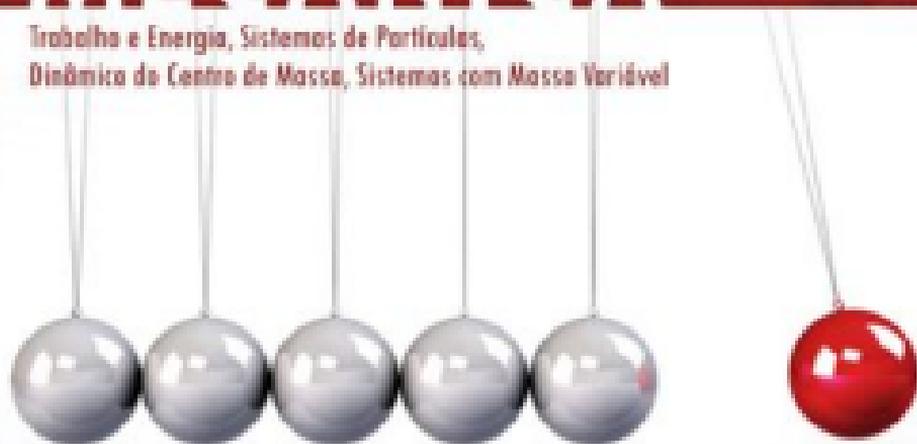




FUNDAMENTOS DE MECÂNICA

Trabalho e Energia, Sistemas de Partículas,
Dinâmica do Centro de Massa, Sistemas com Massa Variável



Volume 2

Renato Brito

Renato Brito Bastos Neto

Fundamentos de Mecânica

Trabalho e Energia
Sistemas de Partículas
Dinâmica do centro de massa
Sistemas com massa variável

Volume 2

Editora Vestseller
FORTALEZA - CE
2009

É proibida a reprodução parcial ou total por quaisquer meios sem autorização prévia do autor. Os transgressores serão punidos nos termos da lei. Denuncie o plágio, cópias ilegais, pirataria pela internet, sites para download pirata, comunidades piratas na internet anonimamente através do correio eletrônico do autor :

profrenatobrito@gmail.com

Todos os direitos desta edição reservados a:
© 2009 Renato Brito Bastos Neto

Editor responsável: Renato Brito Bastos Neto
Editoração: Renato Brito Bastos Neto
Capa: Cleiton Maciel

Esta obra pode ser adquirida diretamente na
EDITORA VESTSELLER
através de sua página eletrônica www.vestseller.com.br

FICHA CATALOGRÁFICA: Preparada por
Ruth Helena Linhares Leite e Luiza Helena de Jesus Barbosa.

B327m Bastos Neto, Renato Brito

Mecânica para vestibulandos IME ITA / Renato Brito Bastos Neto. -
Fortaleza: Vestseller, 2009. 548p. ; v.2.

I. Mecânica II. Física (segundo grau) III. Dinâmica IV. Título

CDD 531



É proibida a reprodução parcial ou total por quaisquer meios sem autorização prévia do autor. os transgressores serão punidos com base no artigo 7º, da lei 9.610/98. Denuncie o plágio ou cópias ilegais anonimamente através do correio eletrônico do autor :

profrenatobrito@gmail.com

Todo o conteúdo dessa obra encontra-se registrado
na Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro.

Sumário

- Apresentação
- Sobre o autor
- Carta ao pirata
- Como usar este livro
- Agradecimentos
- Dedicatória
- Para fazer uso das questões deste livro

01 – TRABALHO E ENERGIA

1.1	Introdução – Por que estudar trabalho energia ?	01
1.2	O significado físico do trabalho realizado por uma força.	03
1.3	Entendendo fisicamente o sinal algébrico do trabalho.	05
1.4	Condições para que haja realização de trabalho.	07
1.5	Trabalho realizado por Força Constante inclinada.	10
1.6	Princípio do Trabalho Total (Teorema da Energia cinética).	11
	Problemas de Aplicação.	18
1.7	Trabalho realizado por força de intensidade variável.	20
1.8	Trabalho realizado pela força elástica.	24
	Problemas de Aplicação.	31
1.9	Princípio da Trajetória Alternativa (P.T.A.).	33
1.10	Trabalho da Força de Atrito – Princípio da Projeção.	40
	Problemas de Aplicação.	44
1.11	A energia potencial gravitacional.	45
1.12	Forças Conservativas.	48
1.13	Aprimorando o conceito de Trabalho.	50
1.14	Trabalho realizado por forças não-conservativas.	52
1.15	Condições para a conservação da energia mecânica.	55
1.16	Considerações sobre a conservação da energia mecânica.	61
	Problemas de Aplicação.	62

1.17	Trabalho realizado por forças internas.	64
1.18	O conceito de potência média e potência instantânea.	73
1.19	Complementos – A equação de Torricelli generalizada.	84
	Problemas Propostos	87

02 – SISTEMAS DE PARTÍCULAS, DINÂMICA DO CENTRO DE MASSA SISTEMAS COM MASSA VARIÁVEL

2.1	A Quantidade de Movimento de uma partícula.	124
2.2	Impulso: o ganho de quantidade de movimento.	125
2.3	Impulso aplicado por força de intensidade variável.	129
2.4	O conceito de Sistema.	131
2.5	O Conceito de forças internas e forças externas.	132
2.6	Ação-reação: transferência de quantidade de movimento.	133
2.7	Sistema mecânico isolado na direção horizontal.	136
	Problemas de Aplicação.	157
2.8	O Centro de gravidade de um sistema de partículas.	164
2.9	A velocidade do centro de massa (V_{cm}).	165
2.10	Sistemas compensados.	169
2.11	A Relação entre $Q_{sistema}$ e V_{cm} .	172
2.12	A Segunda lei de Newton para sistemas de partículas.	174
2.13	Sistemas mecânicos isolados e a primeira lei de Newton para sistemas.	182
2.14	Centro de massa de Sistemas compensados.	187
2.15	Sistemas mecânicos não isolados na direção vertical.	191
	Problemas de Aplicação.	193
2.16	Estudo das Colisões.	200
2.17	A quantidade de movimento do sistema em colisões.	201
2.18	A energia mecânica do sistema em colisões.	203
2.19	Colisões Unidimensionais e Bidimensionais.	205

2.20	Coeficiente de Restituição em colisões unidimensionais.	205
2.21	Colisão elástica unidimensional entre corpos de massas iguais.	212
2.22	Progressões Geométricas em colisões.	216
2.23	Caso Especial: colisão unidimensional em que uma das massas é muito maior do que a outra.	218
2.24	O Efeito da Baladeira (do estilingue) Gravitacional.	220
2.25	Estudo das colisões bidimensionais.	222
	Caso 1: colisão bidimensional com anteparo fixo.	222
	Caso 2: colisão bidimensional com espelhamento.	223
	Caso 3: colisão bidimensional com anteparo móvel.	225
	Caso 4: colisão oblíqua elástica entre duas partículas de massas iguais, estando uma delas inicialmente em repouso.	227
	Caso 5: colisão central oblíqua entre duas esferas	229
	Problemas de Aplicação.	230
2.26	Sistemas com Massa variável – a força propulsora	251
2.27	Sistemas com ganho de massa	254
2.28	O Empuxo e a velocidade relativa	258
	Problemas resolvidos com correntes	260
	Problemas de Aplicação.	269
	Problemas Propostos.	272
03	– Respostas e Soluções – Trabalho e Energia	311
04	– Respostas e Soluções – Sistemas de Partículas	403
05	– Apêndice	541
06	– Referências Bibliográficas	542
07	– Referências na internet	544

Apresentação

Escrevi este livro motivado pela carência de material didático sobre essa temática num nível adequado aos vestibulandos IME ITA.

Ele é o segundo volume de uma coleção em três volumes intitulada *Fundamentos de Mecânica – Mecânica para Vestibulandos IME ITA*, estruturada da seguinte forma:

- Volume 1 – Cinemática geral e Leis de Newton;
- Volume 2 – Energia, Sistemas de partículas, Dinâmica do centro de massa, sistemas com massa variável;
- Volume 3 – Estática, Hidrostática, Gravitação e MHS.

O capítulo 1 traz a teoria detalhada sobre Trabalho e Energia. Partindo das idéias primitivas, construí, passo a passo, os conceitos de trabalho, energia potencial, forças conservativas, forças não conservativas até chegar às condições para a conservação da energia mecânica.

Introduzi algumas ferramentas incomuns, tais como o Princípio da Trajetória Alternativa, o Princípio da Projeção para o cálculo do trabalho da força de atrito, bem como uma interessante generalização da equação de Torricelli do MUV muito útil na resolução de problemas.

Tratei também do trabalho realizado por forças internas em sistemas de partículas, tais como um homem caminhando, um patinador empurrando uma parede ou um automóvel em movimento.

Ao longo de toda a teoria, o leitor encontrará uma grande quantidade de Exemplos Resolvidos que mostram, prontamente, a aplicação prática e numérica do conteúdo recém apresentado ao leitor. Logo ao final de cada seção, o leitor encontra vários Problemas de Aplicação para que possa prontamente aferir o aprendizado do conteúdo apresentado.

Ao todo, são mais de 20 Exemplos Resolvidos distribuídos ao longo da teoria do Capítulo 1. Para um excelente treinamento, o leitor encontrará mais de 130 questões entre Problemas de Aplicação e Problemas Propostos nesse capítulo, dos quais, praticamente todas encontram-se amplamente resolvidas e comentadas no final do livro.

Ao longo de todo o livro, os problemas marcados com o símbolo  (*resolução liberada*) têm a sua resolução completa detalhada no final do livro. Eles servem como base, isto é, como modelo para as questões que as sucedem. Os poucos problemas que não apresentam esse símbolo trazem apenas as suas respostas ao final do livro (com dicas para resolução), por se tratarem de questões de treinamento (correlatas) muito semelhantes aos modelos resolvidos. Seguindo essa metodologia, o prof. Renato Brito permite que o leitor autodidata consiga evoluir e obter um grande salto de conhecimento no seu estudo da Mecânica para IME ITA, ainda que não tenha à sua disposição uma equipe de professores para a preparação IME ITA em sua cidade ou escola.

O capítulo 2 traz a teoria detalhada sobre impulso e quantidade de movimento. Gradativamente, introduzi também os conceitos relativos à

Dinâmica do Centro de Massa, apresentando ao leitor a primeira e a segunda lei de Newton para Sistemas de Partículas. O conhecimento das leis de Newton generalizadas para sistemas, aliadas aos teoremas do centro de massa, propiciam ao leitor uma visão bem mais ampla e um conhecimento bem mais profundo sobre a Dinâmica dos sistemas de Partículas.

Tratei amplamente sobre as colisões em suas mais variadas formas, tanto unidimensionais quanto bidimensionais, apresentando todos os teoremas e casos particulares importantes. Apresentei ao leitor o conceito de coeficiente de restituição inclusive em problemas bidimensionais e illustrei essas idéias com vasta quantidade de Exemplos Resolvidos e comentados de forma bastante clara e detalhada, de forma que qualquer estudante de Ensino Médio autodidata possa compreender e assimilar o conteúdo sem a necessidade de ajuda externa.

Finalmente, tratei sobre os interessantes problemas de sistemas com massa variável, incluindo o cálculo da força propulsora (empuxo) em jatos, sistemas com ganho e perda de massa. Nessa seção, foi incluído um grande número de Exemplos Resolvidos muito interessantes envolvendo correntes, tanto em queda livre, quanto em movimento uniforme apoiadas sobre balanças ou suportes. Logicamente, toda essa seção, assim como o resto do livro, só faz uso de Matemática de Ensino Médio, dispensando qualquer conhecimento sobre Cálculo Diferencial e Integral que nem sequer consta dos conteúdos programáticos dos vestibulares IME ITA.

Além dos mais de 25 Exemplos Resolvidos e Comentados distribuídos ao longo de toda a teoria do capítulo 2, foram disponibilizados mais de 220 Problemas de Aplicação e Propostos para o treinamento do leitor, sendo que a quase totalidade deles encontra-se integralmente resolvida ao final do livro. Seguindo essa metodologia, o prof. Renato Brito permite que o leitor autodidata consiga evoluir e obter um grande salto de conhecimento no seu estudo da Mecânica para IME ITA, ainda que não tenha a sua disposição uma equipe de professores para a preparação IME ITA em sua cidade ou escola.

Ao longo de todo o livro, usei uma linguagem simples e irreverente, utilizando-me da personagem Claudete, a fim de tornar a sua leitura leve e prazerosa, amenizando o alto nível técnico praticado.

Optei por concentrar as respostas e resoluções dos problemas propostos no final do livro, acreditando que essa forma de organizar o conteúdo torne a sua leitura mais clara.

Espero que a presente obra contribua para dar ao leitor uma compreensão mais sólida e aprofundada dos princípios da Dinâmica.

Para que eu possa aprimorar o seu conteúdo continuamente, o envio de críticas e sugestões, bem como de eventuais falhas que o leitor venha a encontrar, é bem-vindo, pelo email:

profrenatobrito@gmail.com

Renato Brito Bastos Neto
Fortaleza, agosto de 2009

Sobre o autor

O professor Renato Brito é cearense e atua no segmento IME ITA desde 1990, quando iniciou a sua preparação para o ITA (Instituto Tecnológico de Aeronáutica) nas turmas especiais do Colégio Geo Studio, em Fortaleza.

Foi aprovado no exame vestibular ITA 92, graduando-se engenheiro eletrônico em dezembro de 1997. A partir do segundo ano da faculdade, colaborou na preparação de vestibulandos IME ITA em um cursinho de São José dos Campos então recém fundado, o Poliedro, onde lecionou Física durante seis anos, retornando à sua cidade natal em janeiro de 1999.

Desde então, atua em Fortaleza, tanto na preparação de vestibulandos IME ITA, quanto na preparação de vestibulandos de Medicina e Odontologia - segmento muito concorrido nos exames das universidades brasileiras.



Tomou contato com os livros da renomeada editora Mir – Moscou, pela primeira vez, aos dezesseis anos de idade, ao adquirir os livros *Problemas Seleccionados de Física Elementar* (Saraeva) e *Problemas de Matematica Elementares* (V.Lidski e Otros) na Livraria Arte e Ciência orientado pelo amigo prof. Majela Guedes. Desde então, passou a integrar a família dos inúmeros docentes e estudantes dos quatro continentes aficionados pelos livros daquela editora russa.

A Mir - Moscou, embora ainda esteja ativa até os dias de hoje, restringiu sua produção ao mercado russo desde 1990, com a desintegração da união soviética, quando passou a editar e publicar livros apenas no idioma local.

Inconformado com a carência de publicações de ensino médio em ciências exatas voltadas para os vestibulandos IME ITA, fundou a editora VestSeller em 2005, visando a resgatar, na medida do possível, a qualidade dos livros nesse segmento, fechando contratos com editoras e autores na Índia, na Rússia e no Brasil.

A editora VestSeller é uma empresa do segmento pontocom, atuando em todo Brasil pela internet, através do seu sítio www.vestseller.com.br. Patrocina iniciativas filantrópicas, como o site www.rumoaota.com, além de manter o Fórum Brasileiro dos vestibulandos do IME e do ITA no sítio www.fisicaju.com.br/forum.

Carta ao Pirata

Em tempos modernos, é prudente o autor dedicar algumas palavras ao seu pior algoz e parasita: o pirata do século XXI.

Ele se julga muito esperto, superior a todos e acima da lei, duplicando e disseminando o produto do seu roubo através de fotocópias ou por meios eletrônicos, através de programas consagrados pelos usuários da internet.

Prezado Pirata,

Sei que você não faz a menor idéia do que foi o trabalho para produzir todo esse material de qualidade e ainda é incapaz de dimensionar quantos longos dias e noites solitárias me dediquei à escrita desse livro.

Entendo que seja muito cômodo encontrar o livro na internet pronto para ser salvo na memória do computador, reproduzido e distribuído de forma ilegal e, portanto, criminosa.

Quisera que você, por um infortúnio ou ironia do destino, passasse à posição de vítima como autor de alguma obra, e se deparasse, diariamente, com seus livros, músicas ou textos, disponíveis na internet, eletronicamente profanados, reduzidos a uma mera sequência de bits que solertemente trafegam pela rede.

Quisera, um dia, você vir o fruto do teu trabalho reduzido a farrapo digital. Aí sim, experimentaria do mesmo amargo que coloca em minha boca e vestiria o nariz vermelho de palhaço que contemplo diariamente, ao mirar o espelho.

Seja autor um dia e experimente a ira e o inconformismo que você desperta na alma desse que aqui vos fala em nome de toda a classe de autores. Só assim, sentindo na própria pele, seria possível adquirir uma consciência crítica e ética suficientes para estancar essa hemorragia social.

Pense duas vezes, antes de usurpar este meu filho querido. Se o fizer, te caçarei implacavelmente em todas as esquinas, você nunca mais terá paz até a Polícia Federal de qualquer país chegar até você. Se eu consigo fechar contratos com russos, indianos e outros povos do outro lado do mundo, então sou capaz de achar até mesmo uma agulha num palheiro. Prepare-se para a indenização, pois serei implacável e não lhe pouparei da minha ira.

