que passa o tempo de pressão do ar confinado no lado direito irá se comportar de acordo com qual das curvas representadas na figura seguinte?



- 118.** (ITA-96) Para a questão 111 escreva as equações químicas, completas e balanceadas, para cada uma das reações que ocorre em cada recipiente e, a partir delas, justifique sua resposta ao teste.

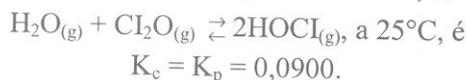
**119.** (ITA-96) A  $25^{\circ}\text{C}$ , o produto de solubilidade, em água, do  $\text{PbSO}_4$  é igual a  $2,0 \cdot 10^{-8}$  e do  $\text{PbCrO}_4$  é igual a  $3,2 \cdot 10^{-14}$ . Um copo de um litro contém 100 ml de uma solução aquosa  $0,10$  molar de  $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$  nesta temperatura. A esta solução junta-se, gota-a-gota, sob constante agitação, uma solução que contém  $0,020$  mol/l de sulfato e  $0,030$  mol/l de cromato, o único cátion sendo o sódio. Continuando esta adição, o que pode precipitar primeiro:  $\text{PbSO}_{4(c)}$  ou  $\text{PbCrO}_{4(c)}$ ? Ou irá aprender uma mistura destes dois sólidos? Nestes últimos casos, qual a proporção de cada um dos sais precipitados?

**120.** (ITA-96) Escreva o que você sabe sobre os processos físico-químicos fundamentais envolvidos na transformação de sangue arterial em venoso e vice-versa.

**121.** (ITA-97) Numa solução aquosa  $0,100$  mol/L de um ácido monocarboxílico, a  $25^{\circ}\text{C}$ , o ácido está a  $3,7\%$  dissociado após o equilíbrio ter sido atingido. Assinale a opção que contém o valor correto da constante de dissociação desse ácido nesta temperatura.

- A. ( )  $1,4$   
 B. ( )  $1,4 \cdot 10^{-3}$   
 C. ( )  $1,4 \cdot 10^{-4}$   
 D. ( )  $3,7 \cdot 10^{-2}$   
 E. ( )  $3,7 \cdot 10^{-4}$

**122.** (ITA-97) A constante de equilíbrio da reação



Recipientes fechados, numerados de *I* até *IV*, e mantidos na temperatura de  $25^{\circ}\text{C}$ , contêm somente as três espécies químicas gasosas envolvidas na reação acima. Imediatamente após cada recipiente ter sido fechado, as pressões e/ou as quantidades de cada uma destas substâncias, em cada um dos recipientes, são:

- I.  $5$  mmHg de  $\text{H}_2\text{O}_{(g)}$ ;  $400$  mmHg de  $\text{Cl}_2\text{O}_{(g)}$  e  $10$  mmHg de  $\text{HOCl}_{(g)}$ .  
 II.  $10$  mmHg de  $\text{H}_2\text{O}_{(g)}$ ;  $200$  mmHg de  $\text{Cl}_2\text{O}_{(g)}$  e  $10$  mmHg de  $\text{HOCl}_{(g)}$ .  
 III.  $1,0$  mol de  $\text{H}_2\text{O}_{(g)}$ ;  $0,080$  mols de  $\text{Cl}_2\text{O}_{(g)}$  e  $0,0080$  mols de  $\text{HOCl}_{(g)}$ .  
 IV.  $0,50$  mols de  $\text{H}_2\text{O}_{(g)}$ ;  $0,0010$  mols de  $\text{Cl}_2\text{O}_{(g)}$  e  $0,20$  mols de  $\text{HOCl}_{(g)}$ .

É correto afirmar que:

- A. ( ) Todos os recipientes contêm misturas gasosas em equilíbrio químico.

- B. ( ) Todos os recipientes não contêm misturas gasosas em equilíbrio químico e, em todos eles, o avanço de reação se dá no sentido da esquerda para a direita.  
 C. ( ) A mistura gasosa do recipiente III não está em equilíbrio químico e a reação avança no sentido da esquerda para a direita.  
 D. ( ) A mistura gasosa do recipiente IV não está em equilíbrio químico e a reação avança no sentido da esquerda para a direita.  
 E. ( ) As misturas gasosas dos recipientes I e II não estão em equilíbrio químico e as reações avançam no sentido da direita para a esquerda.

**123.** (ITA-97) (Anulada) A uma solução aquosa  $0,30$  mol/L em HCl são adicionados  $10$  mL de uma solução aquosa  $0,30$  mol/L em NaOH. A variação do pH ocorrida durante o processo é definida como

$$\Delta\text{pH} = (\text{pH}_{\text{mistura}}) - (\text{pH}_{\text{solução de HCl}})$$

Assinale a opção que contém a expressão *correta* desta variação.

- A. ( )  $\Delta\text{pH} = + \log(0,30) - \log(0,20)$   
 B. ( )  $\Delta\text{pH} = - \log(0,30) + \log(0,30)$   
 C. ( )  $\Delta\text{pH} = + \log(0,20) - \log(0,30)$   
 D. ( )  $\Delta\text{pH} = - \log(0,20) + \log(0,30)$   
 E. ( )  $\Delta\text{pH} = - \log(0,050) + \log(0,20)$ .

**124.** (ITA-97) Sabe-se que o processo de dissolução do  $\text{PbI}_{2(s)}$  em água é endotérmico. Sobre o filtrado de uma solução aquosa de  $\text{PbI}_2$  que estava originalmente em contato com seu corpo de fundo ( $\text{PbI}_{2(s)}$ ), na temperatura de  $25^{\circ}\text{C}$ , são feitas as afirmações:

- I. O filtrado é uma solução aquosa de  $\text{PbI}_2$  onde a concentração do íon  $\text{Pb}_{(aq)}^{2+}$  é igual à do íon  $\text{I}_{(aq)}^-$ .  
 II. Espera-se que ocorra precipitação de  $\text{PbI}_2$  se a temperatura do filtrado diminuir para um valor menor do que  $25^{\circ}\text{C}$ .  
 III. Se ao filtrado for adicionado um excesso de  $\text{PbI}_{2(s)}$ , aumentará tanto a concentração dos íons  $\text{I}_{(aq)}^-$  como dos íons  $\text{Pb}_{(aq)}^{2+}$ .  
 IV. Se ao filtrado for adicionada uma solução saturada a  $25^{\circ}\text{C}$  de iodeto de potássio, a concentração de íons  $\text{I}_{(aq)}^-$  aumentará, enquanto a concentração de íons  $\text{Pb}_{(aq)}^{2+}$  diminuirá.

Estão corretas:

- A. ( ) Todas  
 B. ( ) Apenas I e III  
 C. ( ) Apenas I e IV  
 D. ( ) Apenas II e III  
 E. ( ) Apenas II e IV

**125.** (ITA-97) Considere os cinco conjuntos de pares de moléculas no estado gasoso:

- I.  $\text{H}_2\text{N}-\text{NH}_2$  e  $\text{CH}_3\text{NH}_2$
- II.  $\text{N}_2$  e  $\text{NH}_3$
- III.  $\text{Cl}_2$  e  $\text{H}_2\text{CCl}_2$
- IV.  $\text{N}_2$  e  $\text{CO}$
- V.  $\text{CCl}_4$  e  $\text{CH}_4$

Qual das opções abaixo contém os conjuntos de pares de moléculas que são respectivamente: básicas, isoeletrônicas e apolares?

- A. ( ) I, II e III
- B. ( ) I, III e IV
- C. ( ) II, IV e V
- D. ( ) II, III e V
- E. ( ) I, IV e V

**126.** (ITA-97) A  $25^\circ\text{C}$  o produto de solubilidade do  $\text{CaSO}_4(\text{s})$  em água é  $2,4 \cdot 10^{-5}$  (a concentração de  $\text{Ca}^{2+}_{(\text{aq})}$  na solução saturada é  $5 \cdot 10^{-3}$  mol/L). Num copo contendo 10 mL de uma solução aquosa  $3,0 \cdot 10^{-3}$  mol/L de cloreto de cálcio a  $25^\circ\text{C}$  foram adicionados, gota a gota, 10 mL de uma solução aquosa  $3,0 \cdot 10^{-3}$  mol/L de sulfato de cálcio a  $25^\circ\text{C}$ . Em relação às espécies químicas existentes, ou que podem passar a existir, no copo – à medida que a adição avança – é correto afirmar que:

- A. ( ) A quantidade (mol) dos íons  $\text{Ca}^{2+}_{(\text{aq})}$  diminuirá.
- B. ( ) A concentração, em mol/L, dos íons  $\text{SO}^{2-}_{4(\text{aq})}$  diminuirá.
- C. ( ) A concentração, em mol/L, dos íons  $\text{Ca}^{2+}_{(\text{aq})}$  permanecerá constante.
- D. ( ) A quantidade (mol) dos íons  $\text{SO}^{2-}_{4(\text{aq})}$  diminuirá.
- E. ( ) Poderá precipitar a fase sólida  $\text{CaSO}_4(\text{s})$ .

**127.** (ITA-97) Uma certa reação química é representada pela equação:

$2\text{A}_{(\text{g})} + 2\text{B}_{(\text{g})} \rightarrow \text{C}_{(\text{g})}$ , onde “A”, “B” e “C” significam as espécies químicas que são colocadas para reagir. Verificou-se experimentalmente, numa certa temperatura, que a velocidade desta reação quadruplica com a duplicação da concentração da espécie “A”, mas não depende das concentrações das espécies “B” e “C”. Assinale a opção que contém, respectivamente, a expressão *correta* da velocidade e o valor *correto* da ordem da reação.

- A. ( )  $v = k[\text{A}]^2 [\text{B}]^2$  e 4
- B. ( )  $v = k[\text{A}]^2 [\text{B}]^2$  e 3
- C. ( )  $v = k[\text{A}]^2 [\text{B}]^2$  e 2
- D. ( )  $v = k[\text{A}]^2$  e 4
- E. ( )  $v = k[\text{A}]^2$  e 2

**128.** (ITA-97) Considere soluções aquosas diluídas de ácido acético, a  $25^\circ\text{C}$ , em equilíbrio. A equação abaixo, na qual HA significa ácido acético e  $\text{A}^-$  o íon acetato, representa este equilíbrio:



Considerando um comportamento ideal das soluções e a notação  $[\text{H}^+]$ ,  $[\text{A}^-]$  e  $[\text{HA}]$  para representar as respectivas concentrações em mol/L e definindo

$$\alpha = [\text{A}^-] / \{[\text{A}^-] + [\text{HA}]\} \text{ e } C = \{[\text{A}^-] + [\text{HA}]\},$$

assinale a opção cuja afirmação está *errada*:

- A. ( ) A pressão parcial do HA sobre a solução é proporcional ao produto  $(1 - \alpha) \cdot C$ .
- B. ( ) A condutividade elétrica é proporcional ao produto  $\alpha \cdot C$ .
- C. ( ) O abaixamento da temperatura do início de solidificação no resfriamento é proporcional ao produto  $(1 + \alpha) \cdot C$ .
- D. ( ) O produto  $\alpha \cdot C$  é uma função crescente de C.
- E. ( ) Considerando também a dissociação iônica do solvente, conclui-se que a  $[\text{H}^+]$  é menor do que a  $[\text{A}^-]$ .

**129.** (ITA-97) Um recipiente aberto contém água em equilíbrio com o ar atmosférico e está na temperatura ambiente. Com um tubo, passa-se a borbulhar através dessa água uma mistura de  $\text{N}_{2(\text{g})}$  e  $\text{O}_{2(\text{g})}$ , em que a fração molar de ambos componentes é 0,50. Se for atingido o regime estacionário, decorrente deste borbulhamento, pode-se garantir que:

- A. ( ) A constante de equilíbrio,  $K_c$ , da reação  $\text{N}_{2(\text{g})} \rightleftharpoons \text{N}_{2(\text{aq})}$  ficará igual a 1.
- B. ( ) A concentração de  $\text{O}_{2(\text{aq})}$  diminuirá.
- C. ( ) A concentração de  $\text{N}_{2(\text{aq})}$  aumentará.
- D. ( ) A pressão de vapor da água aumentará.
- E. ( ) A concentração de  $\text{CO}_{2(\text{aq})}$  diminuirá.

**130.** (ITA-97) Um aluno preparou duas soluções: uma solução 0,1 mol/L de ácido clorídrico e outra 0,1 mol/L de hidróxido de sódio. As etiquetas, inicialmente afixadas nos frascos, depois de alguns dias ficaram ilegíveis.

Como você faria para identificar os frascos e suas respectivas soluções, *não utilizando* materiais típicos de Laboratório de Química?

**Especificação:** *Você deve descrever no mínimo dois testes distintos a serem realizados com o conteúdo de cada um dos frascos para descobrir quem é quem, considerando que você não dispõe de medidor de pH nem de indicadores ácido-base comerciais.*

**131.** (ITA-97) Por que a opção E da *questão* 132 está certa ou errada?

**132.** (ITA-97) Qual é a resolução da *questão* 133?

**133.** (ITA-97) Por que cada uma das cinco opções da *questão* 136 está certa ou errada?

**134.** (ITA-97) Por que a opção D da *questão* 138 está certa ou errada?

**135.** (ITA-97) Qual foi a contribuição de ARRHENIUS para o entendimento da cinética das reações químicas?

Frente 2 – IME

**136.** (IME-86) No estudo da cinética da reação:  
 $2\text{NO}(\text{g}) + \text{H}_2(\text{g}) \rightarrow \text{N}_2\text{O}(\text{g}) + \text{H}_2\text{O}(\text{g})$ , ocorrendo à temperatura de  $700^\circ\text{C}$ , foram obtidos os dados constantes da tabela a seguir:

C (concentração inicial) (mol $\ell^{-1}$ )		$V_0$ (velocidade inicial) (mol $\ell^{-1} \text{s}^{-1}$ )
NO	$\text{H}_2$	
0,025	0,01	$2,4 \times 10^{-6}$
0,025	0,005	$1,2 \times 10^{-6}$
0,0125	0,01	$0,6 \times 10^{-6}$

Pede-se:

- a ordem global da reação;
- a constante de velocidade a esta temperatura;
- dizer se os dados fornecidos são suficientes para afirmar que a reação é elementar. Justifique sucintamente.

**137.** (IME-86) Para o sistema  $\text{SO}_2(\text{g}) + \text{NO}_2(\text{g}) \rightleftharpoons \text{NO}(\text{g}) + \text{SO}_3(\text{g})$  são conhecidas as seguintes concentrações iniciais de equilíbrio: 0,400 mol  $\ell^{-1}$  de  $\text{SO}_2$ , 0,200 mol  $\ell^{-1}$  de  $\text{NO}_2$  e 0,800 mol  $\ell^{-1}$  de NO. Calcule  $K_p$  sabendo-se que a adição de 0,600 mol  $\ell^{-1}$  de  $\text{NO}_2$  ao sistema, mantida constante a temperatura, acarreta uma variação de 0,175 mol  $\ell^{-1}$  na concentração de equilíbrio de NO.

**138.** (IME-87) Uma solução, contendo 16,9 g de uma substância não dissociativa em 250 g de água, tem um ponto de solidificação de  $-0,744^\circ\text{C}$ . A substância é composta de 57,2% de carbono, 4,70% de hidrogênio e 38,1% de oxigênio. Qual é a fórmula molecular do composto?

Dado:

Constante molal de diminuição do ponto de congelamento da água:  $K_c = 1,86^\circ\text{C/m}$ .

**139.** (IME-87) A  $820^\circ\text{C}$ , as constantes de equilíbrio das reações:



valem  $K_1 = 0,200$  e  $K_2 = 2,00$ .

Em um recipiente vazio de 22,4  $\ell$ , mantido a  $820^\circ\text{C}$ , introduz-se 1,00 mol de  $\text{CaCO}_3$  e 1,00 mol de C.

- Calcule a composição molar da mistura no equilíbrio.
- Mantidas as mesmas condições (temperatura e quantidades de reagentes), calcule o menor volume, em litros, no qual a dissociação do  $\text{CaCO}_3$  é total.

Obs.: Use as pressões em atmosferas.

**140.** (IME-87) Admitindo-se que o processo  $\text{A} + \text{B} \rightarrow \text{D}$  é extremamente lento para ser realizado na prática, e que ao adicionarmos um catalisador C, à mistura reacional, passa-se a obter D pelo mecanismo,  $\text{A} + \text{C} \rightarrow \text{AC}$  (etapa lenta)  $\text{AC} + \text{B} \rightarrow \text{D} + \text{C}$  (etapa rápida), num tempo consideravelmente menor do que o da reação sem catalisador, responda os quesitos abaixo:

- prediga a ordem e a equação de velocidade correspondente a reação catalisada e
- esboce e identifique as curvas referentes aos dois processos (reação catalisada e não catalisada), fazendo uso do sistema de eixos abaixo.

**141.** (IME-88) Foram colocados  $n_1$  moles de  $\text{N}_2\text{O}_4$  num recipiente de volume constante a uma dada temperatura T. Ao se estabelecer o equilíbrio, segundo a equação



20% do  $\text{N}_2\text{O}_4$  estavam dissolvidos. A adição de mais  $n_2$  moles de  $\text{N}_2\text{O}_4$ , a mesma temperatura, provocou uma variação na pressão total de equilíbrio de 2,14 atm, ficando o  $\text{N}_2\text{O}_4$  apenas 10% dissociado. Determine o valor da constante de equilíbrio para esta reação, na temperatura T.

**142.** (IME-88) Considere a reação entre o acetado de etila e o hidróxido de sódio em solução aquo-álcool, a  $30^\circ\text{C}$ . As concentrações iniciais dos reagentes eram de  $5,40 \times 10^{-2}$  mol. $\text{dm}^{-3}$ . Após 1800 segundos, a concentração do acetado de etila era de  $2,5 \times 10^{-2}$  mol. $\text{dm}^{-3}$  e após 5400 segundos, três quartos do acetado de etila foram consumidos, determine:

- A constante de velocidade da reação.
- O tempo necessário para que ocorra 10% da reação.

**143.**(IME-89) Qual o volume de metanol, de massa específica 0,800 g/ml, que deve ser adicionado ao radiador de um veículo, contendo 9,00l d'água, para que o congelamento não ocorra antes da temperatura ambiente cair abaixo de  $-10,3^{\circ}\text{C}$ .

**144.**(IME-89) Uma amostra de Ibr, de massa 8,28g, é aquecida a  $227^{\circ}\text{C}$  em um recipiente de 0,250l, decompondo-se parcialmente em iodo e bromo. Sabendo que, ao atingir o equilíbrio, em fase gasosa, a pressão parcial do bromo é de 3,08 atm, calcule o valor da constante de equilíbrio.

**145.**(IME-89) A reação do óxido nítrico com hidrogênio, a  $827^{\circ}\text{C}$ , fornece nitrogênio e vapor d'água. Nestas condições, foram obtidos os seguintes dados cinéticos:

Experiência	$P_{\text{H}_2}$ (Torr)	$P_{\text{NO}}$ (Torr)	Velocidade inicial (Torr.s <sup>-1</sup> )
1	400	152	0,28
2	400	300	1,08
3	400	359	1,55
4	300	400	1,44
5	289	400	1,39
6	205	400	0,98
7	147	400	0,70

Considerando a reação ocorrendo em um recipiente de 1,00l, na temperatura dada e com uma pressão inicial de NO de 100 Torr, calcule o número de moles de  $\text{H}_2$  necessário para a velocidade inicial seja de  $3,75 \times 10^{-2}$  Torr s<sup>-1</sup>.

**146.**(IME-90) Em 1889, o químico sueco Svante Arrhenius demonstrou que, para uma reação com energia de ativação constante  $E_a$ , a variação da velocidade específica  $k$  com a temperatura é expressa pela equação:

$$k = Ae^{-E_a/RT}$$

onde A é o fator de frequência, R é a constante universal dos gases, e é a base dos logaritmos neperianos e T é a temperatura absoluta. Uma certa reação obedece uma lei de velocidade onde os valores de  $k$  são 0,00001 e 0,00010 l mol<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup>, a 312,50 e 357,14 K, respectivamente. Usando estas informações, calcule:

- a ordem da reação; e
- a temperatura na qual a reação é dez vezes mais lenta que a 312,50 K.

Dado: R = 2,0000 cal/K . mol.

**147.**(IME-91) Em um recipiente fechado, que se encontrava completamente vazio, sob vácuo, foi colocada uma amostra de 10,0 g de  $\text{PCl}_5$ . Em seguida a amostra foi aquecida a 500 K, ocorrendo a decomposição do  $\text{PCl}_5$ , conforme a reação:



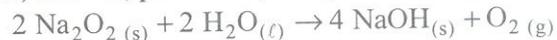
Sabendo que o equilíbrio, a pressão medida no recipiente foi de 1,551 atm e que todos os gases envolvidos são de comportamento ideal, calcule a constante de equilíbrio da reação de decomposição do  $\text{PCl}_5$ .

**148.**(IME-91) A reação  $2A_{(l)} + 2B_{(l)} \rightarrow 3C_{(l)}$  onde A, B e C representam substâncias puras foi realizada, isotermicamente, em um béquer, repetidas vezes. As concentrações iniciais dos reagentes usados e as velocidades iniciais de cada uma das reações realizadas são mostradas no quadro abaixo. Calcule a ordem parcial da referida reação em relação a cada um dos reagentes.

Reação	Concentração inicial			Velocidade inicial (moles/litro min)
	A	B	C	
1	4,000	0,5000	0	12,13
2	4,000	0,8000	0	17,67
3	4,000	2,0000	0	36,76
4	2,000	4,0000	0	27,86
5	0,800	4,0000	0	9,86
6	0,500	4,0000	0	5,65

Dados			
Valor	Logaritmo neperiano	Valor	Logaritmo neperiano
12,13	2,50	17,67	2,87
36,76	3,60	27,86	3,33
9,86	2,29	5,65	1,73
4,0	1,39	2,0	0,69
0,5	-0,69	0,8	-0,22

**149.**(IME-91) Calcule o valor da variação da energia livre, a  $25^{\circ}\text{C}$ , para a reação representada a seguir.



Dados:

Substância	Entalpia de formação a $25^{\circ}\text{C}$ kJ mol <sup>-1</sup>	S° A $25^{\circ}\text{C}$ J mol <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
$\text{H}_2\text{O}(l)$	-286,0	66,69
$\text{Na}_2\text{O}_2(s)$	-510,9	94,60
$\text{NaOH}(s)$	-426,8	64,18
$\text{O}_2(g)$	0	205,00

**150.** (IME-92) Atualmente está havendo uma mobilização mundial para minimizar o efeito estufa, na atmosfera terrestre, causado, pelo aumento da concentração de  $\text{CO}_2$  e de outros gases. Uma das tentativas é o desenvolvimento de catalisadores heterogêneos e homogêneos que possam ser utilizados no controle da poluição ambiental. A eficiência dos catalisadores está sendo avaliada através de reações simples, tal como a oxidação do etano, a 770 K, a etileno em presença de  $\text{V}_2\text{O}_5$  depositado em  $\text{SiO}_2$ . Durante esta reação foram obtidos os produtos  $\text{CH}_3\text{CHO}$ ,  $\text{CH}_2\text{CH}_2$ ,  $\text{CO}$  e  $\text{CO}_2$ . A partir dos resultados mostrados na tabela a seguir, responda:

referência	catalisador	% produtos			
		$\text{CH}_3\text{CHO}$	$\text{CH}_2\text{CH}_2$	$\text{CO}$	$\text{CO}_2$
I	100% $\text{SiO}_2$	0	0	0	0
II	0,3% $\text{V}_2\text{O}_5/\text{SiO}_2$	4	16	3	77
III	1,4% $\text{V}_2\text{O}_5/\text{SiO}_2$	1	10	2	87
IV	5,6% $\text{V}_2\text{O}_5/\text{SiO}_2$	9	80	5	6
V	9,8% $\text{V}_2\text{O}_5/\text{SiO}_2$	15	60	3	22
VI	100% $\text{V}_2\text{O}_5$	0	28	32	40

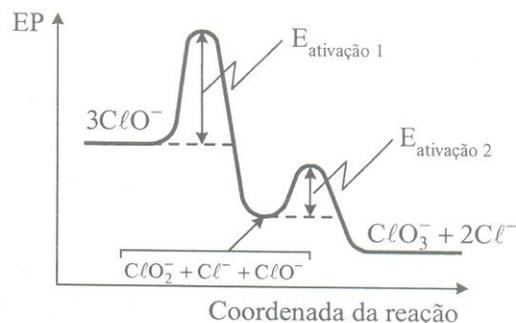
- Em relação ao efeito estufa, qual o catalisador que poderá ser mais propício para o controle da poluição ambiental? Justifique.
- Por que  $\text{V}_2\text{O}_5$  apresenta propriedade catalíticas?

**151.** (IME-92) Num recipiente fechado, mantido a temperatura constante de 700 K, foram introduzidos 0,450 moles de dióxido de carbono e 0,450 moles de hidrogênio. Após certo tempo, estabeleceu-se o equilíbrio, aparecendo como espécies novas, monóxido de carbono e vapor d'água. Foram, então, adicionadas 0,500 moles de ma mistura equimolecular dos reagentes. Calcule a nova composição de equilíbrio, sabendo-se que nestas condições  $K_c$  é 0,160.

**152.** (IME-93) Um litro de solução saturada de sulfeto de manganês contém 10 g de  $\text{MnS}$  sólido. Calcule a quantidade de sulfeto de manganês que passará para a solução, ao se variar o pH de 6,5 para 6,0 pela adição de um ácido forte, considerando o volume da solução constante.

**153.** (IME-94) Considerando o sistema em equilíbrio, constituído de água líquida, gelo e vapor d'água pede-se o número de componentes e o número de graus de liberdade desse sistema. Justifique as respostas.

**154.** (IME-94) A reação  $3 \text{ClO}^- \rightarrow \text{ClO}_3^- + 2 \text{Cl}^-$ , pode ser representada pelo seguinte sistema de energia potencial (EP) pela coordenada da reação:



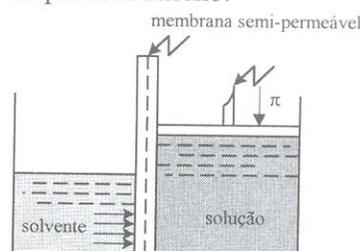
Pede-se:

- propor um mecanismo para a reação, composto por reações elementares; e
- a expressão da velocidade de reação global. Justifique a resposta.

**155.** (IME-94) Um litro de uma solução aquosa, contendo inicialmente 9,8 g de ácido sulfúrico, foi submetida a eletrólise pela passagem de uma corrente de 17,5 ampères, durante 900 segundos. Pede-se:

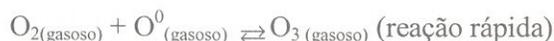
- a normalidade da solução aquosa, antes da eletrólise;
- a normalidade da solução aquosa, após a eletrólise, considerando desprezível a variação de volume da solução aquosa; e
- o abaixamento relativo da pressão máxima de vapor d'água,  $\Delta p$ , após a eletrólise, podendo-se considerar:
  - constante tonométrica da água, a 20°C,  $K_t = 0,018$ ;
  - pressão máxima de vapor d'água a 20°C,  $p = 17,5 \text{ mm Hg}$ ; e
  - densidade da solução a 20°C,  $d = 1 \text{ g/cm}^3$ .

**156.** (IME-96) A pressão osmótica de uma solução de poliisobutileno sintético em benzeno foi determinada a 25°C. Uma amostra contendo 0,20 g de soluto por 100  $\text{cm}^3$  de solução subiu até uma altura de 2,4 mm quando foi atingido o equilíbrio osmótico. A massa específica da solução no equilíbrio é 0,88  $\text{g/cm}^3$ . Determine o peso molecular do poliisobutileno.

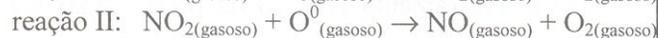
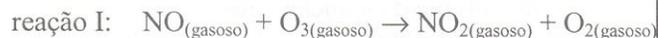


- 157.** (IME-96) A constante ionização de um ácido monocarboxílico de massa molecular 60 é  $4,0 \cdot 10^{-5}$ . Dissolvem-se 6,0 g desse ácido em água até completar 1 litro de solução. Determine:
- a concentração de  $H^+$  na solução;
  - o pH da solução;
  - a expressão matemática da constante de ionização;
  - a concentração de  $H^+$  se o ácido for totalmente dissociado;
  - a solução que neutralizará uma maior quantidade de NaOH, considerando duas soluções, de mesmo volume e de mesmo pH, do ácido monocarboxílico e de HCl.

- 158.** (IME-97) A decomposição de moléculas de ozônio representa um processo natural, agravado pela interferência do homem na composição química da atmosfera. O processo natural ocorre em altitudes elevadas, como decorrência da colisão entre moléculas e átomos, segundo o mecanismo abaixo:



A poluição atmosférica, decorrente da emissão de gases utilizados em motores, além dos efeitos diretos causados ao homem, altera a composição dos gases na atmosfera, causando a decomposição do ozônio, segundo o mecanismo abaixo:



A reação I acima foi estudada em laboratório, na temperatura de  $25^\circ C$ , apresentando os seguintes resultados:

[NO] (mol.l <sup>-1</sup> )	[O <sub>3</sub> ] (mol.l <sup>-1</sup> )	$\frac{\Delta[NO_2]}{\Delta t}$ (mol.l <sup>-1</sup> .s <sup>-1</sup> )
$1,00 \cdot 10^{-6}$	$3,00 \cdot 10^{-6}$	$0,66 \cdot 10^{-4}$
$1,00 \cdot 10^{-6}$	$6,00 \cdot 10^{-6}$	$1,32 \cdot 10^{-4}$
$1,00 \cdot 10^{-6}$	$9,00 \cdot 10^{-6}$	$1,98 \cdot 10^{-4}$
$2,00 \cdot 10^{-6}$	$9,00 \cdot 10^{-6}$	$3,96 \cdot 10^{-4}$
$3,00 \cdot 10^{-6}$	$9,00 \cdot 10^{-6}$	$5,94 \cdot 10^{-4}$

Responda aos itens abaixo:

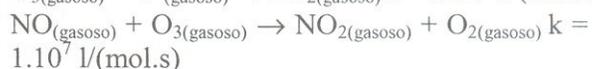
- qual é o valor da constante da velocidade e a ordem global para a reação I do mecanismo de decomposição do ozônio, resultante da poluição atmosférica, calculados a  $25^\circ C$ ?
- qual é o papel desempenhado pelo  $NO_{(gasoso)}$  na decomposição do ozônio?
- de quanto será a variação da velocidade de decomposição natural de ozônio, se a concentração de  $O_{2(gasoso)}$  dobrar de valor?

- pela comparação dos dois mecanismos de decomposição do ozônio, através da expressão da velocidade de suas reações mais importantes, explique por que a poluição representa um risco à camada de ozônio? Considere os dados abaixo, tomados a 40 km de altitude:

$$[O^0] = 2,10 \cdot 10^{-12} \text{ mol.l}^{-1}$$

$$[NO] = 3,10 \cdot 10^{-12} \text{ mol.l}^{-1}$$

reações a serem consideradas:



### Frente 3 – ITA

- 159.** (ITA-87) Propanoato de etila é isômero do:

- ( ) etil-propil-éter
- ( ) pentanol
- ( ) etil-propil-cetona
- ( ) 1,5-pentano-diol
- ( ) ácido pentanóico

- 160.** (ITA-89) Dados os compostos:



assinale a afirmação *falsa*.

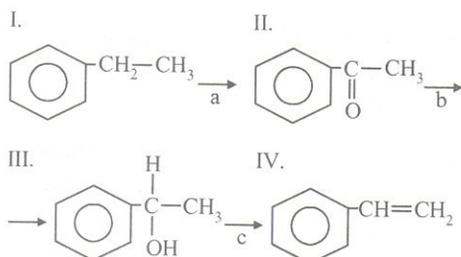
- ( ) Os compostos I e II possuem respectivamente um e dois átomos de carbono assimétrico.
- ( ) O composto I possui um total de dois estereoisômeros opticamente ativos.
- ( ) O composto II possui um total de dois estereoisômeros opticamente ativos.
- ( ) Somente os compostos III e IV apresentam, cada um, isomeria geométrica.
- ( ) Os compostos III e IV giram o plano de polarização da luz que os atravessa

- 161.** (ITA-90) A adição de 1 mol de cloro a 1 mol de alcino forneceu uma mistura dos isômeros cis e trans do mesmo alceno diclorado. Entre as opções abaixo, qual é aquele que contém o alcino que *não* foi utilizado nesta adição?

- ( ) Acetileno
- ( ) Metil acetileno
- ( ) Dimetil acetileno
- ( ) Cloro-acetileno
- ( ) Di-etil acetileno

- 162.** (ITA-90) Na reação de 2-metil-1-propeno com hidreto de bromo, forma-se:  
 A. ( ) 2-bromo-2-metil-propano  
 B. ( ) 1-bromo-2-metil-propano  
 C. ( ) isobutano  
 D. ( ) 1-butano-2-metil-1-propeno  
 E. ( ) 2-butenos
- 163.** (ITA-90) Por que a opção C está *certa* ou *errada*? Esta pergunta refere-se a questão 197.
- 164.** (ITA-90) Por que a opção A está *certa* ou *errada*? Esta pergunta refere-se a questão 198.
- 165.** (ITA-90) Um alcano pode ser isômero de:  
 A. ( ) um alceno com o mesmo número de átomos de carbono;  
 B. ( ) um ciclo-alcano com a mesma fórmula estrutural;  
 C. ( ) outro alcano de mesma fórmula molecular;  
 D. ( ) um alcino com apenas uma ligação tripla;  
 E. ( ) um alcadieno com o mesmo número de átomos de hidrogênio.

- 166.** (ITA-90) Qual das opções a seguir contém a afirmação *errada*, referente à seqüência esquemática das reações seguintes?



- A. ( ) I pode ser obtido pela adição, sob catálise, de eteno ao benzeno.  
 B. ( ) Nas três reações (a, b e c), observa-se variação do número de oxidação de pelo menos um átomo de carbono.  
 C. ( ) II é a fórmula estrutural do benzoato de metila.  
 D. ( ) III apresenta isomeria ótica.  
 E. ( ) Por polimerização, IV transforma-se no poliestireno.
- 167.** (ITA-90) Entre as opções abaixo, assinale aquela que contém a molécula que apresenta *menor* dipolo elétrico.  
 A. ( ) Fluoreto de iodo  
 B. ( ) Tans-dicloro eteno  
 C. ( ) Orto-dicloro benzeno  
 D. ( ) Para-cloro iodo benzeno  
 E. ( ) Cis-dicloro eteno

Escreva as fórmulas da molécula citada na opção C e dos seus isômeros de posição. Qual dessas moléculas tem o maior momento de dipolo e por quê?

- 168.** (ITA-90) Por que a opção B está *certa* ou *errada*? Esta pergunta refere-se a questão 117.
- 169.** (ITA-90) Por que a afirmação contida na opção C está *certa* ou *errada*? Esta pergunta refere-se a questão 118
- 170.** (ITA-91) Assinale a afirmação *verdadeira*:



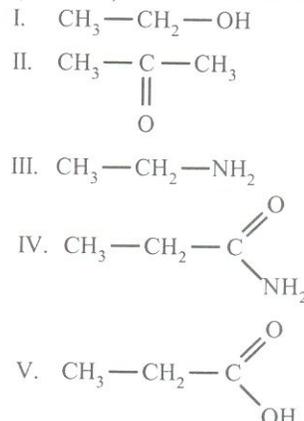
- A. ( ) I é um produto de produção de I.  
 B. ( ) Existe apenas uma outra cetona isômera de II.  
 C. ( ) I é um álcool primário.  
 D. ( ) Pôr desidratação intramolecular I fornece propeno.  
 E. ( ) I pode ter dois isômeros óticos.

- 171.** (ITA-91) Assinale a afirmação *verdadeira*:



- A. ( ) I é um produto de produção de I.  
 B. ( ) Existe apenas uma outra cetona isômera de II.  
 C. ( ) I é um álcool primário.  
 D. ( ) Pôr desidratação intramolecular I fornece propeno.  
 E. ( ) I pode ter dois isômeros óticos.

- 172.** (ITA-92) Considere os compostos seguintes



Entre as opções seguintes, qual é aquela que contém a afirmação. *Falsa* em relação a estes compostos?

- A. ( ) Da reação de I com V resulta um éster e água.  
 B. ( ) II não é polar.  
 C. ( ) Dos compostos acima III é o mais básico.  
 D. ( ) III é uma amina e IV é uma amida.  
 E. ( ) I é um ácido muitíssimo mais fraco que V.

**173.** (ITA-93) Qual (quais) das afirmações abaixo está (estão) *errada(s)*?

- I. O trans - dicloroeteno tem momento de dipolo nulo.  
 II. A hidrólise de proteínas fornece aminoácidos.  
 III. Ácidos monocarboxílicos são, em geral, fracos.  
 IV. A hidrólise de amido fornece sacarose.  
 V. Dodecil benzeno sulfonatos de sódio são surfactantes.  
 VI. "Nylon" é um polímero com grupos funcionais amida.  
 VII. Derivados simultaneamente clorados e fluorados de hidrocarbonetos alifáticos leves (divulgados como CFC) são muito pouco reativos na troposfera.
- A. ( ) Nenhuma  
 B. ( ) Apenas IV  
 C. ( ) Apenas I; II; III  
 D. ( ) Apenas V; VI; VII  
 E. ( ) Apenas I; IV; V; VI; VII

**174.** (ITA-93) Qual (quais) das afirmações abaixo está (estão) *errada(s)*?

- I. O trans - dicloroeteno tem momento de dipolo nulo.  
 II. A hidrólise de proteínas fornece aminoácidos.  
 III. Ácidos monocarboxílicos são, em geral, fracos.  
 IV. A hidrólise de amido fornece sacarose.  
 V. Dodecil benzeno sulfonatos de sódio são surfactantes.  
 VI. "Nylon" é um polímero com grupos funcionais amida.  
 VII. Derivados simultaneamente clorados e fluorados de hidrocarbonetos alifáticos leves (divulgados como CFC) são muito pouco reativos na troposfera.
- A. ( ) Nenhuma  
 B. ( ) Apenas IV  
 C. ( ) Apenas I; II; III  
 D. ( ) Apenas V; VI; VII  
 E. ( ) Apenas I; IV; V; VI; VII.

**175.** (ITA-93) O módulo do momento de dipolo elétrico do orto-diclorobenzeno vale  $\mu_1$ , enquanto o do meta-diclorobenzeno vale  $\mu_2$ . Deduza uma relação quantitativa entre  $\mu_1$  e  $\mu_2$ .

**176.** (ITA-94) As afirmações abaixo referem-se ao propeno, propano e propino. Qual é a *falsa*?

- A. ( ) Só o propeno possui fórmula mínima  $\text{CH}_3$ ;  
 B. ( ) O único que apresenta apenas ligações  $\sigma$  entre os átomos é o propano;  
 C. ( ) Só o propino pode formar produto diclorado por adição de  $\text{HCl}$ ;  
 D. ( ) Todos os três compostos possuem grupo  $\text{CH}_3$ ;  
 E. ( ) Propano pode participar de reações de adição e de substituição.

**177.** (ITA-94) Justifique sua resposta ao teste 22 indicando as equações químicas das reações envolvidas e mostrando como a resposta poderia ser obtida com o mínimo de cálculo numérico.

**178.** (ITA-95) Assinale a alternativa que contém a afirmação *falsa* em relação a comparação das propriedades do 1-propanol e com o 1-butanol.

- A. ( ) A temperatura de ebulição do 1-butanol é maior.  
 B. ( ) Na mesma temperatura, a pressão de vapor do 1-propanol é maior.  
 C. ( ) Nas mesmas condições de operação, a volatilidade do 1-butanol é maior.  
 D. ( ) O 1-propanol é mais solúvel em água.  
 E. ( ) O 1-butanol é mais solúvel em n-hexano.

**179.** (ITA-95) Qual das opções abaixo contém a afirmação *falsa*, considerando condições ambientes?

- A. ( )  $\text{H}_3\text{C}-\text{OH}$  é um líquido incolor, inflamável e miscível em qualquer proporção com água.  
 B. ( ) Solução de  em água é ácida.  
 C. ( ) Glicerina tem 3 grupos  $-\text{OH}$  mas suas soluções aquosas não são alcalinas.  
 D. ( )  $\text{H}_3\text{C}-\overset{\text{O}}{\parallel}{\text{C}}-\text{OH}$  pode ser obtido pela fermentação aeróbica de vinhos.  
 E. ( )  $\text{Cl}-\text{OH}$  é uma espécie química que tem caráter básico e está presente em soluções de gás cloro em água.

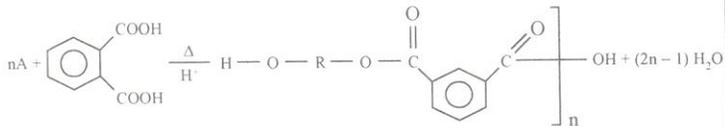
**180.** (ITA-97) Considere as afirmações:

- I. Propanal é um isômero da propanona.  
 II. Etil-metil-éter é um isômero do 2-propanol.  
 III. 1-Propanol é um isômero do 2-propanol.  
 IV. Propilamina é um isômero da trimetilamina.  
 Estão *corretas*:  
 A. ( ) Todas  
 B. ( ) Apenas I, II e III

- C. ( ) Apenas I e II  
D. ( ) Apenas II e IV

**Frente 3 – IME**

**181.** (IME-93) A polimerização entre o composto A e o ácido ftálico é mostrada a seguir:



onde n representa um número grande de moléculas participantes. Responda:

- qual a fórmula estrutural plana de A, já que a massa molecular é de 62 u.m.a.;
- a que classe funcional pertence o polímero formado, e
- que tipo de reação de polimerização está ocorrendo?

**Gabarito**

- |       |       |       |
|-------|-------|-------|
| 1. A  | 2. B  | 3. E  |
| 4. E  | 5. E  | 6. B  |
| 7. D  | 8. A  | 9. A  |
| 10. D | 11. B | 12. C |
| 13. D | 14. C | 15. D |
| 16. E | 17. C | 18. D |
| 19. C | 20. D | 21.   |
| 22. A | 23.   |       |
| 24.   |       |       |

CaO <sub>2</sub>	Peróxido de cálcio		
Cu <sub>2</sub> O	óxido cuproso		
Cl <sub>2</sub> O <sub>7</sub>	Heptóxido de dicloro		
Mn <sub>3</sub> O <sub>4</sub>			
N <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Trióxido de dinitrogênio		
tiosulfato	S <sub>2</sub> O <sub>3</sub> <sup>2-</sup>	H <sub>2</sub> S <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Ácido tiosulfúrico
pirofosfato	P <sub>2</sub> O <sub>7</sub> <sup>4-</sup>	H <sub>4</sub> P <sub>2</sub> O <sub>7</sub>	Ácido pirofosfórico
fosfito	HPO <sub>3</sub> <sup>2-</sup>	H <sub>3</sub> PO <sub>3</sub>	Ácido fosforoso
ferrocianeto	Fe(CN) <sub>6</sub> <sup>4-</sup>	H <sub>4</sub> Fe(CN) <sub>6</sub>	Ácido ferrocianídrico
arsenato	AsO <sub>4</sub> <sup>3-</sup>	H <sub>3</sub> AsO <sub>4</sub>	Ácido arsênico
Platinoso	Pt <sup>2+</sup>	Pt(OH) <sub>2</sub>	hidróxido Platinoso
Cobáltico	Co <sup>3+</sup>	Co(OH) <sub>3</sub>	hidróxido Cobáltico
Rubídio	Rb <sup>+</sup>	RbOH	Hidróxido de Rubídio
Estânico	Sn <sup>4+</sup>	Sn(OH) <sub>4</sub>	hidróxido Estânico
Auroso	Au <sup>+</sup>	AuOH	hidróxido auroso
Bi(OH) <sub>2</sub> Cl		Cloreto dibásico de bismuto	
Ca(ClO)Cl		cloreto hipoclorito de cálcio	
NaH <sub>2</sub> PO <sub>2</sub>		Hipofosfito de sódio	
Fe <sub>2</sub> (SO <sub>3</sub> ) <sub>3</sub>		Sulfito férrico	
NaH <sub>2</sub> PO <sub>4</sub>		Fosfato diácido de sódio	

25.

BeF <sub>2</sub>	2	0	linear	sp
BF <sub>3</sub>	3	0	trigonal	sp <sup>2</sup>
NH <sub>3</sub>	4	1	pirâmide trigonal	sp <sup>3</sup>
PCl <sub>5</sub>	5	0	Bipirâmide trigonal	sp <sup>3</sup> d

SF <sub>6</sub>	6	0	octaédrica	sp <sup>3</sup> d <sup>2</sup>
AsCl <sub>3</sub>	4	1	pirâmide trigonal	sp <sup>3</sup>

27.

28.

carbonato de lítio	Li <sub>2</sub> CO <sub>3</sub>	-2	2	1s <sup>2</sup> 2s <sup>1</sup>
borato de sódio	Na <sub>3</sub> BO <sub>3</sub>	-3	3	1s <sup>2</sup> 2s <sup>2</sup> 2p <sup>6</sup> 3s <sup>1</sup>
óxido de alumínio	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	-2	3	1s <sup>2</sup> 2s <sup>2</sup> 2p <sup>6</sup> 3s <sup>2</sup> 3p <sup>1</sup>
nitrato de zinco	ZnNO <sub>3</sub>	-1	4	1s <sup>2</sup> 2s <sup>2</sup> 2p <sup>6</sup> 3s <sup>2</sup> 3p <sup>6</sup> 3d <sup>10</sup> 4s <sup>2</sup>
ferrocianeto de cobre II	Cu <sub>2</sub> Fe(CN) <sub>6</sub>	-4	4	1s <sup>2</sup> 2s <sup>2</sup> 2p <sup>6</sup> 3s <sup>2</sup> 3p <sup>6</sup> 3d <sup>10</sup> 4s <sup>1</sup>
fluoreto de enxofre VI	SF <sub>6</sub>	-1	2	1s <sup>2</sup> 2s <sup>2</sup> 2p <sup>6</sup> 3s <sup>2</sup> 3p <sup>4</sup>

29.

- |        |        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 30. E  | 31. D  | 32. E  | 33. D  | 34. B  | 35. C  | 36. C  |
| 37. E  | 38. A  | 39. C  | 40. E  | 41. A  | 42. C  | 43. E  |
| 44. C  | 45. D  | 46. B  | 47. E  | 48. D  | 49. E  | 50. B  |
| 51. D  | 52. B  | 53. C  | 54. D  | 55. E  | 56. E  | 57. E  |
| 58. D  | 59. A  | 60. D  | 61.    | 62.    | 63.    | 64.    |
| 65.    | 66.    | 67.    | 68. B  | 69. C  | 70. E  | 71. D  |
| 72. C  | 73. D  | 74. C  | 75. C  | 76. A  | 77. C  | 78.    |
| 79.    | 80.    | 81. A  | 82. A  | 83. B  | 84. E  | 85. A  |
| 86.    | 87.    | 88.    | 89.    | 90. E  | 91. D  | 92. B  |
| 93. D  | 94.    | 95.    | 96.    | 97.    | 98.    | 99. B  |
| 100. B | 101. B | 102. C | 103. B | 104. B | 105. E | 106. D |
| 107.   | 108.   | 109. A | 110. C | 111. C | 112. C | 113. A |
| 114. D | 115. D | 116. B | 117. B | 118.   | 119.   | 120.   |
| 121. C | 122. C | 123.   | 124. E | 125. E | 126. C | 127. E |
| 128. E | 129. E | 130.   | 131.   | 132.   | 133.   | 134.   |
| 135.   | 136.   | 137.   | 138.   | 139.   | 140.   | 141.   |
| 142.   | 143.   | 144.   | 145.   | 146.   | 147.   | 148.   |
| 149.   | 150.   | 151.   | 152.   | 153.   | 154.   | 155.   |
| 156.   | 157.   | 158.   | 159. C | 160. C | 161. C | 162. C |
| 163.   | 164.   | 165. C | 166. C | 167. C | 168. E | 169. B |
| 170. E | 171.   | 172. C | 173. C | 174. C | 175.   | 176.   |



1. (ITA-80) Seja  $z$  um número complexo de módulo 1 e de argumento  $\theta$ . Seja  $n$  um número inteiro positivo, calcule o valor da expressão  $z^n + \frac{1}{z^n}$ .
2. (ITA-81) Sejam  $a$  e  $k$  constantes reais, sendo  $a > 0$  e  $0 < k < 1$ . De todos os números complexos  $z$ , que satisfazem a relação  $|z - ai| \leq ak$ , qual é o de menor argumento?
3. (ITA-81) O conjunto  $A$  definido por  $A = \{z \in \mathbb{C} / (z - i) \cdot \overline{(z - i)} = 4\}$  representa que figura no plano complexo?
4. (ITA-82) Considere a família de curvas do plano complexo definidas por  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = c$ , onde  $z$  é um complexo não-nulo e  $c$  é uma constante real positiva. Para cada valor de  $c$  temos qual curva?
5. (ITA-83) Consideremos um número complexo  $z$  tal que  $\frac{z^2}{\bar{z} \cdot i}$  tem argumento igual a  $\frac{\pi}{4}$  e  $\log_2(z + \bar{z} + 2) = 3$ . Nestas condições, podemos afirmar:
- a) Não existe  $\ln\left(\frac{z - \bar{z}}{i}\right)$
- b)  $z^4 + \ln\left(\frac{z - \bar{z}}{i}\right) = -324$
- c)  $z + 2\bar{z}$  é um número real.
- d)  $\left(\frac{1}{z}\right)^3 = \frac{1}{108} \cdot (1 + i)$
- e)  $\left(\frac{1}{z}\right)^3 = -\frac{1}{108} \cdot (1 + i)$
6. (ITA-84) Sabendo que  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{(\sqrt{3} + i)^n}{3i}$  é um número real, calcule  $n$ .
7. (ITA - 85) Seja  $a$  um número real. Os valores de  $z \in \mathbb{C}$  que satisfazem:  $\left(\frac{a + z^{10}}{1 + i}\right) \cdot \left(\frac{a + (\bar{z})^{10}}{1 - i}\right) \in \mathbb{R}$  são:
- A. ( )  $z = -a + i \sqrt[10]{|a|}$ .
- B. ( ) Não é possível determiná-los.
- C. ( )  $z = -i \sqrt[10]{|a|}$
- D. ( ) Não existe  $z \in \mathbb{C}$  tal que isto aconteça.
- E. ( ) Todo  $z \in \mathbb{C}$
8. (ITA-86) No conjunto  $C$  dos números complexos  $\alpha$  tal que  $|\alpha| < 1$ . O lugar geométrico dos pontos  $z \in C$  que satisfazem a igualdade  $\left|\frac{z - \alpha}{1 - \alpha z}\right| = 1$  é...
9. (ITA-87) Resolva a equação sabendo que  $z \in C$  tal que  $|z| - z = 1 + 2i$ , onde  $i$  é a unidade imaginária.
10. (ITA-87) Determine o número de soluções reais da equação  $\operatorname{sen} x = |2 + 3i|$ .
11. (ITA-87) Considerando  $z$  e  $w$  números complexos arbitrários e  $\alpha = z \cdot w + \bar{z} \cdot \bar{w}$ , então o conjugado de  $\alpha$  será necessariamente:
- A. ( ) Igual a  $|z| \cdot |w|$ .
- B. ( ) Um número imaginário puro.
- C. ( ) Igual ao dobro da parte real de  $z + w$ .
- D. ( ) Igual ao dobro da parte real de  $z \cdot w$ .
- E. ( ) Diferente de  $\alpha$ .
12. (ITA-88) determine  $n \in \mathbb{N}$ , tal que:  $(2i)^n + (1 + i)^{2n} = -16i$ .
13. (ITA - 89) O valor da expressão  $|1 - z|^2 + |1 + z|^2$ , sendo  $z \in \mathbb{C}$  é:
- A. ( ) 5; se  $|z| \leq 1$
- B. ( ) 4; se  $|z| = 1$
- C. ( ) 0; se  $\operatorname{Im}(z) = 0$
- D. ( ) 2; para todo  $z$
- E. ( ) 3; se  $\operatorname{Re}(z) = 0$
14. (ITA - 90) Considere as equações  $z^3 = i$  e  $z^2 + (2 + i)z + 2i = 0$  onde  $z \in \mathbb{C}$ . Seja  $S_1$  o conjunto das raízes da primeira equação e  $S_2$  o da segunda. Então:
- A. ( )  $S_1 \cap S_2$  é vazio.
- B. ( )  $(S_1 \cap S_2) \subset \mathbb{R}$
- C. ( )  $S_1$  possui apenas dois elementos distintos.
- D. ( )  $S_1 \cap S_2$  é unitário.
- E. ( )  $S_1 \cap S_2$  possui 2 elementos.
15. (ITA-91) Sejam  $w = a + bi$  com  $b \neq 0$  e  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . O conjunto dos números complexos  $z$  que verificam a equação  $wz + \bar{w}z + c = 0$ , descreve que tipo de curva?



**16.** Considere o número complexo  $z = a + 2i$  cujo argumento está no intervalo  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ . Sendo  $S$  o conjunto dos valores de  $a$  para os quais  $z^6$  é um número real. Determine o produto dos elementos de  $S$ .

**17.** (ITA - 93) Seja  $a$  o módulo do número complexo  $(2 - 2\sqrt{3}i)^{10}$ . Determine  $x$  tal que  $(4a)^x = a$ .

**18.** (ITA - 94) Seja  $x; y \in \mathbb{R}$ , com  $x \neq 0$ , satisfazendo  $(x + yi)^2 = (x + y)i$ . Então:

- A. ( )  $x$  e  $y$  são números irracionais.  
 B. ( )  $x > 0$  e  $y < 0$ .  
 C. ( )  $x$  é uma raiz da equação  $x^3 + 3x^2 + 2x - 6 = 0$ .  
 D. ( )  $x < 0$  e  $y = x$ .  
 E. ( )  $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}$ .

**19.** (ITA-95) Seja  $z$  um número complexo satisfazendo  $\text{Re}(z) > 0$  e  $(z+i)^2 + |\bar{z}+i|^2 = 6$ . Se  $n$  é o menor natural para o qual  $z^n$  é um imaginário puro, então  $n$  é igual a:

- A. ( ) 1  
 B. ( ) 2  
 C. ( ) 3  
 D. ( ) 4  
 E. ( ) 5

**20.** (ITA-97) Considere  $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$  e  $w = 1 + i\sqrt{3}$ , calcule:  $m = \left| \frac{w^6 + 3z^4 + 4i}{z^2 + w^3 + 6 - 2i} \right|^2$

**21.** (ITA-98) Sejam  $x$  e  $y$  números reais tais que  $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$ . Então o número complexo  $z = x + yi$  tal que  $z^3$  e  $|z|$  valem...

**22.** (ITA-99) O conjunto de todos os números complexos  $z; z \neq 0$ , que satisfazem a igualdade  $|z + 1 + i| = ||z| - |1 + i||$ .

**23.** (ITA-2000) Seja  $z_0$  o número complexo  $1 + i$ . Sendo  $S$  o conjunto solução no plano complexo de  $|z - z_0| = |z + z_0| = 2$ . Determine o produto dos elementos de  $S$ .

**24.** (ITA-2001) Se  $z = 1 + i\sqrt{3}$ ,  $z \cdot \bar{w} = 1$  e  $\alpha \in [0; 2\pi]$  é um argumento de  $z \cdot w$ . Calcule  $\alpha$ .

**25.** (ITA-2001) Determine a parte imaginária de  $[(1 + \cos 2x) + i \sin 2x]^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ .

**Gabarito**

1.  $2\cos(n\theta)$
2.  $ak(\sqrt{1-k^2}) + ia(1-k^2)$
3. Uma circunferência de centro  $(0; 1)$  e raio 2.
4. Uma circunferência de centro  $\left(\frac{1}{2c}; 0\right)$  e raio  $\frac{1}{2c}$ , com exceção do ponto  $(0; 0)$ .
5. Sem alternativa
6.  $n = 3 \cdot (2k + 1); k \in \mathbb{N}$
7. E
8. Uma circunferência de centro  $(0; 0)$  e raio 1.
9.  $\frac{3}{2} - 2i$
10.  $\emptyset$
11. D
12.  $n = 3$
13. B
14. D
15. A reta  $y = \frac{a}{b}x + \frac{c}{2b}$
16. 4
17.  $\frac{10}{11}$
18. C
19. B
20. 34
21.  $1 + i; \sqrt[6]{2}$



- 1.** Utilizando a potenciação de complexos, calcule  $\text{sen } 3\theta$ ,  $\text{sen } 4\theta$ ,  $\text{cos } 3\theta$  e  $\text{cos } 4\theta$ .
- 2.** Prove que se  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  e  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ , então  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  são os vértices de um  $\Delta$  equilátero inscrito no círculo unitário de centro na origem.
- 3.** Prove as desigualdades:
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
  - $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
  - $|z_1 - z_2| \leq |z_1 + z_2|$
  - $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$
- 4.** Supondo  $|z_2| > |z_3|$  prove que:
- $\left| \frac{z_1}{z_2 + z_3} \right| \leq \frac{|z_1|}{|z_2| - |z_3|}$
  - $\left| \frac{z_1}{z_2 - z_3} \right| \leq \frac{|z_1|}{|z_2| - |z_3|}$
- 5.** Prove que as raízes  $n$ -ésimas de um número complexo podem ser obtidas como o produto de uma raiz  $n$ -ésima do número pelas raízes  $n$ -ésimas da unidade.
- 6.** Se  $z_1$  e  $z_2$  são dois números complexos, prove que o ângulo  $z_1 - z_2$  é igual ao ângulo entre o eixo real e o vetor direcionado de  $z_2$  para  $z_1$ .
- 7.** Interprete o ângulo do número complexo  $\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$  no triângulo formado pelos pontos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ .
- 8.** Prove que o quociente de dois números complexos com o mesmo ângulo é real.
- 9.** Resolva a equação  $|z| + 2iz = -6 + 12i$
- 10.** (IME) Dois números complexos são ortogonais se suas representações gráficas forem perpendiculares entre si. Prove que dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$  são ortogonais se e somente se  $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 0$ .
- 11.** Se  $z = \rho(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$ , provar que  $\frac{z}{z^2 + \rho^2}$  é real e que  $\frac{\rho - iz}{\rho + iz}$  é imaginário puro.
- 12.** Um hexágono regular, inscrito numa circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértices o afixo  $z = 2i$ . Que números complexos são representados pelos outros cinco vértices do hexágono?
- 13.** Prove que se para quatro números complexos  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  e  $z_4$  os ângulos de  $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$  e  $\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$  são os mesmos, então os 4 números estão situados em um círculo ou em uma reta, e vice versa.
- 14.** Resolva as equações:
- $z^2 + 2\bar{z} = 0$
  - $\left( \frac{1 - ix}{1 + ix} \right)^4 = i, x \in \mathbb{R}$
  - $z^4 = \bar{z}^4 = 0$
  - $z^2 + |z| = 0$
  - $z^2 + |z|^2 = 0$
  - $z^2 + \bar{z} = 0$
  - $z \cdot |z| + az + i = 0$
  - $z \cdot \bar{z} + (1 - i)z + (1 + i)\bar{z} = 0$
  - $\bar{z} + z = 0$
- 15.** Sejam  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  números complexos não colineares. Determine  $z$  tal que  $|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3|$
- 16.** Sejam  $z_1$  e  $z_2$  números complexos distintos tal que  $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ . Prove que o quadrilátero cujo vértices são os afixos dos números  $0$ ;  $z_1$ ;  $z_2$  e  $z_1 + z_2$  é um retângulo.
- 17.** Resolva a equação:
- $$\log_{14}(13 + |z^2 - 4i|) + \log_{196} \frac{1}{(13 + |z^2 + 4i|)^2} = 0$$
- 18.** Calcule os valores das expressões:
- $\sqrt{-8i}$
  - $\sqrt{3 - 4i}$
  - $\sqrt[4]{-1}$
  - $\sqrt[3]{1}$
- 19.** Coloque os números na forma trigonométrica:
- $1 + i\sqrt{3}$
  - $3 - 4i$
  - $\text{sen } \alpha - i \text{cos } \alpha$
  - $\left( \frac{1}{i - 1} \right)^{100}$
- 20.** Encontre o conjunto de pontos do plano que satisfazem a inequação:
- $$\log_{\frac{1}{2}} \frac{|z - 1| + 4}{3|z - 1| - 2} > 1$$

**21.** Calcule  $z^{14} + \frac{1}{z^{14}}$  se  $z$  é uma raiz da equação

$$z + \frac{1}{z} = 1.$$

**22.** Encontre o número complexo  $z$  de menor módulo que satisfaz a condição:  $|z - 2 + 2i| = 1$ .

**23.** Prove que se  $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \alpha$  então

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\alpha \quad n \in \mathbb{N}.$$

**24.** Prove que o número complexo  $w = \frac{1-z}{1+z}$  é imaginário puro se e somente se  $|z| = 1$ .

**25.** Encontre as raízes comuns das equações:  
 $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$  e  $z^{1982} + z^{100} + 1 = 0$ .

**26.** Três vértices sucessivos de um paralelogramo são os pontos  $z_1 = 0$ ;  $z_2 = 1$  e  $z_3 = 1 + i$ .

**27.** Resolva o sistema:

$$\begin{cases} iz + (1+i)w = 1 \\ (1+i)\bar{z} - (6+1)\bar{w} = -4 - 8i \end{cases}$$

**28.** Determine o módulo e o argumento de  $\frac{1 + \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta}$ .

**29.** (IME) Quais os complexos que são iguais às suas potências quartas?

**30.** (IME) Os complexos  $z_1$ ;  $z_2$  e  $z_3$  tem como imagens os vértices de um triângulo equilátero. Calcule:  
 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot z_3 - z_2 \cdot z_3$

**31.** (ITA) Resolva a equação:  $32z^5 = (1+z)^5$

**32.** (ITA) Se  $z_1$  e  $z_2$  são números complexos  $z_1 + z_2$  e  $z_1 \cdot z_2$  são ambos reais, o que podemos afirmar?

**33.** (ITA) Suponhamos que  $z_1 = a + xi$  e  $z = a + yi$ ,  $a \neq 0$ ,  $x \neq 0$  são dois números complexos, tais que  $z_1 \cdot z_2 = 2$ . Prove que  $z_1 = \bar{z}_2$  e  $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$ .

**34.** (ITA/IME) Resolva a equação:  $(z+1)^5 + z^5 = 0$ .

**35.** (ITA) Seja a equação  $z^4 - a - bi = 0$ , onde  $a$  e  $b \in \mathbb{R}^*$ . Sobre as raízes desta equação podemos afirmar:

- A. ( ) uma delas, é um imaginário puro  
 B. ( ) os seus módulos formam uma PA de razão  $\sqrt[4]{a+bi}$   
 C. ( ) o seu produto é um imaginário puro  
 D. ( ) cada uma tem argumento igual a  $\frac{\arg(a+bi)}{4}$   
 E. ( ) sua soma é igual a zero

**36.** (ITA) Determine o produto dos números complexos  $z = x + yi$ , que têm módulo igual a  $\sqrt{2}$  e se encontram sobre a reta  $y = 2x - 1$  contida no plano complexo.

**37.** (ITA) Se  $z = \cos t + i \operatorname{sen} t$ , onde  $0 < t < 2\pi$ , calcule  $w = \frac{1+z}{1-z}$ .

**38.** (ITA) Sabe-se que  $2 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{20} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{20} \right)$  é uma raiz quádrupla de  $w$ . Seja  $S$  o conjunto de todas as raízes de  $z^4 - 2z^2 + \frac{w - 16\sqrt{2}i}{8\sqrt{2}} = 0$ , determine-as.

**39.** (ITA) Analise as afirmações:

- $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{10} = \cos 10\theta + i \operatorname{sen} 10\theta; \forall \theta \in \mathbb{R}$
- $5i/(2+i) = 1 + 2i$
- $(1-i)^4 = -4$
- Se  $z^2 = (\bar{z})^2$  então é real ou imaginário puro
- O polinômio  $x^4 + x^3 - x - 1 = 0$  possui apenas raízes reais

**40.** (ITA) Considere no plano complexo um polígono regular cujos vértices são as soluções de  $z^6 = 1$ . Determine a área deste polígono.

**41.** Represente graficamente as expressões:

- |                                  |   |
|----------------------------------|---|
| a) $ z-1 ^2 = 2x$ e $y \geq 2$   | b) $ z  \leq 1$ e $y \geq 0$                                    |
| c) $z =  z $                     | <del>d) <math>\arg z = \pi/3</math></del>                       |
| e) $1 <  z  < 4$                 | f) $ 2z-1  > 2$   |
| g) $  z+i  < 10$                 | h) $ z+i  =  z+2 $  |
| i) $ z+i  >  4 $                 | j) $ z+i  >  z $  |
| k) $1 \leq  z+1  \leq 4$         | l) $\operatorname{Re} \left( \frac{1}{z} \right) < \frac{1}{4}$ |
| m) $\operatorname{Im} (z^2) < 0$ | n) $\operatorname{Im} (z^3) > 0$                                |

- 42.** Identifique o conjunto de pontos  $z$  tal que:  
 a)  $\text{Re}(1 - z) = |z|$       b)  $|z - 1| + |z + 2| = 3$   
 c)  $\text{Re}(z^2) > 0$
- 43.** Qual o valor máximo que pode adquirir o módulo do número complexo  $z$  se temos  $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 1$ ?
- 44.** Calcule o valor das expressões:  
 a)  $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots$   
 b)  $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots$
- 45.** Calcule:  $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$  e também  $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$ .
- 46.** (Problema de Shklarsky – Clentzov)  
 Calcule o valor de:  

$$\cos \frac{2\pi}{2n+1} + \cos \frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{2n\pi}{2n+1}$$
- 47.** (ITA) Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos que:  

$$1 - \binom{4n}{2} + \binom{4n}{4} - \dots - \binom{4n}{4n-2} + 1$$
 é igual a ...

**Gabarito**

1. utilize a potenciação de números complexos
2. Demonstração. Utilize o conceito vetorial dos números complexos
3. No item A temos uma desigualdade triangular. Os outros itens são variações de A.
4. Demonstração
5. Demonstração
6. Demonstração
7. Demonstração
8. Demonstração
9.  $6 + 8i$
10. Demonstração
11. Demonstração
12. Basta rotacionar o complexo  $2i$  de  $60^\circ$  para obter sucessivamente cada raiz
13. Demonstração
15.  $z$  é circuncentro do  $\Delta z_1 z_2 z_3$
16. Demonstração
18. a)  $\pm 2(1 - i)$   
 b)  $\sqrt{5} \text{cis} \left[ k\pi + \frac{\text{arcsen} \left( -\frac{4}{5} \right)}{2} \right]; k \in \{0; 1\}$

- c)  $\pm \left( \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \right)$   
 d)  $\text{cis} \left( \frac{2k\pi}{3} \right); k \in \{0; 1; 2\}$
19. a)  $2 \text{cis}(\pi/3)$   
 b)  $5 \text{cis} \left[ -\arccos \left( \frac{3}{5} \right) \right]$   
 c)  $\text{cis} \text{cis} \left( \frac{3\pi}{2} + \alpha \right)$   
 d)  $-\frac{1}{2^{50}}$
20. The set of all points which lie out side the circle with centre at point  $(1; 0)$  and radius  $1C$
21.  $-1$
22.  $z = \left( 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + i \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \right)$
23. Demonstração  
 24. Demonstração
25.  $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
26.  $i$
27.  $z = 1; w = 1 - i$
28.  $1; \theta$
29.  $0; 1; -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
30. zero
32.  $(z_1 \text{ e } z_2 \in \mathbb{R})$  ou  $(z_1 = \bar{z}_2)$
33. Demonstração
35.  $E$
36.  $\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i$
37.  $i \cdot \cot g \left( \frac{t}{2} \right)$
39.  $V; V; V; V; F$
40.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
42. a) parábola  
 b) elipse  
 c)  $|x| > |y|$
43.  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
46.  $-\frac{1}{2}$
47.  $(-1)^n \cdot 2^{2n}$

1. (ITA-82) Sabendo-se que o polinômio  $P(x) = ax^3 + bx^2 + 2x - 2$  é divisível por  $(x + 1)$  e por  $(x - 2)$ . Calcule  $a$  e  $b$ .
2. (ITA-82) Determine  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  que tornam o polinômio  $P(x) = 4x^5 + 2x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  divisível por  $Q(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 1$ .
3. (ITA-83) Determine o polinômio de 3º grau que apresenta uma raiz nula e satisfaz a condição  $P(x - 1) = P(x) + (2x)^2 \forall x \in \mathbb{R}$ . Com o auxílio deste polinômio podemos calcular soma  $2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
4. (ITA-83) Dado o polinômio  $P(x) = (\sec^2\theta)x^2 - (\operatorname{tg}\theta)x + \operatorname{sen}\theta$ . Determine os valores de  $\theta \in [0; 2\pi]$  tais que  $P$  admita somente raízes reais.
5. (ITA-86) Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  números reais que nesta ordem formam uma progressão aritmética de soma 12. Sabendo-se que os restos das divisões de  $x^{10} + 8x^8 + ax^5 + bx^3 + cx$  por  $(x - 2)$  e  $(x + 2)$  são iguais. Determine a razão da PA.
6. (ITA-87) Considere  $Q(x)$  e  $R(x)$ , respectivamente, o quociente e o resto da divisão de um polinômio  $A(x)$  pelo trinômio  $B(x) = -x^2 + 5x - 6$ . Admita que o grau de  $A(x)$  é quatro e que os restos da divisão de  $A(x)$  por  $x + 1$  e  $x - 2$  são, respectivamente, 3 e  $-1$ . Supondo também que  $Q(x)$  é divisível por  $x + 1$ , obtenha  $R(x)$ .
7. (ITA-77) Se  $P(x)$  é um polinômio do 5º grau que satisfaz as condições  $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = 1$  e  $P(6) = 0$ . Calcule  $P(0)$ .
8. (ITA-76) Determine os valores de  $a$  e  $b$ , tais que os polinômios  $x^3 - 2ax^2 + (3a + b)x - 3b$  e  $x^3 - (a + 2b)x + 2a$  sejam divisíveis por  $x + 1$ .
9. (ITA-75) Se dividirmos um polinômio  $P(x)$  por  $x - 2$  o resto é 13 e se dividirmos  $P(x)$  por  $x + 2$  o resto é 5. Suponha que  $R(x)$  é o resto da divisão de  $P(x)$  por  $x^2 - 4$ . Calcule  $R(1)$ .
10. Determine  $a$  e  $b$  de modo que o polinômio  $x^3 + ax + b$  seja divisível por  $(x - 1)^2$ .
11. Determine  $a$ ,  $b$  e  $c$  de modo que o polinômio  $x^4 + ax^2 + bx + c$  seja divisível por  $(x - 3)^3$ .
12. Determinar  $a$ ,  $b$  e  $c$  de modo que  $x^5 + x^4 - 9x^3 + ax^2 + bx + c$  seja divisível por  $(x + 2)(x - 2)(x + 3)$ .
13. Determine o valor numérico do coeficiente  $a$ , para que a divisão  $x^3 + y^3 + z^3 + axyz$  por  $x + y + z$  seja exata. Escrever o quociente correspondente.
14. Calcule  $A$  e  $B$  de modo que  $Ax^4 + Bx^3 + 1$  seja divisível por  $(x - 1)^2$ .
15. Determinar  $a$  e  $b$  de modo que o polinômio  $ax^{n+1} + bx^n + 1$  seja divisível por  $(x - 1)^2$ .
16. Encontrar o valor de  $k$  de modo que o polinômio  $a^4 + ka^3b - 2a^2b^2 + 3ab^3 - b^4$  seja divisível por  $a^2 - ab + b^2$ .
17. Mostrar que o polinômio dado por  $x^{4a} + x^{4b+1} + x^{4c+2} + x^{4d+3}$  é divisível por  $(x + 1)(x^2 + 1)$ .
18. Determine o resto da divisão de  $P(x) = \sum_{i=1}^{40} (3i) \cdot (x + 1)^{40-i}$  por  $(x + 2)$ .
19. Um polinômio  $P(x)$ , dividido por  $x + 2$  e  $x^2 + 4$  dá restos 0 e  $x + 1$ , respectivamente. Qual é o resto da divisão de  $P(x)$  por  $(x + 2)(x^2 + 4)$ ?
20. (IME-97) Determine o resto da divisão do polinômio  $(\cos\theta + x\operatorname{sen}\theta)^n$  por  $(x^2 + 1)$ , onde  $n$  é um número natural.
21. Verifique que  $n \cdot x^{n+1} - (n + 1) \cdot x^n + 1$  é divisível por  $(x - 1)^2$ ;  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
22. (ITA-2000) Seja  $P(x)$  um polinômio divisível por  $(x - 1)$ . Dividindo-o por  $x^2 + x$ , obtêm-se o quociente  $Q(x) = x^2 - 3$  e o resto  $R(x)$ . Se  $R(4) = 10$ , determine o coeficiente do termo de grau 1 de  $P(x)$ .
23. (ITA-91) Na divisão do polinômio  $P(x) = a_5x^5 + 2x^4 + a_4x^3 + 8x^2 - 32x + a_3$  por  $x - 1$ , obteve-se o quociente  $Q(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$  e o resto  $-6$ . Sabe-se que  $(b_4; b_3; b_2; b_1)$  é uma PG de razão  $q > 0$  e  $q \neq 1$ . Determine os coeficientes incógnitos.
24. (ITA-94) A identidade  $\frac{x^3 + 4}{x^3 + 1} = 1 + \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1}$  é válida  $\forall x \in \mathbb{R}$  tal que  $x \neq -1$ . Calcule  $a + b + c$ .
25. (ITA-95) A divisão de um polinômio  $P(x)$  por  $x^2 - x$  resulta no quociente  $6x^2 + 5x + 3$  e resto  $-7x$ . Determine o resto da divisão de  $P(x)$  por  $2x + 1$ .

- 26.** (ITA-98) Seja  $P(x)$  um polinômio do grau 4 com coeficientes reais. Na divisão de  $P(x)$  por  $x - 2$  obtém-se um quociente  $q(x)$  e resto igual a 26. Na divisão de  $P(x)$  por  $x^2 + x - 1$  obtém-se um quociente  $h(x)$  e resto  $8x - 5$ . Sabe-se que  $q(0) = 13$  e  $q(1) = 26$ . Calcule  $h(2) + h(3)$ .
- 27.** Achar a relação entre  $p$  e  $q$  a fim de que o polinômio  $x^3 + px^2 + q$  seja divisível por  $x^2 + mx - 1$
- 28.** Determine os polinômios do 3º grau tal que  $P(x) \equiv P(x-1) + x^2$
- 29.** Calcular o resto da divisão de  $P(x)$  pelo produto de dois binômios  $(x - a) \cdot (x - b)$ .
- 30.** (IME-2001) Determine todos os números inteiros  $m$  e  $n$  para os quais o polinômio  $2x^m + a^{3n} \cdot x^{m-3n} - a^m$  é divisível por  $x + a$ .
- 31.** Seja  $f(x^4) + x \cdot g(x^4) \equiv (x^3 + 2x^2 + 4x + 8) \cdot h(x)$ . Determine  $f(16)$  e  $h(2)$ .
- 32.** Determine o coeficiente de  $x^3$  no polinômio  $P(x)$  tal que  $grP = 3$ .  $P(x)$  se anula para  $x = -1$  é tal que separadamente dividido por  $x - 1$ ;  $x + 2$  e  $x + 3$  deixa sempre resto 10.
- 33.** (IME-95) Prove que o polinômio  $P(x) = x^{999} + x^{888} + \dots + x^{222} + x^{111} + 1$  é divisível por  $x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1$ .
- 34.** (IME-95) Dado  $z = \frac{1}{\sqrt{-7+24i}}$ , calcule as partes reais e imaginárias de  $z$ .
- 35.** (IME-96) Sejam  $w_0 = 1$ ,  $w_1 = j$  e  $w_2 = j^2$  as raízes cúbicas da unidade no plano complexo. (considere  $w_1$  o número complexo de módulo 1 e argumento  $\frac{2\pi}{3}$ ) Sabendo que se  $c \in C$ , a rotação  $R$  em torno do ponto  $c$  e amplitude igual a  $\frac{\pi}{3}$  é dada por  $R(z) = -j^2z - jc$ ;  $\forall z \in C - \{c\}$  pede-se:  
a) determinar as relações existentes entre  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $j$  e  $j^2$ , onde  $a, b \in C$   
b) determinar  $z$  para que o triângulo  $i$ ;  $z$  e  $iz$  seja equilátero.
- 36.** (IME-98) Determine  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  de modo que o polinômio  $\alpha \cdot x^{\gamma+1} + \beta \cdot x^\gamma + 1$  racional inteiro em  $x$ , seja divisível por  $(x - 1)^2$  e que o valor numérico do quociente seja igual a 120 para  $x = 1$ .

**37.** Determine os restos das divisões:

- a)  $(x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1)$  por  $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$   
b)  $(x^{40} + x^{30} + x^{20} + x^{10} + 1)$  por  $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

**Gabarito**

1.  $a = -\frac{3}{2}$  e  $b = \frac{5}{2}$  *(-2x+2)*
2.  $\alpha = 3$ ,  $\beta = -2$  e  $\gamma = 1$
3.  $\frac{4}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{2}{3}n$
4.  $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$  ou  $\frac{3\pi}{2} < \theta \leq 2\pi$
5.  $\frac{28}{5}$
6.  $R(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$
7.  $P(0) = 2$
9. 11
10.  $a = -3$  e  $b = 2$
11.  $a = -54$ ,  $b = 216$  e  $c = -243$
12.  $a = -1$ ,  $b = 20$  e  $c = -12$
13.  $a = -3$ , quociente =  $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$
14.  $A = 3$  e  $B = -4$
15.  $a = n$  e  $b = -(n + 1)$
16.  $k = -1$
17. Demonstração
18. 60
19.  $R(x) = \frac{x^2}{8} + x + \frac{3}{2}$
20.  $\cos(n\theta) + x \sin(n\theta)$
21. Demonstração
22. -1
24. 2
27.  $pq = -(q^2 + 1)$
28.  $P(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} + d$ ;  $\forall d \in C$
29.  $R(x) = \frac{P(a) - P(b)}{a - b} \cdot x + \frac{a \cdot P(b) - b \cdot P(a)}{a - b}$
30.  $n = \frac{2k+1}{3}$ ;  $m = 2k$ ;  $k \in Z$
31. *ímpar par*
32.  $\frac{5}{2}$
33. demonstração
34.  $\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$ ;  $\frac{-4}{25} + \frac{3i}{25}$



1. (AFA-2002) Se o polinômio  $P(x) = x^m - 2b^n x^{m-n} + b^m$  é divisível por  $x + b$ , sendo  $n < m$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  e  $b \neq 0$ , ocorrerá necessariamente se:
2. Determine o resto da divisão do polinômio  $P(x) = x^{1981} - 1$ , pelo polinômio  $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ .
3. Determinar para quais valores complexos de  $p$  e  $q$  o binômio  $x^4 - 1$  é divisível pelo trinômio do 2º grau  $x^2 + px + q$ .
4. Para que valores de  $a$  e  $n$  o polinômio  $x^n - ax^{n-1} + ax - 1$  é divisível por  $(x - 1)^2$ ?
5. Ao dividir o polinômio  $p(x)$  por  $x - a$ , o resto  $A$ , ao dividi-lo por  $x - b$ , o resto é  $B$ , e ao dividi-lo por  $x - c$ , o resto é  $C$ . Obter o polinômio que se obtém como resto da divisão de  $p(x)$  por  $(x - a)(x - b)(x - c)$ , admitindo que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são todos distintos.
6. Sendo  $a$  o resto da divisão de um polinômio  $p(x)$  por  $(x - a)$ ,  $b$  o resto da divisão de  $p(x)$  por  $(x - b)$  e  $c$  o resto da divisão de  $p(x)$  por  $(x - c)$ . Determine o resto da divisão de  $p(x)$  por  $(x - a)(x - b)(x - c)$ .
7. Demonstre que  $(x + 1)^{6n+1} - x^{6n+1} - 1$  é sempre divisível por  $x^2 + x + 1$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .
8. Se  $(x^2 - x + 1)^n \equiv b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{2n}x^{2n}$ , calcule  $b_0 + b_2 + b_4 + \dots + b_{2n}$ .
9. (IME-84) Determine o polinômio  $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$  tal que  $P(x) = P(1 - x)$ ;  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;  $P(0) = 0$  e  $P(-1) = 6$ .
10. (FUVEST) A equação  $x^3 - 8px^2 + x - q = 0$ , admite a raiz 1 com multiplicidade 2, calcule  $p$  e  $q$ .
11. (FUVEST) A equação  $x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$  com  $m, n \in \mathbb{R}$  admite  $1 + i$  como raiz. Calcule  $m$  e  $n$ .
12. Dada a equação  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , com  $a \neq 0$ , e suas raízes  $x_1, x_2$  e  $x_3$ . Calcule:
  - a)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$
  - b)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
  - c)  $x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2$
  - d)  $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)$
  - e)  $\frac{x_1}{x_2 \cdot x_3} + \frac{x_2}{x_1 \cdot x_3} + \frac{x_3}{x_1 \cdot x_2}$
  - f)  $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}$
13. (FUVEST-78) Dizemos que um número  $x$  é a soma de dois quadrados se existirem inteiros  $a$  e  $b$  tais que  $x = a^2 + b^2$ . Prove que se dois números são, soma de 2 quadrados seu produto também o é.
14. Considere  $x^3 + mx + n = 0$ , com  $m, n \in \mathbb{R}$ ;  $n > m$  e  $r_1, r_2$  e  $r_3$  são as raízes; tais que:
 
$$\frac{1}{r_1+1} + \frac{1}{r_2+1} + \frac{1}{r_3+1} = 1 \text{ e } r_1 = r_2 \cdot r_3.$$
 Calcule  $m$ ;  $n$ ;  $r_1$ ;  $r_2$  e  $r_3$ .
15. Achar as raízes da equação  $64x^3 - 56x^2 + 14x - 1 = 0$ , sabendo que estão em PG.
16. Determine  $\alpha$  e  $\beta$  na equação:  $20x^3 - 8\alpha x^2 + 5\alpha x + 5\beta = 0$  sabendo que duas de suas raízes são iguais e que a terceira raiz é a soma das duas primeiras.
17. Resolver a equação  $2x^3 - 11x^2 + 18x - 9 = 0$ , sabendo que as três raízes estão em progressão harmônica.
18. Resolver a equação  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$  sabendo que uma das raízes é igual à soma das outras duas.
19. Resolver a equação  $x^4 - x^3 + 6x^2 + 14x - 20 = 0$ , sabendo que ela admite a raiz  $1 + 3i$ .
20. Determinar  $(m)$  de modo que a equação  $x^4 + mx^2 + 8x - 3 = 0$  tenha uma raiz tripla, e calcule também as raízes dessa equação.
21. Determine o valor de  $k$  e resolva a equação  $x^3 + kx^2 + 6x - 4 = 0$ , sabendo que uma das raízes é igual ao produto das outras duas.
22. Achar a condição para que as raízes da equação  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  estejam em PG.
23. (FUVEST-2ª Fase) Suponha que o polinômio do 3º grau  $p(x) = x^3 + x^2 + mx + n$ , onde  $m$  e  $n$  são números reais; seja divisível por  $(x - 1)$ .
  - a) Determine  $n$  em função de  $m$ .
  - b) Determine  $m$  para que  $p(x)$  admita raiz dupla diferente de 1.
  - c) Que condições  $m$  deve satisfazer para que  $p(x)$  admita 3 raízes reais e distintas?
24. (UNICAMP-2ª Fase) Seja  $p(x) = x^3 - 12x + 16$ .
  - a) Verifique que  $x = 2$  é raiz de  $p(x)$ .
  - b) Use fatoração para mostrar que se  $x > 0$  e  $x \neq 2$ , então  $p(x) > 0$ .
  - c) Mostre que, entre todos os prismas retos de bases quadradas que tem volume igual a  $8 \text{ m}^3$ , o cubo é aquele que tem a menor área total.

**25.** (UNICAMP-2ª Fase) Seja o polinômio:

$$p(x) = \det \begin{bmatrix} a-x & 0 & b \\ 0 & 2-x & c \\ b & 0 & d-x \end{bmatrix},$$

onde  $a, b, c$  e  $d$ , são números reais.

- a) Mostre que  $x = 2$  é uma raiz de  $p(x)$ .  
 b) Mostre que as duas outras raízes de  $p(x)$  também são reais.  
 c) Quais as condições sobre  $a, b, c$  e  $d$  para que  $p(x)$  tenha uma raiz dupla,  $x \neq 2$ ?
- 26.** (ITA) Se as dimensões, em centímetros, de um paralelepípedo retângulo são dadas pelas raízes da equação  $24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = 0$ . Determine o comprimento da diagonal do sólido.
- 27.** (ITA) Considere a equação  $x^3 + px^2 + qx + R = 0$ , de coeficientes reais, cujas raízes estão em progressão geométrica. Determine a relação entre  $p, q$  e  $R$ .
- 28.** (ITA) As equações  $x^3 + ax^2 + 18 = 0$  e  $x^3 + nbx + 12 = 0$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes reais e  $n$  um número inteiro, têm duas raízes comuns. Das afirmativas abaixo, qual é a verdadeira?  
 A. ( ) As raízes não comuns às equações têm sinais opostos.  
 B. ( ) As raízes não comuns às equações são negativas quando  $a$  é negativo.  
 C. ( ) A soma das raízes não comuns às equações é 5.  
 D. ( )  $b$  e  $n$  possuem o mesmo sinal.  
 E. ( ) As raízes comuns às equações dependem de  $n$ .
- 29.** (ITA) Considere os números reais não nulos  $a, b, c$  e  $d$  em progressão geométrica tais que  $a, b$  e  $c$ , são raízes da equação (em  $x$ )  $x^3 + Bx^2 - 2Bx + D = 0$ , onde  $B$  e  $D$  são números reais e  $B > 0$ . Se  $cd - ac = -2B$ , demonstre:  
 $(a^2 + b^2 + c^2) \cdot (b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$  e  
 $b^2 + c^2 + d^2 = \frac{16B^2}{B^2 + 4B}$
- 30.** (ITA) Sabendo-se que  $z_1 = i, z_2$  e  $z_3$  são as raízes da equação  $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ , onde  $a, b, c$  são reais não-nulos, podemos afirmar que:  
 A. ( )  $z_1, z_2$  e  $z_3$  são imaginários puros.  
 B. ( )  $z_2$  e  $z_3$  são reais.  
 C. ( )  $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = c$   
 D. ( )  $z_1 + z_2 + z_3 = a$   
 E. ( ) pelo menos uma das raízes é real

**31.** (ITA) Dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & -1 \\ 0 & x_1 & 1 \\ x_3 & -x_2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & 0 \\ -x_3 & 0 & -x_3 \end{pmatrix},$$

onde  $x_1, x_2$  e  $x_3$  são as raízes da seguinte equação em  $x$ :  $x^3 + ax^2 + bx - 2 = 0$ . Se  $\det A = 4x_1$  e  $\det(A - B) = 8$ , então podemos afirmar que:

- A. ( )  $\det(A - B) = b$  e  $a = 2$   
 B. ( )  $\det A = b$  e  $a = 2$   
 C. ( )  $\det B = 2$  e  $b = 5$   
 D. ( )  $\det(A - B) = a$  e  $b = \det A$   
 E. ( )  $\det A = \frac{a}{2}$  e  $b = \frac{a}{2}$
- 32.** (ITA) Multiplicando por 2 as raízes da equação  $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$ , obtemos qual equação?
- 33.** (ITA) Se  $P(x)$  e  $Q(x)$  são polinômios com coeficientes reais, de graus 2 e 4 respectivamente, tais que  $P(i) = 0$  e  $Q(i) = 0$  então podemos afirmar que:  
 A. ( )  $P(x)$  é divisível por  $x + 1$   
 B. ( )  $P(x)$  é divisível por  $x - 1$   
 C. ( )  $P(x) \cdot Q(x)$  é divisível por  $x^4 + 2x^2 + 1$   
 D. ( )  $P(x)$  e  $Q(x)$  são primos entre si  
 E. ( )  $Q(x)$  não é divisível por  $P(x)$
- 34.** (ITA)  $a, b$  e  $c$ , são raízes da equação  $x^3 - Rx + 20 = 0, R \in \mathbb{R}$ , calcule  $a^3 + b^3 + c^3$ .
- 35.** (ITA) Se  $1$  e  $1 + 2i$ , são raízes da equação  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  e  $a, b$  e  $c$  são reais, calcule-os.
- 36.** (ITA) Seja  $p(x)$  um polinômio de grau 3, tal que  $p(x) = p(x + 2) - x^2 - 2, \forall x \in \mathbb{R}$ . Se  $-2$  é uma raiz de  $p(x)$ , determine o produto de todas as raízes de  $p(x)$ .
- 37.** (ITA) Sejam  $z_1$  e  $z_2$  números complexos com  $|z_1| = |z_2| = 4$ . Se  $1$  é raiz da equação  $z_1 \cdot z^6 + z_2 \cdot z^3 - 8 = 0$ , calcule a soma das raízes reais.

Gabarito

1. m e n, são pares
2.  $x - 1$
3.  $1 + i$ ;  $i$  ou  $i - 1$ ;  $-i$   
 $-i + 1$ ;  $i$  ou  $-i - 1$ ;  $i$
4.  $a = \frac{n}{n-2}$ ;  $n > 2$
5. Os coeficientes do resto são:  
$$\frac{(A-C).(a^2 - b^2) - (A-B).(a^2 - c^2)}{(a-c).(a-b).(b-c)} = \beta$$
  
$$\frac{A-C}{a^2 - c^2} - \frac{\beta}{a+c} = \alpha$$
  
$$\gamma = A - \alpha a^2 - \beta a$$
6.  $x$
7. Demonstração
8.  $\frac{3^n + 1}{2}$
9.  $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$
10.  $p =$ ;  $q =$
11.  $m =$ ;  $n =$ ;
13. Demonstração
14.  $r_1 = -\sqrt{2}$   
$$r_{2,3} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 4\sqrt{2}}}{2}$$
  
 $m = -2 - \sqrt{2}$   
 $n = -2$
15.  $S = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right\}$
16.  $\alpha = \beta = 0$   
 $\alpha = 25$  e  $\beta = -1$
17.  $S = \{1; 3/2; 3\}$
18.  $S = \{1; 2; 3\}$
19.  $S = \{1 \pm 3i; 1; -2\}$
20.  $S = \{1; -3\}$  para  $m = -6$   
 $S = \{-1; 3\}$  para  $m = 10$
21.  $S = \{2; 1 \pm i\}$  ou  $S = \{-2; -2 \pm \sqrt{6}\}$
23. Confira com os colegas
24. Demonstrações
25. Confira com os colegas
26.  $\frac{\sqrt{61}}{12}$  cm
27.  $q^3 = \mathbb{R}p^3$
28. D
29. Demonstração
30. E
31. C
32.  $x^3 - 4x^2 + 8x - 8 = 0$
33. C
37.  $\sqrt[3]{2} - 1$

How To Count Without Counting

1. Uma moça dispõe de cinco blusas e quatro saias. De quantos modos distintos ela pode se vestir?
2. Existem cinco ruas ligando os supermercados A e B e três ruas ligando os supermercados B e C. Quantos são os trajetos diferentes para ir de A a C, passando por B?
3. Para fazer uma viagem S.Paulo - S.José dos Campos - S.Paulo, posso usar como transporte o ônibus, o avião ou o táxi. Se existem cinco linhas de ônibus e duas linhas aéreas que operam nesse trajeto, de quantos modos posso escolher os transportes se não desejo usar na volta o mesmo meio de transporte da ida?
4. Uma indústria automobilística fabrica veículos com três estilos de carroceria, quatro tipos de motores e oito cores diferentes, quantas opções são oferecidas a um comprador?
5. Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas usando-se apenas as cores amarelo, verde e azul, não devendo listras adjacentes ter a mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira? *4322*
6. As placas dos automóveis são formadas por três letras (alfabeto de 26 letras) seguidas de quatro algarismos. Quantas placas podem ser confeccionadas?
7. Quantos números naturais de três algarismos distintos existem?
8. Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados com os elementos do conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ?
9. Quantos números naturais maiores que 300, pares e de três algarismos distintos, podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?
10. Quantos números naturais de 4 algarismos que sejam menores que 5000 e divisíveis por 5, podem ser formados usando-se apenas os algarismos 2, 3, 4 e 5?
11. Quantos inteiros há entre 1000 e 9999 cujos algarismos são distintos?
12. Quantos são os números naturais pares que se escrevem com três algarismos distintos?
13. Quantos números telefônicos com 8 dígitos podem ser formados, se usarmos os dígitos de 0 a 9?
14. Quantos divisores positivos têm o número 480?
15. Uma prova consta de 10 testes do tipo V ou F. De quantas formas uma pessoa poderá responder aos 10 testes?
16. De quantos modos diferentes podem ser escolhidos um presidente e um secretário de um conselho que tem 12 membros?
17. De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 5 cadeiras em fila?
18. O conjunto A possui 4 elementos e o conjunto B possui 7 elementos.
  - a) Quantas são as funções  $f: A \rightarrow B$ ?
  - b) Quantas são as funções injetoras  $f: A \rightarrow B$ ?
19. Quantos são os números naturais de 4 algarismos que possuem pelo menos dois algarismos iguais?
20. Quantos números de quatro algarismos são maiores que 2400 e:
  - a) têm todos os algarismos diferentes?
  - b) não têm algarismos iguais a 3, 5 ou 6?
  - c) têm as propriedades a) e b) simultaneamente?
21. Em uma banca há 5 exemplares iguais da revista A, 6 exemplares iguais da revista B e 10 exemplares iguais da revista C. Quantas coleções não vazias de revistas dessa banca é possível formar?
22. Uma sala tem 10 portas. De quantas maneiras diferentes essa sala pode ser aberta?
23. De um grupo de 5 pessoas, de quantas maneiras distintas posso convidar uma ou mais para jantar?
24. Em um computador, um *bit* é um dos algarismos 0 ou 1 e uma *palavra* é uma seqüência de *bits*. Qual é o número de *palavras* distintas de 32 *bits*?
25. O código morse usa *palavras* contendo de 1 a 4 *letras*, as *letras* sendo ponto e traço. Quantas *palavras* existem no código morse?

- 26.** Quantos números diferentes podem ser formados multiplicando alguns (ou todos) dos números 1, 5, 6, 7, 7, 9, 9, 9?
- 27.** De quantos modos podemos arrumar 8 torres iguais em um tabuleiro de xadrez (8 x 8) de modo que não haja duas torres na mesma linha nem mesma coluna?
- 28.** Um vagão de metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não têm preferência. De quantos modos os passageiros podem se sentar, respeitando-se as preferências?
- 29.** Quantos são os números de 5 algarismos, na base 10:  
a) nos quais o algarismo 2 figura?  
b) nos quais o algarismo 2 não figura?
- 30.** Quantos inteiros entre 100 e 999 são ímpares e possuem três dígitos distintos?
- 31.** Fichas podem ser azuis, vermelhas ou amarelas; circulares, retangulares ou triangulares; finas ou grossas. Quantos tipos de fichas existem?
- 32.** Escrevem-se os inteiros de 1 até 222 222. Quantas vezes o algarismo zero é escrito?
- 33. (FUVEST)** Num programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas 10 músicas, mas nunca na mesma ordem. Para esgotar todas as possíveis seqüências dessas músicas, quantos anos, aproximadamente, serão necessários?
- 34. (FUVEST)** Um relógio digital marca horas e minutos:

HORA		MINUTO	
A	B	C	D

Os algarismos são movidos mecanicamente, de forma que, para mover cada “leitadora”, o relógio consome uma unidade de energia. Assim para passar de

2 3 5 9 para o minuto seguinte

0 0 0 0

são consumidas quatro unidades. Quantas unidades de energia são consumidas por dia?

- 35. (ITA-98)** Listando-se em ordem crescente todos os números de cinco algarismos distintos, formados com os elementos do conjunto {1, 2, 4, 6, 7}, o número 62417 ocupa o  $n$ -ésimo lugar. Qual o valor de  $n$ ?
- 36. (ITA)** Considere todos os números formados pela justaposição de 1, 3, 5, 7 e 9 em qualquer ordem, sem repetição. Qual a soma de todos esses números?
- 37. (ITA-99)** Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?
- 38. (ITA-00)** Considere os números de 2 a 6 algarismos distintos formados utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos destes números são ímpares e começam com um dígito par?

**Gabarito**

- |                                  |           |                |
|----------------------------------|-----------|----------------|
| 1. 20                            | 2. 15     | 3. 56          |
| 4. 96                            | 5. 24     | 6. 175.760.000 |
| 7. 648                           | 8. 125    | 9. 15          |
| 10. 48                           | 11. 4536  | 12. 328        |
| 13. 100.000.000                  |           |                |
| 14. 24                           | 15. 1024  | 16. 132        |
| 17. 60                           |           |                |
| 18. a) 2401<br>b) 840            |           |                |
| 19. 64                           |           |                |
| 20. a) 3864<br>b) 1567<br>c) 560 |           |                |
| 21. 61                           | 22. 1023  | 23. 31         |
| 24. $2^{32}$                     | 25. 30    | 26. 47         |
| 27. 40320                        | 28. 43200 |                |
| 29. a) 37512<br>b) 52488         |           |                |
| 30. 320                          | 31. 18    | 32. 108642     |
| 33. 10.000                       | 34. 1611  | 35. 81         |
| 36. $6,6666 \cdot 10^6$          | 37. 144   | 38. 585        |

1. Considere as letras da palavra UNIVERSO. Pergunta-se:
  - a) quantos anagramas podemos formar?
  - b) quantos anagramas começam por R?
  - c) quantos anagramas começam por vogal?
  - d) quantos anagramas terminam por consoante?
  - e) quantos anagramas começam por vogal e terminam por consoante?
  - f) quantos anagramas começam por vogal ou terminam por consoante?
  - g) em quantos anagramas as letras U, N, I estão juntas e nesta ordem?
  - h) em quantos anagramas as letras U, N, I estão juntas?
  - i) em quantos anagramas as vogais e as consoantes estão intercaladas?
2. Obter o número de anagramas da palavra REPÚBLICA nos quais as vogais se mantêm nas respectivas posições.
3. (ITA) Quantos anagramas da palavra CADERNO apresentam as vogais em ordem alfabética?
4. Quantos são os anagramas da palavra CAPÍTULO que têm a letra C no primeiro lugar ou a letra A no segundo lugar ou a letra P no terceiro lugar?
5. Numa estante existem 3 livros de História, 3 de Matemática e 1 de Geografia. Se se deseja sempre um livro de História em cada extremidade. Qual o número de maneiras de arrumar esses 7 livros?
6. Quatro rapazes e uma moça formam uma fila. De quantos modos esta fila pode ser formada de modo que a moça fique sempre em primeiro lugar?
7. Tem-se 12 livros, todos diferentes, sendo 5 de Matemática, 4 de Física e 3 de Química. De quantas maneiras podemos dipô-los sobre uma prateleira, devendo os livros de cada assunto permanecer juntos?
8. Dez pessoas devem ficar em fila. De quantas formas isso pode ser feito se, dentre estas pessoas existe um casal de namorados que deseja ficar sempre juntos?
9. De quantos modos 5 rapazes e 5 moças podem se sentar em bancos de dois lugares cada, de modo que em cada banco fiquem um rapaz e uma moça?