Fortaleza, 24 de agosto de 2009

Prof. Renato Brito

Como usar este livro

Para que o leitor tire máximo proveito da presente obra, darei, a seguir, algumas instruções que serão muito úteis.

Antes de mais nada, afirmo não ser necessário o conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral para uma perfeita assimilação do conteúdo deste livro. Toda a Matemática aqui praticada é de ensino médio.

Adicionalmente, esse não é um mero livro de exercícios compilados seguidos de suas respectivas soluções. Mais do que isso, busquei realmente escrever uma teoria rica, consistente e realmente compatível com o nível dos exercícios e problemas propostos ao longo de cada capítulo.

Assim, o máximo proveito desse livro é obtido quando o leitor realmente se deixa levar pelo fluxo natural do texto. A ordem especial em que se apresentam as teorias, os exercícios resolvidos, os problemas de aplicação logo após cada seção teórica, bem como os problemas propostos no final de cada capítulo, foi minuciosamente tramada de forma a efetuar conexões entre conceitos físicos e técnicas de resolução na sequência mais lógica e racional possível, maximizando tanto o aprendizado do leitor quanto a fixação mais duradoura do conteúdo.

Saltar diretamente para os exercícios propostos, pelo fato de eles trazerem suas resoluções ao final do livro, sem esmiuçar previamente toda a teoria daquele capítulo, dará ao leitor apenas a falsa sensação de aprendizado. Entretanto, quando a complexidade dos problemas começar a se agigantar, a fragilidade desse pseudo-aprendizado se revelará, trazendo desapontamento e desestímulo para o leitor.

Aquele que seguir a sequência natural proposta no livro, página por página, sem antecipar nenhum dos passos, terá um aprendizado cadenciado, firme e sólido, que se mostrará implacável mesmo quando o nível de complexidade se agigantar nos problemas mais difíceis dessa obra. Terá um aprendizado mais prazeroso e duradouro, não uma mera sensação de aprendizado.

Na resolução de alguns problemas, foram utilizadas as técnicas de resoluções no Referencial Não-inercial, tema central do volume 1 desta obra. Caso julgue necessário, recorra ao volume 1, ao se deparar com as resoluções desses problemas.

Acredito que, seguindo essas instruções, mesmo um estudante com pouca experiência em Mecânica assimilará todo o conteúdo desta obra com sucesso, obtendo, em geral, um grande salto de conhecimento num espaço de tempo relativamente curto na sua preparação IME ITA.

Este livro é um presente para todos os estudantes e professores brasileiros.

Agradecimentos

Deus, pelo dom da vida e pela saúde;

À minha família pelo apoio diário;

À minha namorada Giselly, pela paciência durante minhas longas noites e finais de semana de trabalho dedicados a essa obra, bem como pelo estímulo e motivação diários.

Aos meus alunos, por estarem sempre debatendo comigo, levando-me ao contínuo reaprendizado da Física;

Ao professor Marcos Haroldo por ter me iniciado na estrada da Física IME ITA.

Dedicatória

Este livro é dedicado a todos aqueles que **não** são movidos pela sedução do dinheiro e poder mas sim, por uma causa nobre, por um ideal.

Somente os idealistas podem mudar o mundo.

Para fazer uso das questões desse livro

Nós professores levamos a vida a pesquisar boas questões para nossas provas e listas de exercícios, aprimorando, gradativamente, nossos próprios conhecimentos nessa busca incessante.

Ainda assim, para que esse processo ocorra de forma mutuamente justa e ética para os leitores e autores, é necessário que a fonte de cada questão, em nossos materiais, provas ou notas de aula, seja devidamente citada em local visível.

Acredito que, muitas vezes, os colegas professores não citem a fonte das suas questões por achar que esse fato não tem relevância, ou por não saber como fazê-lo devidamente. Entretanto, eles rapidamente descobrem a relevância deste procedimento, ao se tornarem autores.

Para saber a forma padrão de fazer referência aos autores/livros das questões constantes da presente obra, em suas provas ou listas de exercícios, consulte as referências bibliográficas no capítulo 9. Sugere-se que a referência seja feita logo após o enunciado da questão.

Para citar uma questão do livro do Kósel (Mir/VestSeller), por exemplo:

Questão 32 – (kósel)

Um avião voa horizontalmente a uma velocidade V . Um observador ouve o barulho do avião T segundos após o aparelho ter passado sobre a sua cabeça. Se a velocidade do som no ar vale C , o prof. Renato Brito pede que você determine a que altura H voava a aeronave.

(Kósel, Stanislaw. *Problemas de Física Dirigidos por S. Kósel*. Moscou, Mir, 1977.)

Caso prefira, faça uma lista de referências bibliográficas ao final do material, de forma que você possa associar o enunciado de cada questão a uma das referências que constam da sua lista. Esta foi a forma adotada neste livro.

Um material com referências bibliográficas explícitas torna-se mais rico e valorizado, além de respeitar o trabalho daqueles que, efetivamente, viabilizaram aquele conteúdo.

Por fim, ratifico a importância de cada um fazer a sua parte, adquirindo consciência e semeando valores mais nobres em seus respectivos alunos, filhos, amigos. Com educação e cultura, gradativamente, desenvolveremos uma postura mais ética e responsável nos jovens brasileiros, trazendo benefício a toda sociedade.

1 TRABALHO E ENERGIA



1.1 INTRODUÇÃO: POR QUE ESTUDAR TRABALHO E ENERGIA ?

No volume 1 desta coleção, fizemos um estudo aprofundado das três leis de Newton:

- Discutimos as suas condições de validade dentro da Mecânica Clássica, tanto no domínio dos referenciais inerciais quanto nos referenciais não inerciais;
- Aprendemos o que são forças fictícias e como tirar proveito delas na resolução dos mais variados problemas de Dinâmica, muitos deles regados a complexos vínculos geométricos também discutidos naquela ocasião.

Após esse estudo tão rico e proveitoso, o aluno talvez seja levado a questionar – Para que estudar mais uma ferramenta da Mecânica chamada *Trabalho e Energia*, se as Leis de Newton se aplicam à resolução de todas as classes de problemas da Dinâmica ?

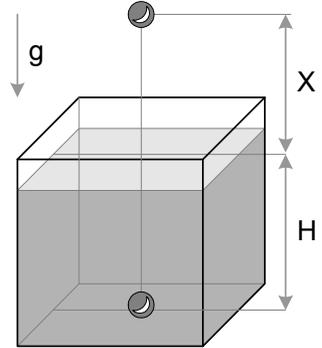
Embora as Leis de Newton sejam uma ferramenta poderosíssima, não é difícil nos depararmos com problemas de Mecânica cuja resolução, fazendo uso direto das leis de Newton em conjunto com as relações da cinemática, seria inviável devido à geometria envolvida. Na maioria dos casos, são problemas que envolvem forças variáveis e, portanto acelerações variáveis.

Para esclarecer, considere duas caixas idênticas que são abandonadas do repouso de uma mesma altura H , sendo que uma delas descerá por um plano inclinado (Figura 1) enquanto a outra o fará através de um tobogã ondulado (Figura 2).

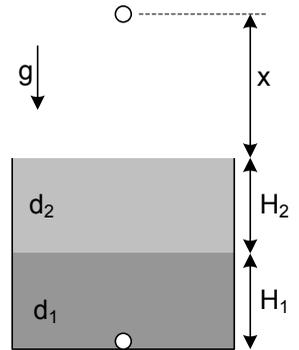
Questão 04

(UECE) Uma pequena esfera de isopor, de densidade $d = 0,2 \text{ g/cm}^3$, é abandonada no fundo de um tanque contendo água até uma altura $H = 10 \text{ cm}$. Se a gravidade local vale $g = 10 \text{ m/s}^2$ e a densidade da água vale $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$, determine a altura máxima x atingida pela bola, medida a partir da superfície da água. Despreze quaisquer forças de resistência (atrito, viscosidade etc.)

- a) 10 cm
- b) 20 cm
- c) 30 cm
- d) 40 cm
- e) 50 cm

**Questão 05** -

A figura mostra dois líquidos imiscíveis 1 e 2, de densidades d_1 e d_2 , ocupando alturas respectivamente iguais a H_1 e H_2 , no interior de um recipiente cilíndrico reto, num local onde a gravidade vale g . Uma bolinha de dimensões desprezíveis e densidade d_3 , com $d_3 < d_2 < d_1$, é abandonada do repouso a partir do fundo desse recipiente. Desprezando quaisquer atritos, o prof. Renato Brito pede que você determine a altura máxima x atingida pela bolinha, medida a partir da superfície livre do líquido 2.

**Questão 06** -

Um bloco de madeira foi lançado sobre um solo horizontal com velocidade v_0 e atravessa dois trechos consecutivos de mármore e granito, de comprimentos d_1 e d_2 e coeficientes de atrito μ_1 e μ_2 . Sabendo que a gravidade local vale g e que o bloco pára ao final do percurso, determine v_0 .

Dados: $d_1 = 1 \text{ m}$, $d_2 = 2 \text{ m}$, $\mu_1 = 0,3$, $\mu_2 = 0,25$, $g = 10 \text{ m/s}^2$



Note que apesar de haver várias maneiras corretas de se calcular o trabalho realizado por uma força, o seu significado físico é sempre o mesmo que aprendemos anteriormente: ele ainda representa o ganho (ou perda) de energia cinética que a força propicia ao móvel durante o deslocamento.

Exemplo Resolvido 3: Uma partícula de massa $M = 2 \text{ kg}$ se move ao longo do eixo cartesiano x . O módulo da força resultante horizontal que atua sobre a partícula, em newtons, é dado por $F = 12 - 4x$, onde x é a sua abscissa em metros. Se a partícula estava em repouso na posição $x = 0$, determine:

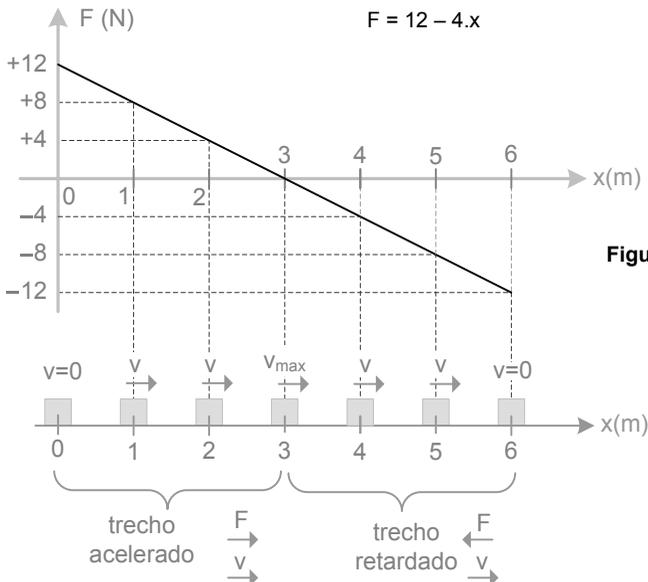
- a velocidade máxima atingida pela caixa;
- a velocidade da caixa ao passar pela posição $x = 4 \text{ m}$.

Solução:

Vemos que a força varia linearmente com a abscissa x da caixa. A tabela abaixo, obtida atribuindo-se alguns valores a x , mostra os valores correspondentes da força F durante o deslocamento da caixa:

F (N)	+12 N	+8 N	+4 N	0 N	-4 N	-8 N	-12 N
X (m)	0 m	1 m	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m

Vemos que, nesse contexto, está sendo dado um tratamento escalar para a grandeza Força, atribuindo-lhe um sinal algébrico positivo quando ela aponta ($F \rightarrow$) a favor do eixo x , e um sinal algébrico negativo quando ela aponta ($F \leftarrow$) no sentido contrário desse eixo.



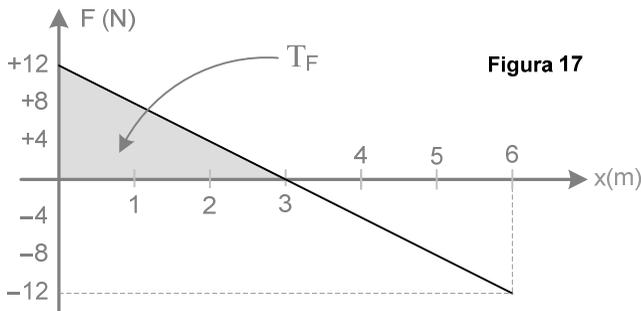
A Figura 16 mostra o movimento da caixa, partindo do repouso ($v=0$) em $x = 0$ e se movendo a favor do eixo x até atingir o ponto $x = 6$ m. Observando o sinal algébrico (+/-) da força F , vemos que ela ($F \rightarrow$) aponta a favor da velocidade $v \rightarrow$ da caixa em todo o trecho $0 \leq x < 3$ m, fazendo com que seu movimento seja acelerado nessa etapa (Figura 16), em outras palavras, a velocidade da caixa aumenta nesse trecho atingindo o valor máximo em $x = 3$ m. A partir dessa posição, o movimento passa a ser retardado ($F \leftarrow, v \rightarrow$), a velocidade diminui até a caixa atingir a posição $x = 6$ m, quando ela pára ($v=0$) e inverte o sentido do movimento. A caixa executará um eterno movimento oscilatório (MHS) entre as posições extremas $x = 0$ e $x = 6$ m.

a) Para determinar a velocidade máxima da caixa, isto é, a sua velocidade em $x = 3$ m, aplicaremos o princípio do Trabalho Total no trecho $0 \leq x \leq 3$ m. Note que, apesar das forças normal $N \uparrow$ e peso $P \downarrow$ também agirem na caixa em todo o trajeto, elas não realizam trabalho por serem perpendiculares à trajetória horizontal:

$$T_{\text{total}} = T_P + T_N + T_F = E_{\text{cin } F} - E_{\text{cin } i}$$

Na expressão acima, a posição inicial refere-se a $x = 0$ m, enquanto a posição final refere-se a $x = 3$ m. Todos os trabalhos serão calculados da posição inicial até a posição final. Como a força F tem módulo variável, seu trabalho será calculado pela área sob o gráfico (figura 17):

$$T_F = + \left(\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} \right) = + \left(\frac{3 \times 12}{2} \right) = +18 \text{ J}$$



Aplicando o Princípio do Trabalho total, vem:

$$T_{\text{total}} = T_P + T_N + T_F = E_{\text{cin } F} - E_{\text{cin } i}$$

$$T_{\text{total}} = 0 + 0 + 18 = \frac{2 \cdot (v_F)^2}{2} - 0$$

$$v_F = \sqrt{18} \Rightarrow v_F = 3 \cdot \sqrt{2} \text{ m/s}$$

Assim, a velocidade máxima atingida pela caixa, ao passar pela posição $x = 3 \text{ m}$, vale $v_{\max} = 3\sqrt{2} \text{ m/s}$

b) Para calcularmos a velocidade da caixa em $x = 4 \text{ m}$, aplicaremos o princípio do Trabalho Total no trecho $0 \leq x \leq 4 \text{ m}$:

$$T_{\text{total}} = T_P + T_N + T_F = E_{\text{cin}_F} - E_{\text{cin}_i}$$

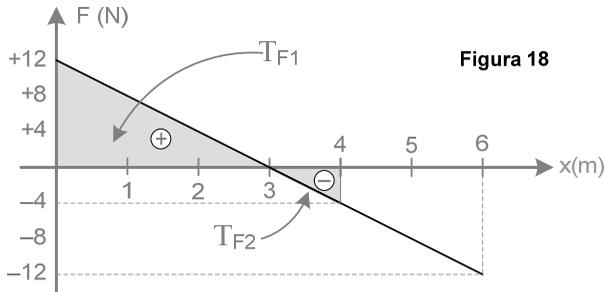


Figura 18

Na expressão acima, a posição inicial refere-se a $x = 0 \text{ m}$, enquanto a posição final refere-se a $x = 4 \text{ m}$. Todos os trabalhos serão calculados da posição inicial até a posição final. Como a força F tem módulo variável, seu trabalho será calculado pela área sob o gráfico. Note que a força F realiza trabalho positivo no trecho $0 \leq x \leq 3 \text{ m}$, ao passo que, no trecho $3 \leq x \leq 4 \text{ m}$, ela realiza trabalho negativo (figura 18). O trabalho da força F no percurso total ($0 \leq x \leq 4 \text{ m}$) será a soma algébrica dos trabalhos em cada um desses trechos:

O trabalho realizado pela força F no trecho $0 \leq x \leq 3 \text{ m}$ (veja figura 18) vale:

$$T_{F1} = + \left(\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} \right) = + \left(\frac{3 \times 12}{2} \right) = +18 \text{ J}$$

O trabalho realizado pela força F no trecho $3 \leq x \leq 4 \text{ m}$ (veja figura 18) vale:

$$T_{F2} = - \left(\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} \right) = - \left(\frac{1 \times 4}{2} \right) = -2 \text{ J}$$

Assim, o trabalho realizado pela força F no trecho $0 \leq x \leq 4 \text{ m}$ vale:

$$T_F = T_{F1} + T_{F2} = +18 + (-2) \Rightarrow \boxed{T_F = +16 \text{ J}}$$

Retomando o nosso objetivo, aplicaremos o princípio do Trabalho Total no trecho $0 \leq x \leq 4 \text{ m}$ para determinar a velocidade da caixa em $x = 4 \text{ m}$:

$$T_{\text{total}} = T_P + T_N + T_F = E_{\text{cin}_F} - E_{\text{cin}_i}$$

$$T_{\text{total}} = 0 + 0 + 16 = \frac{2 \cdot (v_F)^2}{2} - 0 \Rightarrow \boxed{v_F = 4 \text{ m/s}}$$

Assim, a velocidade da caixa, ao passar pela posição $x = 4 \text{ m}$, vale $v = 4 \text{ m/s}$. Vale ressaltar que o movimento dessa caixa não é uniformemente variado

(MUV), visto que sua aceleração é variável durante o percurso. Portanto, não há como se aplicar a equação de Torricelli ($V^2 = V_0^2 + 2.a.\Delta s$) para a resolução desse problema.