10. (IME) Seja um barco com 8 lugares, numerados como no diagrama abaixo. Há 8 remadores disponíveis para guarnecê-lo, com as seguintes restrições: os remadores A e B só podem sentar no lado ímpar e o remador C, no lado par. Os remadores D, E, F, G e H podem ocupar quaisquer posições. Quantas configurações podem ser obtidas com o barco totalmente guarnecido?



11. O novo sistema de placas de veículos utiliza um grupo de 3 letras (dentre 26 letras) e um grupo de 4 algarismos (por exemplo: ABC – 1023). Uma placa dessas será “palíndromo” se os dois grupos que a constituem forem “palíndromos”. O grupo ABA é “palíndromo”, pois as leituras da esquerda para a direita e da direita para a esquerda são iguais; da mesma forma, o grupo 1331 é “palíndromo”. Quantas placas “palíndromas”, distintas, poderão ser construídas?
12. (ITA) Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números naturais de quatro algarismos distintos, contendo o algarismo “4” ou o algarismo “5” podem ser formados?
13. (FUVEST) Calcule quantos números múltiplos de três, de quatro algarismos distintos podem ser formados com 2, 3, 4, 6 e 9.
14. Existem 20 cadeiras numeradas de 1 a 20. De quantos modos duas pessoas podem se sentar, devendo haver ao menos uma cadeira entre elas?
15. De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em dois grupos de 4 pessoas cada?
16. De quantos modos  $r$  rapazes e  $m$  moças podem se colocar em fila de modo que as moças fiquem juntas?
17. Qual o número de anagramas da palavra ALUNO, em que as consoantes ficam na ordem LN e as vogais na ordem AUO?
18. Delegados de 10 países devem se sentar em 10 cadeiras em fila. De quantos modos isso pode ser feito se os delegados do Brasil e de Portugal devem se sentar juntos e o do Iraque e o dos Estados Unidos não podem se sentar juntos?

- 19.** Têm-se 5 meninos e 5 meninas. De quantos modos eles podem ficar em fila, se os meninos e as meninas devem ficar em posições alternadas?
- 20.** Quantas são as permutações dos números (1, 2, 3, ..., 10) nas quais o 5 está situado à direita do 2 e à esquerda do 3, embora não necessariamente em lugares consecutivos?
- 21.** Resolver as equações:  
 a)  $A_n^3 = 3(n-1)$   
 b)  $\frac{A_{n-1}^3}{A_n^3} = \frac{3}{4}$
- 22.** Seja  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1+2+3+\dots+n}{(n+1)!} = \frac{1}{240}$ . Qual o valor do logaritmo de  $(2n+4)$  na base 0,5?
- 23.** Por quantos zeros termina o número 2001!
- 24.** (FUVEST) Quantos são os números inteiros positivos de 5 algarismos que não têm algarismos adjacentes iguais?
- 25.** Seis times de futebol, entre os quais estão A e B, vão disputar um campeonato. Suponha que na classificação final não existam empates. Um indivíduo fez duas apostas sobre a classificação final. Na primeira, apostou que A não seria campeão; na segunda, apostou que B não seria o último colocado. Em quantas classificações esse indivíduo ganha as duas apostas?

**Gabarito**

1. a) 40.320  
b) 5.040  
c) 20.160  
d) 20.160  
e) 11.520  
f) 28.800  
g) 720  
h) 4.320  
i) 1.152
2. 120
3. 840
4. 13.080
5. 720
6. 24
7. 103.680
8. 725.760
9. 460.800
10. 5.760
11. 67.600
12. 336
13. 72
14. 342
15. 35
16.  $m! \cdot (r+1)!$
17. 10
18. 564.480
19. 28.800
20. 604.800
21. a)  $S = \{3\}$   
b)  $S = \{12\}$
22. -4
23. 499
24. 59.049
25. 504

1. Considere as letras da palavra PARALELA.
  - a) quantos anagramas podemos formar?
  - b) quantos anagramas começam por P?
  - c) quantos anagramas começam por L?
  - d) quantos anagramas começam por A?
2. Quantos anagramas da palavra MATEMÁTICA começam pela sílaba MA?
3. Quantos números pares de 5 algarismos podemos formar apenas com os dígitos 1, 1, 2, 2 e 3, respeitadas as repetições apresentadas?
4. São analisados todos os possíveis números de cinco algarismos que podem ser formados com os algarismos 1, 2 e 3. Desses números, quantos são aqueles que têm a soma dos algarismos maior que 12?
5. Quantos anagramas da palavra MARMELO começam por vogal?
6. Quantos anagramas da palavra SUCESSO começam por S e terminam por O?
7. De quantas maneiras diferentes se podem colocar em uma linha de um tabuleiro de xadrez (8 posições) as peças brancas (2 torres, 2 cavalos, 2 bispos, a rainha e o rei)?
8. (ITA) Quantas soluções inteiras e não negativas tem a equação  $x + y + z + t = 7$ ?
9. Uma palavra tem sete letras sendo que uma das letras comparece  $n$  vezes e as demais comparecem sem repetição. Sabendo que o número de anagramas que se obtém permutando as letras desta palavra é 210, qual o valor de  $n$ ?
10. Quantos anagramas da palavra GARRAFA apresentam as letras A, A, A, R, R juntas, em qualquer ordem?
11. Usando os algarismos do conjunto  $\{2, 6\}$  quantos números de 4 algarismos podemos formar?
12. Quantos anagramas da palavra ALAMEDA não apresentam as 4 vogais juntas?
13. De quantas formas dez crianças podem formar uma roda?

14. De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com sete crianças, de modo que duas determinadas dessas crianças não fiquem juntas?
15. De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem se sentar ao redor de uma mesa circular de modo que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?

Gabarito

1. a) 3.360  
b) 420  
c) 840  
d) 1.260
2. 10.080
3. 12
4. 21
5. 1.080
6. 60
7. 5.040
8. 120
9. 4
10. 60
11. 16
12. 744
13. 362.880
14. 480
15. 2.880

1. Sabendo-se que  $C_n^2 = 10$ , calcule  $n$ .
2. Obter o valor de  $p$ , sabendo que  $\frac{C_8^{p+2}}{C_8^{p+1}} = 2$ .
3. Sendo  $5.C_n^{n-1} + C_n^{n+3} = A_n^3$ , calcular  $n$ .
4. Resolver a equação  $A_x^3 - 6.C_x^2 = 0$ .
5. Sabendo que o número de combinações de  $n+2$  objetos, tomados cinco a cinco, vale  $\frac{28n}{3}$ , calcule o valor de  $n$ .
6. Quantos subconjuntos de 3 elementos tem um conjunto com 5 elementos?
7. A diretoria de uma empresa é formada por 7 diretores brasileiros e 5 japoneses. Pergunta-se:
  - a) Quantas comissões de 8 diretores podem ser formadas?
  - b) De todas as comissões de 8 diretores, quantas têm exatamente 5 brasileiros e 3 japoneses?
  - c) De todas as comissões de 8 diretores, quantas têm pelo menos um diretor japonês?
  - d) De todas as comissões de 7 diretores, quantas têm pelo menos um diretor japonês?
8. Dentre 5 homens e 6 mulheres, deve-se escolher uma comissão formada por 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos diferentes pode ser escolhida a comissão?
9. Uma classe tem 10 meninos e 9 meninas. Quantas comissões diferentes podemos formar com 4 meninos e 3 meninas, incluindo o melhor aluno e não incluindo a melhor aluna?
10. Quantos são os subconjuntos com  $p$  elementos de  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  nos quais:
  - A.   $a_1$  figura;
  - B.   $a_1$  não figura;
  - C.   $a_1$  e  $a_2$  figuram;
  - D.  pelo menos um dos elementos  $a_1, a_2$  figura;
  - E.  exatamente um dos elementos  $a_1, a_2$  figura.
11. De quantos modos podemos dividir 20 pessoas em:
  - A.  dois grupos de 10?
  - B.  quatro grupos de 5?
  - C.  um grupo de 12 e um de 8?
  - D.  três grupos de 6 e um de 2?
12. Marcam-se 5 pontos sobre uma reta  $r$  e 8 pontos sobre uma reta  $s$ , paralela a  $r$ .
  - a) Quantos triângulos existem com vértices em 3 desses pontos?
  - b) Quantos quadriláteros convexos existem com vértices em 4 desses pontos?
13. Uma urna contém 10 bolas brancas e 6 bolas pretas. De quantos modos é possível tirar 7 bolas das quais pelo menos 4 sejam pretas?
14. Quantos produtos positivos de três fatores distintos podem ser obtidos com os elementos do conjunto  $\{1, -1, 4, -4, 5, -5, 7, 8\}$ ?
15. Separam-se 10 jogadores em dois times de 5 jogadores cada. De quantos modos isso pode ser feito, sabendo que há apenas dois goleiros e eles não podem estar no mesmo time?
16. Dentre 6 números positivos e 6 números negativos, de quantos modos podemos escolher quatro números cujo produto seja positivo?
17. Quantos são os números naturais de 7 dígitos nos quais o dígito 4 figura exatamente 3 vezes e o dígito 8 exatamente 2 vezes?
18. Dispõe-se de 7 cores distintas para pintar um mapa das 5 regiões do Brasil. Pode-se repetir uma vez no máximo, apenas uma cor. Quantas disposições diferentes de cores pode-se obter?
19. Há 12 pontos A, B, C, ... todos coplanares, sendo que 3 desses pontos nunca pertencem a uma mesma reta. Qual é o número de triângulos que podemos formar, utilizando os 12 pontos e tendo o ponto A como um dos vértices?
20. O jogo da Sena consiste no sorteio de 6 números distintos, escolhidos ao acaso, entre os números 1, 2, 3, ..., até 50. Uma aposta consiste na escolha, (pelo apostador), de 6 números distintos entre os 50 possíveis, sendo premiadas as apostas que acertarem pelo menos 4 dos 6 números sorteados. Um grupo de amigos resolveu participar do jogo escolhendo 15 números e fazendo todos os 5005 jogos possíveis de serem realizados com esses 15 números. Realizado o sorteio, verificaram que exatamente 4 dos 6 números sorteados estavam entre os 15 que eles escolheram. Qual foi o número de prêmios que esses amigos ganharam?
21. Nove times de futebol vão ser divididos em três chaves, todas com o mesmo número de times, para a disputa da primeira fase de um torneio. Cada uma das chaves já tem um cabeça de chave definido. Nessas condições, qual o número de maneiras diferentes de se completarem as chaves?

- 22.** (ITA-91) Uma escola possui 18 professores, sendo 7 de Matemática, 3 de Física e 4 de Química. De quantas maneiras podemos formar comissões de 12 professores de modo que cada uma contenha exatamente 5 professores de Matemática, no mínimo 2 de Física e no máximo 2 de Química?
- 23.** (ITA-93) Analise as afirmações classificando-as em verdadeiras ou falsas:
- O número de maneiras que podemos distribuir 5 prêmios iguais a 7 pessoas de modo que cada pessoa premiada receba no máximo um prêmio é 21.
  - O número de maneira que podemos distribuir 5 prêmios iguais a 7 pessoas de modo que 4 e apenas 4 sejam premiadas é 140.
  - Para todo natural  $n, n \geq 5, C_n^5 = C_n^{n-5}$
- 24.** (ITA) Quantas soluções inteiras e não negativas tem a equação  $x + y + z + w = 5$ ?
- 25.** (ITA) Consideremos  $m$  elementos distintos. Destaquemos  $k$  dentre eles. Quantos arranjos simples daqueles  $m$  elementos tomados  $n$  a  $n$  podemos formar, de modo que em cada arranjo haja sempre apenas  $r$  ( $r < n$ ) elementos dos  $k$  elementos destacados e que estes  $r$  elementos estejam juntos?
- 26.** Considere  $n$  ( $n > 2$ ) pontos em um plano, entre os quais não há 3 pontos colineares.
- Quantas são as retas que contêm dois desses pontos?
  - Qual é o número máximo de pontos de intersecção dessas retas?
- 27.** Uma fila de cadeiras no cinema tem 20 poltronas. De quantos modos 6 casais podem se sentar nessas poltronas de modo que nenhum marido se sente separado de sua mulher?
- 28.** O conjunto  $A$  possui  $p$  elementos e o conjunto  $B$  possui  $n$  elementos. Determine o número de funções  $f: A \rightarrow B$  sobrejetoras para:
- $p = n$
  - $p = n + 1$
- 29.** De quantos modos podemos comprar 3 refrigerantes em uma lanchonete onde há 5 tipos de refrigerantes?
- 30.** Quantas são as soluções inteiras e não negativas da inequação  $x + y + z \leq 5$ ?

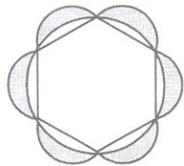
- 31.** Quantas são as soluções inteiras da equação  $x + y + z = 20$ , com  $x \geq 2, y \geq 2$  e  $z \geq 2$ ?
- 32.** Quantos números inteiros entre 1 e 100.000 têm soma dos algarismos igual a 6?
- 33.** Quantos são os anagramas da palavra PIRACICABA que não possuem duas letras A juntas?
- 34.** Numa urna há  $n$  bolas numeradas de 1 a  $n$ . De quantos modos se podem extrair 3 bolas (ao mesmo tempo) de sorte que não haja duas ou três bolas designadas por números consecutivos?
- 35.** Uma fila tem 15 cadeiras nas quais devem sentar-se 5 homens, de modo que não fiquem dois homens sentados em cadeiras adjacentes. De quantos modos isso pode ser feito?
- 36.** Quantos são os anagramas da palavra MISSISSIPI nos quais não há duas letras S consecutivas?
- 37.** Quantos inteiros há de 1 a 100.000 que possuem a seguinte propriedade: nenhum algarismo pode ser maior que o seu algarismo sucessor (o algarismo à direita)? Assim satisfazem à condição, por exemplo, os números 1234 e 1334.

**Gabarito**

- |  |   |            |
|--|---|------------|
| 1. $n = 5$   | 2. $p = 1$  | 3. $n = 4$ |
| 4. $\{5\}$   | 5. $n = 6$  | 6. 10      |
| 7. a) 495; b) 350; c) 495; d) 791  |   |            |
| 8. 150   | 9. 4704   |            |
| 10. a) $C_{n-1}^{p-1}$ ; b) $C_{n-1}^p$ ; c) $C_{n-2}^{p-2}$ ; d) $2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$ ; e) $2C_{n-2}^{p-1}$   |   |            |
| 11. a) $\frac{C_{20}^{10}}{2}$ ; b) $\frac{C_{20}^5 \cdot C_{15}^5 \cdot C_{10}^5}{24}$ ; c) $C_{20}^{12} = C_{20}^8$ ; d) $\frac{C_{20}^6 \cdot C_{14}^6 \cdot C_8^6}{6}$ |   |            |
| 12. a) 220; b) 280   | 13. 2080  | 14. 25     |
| 15. 70   | 16. 255   | 17. 12.960 |
| 18. 10.920   | 19. 55  | 20. 55     |
| 21. 90   | 22. 2877  |            |
| 23. todas verdadeiras  |   |            |
| 24. 56   | 25. $(n - r + 1) \cdot A_k^r \cdot A_{m-k}^{n-r}$ |            |
| 26. a) $C_n^2$ ; b) $\frac{n^4 - 6n^3 + 11n^2 + 2n}{8}$  |   |            |
| 27. 138.378.240  |   |            |
| 28. a) $n!$ ; b) $\frac{(n+1)! \cdot n}{2}$  |   |            |
| 29. 35   | 30. 56  | 31. 120    |
| 32. 210  | 33. 70.560  |            |
| 34. $\frac{n^3 - 9n^2 + 26n - 24}{6}$  |   |            |
| 35. 55.440   | 36. 1050  | 37. 2001   |

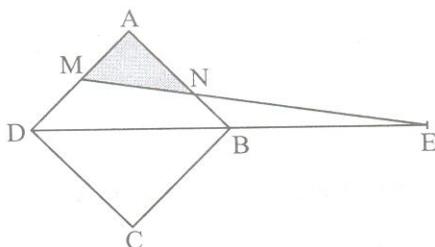


- 1.** (ITA-81) Na figura abaixo, temos um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio  $R$  e 6 outras semicircunferências com centros nos pontos médios dos lados do hexágono e cujos diâmetros são iguais ao lado do hexágono. Calcule a área da superfície hachurada.

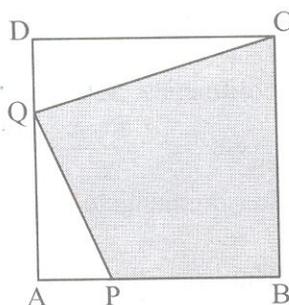


- 2.** (ITA-82) Um triângulo de lados  $a = 3$  m e  $b = 4$  m, diminuindo-se de  $60^\circ$  o ângulo que esses lados formam, obtém-se uma diminuição de  $3$  m<sup>2</sup> em sua área. Calcule a área do triângulo inicial.
- 3.** (ITA-82) Num triângulo isósceles, o perímetro mede 64 m e os ângulos adjacentes são iguais ao  $\arccos\left(\frac{7}{25}\right)$ . Calcule a área do triângulo.
- 4.** (ITA-85) Num triângulo  $ABC$  considere conhecidos os ângulos  $\widehat{BAC}$  e  $\widehat{CBA}$  e a medida  $(d)$  do lados  $AB$ . Calcule a área  $S$  deste triângulo.
- 5.** (ITA-86) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais sejam  $A(0; a)$ ,  $B\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ ,  $C(0; 2a)$  pontos onde  $a \in \mathbb{R}^*$ . Sejam as retas  $r$  passando por  $A$  e  $B$  e  $s$  passando por  $C$  e paralela a  $r$ . Determine a área do trapézio delimitado pelos eixos cartesianos e pelas retas  $r$  e  $s$ .
- 6.** (ITA-88) Considere as circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo equilátero de lado  $(a)$ . Determine a área da coroa circular formada por estas circunferências.
- 7.** (ITA-89) Se num quadrilátero convexo de área  $A$ , o ângulo agudo entre as diagonais mede  $\frac{\pi}{6}$  radianos, determine o produto do comprimento destas diagonais.
- 8.** (ITA-89) Se o perímetro de um triângulo inscrito num círculo medir  $20x$  cm e a soma dos senos de seus ângulos internos for igual a  $x$ . Determine a área do círculo.
- 9.** (ITA-89) Num triângulo  $ABC$ ,  $D$  é um ponto médio do segmento  $\overline{AC}$  e  $E$  é um ponto do segmento  $AB$ . Sabendo-se que  $AB = 3.AE$ , determine a razão entre a área do quadrilátero  $BCDE$  e a do triângulo  $ADE$ .

- 10.** (ITA-83) Num triângulo  $ABC$  retângulo em  $A$ , seja  $D$  a projeção de  $A$  sobre  $BC$ . Sabendo-se que o segmento  $BD$  mede  $\ell$  cm e que o ângulo  $\widehat{DAC}$  mede  $\theta$ . Calcule a área do  $\triangle ABC$ .
- 11.** (ITA-93) Calcule a área da região limitada por  $y \leq \frac{3}{2} \cdot (x+2)$  e  $x^2 + (y-3)^2 \leq 13$ .
- 12.** (ITA-94) Sejam  $a, b$  e  $c$  as medidas dos lados de um triângulo e  $A, B$  e  $C$  os ângulos internos opostos, respectivamente, a cada um destes lados. Sabe-se que  $a, b$  e  $c$ , nesta ordem, formam uma progressão aritmética. Se o perímetro do triângulo mede 15 cm e  $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{77}{240}$ . Calcule a área do triângulo.
- 13.** (ITA-94) Um triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$ , possui área  $S$ . Se  $x = \widehat{ABC}$  e  $r$  é o raio da circunferência circunscrita, calcule  $S$ .
- 14.** (ITA-95) Considere  $C$  uma circunferência em  $O$  e raio  $2r$ , e  $t$  a reta tangente a  $C$  num ponto  $T$ . Considere também  $A$  um ponto de  $C$  tal que  $\widehat{AOT} = \frac{\theta}{OT}$  ( $\theta < \frac{\pi}{2}$ ). Sendo  $B$  o ponto de  $t$  tal que o segmento  $\overline{AB}$  é paralelo ao segmento, calcule a área do trapézio  $OABT$ .
- 15.** (ITA-97) Em um  $\triangle ABC$ , sabe-se que o segmento  $AC$  mede 2 cm. Sejam  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente, os ângulos opostos aos segmentos  $BC$  e  $AC$ . Calcule a área do triângulo.
- 16.** Calcule a área de um triângulo em função de  $m_a$  e  $m_b$  e  $\alpha$  é o ângulo formado por elas.
- 17.** *Lúnulas de Hipócrates.* Se, sobre os três lados de um triângulo retângulo, descrevem-se as semicircunferências, a soma das superfícies dos dois crescentes compreendidos entre as semicircunferências é igual à superfície do triângulo retângulo.
- 18.** Num triângulo isósceles  $ABC$ , cuja base  $BC = 4$  cm e a altura  $AH = 6$  cm, a circunferência descrita sobre o lado  $AB$  como diâmetro intercepta o lado  $AC$  em  $D$ . Calcule a área do quadrilátero  $ABHD$ .
- 19.**  $ABCD$  é um quadrilátero de lado  $(a)$ ,  $M$  é o ponto médio de  $\overline{AD}$ . Os pontos  $E, B, D$  estão alinhados e  $EB = BD$ . Calcule a área hachurada.

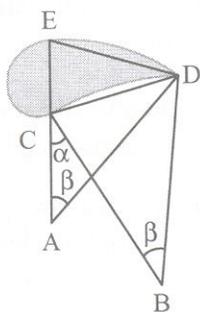


20. O quadrado ABCD tem lado 3 cm, se  $AQ = 2 \cdot AP$ , qual é a área máxima do quadrilátero BPQC?



21. A região hachurada da figura representa o perfil de asa de avião cujo bordo é composto de uma semi-circunferência de diâmetro  $\overline{CE}$  e dois arcos de circunferência  $\widehat{ED}$  e  $\widehat{CD}$ , tendo as circunferências o mesmo raio  $R$ ; além disso os arcos  $\widehat{ED}$  e  $\widehat{CD}$  rubentendem ângulos centrais  $\widehat{EAD}$  e  $\widehat{CBD}$  de mesma medida.

- a)  $\alpha = \text{med}(\widehat{ACB})$  da figura, mostrar que  $\alpha = \beta$ .  
 b) Calcule a área hachurada em função de  $R$  e  $\alpha$ .

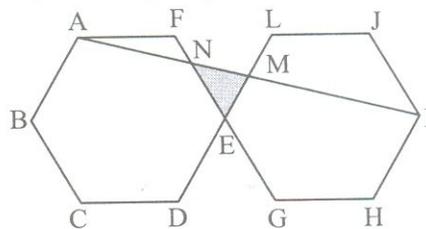


22. (FUVEST) O interior de uma circunferência de raio 2 é dividido em duas regiões por meio de uma corda que dista 1 do seu centro.

- a) Qual a med ( $\overline{AB}$ )?  
 b) Qual a área da região que contém o centro da circunferência.

23. (Colégio Naval) Um triângulo retângulo de perímetro  $2p$  está inscrito num círculo de raio  $R$  e circunscrito a um círculo de raio  $r$ . Determine uma expressão que dá a altura relativa a hipotenusa.

24. (Colégio Naval) Os hexágonos regulares da figura são congruentes e os segmentos  $\overline{CD}$  e  $\overline{HG}$  são colineares. Determine a razão entre a área de um deles e a área do triângulo EMN.



25. Um trapézio é obtido cortando-se um triângulo escaleno de área  $S$  por uma reta paralela a um dos lados do triângulo que passa pelo baricentro do mesmo. Ache a área do trapézio.

26. Num triângulo ABC, a medida do lado  $\overline{AB}$  é o dobro da medida do lado  $\overline{AC}$ . Traça-se a medida  $\overline{AM}$  e a bissetriz  $\overline{AD}$  ( $M$  e  $D$  pertencentes a  $\overline{BC}$ ). Se a área do triângulo ABC é  $S$ , determine a área do triângulo AMD.

27. (IME-2000) As medidas BE e CF de um triângulo ABC se cortam em G. Demonstre que  $\text{tg} \widehat{BGC} = \frac{12S}{b^2 + c^2 - 5a^2}$ , onde  $S$  é a área do triângulo ABC;  $AC = b$ ,  $AB = c$  e  $BC = a$ .

28. EFG é um triângulo equilátero de lado 5 cm. Os pontos A e B dividem em três partes iguais o diâmetro EF da semi-circunferência EDCF. Calcular a área do quadrilátero mistilíneo ABCD.

29.  $AB = 6$  m e  $AC = 10$  m são dois lados de um triângulo ABC, com  $24 \text{ m}^2$  de área, e AD é a bissetriz interna relativa ao ângulo  $\widehat{A}$ . Calcular as áreas dos triângulos ABD e ACD.

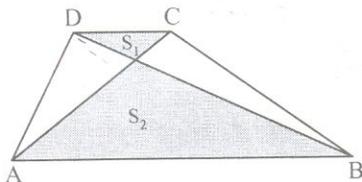
30. ABC é um triângulo com área de  $24 \text{ m}^2$ ; D e E são pontos dos lados AC e AB, tais que  $AC = 3AD$  e  $AB = 4AE$ . Calcular as áreas dos triângulos ADE, BCE e CDE.

31. ABC é um triângulo de área  $8 \text{ m}^2$  e no qual  $AB = 6$  m e  $AC = 4$  m. A mediana relativa ao lado AC e a bissetriz interna relativa ao ângulo  $\widehat{A}$  cortam-se em I. Calcular a área do triângulo ABI.

32.  $AB = 5$  m e  $AC = 8$  m são os catetos de um triângulo retângulo ABC; M é o ponto do cateto AC tal que  $MC = 3MA$  e N é o ponto do segmento BM tal que  $NM = 2NB$ . Calcule a área do  $\triangle BCN$ .

**33.** M é um ponto do lado BC de um  $\Delta ABC$ , tal que  $BM = 3$  m e  $MC = 2$  m. Sabendo que a área do  $\Delta AMC$  é  $5\text{m}^2$ , achar a área do  $\Delta AMB$ .

**34.** As diagonais de um trapézio o decompõem em quatro triângulos. Achar a expressão da área S do trapézio em função das áreas  $S_1$  e  $S_2$  dos triângulos adjacentes às suas bases.



**35.** Por um ponto interno a um triângulo ABC traçam-se retas, paralelas aos seus lados, que o decompõem em seis partes, três das quais são triângulos de áreas  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ . Achar a área S do  $\Delta ABC$ .

**36.** (ITA-99) Duas circunferências  $C_1$  e  $C_2$ , ambas com 1 m de raio, são tangentes. Seja  $C_3$  outra circunferência cujo raio mede  $(\sqrt{2}-1)\text{m}$  e que tangencia externamente  $C_1$  e  $C_2$ . Determine a área, em  $\text{m}^2$ , da região limitada e exterior às três circunferências dadas.

**37.** (ITA-99) Duas circunferências de raios iguais a 9 m e 3 m são tangentes externamente num ponto C. Uma reta tangencia estas duas circunferências nos pontos distintos A e B. Calcule a área do  $\Delta ABC$ .

**38.** ABC é um triângulo retângulo em C e o ângulo CBA tem medida  $\beta$ . O ponto E é interno ao lado BC e é tal que o ângulo CAE também tem medida  $\beta$ . Por E traça-se a paralela a AB, que intercepta AC em F. É dado  $EF = a$ .

- Calcule AB em termos de a e  $\beta$ .
- Prove que se os triângulos ABE e CEF têm áreas iguais, então  $\sin^4\beta = \cos^2\beta \cdot \cos 2\beta$ .

**39.** Achar a fórmula do dodecágono regular circunscrito a um círculo de raio R.

**40.** Achar o lado do pentágono regular no qual uma diagonal mede 4 m.

**41.** Oito circunferências iguais são tangentes externamente a uma mesma circunferência de raio 5 cm e tangentes externamente, duas a duas, de máximo em próximo. Calcular o lado do octágono regular cujos vértices são os centros dessas oito circunferências.

**42.** Calcular a distância entre dois lados paralelos de um octógono regular, sabendo que a sua maior diagonal mede 3 cm.

**43.** ABCDE é um pentágono regular cujo lado mede 3 cm. Calcular o lado do pentágono regular que se obtém traçando as diagonais do pentágono ABCDE.

**44.** Duplicação do gênero ( $n^\circ$  de lados) de um polígono convexo.

$\ell_n$ : lado do polígono regular convexo inscrito num círculo de raio R.

$\ell_{2n}$ : dobro do número de lados.

$$\text{demonstrar: } \ell_{2n} = \sqrt{2R(R - \sqrt{R^2 - \frac{(\ell_n)^2}{4}})}$$

**45.** (ITA-92) Determine a razão entre as áreas de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência e de um hexágono regular, cujo apótema mede 10 cm, circunscrito a esta mesma circunferência.

**46.** (ITA-96) Um hexágono regular e um quadrado estão inscritos no mesmo círculo de raio R, e o hexágono possui uma aresta paralela a uma aresta do quadrado. Calcule a distância entre as arestas paralelas.

**47.** Eu tenho um pasto circular de raio R e meu cavalo está preso a um mourão da cerca por meio de uma corda de comprimento x. Qual deve ser o comprimento x, de maneira que o cavalo possa comer somente a metade do capim do pasto?

**48.** EFG é um triângulo equilátero de lado 5 cm. Os pontos A e B dividem em três partes iguais o diâmetro EF da semicircunferência EDCF. Calcular a área do quadrilátero mistilíneo ABCD.

**49.** ABC é um  $\Delta$  equilátero inscrito numa circunferência de raio R e D é o ponto de contato da tangente a essa circunferência que é paralela ao lado  $\overline{BC}$ . Essa tangente intercepta o prolongamento do lado  $\overline{AC}$  no ponto E. Calcular a área do  $\Delta$  mistilíneo CDE.

**50.** (ITA-2000) Num  $\Delta$  acutângulo ABC, o lado oposto ao ângulo  $\hat{A}$  mede 5 cm. Sabendo que  $\hat{A} = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$  e  $\hat{C} = \arcsen\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ . Calcule a área do  $\Delta ABC$ .



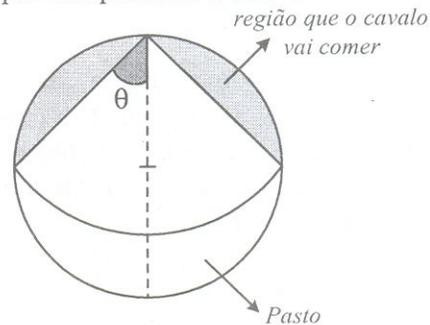
51. (ITA-2001) Um triângulo tem lados medindo 3; 4 e 5 cm. A partir dele, constrói-se uma seqüência de triângulos do seguinte modo: os pontos médios dos lados de um triângulo são, os vértices do seguinte. Determine aproximadamente a soma das áreas dos 78 primeiros triângulos assim construídos, incluindo o triângulo inicial.

## Gabarito

1.  $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot R^2$
2.  $6 \text{ m}^2$
3.  $168 \text{ m}^2$
4.  $S = \frac{d^2 \cdot \text{sen}(\hat{C}BA) \cdot \text{sen}(\hat{B}AC)}{2\text{sen}(\hat{B}AC + \hat{C}BA)}$
5.  $\frac{3a^2}{4}$
6.  $\frac{\pi a^2}{4}$
7.  $4A$
8.  $100 \pi \text{ cm}^2$
9. razão = 5
10. área =  $\frac{\ell^2}{2} \cdot \sec^2 \theta \cdot \text{tg} \theta$
11.  $\frac{13\pi}{2}$
12.  $\frac{15\sqrt{7}}{4} \text{ cm}^2$
13.  $S = r^2 \cdot \text{sen} 2x$
14.  $r^2 \cdot (4\text{sen} \theta - \text{sen} 2\theta)$
15.  $(2\text{sen}^2 \alpha \cot \beta + \text{sen} 2\alpha) \text{ cm}^2$
16.  $\frac{2}{3} m_a m_b \cdot \text{sen} \alpha$
17. demonstração
18.  $10,80 \text{ cm}^2$
19. Dica: demonstre que N   o baricentro do  $\Delta ADE$ .  

$$\text{área} = \frac{a^2}{6}$$
20. Dica: obtenha a fun o da área e determine o vértice da parábola.
21.  rea =  $\frac{R^2}{2} (1 - \cos \alpha) \cdot (2\text{sen} \alpha - \pi \cdot \cos \alpha + \pi)$
22. a)  $2\sqrt{3}$ ; b)  $\frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{3}$
23.  $\frac{Pr}{R}$
24. 18
25.  $\frac{4}{9} \cdot S$

26.  $\frac{S}{6}$
27. demonstr o
28. confira com os colegas
29.  $9 \text{ m}^2$  e  $15 \text{ m}^2$
30.  $2 \text{ m}^2$ ;  $18 \text{ m}^2$  e  $4 \text{ m}^2$
31.  $3 \text{ m}^2$
32.  $5 \text{ m}^2$
33.  $7,5 \text{ m}^2$
34.  $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$
35.  $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$
36.  $1 - \pi \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)$
37.  $\frac{27\sqrt{3}}{2}$
38. a)  $\text{asen}^2 \beta : \cos^2 \beta$ ; b) demonstr o
39.  $L_{12} = 2R(2 - \sqrt{3})$
40. 2,47 m
41. 6,19 cm
42. 2,78 cm
43. 1,14 cm
44. demonstr o
45.  $\frac{3}{8}$
46.  $\left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}\right) \cdot R$
47. O problema resulta numa equa o cuja soluço   obtida por computador. Observe o desenho:



A região atingida pelo cavalo   formada por dois segmentos circulares (parte hachurada) mais o setor circular de ângulo central  $2\theta$ . ( $\theta$  em radianos).

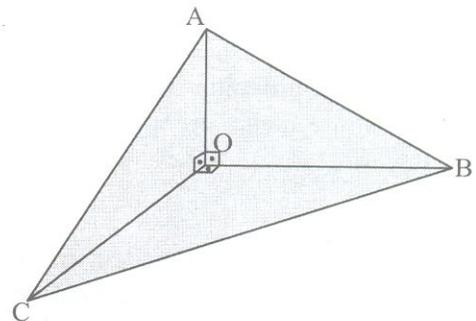
Seguindo o enunciado, vamos chegar na equa o:

$$(\pi + 4\theta) = 2\text{sen} 2\theta + 8\theta \cdot \text{sen}^2 \theta$$

computador:  $\theta \approx 54,4^\circ$  e  $x \approx 1,17R$

- 48.
- 49.
50.  $\frac{25}{2} \text{ cm}^2$
51.  $8 \text{ cm}^2$

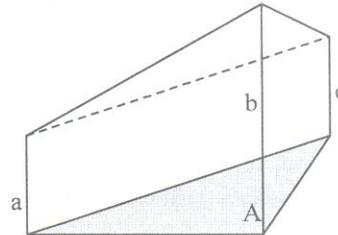
1. (ITA) Consideremos uma pirâmide regular cuja base quadrada tem área que mede  $64 \text{ cm}^2$ . Numa secção paralela à base que dista  $30 \text{ mm}$  desta, inscreve-se um círculo. Se a área deste círculo mede  $4\pi \text{ cm}^2$ , determine a altura da pirâmide.
2. (ITA) Posso um "laser" de alta potência como ferramenta de corte e uma peça plana de forma parabólica que desejo cortar. Suponha que a peça definida por  $x^2 - y - 1 \leq 0$ , e  $y \leq 1$  esteja no plano  $xoy$  e que o "laser, colocado no plano  $xoz$ , tem a janela de saída da luz fixa no ponto  $(0; 0; 1)$  podendo o seu tubo girar no plano  $xoz$ . A partir do início do corte, na borda da peça, de quantos graus devo girar o "laser" para terminar o serviço?
3. (ITA) Considere um prisma hexagonal regular tal que a razão entre a aresta da base e a aresta lateral é  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . Sabendo-se que se a aresta da base for aumentada de  $2 \text{ cm}$ , o volume  $V$  do prisma ficará aumentado de  $108 \text{ cm}^3$  considerando que a aresta lateral permanece a mesma, determine o volume do prisma.
4. (ITA) Considere (P) um prisma reto de base quadrada cuja altura mede  $3 \text{ m}$  e tem área total de  $80 \text{ m}^2$ . Calcule o lado dessa base quadrada.
5. (ITA) Seja (P) um paralelepípedo retângulo de dimensões dadas por três números consecutivos. Se a área total de (P) é  $10 \text{ m}^2$ , calcule o seu volume.
6. Seja (T) um cubo com aresta de medida  $a$ . Considere (P) a pirâmide que tem vértice no centro de uma face de (T) e como base a face oposta de (T). Determine a área lateral de (P)
7. (ITA) Suponha que (I) é um cubo, tal que a medida de sua diagonal é  $acm$  e admita que (II) é um cubo, cujo volume é o triplo do volume de (I). Determine a medida diagonal de (II).
8. (ITA) As arestas laterais de um pirâmide regular de 12 faces laterais tem comprimento  $l$ . O raio do círculo circunscrito ao polígono da base desta pirâmide mede  $\frac{\sqrt{2}}{2}l$ . Determine o volume desta pirâmide.
9. (ITA) Considere uma pirâmide qualquer de altura  $h$  e de base  $B$ . Traçando-se um plano paralelo à base  $B$ , cuja distância ao vértice da pirâmide é  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}h \text{ cm}$ , obtém-se uma secção plana de área  $\sqrt{7} \text{ cm}^2$ . Determine a área da base  $B$  da pirâmide.
10. (ITA) O lado da base maior de um tronco de pirâmide hexagonal regular, com bases paralelas, mede  $l \text{ cm}$ . A altura do tronco é igual à metade do apótema desta base. As faces laterais formam um ângulo de  $30^\circ$  com a base. Calcule:  
a) apótema da base maior  
b) lado da base menor  
c) altura da face lateral  
d) área total do tronco
11. (ITA) Determine o volume de um tetraedro regular de aresta igual a  $l$ .
12. A área total de um paralelepípedo retângulo mede  $28 \text{ m}^2$  e a diagonal  $\sqrt{21} \text{ m}$ . Sabendo que as dimensões formam uma PG, calcule-as.
13. (ITA) As dimensões de um paralelepípedo retângulo estão em PG e a sua soma vale  $s$ . Sabendo que o seu volume é  $V^3$  e  $s \geq 3V$ , determine as dimensões do paralelepípedo.
14. Num triedro trirretângulo da figura, as áreas das faces  $OBA$ ,  $OAC$  e  $BOC$ , medem respectivamente  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Determine a área da face oposta ao vértice  $O$ .



15. Cortando-se um prisma triangular reto por um plano  $\alpha$  que forma um ângulo de  $45^\circ$  com o plano da base  $ABC$ , observamos que a reta  $r$ , intersecção de  $\alpha$  com o plano da base dista  $7 \text{ cm}$  de  $A$ ,  $5 \text{ cm}$  de  $B$  e  $2 \text{ cm}$  de  $C$ . Se a área da base for  $21 \text{ cm}^2$ , determine o volume do tronco de prisma compreendido entre a base  $ABC$  e o plano  $\alpha$ .
16. (ITA) Considere um prisma triangular regular cuja aresta da base mede  $x \text{ cm}$ . Sua altura é igual ao menor lado de um  $\Delta ABC$  inscritível num círculo de raio  $x \text{ cm}$ . Sabendo-se que o  $\Delta ABC$  é semelhante ao  $\Delta$  de lados  $3; 4$  e  $5$ . Determine o volume do prisma em  $\text{cm}^3$ .

- 17.** (ITA) Seja  $V$  o vértice de uma pirâmide com base triangular  $ABC$ . O segmento  $AV$ , de comprimento unitário, é perpendicular à base. Os ângulos das faces laterais, no vértice  $V$ , são todos de  $45^\circ$ . Determine o volume da pirâmide.
- 18.** (ITA) As arestas da base de uma pirâmide triangular regular medem  $\ell$  e as faces laterais são triângulos retângulos. Determine o volume da pirâmide.
- 19.** (ITA) Determine a área lateral de uma pirâmide quadrangular regular de altura 4 m e área da base  $64\text{m}^2$ .
- 20.** (ITA) Um tetraedro regular tem área total igual a  $6\sqrt{3}\text{ cm}^2$ . Determine sua altura em cm.
- 21.** (ITA) Um tronco de pirâmide regular tem como bases triângulos equiláteros, cujos lados medem, respectivamente 2 cm e 4 cm. Se a aresta lateral do tronco mede 3 cm, determine o valor da altura  $h$ .
- 22.** (ITA) Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. Calcule o volume do prisma.
- 23.** (ITA) Dado uma pirâmide regular triangular sabe-se que sua altura mede  $3a$ , onde  $a$  é a medida da aresta de sua base. Calcule a área total desta pirâmide.
- 24.** (ITA) A aresta de um cubo mede  $x$  cm. Determine a razão entre o volume e a área total do poliedro cujos vértices são os centros das faces do cubo.
- 25.** (ITA) Dentro de um tronco de pirâmide quadrangular regular, considera-se uma pirâmide regular cuja base é a base maior do tronco e cujo vértice é o centro da base menor do tronco. As arestas das bases medem  $a$  e  $2a$ . As áreas laterais do tronco e da pirâmide são iguais. Determine a altura do tronco.
- 26.** (ITA) Uma pirâmide regular tem por base um quadrado de lado 2 cm. Sabe-se que as faces formam com a base ângulos de  $45^\circ$ . Determine a razão entre a área da base e a área lateral.
- 27.** (ITA) Um tetraedro tri-retângulo é cortado por um plano que intercepta as três arestas, formando um triângulo com lados medindo 8 m, 10 m e 12 m. Determine o volume do sólido.

- 28.** (ITA) A razão entre a área da base de uma pirâmide regular de base quadrada e a área de uma das faces é 2. Sabendo-se que o volume da pirâmide é de  $12\text{ m}^3$ , calcule a altura da pirâmide.
- 29.** Determine o volume do tronco de prisma triangular reto, sendo  $A$  a área da base e  $a$ ,  $b$  e  $c$  as medidas das arestas laterais.



- 30.** Em uma pirâmide quadrangular regular o ângulo entre as faces laterais adjacentes medem  $2\alpha$ . Determinar a razão entre a área da seção diagonal da pirâmide e sua área lateral.
- 31.** A base de uma pirâmide é um trapézio isósceles cujos lados paralelos são iguais  $a$ ,  $a$  e  $b$  ( $a > b$ ). Cada face lateral é oblíqua a base fazendo um ângulo  $\alpha$ . Encontrar a área total da pirâmide.
- 32.** A base de um prisma reto é um  $\Delta$  isósceles em que o ângulo dos lados iguais é  $2\alpha$ . Dos vértices da base superior traçam-se duas diagonais das faces laterais iguais. O ângulo entre as diagonais é igual a  $2\beta$ . Determine a razão entre a área lateral do prisma e a área das suas bases.
- 33.** A área total de uma pirâmide quadrangular regular é igual a  $s$  e o ângulo da face lateral com a base é  $\alpha$ . Calcule a aresta da base da pirâmide.
- 34.** A base de um pirâmide triangular é um  $\Delta$  isósceles com lados iguais a  $a$  e com ângulo do vértice  $\alpha$ . O ângulo entre as faces laterais com o plano da base é igual a  $45^\circ$ . Determine o volume da pirâmide.
- 35.** A altura de uma pirâmide triangular regular é  $h$ . O ângulo diédrico entre as faces laterais é  $\varphi$ . Determine o volume da pirâmide.
- 36.** A aresta lateral de um pirâmide quadrangular regular é  $b$ . O ângulo diédrico entre duas faces laterais adjacentes é  $\varphi$ . Determine o volume da pirâmide.
- 37.** A base de uma pirâmide é um  $\Delta$  retângulo de hipotenusa  $C$  e ângulo agudo  $\alpha$ . Cada aresta lateral da pirâmide forma com a base um ângulo  $\beta$ . Determine o volume da pirâmide.

- 38.** O ângulo diédrico entre as faces laterais de uma pirâmide quadrangular regular vale  $\alpha$ . Determine o ângulo diédrico da face lateral com a base.
- 39.** Cortamos um tronco de pirâmide de bases paralelas por um plano paralelo às bases e cuja relação de distâncias a estas bases é igual a  $\frac{m}{m'}$ . Determine a área da secção, conhecidas as áreas  $b$  e  $b'$  das bases.
- 40.** (ITA) Considere um pirâmide regular com altura de  $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$  cm. Aplique a esta pirâmide cortes planos e paralelos à base de tal maneira que a nova pirâmide e os dois troncos obtidos tenham, os três, o mesmo volume. Determine a altura do tronco cuja base é a base da pirâmide original.

17.  $\frac{1}{6} \cdot \sqrt{2\sqrt{2}-2}$
18.  $\frac{\sqrt{2}}{24} \ell^3$
19.  $64\sqrt{2} \text{ m}^2$
20. 2
21.  $\sqrt{\frac{23}{3}}$
22.  $54\sqrt{3} \text{ cm}^3$
23.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} (1 \pm (\sqrt{109}))$
24.  $\frac{\sqrt{3}x}{18} \text{ cm}$
25.  $\frac{a \cdot \sqrt{35}}{10}$
26.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
27.  $15\sqrt{6} \text{ m}^3$
28. 3 m
29. A.  $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$
30.  $\frac{\cos \alpha}{2}$
31.  $\frac{(a+b)\sqrt{ab} \cdot \cos 2\frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$
32.  $\frac{4(1+\sin \alpha)\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{\sin 2\alpha \sin \beta}$
34.  $\frac{a^3 \sin 2\alpha \sin \alpha}{2 \cos^2\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)}$
35.  $\frac{h^3 \sqrt{3} \sin\left(\frac{\varphi}{2}+30^\circ\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}-30^\circ\right)}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$
36.  $-\frac{2}{3} \cdot b^3 \frac{\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \varphi}{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}$
37.  $\frac{c^3}{24} \cdot \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta$
38.  $\arccos \sqrt{-\cos \alpha}$
39.  $\left(\frac{m' \sqrt{b} + m \sqrt{b'}}{m+m'}\right)^2$

**Gabarito**

1. 6 cm
2.  $\frac{\pi}{2}$  rad
3.  $36 \text{ cm}^3$
4. 4 m
5.  $\sqrt{2} \text{ m}^3$
6.  $a^2 \sqrt{5}$
7.  $a^3 \sqrt{3}$
8.  $\frac{\sqrt{2}}{4} \ell^3$
9.  $\frac{7\sqrt{7}}{3} \text{ cm}^2$
10. a)  $\frac{(2\sqrt{3}-3)\ell}{4}$   
 b)  $\frac{(2-\sqrt{3})\ell}{2}$   
 c)  $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$   
 d)  $\frac{3}{8}(19\sqrt{3}-18)\ell^2$
11.  $\frac{\sqrt{2}}{12} \ell^3$
12. 1; 2; 4
13.  $\frac{(s-V) \pm \sqrt{(s-V)^2 - 4V^2}}{2}; V$
14.  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$
15.  $98 \text{ cm}^3$
16.  $3\sqrt{3}x^3/10$

Frente 1 – ITA

1. (ITA-87) Multiplicando por 2 as raízes da equação  $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$  vamos obter raízes da seguinte equação:
- A. ( )  $2y^3 - 6y^2 + 6y - 4 = 0$   
 B. ( )  $y^3 - 4y^2 + 8y - 8 = 0$   
 C. ( )  $8y^3 - 8y^2 + 4y - 1 = 0$   
 D. ( )  $y^3 - 8y^2 + 8y + 8 = 0$   
 E. ( )  $4y^3 - 4y^2 - 4y - 8 = 0$
2. (ITA-87) A soma de todas as raízes da equação  $z^3 - 1 = 0$  é:
- A. ( ) 1      B. ( ) 2      C. ( ) zero  
 D. ( )  $-2\sqrt{2}i$       E. ( )  $2 + \sqrt{3}i$
3. (ITA-88) Seja a equação  $z^4 - a - bi = 0$  onde  $a$  e  $b$  são reais não nulos. Sobre as raízes desta equação podemos afirmar que:
- A. ( ) uma delas é um imaginário puro  
 B. ( ) o seus módulos formam uma progressão aritmética de razão  $\sqrt[4]{|a + bi|}$   
 C. ( ) O seu próprio produto é um imaginário puro  
 D. ( ) Cada uma tem argumento igual a  $\frac{\arg(a + bi)}{4}$   
 E. ( ) A sua soma é zero
- Nota:  $\arg(a + bi)$  denota o argumento do número  $a + bi$
4. (ITA-88) Se  $P(x)$  e  $Q(x)$  são polinômios com coeficientes reais, de graus 2 e 4 respectivamente, tais que  $P(i) = 0$  e  $Q(i) = 0$  então podemos afirmar que:
- A. ( )  $P(x)$  é divisível por  $x + 1$   
 B. ( )  $P(x)$  é divisível por  $x - 1$   
 C. ( )  $P(x) \cdot Q(x)$  é divisível por  $x^4 + 2x^2 + 1$   
 D. ( )  $P(x)$  e  $Q(x)$  são primos entre si  
 E. ( )  $Q(x)$  não é divisível por  $P(x)$
- Nota:  $i$  é a unidade imaginária do conjunto dos números complexos.
5. (ITA-90) Seja  $p(x) = 16x^5 - 78x^4 + \dots + \alpha x - 5$  um polinômio de coeficientes reais tal que a equação  $p(x) = 0$  admite mais do que uma raiz real e ainda,  $a + bi$  é um raiz complexa desta equação com  $ab \neq 0$ . Sabendo-se que  $1/a$  é a razão da progressão geométrica formada pelas raízes reais de  $p(x) = 0$  e que a soma destas raízes reais vale  $7/8$  enquanto que o produto é  $1/64$ , o valor de  $\alpha$  é:
- A. ( ) 32      B. ( ) 56      C. ( ) 71  
 D. ( ) 11      E. ( ) 0

6. (ITA-91) Os valores de  $m$  de modo que a equação  $x^3 - 6x^2 - m^2x + 30 = 0$  tenha duas de suas raízes somando um, são:
- A. ( ) 0      B. ( )  $\sqrt{3}$  e 3      C. ( ) 1 e -1  
 D. ( ) 2 e -2      E. ( ) n.d.a.
7. (ITA-91) Seja  $S$  o conjunto de todas as raízes da equação  $12x^3 - 16x^2 - 3x + 4 = 0$ . Podemos afirmar que:
- A. ( )  $S \subset ]-1, 0 [ \cup ] 0, 1 [ \cup ] 1, 2 [$   
 B. ( )  $S \subset ]-2, -1 [ \cup ] 0, 1 [ \cup ] 3, 4 [$   
 C. ( )  $S \subset [0, 4]$   
 D. ( )  $S \subset ]-2, -1 [ \cup ] 1, 2 [ \cup ] 3, 4 [$   
 E. ( ) n.d.a.
8. (ITA-92) Considere a equação:
- $$\det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ G(x) & 2x & F(x) \\ [G(x)]^2 & 4x^2 & [F(x)]^2 \end{bmatrix} = 0$$
- onde
- $$F(x) = \frac{x^4 + x^3 - x + 1}{x^2} \text{ e } G(x) = \frac{x^2 - 1}{x},$$
- com  $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$
- Sobre as raízes dessa equação, temos:
- A. ( ) Duas delas são negativas.  
 B. ( ) Uma delas é um número irracional.  
 C. ( ) Uma delas é um número par.  
 D. ( ) Uma delas é positiva e outra negativa.  
 E. ( ) n.d.a.
9. (ITA-92) Sejam  $a$  e  $b$  constantes reais. Sobre a equação  $x^4 - (a+b)x^3 + (ab+2)x^2 - (a+b)x + 1 = 0$  podemos afirmar que:
- A. ( ) Não possui raiz real se  $a < b < -3$ .  
 B. ( ) Não possui raiz real se  $a > b > 3$ .  
 C. ( ) Todas as raízes são reais se  $|a| \geq 2$  e  $|b| \geq 2$ .  
 D. ( ) Possui pelo menos uma raiz real se  $-1 < a \leq b < 1$ .  
 E. ( ) n.d.a.
10. (ITA-93) Sabendo-se que a soma das raízes da equação
- $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ x & 0 & x & 0 \\ 0 & b & x & x \\ b & x & 2 & b \end{vmatrix} = 0$$
- é  $-8/3$  e que  $S$  é o conjunto destas raízes, podemos afirmar que:
- A. ( )  $S \subset [-17, -1]$       B. ( )  $S \subset [1, 5]$   
 C. ( )  $S \subset [-1, 3]$       D. ( )  $S \subset [-10, 0]$   
 E. ( )  $S \subset [0, 3]$



11. (ITA-93) Considere a equação de coeficientes reais

$$x^5 + mx^4 + 2\frac{p}{m}x^3 - 316x^2 + 688x + p = 0, m \neq 0$$

para a qual  $1 + 3i$  é raiz. Sabendo-se que a equação admite mais de uma raiz real e que suas raízes reais formam uma progressão geométrica de razão inteira  $q$  cujo produto é igual a 64, podemos afirmar que

$\frac{p}{m}$  é igual a:

- A. ( ) 20      B. ( ) 30      C. ( ) 40  
D. ( ) 120      E. ( ) 160

12. (ITA-94) As raízes da equação de coeficientes reais

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

são inteiros positivos consecutivos. A soma dos quadrados dessas raízes é igual a 14. Então  $a^2 + b^2 + c^2$  é igual a:

- A. ( ) 190      B. ( ) 191      C. ( ) 192  
D. ( ) 193      E. ( ) 194

13. (ITA-94) Seja  $P(x)$  um polinômio de grau 5, com coeficientes reais, admitindo  $2$  e  $i$  como raízes. Se  $P(1)P(-1) < 0$ , então o número de raízes reais de  $P(x)$  pertencentes ao intervalo  $]-1, 1[$  é:

- A. ( ) 0      B. ( ) 1      C. ( ) 2  
D. ( ) 3      E. ( ) 4

14. (ITA-95) Sabendo-se que  $4 + i\sqrt{2}$  e  $\sqrt{5}$  são raízes do polinômio  $2x^5 - 22x^4 + 74x^3 + 2x^2 - 420x + 540$ , então a soma dos quadrados de todas as raízes reais é:

- A. ( ) 17      B. ( ) 19      C. ( ) 21  
D. ( ) 23      E. ( ) 25

15. (ITA-96) Considere o polinômio

$$p(z) = z^6 + 2z^5 + 6z^4 + 12z^3 + 8z^2 + 16z.$$

Sobre as raízes da equação  $p(z) = 0$ , podemos afirmar que:

- A. ( ) apenas uma é real.  
B. ( ) apenas duas raízes são reais e distintas.  
C. ( ) apenas duas raízes são reais e iguais.  
D. ( ) quatro raízes são reais, sendo duas a duas distintas.  
E. ( ) quatro raízes são reais, sendo apenas duas iguais.

16. (ITA-97) Seja  $S$  o conjunto de todas as raízes da equação

$$2x^6 - 4x^5 + 4x - 2 = 0.$$

Sobre os elementos de  $S$  podemos afirmar que

- A. ( ) todos são números reais.  
B. ( ) 4 são números reais positivos.  
C. ( ) 4 não são números reais.  
D. ( ) 3 são números reais positivos e 2 não são reais.  
E. ( ) 3 são números reais negativos.

17. (ITA-97) Sejam  $a_1, a_2, a_3$  e  $a_4$  números reais formando, nesta ordem, uma progressão geométrica crescente com  $a_1 \neq 0$ . Sejam  $x_1, x_2$  e  $x_3$  as raízes da equação  $a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$ . Se  $x_1 = 2i$ , então:

- A. ( )  $x_1 + x_2 + x_3 = -2$   
B. ( )  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$   
C. ( )  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$   
D. ( )  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 8$   
E. ( )  $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = 5$ .

18. (ITA-86) No conjunto  $C$  dos números complexos seja  $\alpha$  tal que  $|\alpha| < 1$ . O lugar geométrico dos pontos  $z \in C$  que satisfazem a igualdade

$$\left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = 1 \text{ é:}$$

- A. ( ) Uma circunferência de centro na origem e raio 1.  
B. ( ) Uma hipérbole.  
C. ( ) Uma elipse de semi eixo maior igual a 2.  
D. ( ) Uma parábola.  
E. ( ) Formado por duas retas concorrentes.  
Nota: A notação  $\bar{\alpha}$  é usada para denotar o conjugado complexo de  $\alpha$ .

19. (ITA-87) Seja  $S$  a coleção de todos os números complexos  $z$ , que são raízes da equação  $|z| - z = 1 + 2i$ , onde  $i$  é a unidade imaginária. Então, podemos garantir que:

- A. ( )  $S = \left\{ \frac{3}{2} - 2i \right\}$   
B. ( )  $S = \left\{ \frac{1}{2} + 2i, -\frac{1}{2} - 2i \right\}$   
C. ( )  $S = \left\{ \frac{1}{2} + 4k\pi, k = 1, 2, 3 \right\}$   
D. ( )  $S = \left\{ \frac{1}{4} + 3i \right\}$   
E. ( )  $S = \{1 + 2ki; k = 1, 2, 3\}$

20. (ITA-87) Seja  $N$  o número de soluções reais da equação  $\sin x = |2 + 3i|$ . Então, temos:

- A. ( )  $N > 50$       B. ( )  $N = \text{zero}$   
C. ( )  $N = 2$       D. ( )  $N = 1$   
E. ( )  $N > 2$  e  $N < 10$

21. (ITA-87) Considerando  $z$  e  $w$  números complexos arbitrários e  $u = z \cdot w + \bar{z} \cdot \bar{w}$ , então o conjugado de  $u$  será necessariamente:

- A. ( ) igual a  $|z||w|$ .  
B. ( ) um número imaginário puro.  
C. ( ) igual ao dobro da parte real de  $z + w$ .  
D. ( ) igual ao dobro da parte real do número  $z \cdot w$ .  
E. ( ) diferente de  $u$ .



- 22.** (ITA-88) o número natural  $n$  tal que  $(2i)^n + (1+i)^{2n} = -16i$  onde  $i$  é a unidade imaginária do conjunto dos números complexos, vale:  
 A. ( )  $n = 6$                       B. ( )  $n = 3$   
 C. ( )  $n = 7$                       D. ( )  $n = 4$   
 E. ( ) Não existe  $n$  nestas condições
- 23.** (ITA-89) O valor da expressão  $|1 - z|^2 + |1 + z|^2$ , sendo  $z$  um número complexo, é:  
 A. ( ) 5, se  $|z| \leq 1$               B. ( ) 4, se  $|z| = 1$   
 C. ( ) 0, se  $\text{Im}(z) = 0$           D. ( ) 2, para todo  $z$   
 E. ( ) 3, se  $\text{Re}(z) = 0$
- 24.** (ITA-89) Considerando que a imagem da função  $\text{arc sen } x$  é o intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  e  $i = \sqrt{-1}$ , podemos garantir que  $\text{arcsen} \left| \frac{1+xi}{1-xi} \right|$  está definida  
 A. ( ) apenas para  $x = 0$  vale  $\frac{\pi}{2}$   
 B. ( ) para todo  $x \in \mathbb{R}$  e vale  $\frac{\pi}{2}$   
 C. ( ) apenas para  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|x| < 1$  e seu valor depende do valor de  $x$   
 D. ( ) apenas para  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $x \geq 1$  e seu valor é  $\pi$   
 E. ( ) apenas para  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $x \leq -1$  e seu valor depende do valor de  $x$ .
- 25.** (ITA-89) O produto dos números complexos  $z = x + yi$ , que têm módulo igual a  $\sqrt{2}$  e se encontram sobre a reta  $y = 2x - 1$  contida no plano complexo, é igual a:  
 A. ( )  $\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i$                       B. ( )  $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$   
 C. ( )  $-\frac{8}{5} - \frac{8}{5}i$                       D. ( )  $2 + 2i$   
 E. ( ) não existe nenhum número complexo que pertença à reta  $y = 2x - 1$  e cujo módulo seja  $\sqrt{2}$
- 26.** (ITA-90) Considere as equações  $z^3 = i$  e  $z^2 + (2+i)z + 2i = 0$  onde  $z$  é complexo. Seja  $S_1$  o conjunto das raízes da primeira equação e  $S_2$  o da segunda. Então:  
 A. ( )  $S_1 \cap S_2$  é vazio  
 B. ( )  $S_1 \cap S_2 \subset \mathbb{R}$   
 C. ( )  $S_1$  possui apenas dois elementos distintos  
 D. ( )  $S_1 \cap S_2$  é unitário  
 E. ( )  $S_1 \cap S_2$  possui dois elementos
- 27.** (ITA-90) A igualdade  $1 + |z| = |1 + z|$ , onde  $z \in \mathbb{C}$ , é satisfeita:  
 A. ( ) Para todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\text{Re}z = 0$  e  $\text{Im}z < 0$ .  
 B. ( ) Para todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\text{Re}z \geq 0$  e  $\text{Im}z < 0$ .  
 C. ( ) Para todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| = 1$ .  
 D. ( ) Para todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\text{Im}z = 0$ .  
 E. ( ) Para todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| < 1$ .  
 Nota:  $\mathbb{C}$  denota o conjunto dos números complexos,  $\text{Re}z$  a parte real de  $z$  e  $\text{Im}z$  a parte imaginária de  $z$ .
- 28.** (ITA-91) Sejam  $w = a + bi$  com  $b \neq 0$  e  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . O conjunto dos números complexos  $z$  que verificam a equação  $wz + \overline{wz} + c = 0$ , descreve:  
 A. ( ) Um par de retas paralelas.  
 B. ( ) Uma circunferência.  
 C. ( ) Uma elipse.  
 D. ( ) Uma reta com coeficiente angular  $m = a/b$ .  
 E. ( ) n.d.a.
- 29.** (ITA-91) Se  $z = \cos t + i \sin t$ , onde  $0 < t < 2\pi$ , então podemos afirmar que  $w = \frac{1+z}{1-z}$  é dado por:  
 A. ( )  $i \cotg t/2$                       B. ( )  $i \tg t/2$   
 C. ( )  $i \cotg t$                       D. ( )  $i \tg t$   
 E. ( ) n.d.a.
- 30.** (ITA-92) Considere o número complexo  $z = a + 2i$  cujo argumento está no intervalo  $(0, \pi/2)$ . Sendo  $S$  o conjunto dos valores de  $a$  para os quais  $z^6$  é um número real podemos afirmar que o produto dos elementos de  $S$  vale:  
 A. ( ) 4                      B. ( )  $\frac{4}{\sqrt{3}}$                       C. ( ) 8  
 D. ( )  $\frac{8}{\sqrt{3}}$                       E. ( ) n.d.a.
- 31.** (ITA-92) Sabe-se que  $2 \left( \cos \frac{\pi}{20} + i \sin \frac{\pi}{20} \right)$  é uma raiz quintupla de  $w$ . Seja  $S$  o conjunto de todas as raízes de  $z^4 - 2z^2 + \frac{w - 16\sqrt{2}i}{8\sqrt{2}} = 0$ . Um subconjunto de  $S$  é:  
 A. ( )  $\left\{ 2^{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8} \right), 2^{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \right\}$   
 B. ( )  $\left\{ 2^{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right), 2^{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right) \right\}$

C. ( )  $\left\{ 2^{\frac{1}{4}} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right), 2^{\frac{1}{4}} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\}$

D. ( )  $\left\{ 2^{\frac{1}{4}} \left( \cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8} \right), 2^{\frac{1}{4}} \left( \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \right\}$

E. ( ) n.d.a.

**32.** (ITA-93) Seja  $a$  o módulo do número complexo  $(2 - 2\sqrt{3}i)^{10}$ . Então o valor de  $x$  que verifica a igualdade  $(4a)^x = a$  é:

- A. ( )  $10/11$     B. ( )  $-2$     C. ( )  $5/8$   
D. ( )  $3/8$     E. ( )  $1/5$

**33.** (ITA-93) Resolvendo a equação  $z^2 = \overline{2+z}$  no conjunto dos números complexos, conclui-se sobre as suas soluções que:

- A. ( ) nenhuma delas é um número inteiro  
B. ( ) a soma delas é 2  
C. ( ) estas são em número de 2 e são distintas  
D. ( ) estas são em número de 4 e são 2 a 2 distintas  
E. ( ) uma delas é da forma  $z = bi$  com  $b$  real não nulo.

**Nota:** Por  $\bar{a}$  denotamos o conjugado do número complexo  $a$ .

**34.** (ITA-94) Sejam  $x$  e  $y$  números reais, com  $x \neq 0$ , satisfazendo  $(x + iy)^2 = (x + y)i$ . Então:

- A. ( )  $x$  e  $y$  são números irracionais  
B. ( )  $x > 0$  e  $y < 0$   
C. ( )  $x$  é uma raiz da equação  $x^3 + 3x^2 + 2x - 6 = 0$   
D. ( )  $x < 0$  e  $y = x$   
E. ( )  $x^2 + xy + y^2 = 1/2$

**35.** (ITA-94) Considere as afirmações:

- 1)  $(\cos \theta + i \sin \theta)^{10} = \cos(10\theta) + i \sin(10\theta)$ , para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ .
- 2)  $(5i) / (2+i) = 1 + 2i$ .
- 3)  $(1-i)^4 = -4$ .
- 4) Se  $z^2 = (\bar{z})^2$  então  $z$  é real ou imaginário puro.
- 5) O polinômio  $x^4 + x^3 - x - 1$  possui apenas raízes reais.

Podemos concluir que:

- A. ( ) Todas são verdadeiras  
B. ( ) Apenas quatro são verdadeiras.  
C. ( ) Apenas três são verdadeiras.  
D. ( ) Apenas duas são verdadeiras  
E. ( ) Apenas uma é verdadeira

**36.** (ITA-95) Seja  $z$  um número complexo satisfazendo  $\operatorname{Re} z > 0$  e  $(z+i)^2 + |\bar{z}+i|^2 = 6$ .

Se  $n$  é o menor natural para o qual  $z^n$  é um imaginário puro, então  $n$  é igual a:

- A. ( ) 1    B. ( ) 2    C. ( ) 3  
D. ( ) 4    E. ( ) 5

**37.** (ITA-95) Sejam  $z_1$  e  $z_2$  números complexos com  $|z_1| = |z_2| = 4$ . Se 1 é uma raiz da equação  $z_1 z^6 + z_2 z^3 - 8 = 0$  então a soma das raízes reais é igual a:

- A. ( )  $S \subset [-3, 3]$     B. ( )  $S$  é vazio  
C. ( )  $1 - 2^{1/3}$     D. ( )  $1 + 3^{1/2}$   
E. ( )  $-1 + 3^{1/2}$

**38.** (ITA-96) O valor da potência  $\left( \frac{\sqrt{2}}{1+i} \right)^{93}$  é:

- A. ( )  $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$     B. ( )  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$   
C. ( )  $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$     D. ( )  $(\sqrt{2})^{93}i$   
E. ( )  $(\sqrt{2})^{93} + i$

**39.** (ITA-97) Considere os números complexos

$$z = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad \text{e} \quad w = 1 + i\sqrt{3}.$$

$$\text{Se } m = \left| \frac{w^6 + 3z^4 + 4i}{z^2 + w^3 + 6 - 2i} \right|^2,$$

então  $m$  vale

- A. ( ) 34    B. ( ) 26    C. ( ) 16  
D. ( ) 4    E. ( ) 1.

**40.** (ITA-97) Considere, no plano complexo, um hexágono regular centrado em  $z_0 = i$ . Represente por  $z_1, z_2, \dots, z_6$  seus vértices, quando percorridos no sentido anti-horário. Se  $z_1 = 1$  então  $2z_3$  é igual a

- A. ( )  $2 + 4i$   
B. ( )  $(\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+3)i$   
C. ( )  $\sqrt{6} + (\sqrt{2}+2)i$   
D. ( )  $(2\sqrt{3}-1) + (2\sqrt{3}+3)i$   
E. ( )  $\sqrt{2} + (\sqrt{6}+2)i$

**41.** (ITA-97) Seja  $S$  o conjunto dos números complexos que satisfazem simultaneamente, às equações:

$$|z-3i| = 3 \quad \text{e} \quad |z+i| = |z-2-i|$$

O produto de todos os elementos de  $S$  é igual a

- A. ( )  $-2 + i\sqrt{3}$     B. ( )  $2\sqrt{2} + 3i\sqrt{3}$   
C. ( )  $3\sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$     D. ( )  $-3 + 3i$   
E. ( )  $-2 + 2i$

**42.** (ITA-86) Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  números reais que nesta ordem formam uma progressão aritmética de soma 12. Sabendo-se que os restos das divisões de  $x^{10} + 8x^8 + ax^5 + bx^3 + cx$  por  $x - 2$  e  $x + 2$  são iguais, então a razão desta progressão aritmética é:

- A. ( ) 1      B. ( )  $\frac{28}{5}$       C. ( )  $\frac{37}{5}$   
D. ( )  $\frac{44}{15}$       E. ( )  $-3$

**43.** (ITA-87) Considere  $Q(x)$  e  $R(x)$ , respectivamente, o quociente e o resto da divisão de um polinômio  $A(x)$  pelo trinômio  $B(x) = -x^2 + 5x - 6$ . Admita que o grau de  $A(x)$  é quatro e que os restos da divisão de  $A(x)$  por  $x + 1$  e  $x - 2$  são, respectivamente, 3 e  $-1$ . Supondo também que  $Q(x)$  é divisível por  $x + 1$ , obtenha  $R(x)$ .

**44.** (ITA-88) Sejam  $A(x)$  e  $B(x)$  polinômios de grau maior que um e admita que existam polinômios  $C(x)$  e  $D(x)$  tais que a igualdade abaixo se verifica  $A(x) \cdot C(x) + B(x) \cdot D(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . Prove que  $A(x)$  não é divisível por  $B(x)$ .

**45.** (ITA-90) Sabendo-se que  $3x - 1$  é fator de

$$12x^3 - 19x^2 + 8x - 1$$

então as soluções reais da equação:

$$12(3^{3x}) - 19(3^{2x}) + 8(3^x) - 1 = 0$$

somam:

- A. ( )  $-\log_3 12$       B. ( ) 1      C. ( )  $-\log_3 12$   
D. ( )  $-1$       E. ( )  $\log_3 7$

**46.** (ITA-91) Na divisão de

$$P(x) = a_5x^5 + 2x^4 + a_4x^3 + 8x^2 - 32x + a_3$$

por  $x - 1$ , obteve-se o quociente:

$$Q(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

e o resto  $-6$ . Sabe-se que  $(b_4, b_3, b_2, b_1)$  é uma progressão geométrica de razão  $q > 0$  e  $q \neq 1$ . Podemos afirmar:

- A. ( )  $b_3 + a_3 = 10$       B. ( )  $b_4 + a_4 = 6$   
C. ( )  $b_3 + b_0 = 12$       D. ( )  $b_4 + b_1 = 16$   
E. ( ) n.d.a.

**47.** (ITA-95) A divisão de um polinômio  $P(x)$  por  $x^2 - x$  resulta no quociente  $6x^2 + 5x + 3$  e resto  $-7x$ . O resto da divisão de  $P(x)$  por  $2x + 1$  é igual a:

- A. ( ) 1      B. ( ) 2      C. ( ) 3  
D. ( ) 4      E. ( ) 5

**48.** (ITA-97) Sejam  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$  e  $p_3(x)$  polinômios na variável real  $x$  de graus  $n_1, n_2$  e  $n_3$ , respectivamente, com  $n_1 > n_2 > n_3$ . Sabe-se que  $p_1(x)$  e  $p_2(x)$  são

divisíveis por  $p_3(x)$ . Seja  $r(x)$  o resto da divisão de  $p_1(x)$ . Considere as afirmações:

- I.  $r(x)$  é divisível por  $p_3(x)$ .  
II.  $p_1(x) - \frac{1}{2} p_2(x)$  é divisível por  $p_3(x)$ .  
III.  $p_1(x) r(x)$  é divisível por  $[p^3(x)]^2$ .  
Então,  
A. ( ) apenas (I) e (II) são verdadeiras.  
B. ( ) apenas (II) é verdadeira.  
C. ( ) apenas (I) e (III) são verdadeiras.  
D. ( ) todas as afirmações são verdadeiras.  
E. ( ) todas as afirmações são falsas.

### Frente 1 – IME

**49.** (IME-85) Sejam  $z_1$  e  $z_2$  complexos de raios vetores  $OP_1$  e  $OP_2$ , respectivamente.

Mostre que  $OP_1$  e  $OP_2$  são perpendiculares se e somente se  $z_1 z_2$  é um imaginário.

Notação:  $\bar{z}$  é o conjugado de  $z$ .

**50.** (IME-85) Sabe-se que as raízes do polinômio abaixo são todas reais e distintas.

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0; \text{ onde}$$

$$a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n; a_n \neq 0$$

Mostre que a derivada  $f'(x)$  possui também todas as suas raízes reais e distintas.

**51.** (IME-86) Sabendo-se que  $x$  é um número real,  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq \text{arc cos } x \leq \pi$  e  $n$  é um número inteiro positivo, mostre que a expressão:  $f_n(x) = \cos(n \text{ arc cos } x)$  pode ser desenvolvida como um polinômio em  $x$ , de grau  $n$ , cujo coeficiente do termo de maior grau é igual a  $2^{n-1}$ .

**52.** (IME-87) Dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , não nulos, são tais que:

$$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$$

Mostre que  $\frac{z_2}{z_1}$  é imaginário puro.

**53.** (IME-87) Determine as soluções reais do sistema:

$$\begin{cases} x^2 y + xy^2 = 70 \\ (x + y) \cdot (x^2 + y^3) = 203 \end{cases}$$

**54.** (IME-87) Seja  $p(x)$  um polinômio de grau 16 e coeficientes inteiros.

a) sabendo-se que  $p(x)$  assume valores ímpares para  $x = 0$  e  $x = 1$ , mostre que  $p(x)$  não possui raízes inteiras.

b) sabendo-se que  $p(x) = 7$  para quatro valores de  $x$ , inteiros e diferentes, para quantos valores inteiros de  $x$ ,  $p(x)$  assume o valor 14?

55. (IME-88)

- a) Mostre que se:  
 $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_1x^3 + a_0x^4$ ,  
 então existe um polinômio  $g(x)$  do 2º grau, tal  
 que  $p(x) = x^2g(x + x^{-1})$ .
- b) Determine todas as raízes do polinômio  
 $p(x) = 1 + 4x + 5x^2 + 4x^3 + x^4$ .

56. (IME-88) Considere os seguintes conjuntos de números complexos:

- $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \text{Im}(z) > 0\}$  e  
 $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) = 1, \text{Im}(z) > 0\}$ ,  
 onde  $\text{Re}(z)$  e  $\text{Im}(z)$  são as partes real e imaginária  
 do número complexo  $z$ , respectivamente.

- a) Mostre que para cada  $z \in A$ , o número  $\frac{2z}{z+1}$   
 pertence a  $B$ .
- b) Mostre que cada  $w \in B$  pode ser escrito da  
 forma  $\frac{2z}{z+1}$  para algum  $z \in A$ .

57. (IME-89) Mostre que todas as raízes da equação  
 $(z+1)^5 + z^5 = 0$

pertencem a uma mesma reta paralela ao eixo  
 imaginário.

58. (IME-90) Resolva a equação:  $z^5 = \bar{z}$ , onde  $\bar{z}$  é o  
 conjugado do número complexo  $z$ .

59. (IME-90) Para que valores de  $p$  a equação:  
 $x^4 + px + 3 = 0$ ,

tem raiz dupla? Determine, em cada caso, as raízes  
 da equação.

60. (IME-91)

- a) Sendo dada a equação  
 $x^3 + px + q = 0$ ,  $p, q \in \mathbb{R}$ ,  
 que relação deverá existir entre  $p$  e  $q$  para que  
 uma das raízes seja igual ao produto das outras  
 duas?
- b) Mostre que a equação  $x^3 - 6x - 4 = 0$ , satisfaz a  
 relação encontrada e, em seguida, encontre as  
 suas raízes.

61. (IME-92) Prove que  $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$ , onde  
 $Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$ .

62. (IME-93) Considere a função

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

onde  $a, b$  e  $c$  são inteiros positivos. Sabendo-se que  
 uma das raízes dessa função é igual a 22, calcular  
 os menores valores de  $a, b$  e  $c$  para que exista um  
 ponto de máximo e um ponto de mínimo reais.

63. (IME-93) Faça o que se pede:

- a) Calcule o argumento do seguinte número  
 complexo  $i(1+i)$ ;
- b) Escreva sob forma trigonométrica o número  
 complexo  $Z = 1 + i\sqrt{3}$ .

64. (IME-94) Considere os números complexos  
 $z = x + y \cdot i$  e  $w = y - x \cdot i$ , cujos módulos são tais  
 que  $|z| = e^{\frac{|w| \cdot \sqrt{3}}{x}}$ ,  $|w| = e^{\frac{|z|}{y}}$ , onde  $e$  é base dos  
 logaritmos neperianos. Obter a forma polar de  $z^2$ .

65. (IME-95) Dado  $Z = \frac{1}{\sqrt{-7+24i}}$ , calcule as partes  
 real e imaginária de  $Z$ .

66. (IME-95) Prove que o polinômio  
 $P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + \dots + x^{111} + 1$   
 é divisível por  $x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x^1 + 1$ .

67. (IME-96) Sejam  $w_0 = 1$ ,  $w_1 = j$ ,  $w_2 = j^2$  as raízes  
 cúbicas da unidade no plano complexo (considere  
 $w_1$  o número complexo de módulo 1 e argumento  
 $\frac{2\pi}{3}$ ). Sabendo que se  $c \in \mathbb{C}$ , a rotação  $R$  em torno

do ponto  $c$  e amplitude igual a  $\frac{\pi}{3}$  é dada por

$$R(z) = -j^2z - jc, \forall z \in \mathbb{C} - \{c\}$$

- pede-se:
- a) determinar as relações existentes entre  $a, b, c, j, j^2$ , onde  $a, b \in \mathbb{C}$ , de modo que o triângulo  $a, b, c$ , seja equilátero;
- b) determinar  $z$  para que o triângulo  $i, z, iz$  seja equilátero.

$$\text{Dado: } i = \sqrt{-1}$$

68. (IME-96) Dados dois trinômios do segundo grau:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (\text{I}); \quad y = a'x^2 + b'x + c' \quad (\text{II})$$

Considere, sobre o eixo  $Ox$ , os pontos  $A$  e  $B$  cujas  
 abscissas são as raízes do trinômio (I) e  $A'B'$  os  
 pontos cujas abscissas são as raízes do trinômio  
 (II).

Determine a relação que deve existir entre os  
 coeficientes  $a, b, c, a', b', c'$ , de modo que  $A'B'$   
 divida o segmento  $AB$  harmonicamente.

69. (IME-97) Determine o resto da divisão do  
 polinômio  $(\cos \varphi + x \cdot \text{sen } \varphi)^n$  por  $(x^2 + 1)$ , onde  $n$  é  
 um número natural.

Frente 2 – ITA

- 70.** (ITA-87) O número de arranjos de  $n + 2$  objetos tomados cinco a cinco vale  $180n$ . Nestas condições, concluímos que:
- A. ( )  $n$  é um número ímpar.  
 B. ( )  $n$  é um número primo.  
 C. ( )  $n$  está compreendido entre 100 e 200.  
 D. ( )  $n$  é um número par.  
 E. ( )  $n$  é divisível por 5.
- 71.** (ITA-91) Uma escola possui 18 professores sendo 7 de Matemática, 3 de Física e 4 de Química. De quantas maneiras podemos formar comissões de 12 professores de modo que cada uma contenha exatamente 5 professores de Matemática, no mínimo 2 de Física e no máximo 2 de Química?
- A. ( ) 875      B. ( ) 1.877      C. ( ) 1.995  
 D. ( ) 2.877      E. ( ) n.d.a.
- 72.** (ITA-93) Posuo 3 vasos idênticos e desejo ornamentá-los com 18 rosas, sendo 10 vermelhas e 8 amarelas. Desejo que um dos vasos tenha 7 rosas e os outros dois no mínimo 5. Cada um deverá ter, 2 rosas vermelhas e 1 amarela, pelo menos. Quantos arranjos distintos poderei fazer usando as 18 rosas?
- A. ( ) 10      B. ( ) 11      C. ( ) 12  
 D. ( ) 13      E. ( ) 14
- 73.** (ITA-93) Analise as afirmações classificando-as em verdadeiras ou falsas:
- I. O número de maneiras que podemos distribuir 5 prêmios iguais a 7 pessoas de modo que cada pessoa premiada receba no máximo um prêmio é 21.  
 II. O número de maneiras que podemos distribuir 5 prêmios iguais a 7 pessoas de modo que 4 e apenas 4 sejam premiadas é 140.  
 III. Para todo natural  $n$ ,  $n \geq 5$ ,  $\binom{n}{5} = \binom{n}{n-5}$
- Você concluiu que:
- A. ( ) Apenas (I) é verdadeira  
 B. ( ) Apenas (II) e (III) são verdadeiras  
 C. ( ) Apenas (III) é verdadeira  
 D. ( ) Todas são verdadeiras  
 E. ( ) Todas são falsas.
- 74.** (ITA-94) Quantos anagramas com 6 caracteres distintos podemos formar usando as letras da palavra QUEIMADO, anagramas estes que contenham duas consoantes e que, entre as consoantes, haja pelo menos uma vogal?
- A. ( ) 7.200      B. ( ) 7.000      C. ( ) 4.800  
 D. ( ) 3.600      E. ( ) 2.400

- 75.** (ITA-95) Considere todos os números de cinco algarismos formados pela justaposição de 1, 3, 5, 7, e 9 em qualquer ordem, sem repetição. A soma de todos esses números está entre:
- A. ( )  $5 \times 10^6$  e  $6 \times 10^6$   
 B. ( )  $6 \times 10^6$  e  $7 \times 10^6$   
 C. ( )  $7 \times 10^6$  e  $8 \times 10^6$   
 D. ( )  $9 \times 10^6$  e  $10 \times 10^6$   
 E. ( )  $10 \times 10^6$  e  $11 \times 10^6$
- 76.** (ITA-96) Três pessoas, A, B e C, chegam no mesmo dia a uma cidade onde há cinco hotéis  $H_1, H_2, H_3, H_4$  e  $H_5$ . Sabendo que cada hotel tem pelo menos três vagas, qual/quais das seguintes afirmações, referentes à distribuição das três pessoas nos cinco hotéis, é/são correta(s)?
- I. Existe um total de 120 combinações.  
 II. Existe um total de 60 combinações se cada pessoa pernoitar num hotel diferente.  
 III. Existe um total de 60 combinações se duas e apenas duas pessoas pernoitarem no mesmo hotel.
- A. ( ) Todas as afirmações são verdadeiras.  
 B. ( ) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.  
 C. ( ) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.  
 D. ( ) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.  
 E. ( ) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
- 77.** (ITA-97) Seja  $n \in \mathbb{N}$  com  $n > 1$  fixado. Considere o conjunto
- $$A = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 < q < n \right\}$$
- Definimos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(x) = [\cos(n! \pi x)]^{2n}$
- Se  $f(A)$  denota a imagem do conjunto  $A$  pela função  $f$ , então
- A. ( )  $f(A) = ]-1, 1[$       B. ( )  $f(A) = [0, 1]$   
 C. ( )  $f(A) = \{1\}$       D. ( )  $f(A) = \{0\}$   
 E. ( )  $f(A) = \{0, 1\}$

- 78.** (ITA-95) Seja
- $$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n!} + \operatorname{sen} \left( \frac{n! \pi}{6} \right); n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Qual conjunto abaixo é tal que sua intersecção com  $A$  dá o próprio  $A$ ?

A. ( )  $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$       B. ( )  $(-\infty, -2]$   
 C. ( )  $[-2, 2]$       D. ( )  $[-2, 0]$   
 E. ( )  $[0, 2]$

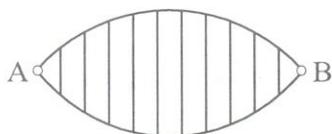
Frente 2 – IME

**79.** (IME-85) Um exame de vestibular se constitui de 10 provas distintas, 3 das quais da área de matemática. Determine de quantas formas é possível programar a seqüência das 10 provas, de maneira que duas provas de área de matemática não se sucedem.

**80.** (IME-86) 12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos 12 cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de cinco cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

**81.** (IME-88) Considere um torneio de xadrez com 10 participantes. Na primeira rodada cada participante joga somente uma vez, de modo que há 5 jogos realizados simultaneamente. De quantas formas distintas esta primeira rodada pode ser realizada? Justifique sua resposta.

**82.** (IME-90) Ligando as cidades A e B existem duas estradas principais. Dez estradas secundárias de mão-dupla, ligam-se as duas estradas principais como mostra a figura. Quantos caminhos, sem auto-interseções, existem de A até B.



Obs.: Caminho sem auto-interseções é um caminho que não passa por um ponto duas ou mais vezes.

**83.** (IME-91) Dado o conjunto  $A = \{1, 2, 3, \dots, 102\}$ , pede-se o número de subconjuntos de A, com três elementos, tais que a soma destes seja um múltiplo de três.

**84.** (IME-92) Calcule quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem no sistema de base 7.

**85.** (IME-93) Numa escola há 15 comissões, todas com igual número de alunos. Cada aluno pertence a duas comissões e cada duas comissões possui exatamente um membro comum.

Todos os alunos participam.

a) Quantos alunos tem a escola?

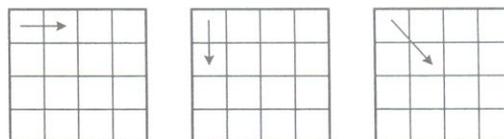
b) Quantos alunos participam de cada comissão?

**86.** (IME-93) Prove, por indução, que:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^n b^n$$

para  $n \in \mathbb{N}$ .

**87.** (IME-96) É dado um tabuleiro quadrado  $4 \times 4$ . Deseja-se atingir o quadrado inferior direito a partir do quadrado superior esquerdo. Os movimentos permitidos são representados pelas setas:



De quantas maneiras isto é possível?

Frente 3 – ITA

**88.** (ITA-86) Considere um prisma hexagonal regular tal que a razão entre a aresta da base  $a$  e a aresta lateral  $\ell$  é  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . Sabendo-se que se a aresta da base for aumentada de 2 cm, o volume  $V$  do prisma ficará aumentado de  $108 \text{ cm}^3$  considerando que a aresta lateral permanece a mesma, podemos afirmar que o volume do prisma é:

A. ( )  $10 \text{ cm}^3$     B. ( )  $12 \text{ cm}^3$     C. ( )  $\frac{3}{2} \text{ cm}^3$

D. ( )  $36 \text{ cm}^3$     E. ( )  $\frac{27}{2} \text{ cm}^3$

**89.** (ITA-87) Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

- A. ( ) Três pontos, distintos dois a dois, determinam um plano.  
 B. ( ) Um ponto e uma reta determinam um plano.  
 C. ( ) Se dois planos distintos tem um ponto em comum, tal ponto é único.  
 D. ( ) Se uma reta é paralela a um plano e não está contida neste plano, então ela é paralela a qualquer reta desse plano.  
 E. ( ) Se  $\alpha$  é o plano determinado por duas retas concorrentes  $r$  e  $s$ , então toda reta  $m$  desse plano, que é paralela à  $r$ , não será paralela à reta  $s$ .

**90.** (ITA-87) Suponha que (I) é um cubo, tal que a medida de sua diagonal é  $a$  cm e admita que (II) é um cubo, cujo volume é o triplo do volume de (I). Designado por  $x$  a medida da diagonal de (II), concluímos que:

A. ( )  $x = a\sqrt{2}$  cm

B. ( )  $x = a(1 + \sqrt{2})$  cm

C. ( )  $x = a\sqrt[3]{3}$  cm

D. ( )  $x = a\sqrt{3}$  cm

E. ( )  $x = \sqrt[3]{3}ac$  m



- 91.** (ITA-87) Seja (T) um cubo com aresta de medida  $a$ . Considere (P) a pirâmide que tem vértice no centro de uma face de (T) e como base a face oposta de (T).
- A. ( )  $x = a^2 \cdot \sqrt{3}$   
 B. ( )  $x = a^2 \cdot \sqrt{5}$   
 C. ( )  $x = (a+1)^2 \cdot \sqrt{5}$   
 D. ( )  $x = (a+1)^2 \cdot \sqrt{3}$   
 E. ( )  $x = (\sqrt{3} + \sqrt{5})a^2$
- 92.** (ITA-87) Seja (P) um paralelepípedo retângulo de dimensões dadas por três números consecutivos. Se a área total de (P) é  $10 \text{ m}^2$ , então seu volume é:
- A. ( )  $\sqrt{3} \text{ m}^3$     B. ( )  $\sqrt{5} \text{ m}^3$     C. ( )  $\sqrt{7} \text{ m}^3$   
 D. ( )  $\sqrt{2} \text{ m}^3$     E. ( )  $2\sqrt{3} \text{ m}^3$
- 93.** (ITA-87) Considere (P) um prisma reto de base quadrada, cuja altura mede 3 m e tem área de  $80 \text{ m}^2$ . O lado dessa base quadrada mede:
- A. ( ) 1 m    B. ( ) 8 m    C. ( ) 4 m  
 D. ( ) 6 m    E. ( ) 16 m
- 94.** (ITA-88) As arestas laterais de um pirâmide regular de 12 faces laterais tem comprimento  $\ell$ . O raio do círculo circunscrito ao polígono da base desta pirâmide mede  $\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$ . Então o volume desta pirâmide vale:
- A. ( )  $3\sqrt{2} \ell^3$     B. ( )  $2\ell^3$     C. ( )  $\frac{\sqrt{3}}{2}\ell^3$   
 D. ( )  $\sqrt{2} \ell^3$     E. ( )  $\frac{\sqrt{2}}{4}\ell^3$
- 95.** (ITA-88) Considere uma pirâmide qualquer de altura  $h$  e de base  $B$ . Traçando-se um plano paralelo à base  $B$ , cuja distância ao vértice da pirâmide é  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}h$  cm, obtém-se uma secção plana de área  $\sqrt{7} \text{ cm}^2$ . Então a área da base  $B$  da pirâmide vale:
- A. ( )  $\sqrt{35} \text{ cm}^2$     B. ( )  $\frac{2\sqrt{5}}{3} \text{ cm}^2$   
 C. ( )  $\frac{7\sqrt{7}}{5} \text{ cm}^2$     D. ( )  $\frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \text{ cm}^2$   
 E. ( )  $\frac{7}{\sqrt{5}} \text{ cm}^2$
- 96.** (ITA-89) O lado da base maior de um tronco de pirâmide hexagonal regular, com bases paralelas, mede  $L$  cm. A altura do tronco é igual à metade do apótema desta mesma base. As faces laterais formam um ângulo de 30 graus com a base. Calcule o apótema ( $a$ ), o lado ( $\ell$ ), ambos da base menor, a altura ( $h$ ) da face lateral e a área total ( $s$ ) do tronco, todos em função de  $L$ .
- 97.** (ITA-90) Considere um prisma triangular regular cuja aresta da base mede  $x$  cm. Sua altura é igual ao menor lado de um triângulo ABC inscritível num círculo de raio  $x$  cm. Sabendo-se que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm, o volume do prisma em  $\text{cm}^3$  é:
- A. ( )  $\frac{\sqrt{2}}{3} x^3$     B. ( )  $\frac{2\sqrt{2}}{5} x^3$   
 C. ( )  $\frac{3\sqrt{3}}{10} x^3$     D. ( )  $\frac{3\sqrt{3}}{10} x^3$   
 E. ( )  $\frac{\sqrt{3}}{10} x^3$
- 98.** (ITA-90) Seja  $V$  o vértice de uma pirâmide com base triangular ABC. O segmento AV, de comprimento unitário, é perpendicular à base. Os ângulos das faces laterais, no vértice V, são todos de 45 graus. Deste modo, o volume da pirâmide será igual a:
- A. ( )  $\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-2}$     B. ( )  $\frac{1}{6}\sqrt{2-\sqrt{2}}$   
 C. ( )  $\frac{1}{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}$     D. ( )  $\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-1}$   
 E. ( ) n.d.a.
- 99.** (ITA-91) As arestas da base de uma pirâmide triangular regular medem  $\ell$  cm e as faces laterais são triângulos retângulos. O volume desta pirâmide é:
- A. ( )  $\frac{\sqrt{3}}{6}\ell^3 \text{ cm}^3$     B. ( )  $\frac{\sqrt{3}}{12}\ell^3 \text{ cm}^3$   
 C. ( )  $\frac{\sqrt{3}}{24}\ell^3 \text{ cm}^3$     D. ( )  $\frac{\sqrt{2}}{12}\ell^3 \text{ cm}^3$   
 E. ( ) n.d.a.
- 100.** (ITA-93) A área lateral de uma pirâmide quadrangular regular de altura 4 m e de área da base  $64 \text{ m}^2$  vale:
- A. ( )  $128 \text{ m}^2$     B. ( )  $64\sqrt{2} \text{ m}^2$   
 C. ( )  $135 \text{ m}^2$     D. ( )  $60\sqrt{5} \text{ m}^2$   
 E. ( )  $32(\sqrt{2}+1) \text{ m}^2$

**101.** (ITA-93) São dados dois cubos I e II de áreas totais  $S_1$  e  $S_2$  e de diagonais  $d_1$  e  $d_2$ , respectivamente. Sabendo-se que  $S_1 - S_2 = 54 \text{ m}^2$  e que  $d_2 = 3 \text{ m}$ , então o valor da razão  $d_1/d_2$  é:

- A. ( )  $3/2$     B. ( )  $5/2$     C. ( )  $2$   
D. ( )  $7/3$     E. ( )  $3$

**102.** (ITA-94) Um tetraedro regular tem área total igual a  $6\sqrt{3} \text{ cm}^2$ . Então sua altura, em cm, é igual a:

- A. ( )  $2$     B. ( )  $3$     C. ( )  $2\sqrt{2}$   
D. ( )  $3\sqrt{2}$     E. ( )  $2\sqrt{3}$

**103.** (ITA-94) Um tronco de pirâmide regular tem como bases triângulos equiláteros, cujos lados medem, respectivamente,  $2 \text{ cm}$  e  $4 \text{ cm}$ . Se a aresta lateral do tronco mede  $3 \text{ cm}$ , então o valor de sua altura  $h$ , em cm, é tal que:

- A. ( )  $\sqrt{7} < h < \sqrt{8}$     B. ( )  $\sqrt{6} < h < \sqrt{7}$   
C. ( )  $2\sqrt{3} < h < 3\sqrt{3}$     D. ( )  $1 < h < \sqrt{2}$   
E. ( )  $2\sqrt{2} < h < 3\sqrt{2}$

**104.** (ITA-95) Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede  $3 \text{ cm}$  e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume deste prisma, em  $\text{cm}^3$ , é:

- A. ( )  $27\sqrt{3}$     B. ( )  $13\sqrt{2}$     C. ( )  $12$   
D. ( )  $54\sqrt{3}$     E. ( )  $17\sqrt{5}$

**105.** (ITA-95) Dada uma pirâmide regular triangular, sabe-se que sua altura mede  $3a \text{ cm}$ , onde  $a$  é a medida da aresta de sua base. Então, a área total desta pirâmide, em  $\text{cm}^2$ , vale:

- A. ( )  $\frac{a^2\sqrt{327}}{4}$     B. ( )  $\frac{a^2\sqrt{109}}{2}$   
C. ( )  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$     D. ( )  $\frac{a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{33})}{2}$   
E. ( )  $\frac{a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{109})}{4}$

**106.** (ITA-96) A aresta de um cubo mede  $x \text{ cm}$ . A razão entre o volume e a área total do poliedro cujos vértices são os centros das faces do cubo será:

- A. ( )  $\frac{\sqrt{3}}{9} x \text{ cm}$     B. ( )  $\frac{\sqrt{3}}{18} x \text{ cm}$   
C. ( )  $\frac{\sqrt{3}}{6} x \text{ cm}$     D. ( )  $\frac{\sqrt{3}}{3} x \text{ cm}$   
E. ( )  $\frac{\sqrt{3}}{2} x \text{ cm}$

**107.** (ITA-96) As dimensões  $x$ ,  $y$  e  $z$  de um paralelepípedo retângulo estão em progressão aritmética. Sabendo que a soma dessas medidas é igual a  $33 \text{ cm}$  e que a área total do paralelepípedo é igual a  $694 \text{ cm}^2$ , então o volume deste paralelepípedo, em  $\text{cm}^3$ , é igual a:

- A. ( )  $1.200$     B. ( )  $936$     C. ( )  $1.155$   
D. ( )  $728$     E. ( )  $834$

**108.** (ITA-97) Dentro de um tronco de pirâmide quadrangular, considera-se uma pirâmide regular cuja base é a base maior do tronco e cujo vértice é o centro da base menor do tronco. As arestas das bases medem  $a \text{ cm}$  e  $2a \text{ cm}$ . A áreas laterais do tronco e da pirâmide são iguais. A altura (em cm) do tronco mede

- A. ( )  $(a\sqrt{3})/\sqrt{5}$     B. ( )  $(a\sqrt{35})/10$   
C. ( )  $(a\sqrt{3})/(2\sqrt{5})$     D. ( )  $(a\sqrt{35})/\sqrt{10}$   
E. ( )  $(a\sqrt{7})/\sqrt{5}$

Frente 3 – IME

**109.** (IME-85) Em um plano  $\pi$  dá-se uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ , um ponto fixo  $A$  sobre ela e um diâmetro variável  $BC$  tal que o ângulo  $\widehat{ABC}$  seja igual a  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ). Sobre a perpendicular a  $\pi$  em  $A$ , marca-se um ponto  $V$  tal que  $AV = 2r$ . Considere-se o tetraedro  $ABCV$ .

- Calcule em função de  $r$  e  $\theta$  as arestas do tetraedro;
- Mostre que a soma dos quadrados destas arestas é constante quando  $\theta$  varia.
- Qual o lugar geométrico do ponto  $H$  de  $\pi$ , pé da altura  $VH$  do triângulo  $VBC$ ?
- Para que posição de  $BC$  a área do triângulo  $VBC$  é máxima e qual o valor desse máximo?
- Calcule em função de  $\theta$ , a tangente  $\alpha$ , onde  $\alpha$  é igual ao ângulo  $\widehat{VHA}$ .
- Deduza o valor de  $\theta$  que corresponde ao mínimo do diedro de aresta  $BC$ .
- Calcule  $\theta$  para que se tenha tangente  $\alpha$  igual a  $4/\sqrt{3}$ .