1.8 CÁLCULO DO TRABALHO REALIZADO PELA FORÇA ELÁSTICA

Uma interessante aplicação da Propriedade 3 (página 20) consiste no cálculo do trabalho realizado pela força elástica $F_{el} = k.x$ que, usualmente, tem intensidade variável durante a realização do trabalho.

A Figura 19 mostra uma esfera que rola ao longo de um plano horizontal liso e encontra uma mola inicialmente não deformada ($x = 0$), passando a sofrer desta a ação de uma força elástica que irá se opor ao seu movimento, diminuindo a sua energia cinética, realizando um trabalho negativo. O diagrama da Figura 20 mostra as forças que atuam sobre a esfera num deslocamento genérico $A \rightarrow B$ durante o qual a força elástica aumenta de intensidade desde $F_{elA} = k.x_A$ até $F_{elB} = k.x_B$ (com $x_B > x_A$) devido ao aumento da deformação x da mola.

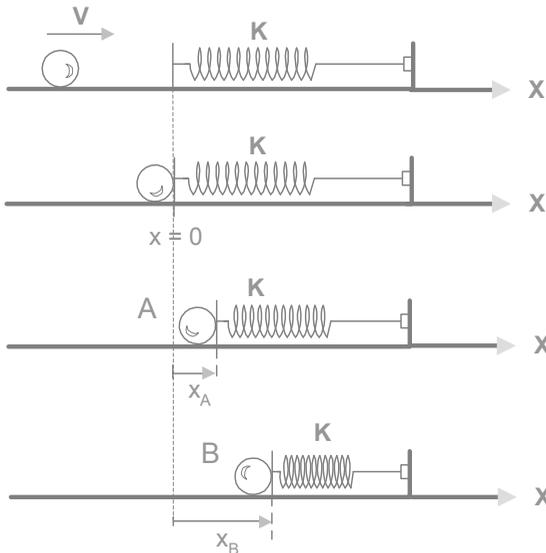


Figura 19 – a força elástica aumenta de intensidade desde $F_{elA} = k.x_A$ até $F_{elB} = k.x_B$ (com $x_B > x_A$) devido ao aumento da deformação x da mola.

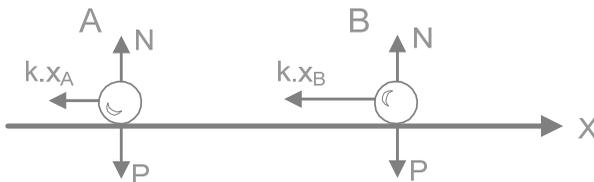


Figura 20 – Diagrama das forças que agem sobre a esfera no trajeto AB

Como a intensidade da força elástica $F_{el} = k \cdot x$ varia, durante o movimento da esfera (x aumenta), a expressão $T = F \cdot D$ não se aplica ao cálculo desse trabalho. Nesse caso, fazendo uso da propriedade 3, o trabalho realizado pela força elástica será determinado através do cálculo da área sob o gráfico $F \times X$ mostrado na Figura 21.

O módulo do trabalho realizado pela força elástica F_{el} que atua na esfera, quando a mesma se desloca da posição A até a posição B (veja Figuras 19 e 20), é numericamente igual à área hachurada no gráfico da Figura 21. Matematicamente, temos:

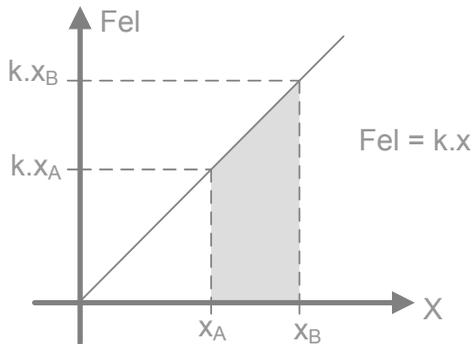


Figura 21 – Gráfico do módulo da força elástica F_{el} em função da deformação x da mola

$$|T_{FEL A-B}| = \text{área } \Delta \text{ maior} - \text{área } \Delta \text{ menor}$$

$$|T_{FEL A-B}| = \frac{x_B \cdot (k \cdot x_B)}{2} - \frac{x_A \cdot (k \cdot x_A)}{2} = \frac{k \cdot x_B^2}{2} - \frac{k \cdot x_A^2}{2}$$

$$|T_{FEL A-B}| = \left(\frac{k \cdot x_B^2}{2} - \frac{k \cdot x_A^2}{2} \right)$$

Tendo determinado o módulo do trabalho realizado pela F_{el} no trecho $A \rightarrow B$, acrescentaremos a ele o sinal negativo “-”, já que o trabalho realizado pela força elástica é negativo nesse trajeto (a força se opõe ao movimento da esfera). Assim:

$$T_{FEL A \rightarrow B} = (-1) \cdot \left(\frac{k \cdot x_B^2}{2} - \frac{k \cdot x_A^2}{2} \right) = \frac{k \cdot x_A^2}{2} - \frac{k \cdot x_B^2}{2}$$

$$\boxed{T_{FEL A \rightarrow B} = \frac{k \cdot x_A^2}{2} - \frac{k \cdot x_B^2}{2}} \quad \text{(eq15)}$$

Pronto ! A expressão eq15 acima calcula o trabalho realizado pela força elástica no trecho A→B da figura 19. O termo $k.x^2 / 2$ que se repete, na relação eq15, é interpretado como uma energia associada à deformação x da mola, **uma energia que fica armazenada na mola** sempre que ela está comprimida ($x < 0$) ou alongada ($x > 0$), que denominaremos energia potencial elástica:

$$E_{pot} = \frac{k.x^2}{2} \quad (\text{eq16})$$

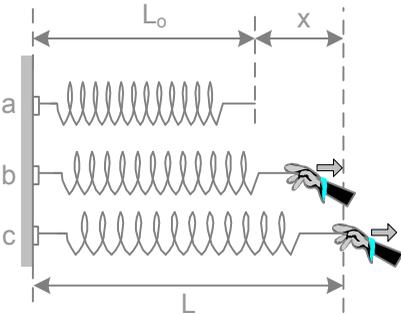


Figura 22 - (a) a mola encontra-se em seu comprimento natural L_0 , isto é, relaxada; (b) a mola encontra-se alongada, apresentando uma deformação $x = |L - L_0|$

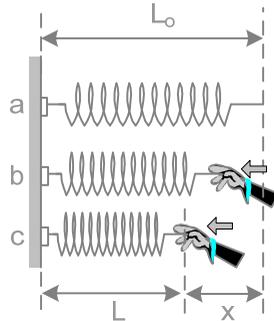


Figura 23 - (a) a mola encontra-se em seu comprimento natural L_0 , isto é, relaxada; (b) a mola encontra-se comprimida, com uma deformação $x = |L - L_0|$

Retornando às figuras 19 e 20, aplicaremos o Princípio do Trabalho Total (teorema da energia cinética) nesse trecho A→B :

$$T_{total\ A \rightarrow B} = T_{Peso\ A \rightarrow B} + T_{N\ A \rightarrow B} + T_{F_{elást}\ A \rightarrow B} = E_{cin\ B} - E_{cin\ A}$$

No trecho A→B da Figura 20, o trabalho do peso P , assim como o da normal N , é nulo. O trabalho da força elástica é dado pela relação eq15. Substituindo, vem:

$$T_{total\ A \rightarrow B} = 0 + 0 + \left(\frac{k.x_A^2}{2} - \frac{k.x_B^2}{2} \right) = E_{cin\ B} - E_{cin\ A}$$

$$T_{total\ A \rightarrow B} = 0 + 0 + (E_{pot\ A} - E_{pot\ B}) = E_{cin\ B} - E_{cin\ A}$$

$$E_{pot\ A} + E_{cin\ A} = E_{cin\ B} + E_{pot\ B} \quad (\text{eq17})$$

Denominando “Energia mecânica” a soma da energia potencial armazenada na mola com a energia cinética da esfera, a relação eq17 pode ser reescrita como :

$$E_{mec\ A} = E_{mec\ B} \quad (\text{eq18})$$

Assim, durante o episódio mostrado nas Figuras 19 e 20, vimos que a soma “ $E_{pot} + E_{cin}$ ” permaneceu constante. Esse fato deve ao comportamento da força elástica que, ao realizar trabalho, meramente converteu energia cinética em energia potencial elástica, permanecendo constante a energia mecânica do

sistema. Voltaremos a tratar novamente da conservação da energia mecânica adiante.

Generalizado o resultado obtido na relação eq15, sempre que uma mola evolui entre duas posições inicial e final, com deformações respectivamente iguais a x_i e x_F , o trabalho realizado pela força elástica, durante esse deslocamento, é dado pelas expressões eq19 ou eq 20 :

$$T_{FEL\ i \rightarrow F} = \frac{k.(x_i)^2}{2} - \frac{k.(x_F)^2}{2} \quad (eq19)$$

$$T_{FEL\ i \rightarrow F} = E_{pot\ i} - E_{pot\ F} \quad (eq20)$$

As expressões acima são a forma correta de se calcular o trabalho realizado pela força elástica durante um deslocamento. O sinal algébrico do trabalho já é determinado automaticamente ao se efetuar o cálculo da expressão eq15, não sendo necessário ajustes adicionais. Logicamente, o trabalho da força elástica pode ser positivo ou negativo, conforme a deformação inicial x_i seja maior ou menor que a deformação final x_F .



Profinho, eu achei tão estranho essa expressão eq20, fica o valor inicial menos o final, é assim mesmo ?

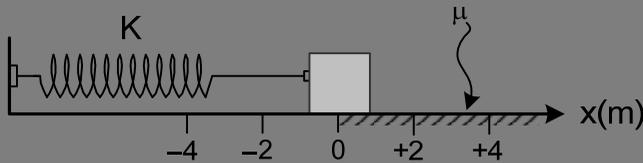
É verdade, Claudete. Apesar de parecer estranho, está tudo correto. Sempre que desejarmos calcular o trabalho realizado por uma força que possua uma energia potencial associada a si, podemos fazê-lo utilizando a relação eq20.

Essa classe de forças que possuem uma energia potencial associada são chamadas forças conservativas. A força elástica $F_{el} = k.x$, conforme vimos, possui a energia potencial $E_{pot} = k.x^2 / 2$ associada a si. Essa expressão $k.x^2 / 2$ apareceu naturalmente durante o cálculo do trabalho realizado pela força elástica (eq15) com base na Figura 21. Assim, a força elástica é dita conservativa.

É recomendado ao estudante parar a leitura nesse ponto e retornar às Figuras 19, 20 e 21 para rever como chegamos à relação eq15 (que levou às relações eq19 e eq20). Adiante trataremos do conceito de forças conservativas e energia potencial mais detalhadamente.

Exemplo Resolvido 4: A figura mostra uma mola de constante elástica $k = 10 \text{ N/m}$ conectada a uma caixa de massa $M = 2 \text{ kg}$ inicialmente localizada na abscissa $x = 0$, posição esta em que a mola encontra-se relaxada. Em seguida, a caixa é levada até a abscissa $x = -4 \text{ m}$, de onde é abandonada do repouso. Sabendo que o solo horizontal é liso para $x < 0$, e tem coeficiente de atrito $\mu = 0,6$ para $x \geq 0$, determine:

- a) a velocidade da caixa ao passar pela abscissa $x = +2 \text{ m}$;
- b) a abscissa x em que a caixa vai parar pela primeira vez.



Solução:

Durante o movimento dessa caixa, a força resultante que age sobre ela será a resultante entre a força de atrito F_{at} e a força elástica $F_{el} = k \cdot |x|$, sendo que esta última tem módulo variável visto que a mola apresenta deformação x variável. Por este motivo, a força resultante agindo sobre a caixa, bem como a sua aceleração, será variável, de forma que o movimento da caixa não será MUV, o que nos impede de aplicar a equação de Torricelli ($V^2 = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s$)

- a) Para determinar a velocidade da caixa, quando parte do repouso da abscissa $x_i = -4 \text{ m}$ e passa pela abscissa $x_F = +2 \text{ m}$, faremos uso do Princípio do Trabalho Total:

$$T_{\text{total}} = T_{\text{Peso}} + T_{\text{Normal}} + T_{\text{Felástica}} + T_{\text{Fat}} = E_{\text{cin } F} - E_{\text{cin } i}$$

Na expressão acima, a posição inicial refere-se a $x_i = -4 \text{ m}$, enquanto a posição final refere-se a $x_F = +2 \text{ m}$. Todos os trabalhos serão calculados da posição inicial até a posição final. A força peso $P \downarrow$ e a normal $N \uparrow$ não realizarão trabalho por serem perpendiculares à trajetória horizontal.

Determinando o trabalho da força elástica pela expressão eq15, vem:

$$T_{\text{FEL } i \rightarrow F} = \frac{K \cdot (x_i)^2}{2} - \frac{K \cdot (x_F)^2}{2} = \frac{10 \cdot (-4)^2}{2} - \frac{10 \cdot (2)^2}{2} = 80 - 20 = 60 \text{ J}$$

Em todo o trecho $-4 \text{ m} \leq x \leq +2 \text{ m}$, a força de atrito só realiza trabalho no trecho $0 \leq x \leq +2 \text{ m}$. Sendo a força de atrito constante nesse trecho, seu trabalho pode ser calculado pela expressão eq3:

$$T_{\text{Fat}} = -\text{Fat} \cdot d = -\mu \cdot N \cdot d = -\mu \cdot M \cdot g \cdot d = -(0,6) \cdot (2) \cdot 10 \cdot (2-0) = \mathbf{-24 \text{ J}}$$

Assim, temos:

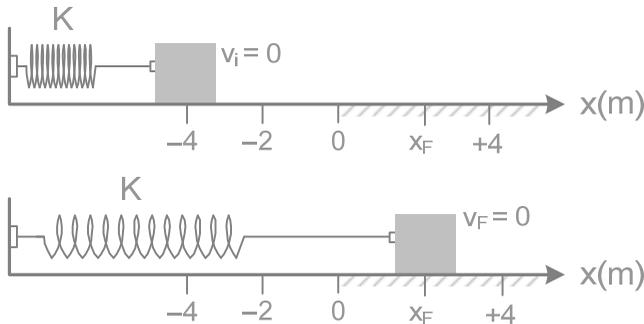
$$T_{\text{total}} = T_{\text{Peso}} + T_{\text{Normal}} + T_{\text{Felástica}} + T_{\text{Fat}} = E_{\text{cin F}} - E_{\text{cin i}}$$

$$T_{\text{total}} = 0 + 0 + 60 + (-24) = \frac{2 \cdot (v_{\text{F}})^2}{2} - 0$$

$$\mathbf{v_{\text{F}} = 6 \text{ m/s}}$$

Assim, determinamos a velocidade da caixa, ao passar pela abscissa $x = +2$ m.

b) Seja x_{F} a abscissa da caixa quando ela parar ($v_{\text{F}} = 0$) pela primeira vez. A caixa deverá partir do repouso ($v_{\text{i}} = 0$) da abscissa inicial $x_{\text{i}} = -4 \text{ m}$ e parar ($v_{\text{F}} = 0$) ao atingir a abscissa $x_{\text{F}} > 0$ a ser determinada.