**110.** (IME-85) Dá-se um plano  $\pi$  e dois pontos  $A$  e  $B$  não pertencentes a  $\pi$ , situados em um mesmo semi-espaco de  $\pi$ , sendo:

- $AB = \ell$ ;
- $a$  e  $b$  as cotas de  $A$  e  $B$  em relação a  $\pi$ ;
- $a < b$ ;

Determine um triângulo  $ABC$  isósceles, retângulo em  $C$ , tal que o vértice  $C$  pertença ao plano  $\pi$ . Discuta a possibilidade da existência desse triângulo e o número de soluções.

- 111.** (IME-86) Seja um paralelepípedo retângulo de bases  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$ , cujas arestas  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  e  $DD'$  tenham por comprimento  $h$  e os lados da base sejam, respectivamente,  $AB = a$  e  $AD = b$ .  
Por  $DD'$  considere dois planos  $DD'MM'$  e  $DD'NN'$ .
- Determine as distâncias  $AM = x$  e  $CN = y$  para que esses dois planos dividam o paralelepípedo em 3 partes de mesmo volume.
  - Determine a razão entre os volumes dos sólidos  $MBNM'B'N'$  e  $MDNM'D'N'$ .
  - Encontre a relação entre  $a$  e  $b$ , que estabelece a condição necessária e suficiente para que o diedro de arestas  $MM'$ , cujas faces passem por  $DD'$  e  $NN'$ , seja reto.
- 112.** (IME-86) Dado um tronco de pirâmide triangular de bases paralelas, demonstre que as retas que ligam os vértices da base inferior aos pontos médios dos lados opostos da base superior são concorrentes.
- 113.** (IME-87) Num plano  $\pi$  tem-se um retângulo  $ABCD$  de dimensões  $AB = 2a$  e  $AD = a$ . Consideram-se a superfície prismática, cujas arestas são as retas perpendiculares a  $\pi$ , passando por  $A, B, C, D$  e um ponto  $C'$ , sobre a aresta traçada por  $C$ , tal que  $CC' = b$ .  
Seccionando-se esta superfície por um plano passando por  $AC'$ .
- mostre que é possível obter-se para seção plana um losango  $AB'C'D'$ , onde  $B'$  e  $D'$  são pontos das arestas que passam respectivamente por  $B$  e  $D$ .
  - determine, em função de  $a$  e  $b$ , uma condição necessária e suficiente para que o losango esteja situado em um mesmo semiespaço em relação ao plano  $\pi$ .
  - calcule o volume do tronco de prisma  $ABCDB'C'D'$ , supondo satisfeitas as condições do item anterior.
- 114.** (IME-88) Secciona-se um cubo de aresta  $a$  por planos passando pelos pontos médios das arestas concorrentes em cada vértice. Considere o sólido formado ao retirar-se as oito pirâmides obtidas. Calcule a soma das arestas, a área e o volume deste sólido.
- 115.** (IME-89) Em cada uma das faces de um cubo constrói-se um círculo  $e$ , em cada círculo, marcam-se  $n$  pontos. Unindo-se estes pontos,
- quantas retas, não contidas numa mesma face do cubo, podem ser formadas;

- quantos triângulos, não contidos numa mesma face do cubo, podem ser formados;
  - quantos tetraedros, com base numa das faces do cubo, podem ser formados;
  - quantos tetraedros com todos os vértices em faces diferentes podem ser formados.
- Obs.: Suponha que, se 4 pontos não pertencem a uma mesma face, então não são coplanares.

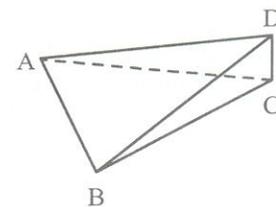
- 116.** (IME-90) Seja um segmento fixo  $AO$  de comprimento  $a$  e uma semi-reta variável  $Ox$  tal que  $\widehat{AOx} = \alpha$ ,  $\alpha$  ângulo agudo, pertencentes a um plano fixo  $\pi$ . Seja a perpendicular ao plano  $\pi$  em  $A$  e seja  $B$  pertencente a esta perpendicular tal que  $AB = a$ . Seja  $C$  o pé da perpendicular traçada de  $B$  sobre  $Ox$ . Pedidos:
- Qual a propriedade comum a todas as faces do tetraedro  $OABC$ ?
  - Calcule o comprimento das seis arestas de  $OABC$  em função de  $a$  e  $\alpha$ .
  - Calcule o volume  $v$  do tetraedro em função de  $a$  e  $\alpha$ .
  - Determine  $\alpha$  de modo que  $v = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$  (existem dois valores).
  - Determine o volume comum aos dois sólidos encontrados no item anterior.

- 117.** (IME-91) Sejam dois quadrados  $ABCD$  e  $ABEF$ , tendo um lado comum  $AB$ , mas não situados num mesmo plano. Sejam  $M$  e  $N$  pertencentes, respectivamente, às diagonais  $AC$  e  $BF$  tais que:

$$\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$$

Mostre que  $MN$  é paralelo a  $DE$ .

- 118.** (IME-94) Na exploração de uma mina foi feito o corte indicado na figura abaixo. Para calcular o volume do minério extraído do corte, foram medidos:  $CD = 10\sqrt{3}$  dm,  $CD$  é perpendicular ao plano  $ABC$ ,  $\widehat{ADC} = \widehat{ADB} = 60^\circ$  e  $\widehat{BDC} = 30^\circ$ .



Calcule esse volume.

Frente 4 – ITA

**119.** (ITA-86) Num sistema de coordenadas

cartesianas ortogonais sejam  $A(0, a)$ ,  $B\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ ,

$C(0, 2a)$ , pontos dados onde  $a$  é um número real,  $a < 0$ .

Sejam as retas:  $(r)$  passando por  $A$  e  $B$  e  $(s)$  passando por  $C$  e paralela a  $(r)$ .

A área do trapézio  $(T)$  delimitado pelos eixos cartesianos e pelas retas  $(r)$  e  $(s)$  vale

A. ( )  $3a^2$       B. ( )  $\frac{3a^2}{4}$       C. ( )  $\frac{3a^2}{2}$

D. ( )  $\sqrt{3} a^2$       E. ( )  $\frac{3a^2}{4} + a^4$

**120.** (ITA-88) Num triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$ ,

de vértices  $B: (1,1)$  e  $C: (3,-2)$ , o cateto que contém o ponto  $B$  é paralelo à reta de equação  $3x - 4y + 2 = 0$ . Então, a reta que contém o cateto  $AC$  é dada por:

A. ( )  $4x + 3y - 6 = 0$       B. ( )  $4x + 3y - 3 = 0$

C. ( )  $3x - 4y + 1 = 0$       D. ( )  $2x + 5y = 0$

E. ( )  $4x - 3y + 6 = 0$

**121.** (ITA-88) Sejam  $a, b, c$  e  $d$  números reais

positivos tais que  $A: (9a, 3b)$ ,  $B: (-c, d)$ ,  $C: (c, -d)$  são os vértices de um triângulo equilátero. Então a equação da reta  $x$  que é paralela ao lado  $BC$  e passa pelo incentro do triângulo  $ABC$  é dada por:

A. ( )  $3ax + by = c - d$

B. ( )  $dx + cy = 3ad + bc$

C. ( )  $ax + by = 2c + 3d$

D. ( )  $2dx + 3ay = 4bc$

E. ( )  $dx - 2cy = 9a + 3b$

**122.** (ITA-89) Determine a equação da reta suporte de

um segmento que tem seu centro no ponto  $(5,0)$  e extremidade em cada uma das retas  $x - 2y - 3 = 0$  e  $x + y + 1 = 0$ . Dê a resposta na forma  $Ax + By + C = 0$ .

**123.** (ITA-90) Considere a reta  $(r)$  mediatriz do

segmento cujos extremos são os pontos em que a reta  $2x - 3y + 7 = 0$  intercepta os eixos coordenados. Então a distância do ponto  $(1/4, 1/6)$  à reta  $(r)$  é:

A. ( )  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$       B. ( )  $\frac{4}{\sqrt{13}}$       C. ( )  $3\sqrt{13}$

D. ( )  $\frac{2\sqrt{3}}{7}$       E. ( )  $\frac{2}{\sqrt{3}}$

**124.** (ITA-92) Num triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$ , temos  $B = 60^\circ$ . As bissetrizes destes ângulos se encontram num ponto  $D$ . Se o segmento de reta  $BD$  mede  $1$  cm, então a hipotenusa mede:

A. ( )  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$  cm      B. ( )  $1+\sqrt{3}$  cm

C. ( )  $2+\sqrt{3}$  cm      D. ( )  $1+2\sqrt{2}$  cm

E. ( ) n.d.a.

**125.** (ITA-92) Dados os pontos  $A: (0, 8)$ ,  $B: (-4, 0)$  e

$C: (4, 0)$ , sejam  $r$  e  $s$  as retas tais que  $A, B \in r$ ,  $B, C \in s$ . Considere  $P_1$  e  $P_2$  os pés das retas perpendiculares traçadas de  $P: (5, 3)$  às retas  $r$  e  $s$ , respectivamente. Então a equação da reta que passa por  $P_1$  e  $P_2$  é:

A. ( )  $y + x = 5$       B. ( )  $y + 2x = 5$

C. ( )  $3y - x = 15$       D. ( )  $x + y = 2$

E. ( ) n.d.a.

**126.** (ITA-93) Dadas as retas

$(r_1): x + 2y - 5 = 0$ ,  $(r_2): x - y - 2 = 0$  e

$(r_3): x - 2y - 1 = 0$

podemos afirmar que:

A. ( ) são 2 a 2 paralelas

B. ( )  $(r_1)$  e  $(r_3)$  são paralelas

C. ( )  $(r_1)$  é perpendicular a  $(r_3)$

D. ( )  $(r_2)$  é perpendicular a  $(r_3)$

E. ( ) as três retas são concorrentes num mesmo ponto

**127.** (ITA-93) Sendo  $(r)$  uma reta dada pela equação:

$$x - 2y + 2 = 0,$$

então, a equação da reta  $(s)$  simétrica à reta  $(r)$  em relação ao eixo das abscissas é descrita por:

A. ( )  $x + 2y = 0$       B. ( )  $3x - y + 3 = 0$

C. ( )  $2x + 3y + 1 = 0$       D. ( )  $x + 2y + 2 = 0$

E. ( )  $x - 2y - 2 = 0$

**128.** (ITA-94) Duas retas  $r$  e  $s$  são dadas,

respectivamente, pelas equações  $3x - 4y = 3$  e  $2x + y = 2$ . Um ponto  $P$  pertencente à reta  $s$  tem abscissa positiva e dista 22 unidades de medida da reta  $r$ . Se  $ax + by + c = 0$  é a equação da reta que contém  $P$  e é paralela a  $r$ , então  $a + b + c$  é igual a:

A. ( )  $-132$       B. ( )  $-126$       C. ( )  $-118$

D. ( )  $-114$       E. ( )  $-112$

**129.** (ITA-95) Três pontos de coordenadas,

respectivamente,  $(0, 0)$ ,  $(b, 2b)$  e  $(5b, 0)$ , com  $b > 0$ , são vértices de um retângulo. As coordenadas do quarto vértice são dadas por:

A. ( )  $(-b, -b)$       B. ( )  $(2b, -b)$

C. ( )  $(4b, -2b)$       D. ( )  $(3b, -2b)$

E. ( )  $(2b, -2b)$

- 130.** (ITA-97) Se A o ponto de intersecção das retas  $r$  e  $s$  dadas, respectivamente, pelas equações  $x + y = 3$  e  $x - y = -3$ . Sejam B e C pontos situados no primeiro quadrante com  $B \in r$  e  $C \in s$ . Sabendo que  $d(A, B) = d(A, C) = \sqrt{2}$ , então a reta passando por B e C é dada pela equação
- A. ( )  $2x + 3y = 1$     B. ( )  $y = 1$   
 C. ( )  $y = 2$     D. ( )  $x = 1$   
 E. ( )  $x = 2$

- 131.** (ITA-97) Considere os pontos A : (0, 0), B : (2, 0) e C : (0, 3). Seja P : (x, y) o ponto de intersecção das bissetrizes internas do triângulo ABC. Então  $x + y$  é igual a
- A. ( )  $12/(5 + \sqrt{13})$     B. ( )  $8/(2 + \sqrt{11})$   
 C. ( )  $10/(6 + \sqrt{13})$     D. ( ) 5  
 E. ( ) 2

**Gabarito**

- |  |  |                  |
|--|--|------------------|
| 1. B   | 2. C   | 3. E             |
| 4. C   | 5. C   | 6. C             |
| 7. A   | 8. E   | 9. C             |
| 10. D  | 11. qualquer resposta, portanto, é admissível (pois esta em contradição) | 12. D            |
| 13. B  | 14. B  | 15. B            |
| 16. D  | 17. A  | 18. A            |
| 19. A  | 20. B  | 21. D            |
| 22. B  | 23. B  | 24. B            |
| 25. A  | 26. D  | 27. B            |
| 28. D  | 29. A  | 30. A            |
| 31. D  | 32. A  | 33. C            |
| 34. C  | 35. B  | 36. B            |
| 37. C  | 38. A  | 39. A            |
| 40. B  | 41. D  | 42. B            |
| 43. $R(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$   | 44. ver resposta   | 45. A            |
| 46. B  | 47. E  | 48. D            |
| 49. demonstração   | 50. demonstração   | 51. demonstração |
| 52. demonstração   | 53. $S = \{(2, 5), (5, 2)\}$   |                  |
| 54. a) demonstração (Dica: verifique a paridade das expressões);<br>b) nenhum  |  |                  |
| 55. a) demonstração; b) $S = \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$  |  |                  |
| 56. a) demonstração;    b) demonstração    57. demonstração  |  |                  |
| 58. $S = \left\{ 0, 1, \text{cis} \left( \frac{\pi}{3} \right), \text{cis} \left( \frac{2\pi}{3} \right), \text{cis} (\pi), \text{cis} \left( \frac{4\pi}{3} \right), \text{cis} \left( \frac{5\pi}{3} \right) \right\}$ |  |                  |
| 59. $p \in \left\{ -4, \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right\}$  | 60.  |                  |
| 61. demonstração   | 62. $a = 4, b = 4$ e $c = 16$  |                  |
| 63. a) $\frac{3\pi}{4}$ ; b) $2\text{cis} \frac{\pi}{3}$   | 64. $z^2 = e^{\pm 4} e^{\frac{i\pi}{3}}$                                 |                  |
| 65. $z = -\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$  | 66. demonstração   |                  |

67. a) 
$$\begin{cases} a = -j^2 c - jb \\ b = -j^2 a - jc \\ c = -j^2 b - ja \end{cases}$$
    b)  $z = \frac{-ij}{(i+j)^2}$

68. 
$$\begin{cases} aa' \neq 0 \\ b^2 > 4ac \\ b'^2 > 4a'c' \\ 2(ca' + ac') = bb' \end{cases}$$
    69.  $x \sin n\varphi + \cos n\varphi$     70. D

71. D    72. B    73. D  
 74. A    75. B    76. E  
 77. C    78. C    79.  $42 \cdot 8!$

80. 91    81.  $\frac{10!}{5! \cdot 2^5}$     82.  $2^{11}$   
 83.    84. 180    85. a) 105; b) 14  
 86. demonstração    87. 63    88. D  
 89. E    90. C    91. B  
 92. D    93. C    94. E

95. C    96.  $\ell = \frac{(2 - \sqrt{3})L}{2}$  cm;  $h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$  cm

97. C    98. A    99. E  
 100. B    101. C    102. A  
 103. A    104. D    105. E  
 106. B    107. C    108. B

109. a)  $BC = 2r, AV = 2r, AC = 2r \sin \theta, AB = 2r \cos \theta$   
 b) demonstração;    c) circunferência de raio  $OA/2$  e centro no ponto médio de  $AO$ ; d)  $BC$  perpendicular a  $AO$

e)  $\text{tg } \alpha = \frac{2}{\sin 2\theta}$     f)  $\theta = 45^\circ$     g)  $\theta = 30^\circ$

110.  $l > a + b$

111. 1.  $x = \frac{2a}{3}, y = \frac{2b}{3}$ ;    2.  $3/5$ ;    3.  $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

112. demonstração

113. a)  $x = \frac{|b^2 - 3a^2|}{2b}$ ;    b)  $b \geq \sqrt{3}a$ ;    c)  $a^2 b$

114.  $12\sqrt{2}a, (\sqrt{3} + 3)a^2, \frac{2a^3}{3}$

115. a)  $16n^2$ ; b)  $35n^3 - 15n^2$ ; c)  $5n^2(n-1)(n-2)$ ; d)  $15n^4$

116. a) triângulos retângulos

$OA = a, AB = a, OC = a \cos \alpha,$

b)  $AC = a \sin \alpha, OB = a\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}, BC = a\sqrt{1 + \sin^2 \alpha}$

c)  $\frac{a^3 \sin 2\alpha}{12}$ ;    d)  $30^\circ$  ou  $60^\circ$     e)  $\frac{a^3}{36}$

117. demonstração    118.  $10\sqrt[3]{\sqrt{3} - 1}$     119. B

120. A    121. B  
 122.  $4x - 5y - 20 = 0$     123. B    124. B  
 125. A    126. E    127. D

128. a soma  $a + b + c = 3k - 4k - 113k$ , pode resultar qualquer valor não nulo, ou seja, pode assumir qualquer um dos valores apresentados nas alternativas.

129. C    130. D    131. A

ITA

1. (ITA-1986) Dadas as afirmações de que a 1ª pessoa do singular do indicativo presente de
  - 1) bendizer é bendigo
  - 2) requerer é requero
  - 3) sorrir não existe
 Verificamos que está(estão) correta(s)
  - A. ( ) Apenas a afirmação nº 1
  - B. ( ) Apenas a afirmação nº 2
  - C. ( ) Apenas a afirmação nº 3
  - D. ( ) Apenas as afirmações nºs 1 e 2
  - E. ( ) Todas as afirmações
  
2. (ITA-1986) Assinalar a alternativa em que a pontuação esteja correta
  - A. ( ) Ele não virá hoje; não contem, portanto, com ele.
  - B. ( ) O Reitor daquela famosa universidade italiana, chegará aqui amanhã.
  - C. ( ) São José dos Campos 15 de março, de 1985.
  - D. ( ) Quero que, assine o contrato.
  - E. ( ) Qualquer bebida que, contenha álcool, não deve ser tomada por você.
  
3. (ITA-1986) Assinalar a alternativa correta
  - A. ( ) Aqueles rapazes é tal qual os pais: vivem sempre sós.
  - B. ( ) Aqueles rapazes é tal qual os pais: vivem sempre só.
  - C. ( ) Aqueles rapazes são tais quais os pais: vivem sempre sós.
  - D. ( ) Aqueles rapazes são tal qual os pais: vivem sempre só.
  - E. ( ) Aqueles rapazes são tais quais os pais: vivem sempre só.
  
4. (ITA-1986) Assinalar a alternativa correta
  - A. ( ) É necessário fé.
  - B. ( ) Quando ele depor, estaremos todos lá.
  - C. ( ) Ele sempre premeia os justos.
  - D. ( ) Tua ação te custará cara.
  - E. ( ) Manteiga é boa para a saúde.
  
5. (ITA-1986) Assinalar a alternativa correta
  - A. ( ) Fazem anos que não te vejo.
  - B. ( ) Devem haver pessoas honestas lá.
  - C. ( ) Alvimar ou Caetano será escolhido para o cargo.
  - D. ( ) Aspiramos um aumento salarial melhor.
  - E. ( ) Custou-o a entender o que eu dizia.

6. (ITA-1986) Assinalar a alternativa correta
  - A. ( ) Quando cheguei no Paço Municipal, estava muito cansado
  - B. ( ) As estupidezes humanas não cessam.
  - C. ( ) Ficamos fora de si aproximadamente durante cinco minutos.
  - D. ( ) Sua voz é tão canora quanto um sabiá.
  - E. ( ) Me disseram que Bernardes foi mordido por um mosquito desconhecido.
  
7. (ITA-1986) Assinalar a alternativa correta
  - A. ( ) Minha cidade fica a cerca de uma hora daqui.
  - B. ( ) Entre mim e ti, não há rancor.
  - C. ( ) Fiquei ao par do incidente, tão logo cheguei.
  - D. ( ) Li e gostei de seu livro: é uma obra prima.
  - E. ( ) Vai anexo nossa primeira revista.
  
8. (ITA-1986) Assinalar a alternativa correta.
  - A. ( ) Os Estados Unidos é uma grande nação.
  - B. ( ) Soou cinco horas no sino da igreja.
  - C. ( ) Dez anos eram muito.
  - D. ( ) Só faltei pegá-lo em flagrante.
  - E. ( ) Ele criou vários empecilhos.

**Intelecção de texto**  
**Santa Rita de Cássia**

O corpo de Rita nunca foi sepultado e, até hoje, não conheceu corrupção. É preciso notar ainda que não se munificou e não enegreceu como o de outros santos, mas está como o de uma pessoa que acaba de morrer. Ao contrário, após a morte desapareceu o aspecto sofredor e cadavérico que tinha nos últimos tempos da doença.

No reconhecimento do corpo, feito por ocasião da beatificação, isto é, cerca de duzentos anos após a morte, os delegados emitiram a declaração seguinte que damos, traduzida do latim:

“No ataúde está o corpo da supracitada serva do Senhor, vestida com o hábito monástico da Ordem de Santo Agostinho, o qual parece tão intacto como se a dita serva de Deus tivesse morrido recentemente. Vemos perfeitamente a carne branca, em parte alguma corrompida, a fronte, os olhos com as pálpebras, o nariz, a boca, o queixo e toda a face tão bem disposta, inteira como a de uma pessoa morta no mesmo dia. Vêem-se igualmente brancas e intactas as mãos da dita serva de Deus e se pode perfeitamente contar os dedos com as unhas, semelhantes aos de pessoas que acabaram de morrer. Assim também os pés.”

Ora, um cadáver que se conserva durante séculos ao abrigo da corrupção, embora não se tenham retirado as vísceras, nem tenha sido embalsamado, é coisa que a

ciência, mau grado todos os progressos de que se pode orgulhar, não pode até hoje explicar.

Além disso, não poderá explicar como a chaga da fronte se pôde cicatrizar instantaneamente, logo após a morte, quando naturalmente deveria acontecer o contrário.

E ainda, o suave perfume que, de tempos em tempos, se exala desses benditos despojos, inanimados, não provém certamente de causa natural, como o puderam verificar em diversas ocasiões, através dos séculos, pessoas sérias e dignas da maior consideração, e que afirmaram que o fato não provinha de mistificação alguma.

Mas o fato mais maravilhoso que acontece com o corpo de Santa Rita é que, de vez em quando, ele se move de diversas maneiras. Os atos autênticos da beatificação e da canonização o atestam, segundo testemunhos repetidos e dignos de fé, desde 1629 até 1899, sem contar os mais recentes, coligidos para sua canonização, feita por Leão XIII em 1900.

Testemunhas dignas de fé juram haver visto a Santa abrir os olhos, voltar a cabeça para o povo, levantar-se até a tampa do esquife, movendo-se com todo o corpo, movendo também as mãos e os pés. Esses movimentos foram especialmente observados durante as visitas feitas pelos bispos e superiores da Ordem; algumas vezes durante a elevação da missa ou durante as calamidades públicas.

É de notar, entre outros fatos, que a Santa abriu os olhos em 16 de julho de 1628 para apaziguar um tumulto enquanto Cássia e Roma celebravam a festa de sua beatificação. O processo regular deste fato se conserva no arquivo do arcebispado de Spoleto.

Os fatos acima expostos são um contínuo milagre pelo qual Deus se compraz em glorificar sua fiel serva.

Certamente a região católica não necessita desses fatos inexplicáveis pela ciência para demonstrar sua origem divina; são testemunhos humanos; mas para negá-los seria preciso aniquilar a história, que narra os fatos humanamente testemunhados e não os discute. Mas como para narrá-los é necessário ter provas seguras – e no nosso caso elas existem – assim, para negar, não basta dizer: são coisas impossíveis! Porque, justamente, se alguma coisa existe, é porque é possível; senão aos homens, pelo menos a Deus. Queremos provas físicas, certas, e não sofismas sutis.

Mas continuemos nossa narrativa, porque aquele que teima em só acreditar no que lhe agrada, termina por duvidar de sua própria existência e a razão humana chega a tal ponto que rejeita orgulhosamente a luz da revelação divina.

As graças concedidas por Deus I de Santa Rita são inumeráveis e podemos dizer contínuas.

(Mons. Luís de Marchi)

9. (ITA-1986) Assinalar a alternativa a seguir que tem a palavra que devidamente preenche a lacuna I no último parágrafo do texto em pauta

- A. ( ) intercessão      B. ( ) imutabilidade  
C. ( ) clausura      D. ( ) assunção  
E. ( ) conotação

10. (ITA-1986) Baseando-nos no texto, podemos afirmar que a *munificação*

- A. ( ) nada altera no corpo de uma pessoa falecida, mesmo com o passar dos séculos  
B. ( ) é uma técnica que revigora.  
C. ( ) é unicamente de cunho científico.  
D. ( ) não é reconhecida pela Igreja Católica.  
E. ( ) inclui santos.

11. (ITA-1986) Dadas as afirmações

- 1) Santa Rita de Cássia sempre foi enferma.
- 2) A Religião Católica ainda existe porque se fundamenta essencialmente em milagres.
- 3) Não há existência sem possibilidade.

E baseando-nos no texto, podemos verificar que está(estão) correta(s)

- A. ( ) Apenas a afirmação nº 1  
B. ( ) Apenas a afirmação nº 2  
C. ( ) Apenas a afirmação nº 3  
D. ( ) Apenas as afirmações nºs 1 e 2  
E. ( ) Todas as afirmações

12. (ITA-1986) Baseando-nos no texto, podemos verificar que *Santa Rita de Cássia* faleceu

- A. ( ) em 1628  
B. ( ) antes do século 17  
C. ( ) em 1899  
D. ( ) no século 18  
E. ( ) depois do século 18

13. (ITA-1986) De acordo com o texto, podemos inferir que

- A. ( ) *beatificação* é sinônimo de *canonização*.  
B. ( ) a *beatificação* só pode ser constatada depois da *canonização*.  
C. ( ) a *beatificação* distorce o sentido de *canonização*.  
D. ( ) a *beatificação* independe da *canonização*.  
E. ( ) a *canonização* se opõe à *ciência*.

Instruções para as questões 14 a 16.

Os grupos de frases que compõem as “questões 14 a 16” não mostram, com a necessária clareza, ênfase e concisão, a verdadeira relação de sentido entre elas. Não contrariando as relações de pensamento entre as orações, escolha a alternativa que apresenta a estrutura estilisticamente recomendável e gramaticalmente correta.



**14.** (ITA-1987) Os jesuítas tinham-se estabelecido no Maranhão no século XVII. Então começaram as disputas entre eles e os colonos. Apenas com os pretendiam o cativoiro dos índios.

- A. ( ) No século XVII, época em que os jesuítas se estabeleceram no Maranhão, eles disputam com os colonos, apenas pretendentes do cativoiro dos índios.
- B. ( ) Os colonos, que apenas pretendiam o cativoiro dos índios, começaram as lutas com os jesuítas quando se estabeleceram, no séc. XVII, no Maranhão.
- C. ( ) Os colonos, que pretendiam o cativoiro dos índios, começaram com os jesuítas as lutas, assim que se estabeleceram no Maranhão no século XVII.
- D. ( ) Assim que os jesuítas se estabeleceram no Maranhão no século XVII, começaram as lutas entre ele e os colonos que pretendiam o cativoiro dos índios.
- E. ( ) Quando os jesuítas se estabeleceram no Maranhão no século XVII, eles começaram então a disputar o cativoiro dos índios com os colonos, apenas com os que o pretendiam.

**15.** (ITA-1987) O professor chegou atrasado. O mesmo aplicou a prova de Matemática. E muitos alunos não puderam responder nem metade das questões. Pudera! Eles não tiveram tempo!

- A. ( ) Em consequência do atraso do professor, muitos alunos não conseguiram responder a metade das questões da prova de Matemática por causa da insuficiência de tempo.
- B. ( ) Como o tempo foi insuficiente, muitos alunos não responderam à maioria das questões, pois o mesmo professor que a aplicou chegou atrasado.
- C. ( ) Muitos alunos não obtiveram a resolução nem da metade das questões na prova de Matemática que o professor atrasado aplicou ao chegar atrasado.
- D. ( ) Em consequência da insuficiência de tempo, muitos alunos não conseguiram responder à metade das questões da prova de Matemática porque o professor atrasado a aplicou.
- E. ( ) Como o tempo foi insuficiente, visto que o professor chegara atrasado, muitos alunos não responderam sequer à metade das questões da prova de Matemática.

**16.** (ITA-1987) Castro Alves produziu poesia lírico-amorosa e social. Mas a sua importância se deve à última. Naquela ocorrem as preferências pela temática oriental e bíblica. Na outra freqüentemente encontramos a hipérbole e a apóstrofe para, respectivamente, amplificar os valores dramáticos e naturais e para criar tensão, vigor e intensidade.

- A. ( ) Embora haja produzido poesia lírico-amorosa, na qual ocorrem as preferências pela temática oriental e bíblica, a importância de Castro Alves se deve principalmente à poesia social, em que freqüentemente encontramos a hipérbole, para amplificar os valores dramáticos e naturais, e a apóstrofe, para criar tensão, vigor e intensidade.
- B. ( ) Com o objetivo de amplificar os valores dramáticos e naturais e para criar tensão, vigor e intensidade, Castro Alves freqüentemente empregou a hipérbole e a apóstrofe em sua poesia lírico-amorosa, em que ocorrem as preferências pela temática oriental e bíblica, e em sua poesia social, que é a causa de sua importância.
- C. ( ) Embora haja produzido poesia lírico-amorosa, onde ocorrem as preferências pela temática oriental e bíblica, Castro Alves se destaca pela poesia social cuja freqüência de hipérbole e apóstrofe é para amplificar os valores dramáticos e naturais, e criar tensão, vigor e intensidade.
- D. ( ) Além da poesia lírico-amorosa, cuja temática preferencial é o oriente e a bíblia, a importância de Castro Alves se deve à poesia social em cuja ocorrência freqüente é a hipérbole e a apóstrofe, ambas para, respectivamente, amplificar os valores dramáticos e criar tensão, vigor e intensidade.
- E. ( ) Não obstante haja produzido poesia lírico-amorosa, em que prefere a temática oriental e bíblica, a importância de Castro Alves se deve à poesia social, onde freqüentemente usam-se da hipérbole e da apóstrofe para, respectivamente, amplificar os valores dramáticos e naturais, e com o objetivo de criar tensão, vigor e intensidade.

Instruções para a questão 17.

Para que os enunciados soltos, apresentados na "questão 17", se reduzam a um só período, algumas adaptações são necessárias. Escolha a alternativa em que encontramos a estrutura que estilística e gramaticalmente expressa, com a necessária clareza, ênfase e correção, a relação de sentido sugerida nos parênteses.

**17.** (ITA-1987)

- I. Conheço um florentino esguio e rijo. (Oração principal).
- II. Um punhal é esguio e rijo. (Indicação de uma comparação).
- III. Ele condena a guerra com o espírito. (Atributo do objeto direto de "I" = Oração subordinada adjetiva).
- IV. Ele a ama desesperadamente com a alma. (Oposição à idéia do predicado de "III").
- A. ( ) O florentino que conheço, esguio e rijo como um punhal, condena a guerra com o espírito, embora a ame com a alma.
- B. ( ) Conheço um florentino que, esguio e rijo como um punhal, condena a guerra com o espírito, mas a ama com a alma.
- C. ( ) Conheço um florentino que é esguio e rijo com um punhal, e ele, condenando a guerra com o espírito, a ama com a alma.
- D. ( ) Conheço um florentino esguio e rijo como um punhal que condena a guerra com o espírito e a ama com a alma.
- E. ( ) Um florentino, que é esguio e rijo como um punhal, e que é conhecido por mim, condena a guerra com o espírito, mas a ama desesperadamente com a alma.

**18.** (ITA-1987) Assinale a alternativa cujas formas verbais estão corretas:

- A. ( ) prevessem, requisassem, intervissem, sobrevissem
- B. ( ) detiveram, posporam, reouveram, preveram
- C. ( ) proviemos, desdissemos, retivemos, provimos
- D. ( ) intervêm, prevem, prevêam, retêm
- E. ( ) entreviu, previu, proveu, precaveu

**19.** (ITA-1987) Assinale o item em que as formas dos verbos "trazer, ser, pôr e ir" correspondam ao seguinte exemplo: "preferir, prefere!"

- A. ( ) tragas!, sejas!, ponhas!, vás!
- B. ( ) trazei!, sede!, pondeis!, ide!
- C. ( ) traga!, se!, ponha!, vá!
- D. ( ) traze!, sê!, põe!, vai!
- E. ( ) traga!, seja!, ponha!, vai!

**20.** (ITA-1987) A seqüência "Solteiro foi um menino turbulento causado era um moço alegre viúvo tornara-se macambúzio." Ficarà, quanto à pontuação, correta e mais facilmente inteligível se empregarmos:

- A. ( ) três vírgulas e dois pontos-e-vírgula
- B. ( ) quatro vírgulas e dois parênteses
- C. ( ) duas vírgulas e dois pontos-e-vírgula
- D. ( ) um ponto final, um ponto-e-vírgula e dois pontos
- E. ( ) três vírgulas e um ponto-e-vírgula

**21.** (ITA-1987) Qual das seqüências abaixo *jamais admitirá*, de acordo com as nossas gramáticas, o emprego de duas vírgulas?

- A. ( ) O irmão meu que estava doente não chegou na hora.
- B. ( ) Mesmo que tu chegues atrasado José não deixes de trazer as revistas que te emprestei sábado último.
- C. ( ) A mulher se divide em quatro partes cabeça tronco membros e espelho.
- D. ( ) Jamais lhe poderei dizer que isto se passou na casa de uma das mais tradicionais famílias da região os Mesquitas.
- E. ( ) A muito custo após algumas horas disseram que não haviam chegado os impressos para formalizar a petição.

## Questões de 22 a 26:

## Instruções para as questões 22 a 26.

Cada uma das questões propostas apresenta três frases, que podem ser corretas ou incorretas. Verifique quais que apresentam, ou não, infração de regras gramaticais e, observando cuidadosamente o número de cada questão, assinale:

- A. ( ) Se todas forem corretas.
- B. ( ) Se for correta somente a frase 1.
- C. ( ) Se for correta somente a frase 2.
- D. ( ) Se for correta somente a frase 3.
- E. ( ) Se estiverem corretas as frases 2 e 3.

**22.** (ITA-1987)

- 1) Os cumprimentos e as felicitações sinceras, bem como o elevado respeito e a admiração, caracterizam a amizade e o amor verdadeiros.
- 2) Ela não o compreendia, mas admirava-o, queria-lhe muito bem e obedecia a ele cegamente.
- 3) Vimos informar-te que enviaremos, daqui a uma semana, as mercadorias por ti solicitadas.

**23.** (ITA-1987)

- 1) Estais contentes com ver de novo rios, céu e florestas brasileiros?
- 2) Anexo ao vosso pedido, remeto-vos as cópias apenas dos capítulos primeiro e segundo, pois os demais, mau impressos, estão meio ilegíveis.
- 3) Comete-se amiúde, crimes de lesopatrimônio.

**24.** (ITA-1987)

- 1) Precavede-vos contra os pseudos-democratas, que, com a proximidade das eleições, baterão às vossas portas, com vãs promessas e cordiais saudações.



- 2) Mesmo que tu divirjas da porposta com que todos concordam, não titubeies em aceitá-la, pois, crê em minha palavra, muitas vantagens dela nos advirão.
- 3) A Cruz Vermelha tem socorrido os flagelados, assistindo-lhes e compartilhando-os em sua dor.

**25.** (ITA-1987)

- 1) Antecipei o meu regresso por motivos que não interessam expor agora.
- 2) Ali, onde já raream os pequenos animais, devia existir matas de onde já haviam desaparecido as onças.
- 3) Esfoço-me por que se conheçam e remedeiem os erros.

**26.** (ITA-1987)

- 1) Notavam-se-lhe no gesto alguns ressentimentos.
- 2) Que diria o pai se lhe confessassem que não lhe socorreu o filho, embora o pudessem?
- 3) Por negar a verdade, não tenho o direito de vos espancar.

**27.** (ITA-1987)

“Tarde de olhos azuis e de seios morenos.  
Ó tarde linda, ó tarde doce que se admira.  
Como uma torre de pérolas e safira.  
Ó tarde como quem tocasse violino.”

(Emiliano Pernetá)

Nesses versos, flagrante apelo aos sentidos humanos, que se misturam e se confundem no efeito emocional que provocam no leitor, caracteriza a figura de harmonia altamente expressiva:

- A. ( ) metonímia      B. ( ) anacoluto  
C. ( ) hipérbato      D. ( ) sinestesia  
E. ( ) aliteração

Instruções para as questões 28 a 30.

Os grupos de frases que compõe as “questões 1, 2 e 3” não mostram, com a necessária clareza ênfase e concisão, a verdadeira relação de sentido entre elas. Não contrariando as relações de pensamento entre as orações, escolha, sob os aspectos estilísticos e gramatical, a melhor alternativa.

- 28.** (ITA – 1988) A língua é um fenômeno de ordem coletiva. Também particular. Ela submete-se a duas forças que se opõem. Essas são a centrífuga e centrípeta. Enquanto a primeira, que é de natureza social, procura manter o código estável, a outra, em contrapartida, que é de natureza pessoal, conduz a desvios.

- A. ( ) A língua – fenômeno de ordem coletiva e particular – é submetida a duas forças contrárias, a centrífuga de natureza social, que procura manter o código estável e a centrípeta que é de natureza pessoal e conduz a desvios
- B. ( ) A língua é fenômeno de ordem tanto coletiva como particular, a qual se submete a duas forças oponentes, que são: a centrífuga, cuja característica é a natureza social que procura manter o código estável; a centrípeta cuja característica é de natureza pessoal, conduzindo a desvios
- C. ( ) A língua é concomitantemente um fenômeno de ordem coletiva e particular, submetida a duas forças que se opõem, que são a centrífuga de natureza social e procura manter o código estável; e a força centrípeta, de natureza pessoal que conduz a desvios
- D. ( ) Fenômeno de ordem coletiva quanto particular, a língua submete-se às duas forças que se opõem: à centrífuga que, sendo de natureza social, procura manter o código estável, e à centrípeta que é de natureza pessoal conduzindo a desvios
- E. ( ) A língua, fenômeno tanto de ordem coletiva quanto particular, submete-se a duas forças contrárias: a centrífuga – de natureza social –, que procura manter o código estável –, e a centrípeta – de natureza pessoal –, que conduz a desvios

- 29.** (ITA-1988) O individualismo do narrador-personagem pode comprometer a plausibilidade psicológica da história. Isto porque ele tende a oferecer-nos de si uma imagem sempre de otimismo. E dos outros, tem a tendência de oferecer uma imagem negativa. Ou pior. A razão dessas tendenciosidades é que ele tem a incapacidade de analisar os fatos com isenção de ânimo.

- A. ( ) O individualismo do narrador-personagem pode comprometer a plausibilidade psicológica da história, visto que o narrador tende a oferecer-nos de si uma imagem sempre de otimismo e dos outros uma imagem negativa; ou pior, em consequência dessa tendenciosidade, ele tem a incapacidade de analisar os fatos com isenção de ânimo
- B. ( ) Em decorrência da tendenciosidade – incapacidade de isenção de ânimo – o individualismo do narrador-personagem pode comprometer a plausibilidade psicológica da história, ou pior: ele tende a oferecer-nos de si uma imagem sempre de otimismo e dos outros uma imagem negativa

- C. ( ) A plausibilidade psicológica da história, que pode ser comprometida pelo individualismo do narrador-personagem, é tendenciosa, uma vez que tende a oferecer-nos de si uma imagem sempre otimista, ao passo que os outros recebem uma imagem negativa, ou menos boa, acarretando, dessa tendenciosidade, a incapacidade de analisar os fatos com isenção de ânimo
- D. ( ) Podendo comprometer o individualismo do narrador-personagem a plausibilidade psicológica da história, nota-se a tendência de oferecer de si mesmo uma imagem sempre de otimismo e dos outros o contrário; ou o que é pior, devido a essa tendenciosidade é incapaz de analisar os fatos com imparcialidade
- E. ( ) O individualismo do narrador-personagem pode comprometer a plausibilidade psicológica da história, pois os narrador – incapaz de analisar os fatos com isenção de ânimo – tende a oferecer-nos de si uma imagem sempre otimista, e dos outros uma imagem negativa, ou menos boa
- 30.** (ITA-1988) Mário de Quintana focaliza o problema de expressão poética em “Bem-Aventurados”. Quando ele faz isso ele dá ênfase, num tom calmo e até suave, ao seguinte: a linguagem da poesia é impura. Comparada com a das demais artes.
- A. ( ) Quando enfatiza, num tom calmo e até suave, a impureza da linguagem da poesia, Mário de Quintana, ao focalizar o problema da expressão poética em “Bem-Aventurados”, realça-nos que ela, comparada com as demais artes, é impura.
- B. ( ) Ao focalizar o problema da expressão poética em “Bem-Aventurados”, num tom calmo e até suave Mário de Quintana enfatiza que a linguagem da poesia, comparada com a das demais artes, é impura
- C. ( ) Mário de Quintana focaliza o problema da expressão poética em “Bem-Aventurados” onde dá ênfase num tom calmo e até suave à linguagem da poesia, sendo que essa, comparada as demais artes, é impura
- D. ( ) Dando ênfase num tom calmo e até suave à linguagem da poesia, Mário Quintana focaliza a expressão poética em “Bem-Aventurados”, linguagem essa impura quando comparada com a das demais artes
- E. ( ) Focalizando o problema da expressão poética em “Bem-Aventurados”, num tom calmo e até suave, Mário Quintana dá ênfase à linguagem da poesia, cuja língua, ao ser comparada com as demais artes, é impura
- 31.** (ITA-1988) Assinale a alternativa cujos sinais, indicados entre parênteses, não permitem uma pontuação correta:
- A. ( ) Uns trabalham esforçam-se cansam-se outros folgam dormem descuidam-se e não pensam no futuro. (4 vírgulas e 1 ponto-e-vírgula)
- B. ( ) A sua volta tudo lhe parece chorar as árvores o capim os insetos. (3 vírgulas e dois pontos)
- C. ( ) Campinas Santos Guarulhos são cidades do Estado de São Paulo Caxias Canoas Uruguaiana do Rio Grande do Sul. (5 vírgulas e 1 ponto-e-vírgula)
- D. ( ) Prometeu-nos quando dele precisássemos que embora suas atividades fossem múltiplas jamais deixaria de atender-nos. (3 vírgulas)
- E. ( ) A metade de 247 mais 36 são 159,5. (2 vírgulas)
- 32.** (ITA-1988) Assinale a alternativa *incorreta* quanto às normas de pontuação:
- A. ( ) Usa-se a vírgula no interior da oração para separar elementos que exercem a mesma função sintática
- B. ( ) O ponto-e-vírgula denota em geral uma pausa suspensiva, suficiente para indicar que o período está concluído
- C. ( ) As conjunções conclusivas, quando pospostas a um dos termos da oração, podem vir entre vírgulas
- D. ( ) Usa-se o ponto-e-vírgula para separar orações de um período, das quais um dos seus termos já esteja subdividido por vírgula
- E. ( ) Usa-se a vírgula para separar as orações subordinadas adverbiais, principalmente quando antepostas à principal
- 33.** (ITA-1989) Dadas as afirmações:
- I. Acentuam-se os monossílabos tônicos terminados em “a(s), e(s), o(s), em, ens”.
- II. Nas seqüências “gue, gui, que, qui”, o “u” leva acento agudo quando tônico e trema quando átono.
- III. Acentuam-se sempre o “i” e “u” quando, em hiato, são precedidos de vogal e seguidos de consoante.
- Deduzimos que, de acordo com as normas de acentuação, pode(m) estar correta(s):
- A. ( ) Todas.
- B. ( ) Apenas a I.
- C. ( ) Apenas a II.
- D. ( ) Apenas a III.
- E. ( ) Nenhuma das afirmações.

**34.** (ITA-1989) Dadas as afirmações:

- I. Em “José, por não concordar com as ordens do chefe, retirou-se.” A supressão de uma das vírgulas constituirá erro, pois virá quebrar a concatenação da oração, por separar o sujeito do predicado.
- II. Em “Disse ele muitas coisas e mais coisas teria dito se não fosse a carência de tempo.” é necessária a vírgula antes da conjunção aditiva para separar complementos de verbos diferentes.
- III. Usa-se o ponto-e-vírgula para separar as partes principais de uma frase, sobretudo se longas, nas quais já existam elementos virgulados.

Deduzimos que, de acordo com as normas de pontuação, pode(m) estar correta(s):

- A. ( ) Todas.
- B. ( ) Apenas a I.
- C. ( ) Apenas a II.
- D. ( ) Apenas a III.
- E. ( ) Apenas a I e III.

**35.** (ITA-1989) Assinale a opção cujos sinais, indicados entre parênteses, não permitem pontuação correta para as frases abaixo:

- A. ( ) Se a felicidade é proporcional à renda é irresponsável a causa das máquinas se não a questão toda precisa ser examinada. (2 vírgulas e 1 ponto-e-vírgula)
- B. ( ) “O mau médico encarece a enfermidade e não lhe dá remédio o mau conselheiro exagera os inconvenientes e não dá meio com que os melhorar.” (3 vírgulas e 1 ponto-e-vírgula)
- C. ( ) “O beijo das mulheres sérias é frio faz a gente espirar o das mulheres ardentes gasta-nos os lábios... e o dinheiro.” (1 dois pontos e 1 ponto-e-vírgula)
- D. ( ) Chamava-se Isolina a amiga que a consolava Piedade. (1 vírgula e 1 ponto-e-vírgula)
- E. ( ) “Depois dos pais que recebem o nosso primeiro grito o solo pátrio recebe os nossos primeiros passos é um duplo receber que é duplo dar.” (3 vírgulas e 1 dois pontos)

Instruções para as questões 36 e 37.

Cada um dos textos abaixo foi redigido de cinco formas diferentes. Leia-os todos com atenção e assinale a letra correspondente ao texto que tem melhor redação, considerando correção, clareza, concisão e elegância.

**36.** (ITA-1989) Leia:

- A. ( ) Através da invenção de novas palavras – manifestação sutil – e também por uma sábia e genial adaptação do material existente em um anseio de liberdade criadora, os escritores descobrem novos modos de expressão. Eis onde reside o segredo do estilo.
- B. ( ) O segredo do estilo reside na manifestação sutil dos escritores em anseio de liberdade criadora. Descobrimo constantemente novos modos de expressão, ou inventando novas palavras ou na adaptação sábia e genial do material já existente.
- C. ( ) Os escritores, num anseio de liberdade criadora, descobrem constantemente novos modos de expressão, não só pela invenção de novas palavras, mas ainda por uma sábia e genial adaptação do material existente. É nessa manifestação sutil que reside o segredo do estilo.
- D. ( ) Em um anseio de liberdade criadora, os escritores descobrem constantemente novos modos de expressão. Tanto pela invenção de novas palavras como também na adaptação sábia do material já existente em uma manifestação sutil onde reside o segredo do estilo.
- E. ( ) Descobrimo constantemente novos modos de expressão e adaptando sábia e genialmente o material em anseio de liberdade criadora, os escritores inventam novas palavras em cuja manifestação sutil reside o segredo do estilo.

**37.** (ITA-1989) Leia:

- A. ( ) Era de alta estatura; tinha as mãos delicadas; a perna ágil e nervosa, ornada com uma axorca de frutos amarelos, apoiava-se sobre um pé pequeno, mas firme no andar e veloz na corrida.
- B. ( ) Alta estatura ornada com uma axorca de frutos amarelos, tinha as mãos delicadas, perna ágil e nervosa, no entanto, firme no andar como veloz na corrida, embora apoiada em um pé pequeno.
- C. ( ) Era alta e de mãos delicadas; e sua perna, ágil e nervosa, adornada com uma axorca de frutos amarelos, apoiava-se em um pé pequeno, sendo que, porém, era firme no andar e veloz na corrida.

- D. ( ) Era de alta estatura, com as mãos delicadas e tinha a perna ágil e nervosa ornada de axorca de frutos amarelos, que, mesmo apoiando em pé pequeno, era entretanto firme no andar e veloz na corrida.
- E. ( ) Alta estatura, as mãos delicadas e perna, adornada por axorca de frutos amarelos, ágil e nervosa, apoiava num pé pequeno; todavia firme no andar e veloz na corrida.

**Obs.:** *Axorca. s.f. Argola usada como adorno dos braços ou das pernas.*

Instruções para as questões “38 e 39”.

Os grupos de frases que compõem as questões 38 e 39 não mostram com a necessária clareza, ênfase e concisão, a relação de sentido entre elas. Não contrariando as relações de pensamento entre as orações, assinale, sob os aspectos estilístico e gramatical, a *melhor opção*.