Novamente, faremos uso do Princípio do Trabalho Total, calculando o trabalho de todas as forças entre as posições inicial e final. Vale ressaltar que a força de atrito só realizará trabalho no trecho onde há atrito (entre $x = 0$ e $x = x_{\text{F}}$):

$$T_{\text{FEL i} \rightarrow \text{F}} = \frac{K \cdot (x_{\text{i}})^2}{2} - \frac{K \cdot (x_{\text{F}})^2}{2} = \frac{10 \cdot (-4)^2}{2} - \frac{10 \cdot (x_{\text{F}})^2}{2} = \mathbf{80 - 5 \cdot (x_{\text{F}})^2}$$

$$T_{\text{Fat}} = -\text{Fat} \cdot d = -\mu \cdot N \cdot d = -\mu \cdot M \cdot g \cdot d = -(0,6) \cdot (2) \cdot 10 \cdot (x_{\text{F}} - 0) = \mathbf{-12 \cdot x_{\text{F}}}$$

Aplicando o Princípio do Trabalho Total, vem:

$$T_{\text{total}} = T_{\text{Peso}} + T_{\text{Normal}} + T_{\text{Felástica}} + T_{\text{Fat}} = E_{\text{cin F}} - E_{\text{cin i}}$$

$$T_{\text{total}} = 0 + 0 + 80 - 5 \cdot (x_{\text{F}})^2 + (-12 \cdot x_{\text{F}}) = 0 - 0$$

$5 \cdot (x_{\text{F}})^2 + 12 \cdot x_{\text{F}} - 80 = 0$, resolvendo a equação do 2º grau, encontramos:

$$\mathbf{x_{\text{F}} \cong +2,98 \text{ m}}$$

$$0 + (-\mu \cdot m \cdot g \cdot x) + 0 + \left(0 - \frac{k \cdot x^2}{2}\right) = 0 - \frac{m \cdot V_0^2}{2}$$

$$-\mu \cdot m \cdot g \cdot x = \frac{k \cdot x^2}{2} - \frac{m \cdot V_0^2}{2}$$

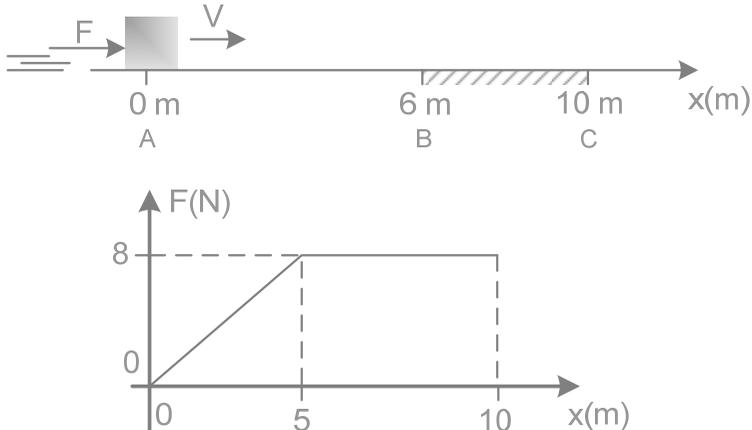
$$-(0,4) \cdot (0,5) \cdot (10) \cdot (0,1) = \left(\frac{160}{2}\right) \left(\frac{1}{10}\right)^2 - \frac{0,5 \cdot V_0^2}{2}$$

$$-0,2 = 0,8 - \frac{V_0^2}{4} \Rightarrow V_0 = 2 \text{ m/s}$$

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

Questão 08 -

Uma caixa de massa $m = 5 \text{ kg}$ move-se sobre o eixo horizontal x , passa pelo ponto A com velocidade $V = 4 \text{ m/s}$ e sofre a ação de uma força F cuja intensidade é descrita pelo gráfico abaixo:



Entretanto, devido à força de atrito F_{at} existente apenas no trecho BC, a caixa pára ao atingir o ponto C. Determine:

- a intensidade da força de atrito no trecho BC.
- o coeficiente de atrito no trecho BC?

Dica: o estudante não deve resolver o problema dividindo-o em várias partes, escrevendo várias equações. O mais interessante da ferramenta Trabalho e Energia é exatamente o fato de que, com uma única equação, o problema está resolvido.

Questão 09

Um bloco de massa $m = 1,0 \text{ kg}$ desloca-se sobre um plano horizontal com atrito e comprime uma mola de constante elástica $k = 10 \text{ N/m}$. O coeficiente de atrito vale $\mu = 0,3$ e a aceleração da gravidade vale $g = 10 \text{ m/s}^2$. Sabendo que a máxima compressão atingida pela mola vale 40 cm , calcule a velocidade da caixa ao tocar a mola.

- a) 1 m/s b) 2 m/s c) 3 m/s d) 4 m/s e) 5 m/s

**Questão 10**

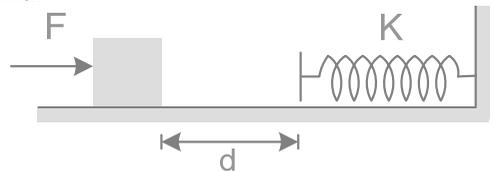
Uma partícula de massa $0,5 \text{ kg}$ se move ao longo do eixo Ox sob ação de uma força horizontal cujo valor escalar, em newtons, é dado por $F = 2 - 2x$ com x em metros. Se a partícula estava em repouso na abscissa $x = 0$, determine:

- a) o tipo de movimento executado pela partícula;
 b) a velocidade máxima atingida pela partícula;
 c) a maior abscissa x que a partícula atinge.

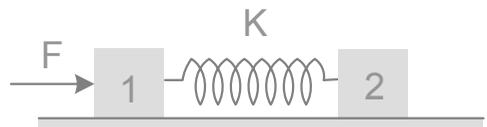
Questão 11 -

Seja uma caixa de massa $m = 2 \text{ kg}$ inicialmente em repouso a uma distância d de uma mola de constante elástica $K = 100 \text{ N/m}$ presa a uma parede. Uma força $F = 4 \text{ N}$ (constante) passa a agir sobre a caixa, empurrando-a em direção à mola. Sabendo que a máxima deformação x sofrida pela mola, nesse episódio, foi de 20 cm , o prof. Renato Brito pede que você determine:

- a) a distância inicial d da caixa à mola;
 b) a aceleração da caixa ao parar devido à ação da mola;
 c) a velocidade máxima atingida pela caixa.

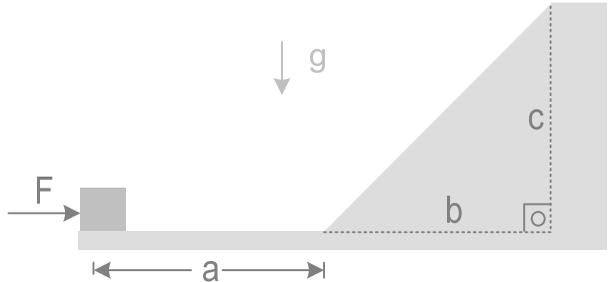
**Questão 12 (Irodov)** -

A figura mostra dois blocos de massas m_1 e m_2 inicialmente em repouso, conectados entre si por uma mola relaxada, de constante elástica K . Sabendo que a gravidade local vale g e que o coeficiente de atrito entre os blocos e solo vale μ , determine a intensidade da menor força horizontal constante que se deve aplicar ao bloco 1 a fim de mover o bloco 2.



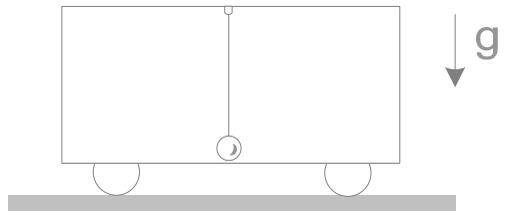
Questão 16

A figura mostra uma caixa de massa m em repouso sobre um plano horizontal liso. O prof. Renato Brito pede que você determine a intensidade da menor força F (horizontal e constante) capaz de fazer a caixa subir a rampa lisa e atingir o piso superior. Despreze atritos e admita gravidade g .

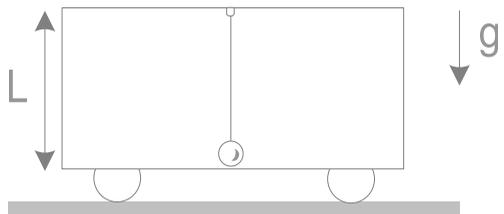
**Questão 17** - 🎧

Um pêndulo composto por um fio ideal de comprimento $L = 1$ m, conectado a uma esfera de massa $M = 5$ kg, encontra-se conectado ao teto de um vagão inicialmente em repouso, num local onde $g = 10$ m/s². Bruscatamente, o vagão passa a se deslocar com aceleração $a = 18$ m/s² para a esquerda. O prof Renato Brito pede para você determinar com que velocidade vertical v a esfera se chocará com o teto, no referencial do vagão.

- a) 2 m/s b) 4 m/s c) 6 m/s d) 8 m/s e) 10 m/s

**Questão 18** - 🎧

Admita que o vagão da questão anterior tenha uma altura L que coincide com o comprimento do pêndulo suspenso ao teto inicialmente em repouso. Se o vagão, bruscatamente, passar a se deslocar para a esquerda com aceleração $a \leftarrow$ constante, determine a altura máxima atingida pela esfera do pêndulo em relação ao piso do vagão. Despreze atritos e admita gravidade g .



1.10 TRABALHO DA FORÇA DE ATRITO – PRINCÍPIO DA PROJEÇÃO

Nesta seção, veremos uma interessante propriedade do trabalho realizado pela força de atrito em rampas com inclinação qualquer, constante ou variável.

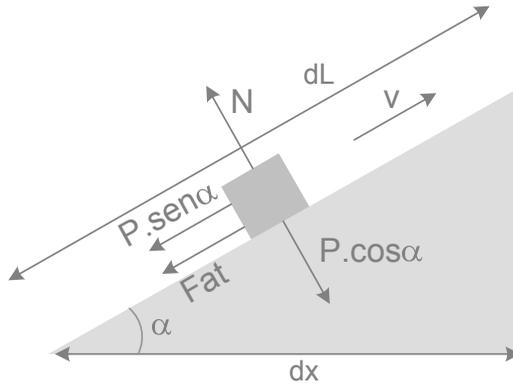


Figura 31 – caixa subindo ladeira infinitesimal de comprimento dL

Considere a caixa da Figura 31 subindo a rampa (por inércia) sob ação exclusiva das forças de contato com a rampa (normal N e atrito Fat) e da gravidade. Como a trajetória é retilínea, não há aceleração centrípeta na direção normal, o que permite escrever:

$$N = P.\cos\alpha = m.g.\cos\alpha \quad (\text{eq21})$$

A força de atrito cinético agindo sobre a caixa tem intensidade:

$$Fat = \mu.N = \mu.m.g.\cos\alpha \quad (\text{eq22})$$

O triângulo retângulo da Figura 31 permite escrever:

$$dx = dL.\cos\alpha \quad (\text{eq23})$$

O trabalho realizado pela força de atrito, durante esse deslocamento infinitesimal dL na mesma direção da força, é dado por:

$$dT_{Fat} = Fat .dL = \mu.m.g.\cos\alpha .dL = \mu.m.g. dL.\cos\alpha \Rightarrow$$

$$dT_{Fat} = \mu.m.g. dx \quad (\text{eq24})$$

A relação eq24 nos mostra que, desde seja satisfeita a relação eq21 durante o deslocamento do corpo, o trabalho realizado pela força de atrito cinético está relacionado apenas com a projeção horizontal dx do deslocamento da caixa, independente da inclinação α em questão.

Para generalizar, admita que a caixa novamente se desloque sob ação exclusiva das mesma forças da Figura 31 mas, desta vez, ao longo de uma linha poligonal qualquer, como mostrado na Figura 32.

O trabalho realizado pela força de atrito cinético, ao longo de uma linha poligonal genérica, é a soma dos trabalhos realizados em cada um dos segmentos que a compõem. Generalizando, com base na Figura 32, podemos escrever:

$$T_{\text{Fat}} = \Sigma dT_{\text{Fat}} = dT_{\text{Fat}1} + dT_{\text{Fat}2} + dT_{\text{Fat}3} + \dots + dT_{\text{Fat}N}$$

$$T_{\text{Fat}} = -\text{Fat}_1 \cdot dL_1 - \text{Fat}_2 \cdot dL_2 - \text{Fat}_3 \cdot dL_3 - \dots - \text{Fat}_N \cdot dL_N$$

$$T_{\text{Fat}} = -\mu \cdot m \cdot g \cdot dL_1 \cdot \cos\alpha_1 - \mu \cdot m \cdot g \cdot dL_2 \cdot \cos\alpha_2 - \mu \cdot m \cdot g \cdot dL_3 \cdot \cos\alpha_3 - \dots - \mu \cdot m \cdot g \cdot dL_N \cdot \cos\alpha_N$$

$$T_{\text{Fat}} = -\mu \cdot m \cdot g \cdot (dL_1 \cdot \cos\alpha_1 + dL_2 \cdot \cos\alpha_2 + dL_3 \cdot \cos\alpha_3 + \dots + dL_N \cdot \cos\alpha_N)$$

Considerando a relação eq23, temos:

$$T_{\text{Fat}} = -\mu \cdot m \cdot g \cdot (dx_1 + dx_2 + dx_3 + \dots + dx_N)$$

$$T_{\text{Fat}} = -\mu \cdot m \cdot g \cdot X \quad (\text{eq25})$$

onde o termo X, na relação eq25 acima, representa o comprimento da projeção horizontal da linha poligonal. De agora em diante, chamaremos o conteúdo da relação eq25 de **Princípio da Projeção**.

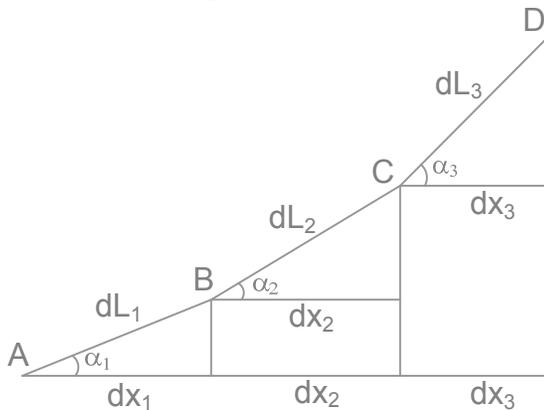


Figura 32 – caixa sofrendo um deslocamento ao longo de uma linha poligonal ABCD

Vale ressaltar que, apesar de esse princípio ser bastante interessante, simplificando o processamento algébrico em uma ampla gama de questões que requerem o cálculo do trabalho realizado pela força de atrito, **o seu uso se restringe a situações em que o deslocamento do corpo ocorre de tal forma a satisfazer a relação eq21 em todos os instantes.**

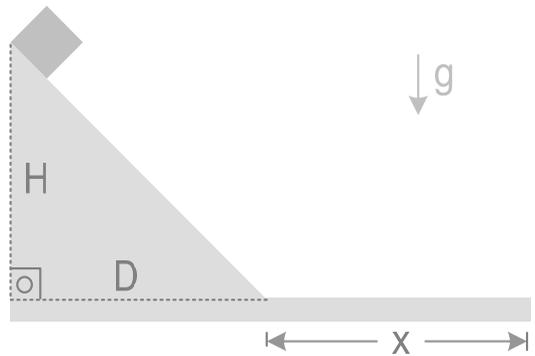
Se o corpo seguisse uma trajetória curvilínea, por exemplo, o Princípio da Projeção não seria mais válido, visto que a curvatura da trajetória obrigaria a presença de uma aceleração centrípeta a_{ctp} , nos levando a reescrever a relação eq21 da seguinte forma:

$$F_{R \text{ ctp}} = N - P \cdot \cos\alpha = \frac{m \cdot v^2}{R} \quad (\text{eq26})$$

Nesse caso, o Princípio da Projeção só seria aproximadamente válido caso o deslocamento fosse realizado muito lentamente de forma que, para $v \cong 0$, a relação eq6 equivaleria à relação eq1.

Os Exemplos Resolvidos 6, 7 e 8 (página 103) do volume 1 dessa obra mostram outras situações físicas em que os corpos se deslocam em trajetória retilínea, num referencial não inercial, sem satisfazer a relação eq21. Nesses casos, o Princípio da Projeção também perde sua utilidade.

Exemplo Resolvido 7: Um bloco de massa m é abandonado do alto de uma rampa de altura H a partir do repouso. Sabendo que a gravidade local vale g e que o coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície, em todo o percurso, vale μ , determine a distância x que o bloco percorre até parar.



Solução:

Durante todo o percurso, agem no bloco as forças peso P , normal N e atrito F_{at} . Sendo o peso uma força vetorialmente constante, seu trabalho ao longo do percurso pode ser calculado através de uma trajetória alternativa (Figura 33) mais simples:

$$T_{\text{Peso}} = T_{\text{Peso-vertical}} + T_{\text{Peso-horizontal}} = +P.H + 0 = +m.g.H$$

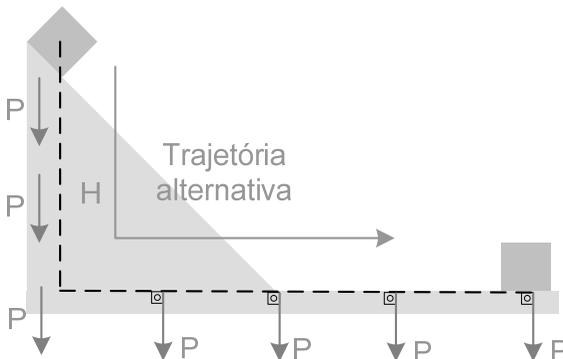


Figura 33 – Trajetória alternativa para o cálculo do trabalho realizado pela força peso

Em todo o percurso, a normal N que age no bloco (Figura 34) se mantém perpendicular à trajetória original, de forma que seu trabalho realizado ao longo da trajetória original é nulo ($T_N = 0$).

Vale ressaltar que o trabalho realizado pela normal N só pode ser calculado ao longo da trajetória original, não sendo correto calculá-lo ao longo de uma trajetória alternativa. A razão disso é que a normal N não é uma força vetorialmente constante (nem conservativa como veremos adiante), conforme requerido pelo Princípio da Trajetória Alternativa apresentado na página 33.

Pelo Princípio da Projeção (eq25), o trabalho realizado pela força de atrito, desde a posição inicial até a posição final (Figura 34), é dado por:

$$T_{\text{Fat}} = -\mu \cdot m \cdot g \cdot (D + X)$$

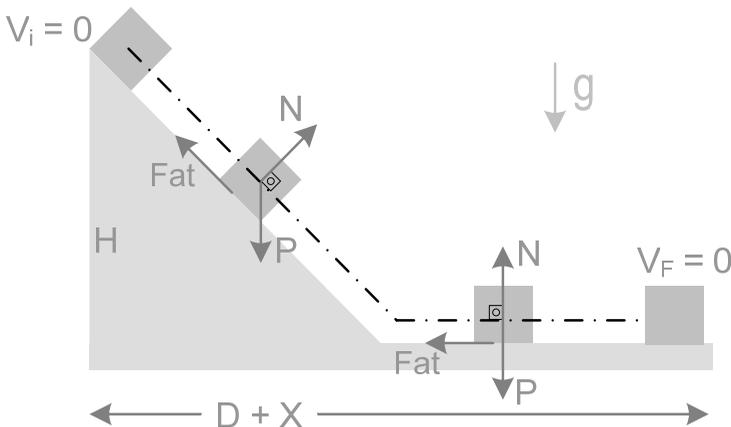


Figura 34 – Diagrama de forças

Assim, aplicando o Princípio do Trabalho Total, desde a posição inicial do bloco (topo da rampa) até a sua posição final (Figura 34), lembrando que as velocidades inicial e final do bloco são nulas, temos:

$$T_{\text{total}} = \Sigma T_{\text{todos}} = T_{\text{Peso}} + T_N + T_{\text{Fat}} = E_{\text{cin } F} - E_{\text{cin } i}$$

$$+ m \cdot g \cdot H + 0 - \mu \cdot m \cdot g \cdot (D + X) = 0 - 0$$

$$X = \frac{H}{\mu} - D$$

Exemplo Resolvido 10: A figura mostra um sistema formado por dois blocos A e B, de massas iguais a $4M$ e M , respectivamente, conectados por fios e polias ideais num local em que a gravidade vale $g = 10 \text{ m/s}^2$. Se o sistema é abandonado a partir do repouso, com o bloco A a uma altura $h = 80 \text{ cm}$ do solo, qual a velocidade do bloco B quando A atingir o solo?

Solução:

Conforme aprendemos no Capítulo 7 sobre Vínculos Geométricos no volume 1 desta coleção, a cada deslocamento $x \downarrow$ do bloco A corresponderá um deslocamento $\uparrow 2x$ do bloco B, visto que o comprimento do fio permanece constante durante o movimento dos blocos.

Assim, no instante em que A tocar o solo, após ter descido uma distância h , B terá subido uma altura $2h$. Adicionalmente, em razão do vínculo geométrico, as velocidades dos blocos A e B satisfazem a relação $V_B = 2.V_A$ em qualquer instante, assim como suas acelerações satisfazem a relação $a_B = 2.a_A$.

No sistema, agem apenas duas forças não-conservativas: a tração $2T$ no bloco A e a tração T no bloco B. Como o bloco A sofre um deslocamento $h \downarrow$ sob ação da força $\uparrow 2T$, o trabalho realizado por $2T$ vale $-(2T).h$. Já o bloco B sofre um deslocamento $\uparrow 2h$ sob ação da força $\uparrow T$, cujo trabalho realizado será $+T.(2h)$. Assim, o trabalho das forças não conservativas agindo no sistema resulta nulo:

$$\Sigma T_{\text{FNC}} = -(2T).h + T.(2h) = 0$$

Com isso, com base em eq37, concluímos que o sistema é conservativo:

$$\Sigma T_{\text{FNC}} = E_{\text{mec F}} - E_{\text{mec i}} = 0 \Rightarrow E_{\text{mec i}}_{\text{Sistema}} = E_{\text{mec F}}_{\text{Sistema}}$$

$$(E_{\text{mec A}} + E_{\text{mec B}})_{\text{antes}} = (E_{\text{mec A}} + E_{\text{mec B}})_{\text{depois}}$$

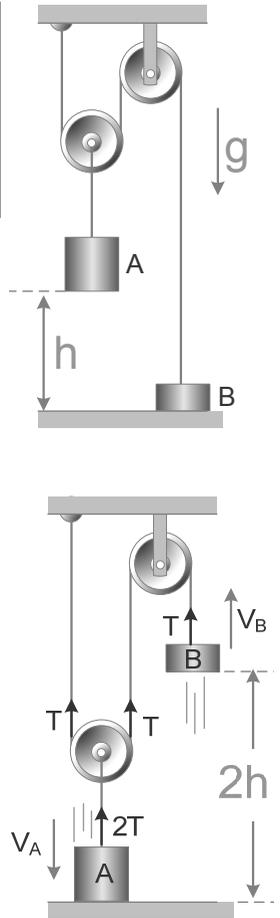
$$(E_{\text{pot A}} + E_{\text{cin A}} + E_{\text{pot B}} + E_{\text{cin B}})_{\text{antes}} = (E_{\text{pot A}} + E_{\text{cin A}} + E_{\text{pot B}} + E_{\text{cin B}})_{\text{depois}}$$

$$(4M.g.h + 0 + 0 + 0) = \left(0 + \frac{4M.V_A^2}{2} + M.g.2h + \frac{M.V_B^2}{2} \right), \text{ com } V_B = 2.V_A$$

$$2M.g.h = \left(\frac{4M.V_A^2}{2} + \frac{M.(2V_A)^2}{2} \right) \Rightarrow 2M.g.h = 4M.V_A^2$$

$$10 \cdot (0,8) = 2.V_A^2 \Rightarrow V_A = 2 \text{ m/s.}$$

Sendo $V_B = 2.V_A$, em qualquer instante, temos $V_B = 4 \text{ m/s.}$



Exemplo Resolvido 11: A figura mostra um sistema formado por dois blocos A e B, de massas respectivamente iguais a M e $2M$, conectados por fios e polias ideais num local em que a gravidade vale $g = 10 \text{ m/s}^2$. Se o sistema é abandonado a partir do repouso, com o bloco A uma altura $H = 30 \text{ cm}$ do solo, o prof. Renato Brito pede que você determine a velocidade desse bloco ao atingir o solo. Admita que durante o escorregamento de B, só há atrito entre B e o chão num pequeno trecho de comprimento $d = 2,5 \text{ cm}$, com coeficiente de atrito cinético $\mu = 1,5$.

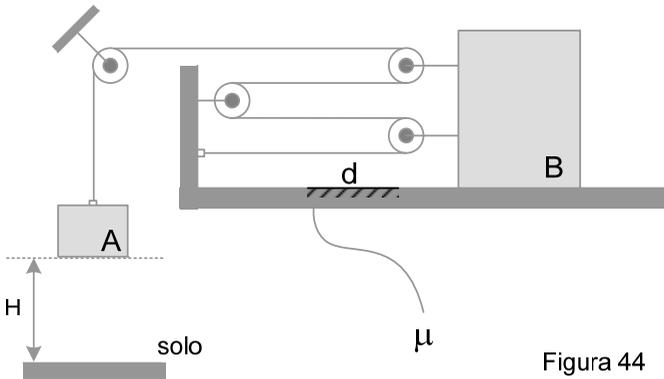


Figura 44

Solução:

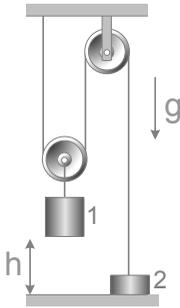
Conforme aprendemos no capítulo 7 sobre Vínculos Geométricos, no volume 1 desta obra, o fato de o comprimento do fio permanecer constante, durante o movimento dos blocos, implica que qualquer deslocamento $\downarrow X$ da caixa A para baixo será acompanhado de um correspondente deslocamento $\leftarrow X/4$ da caixa B para a esquerda. Adicionalmente, as velocidades e acelerações dessas caixas, em cada instante, se relacionam por:

$$V_A = 4 \cdot V_B$$

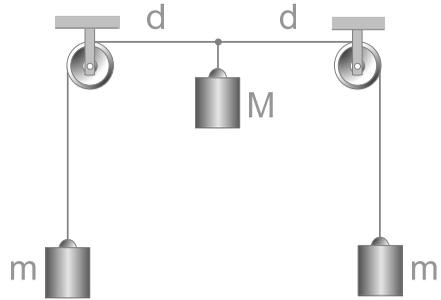
$$a_A = 4 \cdot a_B$$

Assim, a descida da caixa A até tocar o solo é acompanhada de um deslocamento $D = H/4 = 30/4 = 7,5 \text{ cm}$ da caixa B para a esquerda. Segundo o enunciado, durante esse escorregamento da caixa B, só haverá atrito no solo num trecho de comprimento $d = 2,5 \text{ cm}$, sendo o restante do seu percurso ($7,5 - 2,5 = 5 \text{ cm}$) liso.

Observe a colocação de forças no sistema na figura 45. Quando a caixa A se desloca $\downarrow H$ para baixo, a tração que age na caixa A realiza um trabalho $-T \cdot H$, enquanto a tração total $4T$ que age na caixa B realiza um trabalho de mesmo módulo $+4T \cdot (H/4)$, de forma que a soma dos trabalhos das trações é nula (assim como ocorreu no caso da Figura 51). A normal N_B que o solo aplica à caixa B realiza um trabalho nulo, por ser perpendicular à trajetória. Lembrando que apenas o trabalho realizado pelas forças não-conservativas agindo no sistema é o responsável pela variação da energia mecânica dos blocos A e B (eq37), temos:



questão 24

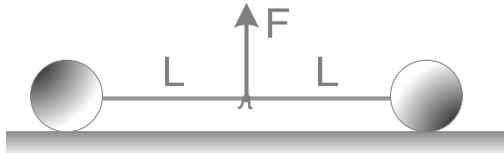


questão 25

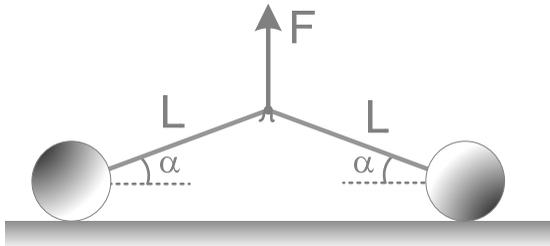
Questão 26 - 📌

A figura mostra duas esferas de mesma massa m , em repouso, conectadas entre si por um fio ideal de comprimento $2L$ num local em que a gravidade vale g . Se uma força constante F vertical é aplicada ao ponto médio da corda, como mostra a figura, determine:

- o menor valor de F para que as bolas não percam contato com o solo;
- a velocidade das bolas quando elas colidirem entre si, admitindo que as bolas não percam contato com o solo. Considere que as bolas sejam puntiformes.

**Questão 27** (Merian)

A figura mostra duas esferas de mesma massa m e, em repouso, conectadas entre si por um fio ideal de comprimento $2L$ num local em que a gravidade vale g . A partir da posição inicial mostrada na figura, uma força constante $F < 2mg$ vertical é aplicada ao ponto médio da corda. Determine a velocidade das bolas quando elas colidirem entre si. Admita que as bolas sejam puntiformes.



1.17 TRABALHOS REALIZADOS POR FORÇAS INTERNAS

Nem sempre é fácil determinar quais forças estão efetivamente realizando trabalho sobre um corpo ou sistema. Em alguns casos, a atuação das forças internas pode esconder algumas armadilhas às quais o estudante deve estar atento. A seguir, descreveremos algumas situações particularmente interessantes.

Caso 1 : um patinador empurrando uma parede com as mãos

Considere um patinador que empurra uma parede com as mãos a fim de impulsionar o seu corpo para trás como mostra a Figura 46. Ao fazer isso, ele adquire velocidade e, conseqüentemente, energia cinética, o que nos permite concluir que há realização de trabalho positivo sobre o patinador.

Durante esse episódio, a parede, a Terra e o chão liso interagem com o patinador, aplicando sobre ele, respectivamente, as forças externas F_{EXT} , o peso P e as normais N_1 e N_2 . Assim, qual dessas forças externas agindo sobre o garoto (Figura 46a) realiza trabalho sobre ele ?

Observando a seqüência da figura 46, vemos que as forças $P \downarrow$, $N_1 \uparrow$ e $N_2 \uparrow$ são perpendiculares ao deslocamento horizontal $d \rightarrow$ sofrido pelo garoto e, portanto não realizam trabalho nesse episódio.

E o que dizer da força F_{EXT} de contato entre a parede e as mãos do patinador ? Sabemos que a condição necessária para que haja realização de trabalho é que “o ponto de aplicação da força” sofra um deslocamento na direção da referida força. Qual o ponto de aplicação da força F_{EXT} ? Ora, a mão do garoto. E qual o deslocamento sofrido pela mão do garoto durante todo o tempo em que ele está tocando a parede (Figuras 46A e 46B) ? Esse deslocamento é nulo, já que a mão só passa a se deslocar em relação à Terra depois que perde o contato com a parede, situação em que a força de contato F_{EXT} já não está mais atuando.

Assim, apesar de a força que a parede aplica sobre a mão do patinador (F_{EXT}) ser a força externa responsável pela sua aceleração

$$F_R = F_{EXT} = m \cdot a$$

ainda assim ela não realiza trabalho sobre o garoto nesse episódio visto que seu ponto de aplicação (a mão do garoto) não sofre deslocamento durante todo o tempo de atuação dessa força.

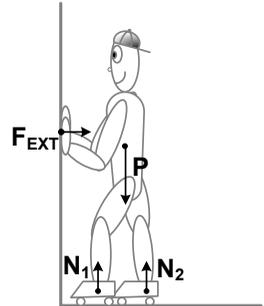


Figura 46 A

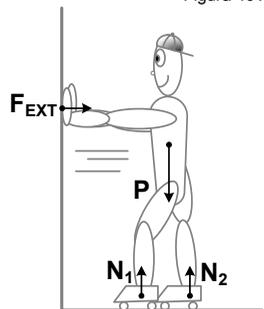


Figura 46 B

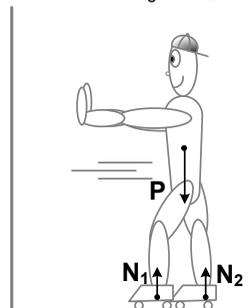


Figura 46 C

Propriedade 8: Para que uma força realize trabalho, o seu ponto de aplicação deve necessariamente sofrer um deslocamento em relação à Terra (referencial inercial).

Do exposto, vemos que nenhuma das **forças externas** agindo no patinador (Figura 46) realiza trabalho sobre ele. Ainda assim, o aumento da sua energia cinética, durante a fase de aceleração (Figura 46A e 46B), evidencia que está havendo realização de trabalho sobre ele. Afinal, qual força está realizando trabalho sobre o patinador ?

Observando mais atentamente a Figura 46, vemos que nem todas as partes do corpo do garoto (tórax, mãos, cotovelos) se deslocam igualmente. O seu tórax, por exemplo, começa a se deslocar antes da sua mão. Esta só passa a se mover (em relação à Terra) quando o garoto perde o contato com a parede (Figura 46C).

Propriedade 9: Quando as partes de um corpo se deslocam diferentemente, durante o seu movimento, é conveniente que ele não seja mais tratado como um único objeto, mas, sim, como um sistema de partículas que se movem independentemente uma das outras, apesar de interagirem entre si através da ação das **forças internas**.

Na análise energética de sistemas de partículas, não só o trabalho das forças externas deve ser considerado, mas também o trabalho das **forças internas** ao sistema.

A Figura 47 mostra uma das forças internas ao sistema “patinador”, realizando trabalho positivo sobre ele, justificando o aumento da sua energia cinética: a força F_{IN} que o seu braço aplica sobre o seu tórax durante a fase de aceleração (Figuras 47A e 47B).

Note que, diferentemente do ponto de aplicação da F_{EXT} (a mão), o ponto de aplicação da força $F_{IN \rightarrow}$ (o tórax do garoto) sofre um deslocamento $d \rightarrow$ e, portanto, realiza trabalho durante a fase de aceleração do corpo. Cessada essa fase, a mão perde o contato com a parede e o braço pára de empurrar o tórax do garoto, que prossegue em MRU.

Em linhas gerais, nesse episódio do patinador, podemos dizer que a energia cinética que ele adquire, durante a fase de aceleração, provém do trabalho realizado **pelas forças internas** ao sistema. Essas forças, em última análise, são aquelas exercidas pela musculatura dos braços e antebraços durante o ato de empurrar a parede.