- 38.** (ITA-1989) O discurso científico jamais será totalmente frio e objetivo. A razão disso é ele ser resultado da vontade de seu autor. A vontade em é exteriorizar a sua visão da realidade. O autor do discurso científico é o cientista.
- A. ( ) O discurso científico, cujo autor é o cientista, jamais será totalmente frio e objetivo, pois é resultado da vontade dele exteriorizar a visão da realidade.
- B. ( ) Resultado da vontade do autor de exteriorizar a visão da realidade do cientista, o discurso científico jamais será totalmente frio e objetivo.
- C. ( ) Por resultar da vontade de seu autor, o discurso científico, exteriorizando sua visão de cientista da realidade, jamais será totalmente frio e objetivo.
- D. ( ) Resultante da vontade de exteriorizar a visão da realidade do cientista, que é autor, o discurso científico jamais será totalmente frio e objetivo.
- E. ( ) O discurso científico, por resultar da vontade de seu autor – o cientista – em exteriorizar sua visão da realidade, jamais será totalmente frio e objetivo.
- 39.** (ITA-1989) A concordância pode ser nominal ou verbal. Ela é um mecanismo sintático. Este expressa a associação de elementos da frase. Uma é a concordância do adjetivo com o substantivo. A outra é a do verbo com o sujeito.

- A. ( ) Mecanismo sintático o qual expressa a associação de elementos da frase, a concordância pode ser nominal, se concordar o adjetivo com o substantivo, ou verbal, se concordar com o sujeito.
- B. ( ) A concordância que é um mecanismo sintático, e que expressa a associação de elementos da frase, pode ser nominal quando se concorda o adjetivo e substantivo, ou verbal quando se concorda o verbo com o sujeito.
- C. ( ) A concordância, cujo mecanismo sintático tem a finalidade de expressar a associação de elementos da frase, pode ser nominal, na qual o adjetivo concorda com o sujeito, ou verbal, onde é a do verbo com o sujeito.
- D. ( ) A concordância, mecanismo sintático que expressa a associação de elementos da frase, pode ser nominal – concordância do adjetivo com o substantivo –, ou verbal – concordância do verbo com o sujeito.
- E. ( ) A concordância, que é um mecanismo sintático que expressa a associação de elementos da frase, pode ser, respectivamente, nominal ou verbal, as quais são o adjetivo com o substantivo e o verbo com o sujeito.

Instruções para as questões 40 e 41.

Os grupos de frases que compõem as questões “40 e 41” não expressam, com a necessária propriedade, correção, clareza, ênfase e concisão, a relação de sentido entre as frases. Não contrariando as relações sugeridas, assinale, sob os aspectos estilístico e gramatical, a opção que apresenta melhor redação.

- 40.** (ITA-1990) Para *Cassiano Ricardo* em “*Martim Cererê*” a oficina das raças é o Brasil. A matéria-prima: o branco, o negro e o índio. Mediante miscigenação esses três deram origem ao mameluco, mulato e o cafuzo. Os mesmos correspondem respectivamente ao índio com o branco, branco com negro e negro com índio.
- A. ( ) Em “*Martim Cererê*”, segundo *Cassiano Ricardo*, a oficina das raças é o Brasil e a matéria-prima é o branco, o negro e o índio. Esses três, por miscigenação, deram origem ao mameluco, mulato e ao cafuzo, os quais correspondem respectivamente: índio com branco, branco com negro e negro com índio.
- B. ( ) De acordo com *Cassiano Ricardo* em “*Martim Cererê*”, a oficina das raças é o Brasil, cuja matéria-prima - o branco, o negro e o índio - deu, mediante miscigenação, a seguinte origem: o mameluco, o mulato e o cafuzo, que correspondem respectivamente a índio com branco, branco com negro e negro com índio.



- C. ( ) Segundo *Cassiano Ricardo*, em “*Martim Cererê*”, a oficina das raças é o Brasil; a matéria-prima são o branco, o negro e o índio, os quais, por miscigenação, deram origem ao mameluco - índio com branco -, ao mulato - branco com negro - e ao cafuzo - negro com índio.
- D. ( ) Para *Cassiano Ricardo*, em “*Martim Cererê*” a oficina das raças é o Brasil, e o branco, o negro e o índio são a matéria-prima, a qual, mediante miscigenação, originou o mameluco, mulato e ao cafuzo que têm a seguinte correspondência: índio com branco, branco com negro e negro com índio.
- E. ( ) Em “*Martim Cererê*”, para *Cassiano Ricardo*, a oficina das raças é o Brasil; e a matéria-prima, por miscigenação - o branco, o negro e o índio - deu à seguinte origem: o mameluco - índio com branco, o mulato - branco com índio e ao cafuzo - negro com índio.

- 41.** (ITA-1990) Sua obra de ficção abrange as regiões urbanas. E também as rurais. Deu uma visão histórica de nossa formação como povo. Às vezes, uma visão mítica. Isso sem ter-se limitado a sua época.
- A. ( ) Sua obra de ficção que não se limitou à sua época, deu uma visão histórica e às vezes mítica de nossa formação como povo, abrangendo não somente as regiões urbanas como também as rurais.
- B. ( ) Abrangendo tanto as regiões urbanas como as rurais, sua obra de ficção, sem ter-se limitado a sua época, também deu uma visão histórica de nossa formação como povo e às vezes, mítica.
- C. ( ) Dando uma visão histórica de nossa formação como povo - às vezes mítica -, sua obra de ficção abrange não somente as regiões urbanas mas também as rurais. Fê-lo tudo isso sem ter-se limitado à sua época.
- D. ( ) Sem limitar-se a sua época, sua obra de ficção, dando às vezes uma visão mítica e histórica de nossa formação como povo, abrange as regiões urbanas, bem como as rurais.
- E. ( ) Sua obra de ficção abrange tanto as regiões urbanas quanto as rurais; sem limitar-se à sua época, deu uma visão histórica, e às vezes mítica, de nossa formação como povo.

- 42.** Observe as frases abaixo quanto à pontuação:

- (1) Muito estimado, como pássaro de gaiola dá o pintassilgo, quando cruzado, com o canário-do-reino, um híbrido chamado pintagol.
- (2) Muito estimado como pássaro de gaiola, dá o pintassilgo, quando cruzado com o canário-do-reino, um híbrido chamado pintagol.
- (3) Nas minas, no final do século XVIII, viviam-se momentos de insatisfação - a lembrança de um passado perdido -, que propiciaram novas atitudes e novos laços de solidariedade entre os homens.
- (4) Pênalti, ou penalidade máxima no futebol, é a falta máxima, dentro da grande área cometida por jogador que defende, que é punida, com um tiro direto - sem barreira, a onze metros do gol.

Estão corretas:

- A. ( ) 1 - 4 - 5                      B. ( ) 2 - 3  
D. ( ) 2 - 4 - 5                      C. ( ) 1 - 3 - 5  
E. ( ) 2 - 4

- 43.** (ITA-1990) Vi, mas não \_\_\_\_; o policial viu, e também não \_\_\_\_; dois agentes secretos viram, e não \_\_\_\_\_. Se todos nós \_\_\_\_\_, talvez \_\_\_\_\_ tantas mortes.
- A. ( ) intervi - entrevi - intervieram - tivéssemos intervindo - teríamos evitado.
- B. ( ) me precavi - se precaveio - se precaveram - nos precavíssemos - não teria havido.
- C. ( ) me contive - se conteve - contiveram - houvéssimos contido - tivéssemos impedido.
- D. ( ) me precavi - se precaveu - precaviram - precavéssemos-nos - não houvesse.
- E. ( ) intervim - interveio - intervieram - tivéssemos intervindo - houvéssimos evitado.

- 44.** (ITA-1990) Assinale a correta:
- A. ( ) Peça e receberá; procura e achará; bate a porta e ela lhe será aberta.
- B. ( ) Pedi e receberéis; procurai e achareis, batei à porta e ela vos será aberta.
- C. ( ) Pede e receberás; procure e acharás; bate a porta e ela te será aberta.
- D. ( ) Peça e receberéis; procurai e achareis; batei à porta e ela vos será aberta.
- E. ( ) Peça e receberá; procure e achará; bata à porta e ela te será aberta.

- 45.** (ITA-1990) Dadas as frases:
- (1) Dirija com segurança, conservando sempre a direita.
- (2) Conserve na direita nas autos-estrada.



- (3) Em auto-estradas, mantenha-se à esquerda.  
(4) À noite, luz baixa ao cruzar veículos.  
(5) À tardinha, luz baixa ao cruzar-se com veículo.  
(6) Trânsito proibido das 0h às 5 hs.  
(7) Trânsito proibido da 0h às 5 h.

Estão corretas:

- A. ( ) 1 - 2 - 4 - 6  
B. ( ) 3 - 5 - 7  
C. ( ) 2 - 4 - 6  
D. ( ) 1 - 3 - 5 - 6  
E. ( ) 2 - 4 - 7

Antes de responder à questão de número 46, leia com atenção o texto abaixo:

### Sugestão

*Sede assim - qualquer coisa  
Serena, isenta, fiel.  
Flor que se cumpre,  
Sem pergunta.*

5 — *Onda que se esforça,  
por exercício desinteressado.  
Lua que envolve igualmente  
os noivos abraçados  
e os soldados já frios.*

10 — *Também como este ar da noite:  
sussurrante de silêncio,  
cheio de nascimentos e pétalas.  
Igual à pedra detida,  
sustentando seu demorado destino.*

15 — *E à nuvem, leve e bela,  
vivendo de nunca chegar a ser.*

*À cigarra, queimando-se em música,  
ao camelo que mastiga a sua longa solidão,  
ao pássaro que procura o fim do mundo,*

20 — *ao boi que vai com inocência para a morte*

*Sede assim qualquer coisa  
serena, isenta, fiel.  
Não como o resto dos homens.*

**46** (ITA-1991) Assinale a opção em que ocorreu a figura de estilo chamada “paradoxo”:

- A. ( ) “Flor que se cumpre, sem pergunta”.  
B. ( ) “e os soldados já frios”.  
C. ( ) “sussurrante de silêncios”.  
D. ( ) “sustentando seu demorado destino”.  
E. ( ) “ao pássaro que procura o fim do mundo”.

**47.** (ITA-1991) Assinale a opção correta quanto à pontuação:

- A. ( ) Dos andares mais altos do Banco Central onde está instalada, a equipe do FMI pode avistar o prédio do Congresso Nacional - um mundo à parte, na Brasília - que sente os primeiros efeitos da recessão.  
B. ( ) Dos andares mais altos do Banco Central onde está instalada a equipe do FMI, pode avistar o prédio do Congresso Nacional um mundo à parte na Brasília que sente os primeiros efeitos da recessão.  
C. ( ) Dos andares mais altos do Banco Central, onde está instalada a equipe do FMI, pode avistar o prédio do Congresso Nacional um mundo à parte na Brasília, que sente os primeiros efeitos da recessão.  
D. ( ) Dos andares mais altos do Banco Central, onde está instalada, a equipe do FMI pode avistar o prédio do Congresso Nacional, um mundo à parte na Brasília que sente os primeiros efeitos da recessão.  
E. ( ) Dos andares mais altos do Banco Central onde está instalada, a equipe do FMI pode avistar o prédio do Congresso Nacional; um mundo à parte na Brasília, que sente os primeiros efeitos da recessão.

### Instruções para as questões 48 e 49.

As quatro frases de cada uma das questões abaixo podem ser corretas ou incorretas. Verifique quais apresentam, ou não, infração de regras gramaticais e/ou restrições estilísticas e, observando cuidadosamente o número de cada questão, assinale:

- A) Se for correta somente **a frase 1**.  
B) Se for correta somente **a frase 2**.  
C) Se for correta somente **a frase 3**.  
D) Se for correta somente **a frase 4**.  
E) Se todas forem **incorretas**.

### 48. (ITA-1991)

- O arroz parboilizado, o agulhinha com coloração amarela, segundo o proprietário da arrozeira, contém mais vitaminas do que o agulhinha branco.
  - O médico, que defendia a discriminação do aborto, havia dito: “Sou a favor de que o aborto saia já do Código Penal!”
  - Um agente de segurança daquele “shopping” surpreendeu, há uns dias atrás, uma caixa fraudando a empresa em cumplicidade com uma amiga.
  - Previsão: céu nublado, com períodos de chuva forte todo dia em lugares isolados.
- A. ( ) A  
B. ( ) B  
C. ( ) C  
D. ( ) D  
E. ( ) E

**49.** (ITA-1991)

1. Muitos são, ao mesmo tempo, portadores de doenças cardíacas e reumatológicas.
  2. Você pode ir ao Banco para mim? Inclusive, vai chover, e eu tenho que passar pelo colégio para apanhar a Marina, antes das 14:30 hs.
  3. O Governo quer saber porque insumos e tratores custam menos ao exportar do que no mercado interno.
  4. As forças policiais não interviram apesar de já haver ocorrido três choques entre os grevistas.
- A. ( ) A                      B. ( ) B  
C. ( ) C                      D. ( ) D  
E. ( ) E

**50.** (ITA-1991) Assinale a opção que melhor reestrutura - gramatical e estilisticamente - o seguinte grupo de frases.

“Os Estados Unidos e a União Soviética se revezam no primeiro lugar no quadro geral de medalhas. Isso desde os Jogos de Londres, acontecidos em 1948. Para esses países a hipótese da formação de uma única equipe olímpica alemã surge como ameaça. É que no esporte, área onde as negociações tendem a ser mais amenas, essa hipótese também surge como uma possibilidade factível.”

- A. ( ) Os Estados Unidos e União Soviética se revezam no primeiro lugar no quadro geral de medalhas desde os Jogos de Londres em 1948, e a hipótese da formação de uma única equipe olímpica alemã surge para os mesmos como possibilidade factível e como uma ameaça, pois o esporte é área em que as negociações tendem a ser mais amenas.
- B. ( ) A hipótese da formação de uma única equipe alemã surge como uma possibilidade factível e como uma clara ameaça para os Estados Unidos e a União Soviética, no esporte, área onde as negociações tendem a ser mais amenas, embora aqueles países se revezem no primeiro lugar no quadro geral de medalhas, desde os Jogos de Londres, em 1948.
- C. ( ) Desde 1948, nos Jogos de Londres, Estados Unidos e União Soviética se revelam no primeiro lugar no quadro geral de medalhas, mas a hipótese da formação de uma única equipe olímpica alemã surge como forte possibilidade factível e ameaça também para eles no esporte, área na qual as negociações tendem a ser mais amenas.

D. ( ) No esporte, área em que as negociações tendem a ser mais amenas, a hipótese da formação de uma única equipe olímpica alemã surge como forte possibilidade e clara ameaça para os Estados Unidos e União Soviética, países que se revelam no primeiro lugar no quadro geral de medalhas, desde os Jogos de Londres, em 1948.

E. ( ) Apesar dos Estados Unidos e União Soviética se revezarem no primeiro lugar no quadro geral de medalhas, desde os Jogos de Londres, em 1948, a hipótese para eles da formação de uma única equipe alemã surge como uma ameaça, pois é no esporte, área onde as negociações alemãs tendem a ser as mais amenas, que essa hipótese surge como uma possibilidade fortemente factível.

**51.** (ITA-1991) Assinale a opção em que todas as formas verbais estão corretas:

- A. ( ) aguo, coubéssemos, ceíamos, descreu, confieis;
- B. ( ) revir, possui, provêem, reouve, precaveu;
- C. ( ) benquisesse, valho, caibo, cri, trouxesse;
- D. ( ) lêem, crêem, dêem, vêem, eles retém;
- E. ( ) ides, vades, frijo, entreviu, riais.

**52.** (ITA-1992) Assinale a opção que preenche corretamente os espaços:

“Mesmo que \_\_\_\_\_ outros imprevistos, haja vista que já \_\_\_\_\_ alguns, \_\_\_\_\_ todas as necessidades se \_\_\_\_\_ tranqüilos.”

- A. ( ) haja - ocorreram - proviremos - nos mantermos
- B. ( ) advenham - sobrevieram - proveremos a - nos mantivermos
- C. ( ) avissem - sobreviram - proviríamos - mantivéssemos-nos
- D. ( ) adviessem - têm sobrevivendo - previremos - mantermo-nos
- E. ( ) advierem - têm havido - supriremos a - mantivermo-nos

**53.** (ITA-1992) Observe as frases abaixo:

- I. A maioria das pesquisas a que se procederam não contribui para aumentar as informações de que já se dispunham.
- II. O jornal a que assisto começa às quinze para as oito.
- III. Amar e odiar são próprios de ser humano. Quanto à concordância (verbal ou nominal), está(ão) correta(s):

- A. ( ) Apenas a I
- B. ( ) Apenas a II
- C. ( ) Apenas a III
- D. ( ) Apenas a II e III
- E. ( ) Todas

**54.** (ITA-1992) Assinale o texto que estilística e gramaticalmente expressa, com a necessária clareza, ênfase e correção, a indicação dada nos parênteses ou, quando não formulada, sugerida pelo próprio enunciado.

- I. A acácia-negra ocupa 160 mil hectares só no Rio Grande do Sul.  
(consequência de III)
  - II. Da casca da acácia-negra é extraído o tanino.  
(O.S. Adjativa)
  - III. A acácia-negra é a terceira cultura florestal do país em importância econômica.  
(Oração principal)
  - IV. O tanino é uma substância usada em couros e peles (curtir).
- A. ( ) Em virtude de ocupar 160 mil hectares só no Rio Grande do Sul, a acácia-negra é a terceira cultura florestal do País em importância econômica, de cuja casca se extrai o tanino – substância usada para curtir couros e peles.
  - B. ( ) A acácia-negra ocupa 160 mil hectares só no Rio Grande do Sul, objetivando a extração do tanino para se curtirem couros e peles, sendo, pois, a terceira cultura florestal do país.
  - C. ( ) A acácia-negra da qual é extraído o tanino, substância usada na curtição de couros e peles, é a terceira cultura florestal do País em importância econômica; ocupa, por isso, 160 mil hecs. só no Rio Grande do Sul.
  - D. ( ) A acácia-negra, de cuja casca é extraído o tanino – substância usada no curtimento de couros e peles, é a terceira cultura florestal do País em importância econômica, a ponto de ocupar, só no Rio Grande do Sul, 160 mil hectares.
  - E. ( ) Substância usada no curtume de couros e peles, o tanino é extraído da casca da acácia-negra, que ocupa, só no Rio Grande do Sul, 160 mil hec., sendo que ela é a terceira cultura florestal do País em importância econômica.

**55.** (ITA-1992) Assinale a opção que melhor reestrutura – gramatical e estilisticamente – o seguinte grupo de frases:

As diferentes formas de governo, através dos séculos, não foram senão variantes da tríade clássica de uma das obras de Aristóteles. Esta obra chama-se Política. As diferentes formas de governo são: a monarquia, a aristocracia e a democracia: cada uma delas tem perversão, as quais respectivamente são a tirania, a oligarquia e a demagogia.

- A. ( ) As diferentes formas de governo, através dos séculos, que são a monarquia, a aristocracia e democracia, têm, cada uma delas, perversão: a da 1ª é a tirania, a da 2ª é a oligarquia e a da 3ª é a demagogia; e não foram senão variantes da tríade clássica de uma das obras de Aristóteles: Política.
- B. ( ) As diferentes formas de governo - a monarquia, a aristocracia e a democracia - cada uma delas com a sua respectiva perversão: tirania, oligarquia e demagogia não foram senão variantes, através dos séculos, da tríade clássica de uma das obras de Aristóteles, chamada 'Política'.
- C. ( ) Como variantes da tríade clássica da "Política", uma das obras de Aristóteles, temos, através dos séculos, as diferentes formas de governo, cada qual com sua respectiva perversão: tirania, aristocracia e democracia.
- D. ( ) Foi de "Política", obra clássica de Aristóteles, que surgiu a tríade de diferentes formas de governo, de onde se originaram, através dos séculos, todas as três, cada qual com a sua perversão: a da monarquia é a tirania, a da aristocracia é a oligarquia, e a da democracia, a demagogia.
- E. ( ) Através dos séculos, as diferentes formas de governo não foram senão variantes da tríade clássica de "Política", uma das obras de Aristóteles: a monarquia, cuja perversão é a tirania; a aristocracia, cuja perversão é a oligarquia; e a democracia, cuja perversão é a demagogia.

Para as questões de "56 a 58", assinale a opção que completa corretamente as lacunas:

- 56.** (ITA-1993) O mero fato \_\_\_\_\_ Universidades \_\_\_\_\_ divulgado as avaliações já \_\_\_\_\_ um avanço: reflete a admissão do seu dever de prestar contas à sociedade que \_\_\_\_\_.
- A. ( ) de as – haverem – constitui – as custeia
  - B. ( ) de as – haver – se contituem em – lhes custeou
  - C. ( ) das – haverem – constitui – as proviu
  - D. ( ) de – ter – constitui – lhes provê
  - E. ( ) das – terem – contituem – as provêem

**57.** (ITA-1993) Antigamente, os esquartejamentos consistiam em prender um cavalo \_\_\_\_\_ do condenado, obrigando em seguida \_\_\_\_\_ animais \_\_\_\_\_ em direções opostas até \_\_\_\_\_ do tronco os membros do supliciado.

- A. ( ) às partes apendiculares, esses, correrem, se desagregar
- B. ( ) a cada um dos pés e braços, os quatro, a puxarem, separarem-se
- C. ( ) aos braços e pernas, aos, pucharem, isolar-se
- D. ( ) nos braços e pernas, ambos os, mover-se, se desunirem
- E. ( ) em cada braço e perna, estes, a desembestar, dividirem

**58.** (ITA-1993) Se \_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_ político, \_\_\_\_\_ o cordialmente e \_\_\_\_\_ lhe que político aqui não são mais \_\_\_\_\_.

- A. ( ) veres – proeminente – saúde – diga – bem-vistos
- B. ( ) vir – iminente – saúda – diz – benquistos
- C. ( ) vires – eminente – saúda – dize – bem-vindos
- D. ( ) ver – insipiente – saúde – diga – malquistos
- E. ( ) virdes – incipiente – saudai – dizei – benvindos

**59.** (ITA-1993) Dadas as afirmações:

- I. Usa-se geralmente a vírgula entre palavras, membros e orações de idêntica função.
- II. Com excessão das aditivas, antes das quais ela nunca pode ser usada, a vírgula deve preceder as demais conjunções coordenativas.
- III. Traço de certa extensão, maior que o hífen, o travessão, além de indicar mudança de interlocutor, pode substituir os parênteses, as vírgulas e os dois pontos.
- IV. Além de separar conceitos, idéias e indicar o término do raciocínio e do período, o ponto e vírgula separa as partes principais de uma frase cujas partes subalternas têm de ser separadas por vírgulas.

Pode-se dizer que:

- A. ( ) apenas a I e III estão corretas.
- B. ( ) apenas a II e IV estão corretas.
- C. ( ) apenas a II e está incorreta.
- D. ( ) apenas a III está incorreta.
- E. ( ) apenas a IV está incorreta.

**60.** (ITA-1993) As quatro frases a seguir podem estar corretas ou incorretas. Verifique quais apresentam, ou não, infração de regras gramaticais.

- I. Não sereis vós quem direis para eu não pagar a dívida.
- II. As transformações por que têm passado os brasileiros fazem-nos acreditar em futuro promissor
- III. Embora possa haver muitos aprovados, prevêem-se que muitos deles, por falta de recursos, haverão de desistir da matrícula.
- IV. Somente nesta quinzena, vendeu-se um milhão de bilhetes de loteria, cujo processo de produção, onde se utiliza tecnologia norte-americana, foi totalmente automatizado.

Pode-se afirmar das frases acima que :

- A. ( ) todas estão incorretas.
- B. ( ) apenas a I está incorreta.
- C. ( ) apenas a I e II estão corretas.
- D. ( ) apenas a III e IV estão corretas.
- E. ( ) todas estão corretas.

**61.** (ITA-1993) No verso “A poesia - é uma luz \_\_\_\_\_ e alma - uma ave \_\_\_\_\_” ocorrem:

- A. ( ) prosopopéia e hipérbato
- B. ( ) metonímia e antítese
- C. ( ) hipérbole e eufemismo
- D. ( ) pleonasma e silepse
- E. ( ) metáfora e zeugma

**62.** (ITA-1994) Assinale a opção que corresponde ao texto com melhor redação:

- A. ( ) Os peregrinos chegaram em Juazeiro, onde realizam-se romarias e costuma-se haver milagres, encontrando a referida cidade inundada pelas chuvas torrenciais.
- B. ( ) Quando chegaram a Juazeiro, local onde se realizam romarias e muitos milagres, os peregrinos encontraram a cidade inundada pelas chuvas que desabaram copiosamente sobre ela.
- C. ( ) Os peregrinos, quando chegaram a Juazeiro – cidade de romarias e de milagres, encontraram-na inundada pelas chuvas.
- D. ( ) Os peregrinos encontraram a cidade de Juazeiro, que é onde se realizam romarias e costuma haver milagres, inundada por copiosas chuvas torrenciais.
- E. ( ) Os peregrinos que chegaram a Juazeiro, cidade na qual costuma haver milagres e para onde se realizam romarias, encontraram-na inundada pelas chuvas torrenciais desabadas sobre ela.

**63.** (ITA-1994) Assinale a opção que completa corretamente as frases a seguir:

- I. O viajante, antes de sair \_\_\_\_ indispensável  
II. Fundamentalmente, a lei tem por fim \_\_\_\_ os erros  
III. “Sou a que chora sem saber \_\_\_\_”  
A. ( ) proveu-se do – proscreever – por quê  
B. ( ) preveu-lhe o – prescrever – o porquê  
C. ( ) proviu-se do – discriminar – por que  
D. ( ) proveio-lhe o – descriminar – por quê  
E. ( ) previu o – infligir – porque.

**64.** (ITA-1994) Assinale a opção que completa corretamente as lacunas:

Ao \_\_\_\_ minha frente, \_\_\_\_, \_\_\_\_ as atropelaria, e a Rosa ateve-se em mim para não bater com a cabeça no \_\_\_\_.

- A. ( ) passar à – freei – se não – pára-brisa  
B. ( ) passarem à – freiei – senão – parabrisa  
C. ( ) passarem na – freei – senão – pára-brisa  
D. ( ) passar a – freiei – se não – pára-brisa  
E. ( ) passarem a – freei – senão – parabrisa

**65.** (ITA-1994) Assinale a opção que corresponde ao texto com melhor pontuação:

- A. ( ) As crianças alvoroçadas correram para o jardim e o palhaço, que já tinha chegado alegremente, pôs-se a cantar.  
B. ( ) As crianças, alvoroçadas correram para o jardim: e o palhaço, que já tinha chegado, alegremente, pôs-se a cantar.  
C. ( ) As crianças alvoroçadas correram para o jardim e o palhaço que já tinha chegado, alegremente pôs-se a cantar.  
D. ( ) As crianças, alvoroçadas, correram para o jardim, e o palhaço, que já tinha chegado, alegremente, pôs-se a cantar.  
E. ( ) As crianças, alvoroçadas, correram para o jardim; e o palhaço, que já tinha chegado, alegremente pôs-se a cantar.

**66.** (ITA-1994) Idem à anterior:

- A. ( ) “Entenda, quem puder, este retrato: ostenta dedos, dez, em cada mão; tem cinco, juntamente em mãos e pés; são vinte, e cinco em cada um dos pés estão.”  
B. ( ) “Entenda. Quem puder, este retrato ostenta dedos: dez, em cada mão tem cinco; juntamente em mãos e pés são vinte; e cinco em cada um dos pés estão.”  
C. ( ) “Entenda quem puder, este retrato ostenta : dedos, dez, em cada mão; tem cinco juntamente em mão e pés; são vinte; e cinco, em cada um dos pés estão.”

- D. ( ) “Entenda, quem puder, este retrato: ostenta dedos dez; em cada mão tem cinco; juntamente em mãos e pés são vinte, e cinco em cada um dos pés estão.”  
E. ( ) “Entenda quem puder este retrato. Ostenta dedos: dez, em cada mão tem cinco juntamente; em mãos e pés – são vinte e cinco – em cada um dos pés estão”

**67.** (ITA-1994) Em qual das opções há erro na identificação das figuras?

- A. ( ) “Um dia hei de ir embora / Adormecer no derradeiro sono.” (Eufemismo)  
B. ( ) “A neblina, roçando o chão, ciccia, em prece.” (Prosopopéia)  
C. ( ) Já não são tão freqüentes os passeios noturnos na violenta R. de Janeiro. (Silepse de número)  
D. ( ) “E fria, fluente, frouxa claridade / Flutua...” (Aliteração)  
E. ( ) “Oh sonora audição colorida do aroma.” (Sinestesia)

**68.** (ITA-1995) O item 2 deve apresentar a oração reduzida correta, no infinito flexionado ou não.

- A. ( ) 1 – Para que soubésseis do ocorrido, trouxe-vos o jornal.  
2 – Para saberdes do ocorrido, trouxe-vos o jornal.  
B. ( ) 1 – Afirmou que estávamos prontos.  
2 – Afirmou estarmos prontos.  
C. ( ) 1 – Afirmaram que estavam prontos.  
2 – Afirmaram estar prontos.  
D. ( ) 1 – Mandou que saíssemos.  
2 – Mandou-nos sairmos.  
E. ( ) 1 – Pediu que trouxésseis o material.  
2 – Pediu trazerdes o material.

Da questão **69** a **76** em diante indique a alternativa em que há erro gramatical.

**69.** (ITA-1995)

- A. ( ) Quando você reouver o carro, estará “depenado”.  
B. ( ) Bom seria que vocês se contivessem em seus desejos.  
C. ( ) Perdi dinheiro mas o reouve.  
D. ( ) É necessário que você se precaveja contra contaminações.  
E. ( ) Eu me comprouve em olhar apenas.



**70.** (ITA-1995)

- A. ( ) Eles se entreteram, contando piadas.
- B. ( ) Entrevi uma solução em todo este emaranhado.
- C. ( ) Para que não caiais em tentação, rezai.
- D. ( ) Ele se proveu do necessário e partiu.
- E. ( ) Quando o vir de novo, reconhecê-lo-ei.

**71.** (ITA-1995)

- A. ( ) Se isto lhe convir, aceite.
- B. ( ) Eu não cri, ele creu.
- C. ( ) Espero que você não me denigra.
- D. ( ) Não tínhamos chegado ainda mas ele já tinha escrito o aviso.
- E. ( ) Ele proveio de um lugar suspeito.

**72.** (ITA-1995)

- A. ( ) Não vá sem eu.
- B. ( ) Ele não é contra eu estar aqui.
- C. ( ) Ele é contra mim, estar aqui é crime.
- D. ( ) Com eu estar doente, não houve palestra.
- E. ( ) Não haveria entre mim e ti entendimento possível.

**73.** (ITA-1995)

- A. ( ) Disse que daria o recado a ele e lho dei.
- B. ( ) Prometeu a resposta a nós e no-la concedeu.
- C. ( ) Já vo-los mostrarei, esperai.
- D. ( ) Procuravam João, encontraram-no.
- E. ( ) Quando lhe vi, espantei-me.

**74.** (ITA-1995)

- A. ( ) Os estudantes estamos sempre atentos a reformas.
- B. ( ) Nós fomos o cabeça da revolta.
- C. ( ) Tu o dissestes, redagüiu ele.
- D. ( ) Caro Diretor, sois o timoneiro necessário a esta empresa.
- E. ( ) Vossa Excelência fique avisado de que o caso é grave.

**75.** (ITA-1995)

- A. ( ) Sei por que razão ele se indispõe comigo.
- B. ( ) Ele saiu porque estava aqui há muito tempo?
- C. ( ) Não agüenta mais isso porquê... por que é demais?
- D. ( ) foi a mais de dois quilômetros que o avisei.
- E. ( ) além de ser mau sujeito, é mal humorado.

**76.** (ITA-1995)

- A. ( ) Àquelas daria a atenção devida?
- B. ( ) Nem a traças nem a cupins conheço a solução.
- C. ( ) Havia duas moças, você deu importância à de cá mas não a de lá.
- D. ( ) Àquela prefiro esta.
- E. ( ) Dobre à esquina, à direita, e você estará junto à Machado de Assis, bela praça.

**77.** (ITA-1996) Assinale a opção que melhor reestrutura – gramatical e estilisticamente - o seguinte grupo de frases:

Uma tarde destas eu vinha da cidade para o Brás. Então encontrei no Metrô uma garota aqui do bairro. E eu conheço essa garota de vista e de chapéu.

- A. ( ) Ao vir da cidade para o Brás uma tarde destas, encontrei no Metrô uma garota aqui do bairro que conheço de vista e de chapéu.
- B. ( ) Uma tarde destas, quando eu vinha da cidade para o Brás de chapéu, no Metrô aqui do bairro, encontrei uma garota, a qual conheço de vista.
- C. ( ) Ao vir da cidade para o Brás, uma tarde destas, encontrei, aqui do bairro, uma garota no Metrô que conheço de vista e de chapéu.
- D. ( ) Eu conheço uma garota aqui do bairro, de vista e de chapéu, que encontrei no Metrô, quando vinha da cidade para o bairro.
- E. ( ) Uma tarde destas, vindo da cidade para o Brás, encontrei no Metrô uma garota aqui do bairro, a qual conheço de vista e de chapéu.

**78.** (ITA-1996) Assinale a opção correspondente ao período que tem melhor redação, considerando correção, clareza, concisão e elegância.

- A. ( ) Duas são as personalidades de destaque do Barraco brasileiro: o baiano Gregório de Matos e o português Vieira; este porém, estudioso das duas literaturas, pertence, segundo a crítica, mais à literatura brasileira que portuguesa.
- B. ( ) No Barroco brasileiro, duas personalidades se destacam: Gregório de Matos e Vieira; este, nascido em Portugal mas estudado nas duas literaturas, pertence, segundo a crítica, mais à literatura brasileira que à literatura portuguesa.
- C. ( ) Gregório de Matos e Vieira são as duas personalidades que se destacaram no Barroco brasileiro; sendo que o último porém, segundo a crítica, pertence mais à literatura brasileira que à portuguesa, pois, embora português de origem, estudou ambas.

- D. ( ) No Barroco brasileiro, destacaram-se duas personalidades: Gregório de Matos – o Boca do Inferno – e Pe. Vieira, cuja origem, de Lisboa, não o impediu de estudar ambas as literaturas, pertencendo pois, segundo alguns críticos, mais ao Brasil que Portugal.
- E. ( ) Proeminentes personalidades, Gregório de Matos e Vieira destacam-se no Barroco brasileiro; este porém, mesmo nascido em Lisboa mas estudioso das duas literaturas, pertence, segundo a crítica especializada, mais à literatura brasileira que a de Portugal.

**79.** (ITA-1996) Assinale a opção que completa corretamente as lacunas.

Se \_\_\_\_\_ as conseqüências, não \_\_\_\_\_ na discussão. Entretanto não \_\_\_\_\_, e \_\_\_\_\_.

- A. ( ) previsse – teria intervindo – titubeou – interveio.
- B. ( ) prevesse – interviria – se conteve – interviu.
- C. ( ) tivesse previsto – interferiria – hesitou – interviu.
- D. ( ) predissesse – teria intervido – se absteve – interveio.
- E. ( ) previsse – se intrometeria – titubiou – interferiu.

**80.** (ITA-1997) Na língua falada em situações informais, é comum um texto como o seguinte:

*“Detesto aquele rapaz. Se eu tiver a chance de não cumprimentar ele, eu não cumprimento. Conheço ele há mais de 10 anos atrás. Quando pedi ajuda, ele me virou as costas. Tenho amigos que acham que deve-se perdoar estas coisas. Me recuso a aceitar isto.”*

Assinale a opção que corresponde à melhor correção do texto acima, de acordo com as normas da língua escrita formal.

- A. ( ) Detesto aquele rapaz. Se eu tiver a chance de não cumprimentá-lo, eu não cumprimento. Conheço-o há mais de 10 anos atrás. Quando lhe pedi ajuda, ele me virou as costas. Tenho amigos que acham que deve-se perdoar estas coisas. Recuso-me a aceitar isto.
- B. ( ) Detesto aquele rapaz. Se eu tiver a chance de não lhe cumprimentar, eu não cumprimento. Conheço-o há mais de 10 anos atrás. Quando pedi ajuda, ele me virou as costas. Tenho amigos que acham que devem-se perdoar estas coisas. Recuso-me a aceitar isso.

- C. ( ) Detesto aquele rapaz. Se eu tiver a chance de não o cumprimentar, eu não o cumprimento. Conheço-lhe há mais de 10 anos. Quando lhe pedi ajuda, ele virou-me as costas. Tenho amigos que acham que deve perdoar-se essas coisas. Recuso-me a aceitar isso.
- D. ( ) Detesto aquele rapaz. Se eu tiver a chance de não cumprimentá-lo, eu não o cumprimento. Conheço-o há mais de 10 anos. Quando lhe pedi ajuda, ele me virou-me as costas. Tenho amigos que acham que se devem perdoar essas coisas. Recuso-me a aceitar isso.
- E. ( ) Detesto aquele rapaz. Se eu tiver a chance de não o cumprimentar, eu não cumprimento. Conheço-o há mais de 10 anos atrás. Quando pedi ajuda, ele virou-me as costas. Tenho amigos que acham que se deve perdoar estas coisas. Recuso-me a aceitar isso.

Instruções para a questão **81**.

Para que os enunciados apresentados na questão **12** se reduzam a uma só frase, algumas adaptações e correções podem e devem ser necessárias.

Assinale a opção que melhor os reestrutura – gramatical e estilisticamente, respeitando as sugestões dadas nos parênteses e as relações de sentido sugeridas pelos próprios enunciados.

**81.** (ITA-1997) “Após uma partida, sempre acabava mais cansado da cabeça do que das pernas.” Zico revela isso em seu livro. Ele também disse a razão: era muito grande o seu esforço em pensar em tudo e pensar o tempo todo. Poucos têm talentos e muitíssimos poucos são inteligentes. Zico era um desses poucos.

- A. ( ) Em seu livro, Zico, que tinha talento como poucos e inteligência como pouquíssimos, revela, por causa de seu esforço em pensar em tudo o tempo todo, que acabava uma partida sempre mais cansado das pernas do que da cabeça.
- B. ( ) Zico, que era um desses poucos de talento e de inteligência, revela, em seu livro, porque o seu cansaço, após uma partida, era sempre mais da cabeça que das pernas: “Esforçava-me em pensar em tudo o tempo todo.”
- C. ( ) Com o talento de poucos e a inteligência de pouquíssimos, em seu livro, Zico revela que sempre acabava uma partida mais cansado da cabeça do que das pernas, haja visto o esforço despendido em pensar, o tempo todo, em tudo.

- D. ( ) “Após uma partida, sempre acabava mais cansado da cabeça que dos pés”, revela Zico - que era talentoso como poucos e de inteligência de pouquíssimos. Segundo o Galinho de Quintinho, ainda em seu livro, a causa disso era devido ao seu esforço em pensar em tudo o tempo todo, que era muito grande.
- E. ( ) Talentoso como poucos e inteligente como pouquíssimos, Zico revela em seu livro que, após uma partida, sempre acabava mais cansado da cabeça do que das pernas, tamanho era o seu esforço em pensar em tudo, o tempo todo.

**82.** (ITA-1997) Assinale a opção cujo texto apresenta a melhor redação, considerando correção, clareza, concisão e propriedade.

- A. ( ) O porquê de a intervenção direta e indireta do Estado na economia, receita tão bem sucedida em certos países asiáticos mas nem tanto no Brasil, está na paródia de conhecido comercial: “Nossos políticos são mais criativos, mas menos honestos”.
- B. ( ) A intervenção direta e indireta do Estado na economia, receita empregada tanto no Brasil como em certos países asiáticos, deu mais certo porque nossos políticos, parodiando conhecido comercial, são mais criativos mas menos honestos que os deles.
- C. ( ) A receita - intervenção direta e indireta do Estado na economia que tanto deu certo em alguns países asiáticos - não acarretou ao Brasil os mesmos resultados porque nossos políticos, segundo paródia de conhecido comercial, “são mais criativos mas mais corruptos que os deles”.
- D. ( ) A resposta a porque a intervenção direta e indireta do Estado na economia, cuja receita deu certo em alguns países asiáticos, não tenha possibilitado melhores resultados no Brasil, parece, parodiando conhecido comercial, ser esta: “Nossos políticos são mais criativos mas menos honestos”.
- E. ( ) A resposta a por que a receita - intervenção direta e indireta do Estado na economia - deu mais certo em alguns países asiáticos do que no Brasil, parece paródia de conhecido comercial: “Nossos políticos são mais criativos, mas menos honestos”.

**83.** (ITA-1997) Assinale a opção que completa corretamente as lacunas do texto a seguir:

“Todas as amigas estavam \_\_\_\_\_ ansiosas \_\_\_\_\_ ler os jornais, pois foram informadas de que as críticas foram \_\_\_\_\_ indulgentes \_\_\_\_\_ rapaz, o qual, embora tivesse mais aptidão \_\_\_\_\_ ciências exatas, demonstrava uma certa propensão \_\_\_\_\_ arte.”

- A. ( ) meio - para - bastante - para com o - para - para a
- B. ( ) muito - em - bastante - com o - nas - em
- C. ( ) bastante - por - meias - ao - a - à
- D. ( ) meias - para - muito - pelo - em - por
- E. ( ) bem - por - meio - para o - pelas - na

## IME

### Correção de Texto

Leia com atenção o texto que se segue. Ele contém dez erros - de ortografia, acentuação gráfica, regência ou concordância - que você deverá identificar e corrigir

#### TEXTO 1

### CONFLITO E DECISÃO

Porque as nações fazem a guerra?

É razoável pensar que os atos humanos sejam comandados por motivações que compensem o esforço dispendido na ação. Pode-se perfeitamente imaginar que o valor dos objetivos devem ser suficiente elevado para explicar os sacrifícios morais, humanos e materiais, que estão implícitos na violência da guerra. Então, quais são os lucros ou vantagens que as nações indetificam na guerra? Poder-se-ia responder à essa pergunta de maneira bastante geral: o poder, o prestígio e, às vezes, sua sobrevivência; e, ainda, de uma forma mais objetiva: uma conquista territorial, um benefício comercial ou uma descompreção de seus problemas internos.

Mas, por outro lado, será que essa argumentação, voltada para uma duvidosa racionalidade dos atos humanos, não seria demasiadamente presunçosa? Não seria apenas um artifício mental, destinado a anestesiar nossas consciências, escandalizadas diante da violência que se encontra associada à condição humana? Será que como já foi referido por alguns autores - a guerra não teria apenas uma função de jogo, consagrado à dissipação de ansiedades e tensões acumuladas? Ou, ainda, ela não seria apenas o estuário de processos, através dos quais, à alegria dos homens, a agressividade coletiva romperia sem lhes pedir licença ou lhes dar satisfação?

*EGUES, Fernando F. M. - in A defesa Nacional, nº 695, Mai-Jun 81, páginas 69-70*

- 84.** (IME-1987) Escreva na coluna A a palavra incorreta e na coluna B a palavra que deverá substituí-la. Para cada erro encontrado apenas *uma* palavra deverá ser escrita na coluna A, que deverá ser substituída por uma *única* palavra - escrita na B. Quando houver necessidade de identificação, devido à existência de palavras iguais em situações diversas, identifique a linha em que se encontra o erro.

COLUNA A	COLUNA B
1. _____	1. _____
2. _____	2. _____
3. _____	3. _____
4. _____	4. _____
5. _____	5. _____
6. _____	6. _____
7. _____	7. _____

**Correção de Texto**

O texto abaixo contém incorreções gramaticais. Leia-o, com atenção, e responda.

**TEXTO 1**

**PARA CUIDAR DA BELEZA**

As mulheres modernas precisam estarem sempre em dia com o corpo, pois a aparência é o cartão de visita.

Para acabar com esse problema, foi criado na Tijuca, um instituto de beleza completo.

Em suas vagas ao Rio, conheça o instituto, que, além de todos os serviços de cabeleireiro, oferece a revitalização capilar. Este tratamento utiliza enzimas e produtos naturais, se mostrando bastante eficiente. Para um melhor resultado, também são utilizados aparelhos eletrônicos.

No tratamento facial, à limpeza de pele e plástica sem bisturi.

Nos cuidados corporais abrangem rejuvenescimento das mãos e do corpo.

O instituto, fica na Conde do Bonfim.

*(adaptado de "O globo", de 08/09/87).*

- 85.** (IME-1988) Retire do texto dez incorreções, quer quanto à grafia, à acentuação gráfica, à concordância, à regência, ou à colocação, escrevendo-as na coluna A.

- 86.** (IME-1988) Escreva, na coluna B, a forma correta, sem explicações.

Observação: A simples identificação do erro, sem a correspondente correção, não será computada como acerto.

**COLUNA A**

- a. \_\_\_\_\_
- b. \_\_\_\_\_
- c. \_\_\_\_\_
- d. \_\_\_\_\_
- e. \_\_\_\_\_
- f. \_\_\_\_\_
- g. \_\_\_\_\_
- h. \_\_\_\_\_
- i. \_\_\_\_\_
- j. \_\_\_\_\_

**COLUNA B**

- a. \_\_\_\_\_
- b. \_\_\_\_\_
- c. \_\_\_\_\_
- d. \_\_\_\_\_
- e. \_\_\_\_\_
- f. \_\_\_\_\_
- g. \_\_\_\_\_
- h. \_\_\_\_\_
- i. \_\_\_\_\_
- j. \_\_\_\_\_

**Correção do texto**

- 87.** (IME-1990) Indique no texto que segue, adaptado da revista veja - edição especial da república - págs. 72 e 73, as inadequações cometidas, para fins desta questão, contra as normas da língua culta, retificando-as a seguir.

**A ÁGUA EM SEIS DIAS**

Histórias de jovens corajosos que realizam tarefas tidas como impossível aparecem com frequência nos contos de fadas, mas são muito raras na vida real. O Rio de Janeiro assistiu, com a respiração suspensa, um episódio desse tipo em março último, na forma de uma epopéia que durou uma semana e teve como protagonista um engenheiro de 29 anos, Paulo de Frontin. Sua proeza: construir, em prazo recorde, um aqueduto com capacidade para transportar, ao longo de 40 quilômetros, 16 milhões de litros diários - e por fim dessa maneira ao tormento da falta d'água na capital do país.

Num primeiro momento, os que taxaram a empreitada de inviável pareciam levar a melhor. Como alternativa à proposta de Rui Barbosa, uma firma de engenharia, a Buarque & Havia, prontificou-se a ir buscar a água no distante Rio São Pedro, mas o governo recusou, alegando que sairia caro demais.

Foi quando, para surpresa geral, entrou em cena Paulo de Frontin, um professor da Escola Politécnica do Rio totalmente alheio à pendência política. No dia 16 de março, ele anunciou que topava a parada.

Aquela altura, o assunto havia tomado conta da cidade. Os cariocas opinavam nos cafés, formavam rodinhas na Rua do Ouvidor e nos corredores das repartições. Faziam-se apostas. Os estudantes, os republicanos e, sobretudo, o povo angustiado, todos acreditavam na água em seis dias.

Frontin, porém, não desistia. “Foi em frente com uma firmeza férrea de ianque”, descreve o escritor Raul Pompéia, autor de *O Ateneu*, “até que, na última hora do último dia do prazo, ferviam em um tumulto, na Represa do Barretão, as águas todas recolhidas na Serra do Comércio, sob a chama vermelha dos archotes da última turma de operários de volta das picadas”. Os descrentes estavam derrotados.

**INCORREÇÕES**

**CORREÇÕES**

- |           |           |
|-----------|-----------|
| 1 - _____ | 1 - _____ |
| 2 - _____ | 2 - _____ |
| 3 - _____ | 3 - _____ |
| 4 - _____ | 4 - _____ |
| 5 - _____ | 5 - _____ |

**Interpretação**

- 88.** (IME-1990) Leia com atenção o poema de Casimiro de Abreu que serve de base às respostas dos itens A e B seguintes:

**AMOR E MEDO**

**I**

Quando eu te fujo e me desvio cauto  
Da luz de fogo que te cerca, oh! bela,  
Contigo dizes, suspirando amores:  
“– Meus Deus que gelo, que frieza aquela.”

Como te enganas! meu amor é chama  
Que se alimenta no voraz segredo,  
E se te fujo é que te adoro louco...  
És bela – eu moço; tens amor – eu medo!...

Tenho medo de mim, de ti, de tudo,  
Da luz, da sombra, do silêncio ou vozes,  
Das folhas secas, do chorar das fontes,  
Das horas longas a correr velozes.

O véu da noite me atormenta em dores,  
A luz da aurora me intumesce os seios,  
E ao vento fresco do cair das tardes  
Eu me estremeço de cruéis receios.

É que esse vento na várzea – ao longe,  
Do colmo o fumo caprichoso ondeia,  
Soprando um dia tornaria incêndio  
A chama viva que teu riso ateia!

Ai! se abrasado crepitasse o cedro,  
Cedendo ao raio que a tormenta envia,  
Diz: – que seria da plantinha humilde  
Que à sombra dele tão feliz crescia?

A labareda que se enrosca ao tronco  
Torrara a planta qual queimara o galho,  
E a pobre nunca reviver pudera,  
Chovesse embora paternal orvalho!

**II**

Ai! se eu te visse no calor da sesta,  
A mão tremente no calor das tuas,  
Amarrotado o teu vestido branco,  
Soltos cabelos nas espáduas nuas!...

Ai! se eu te visse, Madalena pura,  
Sobre o veludo reclinada a meio,  
Olhos cerrados na volúpia doce,  
Os braços frouxos – palpitante o seio!...

Ai! se eu te visse em languidez sublime,  
Na face as rosas virginais do pejo,  
Trêmula a fala a protestar baixinho...  
Vermelha a boca, soluçando um beijo!...