Adiante, na página 182 no capítulo 2, voltaremos a analisar esse sistema do ponto de vista do Impulso e da quantidade de movimento. Veremos que, apesar de a força externa F_{EXT} não realizar trabalho, ela aplica impulso ao sistema,

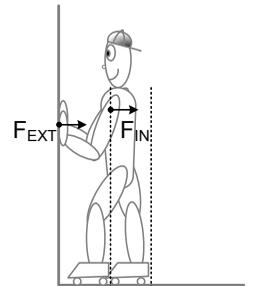


Figura 47 A

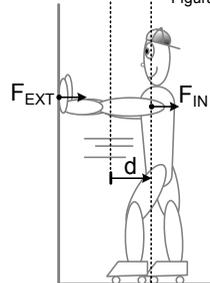


Figura 47 B

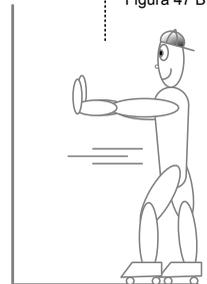
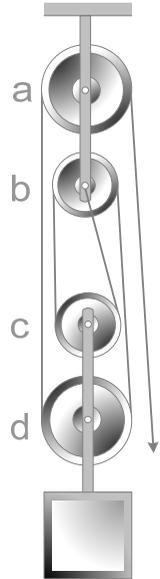


Figura 47 C

Exemplo Resolvido 14: A figura mostra um sistema composto por duas polias fixas (a e b) e duas polias móveis (c e d) inventado por Arquimedes para obter vantagem mecânica ao elevar grandes massas. Admita que todos os trechos de fio sejam aproximadamente verticais, despreze atritos e as massas das polias. Seja g a gravidade local e M a massa a ser levantada pelo sistema, o prof. Renato Brito pergunta:

- Com que tração T devemos puxar a extremidade livre do fio para levantar o bloco com velocidade constante ?
- Que comprimento de fio deve ser puxado a fim de que o bloco suba uma altura vertical h ?
- Qual o trabalho realizado ao levantar o bloco uma altura h , fazendo uso desse dispositivo ?
- Os resultados aqui obtidos foram para um sistema com vantagem mecânica $N = 4$. Como podemos generalizar esse resultado para um sistema com vantagem mecânica N qualquer ?



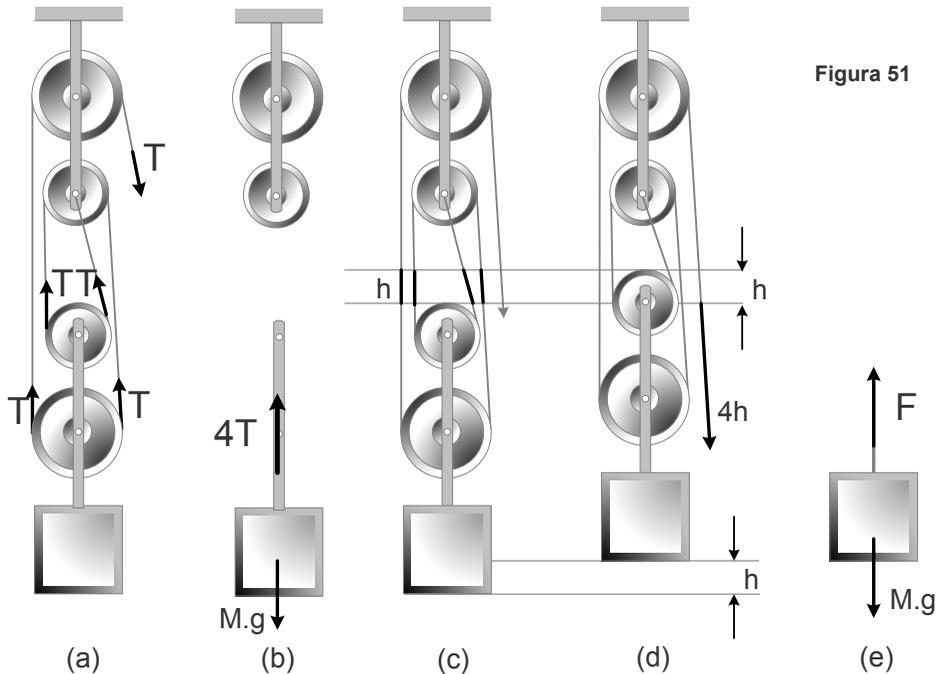
Solução:

a) Sendo o fio ideal (massa nula), ele transmite integralmente, a todos os seus pontos, a tração T que um operador exerce em sua extremidade livre. Assim, ao puxar a extremidade do fio com uma força de tração T (veja Figura 51a), uma tração $2T$ age tanto na polia c quanto na polia d , totalizando uma força $4T$ (Figura 51b) puxando o bloco para cima. Assim, para que o bloco da Figura 51b suba com velocidade constante ($a = 0$, $F_R = 0$), devemos ter:

$$4T = M \cdot g \Rightarrow T = M \cdot g / 4$$

Eis a grande vantagem do sistema de polias: para elevar um peso $M \cdot g$ com velocidade constante, fazendo uso do sistema de polias, será necessário uma força quatro vezes menor que o peso dele. Com isso, dizemos que a vantagem mecânica desse sistema vale $N = 4$.

b) observando a Figura 51c, vemos em destaque quatro pequenos trechos de fio aproximadamente verticais, de comprimento h cada um. Na Figura seguinte (51d), o bloco (juntamente com as polias móveis c e d) subiu uma altura h e esses quatro pequenos trechos de fio se deslocaram de forma que a extremidade livre do fio só pode ter descido uma altura $4h$, visto que o comprimento total do fio é constante. Assim, para que o bloco suba uma altura vertical h , a extremidade livre do fio deve descer uma altura $4h$.



c) Para levantar o bloco de peso $M.g$ até uma altura h , com velocidade constante, sem fazer uso do sistema de polias (Figura 51e), o operador aplica diretamente ao bloco uma força $F = M.g$, realizando um trabalho $T = F.d = M.g.h$. Mas, o que muda na realização desse trabalho quando o operador faz uso do sistema de polias móveis ?

Ora, ao resolver os itens **a** e **b**, vimos que, para o bloco subir uma altura h , o operador deverá puxar uma extensão $4h$ da corda. Adicionalmente, para que o bloco suba com velocidade constante, o operador deverá aplicar à extremidade livre do fio uma força de intensidade apenas $T = M.g / 4$ (Figura 51b). Com isso, deslocando a extremidade livre da corda uma distância $4h$ sob ação de uma força constante $M.g/4$, o operador realizará um trabalho:

$$T = F.d = \left(\frac{M.g}{4} \right). (4h) = M.g.h$$

Assim, vemos que o trabalho realizado pelo operador para elevar o bloco é sempre o mesmo, quer usando o sistema de polias (Figura 51a), quer aplicando a força diretamente sobre o bloco (Figura 51e). O gasto de energia por parte do operador será sempre o mesmo. A vantagem de usar o sistema de polias é claramente o fato de que será preciso fazer uso de uma força quatro vezes menor que a usual, o que é compensado pela necessidade de puxar um comprimento de fio quatro vezes maior que o de costume.

onde o termo “área” se refere à área sob o gráfico da aceleração escalar em função da posição X do móvel.

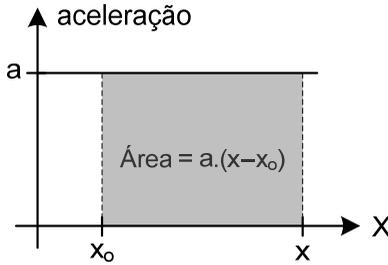


Figura 54

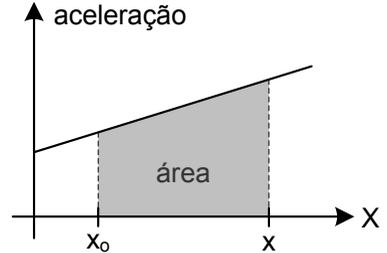


Figura 55

Essa versão generalizada da equação de Torricelli se aplica até mesmo quando a aceleração varia durante o movimento, como no caso genérico do gráfico da Figura 55.

Podemos tirar proveito desse fato para resolver problemas de Dinâmica nos quais o gráfico da aceleração escalar em função de x seja acessível e possua um formato que permita o cálculo direto da área sob a curva sem recursos de Cálculo Integral. Afinal de contas, matar uma mosca com um canhão não tem graça, tem ☺ ?

Exemplo Resolvido 21: Uma corda homogênea uniforme de comprimento $5L$ é pendurada verticalmente em um suporte liso e abandonada do repouso da posição indicada na figura. Determine a velocidade da corda, ao perder o contato com o suporte.

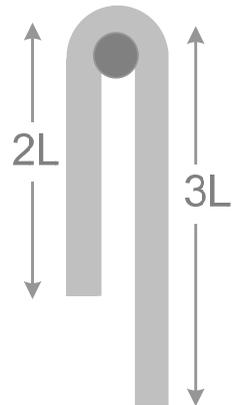
Solução:

A aceleração desse sistema varia linearmente desde o valor inicial $a_i = g/5$ até o valor final $a_F = g$ enquanto a corda sofre um deslocamento escalar $\Delta y = 2L$.

Para se determinar a aceleração inicial a_i desse sistema, podemos fazê-lo calculando a aceleração do sistema análogo mostrado na Figura 56b pela aplicação direta da segunda lei de Newton:

$$F_R = \text{massa} \cdot a_i \Rightarrow 3Mg - 2Mg = 5M \cdot a_i \Rightarrow a_i = g/5$$

A partir da configuração inicial, o sistema sofrerá um deslocamento escalar $\Delta y = 2L$ até assumir a configuração final mostrada na Figura 56c, na qual a corda encontra-se em queda livre sob ação exclusiva da gravidade, donde se concluir que sua aceleração final vale $a_F = g$.



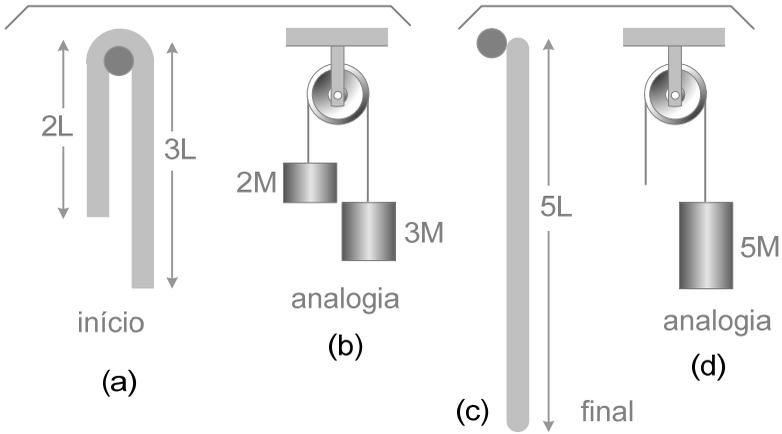


Figura 56

A aceleração escalar da corda varia, em função da sua ordenada y , de acordo com o gráfico abaixo:

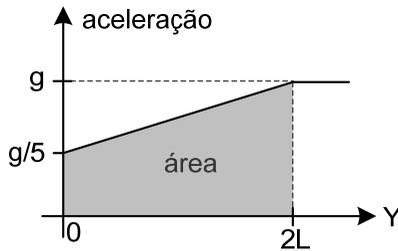


Figura 57

A área sob a curva corresponde à área de um trapézio, sendo dada por:

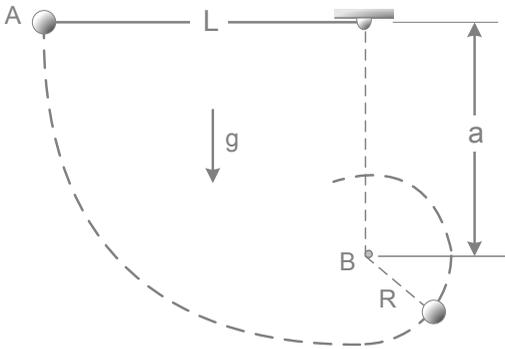
$$\text{área} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{\left(g + \frac{g}{5}\right) \cdot 2L}{2} \Rightarrow \text{área} = \frac{6gL}{5}$$

Assim, para determinar a velocidade final da corda, aplicamos a equação de Torricelli generalizada eq55:

$$V^2 = V_0^2 + 2 \cdot (\text{área}) \quad (\text{eq55})$$

$$V^2 = 0^2 + 2 \cdot \left(\frac{6gL}{5}\right)$$

$$V = 2\sqrt{\frac{3gL}{5}}$$



questão 60



questão 61

Questão 61 (Irodov) - 6

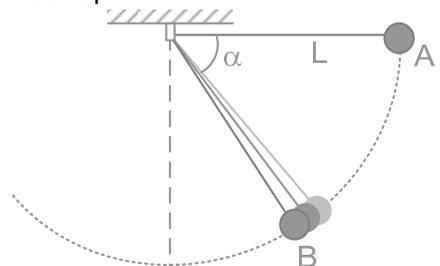
Um operador suspende, por um fio de comprimento L , uma esfera de massa M , inicialmente em repouso num local em que a gravidade vale g . Pergunta-se:

- com que velocidade horizontal mínima (constante) V o operador deve, subitamente, passar a mover sua mão a fim de que a esfera dê uma volta completa ao redor de sua mão durante o movimento posterior?
- qual a tração no fio quando ele passar pela posição horizontal?

Questão 62 (GRE) - 6

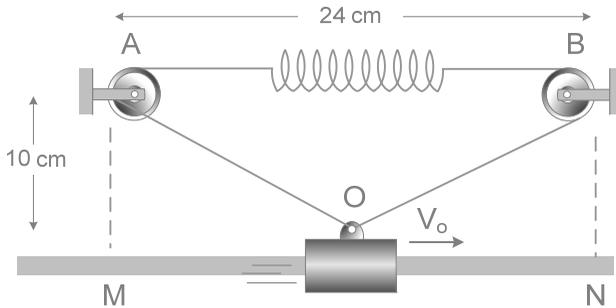
Um pêndulo é abandonado do repouso da posição horizontal A num local em que a gravidade vale g como mostra a figura abaixo. A aceleração resultante da bolinha do pêndulo, em função do ângulo α , é dada por:

- $g \cdot \sqrt{3 \cdot \text{sen}^2 \alpha + 1}$
- $g \cdot \sqrt{3 \cdot \text{cos}^2 \alpha + 1}$
- $2g \cdot \sqrt{\text{sen}^2 \alpha + 1}$
- $2g \cdot \sqrt{\text{cos}^2 \alpha + 1}$
- g

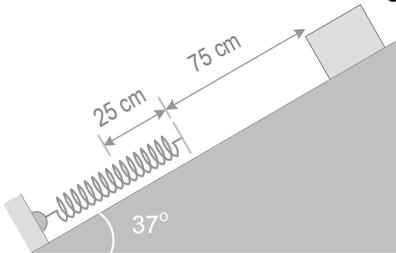
**Questão 63 - 6**

Um pêndulo simples de massa m e comprimento L foi abandonado do repouso da posição horizontal A num local onde a gravidade vale g . O prof. Renato Brito pede para você determinar:

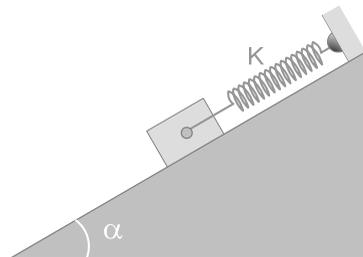
- a tração T no fio, após o pêndulo ter descido uma altura vertical H ;
- o gráfico da tração T em função da altura H , com $0 \leq H \leq L$.

**Questão 96** - 🔊

Uma caixa parte do repouso e desliza sobre um plano inclinado de 37° com a horizontal, indo de encontro a uma mola de constante elástica igual a 160 N/m , comprimindo-a de 25 cm . O coeficiente de atrito cinético entre a caixa e o plano inclinado vale $\mu = 0,5$ e a caixa foi inicialmente abandonada a uma distância de 75 cm da mola relaxada. O prof. Renato Brito pede para você determinar a massa m dessa caixa. Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\sin 37^\circ = 0,6$, $\cos 37^\circ = 0,8$.



questão 96



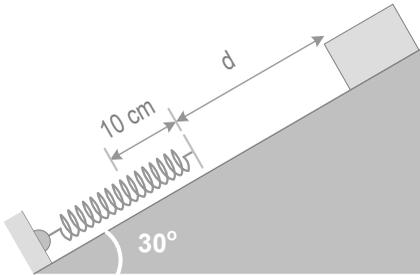
Questão 97

Questão 97 (Pierre Lucie) - 🔊

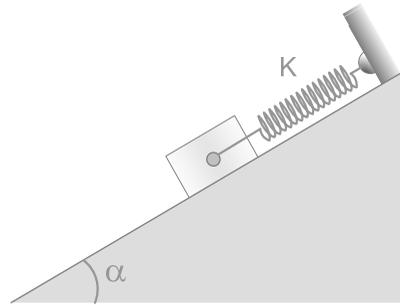
No dispositivo representado na figura, o atrito entre o bloco e o plano inclinado é desprezível; o bloco de massa M está preso a uma mola ideal de constante elástica k . Empurra-se o bloco contra a mola até esta se achar comprimida em uma distância d em relação ao seu comprimento natural. A seguir, o bloco é largado a partir do repouso. Qual a distância percorrida pelo bloco até parar pela primeira vez? A gravidade local vale g .

Questão 98

Um bloco de massa 2 kg encontra-se inicialmente em repouso sobre um plano inclinado liso, a uma distância d de uma mola. Abandonado o bloco, o mesmo desliza ladeira abaixo até encontrar a mola, causando-lhe uma máxima compressão de 10 cm . Sabendo que a constante elástica da mola vale $K = 1000 \text{ N/m}$, determine a distância inicial d . ($g = 10 \text{ m/s}^2$).



Questão 98



Questão 99

Questão 99

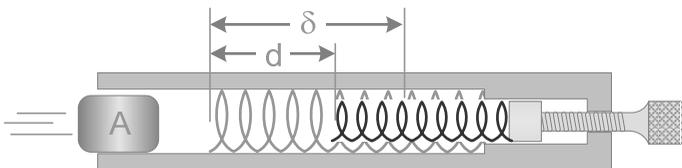
A figura mostra um bloco de massa 10 kg inicialmente em repouso sobre um plano inclinado, conectado a uma mola de constante elástica $k = 1280 \text{ N/m}$. Nessa situação, o bloco está comprimindo a mola, causando-lhe uma deformação $x = 0,5 \text{ m}$. Ao abandonarmos o sistema, determine a velocidade atingida pelo bloco quando a mola atingir seu comprimento natural. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a rampa vale $\mu = 0,25$. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\text{sen} \alpha = 0,6$ e $\text{cos} \alpha = 0,8$.

Questão 100 (Merian) -

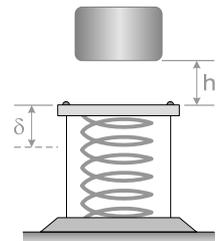
O encaixe de duas molas é usado para parar o êmbolo A de massa $m = 1200 \text{ g}$ a partir de uma velocidade $v = 5 \text{ m/s}$ e inverter sua direção de movimento. A mola de dentro aumenta a desaceleração, e o ajuste de sua posição é usado para controlar o ponto exato no qual a inversão ocorre. Se este ponto deve corresponder a uma deflexão máxima $\delta = 500 \text{ mm}$ para a mola de fora, determine o ajuste da mola interna calculando a distância d . A mola interna tem constante elástica $k_1 = 50 \text{ N/m}$ e a mola externa, uma constante elástica $k_2 = 88 \text{ N/m}$.

Questão 101 (Merian) -

O cilindro de massa $m = 6 \text{ kg}$ é solto, a partir do repouso, da posição mostrada na figura e cai sobre uma mola que foi inicialmente pré-comprimida $x_0 = 50 \text{ mm}$ por uma bandeja leve presa a fios de retenção. Se a constante elástica da mola vale $K = 4 \text{ kN/m}$, calcule a compressão adicional δ da mola produzida pelo cilindro em queda. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $h = 100 \text{ mm}$.



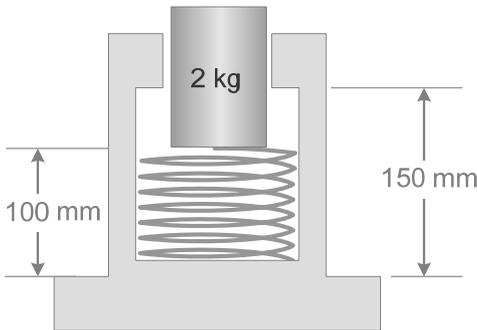
Questão 100



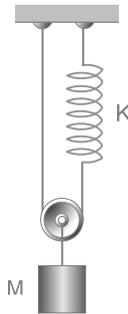
Questão 101

Questão 102 (Merian)

O pistão de 2 kg é abandonado a partir do repouso na posição mostrada na figura na qual a mola, de constante elástica $K = 400 \text{ N/m}$ e comprimento natural 200 mm, encontra-se inicialmente comprimida. Calcule a altura máxima h acima da posição inicial alcançada pelo pistão. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



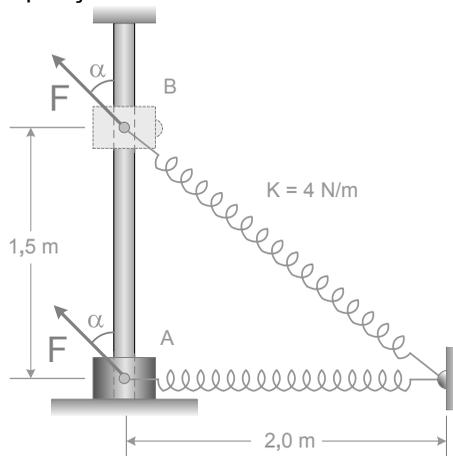
Questão 102



Questão 103

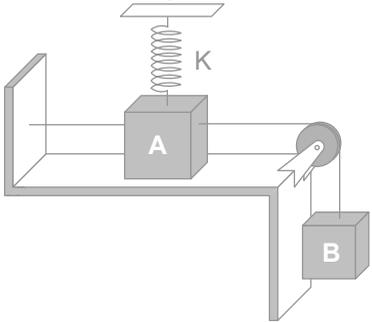
Questão 104

O colar possui massa $M = 3 \text{ kg}$ e está preso a uma mola leve que possui rigidez $k = 4 \text{ N/m}$ e um comprimento natural de $L_0 = 1,5 \text{ m}$. O colar é solto a partir da posição A e desliza para cima da haste lisa sob ação de uma força constante de intensidade $F = 70 \text{ N}$ que forma um ângulo $\alpha = 60^\circ$ com a vertical. Qual a velocidade do colar ao passar pela posição B?

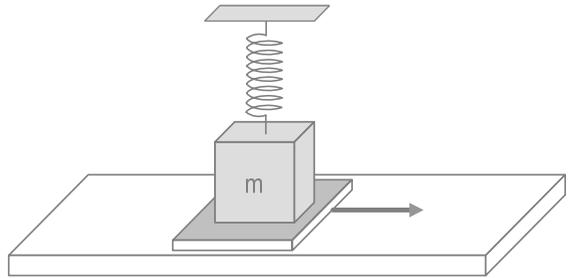


Questão 105 (Irodov) - 🎧

A figura ilustra duas caixas A e B de mesma massa m , inicialmente em repouso, conectadas entre si através de fios ideais. A caixa A está conectada ao teto através de uma mola ideal, inicialmente relaxada, de comprimento natural L_0 e constante elástica $K = 5m \cdot g / L_0$. Num certo instante, o fio que conecta a caixa A à parede é cortado e o sistema passa a se mover. O prof. Renato Brito pede para você determinar a velocidade da caixa B no instante em que a caixa A perde o contato com o plano horizontal. Admita a gravidade g e despreze todos os atritos.



questão 105



questão 106

Questão 106 (Irodov) - 🎧

Sobre uma tábua que se encontra em um plano horizontal liso, existe um bloco de massa $m = 8 \text{ kg}$, unido ao teto através de uma mola ideal, inicialmente relaxada na vertical, de comprimento natural $L_0 = 2m$. O coeficiente de atrito entre a tábua e o bloco vale $\mu = 0,5$. A tábua é lentamente afastada para a direita até a posição em que o bloco fica na iminência de se movimentar sobre ela, situação em que o fio forma com a vertical um ângulo $\alpha = 37^\circ$. O prof. Renato Brito pede para você determinar o trabalho realizado pela força de atrito nesse episódio, em joules, no referencial da Terra. Dado $\sin 37^\circ = 0,6$ $\cos 37^\circ = 0,8$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

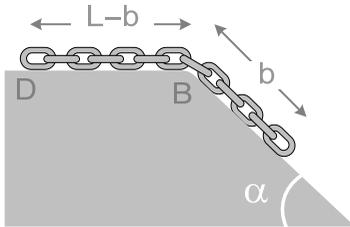
Questão 107 - 🎧

É sabido que a intensidade do campo gravitacional atrativo, no interior da Terra, varia linearmente com a distância ao centro do planeta, desde o valor nulo ($g = 0$, no centro da Terra) até o seu valor máximo ($g = 10 \text{ m/s}^2$) na sua superfície. Admita que seja possível cavar um poço que atravesse a Terra diametralmente. Se uma pedra for abandonada na entrada desse poço, a partir do repouso, com que velocidade ela atingirá o centro do planeta ?

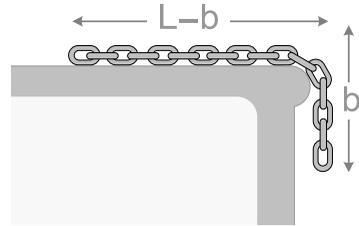
Dado: raio da Terra $R = 6400 \text{ km}$.

Questão 108 (Alonso & Finn) - 🌐

Uma corrente flexível de comprimento L e massa m é colocada inicialmente em repouso sobre uma superfície lisa ABC. Inicialmente, apenas um pedaço de comprimento b encontra-se pendente no plano inclinado. O prof. Renato Brito pede para você determinar a velocidade da corrente quando a sua extremidade D atingir o ponto B. A gravidade local vale g .



Questão 108



Questão 109

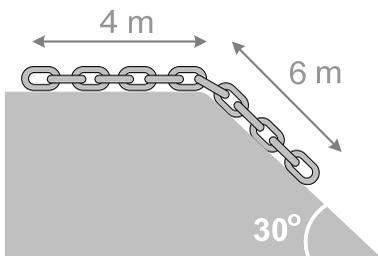
Questão 109 (Pierre Lucie)

Uma corrente flexível de comprimento L e massa m é colocada inicialmente em repouso sobre uma mesa lisa e reta. Inicialmente, apenas um pequeno pedaço de comprimento a encontra-se pendente na vertical. O prof. Renato Brito pede para você determinar a velocidade da corrente no instante que o último elo perde o contato com a superfície horizontal da mesa. A gravidade local vale g .

Questão 110

Uma corrente flexível de comprimento $L = 10$ m e massa 2 kg é colocada inicialmente em repouso sobre uma superfície lisa ABC. Inicialmente, apenas um pedaço de comprimento 6 m encontra-se pendente no plano inclinado. O velocidade da corrente quando a sua extremidade D atingir o ponto B, vale aproximadamente ($g = 10$ m/s²):

- a) 4,2 m/s b) 5,6 m/s c) 6,4 m/s d) 8,1 m/s e) 9,3 m/s



Questão 110



Questão 111

Questão 111

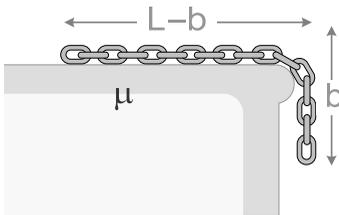
Uma corda de massa M e comprimento $3L$ é abandonada do repouso na posição vertical apoiada num pino como mostra a figura. Se a gravidade local vale g , determine a velocidade da corda no instante em que ela perder o contato com o pino. Admita que todos os atritos sejam desprezíveis.

Questão 112 (Pierre Lucie) - 🌐

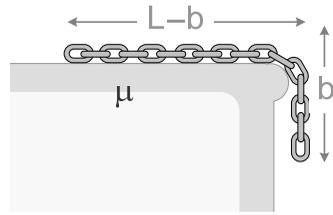
Uma corrente flexível de comprimento L e massa m é colocada inicialmente em repouso sobre uma mesa reta, com apenas uma parte vertical de comprimento b pendente. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre a mesa e a corrente vale μ , o prof. Renato Brito pede que você determine a velocidade da corrente no instante que o último elo perde o contato com a superfície horizontal da mesa. A gravidade local vale g .

Questão 113 (Merian)

Uma corrente de comprimento L , mostrada na figura, é solta a partir do repouso com o comprimento b de elos pendurados apenas o suficiente para iniciar o movimento. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre os elos e a superfície horizontal possuem essencialmente o mesmo valor μ . Sendo g a gravidade local, o prof. Renato Brito pede que você determine a velocidade da corrente quando o último elo deixar a borda. Despreze qualquer atrito no canto.



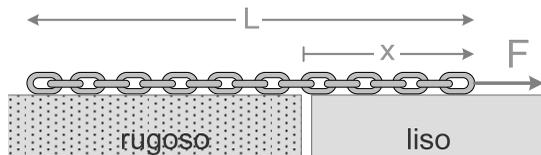
Questão 112



Questão 113

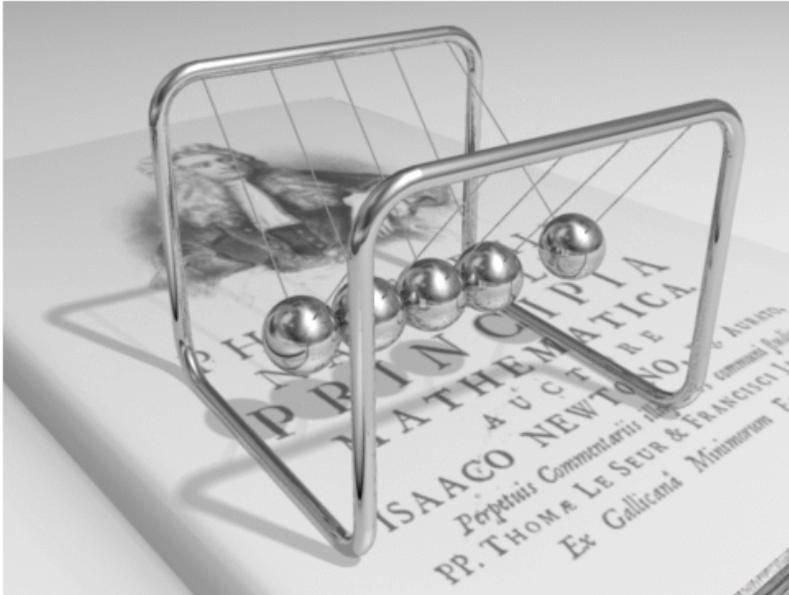
Questão 114 (Merian)

Uma corda pesada com massa λ por unidade de comprimento é puxada por uma força constante F ao longo de uma superfície horizontal que é composta de um trecho liso e um trecho rugoso. A corrente está inicialmente em repouso na superfície rugosa com $x = 0$. Se o coeficiente de atrito cinético entre a corrente e a superfície rugosa vale μ e a gravidade local vale g , determine a velocidade da corrente quando $x = L$. A força F é maior que $\mu \cdot \lambda \cdot g \cdot L$ para iniciar o movimento.



2 SISTEMAS DE PARTÍCULAS

DINÂMICA DO CENTRO DE MASSA SISTEMAS COM MASSA VARIÁVEL



2.1 A QUANTIDADE DE MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA

Todo corpo que tem massa e tem velocidade tem, associado a si, uma grandeza vetorial denominada “Quantidade de Movimento”, representada pelo vetor \vec{Q} , definida como:

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{V} \quad (\text{eq1})$$

A quantidade de movimento de uma partícula tem sempre a mesma direção e mesmo sentido da sua velocidade \vec{V} sendo, portanto, tangente à trajetória descrita pela partícula em cada instante do seu movimento.

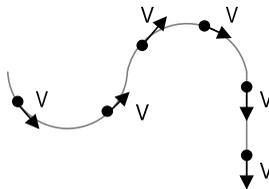


Figura 1 – Assim como a velocidade do móvel, a sua quantidade de movimento também é tangente à trajetória do corpo em cada instante.

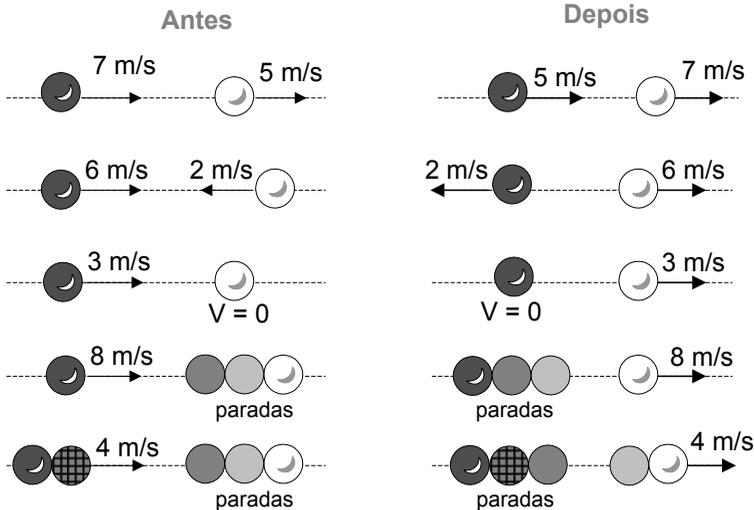


Figura 52 – massas iguais, colisão elástica unidimensional, as bolas trocam de velocidades

Exemplo Resolvido 19: Um conjunto de bolas de aço idênticas, cada uma com massa m , é suspenso por um conjunto de fios cujo espaçamento é igual ao diâmetro das esferas, como mostra a Figura 53. Se uma bola for deslocada e solta, ela colidirá com a fila de bolas estacionárias e, imediatamente, uma bola se deslocará da extremidade oposta com velocidade igual. Se duas bolas forem deslocadas e soltas, duas bolas saltarão na outra extremidade; se três bolas forem deslocadas, o mesmo número de bolas se moverá na outra extremidade e assim por diante. Em cada caso, a velocidade adquirida pelas bolas que saltam na outra extremidade é essencialmente igual à velocidade inicial com a qual o primeiro conjunto de bolas colide com as bolas estacionárias restantes.

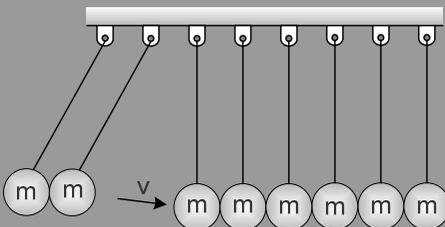


Figura 53

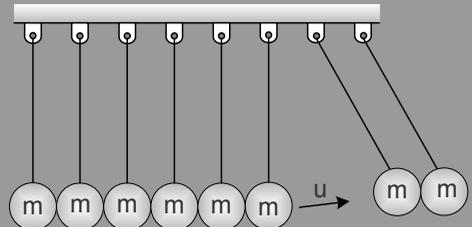


Figura 54

Explique por que esses resultados são observados; em particular, por que, quando duas bolas são liberadas inicialmente, não sai apenas uma bola da outra extremidade com velocidade duas vezes maior que aquela associada ao conjunto inicial de duas bolas antes da colisão.