Diz: – que seria da pureza d’anjo,  
Das vestes alvas, do candor das asas?  
– Tu te queimaras, a pisar descalça,  
– Criança louca, – sobre o chão de brasas!

No fogo vivo eu me abrasara inteiro!  
Ébrio e sedento na fugaz vertigem  
Vil, machucara com meu dedo impuro  
As pobres flores da grinalda virgem!

Vampiro infame, eu sorveria em beijos  
Toda a inocência que teu lábio encerra,  
E tu serias no lascivo abraço  
Anjo enlodado nos paúis da terra.

Depois... desperta no febril delírio,  
– Olhos pisados – como um vão lamento,  
Tu perguntaras: – qu’ê da minha e’roa?...  
Eu te diria: desfolhou-a o vento!...

Oh! não me chames coração de gelo!  
Bem vês: traí-me no fatal segredo.  
Se de ti fujo é que te adoro e muito,  
És bela – eu, moço; tens amor, eu – medo!...

- 89.** (IME-1990) Reescreva o verso 1, substituindo o adjetivo por um sinônimo não cognato.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- 90.** (IME-1990) Reescreva o penúltimo verso do poema, usando o tratamento de 3ª pessoa do singular.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



91. (IME-1990) Desenvolva a oração que fecha a terceira estrofe.

---



---



---

92. (IME-1990) Destaque um adjetivo da primeira estrofe da Parte II do poema, substituindo-o, a seguir, pela oração subordinada adjetiva equivalente.

---



---



---

93. (IME-1990) Lendo as estrofes 4 e 5 da Parte II do poema, verificamos que o autor substituiu reiteradamente um tempo verbal por outro. Cite-os.

---



---



---

94. (IME-1990) Destaque do texto uma imagem que demonstre a contaminação do elemento feminino, sua impureza e mácula.

---



---



---

95. (IME-1990) O medo perpassa todo o poema. Explique, com suas palavras, o que o poeta receia, e procure tecer com as idéias do estilo a que o texto se vincula.

---



---



---

Leia com atenção o texto que se segue, para responder às questões propostas.

### TEXTO 1

#### TRAVESSIA

Quando você foi embora  
 Fez-se noite em meu viver  
 Forte eu sou, mas não tem jeito  
 Hoje eu tenho que chorar

05 Minha casa não é minha  
 E nem é meu este lugar  
 Estou só e não resisto  
 Muito tenho pra falar.

Solto a voz nas estradas

10 Já não quero parar  
 Meu caminho é de pedra  
 Como posso sonhar?  
 Sonho feito de brisa  
 Vento vem terminar

- 15 Vou fechar o meu pranto  
 Vou querer me matar.

Vou seguindo pela vida  
 Me esquecendo de você  
 Eu não quero mais a morte

- 20 Tenho muito que viver  
 Vou querer amar de novo  
 E, se não der, não vou sofrer.  
 Já não sonho, hoje faço  
 Com meu braço o meu viver.

(Milton Nascimento e Fernando Brandt)

96. (IME-1991) Nos itens abaixo, reescreva as frases indicadas, de modo a adequá-las às situações exigidas;
- Os versos 5 e 6, dando ênfase à construção aditiva.
  - O verso 3, transformando a relação coordenativa adversativa numa relação subordinativa de mesmo valor semântico, sob a forma reduzida de gerúndio.
  - Um verso que contenha índice de linguagem coloquial, em registro formal e na ordem direta.
  - O verso 18, dando ao verbo regência equivalente.
  - A oração adverbial do verso 22, substituindo a palavra se por acaso e dando ao verbo a forma de plural.

Os textos numerados de 1 a 2, a seguir, devem ser utilizados para soluções das questões 97 a 99.

### TEXTO 1

#### Desenganos da vida humana metaforicamente

É a vaidade, Fábio, nesta vida,  
 Rosa, que da manhã lisonjeada,  
 Púrpuras mil, com ambição dourada,  
 Airosa rompe, arrasta presumida.

É planta, que abril favorecida,  
 Por mares de soberba desatada,  
 Florida galeota empavesada,  
 Sulca ufana, navega destemida.

É nau enfim, que em breve ligeireza,  
 Com presunção de Fênix generosa,  
 Galhardias apresta, alentos preza:

Mas ser planta, ser rosa, nau vistosa  
 De que importa, se aguarda sem defesa  
 Penha a nau, ferro a planta, tarde a rosa?

Gregório de Matos

**TEXTO 2**

**Mulher ao espelho**

HOJE QUE SEJA esta ou aquela,  
pouco me importa.

Quero apenas parecer bela,  
pois, seja qual for, estou morta.

Já fui loura, já fui morena,  
já fui Margarida e Beatriz.  
Já fui Maria e Madalena.  
Só não pude ser como quis.

Que mal faz, esta cor fingida  
do meu cabelo, e do meu rosto,  
se tudo é tinta: o mundo, a vida,  
o contentamento, o desgosto?  
Por fora, serei como queira  
a moda, que me vai matando.  
Que me levem pele e caveira  
ao nada, não me importa quando.

Mas quem viu, tão dilacerados,  
olhos braços e sonhos seus,  
e morreu pelos seus pecados,  
falará com Deus.

Falará, coberta de luzes,  
do ato penteado ao rubro.  
Porque uns expiram sobre cruzes,  
outros buscando-se no espelho.

Cecília Meireles

- 97.** (IME-1993) O verso final do Texto 1 apresenta um pequeno recurso comum ao estilo a que pertence - a recolha de elementos disseminados ao longo do poema.

a) *Qual a figura em que se sustenta?*

\_\_\_\_\_

b) *Qual a significação do referido verso, levando-se em conta a temática própria do estilo?*

\_\_\_\_\_

- 98.** (IME-1993) No Texto 2, qual o dualismo apresentado através dos versos 6 e 7, na esfera do feminismo?

\_\_\_\_\_

- 99.** (IME-1993) Qual o tema dos dois textos?

\_\_\_\_\_

**AS CARIDADES ODIOSAS**

Foi uma tarde de sensibilidade ou de suscetibilidade? Eu passava pela rua depressa, emaranhada nos meus pensamentos, como às vezes acontece. Foi quando meu vestido me reteve: alguma coisa se enganchara na minha saia. Voltei-me e vi que se tratava de uma mão pequena e escura. Pertencia a um menino a que a sujeira e o sangue interno davam um tom quente de pele. O menino estava de pé no degrau da grande confeitaria. Seus olhos, mais do que suas palavras meio engolidas, informavam-me de sua paciente aflição. Paciente demais. Percebi vagamente um pedido, antes de compreender o seu sentido concreto. Um pouco aturdida eu o olhava, ainda em dúvida se fora a mão da criança o que ceifara os pensamentos.

– Um doce, moça, compre um doce para mim.

Acordei finalmente. O que estivera eu pensando antes de encontrar o menino? O fato é que o pedido deste pareceu cumular uma lacuna, dar uma resposta que podia servir para qualquer pergunta, assim como uma grande chuva pode matar a sede de quem queria uns goles de água.

Sem olhar para os lados, por pudor talvez, sem querer espiar as mesas da confeitaria onde possivelmente algum conhecido tomava sorvete, entrei, fui ao balcão e disse com uma dureza que só Deus sabe explicar: um doce para o menino.

De que tinha eu medo? Eu não olhava a criança, queria que a cena, humilhante para mim, terminasse logo. Perguntei-lhe: que doce você ...

Antes de terminar, o menino disse apontando depressa com o dedo: aquelezinho ali, com chocolate por cima. Por um instante perplexa, eu me recompus logo e ordenei, com aspereza, à caixeira que o servisse.

– Que outro doce você quer? perguntei ao menino escuro.

Este, que mexendo as mãos e a boca ainda esperava com ansiedade pelo primeiro, interrompeu-se, olhou-me um instante e disse com delicadeza insuportável, mostrando os dentes: não precisa de outro não. Ele poupava a minha bondade.

– Precisa sim, cortei eu ofegante, empurrando-o para frente. O menino hesitou e disse: aquele amarelo de ovo. Recebeu um doce em cada mão, levantando as duas acima da cabeça, com medo talvez de apertá-los. Mesmo os doces estavam tão acima do menino escuro. E foi sem olhar para mim que ele, mais do que foi embora, fugiu. A caixeirinha olhava tudo:

– Afinal uma alma caridosa apareceu. Esse menino estava nesta porta há mais de uma hora, puxando todas as pessoas que passavam, mas ninguém quis dar.

Fui embora, com o rosto corada de vergonha. De vergonha mesmo? Era inútil querer voltar aos pensamentos anteriores. Eu estava cheia de um sentimento de amor, gratidão, revolta e vergonha. Mas, como se costuma dizer, o Sol parecia brilhar com mais força. Eu tivera a oportunidade de ... E para isso fora necessário um menino magro e escuro... E para isso fora necessário que outros não lhe tivessem dado um doce.

– E as pessoas que tomavam sorvete? Agora, o que eu queria saber com autocrueldade era o seguinte: temera que os outros me vissem ou que os outros não me vissem? O fato é que, quando atravessei a rua, o que teria sido piedade já se estrangulava sob outros sentimentos. E, agora sozinha, meus pensamentos voltaram lentamente a ser anteriores, só que inúteis.

(LISPECTOR, Clarice. A descoberta do mundo. Rio de Janeiro. Nova Fronteira. 1984. p. 380-3.)

**Com base na leitura do texto anterior, atenda às solicitações que se seguem:**

**100.** (IME-1996) Que fato interrompeu o pensamento da narradora?

**101.** (IME-1996) “Ele poupava a minha bondade” (linhas 37 e 38). Que atitude do menino levou a narradora a essa constatação?

**102.** (IME-1996) Depois de feita a caridade, a narradora revela sentimentos confusos. Transcreva o fragmento que comprova essa afirmativa.

**103.** (IME-1996) A narradora considera que, para exercer sua piedade, foi necessária a junção de dois fatores. Quais?

**104.** (IME-1996) Pode-se afirmar que a narradora estava imune à opinião alheia? Justifique sua resposta.

**105.** (IME-1996) A narradora concentra-se nos fatos ou na análise das reações das personagens (ela própria e o menino)?

**106.** (IME-1996) Frases para correção gramatical  
Nas frases abaixo há erros ou impropriedades. Reescreva-as e justifique a correção.

a) “A polícia não entrevistou a tempo de evitar o roubo.”

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
**Justificativa:** \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

b) “Havia bastante razões para confiarmos no teu amigo.”

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Justificativa:** \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

c) “Remeteremos, em seguida, os pedidos que encomendaram-nos.”

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Justificativa:** \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

d) “Ela veio, de modos que você agora está dispensado.”

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Justificativa:** \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

e) “Por que os namorados preferem andar só, detestando as companhias?”

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Justificativa:** \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

f) “Seu preparo e honestidade rara fizeram dele um funcionário invejado.”

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Justificativa:** \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

g) “Se você requeresse e o seu amigo intervisse, talvez você reavesse esses bens.”

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Justificativa:** \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

h) “A algum tempo, São Paulo era quasi uma provincia.”

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Justificativa:** \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

i) “Enviamos anexo os dados solicitados por V.Sa. e nos colocamos à vossa disposição para qualquer outros pedidos.”

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Justificativa:** \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

j) “O diretor havia aceito a tarefa de reformar a escola.”

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Justificativa:** \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

l) “Não se conseguiu apurar o motivo porque a atriz se divorciou.”

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Justificativa:** \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

m) “O milionário dispendeu milhares de dólares com aquela propaganda.”

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Justificativa:** \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

n) “A situação dos aposentados ficará resolvida através do decreto ora em discussão na Câmara.”

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Justificativa:** \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

o) “O mau das pesquisas é que não são feitas por meio de perguntas realmente adequadas.”

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Justificativa:** \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

p) “Tome esse chope o quanto antes para que a gente possamos conhecer a Baía da Guanabara, que todos falam mil maravilhas.”

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Justificativa:** \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

q) “Todos visamos o exito dessa missão, porisso é preciso que se obedeçam, a risca, as ordens superiores.”

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Justificativa:** \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

r) “Esta é uma tarefa para mim fazer sozinho; não admito que se reparta as responsabilidades entre eu e outra pessoa”.

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Justificativa:** \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

s) Ele tomou as decisões as mais oportunas.

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Justificativa:** \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

t) Quantos sonhos haviam naquela ingenua cabecinha ...

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Justificativa:** \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

u) Cheguei a dois dias e voltarei daqui há quatro meses.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**Justificativa:** \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**107.**(IME-1997) Assinale a alternativa cujas formas verbais preenchem corretamente as lacunas em :

*“Daquele prédio se \_\_\_\_\_ os jogos no Morumbi. Talvez por isso se \_\_\_\_\_ rapidamente seus apartamentos. Foi o que disse o corretor, quando \_\_\_\_\_ na conversa.”*

- A. ( ) vêm valorizam interveio  
B. ( ) vê valorize interviu  
C. ( ) vê valorizem interveio  
D. ( ) vê valorize interviu  
E. ( ) vem valoriza interveio.

**108.**(IME-1997) Escolha a opção correta:

*“Sem que ninguém tivesse \_\_\_\_\_, o próprio menino \_\_\_\_\_- se contra os falsos amigos.”*

- A. ( ) intervindo precaviu  
B. ( ) intervindo precaveio  
C. ( ) intervido precaveu  
D. ( ) intervido precaveio  
E. ( ) intervindo precaveu.

**109.**(IME-1997) Assinale a alternativa que apresenta formas corretas do Imperativo

- A. ( ) mantém (tu) mantenhai (vós)  
B. ( ) mantenha (tu) mantenhai (vós)  
C. ( ) mantenhas (tu) mantenhais (vós)  
D. ( ) manténs (tu) mantende (vós)  
E. ( ) mantém (tu) mantende (vós).

**110.**(IME-1997) “Afimal de contas, tinha sido aquele o seu sonho toda a vida.” Convertendo a forma verbal composta em forma simples, teremos:

- A. ( ) Afimal de contas tivera aquele sonho toda a vida.  
B. ( ) Afimal de contas fora aquele o seu sonho toda a vida.  
C. ( ) Afimal de contas era aquele o seu sonho toda a vida.  
D. ( ) Afimal de contas teve aquele sonho toda a vida  
E. ( ) Afimal de contas foi aquele o seu sonho toda a vida.

**111.**(IME-1997) Marque a opção correta:

*“Os Estados Unidos \_\_\_\_\_ grandes universidades de \_\_\_\_\_ fama e mérito.”*

- A. ( ) possuem reputada  
B. ( ) possui reputado  
C. ( ) possui reputados  
D. ( ) possuem reputado  
E. ( ) possui reputada.

**112.**(IME-1997) Aponte a alternativa incorreta:

- A. ( ) Carburador e banco confortável foi o que ele comprou.  
B. ( ) Viagens e passeios alegres fazem bem ao corpo e à alma.  
C. ( ) Caneta e lapiseira preciosas foi o que recebemos no Natal.  
D. ( ) Tanto mar e terra percorridas.  
E. ( ) Avó e avô dedicados foi o que nós tivemos.

**113.**(IME-1997) Complete corretamente, de acordo com o abaixo:

*“Elas \_\_\_\_\_ tomaram todos os cuidados \_\_\_\_\_ saindo \_\_\_\_\_.”*

- A. ( ) próprio possíveis duas a duas  
B. ( ) próprias possível de duas  
C. ( ) próprias possível em duas  
D. ( ) próprio possíveis de duas  
E. ( ) próprias possíveis duas a duas.

**114.**(IME-1997) Assinale a opção correta:

*“Informo a Vossas Senhorias que, \_\_\_\_\_, seguem a carta, o relatório e a cópia que nos solicitaram, e que estão inteiramente à \_\_\_\_\_ disposição para exame.”*

- A. ( ) incluso – vossa B. ( ) inclusos - sua  
C. ( ) incluso – sua D. ( ) inclusa - vossa  
E. ( ) inclusos - vossa.

**115.**(IME-1997) “Aqui, não nos \_\_\_\_\_ as razões específicas que \_\_\_\_\_ os homens a \_\_\_\_\_ por sua sobrevivência.” Aponte a opção adequada.

- A. ( ) interessa levará lutarem  
B. ( ) interessam levarão lutarem  
C. ( ) interessam levará lutarem  
D. ( ) interessa levarão lutar  
E. ( ) interessam levará lutar.

**116.**(IME-1997) “Perguntou-me que horas \_\_\_\_\_ e eu lhe respondi que \_\_\_\_\_ faltando 15 minutos para as três.” Marque a alternativa correta.

- A. ( ) eram deviam estar  
B. ( ) eram devia estar  
C. ( ) eram devia estarem  
D. ( ) era devia estar  
E. ( ) era deviam estar.

- 117.** (IME-1997) Há apenas uma opção, na qual ambas as frases estão corretas quanto à concordância verbal:
- A. ( ) Nem a súplica, nem o suborno dobrou o juiz.  
Nem a súplica, nem o suborno dobraram o juiz.
- B. ( ) Os estudantes de nível inferior é a meta do governo.  
Os estudantes de nível inferior são a meta do governo.
- C. ( ) Três quilômetros é suficiente para experiência.  
Três quilômetros são suficiente para a experiência.
- D. ( ) O vencedor da prova seria tu.  
O vencedor da prova seriam tu.
- E. ( ) Dinheiro, festas, mulheres, nada o afastava do caminho do dever.  
Dinheiro, festas, mulheres, nada o afastavam do caminho do dever.

- 118.** (IME-1997) Verbos HAVER, FAZER e DAR. Assinale a frase correta:
- A. ( ) Sempre haverão vozes discordantes.
- B. ( ) Vão fazer três anos, a contar do momento em que comecei o projeto.
- C. ( ) Deram duas horas a torre, é agora!
- D. ( ) Deu duas horas na torre, é agora!
- E. ( ) Hão de trazer o que me prometeram! ora, se hão!

- 119.** (IME-1997) Complete corretamente, de acordo com o abaixo:
- “O campeonato foi vencido por Emerson, \_\_\_\_\_ o seu extraordinário desempenho nas últimas corridas realizadas na Europa.”*
- A. ( ) hajam vista      B. ( ) haja vista  
C. ( ) haja visto      D. ( ) hajam visto  
E. ( ) haja vistos.

- 120.** (IME-1997) Assinale a frase em que o verbo não obedece às normas da boa concordância:
- A. ( ) Fomos nós quem primeiramente lecionamos esta matéria.
- B. ( ) Fomos nós quem primeiramente lecionou esta matéria.
- C. ( ) Fomos nós os que primeiramente lecionamos esta matéria.
- D. ( ) Fomos nós que primeiramente lecionamos esta matéria.
- E. ( ) Fomos nós que primeiramente lecionaram esta matéria.

- 121.** (IME-1997) Assinale a alternativa que apresenta erro de colocação pronominal:
- A. ( ) Alguém me disse que tu amas novamente.
- B. ( ) Esvaindo-se em sangue, o criminoso conseguiu pôr-se a salvo.
- C. ( ) Em se tratando de dificuldades, ele sempre se portava com a maior dignidade possível.
- D. ( ) Diria-te toda a verdade, se dissesses-me por que te perseguiam.
- E. ( ) Nada nos foi informado sobre a realização dos exames finais.

**Gabarito**

1. A	2. A	3. C
4. A	5. C	6. B
7. B	8. E	9. A
10. E	11. C	12. B
13. D	14. D	15. E
16. A	17. B	18. C
19. D	20. A	21. D
22. A	23. B	24. C
25. D	26. B	27. D
28. E	29. E	30. B
31. D	32. B	33. C
34. E	35. B	36. C
37. A	38. E	39. D
40. C	41. E	42. B
43. E	44. B	45. B
46. C	47. D	48. A
49. A	50. D	51. B
52. B	53. C	54. D
55. E	56. A	57. B
58. C	59. A	60. C
61. E	62. C	63. A
64. C	65. E	66. D
67. C	68. D	69. D
70. A	71. A	72. A
73. E	74. C	75. C/E
76. C	77. E	78. B
79. A	80. D	81. E
82. E	83. A	84.
85.	86.	87.
88.	89.	90.
91.	92.	93.
94.	95.	96.
97.	98.	99.
100.	101.	102.
103.	104.	105.
106.	107.	108.
109.	110.	111.
112.	113.	114.
115.	116.	117.
118.	119.	120.
121.		

**Parte 5**

**1.** (ITA-1986) The man \_\_\_\_\_ there for 3 days.

- A. ( ) hung                      B. ( ) hang  
C. ( ) hanged                    D. ( ) hunged  
E. ( ) hangs

**2.** (ITA-1986)

- A. ( ) How cold is it!    B. ( ) How is it cold!  
C. ( ) How it is cold!    D. ( ) How cold it is!  
E. ( ) How it cold is!

**3.** (ITA-1986) The father said to his daughter: "Keep your eyes \_\_\_\_\_ open when you are in New York".

- A. ( ) large                      B. ( ) broad  
C. ( ) wide                        D. ( ) big  
E. ( ) great

**4.** (ITA-1986)

- A. ( ) Who of you understand this exercise?  
B. ( ) What of you understand this exercise?  
C. ( ) Whom of you understand this exercise?  
D. ( ) Whose of you understand this exercise?  
E. ( ) Which of you understand this exercise?

**5.** (ITA-1986) What \_\_\_\_\_ make did you buy?

- A. ( ) car of                      B. ( ) car  
C. ( ) the car                    D. ( ) a car  
E. ( ) car's

**6.** (ITA-1986)

- A. ( ) She it old enough to understand such things.  
B. ( ) She is ever old to understand such things.  
C. ( ) She is still old to understand such things.  
D. ( ) She is no longer old to understand such things.  
E. ( ) She is anymore old to understand such things.

**7.** (ITA-1986) He has a \_\_\_\_\_

- A. ( ) beautiful four-cylinders red Monza.  
B. ( ) beautiful red four-cylinders Monza.  
C. ( ) beautiful red Monza four-cylinder.  
D. ( ) beautiful Monza red four-cylinders.  
E. ( ) beautiful red four-cylinder Monza.

**8.** (ITA-1986)

- A. ( ) What time it is by your watch?  
B. ( ) What time it is on your watch?  
C. ( ) What time is by your watch?  
D. ( ) What time is on your watch?  
E. ( ) What time is it by your watch?

**9.** (ITA-1986)

- A. ( ) He played the piano bad extremely.  
B. ( ) He played the piano extreme bad.  
C. ( ) He played the piano extreme badly.  
D. ( ) He played the piano extremely bad.  
E. ( ) He played the piano extremely badly.

**10.** (ITA-1986) For what purpose did you break into the house?

- A. ( ) Purpose I thought my papers were there.  
B. ( ) Where the papers they had stolen were hidden.  
C. ( ) For to find the papers they had stolen.  
D. ( ) For find the papers they had stolen from me.  
E. ( ) In order to look for the papers they had stolen from me.

**11.** (ITA-1986)

- A. ( ) Seldom such a person show much improvement.  
B. ( ) Such a person seldom does show much improvement.  
C. ( ) Seldom does show such a person much improvement.  
D. ( ) Seldom does such a person show much improvement.  
E. ( ) Such a person does seldom show much improvement.

**12.** (ITA-1986) The test was \_\_\_\_\_ no one passed.

- A. ( ) very hard that  
B. ( ) too hard for that  
C. ( ) tão hard, so  
D. ( ) so hard so that  
E. ( ) tão hard

Para a questão 13, escolha a opção que estiver errada.

**13.** (ITA-1986)

- A. ( ) What time is it?  
B. ( ) What is the time?  
C. ( ) It is time for me to go.  
D. ( ) What time it is?  
E. ( ) It is time I was going.

**14.** (ITA-1987) Dadas as sentenças

- 1) He hard works everyday.  
2) He spoke hardly this morning at the debate.  
3) Don't drive so fast!

Constatamos que está(estão) correta(s)

- A. ( ) Apenas a sentença nº 1  
B. ( ) Apenas a sentença nº 2  
C. ( ) Apenas a sentença nº 3  
D. ( ) Apenas as sentenças nºs 1 e 2  
E. ( ) Todas as sentenças

**15.** (ITA-1987) Dados os tempos primitivos

	Infinitive	Past tense	Past participle
1)	to lie	laid	laid
2)	to hurt	hurt	hurt
3)	to seek	sought	sought

- Constatamos que está(estão) correta(s)  
 A. ( ) Apenas os tempos primitivos nº 1  
 B. ( ) Apenas os tempos primitivos nº 2  
 C. ( ) Apenas os tempos primitivos nº 3  
 D. ( ) Apenas os tempos primitivos nºs 1 e 2  
 E. ( ) Todas os tempos primitivos

**16.** (ITA-1987) Dadas as afirmações de que

- Ingenious significa hábil, engenhoso.
- To resume significa retomar.
- Syllabus pode significar sílaba.

- Constatamos que está(estão) correta(s)  
 A. ( ) Apenas a afirmação nº 1  
 B. ( ) Apenas a afirmação nº 2  
 C. ( ) Apenas a afirmação nº 3  
 D. ( ) Apenas as afirmações nºs 1 e 2  
 E. ( ) Todas as afirmações

**17.** (ITA-1987) Dadas as sentenças

- The sun rises in the East.
- Please, rise your right hand!
- Your behavior may arouse suspicion.

- Constatamos que está(estão) correta(s)  
 A. ( ) Apenas a sentença nº 1  
 B. ( ) Apenas a sentença nº 2  
 C. ( ) Apenas a sentença nº 3  
 D. ( ) Apenas as sentenças nºs 1 e 2  
 E. ( ) Todas as sentenças

**18.** (ITA-1987) A alternativa que corretamente preenche as lacunas (I, II, III) das sentenças

- You forgot to I the battery of your car.
- He was arrested on a II of theft.
- I will III you twenty dollars.

	I	II	III
A. ( )	load	accusation	load
B. ( )	charge	charge	charge
C. ( )	carry	carry	carry
D. ( )	load	load	load
E. ( )	charge	accusation	load

**19.** (ITA-1987) Assinalar a alternativa correta

- That three-years-old child depends on you
- That three-year-old child depends in you
- That three-years-old child depends in you
- That three-year-old child depends on you
- That three-years-old child depends of you

**20.** (ITA-1987) Assinalar a alternativa correta

- Is truth that his cloth is made of imported clothes?
- Is it truth that his cloth is made of imported clothes?
- Is true that his clothes are made of imported cloth?
- Is it true that his cloth is made of imported clothes?
- Is it true that his clothes are made of imported cloth?

**21.** (ITA-1987) Dadas as afirmações de que o *substantivo* de

- high é hight.
- wise é wisdom.
- strong é strongfulness.

- Constatamos que está (estão) correta(s)  
 A. ( ) Apenas a afirmação nº 1  
 B. ( ) Apenas a afirmação nº 2  
 C. ( ) Apenas a afirmação nº 3  
 D. ( ) Apenas as afirmações nºs 1 e 2  
 E. ( ) Todas as afirmações

**22.** (ITA-1987) Dadas as afirmações de que a forma *verbal* de

- weak é to weaken.
- proof é to prove.
- loss é to loose.

- Constatamos que está (estão) correta(s)  
 A. ( ) Apenas a afirmação nº 1  
 B. ( ) Apenas a afirmação nº 2  
 C. ( ) Apenas a afirmação nº 3  
 D. ( ) Apenas as afirmações nºs 1 e 2  
 E. ( ) Todas as afirmações

**23.** (ITA-1987) A alternativa que corretamente preenche as lacunas (I, II) de

The cores of a computer can be I magnetized II unmagnetized.

- or ... or
- or ... either
- either ... either
- either ... or
- nor ... neither

**24.** (ITA-1987) Dadas as sentenças

- She MEANS that she doesn't want to waste her time.
  - The word MILK means LEITE in Portuguese.
  - Oral language is a MEANS of communication.
- Constatamos que está(estão) correta(s)  
 A. ( ) Apenas a sentença nº 1  
 B. ( ) Apenas a sentença nº 2  
 C. ( ) Apenas a sentença nº 3



- D. ( ) Apenas as sentenças nºs 1 e 2  
E. ( ) Todas as sentenças

**25.** (ITA-1988) Dadas as afirmações de que a forma adverbial de

**ADJETIVO**                      **ADVÉRBIO**

- 1) FAST (rápido) é FASTLY (rapidamente)  
2) LATE (atrasado) é LATELY (atrasado)  
3) LOW (baixo) é LOW (baixo)

Constatamos que está (estão) correta(s)

- A. ( ) Apenas a afirmação nº 1  
B. ( ) Apenas a afirmação nº 2  
C. ( ) Apenas a afirmação nº 3  
D. ( ) Apenas as afirmações nºs 2 e 3  
E. ( ) Todas as afirmações

**26.** (ITA-1988) Assinalar a alternativa correta

- A. ( ) Alvimar told to Adonis that Mr. Bernardes does not know anything about the role of our government  
B. ( ) Alvimar told Adonis that Mr. Bernardes does not know nothing about the role of our government  
C. ( ) Alvimar told to Adonis that Mr. Bernardes does not know nothing about the paper of our government  
D. ( ) Alvimar told Adonis that Mr. Bernardes does not know anything about the role of our government  
E. ( ) Alvimar told to Adonis that Mr. Bernardes does not know anything about the politics of our government

**27.** (ITA-1988) Dadas as sentenças

- 1) They go often to Rio de Janeiro.  
2) We have not yet had news from him.  
3) She is seldom at home.

Constatamos que está (estão) na posição correta

- A. ( ) Apenas o advérbio da sentença nº 1  
B. ( ) Apenas o advérbio da sentença nº 2  
C. ( ) Apenas o advérbio da sentença nº 3  
D. ( ) Apenas os advérbios das sentenças nºs 2 e 3  
E. ( ) Todos os advérbios

**28.** (ITA-1988) Dadas as afirmações de que quem nasce em

- 1) FINLAND é FINNISH  
2) IRAQ é IRAQI  
3) ISRAEL é ISRAELI

Constatamos que está (estão) correta(s)

- A. ( ) Apenas a afirmação nº 1  
B. ( ) Apenas a afirmação nº 2  
C. ( ) Apenas a afirmação nº 3  
D. ( ) Apenas as afirmações nºs 1 e 2  
E. ( ) Todas as afirmações

**29.** (ITA-1988) Dadas as afirmações de que o substantivo de

- 1) ADMIT é ADMISSION  
2) ANALYSE é ANALYSATION  
3) COMPARE é COMPARATION

Constatamos que está (estão) correta(s)

- A. ( ) Apenas a afirmação nº 1  
B. ( ) Apenas a afirmação nº 2  
C. ( ) Apenas a afirmação nº 3  
D. ( ) Apenas as afirmações nºs 2 e 3  
E. ( ) Todas as afirmações

**30.** (ITA-1988) Dadas as afirmações de que o adjetivo de

- 1) ANGER é ANGRY  
2) FRIEND é FRIENDLY  
3) HEALTH é HEALTHFULLY

Constatamos que está (estão) correta(s)

- A. ( ) Apenas a afirmação nº 1  
B. ( ) Apenas a afirmação nº 2  
C. ( ) Apenas a afirmação nº 3  
D. ( ) Apenas as afirmações nºs 1 e 2  
E. ( ) Todas as afirmações

**31.** (ITA-1988) A alternativa que corretamente preenche a lacuna de

She loves you, \_\_\_\_\_?

- A. ( ) doesn't she  
B. ( ) don't she  
C. ( ) isn't it  
D. ( ) not loves she  
E. ( ) is it not

**32.** (ITA-1988) A Alternativa que corretamente traduz Ele tanto canta quanto toca.

é

- A. ( ) He as well sing as plays  
B. ( ) He both sings and plays  
C. ( ) He as sings as well plays  
D. ( ) He sings and plays well as  
E. ( ) He as well sings how plays

**33.** (ITA-1988) A alternativa que corretamente preenche a lacuna de

It \_\_\_\_\_ me I have seen this word before.

é

- A. ( ) seems to  
B. ( ) looks to  
C. ( ) looks like  
D. ( ) sees to  
E. ( ) looks likely

- 34.** (ITA-1988) A alternativa que corretamente traduz (mantendo a ordem das palavras) Ele puxou ou empurrou a porta quando chegou lá? é
- A. ( ) Did he push or pull the door when he got there?  
 B. ( ) Did he pushed or pulled the door when he arrived there?  
 C. ( ) Did he pull or push the door when he got there?  
 D. ( ) Pushed or pulled he the door when he gets there?  
 E. ( ) Pushed or pulled him the door when he arrived there?
- 35.** (ITA-1988) A alternativa que corretamente preenche as lacunas (I, II, III) de
- 1) He I me a favor two months ago.  
 2) He II an attempt to escape.  
 3) I III a decision last night.
- |        | I    | II   | III  |
|--------|------|------|------|
| A. ( ) | made | made | made |
| B. ( ) | made | did  | made |
| C. ( ) | did  | made | did  |
| D. ( ) | did  | made | made |
| E. ( ) | made | did  | did  |
- 36.** (ITA-1989) Your article will be \_\_\_ in tomorrow's edition.
- A. ( ) publicated      B. ( ) public  
 C. ( ) publish      D. ( ) published  
 E. ( ) publishing
- 37.** (ITA-1989) Hurry up if you want to buy something, because there's \_\_\_ left.
- A. ( ) hardly anything  
 B. ( ) hardly not  
 C. ( ) hardly few  
 D. ( ) hardly something  
 E. ( ) hardly no
- 38.** (ITA-1989) That fighter promised \_\_\_ again.
- A. ( ) in no to fight  
 B. ( ) from fighting  
 C. ( ) by never to fight  
 D. ( ) never to fight  
 E. ( ) not fight
- 39.** (ITA-1989) They expected the house \_\_\_ before they came back from their vacation.
- A. ( ) builtd  
 B. ( ) be built  
 C. ( ) to be built  
 D. ( ) to building  
 E. ( ) build

- 40.** (ITA-1989) Os verbos que melhor correspondem aos substantivos ou adjetivos abaixo:
- I. fright  
 II. load  
 III. low  
 IV. high  
 V. reach
- São:
- |        | I        | II       | III     | IV         | V         |
|--------|----------|----------|---------|------------|-----------|
| A. ( ) | fear     | — lead   | — lower | — heighten | — reachen |
| B. ( ) | freight  | — load   | — low   | — heighten | — reach   |
| C. ( ) | frighten | — load   | — lower | — heighten | — reach   |
| D. ( ) | fear     | — lead   | — low   | — higher   | — reachen |
| E. ( ) | frighten | — loaden | — lower | — higher   | — reach   |

- 41.** (ITA-1989) A sílaba tônica da palavra *uncomfortable* é:
- A. ( ) un      B. ( ) com  
 C. ( ) foro      D. ( ) A  
 E. ( ) ble

- 42.** (ITA-1989) A palavra *push* rima com:
- A. ( ) bush      B. ( ) rush  
 C. ( ) crush      D. ( ) fuss  
 E. ( ) bus

- 43.** (ITA-1989) Assinale a pergunta correta:
- A. ( ) Who came here yesterday?  
 B. ( ) What John told you?  
 C. ( ) Whom Mary talked to yesterday?  
 D. ( ) Which book you bought last week?  
 E. ( ) What class does comes after this?

- 44.** (ITA-1989) The sun was \_\_\_ in splendour.
- A. ( ) raising      B. ( ) rising  
 C. ( ) lifting      D. ( ) bearing  
 E. ( ) borning

Leia o texto seguinte e responda às questões 45 e 46.

There's special urgency about treating children with AIDS. The disease has a shorter incubation period than it does in adults, sometimes erupting in a matter of months rather than years. And it can be harder to diagnose. Yet, experts agree, the AIDS-infected child should get help early—just as the first subtle symptoms appear. "A child can be perfectly well but very quickly go all the way to the end," says Dr. Wade Parks of the University of Miami School of Medicine. "The main issue is to identify [children with AIDS] and get them in the hands of physicians."

*Newsweek, September 7, 1987*



45. (ITA-1989) As expressões:

- I. skilled people
- II. illness
- III. doctors
- IV. hardly noticeable

são explicações ou sinônimos das seguintes palavras do texto acima:

	I	II	III	IV
A. ( )	physicians	AIDS	experts	urgency
B. ( )	physicians	disease	experts	urgency
C. ( )	experts	disease	AIDS	subtle
D. ( )	experts	disease	physicians	subtle
E. ( )	physicians	AIDS	experts	subtle

46. (ITA-1989) O significado da expressão "BUT VERY QUICKLY GO ALL THE WAY TO THE END", dentro do contexto, é:

- A. ( ) terminar rapidamente o tratamento.
- B. ( ) ir ao hospital para tratamento médico.
- C. ( ) sentir algo que não causa preocupação.
- D. ( ) morrer mais depressa do que um adulto.
- E. ( ) terminar o tratamento sem sentir dor.

47. (ITA-1990) He had \_\_\_\_\_ finished ploughing the field when I called him.

- A. ( ) never
- B. ( ) often
- C. ( ) occasionally
- D. ( ) over
- E. ( ) already

48. (ITA-1991) O verbo que corretamente preenche a lacuna de

His body \_\_\_\_\_ in the cemetery.

- A. ( ) lays
- B. ( ) laid
- C. ( ) lies
- D. ( ) lain
- E. ( ) lied.

49. (ITA-1991) I am not as good at football as he is, \_\_\_\_\_?

- A. ( ) aren't I
- B. ( ) is he
- C. ( ) no
- D. ( ) am I
- E. ( ) am

50. (ITA-1991) She asked me if I had \_\_\_\_\_ seen a submarine, and I answered I had \_\_\_\_\_.

- A. ( ) ever no
- B. ( ) always no
- C. ( ) ever no
- D. ( ) never yes
- E. ( ) already yet.

51. (ITA-1992) A alternativa que corretamente preenche os claros (I), (II), (III) de:

Can you (I) me a favor?

I (II) my best to help Alvimar.

I think I can (III) a better job.

- |        | (I)  | (II) | (III) |
|--------|------|------|-------|
| A. ( ) | do   | do   | do    |
| B. ( ) | do   | make | do    |
| C. ( ) | make | do   | make  |
| D. ( ) | make | make | make  |
| E. ( ) | make | make | do    |

52. (ITA-1992) A alternativa que corretamente preenche os claros (I), (II) de:

I can not (I) Alvimar (II) his brother: they look alike.

- |        | (I)  | (II) |
|--------|------|------|
| A. ( ) | tell | of   |
| B. ( ) | say  | of   |
| C. ( ) | tell | from |
| D. ( ) | say  | from |
| E. ( ) | say  | out  |

53. (ITA-1992) A alternativa que corretamente preenche os claros (I) de:

One never knows what to expect, (I).

- A. ( ) isn't it?
- B. ( ) does one?
- C. ( ) one knows?
- D. ( ) knows one?
- E. ( ) do we?

54. (ITA-1992) Assinalar a alternativa onde todos os advérbios substituem corretamente as palavras grifadas de:

(I)

He came at a late hour.

(II)

He lives not far from here.

(III)

I can scarcely see him.

- |        | (I)    | (II)   | (III)  |
|--------|--------|--------|--------|
| A. ( ) | late   | near   | hardly |
| B. ( ) | lately | nearly | hardly |
| C. ( ) | lately | near   | hard   |
| D. ( ) | late   | near   | hard   |
| E. ( ) | late   | nearly | hardly |

55. (ITA-1992) A alternativa que corretamente preenche os claros (I), (II), (III) de:

She (I) an angry look at me.

She (II) the picture on the wall.

Why have you (III) the door?

- |        |        |        |         |
|--------|--------|--------|---------|
|        | (I)    | (II)   | (III)   |
| A. ( ) | threw  | hung   | shutted |
| B. ( ) | threw  | hung   | shut    |
| C. ( ) | threw  | hang   | shut    |
| D. ( ) | thrown | hanged | shutted |
| E. ( ) | threw  | hang   | shut    |

Na questão 56, escolha a forma correta:

- 56.** (ITA-1992) She \_\_\_\_\_ English to understand what he said.
- A. ( ) enough  
B. ( ) very  
C. ( ) none  
D. ( ) lot  
E. ( ) too

As questão 57 refere-se aos "cartoons" abaixo:



- 57.** (ITA-1993) Qual dos adjetivos abaixo não é mencionado pelo apresentador do programa de TV?
- A. ( ) charmoso  
B. ( ) espirituoso  
C. ( ) atencioso  
D. ( ) gentil  
E. ( ) organizado.

A questão 58 refere-se ao texto abaixo.

**GERMANY - CITIES AND COUNTRYSIDE**

1 "... so beautiful has it been." Beautiful - what is beauty?  
With beauty it is as with happiness, hardly any term can be more subjectively interpreted. If one I to send ten people down the Rhine valley, one II ten different opinions of what is most beautiful in the region.

*Deutschland* - Prisma, 1986.

- 58.** (ITA-1993) No texto acima, a tradução mais adequada para a palavra "hardly" na linha 2 é:
- A. ( ) duramente  
B. ( ) possivelmente  
C. ( ) dificilmente  
D. ( ) provavelmente  
E. ( ) excepcionalmente.

As questões 59 a 64 referem-se ao texto abaixo:

In 1994, the U.S. government began a vast project to control the Missouri.

Known as the Pick-Sloan after the engineers who devised it, the project called for a series of man-made lakes, dams, navigation channels and dikes. Six dams have been completed - four of which are among the largest in world.

The dams with a I of 93 thousand million cubic meters, provide protection of farmlands from floods, and II supply of water in periods of drought.

Better utilization of the Missouri River through water-control projects such as Sloan-Pick ensures Central Basin farmers high yields of wheat and feed grain. Many people who know the Missouri River well doubt that it can ever really be tamed. Yet they know that somehow it must be. For as one Iowa farmer put it: "You can't live on a river that takes your future away".

An Outline of American Geography

Dr. Earl N. Mittleman - USIS.

- 59.** (ITA-1993) A lacuna de número I deve ser preenchida por:
- A. ( ) hold capacity      B. ( ) hold's capacity  
C. ( ) holding capacity      D. ( ) holds capacity  
E. ( ) capacity hold.
- 60.** (ITA-1993) A lacuna de número II deve ser preenchida por:
- A. ( ) a three year's      B. ( ) a three-year  
C. ( ) a third years      D. ( ) a third's-year  
E. ( ) a third year's.
- 61.** (ITA-1993) "Known as the Pick-Sloan plan after the engineers who devised it..." Esta frase, na linha 2, significa que:
- A. ( ) o projeto leva o nome dos engenheiros que o conceberam.  
B. ( ) o projeto foi desenvolvido por engenheiros renomados  
C. ( ) o projeto tornou-se conhecido graças ao nome dos engenheiros que o desenvolveram.  
D. ( ) o nome do projeto foi escolhido pelos engenheiros que o desenvolveram.  
E. ( ) o conhecido projeto de engenharia foi executado por Pick e Sloan.

**62.** (ITA-1993) A expressão "called for" na linha 3 poderia ser substituída por:

- A. ( ) recalled                      B. ( ) considered  
C. ( ) supposed                      D. ( ) initiated  
E. ( ) demanded.

**63.** (ITA-1993) A frase "six dams have been completed". nas linhas 3/4, quer dizer que:

- A. ( ) seis represas têm que ser construídas.  
B. ( ) seis represas já foram construídas.  
C. ( ) seis represas estão em vias de conclusão.  
D. ( ) seis represas serão construídas.  
E. ( ) seis represas estão sendo construídas.

**64.** (ITA-1993) A palavra "tamed"; na linha 10, significa:

- A. ( ) dragado                      B. ( ) ignorado  
C. ( ) despoluído                      D. ( ) dominado  
E. ( ) desviado.

**65.** (ITA-1993) A alternativa que preenche as lacunas I, II, III corretamente é:

"When his wife walked in, Mark I the newspaper on the table and II from his chair to III her the good news."

- |        | I    | II     | III   |
|--------|------|--------|-------|
| A. ( ) | laid | rose   | tell  |
| B. ( ) | lay  | raised | say   |
| C. ( ) | lie  | rise   | tell  |
| D. ( ) | lay  | raise  | say   |
| E. ( ) | laid | raised | tell. |

As questões 66 e 67 referem-se à carta de um leitor à revista "TIME".

"It is sad to see countries that, to some extent, ignore problems at home while their leaders spend money abroad - for instance, the U.S., with a large number of its own people lacking proper I and sufficient medical facilities. In the pitiful case of Somalia, the U.S. is a superpower pouring troops into the fray. Wouldn't it be nice if the same compassion II directed toward the people in the streets of America?"

**66.** (ITA-1994) A opção que melhor preenche as lacunas I e II respectivamente é:

- |        | I       | II        |
|--------|---------|-----------|
| A. ( ) | house   | was       |
| B. ( ) | housing | were      |
| C. ( ) | home    | had to be |
| D. ( ) | houses  | would be  |
| E. ( ) | housing | was.      |

**67.** (ITA-1994) Assinale o provérbio que melhor traduz a opinião do leitor:

- A. ( ) Where there's will there's a way.  
B. ( ) Make do with what you have.  
C. ( ) Charity begins at home.  
D. ( ) God help those who help themselves.  
E. ( ) Give and you will be rewarded.

**68.** (ITA-1994) As cinco sentenças que se seguem foram inspiradas em diálogos extraídos do livro *The Firm* de John Grisham. Assinale a alternativa gramaticalmente correta.

- A. ( ) Why the FBI would bother with a search warrant?  
B. ( ) Does he realize how permanent is this job?  
C. ( ) How many partners in the firm?  
D. ( ) What would Morolto have to gain by harming your parents?  
E. ( ) So why you don't get your indictments and bust it all up?

As questões 69 a 72 referem-se ao texto abaixo:

"Astronomers are used (I) all kinds of wild things in outer space - black holes, colliding galaxies, stars spinning hundreds of times a second, even a (II) comet now on its way to smashing into Jupiter. Still, the giant glowing hoops that showed up in a Hubble Space Telescope picture released last week prompted veteran sky watchers to chatter like awestruck kids. "It's bizarre," said Christopher Burrows of the Space Telescope Science Institute in Baltimore, Maryland. "It's the neatest thing I've sever seen."

It's also among the most puzzling. Two huge hoops - each a few (III) in diameter - and a brighter, smaller ring are surrounding the site of a supernova, an exploding star (IV) violent death was recorded by astronomers in 1987. For millenniums before the blast, Burrows and his colleagues believe, the terminally ill star had been gushing out great volumes of gas (V) formed an hourglass-shape "bubble". (The bubble would ordinarily have been spherical, except that the gas around its equator was especially thick and slow-moving and thus stayed relatively close to the supernova.) Then, when the star blew up, the flash of light made the gas glow. Most of the bubble is shining too faintly to be seen at all, but the small central ring is made of dense gas that is unusually bright."

(by Michael D. Lemonick - TIME May 30, 1994)

**69.** (ITA-1995) A lacuna I deve ser preenchida por:

- A. ( ) find                              B. ( ) to find  
C. ( ) finding                              D. ( ) to finding  
E. ( ) found.

**70.** (ITA-1995) As lacunas II e III devem ser preenchidas, respectivamente, por:

- A. ( ) 21-pieces light-years
- B. ( ) 21 piece light-year
- C. ( ) 21 pieces light year
- D. ( ) 21 pieces light-years
- E. ( ) 21-piece light-years

**71.** (ITA-1995) Os pronomes que devem preencher as lacunas IV e V, respectivamente, são:

- A. ( ) whose where
- B. ( ) that which
- C. ( ) which that
- D. ( ) whose which
- E. ( ) that where

**72.** (ITA-1995) De acordo com o texto, o que surpreendeu os astrônomos na imagem detectada pelo telescópio foi:

- A. ( ) O feixe de luz deixado por uma supernova cuja explosão foi registrada há mais de seis anos.
- B. ( ) A emissão de grandes volumes de gases por uma supernova.
- C. ( ) O formato da bolha criada pelos gases emitidos por uma supernova.
- D. ( ) A incandescência dos gases emitidos pela supernova.
- E. ( ) A formação de três anéis luminosos, com anos-luz de diâmetro, ao redor do lugar ocupado pela supernova.

**73.** (ITA-1995) O termo "seldom", sublinhado no trecho abaixo, poderia ser substituído por:

*"As an American Express Cardmember, you will enjoy a relationship with us that goes beyond the ordinary. You will be treated as a MEMBER, not a number. And you will receive the respect and recognition seldom found today".*

- A. ( ) occasionally      B. ( ) rarely
- C. ( ) often                D. ( ) usually
- E. ( ) always.

**74.** (ITA-1995) Qual é, respectivamente, a função gramatical das palavras "kidnapping", "country" e "enginner" no contexto da sentença abaixo?

*"The kidnapping of a young man on a country road in Oxfordshire is but the first brutal step in the explosive plot to enginner the president's destruction."*

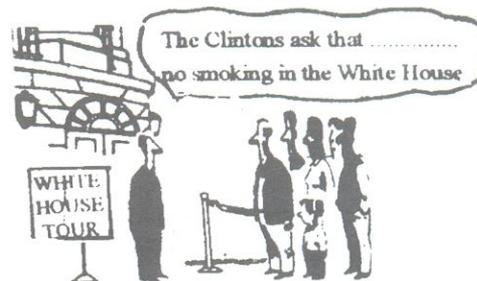
- A. ( ) verbo                substantivo      substantivo
- B. ( ) substantivo      adjetivo        substantivo
- C. ( ) substantivo      adjetivo        verbo
- D. ( ) verbo                substantivo      verbo
- E. ( ) verbo                adjetivo        substantivo.

**75.** (ITA-1996) A frase abaixo foi extraída da carta de um leitor à revista TIME, comentando uma reportagem intitulada "The Threat from North Korea". Para que estejam na devida categoria gramatical, as palavras open-mind, will e peace, respectivamente, devem ser acrescidas dos sufixos:

*"... we should encourage President Clinton's patience, open-mind ...**(I)**... and his will ...**(II)**... to explore all peace ...**(III)**... alternatives."*

- |        | I       | II       | III      |
|--------|---------|----------|----------|
| A. ( ) | ed/ness | ing/ness | ful      |
| B. ( ) | ed/ly   | ing      | ed       |
| C. ( ) | ness    | ness/ly  | ful/ness |
| D. ( ) | ed/ness | ing/ful  | ful/ly   |
| E. ( ) | ed      | ing      | ful.     |

**76.** (ITA-1996) A alternativa que deve preencher a lacuna no quadro abaixo é:



- A. ( ) there is                      B. ( ) you do
- C. ( ) there be                    D. ( ) have
- E. ( ) may be.

O texto abaixo foi extraído do capítulo introdutório de um livro de Mecânica. Leia-o e responda às questões 77 e 78.

**"1. Introduction.** A new machine is born because there is a real or imaginary need for it. It evolves from someone's conception of a device with which to accomplish a particular purpose. From the conception follows a study arrangement of the parts, the location and length of links (which may include a kinematic study of the linkage), the places for gears, bolts, springs, cams and other elements of machines. With all ideas subject to change and improvement, several solutions may be and usually are found, the seemingly best one being chosen.

The actual practice of designing is applying a combination of scientific principles and a knowing judgement based on experience. It is seldom that a design problem has only one right answer, a situation which is often annoying to the beginner in machine design."

**77.** (ITA-1996) As palavras *need* e *design*, em destaque no texto, estão usadas respectivamente com função de:

- A. ( ) verbo - adjetivo
- B. ( ) verbo - substantivo
- C. ( ) substantivo - substantivo
- D. ( ) substantivo - verbo
- E. ( ) substantivo - adjetivo.

**78.** (ITA-1996) Segundo o texto:

- I. A variedade de alternativas possíveis num projeto de máquinas atrapalha o projetista iniciante.
  - II. Entre a concepção e o projeto acabado, as idéias do projetista de máquinas são passíveis de muitas alterações.
  - III. No projeto de máquinas a experiência não é tão importante quanto o conhecimento científico.
- A. ( ) Apenas a alternativa I está Correta.
  - B. ( ) Apenas as alternativas I e II estão Corretas.
  - C. ( ) Apenas as alternativas II e III estão Corretas.
  - D. ( ) Apenas a alternativa III está Correta.
  - E. ( ) Todas as alternativas estão Corretas.

As questões **79** e **80** referem-se ao parágrafo a seguir, extraído de uma reportagem sobre o **Grupo Blur**. leia-o e responda:

“...who are these Blur blokes who, after a shaky start, have shaken the world? And what makes them *so different, so appealing*, as Pop Artist Richard Hamilton once asked in a collage that they doubtless studied at art school itself (they all attended Goldsmiths’) that sets them apart? Are Blur the latest and ultimate example of what The Fall once dubbed Prole Art Threat? No. Blur are no mere Art School Band; far more important is the that they’re a Music School Band. That’s their secret. They can play. They are musicians.”

(Q. March, 1995)

**79.** (ITA-1996) Qual das afirmações abaixo encontra sustentação no texto?

- A. ( ) The Fall e Prole Art Threat são grupos ingleses precursores do Blur.
- B. ( ) O grupo foi aplaudido no resto do mundo antes de ser sucesso em seu próprio país.
- C. ( ) Após um começo tumultuado, o grupo consagrou-se sucesso mundial.
- D. ( ) O grupo obteve sucesso comparado ao do artista pop Richard Hamilton.
- E. ( ) O sucesso do Blur deve-se a Goldsmiths’.

**80.** (ITA-1996) Assinale a opção cujo adjetivo possa substituir, de maneira bastante aproximada, os adjetivos ‘different’ e ‘appealing’ em destaque no texto.

- A. ( ) outstanding
- B. ( ) fancy
- C. ( ) lousy
- D. ( ) nice
- E. ( ) awful.

Os testes **81** a **84** referem-se ao anúncio abaixo, extraído de um jornal local:

### Operator Technicians

Specialty Minerals do Brasil, na international, research-based company, (I) several openings for Operator Technicians at it plant in Jacareí. The successful candidate will be responsible (II) operating a computer controlled process, performing quality control lab tests, unloading of bulk product, loading tanker trucks with finished product, and other duties as assigned. Availability (III) travel abroad is required. Qualifications include a two-year technical degree and/or several years experience working with computer based process control equipment, besides heavy emphasis on chemical industry control operator experience. The plant is continuous operation and the employee will be on a rotating shift which includes some weekends, and overtime. Successful candidates must be able to speak, read and write in English.

Specialty Minerals offers a competitive pay and benefits package plus the opportunity to work (IV) in a responsible and (V) position.

**Please send resumé to...**

**81.** (ITA-1997) Algumas das atribuições do cargo oferecido pela *Specialty Minerals do Brasil* incluem:

- I. execução de testes de controle de qualidade
- II. disponibilidade para viagens ao exterior
- III. recebimento e despacho de carga.

De acordo com o anúncio est(á) (ão) correta(s):

- A. ( ) Apenas a I
- B. ( ) Apenas II
- C. ( ) Apenas a III
- D. ( ) Todas
- E. ( ) Nenhuma

**82.** (ITA-1997) O cargo exige que o candidato:

- I. Trabalhe em turnos.
- II. Tenha disponibilidade para horas extras nos finais de semana.
- III. Aprenda a falar, ler e escrever em inglês.

De acordo com o anúncio, est(á) (ão) correta(s):

- A. ( ) Apenas a I
- B. ( ) Apenas a II
- C. ( ) Apenas a III
- D. ( ) Todas
- E. ( ) Nenhuma

**83.** (ITA-1997) As lacunas I, II e III devem ser preenchidas respectivamente por:

- |        |      |     |     |
|--------|------|-----|-----|
|        | I    | II  | III |
| A. ( ) | has  | for | for |
| B. ( ) | have | by  | of  |
| C. ( ) | have | for | of  |
| D. ( ) | has  | for | to  |
| E. ( ) | has  | by  | to  |

**84.** (ITA-1997) As lacunas IV e V devem ser preenchidas respectivamente por:

- |        |               |             |
|--------|---------------|-------------|
|        | IV            | V           |
| A. ( ) | independent   | challenged  |
| B. ( ) | independ      | challenging |
| C. ( ) | independently | challenged  |
| D. ( ) | independently | challenging |
| E. ( ) | independent   | challenge   |

Os testes de **85 a 89** referem-se ao texto abaixo:

**BRAZIL'S NETWORK BOOM**

**BRAZIL IS ON THE VERGE OF A NETWORK SURGE. BUT EXACTLY HOW THEY'LL ALL FLY IS STILL UP IN THE AIR.**

Probably the only thing Brazil's two pay TV heavyweights, Globo and TVA, agree (I) is that the country's multichannel business is on the verge of a boom.

The two companies, which have fought one of the most impassioned battles for dominance to be found anywhere in the pay TV world, (II) the intensity of their cable and wireless competition and extending it to direct-to-home television this year. And with the number of Brazilian pay TV subscribers expected to (III) fivefold to 5 million by the end of the decade, both sides are feverishly putting together new programming services to make their packages as alluring as possible. (...)

by Ian Katz

Multichannel News. International, April, 1996

**85.** (ITA-1997) No contexto acima, a expressão "on the verge of" pode ser traduzida por:

- A. ( ) no topo de  
B. ( ) à margem de  
C. ( ) na iminência de  
D. ( ) distante de  
E. ( ) ao alcance de

**86.** (ITA-1997) Qual a preposição que melhor preenche a lacuna I?

- A. ( ) for  
B. ( ) on  
C. ( ) at  
D. ( ) by  
E. ( ) in

**87.** (ITA-1997) Quais os verbos que devem preencher as lacunas II e III respectivamente?

- A. ( ) are rising-raise  
B. ( ) are raising-rise  
C. ( ) are rising-rise  
D. ( ) is raising-raise  
E. ( ) is rising-rise

**88.** (ITA-1997) Quais as palavras, em português, que melhor substituem, respectivamente, os termos "impassioned"; "feverishly" e "alluring" sublinhados no texto?

- A. ( ) insensível fervorosamente econômico  
B. ( ) impassível febrilmente compacto  
C. ( ) veemente desesperadamente atraente  
D. ( ) insensível febrilmente econômico  
E. ( ) desgastante desesperadamente engraçado

**89.** (ITA-1997) Dadas as asserções:

- I. A TVA e a Globo concordam em se juntar para conquistar o mercado de TVs por assinaturas no Brasil.  
II. Espera-se que o número de assinantes de TVs pagas ultrapasse os 5 milhões até o final da década.  
III. Atualmente o número de assinantes de TVs pagas gira em torno de 1 milhão.  
Est(á) (ão) correta(s):  
A. ( ) Apenas a I  
B. ( ) Apenas a II  
C. ( ) Apenas a III  
D. ( ) Apenas a I e a II  
E. ( ) Todas

**Parte 6**

**1.** (ITA-1986)

- A. ( ) The half of 6 is 3  
B. ( ) Half 6 are 3  
C. ( ) The halves of 6 are 3  
D. ( ) Half 6 is 3  
E. ( ) The half of 6 are 3

Para as questões de números **2 e 3**, escolha a opção que estiver errada.

**2.** (ITA-1986) The doctor warned me: "Be careful not to \_\_\_\_\_ cold."

- A. ( ) get a  
B. ( ) catch  
C. ( ) take  
D. ( ) carry  
E. ( ) have a

**3.** (ITA-1986)

- A. ( ) I have no time to lose.  
B. ( ) Shut the door behind yourself.  
C. ( ) There is no time to lose.  
D. ( ) Should I sign this paper in pencil or in ink?  
E. ( ) This is a problem that would take an average person five minutes to do with pencil and paper.

- 4.** (ITA-1986) As anxiety makers, examinations are second to one.
- A. ( ) there are no second examinations.  
 B. ( ) examinations cause anxiety.  
 C. ( ) None is second to make examinations.  
 D. ( ) Examination makers are anxious.  
 E. ( ) Examinations are second to none but makers.
- 5.** (ITA-1986) The characters in this book are fictional, and any resemblance to living persons is purely coincidental.
- A. ( ) Actual characters are never meant to resemble fictional characters.  
 B. ( ) It is only a coincidence if any of the fictitious characters in this book resemble actual people.  
 C. ( ) Living persons were used as models for the fictional characters in this book.  
 D. ( ) Coincidences in fiction books are always pure when characters are involved.  
 E. ( ) The people in this book were designed to resemble living persons.
- 6.** (ITA-1987) Dadas as afirmações de que o *feminino* de
- 1) Ram é Ewe  
 2) Sir é Lady  
 3) Nephew é Cousin
- Constatamos que está(estão) correta(s)
- A. ( ) Apenas a sentença nº 1  
 B. ( ) Apenas a sentença nº 2  
 C. ( ) Apenas a sentença nº 3  
 D. ( ) Apenas as sentenças nºs 1 e 2  
 E. ( ) Todas as sentenças
- 7.** (ITA-1987) Dadas as afirmações de que o *plural* de
- 1) Ox é Oxen  
 2) Chief é Chiefs  
 3) Roof é Rooves
- Constatamos que está(estão) correta(s)
- A. ( ) Apenas a sentença nº 1  
 B. ( ) Apenas a sentença nº 2  
 C. ( ) Apenas a sentença nº 3  
 D. ( ) Apenas as sentenças nºs 1 e 2  
 E. ( ) Todas as sentenças
- 8.** (ITA-1987) Algumas vezes, o significado da *forma plural* de um substantivo (em inglês) é diferente de seu significado na *forma singular*. Dadas as palavras (já na sua *forma plural*)
- 1) Goods  
 2) Scales  
 3) Spirits
- Constatamos que confere(m) com a afirmação acima

- A. ( ) Apenas a sentença nº 1  
 B. ( ) Apenas a sentença nº 2  
 C. ( ) Apenas a sentença nº 3  
 D. ( ) Apenas as sentenças nºs 1 e 2  
 E. ( ) Todas as sentenças

- 9.** (ITA-1987) Dadas as sentenças
- 1) He does not want to spend very money there.  
 2) He is few interested in Statistics.  
 3) Love is a many splendored thing.

Constatamos que está(estão) correta(s)

- A. ( ) Apenas a sentença nº 1  
 B. ( ) Apenas a sentença nº 2  
 C. ( ) Apenas a sentença nº 3  
 D. ( ) Apenas as sentenças nºs 1 e 2  
 E. ( ) Todas as sentenças

- 10.** (ITA-1987) A alternativa que corretamente preenche os claros (I, II, III) das sentenças

- 1) Please, don't I lies.  
 2) Can you II me the time?  
 3) Please, III something!

é

- |        | I    | II   | III  |
|--------|------|------|------|
| A. ( ) | tell | tell | tell |
| B. ( ) | say  | say  | say  |
| C. ( ) | tell | say  | tell |
| D. ( ) | say  | tell | say  |
| E. ( ) | tell | tell | say  |

- 11.** (ITA-1987) Dadas as sentenças

- 1) They went until the bridge.  
 2) Even a child can do it.  
 3) I waited for you as far as 10 o'clock yesterday.

Constatamos que está(estão) correta(s)

- A. ( ) Apenas a sentença nº 1  
 B. ( ) Apenas a sentença nº 2  
 C. ( ) Apenas a sentença nº 3  
 D. ( ) Apenas as sentenças nºs 1 e 2  
 E. ( ) Todas as sentenças

- 12.** (ITA-1987) A sílaba tônica proposta das palavras abaixo será aqui sublinhada.

Ex.: TO – MOR – ROW.

Dadas as palavras

- 1) DE – VEL – OP – MENT  
 2) PUR – POSE  
 3) TEL – E – VI – SION

e baseando-nos na explicação acima, constatamos que está (estão) com a sílaba *tônica* correta

- A. ( ) Apenas a palavra nº 1  
 B. ( ) Apenas a palavra nº 2  
 C. ( ) Apenas a palavra nº 3  
 D. ( ) Apenas as palavras nºs 1 e 2  
 E. ( ) Todas as palavras

**13.** (ITA-1987) Baseando-se na explicação anterior (nº 70), e dadas as palavras

- 1) SUR – FACE
- 2) FOR – TU – NATE
- 3) FOR – EIGN

Constatamos que está (estão) com a sílaba *tônica* correta

- A. ( ) Apenas a palavra nº 1
- B. ( ) Apenas a palavra nº 2
- C. ( ) Apenas a palavra nº 3
- D. ( ) Apenas as palavras nºs 1 e 2
- E. ( ) Todas as palavras

**14.** (ITA-1987) Dadas as afirmações de que

- 1) Blood rima com book.
- 2) Flood rima com floor.
- 3) Quay rima com key.

Constatamos que está (estão) corretas(s)

- A. ( ) Apenas a afirmação nº 1
- B. ( ) Apenas a afirmação nº 2
- C. ( ) Apenas a afirmação nº 3
- D. ( ) Apenas as afirmações nºs 1 e 2
- E. ( ) Todas as afirmações

**15.** (ITA-1987) Dadas as afirmações de que

- 1) Rough rima com tough
- 2) Mud rima com mood
- 3) Beer rima com bear

Constatamos que está (estão) corretas(s)

- A. ( ) Apenas a afirmação nº 1
- B. ( ) Apenas a afirmação nº 2
- C. ( ) Apenas a afirmação nº 3
- D. ( ) Apenas as afirmações nºs 1 e 2
- E. ( ) Todas as afirmações

**16.** (ITA-1987) Dadas as sentenças

- 1) If you don't know the meaning of a word, look it I in a dictionary.
- 2) I shall be looking II to hearing from you soon.
- 3) I was looking III you yesterday.

Constatamos que a alternativa que corretamente preenche as lacunas (I, II, III) acima é

- |        | I       | II      | III     |
|--------|---------|---------|---------|
| A. ( ) | up      | forward | for     |
| B. ( ) | up      | after   | forward |
| C. ( ) | after   | up      | up      |
| D. ( ) | forward | for     | up      |
| E. ( ) | for     | for     | for     |

**17.** (ITA-1987) Dadas as afirmações de que as abreviações de

- 1) Number pode ser No.
- 2) Christmas é Xmas.
- 3) Mathematics pode ser Math.

Constatamos que está (estão) corretas(s)

- A. ( ) Apenas a afirmação nº 1
- B. ( ) Apenas a afirmação nº 2
- C. ( ) Apenas a afirmação nº 3
- D. ( ) Apenas as afirmações nºs 1 e 2
- E. ( ) Todas as afirmações

**18.** (ITA-1987) Dadas as sentenças

- 1) He was wearing dark glasses.
- 2) According to the news, he is died.
- 3) I don't know what caused his dead.

Constatamos que está(estão) correta(s)

- A. ( ) Apenas a sentença nº 1
- B. ( ) Apenas a sentença nº 2
- C. ( ) Apenas a sentença nº 3
- D. ( ) Apenas as sentenças nºs 1 e 2
- E. ( ) Todas as sentenças

**19.** (ITA-1987) Dadas as sentenças

- 1) She became me angry yesterday.
- 2) She was stolen last night.
- 3) He prevented me from going to his club.

Constatamos que está(estão) correta(s)

- A. ( ) Apenas a sentença nº 1
- B. ( ) Apenas a sentença nº 2
- C. ( ) Apenas a sentença nº 3
- D. ( ) Apenas as sentenças nºs 1 e 2
- E. ( ) Todas as sentenças

**20.** (ITA-1987) Dadas as palavras

- 1) Abnormal
- 2) Comb
- 3) Climb

Constatamos que o *b* é pronunciado

- A. ( ) Apenas na palavra nº 1
- B. ( ) Apenas na palavra nº 2
- C. ( ) Apenas na palavra nº 3
- D. ( ) Apenas nas palavras nºs 1 e 2
- E. ( ) Em todas as palavras

**21.** (ITA-1987) Dadas as palavras

- 1) Calm
- 2) Half
- 3) Isle

Constatamos que o *l* é pronunciado

- A. ( ) Apenas na palavra nº 1
- B. ( ) Apenas na palavra nº 2
- C. ( ) Apenas na palavra nº 3
- D. ( ) Apenas nas palavras nºs 1 e 2
- E. ( ) Em todas as palavras

**22.** (ITA-1987) Dadas as afirmações de quem nasce em

- 1) Holland é Dutch
- 2) Switzerland é Swede
- 3) Denmark é Danish

Constatamos que está (estão) correta(s)

- A. ( ) Apenas a afirmação nº 1  
 B. ( ) Apenas a afirmação nº 2  
 C. ( ) Apenas a afirmação nº 3  
 D. ( ) Apenas as afirmações nºs 1 e 2  
 E. ( ) Todas as afirmações

- 23.** (ITA-1987) Dadas as sentenças  
 1) He won me in chess yesterday.  
 2) Are you right that he will be here tomorrow?  
 3) At first I thought that you were a thief.  
 Constatamos que está(estão) correta(s)  
 A. ( ) Apenas a sentença nº 1  
 B. ( ) Apenas a sentença nº 2  
 C. ( ) Apenas a sentença nº 3  
 D. ( ) Apenas as sentenças nºs 1 e 2  
 E. ( ) Todas as sentenças

A alternativa que corretamente preenche as lacunas das questões **24**, **25** e **26**, é, respectivamente,

- 24.** (ITA-1988)  
 1) She does not depend I her parents.  
 2) He aimed his gun II the tiger, fired and missed.
- |        |      |        |
|--------|------|--------|
|        | I    | II     |
| A. ( ) | of   | to     |
| B. ( ) | from | at     |
| C. ( ) | in   | to     |
| D. ( ) | of   | toward |
| E. ( ) | on   | at     |

- 25.** (ITA-1988) How is he getting I II his English?
- |        |       |      |
|--------|-------|------|
|        | I     | II   |
| A. ( ) | up    | to   |
| B. ( ) | up    | with |
| C. ( ) | along | with |
| D. ( ) | out   | to   |
| E. ( ) | on    | from |

- 26.** (ITA-1988) He is going to Austrália \_\_\_\_\_ his own.
- |             |           |
|-------------|-----------|
| A. ( ) in   | B. ( ) on |
| C. ( ) at   | D. ( ) by |
| E. ( ) with |           |

A sílaba tônica proposta das palavras das questões **27**, **28** e **29** será aqui sublinhada. Ex.: TO – MOR – ROW.

- 27.** (ITA-1988)  
 1) GOV – ERN – MENT  
 2) NECK – LACE  
 3) AV – ER – AGE  
 e, baseando-nos na explicação acima, constatamos que está (estão) com a sílaba tônica correta  
 A. ( ) Apenas a palavra nº 1  
 B. ( ) Apenas a palavra nº 2  
 C. ( ) Apenas a palavra nº 3  
 D. ( ) Apenas a palavra nºs 1 e 3  
 E. ( ) Todas as palavras

- 28.** (ITA-1988)  
 1) EU – ROPE  
 2) DE – MAND  
 3) LAN – GUAGE  
 A. ( ) Apenas a palavra nº 1  
 B. ( ) Apenas a palavra nº 2  
 C. ( ) Apenas a palavra nº 3  
 D. ( ) Apenas a palavra nºs 2 e 3  
 E. ( ) Todas as palavras

- 29.** (ITA-1988)  
 1) IN – TER – ME – DI – ATE  
 2) CHAR – AC – TER  
 3) IN – DUS – TRY  
 A. ( ) Apenas a palavra nº 1  
 B. ( ) Apenas a palavra nº 2  
 C. ( ) Apenas a palavra nº 3  
 D. ( ) Apenas a palavra nºs 2 e 3  
 E. ( ) Todas as palavras

- 30.** (ITA-1988) Dadas as afirmações de que  
 1) EVIL rima com LEVEL  
 2) CLEVER rima com NEVER  
 3) GREAT rima com TREAT  
 Constatamos que está (estão) correta(s)  
 A. ( ) Apenas a afirmação nº 1  
 B. ( ) Apenas a afirmação nº 2  
 C. ( ) Apenas a afirmação nº 3  
 D. ( ) Apenas as afirmações nºs 1 e 2  
 E. ( ) Todas as afirmações

- 31.** (ITA-1988) Dada as afirmações de que  
 1) LATTER rima com MATTER  
 2) GLOVE rima com LOVE  
 3) WAY rima com WEIGH  
 Constatamos que está (estão) correta(s)  
 A. ( ) Apenas a afirmação nº 1  
 B. ( ) Apenas a afirmação nº 2  
 C. ( ) Apenas a afirmação nº 3  
 D. ( ) Apenas as afirmações nºs 1 e 3  
 E. ( ) Todas as afirmações

- 32.** (ITA-1988) Dadas as afirmações de que  
 1) HAIR rima com HER  
 2) PIECE rima com PEACE  
 3) WEAK rima com WEEK  
 Constatamos que está (estão) correta(s)  
 A. ( ) Apenas a afirmação nº 1  
 B. ( ) Apenas a afirmação nº 2  
 C. ( ) Apenas a afirmação nº 3  
 D. ( ) Apenas as afirmações nºs 2 e 3  
 E. ( ) Todas as afirmações

- 33.** (ITA-1988) Dadas as afirmações de que o GH é pronunciado com F em  
 1) COUGH      2) BOUGH      3) THIGH



Constatamos que está (estão) correta(s)

- A. ( ) Apenas a afirmação nº 1
- B. ( ) Apenas a afirmação nº 2
- C. ( ) Apenas a afirmação nº 3
- D. ( ) Apenas as afirmações nºs 1 e 2
- E. ( ) Todas as afirmações

**34.** (ITA-1988) Dadas as afirmações de que o feminino de

- 1) SERVANT é SERVANTESS
- 2) DRAKE é HEN
- 3) MASTER é MISTRESS

Constatamos que está(estão) correta(s)

- A. ( ) Apenas a afirmação nº 1
- B. ( ) Apenas a afirmação nº 2
- C. ( ) Apenas a afirmação nº 3
- D. ( ) Apenas as afirmações nºs 1 e 3
- E. ( ) Todas as afirmações

**35.** (ITA-1988) Algumas vezes, o significado da forma plural de um substantivo (em inglês) é diferente de seu significado na forma singular. Dadas as palavras (já na sua forma plural)

- 1) WORKS
- 2) CUSTOMS
- 3) WOODS

Constatamos que confere(m) com a afirmação acima

- A. ( ) Apenas a palavra nº 1
- B. ( ) Apenas a palavra nº 2
- C. ( ) Apenas a palavra nº 3
- D. ( ) Apenas a palavra nºs 2 e 3
- E. ( ) Todas as palavras

**36.** (ITA-1988) Dadas as afirmações de que o plural de

- 1) BASIS é BASIS
- 2) DATUM é DATAS
- 3) BUSINESS é BUSINESSSES

Constatamos que está (estão) correta(s)

- A. ( ) Apenas a afirmação nº 1
- B. ( ) Apenas a afirmação nº 2
- C. ( ) Apenas a afirmação nº 3
- D. ( ) Apenas as afirmações nºs 1 e 3
- E. ( ) Todas as afirmações

**37.** (ITA-1988) Um "DIME" é equivalente a

- A. ( ) 1 centavo      B. ( ) 5 centavos
- C. ( ) 10 centavos      D. ( ) 15 centavos
- E. ( ) 25 centavos

**38.** (ITA-1988) A alternativa que corretamente preenche as lacunas (I, II, III) de

Today I hearing this word, I II think first III my childhood.  
é

- |        | I    | II    | III   |
|--------|------|-------|-------|
| A. ( ) | of   | yet   | about |
| B. ( ) | upon | still | on    |
| C. ( ) | of   | yet   | of    |
| D. ( ) | upon | still | of    |
| E. ( ) | upon | yet   | in    |

**39.** (ITA-1989) During the week I get up early \_\_\_ the morning and go to bed late \_\_\_ night. But normally \_\_\_ weekends I sleep \_\_\_ midday.

- A. ( ) in – at – at – until
- B. ( ) on – in – in – as far as
- C. ( ) on – at – at – even
- D. ( ) in – at – in – until
- E. ( ) in – in – at – till

**40.** (ITA-1989) O plural dos substantivos abaixo:

- I. knife
  - II. tooth
  - III. woman
- É, na ordem:

- |        | I      | II       | III      |
|--------|--------|----------|----------|
| A. ( ) | knives | – teeth  | – womans |
| B. ( ) | knives | – teeths | – women  |
| C. ( ) | knifes | – tooths | – women  |
| D. ( ) | knifes | – teeth  | – women  |
| E. ( ) | knife  | – teeth  | – women  |

**41.** (ITA-1989) A palavra *blood* rima com:

- A. ( ) Mud      B. ( ) Food
- C. ( ) Flowed      D. ( ) Would
- E. ( ) Stood

**42.** (ITA-1989) A palavra *enough* rima com:

- A. ( ) Plow      B. ( ) Tough
- C. ( ) Gauge      D. ( ) Clog
- E. ( ) Though

**43.** (ITA-1990) Leia o texto abaixo, completando-o com as palavras que estão faltando:

Economically, the world can be divided \_\_\_\_\_ two parts.

The difference between them \_\_\_\_\_ that one part is poor and \_\_\_\_\_ other is wealthy. In the poor \_\_\_\_\_ of the world, a lot of \_\_\_\_\_ never get enough to eat. In \_\_\_\_\_ countries, a lot of people eat \_\_\_\_\_ much. The tragedy is that there \_\_\_\_\_ more people in the poor countries \_\_\_\_\_ there are in the wealthy countries. \_\_\_\_\_ is estimated that approximately 80% of the \_\_\_\_\_ population cannot afford to have proper \_\_\_\_\_, housing or medical care.

(referência: *AKL Advanced Series - Ed. Longman, 1985*).

- A. ( ) onto - are - the - country's - people - healthy - too - are - than - It - world's - food.
- B. ( ) into - is - the - countries - people - wealthy - too - are - than - It - world's - food.
- C. ( ) onto - is - the - countries - people - healthy - too - are - then - It - world's - food.
- D. ( ) into - is - the - country's - people - wealthy - too - is - then - It - world - food.
- E. ( ) into - is - the - countries - people - wealthy - too - is - then - It - world - food.

Abaixo você tem algumas expressões e seus vários possíveis significados, de acordo com um dicionário. Utilize-as para responder aos testes 44, 45 e 46.

- I. **bring up** (v adv) 1. to educate and care for in the family until grown-up: *to bring up children* 2. to raise or introduce (a subject): *to bring up the question of* compare COME UP (1) 3. esp. BrE to be sick; VOMIT (one's food) 4. *usu. pass.* to cause to stop suddenly: *John was about to enter the room, when he was brought up short by a note on the door* 5. to cause to arrive: *to bring up more soldiers* 6. (to) cause to reach : That brings the total up (to □200) 7. (for) esp. BrE: infml to speak severely to: *Mother is always bringing the boy up for his bad behaviour.* 8. Have up 9. Bring to 10. Bring up the rear: to be the last in a line or in a group of soldiers.
- II. **carry on** (v adv) 1. to continue, esp. in spite of an interruption or difficulties: Even after the king had entered the room she carried on talking. | *Carry on the good work!* | *The government must carry on, whatever the cost.* | *We'll carry on our conversation tomorrow* 2. infml: to behave in a very excited and anxious manner: *Mother did carry on so when she heard the bad news!*
- III. **look up** (v adv) 1. to get better, esp. after being bad: *Trade should look up later in the year* 2. to find (information) in a book: Look up the word in the dictionary 3. to find and visit (someone) when in the same place.
- IV. **put up** (v adv) 1. to raise: *put up a tent* 2. to put in a public place: put up a notice 3. to increase (a price) 4. becoming rare to pack: Put up some food for us. | *Put up the apples in barrels* 5. to provide food and lodging for (someone): *I'm afraid I can't put you up; you'll have to go to a hotel* 6. esp. BrE: to find food and lodging: *We'll put up here for the night.* | *We'll put up at an inn* - compare PUT UP WITH 7. esp. BrE: to offer oneself for election: *My brother is putting up for Parliament at the next election* 8. to supply (money needed for something): The plans for the new theatre are all prepared, but who will put up the money? 9. to offer, show, make, or

give esp. in a struggle: *What a coward; he didn't put up much of a fight!* 10. to offer for sale: *She's putting her house up* (for sale) 11. to suggest (someone) for a job, position, etc.: *Will you put Tom up the cricket club* (= suggest him as a member)? 12. to place in safe keeping OR PUT AWAY (1): *put up your sword* 13. becoming rare to preserve and store (fruit, food, etc.) 14. to call (a prisoner) to be examined in court 15. tech: to make (a hunted animal or bird) leave a hiding place: *Hunters use dogs to put up birds.*

- V. **take after** (v prep) 1. to look or behave like (an older relative): *Mary really takes after her mother; she has the same eyes, nose, and hair.* 2. *Ame* to chase.

(Longman Dictionary of Contemporary English  
 Longman Group Limited, 1978)

Cada uma das sentenças possui uma expressão sublinhada que pode ser substituída por uma das definições acima. Leia as definições com atenção e assinale a alternativa correta:

44. (ITA-1990) The Smiths have tried to educate all their five children to be quite independent.  
 A. ( ) I                      B. ( ) II                      C. ( ) III  
 D. ( ) IV                     E. ( ) V
45. (ITA-1990) It's really incredible how Robert resembles his father both in character and in appearance.  
 A. ( ) I                      B. ( ) II                      C. ( ) III  
 D. ( ) IV                     E. ( ) V
46. (ITA-1990) I don't know Mrs Lawrence's number but I'll find it the telephone in directory.  
 A. ( ) I                      B. ( ) II                      C. ( ) III  
 D. ( ) IV                     E. ( ) V
47. (ITA-1990) Dadas as afirmações que o plural de:  
 1. chief é chieves  
 2. radius é radii  
 3. leaf é leaves  
 Constatamos que está (estão) correta (s)  
 A. ( ) Apenas a afirmação nº 1  
 B. ( ) Apenas a afirmação nº 2  
 C. ( ) Apenas a afirmação nº 3  
 D. ( ) As afirmações nº 2 e 3  
 E. ( ) Todas as afirmações.
48. (ITA-1990) A alternativa que corretamente preenche as lacunas I, II e III de:  
 1. No news I good news.  
 2. The brazilian people II very friendly.  
 3. Your cattle III there.  
 é:

- |            | I   | II  | III |
|------------|-----|-----|-----|
| A. ( ) is  | are | are |     |
| B. ( ) are | is  | is  |     |
| C. ( ) are | is  | are |     |
| D. ( ) are | are | are |     |
| E. ( ) is  | is  | is. |     |

**49.** (ITA-1990) Dadas as afirmações de que o feminino de

- singer é singer
- monk é nun
- host é hostess

Constatamos que está (estão) correta (s)

- Apenas a afirmação nº 1
- Apenas a afirmação nº 2
- Apenas a afirmação nº 3
- As afirmações nºs 2 e 3
- Todas as afirmações

**50.** (ITA-1990) A alternativa que corretamente preenche as lacunas I e II III de

- Five from six leaves I.
- Two into eight goes II times
- The third power of two is III.

é:

- |           | I  | II | III |
|-----------|----|----|-----|
| A. ( ) 30 | 8  | 10 |     |
| B. ( ) 11 | 10 | 10 |     |
| C. ( ) 30 | 12 | 8  |     |
| D. ( ) 1  | 4  | 8  |     |
| E. ( ) 1  | 8  | 1. |     |

**51.** (ITA-1990) Many students spent too much time \_\_\_\_\_ the first part of the examination.

- in
- about
- within
- on
- for.

**52.** (ITA-1990) The goalkeeper was ashamed \_\_\_\_\_ letting the ball through.

- forward
- of
- to
- by
- from.

O texto abaixo, extraído de Serendib, vol. 8, nº 5, de set-out 1989, é o assunto da questão **53**. Leia-o com atenção.

**VITAL STATISTICS  
EACT FILE = SRI LANKA**

**Size:** 65.610 square km

**Location:** 880 kilometres north of the equator, off the southern tip of India

**Capital:** Sri Jayewar - denepura Kotte (102.000)

**Comercial Capital:** Colombo (613.000)

**Population:** 16.4 million

**Density:** 254 persons per square kilometre

**Life expectancy at birth:** 67.6 male ; 70.9 female  
**Languages:** Sinhala. Tamil, English. English is widely spoken throughout Sri Lanka. Except in remote villages.

**Literacy rate:** 87.2 per cent

**Annual per capita income:** US\$ 360

**Ethnic groups:** Sinhalese 74 per cent; Tamil 18.1 per cent; Muslims 7.1 per cent; Burghers (descendants from Dutch and Portuguese colonists) and others 0.8 per cent

**Religions:** Buddhism 69 per cent; Hinduism 15 per cent; Christianity 7 per cent

**Major exports:** Tea, rubber, coconut, gemstones, textiles, garments

**Labour force:** 16 per cent agriculture; 29 per cent industry and commerce; 19 per cent services.

**53.** (ITA-1991) Lendo as informações sobre Sri Lanka, concluímos que:

- a expectativa de vida é maior para homens que para mulheres.
  - todos os habitantes do país falam Inglês.
  - é grande o número de analfabetos.
  - o grupo étnico Burghers é formado por descendentes de colonizadores dinamarqueses e portugueses.
- os itens I, II, III e IV são verdadeiros.
  - os itens I, II, III e IV são falsos.
  - apenas o III é falso.
  - apenas o IV é verdadeiro.
  - apenas o II é verdadeiro.

**54.** (ITA-1991) A alternativa que corretamente preenche a lacuna de:

He is \_\_\_\_\_ far the most intelligent man I know.

é:

- at
- on
- in
- by
- of

**55.** (ITA-1991) A alternativa que corretamente preenche as lacunas I e II de:

The aeroplane took (I) (II) six o'clock.

- |        | I       | II  |
|--------|---------|-----|
| A. ( ) | off     | at  |
| B. ( ) | up      | in  |
| C. ( ) | upwards | at  |
| D. ( ) | on      | on  |
| E. ( ) | away    | up. |

**56.** (ITA-1991) A alternativa que corretamente preenche a lacuna de:

Mr. Bernardes will arrive a week \_\_\_\_\_ today.

- on
- of
- within
- in
- from.



- 57.** (ITA-1991) A alternativa que corretamente preenche a lacuna de:

Please come to class before 8 a.m. \_\_\_\_\_

- A. ( ) of now in  
B. ( ) from now on  
C. ( ) by now later  
D. ( ) on now on  
E. ( ) at now after.

- 58.** (ITA-1991) A alternativa abaixo que preenche a lacuna de:

Buses here never arrive \_\_\_\_\_ time.

- A. ( ) on                      B. ( ) at  
C. ( ) in                      D. ( ) by  
E. ( ) up.

- 59.** (ITA-1991) A alternativa abaixo que corretamente preenche as lacunas I e II de:

\_\_\_\_(I) what he says, she was born \_\_\_\_ (II) march 25, 1970.

- | I                      | II  |
|------------------------|-----|
| A. ( ) according to    | in  |
| B. ( ) according with  | on  |
| C. ( ) accordance to   | in  |
| D. ( ) according to    | on  |
| E. ( ) accordance with | in. |

- 60.** (ITA-1991) A alternativa abaixo que preenche a lacuna de:

I ran \_\_\_\_\_ an old friend of yours yesterday.

Dando a idéia de **encontrar-se por acaso**

- A. ( ) into                      B. ( ) unto  
C. ( ) out                      D. ( ) up  
E. ( ) down.

- 61.** (ITA-1991) A alternativa que corretamente preenche a lacuna de:

I always go to school ..... foot.

- A. ( ) of                      B. ( ) by  
C. ( ) at                      D. ( ) on  
E. ( ) in.

- 62.** (ITA-1991) She bought \_\_\_\_\_ cloth it will make two sheets.

- A. ( ) too                      B. ( ) enough  
C. ( ) many                      D. ( ) such  
E. ( ) an.

- 63.** (ITA-1991) The prisoner tried to conceal the truth \_\_\_\_\_ the judge.

- A. ( ) on                      B. ( ) by  
C. ( ) of                      D. ( ) from  
E. ( ) behind.

- 64.** (ITA-1992) Qual expressão substitui corretamente a palavra sublinhada?

The engineer resigned the post of supervisor. He knew he wouldn't be able to cope with all the responsibility alone.

- A. ( ) gave out  
B. ( ) gave up  
C. ( ) gave in  
D. ( ) gave away  
E. ( ) gave back

- 65.** (ITA-1993) A alternativa que preenche as lacunas I e II corretamente é:

"The Pan Am plane, flight 103 I on Lockerbie, Scotland II December 21, 1988"

TIME, April 27, 1992.

- A. ( ) felt                      in  
B. ( ) falled                      in  
C. ( ) felt                      on  
D. ( ) fell                      in  
E. ( ) fell                      on.

- 66.** (ITA-1993) Assinale a alternativa correta:

- A. ( ) He asked her where is she going to spend her vacation.  
B. ( ) He asked her where were she going to spend your vacation.  
C. ( ) He asked her where she were going spend your vacation.  
D. ( ) He asked her where was she going to spend her vacation.  
E. ( ) He asked her where she was going to spend her vacation.

- 67.** (ITA-1993) A alternativa que preenche corretamente a lacuna abaixo é:

The manager told his secretary \_\_\_\_\_ to mail the letters.

- A. ( ) not forget  
B. ( ) not to forget  
C. ( ) don't forget  
D. ( ) not forgetting  
E. ( ) to not forget.

As questões de **68** a **71** referem-se ao seguinte texto:

Sometimes things all work out in the end. Look what happened to Chicagoans Douglas Van Tress and Chauwarin Tuntisak. About four years ago, their jewelry business was on the brink of bankruptcy. Both men - then in their 20s - were forced to take restaurant jobs to make ends meet. "We almost gave up," Van tress recalls. "But we decided to make one more go of it."

9 Fortunately for them, Tuntisak has a very supportive and entrepreneurial family back in Thailand. Equally fortunate, the family hails from Chiang Mai, an old city in the northern part of the country that is lush, scenic, and blessed with natural resources. It is also a trade center, famous for its woodcarvings, lacquerware, ceramics, and other crafts.

17 One of Tuntisak's sisters noticed that European dealers were scouring Chiang Mai, scooping up all kinds of contemporary wood carvings. Recognizing this hot new trend, she shipped her brother some of the best carvings in the region.

**VIS À VIS**, Sept. 92.

**68.** (ITA-1994) As expressões "work out" and "gave up", sublinhadas no texto, poderiam ser substituídas respectivamente por:

- A. ( ) turn out, surrendered
- B. ( ) come to, started from scratch
- C. ( ) come up, gave way
- D. ( ) take up, turned down
- E. ( ) look out, postponed

**69.** (ITA-1994) A expressão "to make ends meet" na frase "Both men (...) were forced to take restaurant jobs to make ends meet", na linha 5, quer dizer:

- A. ( ) encerrar um negócio.
- B. ( ) mudar de atividade.
- C. ( ) quitar débitos contraídos em um negócio.
- D. ( ) cobrir as despesas essenciais.
- E. ( ) manter um outro negócio.

**70.** (ITA-1994) A frase "We decided to make one more go of it", na linha 8, significa que:

- A. ( ) decidiram trabalhar em restaurantes.
- B. ( ) decidiram tentar um novo negócio.
- C. ( ) decidiram reforçar o orçamento.
- D. ( ) ampliaram os negócios.
- E. ( ) decidiram tentar a vida em outra parte.

**71.** (ITA-1994) De acordo com o texto, a irmã de Tuntisak:

- A. ( ) associou-se a ele e a Van Tress em um negócio de madeiras.
- B. ( ) colocou os dois rapazes em contato com negociantes europeus.
- C. ( ) percebeu a viabilidade de uma loja de entalhes na cidade turística de Chiang Mai.
- D. ( ) enviou entalhes de sua cidade natal para que seu irmão e Van Tress os comercializassem em Chicago.
- E. ( ) percebeu que os Europeus haviam "descoberto" a pirogravura tailandesa contemporânea.

**72.** (ITA-1994) Assinale a opção em que todas as palavras rimem:

- A. ( ) fear, bear, pear
- B. ( ) dose, rose, lose
- C. ( ) hiccough, through, though
- D. ( ) heard, neared, beard
- E. ( ) threat, debt, met.

**73.** (ITA-1994) A sentença "He asked me to write about anything but business", significa que:

- A. ( ) He doesn't want me to write about business.
- B. ( ) He wants me to keep him informed about business.
- C. ( ) Anything concerning business would interest him.
- D. ( ) He doesn't like reading business letters.
- E. ( ) He'd rather talk read about business.

**74.** (ITA-1994) Assinale a opção que melhor preenche a lacuna da frase abaixo:

*"It will be a historic day for South Africa when \_\_\_\_\_ the opportunity to make fundamental political decisions about their future."*

Moses Tebogo Seate  
TIME, July 5, 1993.

- A. ( ) it is given to blacks
- B. ( ) they give the blacks
- C. ( ) blacks are given
- D. ( ) is given the blacks
- E. ( ) they've given blaks.

**75.** (ITA-1994) Assinale a alternativa que preenche corretamente as lacunas I, II, III e IV, respectivamente:

- He was good I convincing people.
- To be busy is the best escape II unhappiness.
- He was sad III the death of his mother.
- We must agree IV a plan of action for next semester.

- |        | I     | II   | III  | IV    |
|--------|-------|------|------|-------|
| A. ( ) | in    | of   | with | with  |
| B. ( ) | about | of   | for  | about |
| C. ( ) | in    | for  | in   | with  |
| D. ( ) | about | to   | with | in    |
| E. ( ) | at    | from | at   | on.   |

**76.** (ITA-1995) A melhor forma de se concluir a sentença abaixo é:

*"Although personal appearance is of great importance when going to an interview for a job, the candidate should be careful \_\_\_\_\_"*

- A. ( ) to not overdress
- B. ( ) to do not overdress
- C. ( ) not to overdress



- D. ( ) do not overdress  
E. ( ) not overdress.

**77.** (ITA-1995) Assinale a alternativa que melhor traduz a sentença abaixo:

*"The researcher is said to have exposed his assistants to a deadly virus."*

- A. ( ) Disseram ao pesquisador que seus assistentes haviam sido expostos a um vírus mortal.  
B. ( ) O pesquisador é julgado por ter exposto seus assistentes a um vírus mortal.  
C. ( ) O pesquisador admite ter exposto seus assistentes a um vírus mortal.  
D. ( ) Dizem que o pesquisador expôs seus assistentes a um vírus mortal.  
E. ( ) Os assistentes do pesquisador dizem ter sido expostos a um vírus mortal.

As questões de 78 e 79 referem-se ao texto abaixo:

Harried executives may shoehorn an occasional squash game or round of golf into their overscheduled lives. Office clerks may sometimes trade a quick bite for gym class during lunch hours. But if they want to get more out of their exercise routine than a competitive attitude or leaner look, they are going to have to step up the pace. At least that is the conclusion of a Harvard study. (...) The research (...) found that those who exercised vigorously almost every day lived longer than those who broke a sweat only once or twice a week. Half-hearted huffing wasn't enough to make a difference, says Dr. I-Min Lee, who led the study. "It does not add years to your life."

(...) Several studies over the past few decades have associated regular exercise with longer life. Yet it has not always been easy to separate the positive effects of exercise from those of other healthy habits. Active people, after all, tend to eat right, keep their weight down and shun tobacco. Furthermore, many of the surveys have been so broadly based that they may have included people who were already ill, and therefore less likely to be active.

(TIME - May 1, 1995)

**78.** (ITA-1996) A expressão "*to break a sweat*" no trecho "lived longer than those who broke a sweat only once or twice a week",

- A. ( ) permitir intervalos entre as sessões semanais de ginástica  
B. ( ) praticar exercícios físicos moderados  
C. ( ) participar de eventos esportivos  
D. ( ) fazer Cooper  
E. ( ) "malhar".

**79.** (ITA-1996) A frase "*to trade a quick bite for a gym class*", sublinhada no texto, significa:

- A. ( ) tomar uma refeição rápida ao meio-dia para que haja tempo para uma sessão de ginástica  
B. ( ) substituir um rápido almoço por uma sessão de ginástica  
C. ( ) não comprometer uma sessão de ginástica no início da tarde com uma refeição muito pesada ao meio-dia  
D. ( ) deixar de comparecer a uma sessão de ginástica no intervalo do almoço  
E. ( ) comer apressadamente e correr para uma academia de ginástica.

### PARTE 5

- |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. A  | 2. D  | 3. C  | 4. E  | 5. B  |
| 6. A  | 7. E  | 8. E  | 9. E  | 10. E |
| 11. D | 12. C | 13. D | 14. C | 15. B |
| 16. D | 17. C | 18. B | 19. D | 20. E |
| 21. B | 22. D | 23. D | 24. E | 25. C |
| 26. D | 27. D | 28. E | 29. A | 30. D |
| 31. A | 32. B | 33. A | 34. C | 35. D |
| 36. D | 37. A | 38. D | 39. C | 40. C |
| 41. B | 42. A | 43. A | 44. B | 45. D |
| 46. D | 47. E | 48. C | 49. D | 50. A |
| 51. A | 52. C | 53. B | 54. A | 55. B |
| 56. A | 57. E | 58. C | 59. C | 60. B |
| 61. A | 62. E | 63. B | 64. E | 65. A |
| 66. B | 67. C | 68. D | 69. D | 70. E |
| 71. D | 72. E | 73. B | 74. C | 75. A |
| 76. C | 77. E | 78. B | 79. C | 80. A |
| 81. D | 82. A | 83. D | 84. D | 85. C |
| 86. B | 87. B | 88. C | 89. C |       |

### PARTE 6

- |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. A  | 2. D  | 3. B  | 4. B  | 5. B  |
| 6. D  | 7. D  | 8. E  | 9. C  | 10. E |
| 11. B | 12. C | 13. B | 14. C | 15. A |
| 16. A | 17. E | 18. A | 19. C | 20. A |
| 21. C | 22. A | 23. C | 24. E | 25. C |
| 26. B | 27. E | 28. D | 29. A | 30. B |
| 31. E | 32. D | 33. A | 34. C | 35. D |
| 36. C | 37. C | 38. D | 39. A | 40. D |
| 41. A | 42. B | 43. B | 44. A | 45. E |
| 46. C | 47. D | 48. A | 49. E | 50. D |
| 51. D | 52. B | 53. B | 54. D | 55. A |
| 56. E | 57. B | 58. A | 59. D | 60. A |
| 61. D | 62. B | 63. D | 64. B | 65. E |
| 66. E | 67. B | 68. A | 69. D | 70. B |
| 71. D | 72. E | 73. A | 74. C | 75. E |
| 76. C | 77. D | 78. E | 79. B |       |



@ copyright Editora Poliedro

2007

Editora Poliedro  
Caderno – Turma ITA  
Realização de Editora Poliedro  
São José dos Campos, Poliedro, 2007

216 p.;

29,7 cm.

1. Pré-Vestibular 2. Ensino 3. Caderno-3



**SISTEMA DE ENSINO POLIEDRO**

Av. Dr. Néilson D'Ávila, 915 – sala 11  
Centro – São José dos Campos – SP  
CEP: 12245-030 – Telefax: (12) 3923-4667  
[editora@sistemapoliedro.com.br](mailto:editora@sistemapoliedro.com.br)  
[www.sistemapoliedro.com.br](http://www.sistemapoliedro.com.br)

SISTEMA DE ENSINO

POLIEDRO



SISTEMA  
DE ENSINO  
**POLIEDRO**

[www.sistemapoliedro.com.br](http://www.sistemapoliedro.com.br)  
[editora@sistemapoliedro.com.br](mailto:editora@sistemapoliedro.com.br)