Solução: Suponha que, inicialmente, n bolas sejam deslocadas e abandonadas, colidindo com as bolas restantes com velocidade inicial v (Figura 53). É muito complexo determinar quais forças atuam para transmitir a quantidade de movimento das bolas que colidem de uma extremidade da fila de bolas estacionárias à outra.

Mas, de qualquer forma, a quantidade de movimento do sistema deve ser conservada na interação da colisão, e se a colisão for elástica, o mesmo deve ocorrer à energia cinética.

Admitindo que um número N de bolas salte na outra extremidade (Figura 54) com velocidade u , imediatamente após a colisão, a conservação da quantidade de movimento do sistema nos permite escrever:

$$\Sigma Q_{\text{antes}} = \Sigma Q_{\text{depois}} \Rightarrow n \cdot m \cdot v = N \cdot m \cdot u \Rightarrow n^2 \cdot m^2 \cdot v^2 = N^2 \cdot m^2 \cdot u^2 \quad (\text{eq54})$$

Da conservação da energia cinética total, temos:

$$\Sigma E_{\text{cin antes}} = \Sigma E_{\text{cin depois}} \Rightarrow n \cdot \frac{m \cdot v^2}{2} = N \cdot \frac{m \cdot u^2}{2} \quad (\text{eq55})$$

Dividindo, membro a membro, as relações eq54 e eq55, vem:

$$\frac{n^2 m^2 v^2}{n \cdot m \cdot v^2} = \frac{N^2 m^2 u^2}{N \cdot m \cdot u^2} \Rightarrow N = n \quad (\text{eq56})$$

Substituindo-se eq56 em eq55, vem $u = v$.

Podemos ir além e tentar analisar alguns casos mais interessantes, como o proposto abaixo na Figura 55, no qual uma bola de massa $6M$ se aproxima de um conjunto de bolas estacionárias, todas encostadas entre si, e colide elasticamente. A configuração do sistema após a colisão também é mostrada na Figura 55.

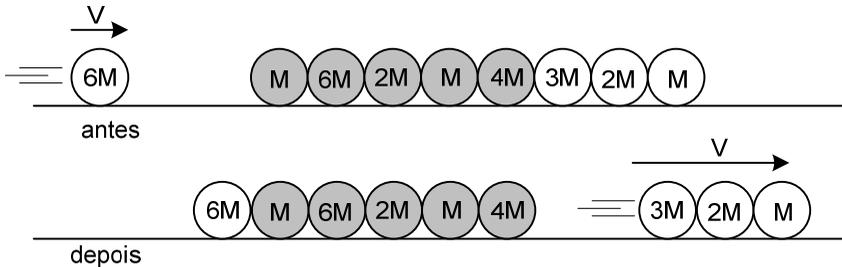


Figura 55 – colisão elástica entre bolas que estão toda encostadas entre si.

Após a colisão, as três bolas da ponta direita se movem com a mesma velocidade inicial v da bola que colidiu com o conjunto de bolas estacionárias.



Nesse caso, percebemos que não há como satisfazer a condição 2, tendo em vista que a massa da bola que colide com o sistema vale 8M, mas não há como a soma das massas das bolas que descolam do sistema após a colisão totalizar 8M. Nesse caso, como o sistema reage ?

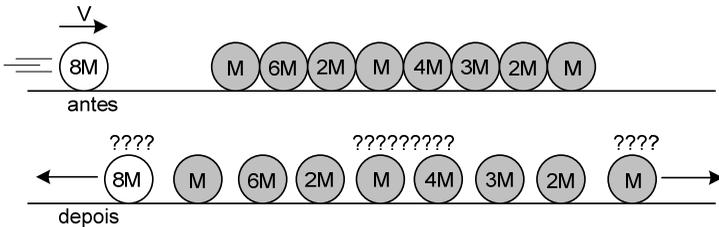


Figura 58

Nesse caso, após a colisão, as bolas se espalham, de forma que nenhuma delas permanecerá estacionária, como havia ocorrido nos casos anteriores. Algumas vão para frente, outras vão para trás com velocidades distintas e, nesse caso, teremos muito mais incógnitas do que equações disponíveis para deduzir a configuração exata do sistema após essa colisão, o que torna esse caso de pouco interesse teórico e prático.

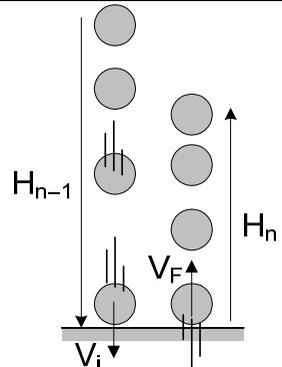
2.22 – PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS EM COLISÕES

Uma bola cai verticalmente do repouso e efetua uma sucessão de colisões com o solo, subindo e descendo.

Inicialmente bola cai de uma altura H_1 , colide com o solo e sobe novamente até uma altura H_2 , de onde caindo novamente subindo até uma altura H_3 e assim por diante.

A seguir, determinaremos a relação entre duas alturas consecutivas H_{n-1} , H_n e o coeficiente de restituição e desse choque.

Seja V_i a velocidade da bola logo antes do impacto. Pela conservação da energia mecânica durante a queda da bola, temos:



$$M \cdot g \cdot H_{n-1} = M \cdot V_i^2 / 2 \quad \Rightarrow \quad V_i = \sqrt{2 \cdot g \cdot H_{n-1}}$$

Seja V_F a velocidade da bola logo após o impacto. Pela conservação da energia mecânica durante a subida da bola, temos:

$$M \cdot g \cdot H_n = M \cdot V_F^2 / 2 \quad \Rightarrow \quad V_F = \sqrt{2 \cdot g \cdot H_n}$$

Pela definição de coeficiente de restituição, vem:

$$e = \frac{|V_{\text{relativa-após}}|}{|V_{\text{relativa-antes}}|} = \frac{V_F}{V_i} = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot H_n}}{\sqrt{2 \cdot g \cdot H_{n-1}}} \quad \Rightarrow \quad e = \sqrt{\frac{H_n}{H_{n-1}}} \quad (\text{eq57})$$

Dessa forma, vemos que duas alturas sucessivas H_{n-1} e H_n se relacionam por:

$$H_n = H_{n-1} \cdot e^2 \quad (\text{eq58})$$

Propriedade das alturas: a relação eq58 mostra que sucessivas alturas $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ formam uma progressão geométrica de razão e^2 .

Sejam $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ os sucessivos tempos de queda dessa bola, em seu movimento de sobe-desce. Determinaremos a relação entre dois tempos de queda consecutivos T_{n-1} e T_n .

Como se trata de uma queda livre a partir do repouso, temos:

$$H_n = \frac{g \cdot T_n^2}{2} \quad (\text{eq59}) \quad \text{e} \quad H_{n-1} = \frac{g \cdot T_{n-1}^2}{2} \quad (\text{eq60})$$

Dividindo, membro a membro, as relações eq59 e eq60, vem:

$$\frac{H_n}{H_{n-1}} = \frac{g \cdot T_n^2}{g \cdot T_{n-1}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_n}{T_{n-1}} = \sqrt{\frac{H_n}{H_{n-1}}}, \quad \text{usando eq57, vem:} \quad \frac{T_n}{T_{n-1}} = e \quad (\text{eq61})$$

Dessa forma, vemos que dois tempos de queda sucessivos T_{n-1} e T_n se relacionam por:

$$T_n = T_{n-1} \cdot e \quad (\text{eq62})$$

Propriedade dos tempos: a relação eq62 mostra que os sucessivos tempos de queda $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ formam uma progressão geométrica de razão e .

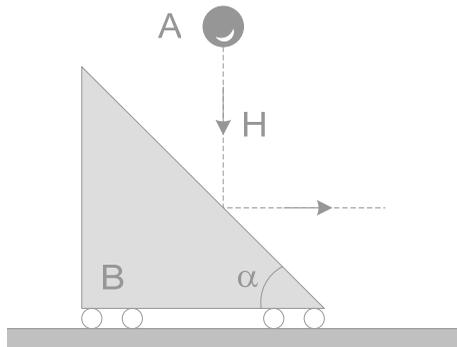
As propriedades das alturas e dos tempos mostradas acima são muito úteis na resolução de problemas envolvendo colisões, conforme veremos adiante.

• CASO 3: COLISÃO BIDIMENSIONAL COM UM ANTEPARO MÓVEL

Para entender na prática como equacionar esse tipo de colisão, leia com atenção o exemplo resolvido abaixo.

Exemplo Resolvido 21 : Uma bola de A de massa m é abandonada do repouso de uma altura H acima um prisma B de massa M também inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal lisa. O prisma encontra-se apoiado sobre roletes e é livre para se mover na horizontal. Sabendo que a velocidade da bola, após a colisão, aponta na horizontal para a direita, o prof. Renato Brito pergunta:

- Qual o coeficiente de restituição e dessa colisão em função de M , m e α ?
- Qual a velocidade de recuo do prisma B, após a colisão ?
- Se a colisão for elástica, a bola ricocheteará horizontalmente após a colisão, caso $\alpha = 45^\circ$?
- Qual deveria ser o coeficiente de restituição desse choque a fim de que a bola ricocheteasse horizontalmente, após colidir com um prisma de inclinação $\alpha = 30^\circ$ e massa igual à massa da bola ($M = m$) ?



Solução:

a) Seja V_0 a velocidade vertical da bola logo antes de se chocar com o prisma, e V_1 a velocidade da bola logo após colidir com o prisma e ser rebatida horizontalmente, como mostra a Figura 68A. Seja V_2 a velocidade de recuo do prisma após o impacto. Todas as velocidades são tomadas em relação à Terra.

Como, durante a colisão, a bola só sofre forças impulsivas na direção normal n (Figura 68B), sua quantidade de movimento necessariamente se conserva na direção tangencial t , o que nos permite escrever:

$$m \cdot (V_0)_t = m \cdot (V_1)_t \quad \Rightarrow \quad m \cdot V_0 \cdot \sin \alpha = m \cdot V_1 \cdot \cos \alpha \quad (\text{eq66})$$

O sistema bola + prisma está livre da ação de forças externas na direção horizontal. Assim, a quantidade de movimento horizontal desse sistema se conserva:

$$\Sigma Qx_{\text{antes}} = \Sigma Qx_{\text{depois}} \Rightarrow 0 + 0 = -M.V_2 + m.V_1 \Rightarrow M.V_2 = m.V_1 \quad (\text{eq67})$$

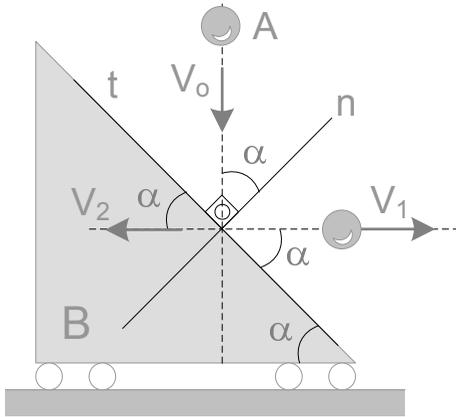


Figura 68A

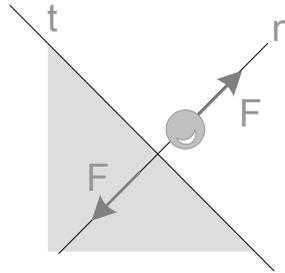


Figura 68B

Em seguida, aplicamos o conceito de coeficiente de restituição e , determinando as velocidades relativas entre a bola e o prisma, antes e após a colisão, tomando apenas as componentes das velocidades na direção normal n :

$$e = \frac{|V_{\text{rel-após}}|_n}{|V_{\text{rel-antes}}|_n} = \frac{(V_2)_n + (V_1)_n}{(V_0)_n} = \frac{V_2 \cdot \text{sen} \alpha + V_1 \cdot \text{sen} \alpha}{V_0 \cdot \text{cos} \alpha} \quad (\text{eq68})$$

Extraindo V_2 da relação eq67, V_0 da relação eq66 e substituindo em eq68, vem:

$$e = \frac{V_2 \cdot \text{sen} \alpha + V_1 \cdot \text{sen} \alpha}{V_0 \cdot \text{cos} \alpha} = \frac{\frac{m}{M} V_1 \cdot \text{sen} \alpha + V_1 \cdot \text{sen} \alpha}{\frac{V_1 \cdot \text{cos} \alpha}{\text{sen} \alpha} \cdot \text{cos} \alpha} = \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} \left(1 + \frac{m}{M} \right)$$

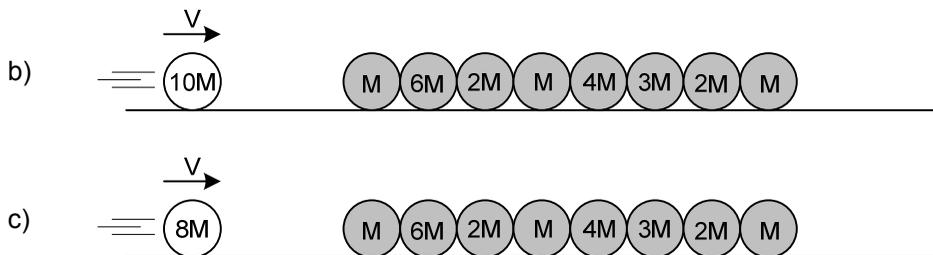
Assim, finalmente concluímos que: $e = \left(1 + \frac{m}{M} \right) \cdot \text{tg}^2 \alpha$ (eq69)

b) A velocidade V_0 da bola, após cair a altura H a partir do repouso, é facilmente determinada por conservação de energia mecânica durante a queda:

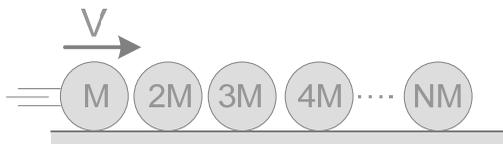
$$m \cdot g \cdot H = \frac{m \cdot V_0^2}{2} \Rightarrow V_0 = \sqrt{2gH} \quad (\text{eq70})$$

Da relação eq66, temos que: $V_1 = V_0 \cdot \text{tg} \alpha$ (eq71)

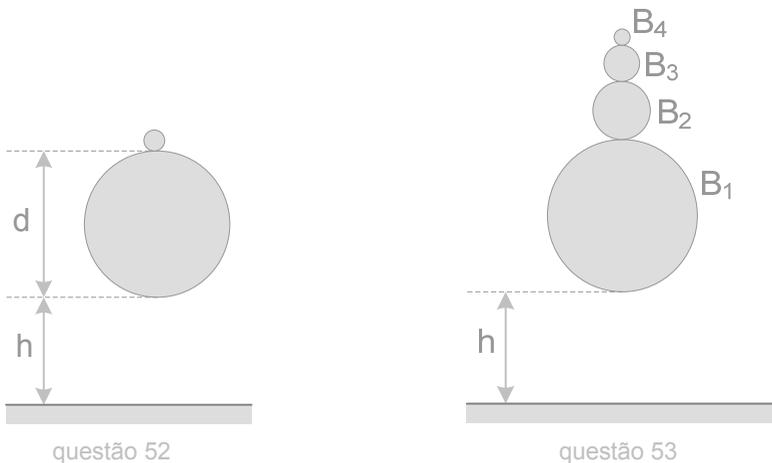
Da relação eq67, temos que: $V_1 = \frac{M}{m} \cdot V_2$ (eq72)

**Questão 51** – 

N esferas de mesmo raio R estão em repouso sobre um plano horizontal. As esferas estão quase em contato entre si e seus centros encontram-se alinhados. As massas dessas esferas valem respectivamente $M, 2M, 3M, \dots, NM$. Dá-se à esfera de massa M uma velocidade inicial V para a direita e na direção da linha dos centros. Supondo que todas as colisões sejam elásticas e unidimensionais, determine a velocidade de saída da N -ésima bola.

**Questão 52** –  (Classical Mechanics)

Uma bola de tênis de (pequena) massa m repousa sobre uma bola de basquete de (grande) massa M . A parte inferior da bola de basquete encontra-se a uma altura h do solo e tem um diâmetro igual a d . Sabendo que a colisão é elástica e que M é muito maior que m , determine a altura a bolinha de tênis subirá após a colisão, medida a partir do solo.



Questão 53 – 🌐 (Classical Mechanics)

Agora considere n bolas $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ de massas respectivamente iguais a $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ (com $m_1 \gg m_2 \gg m_3 \gg \dots \gg m_n$) empilhadas verticalmente. A parte inferior da bola B_1 encontra-se a uma altura h acima do solo, e a bola B_n encontra-se a uma altura $h + d$ acima do solo. A pilha de bolas é abandonada do repouso. Admita que todas as colisões sejam elásticas.

- Determine a que altura a bola B_n subirá, acima do solo, em função de n, h e d .
- Admita agora $h = 1$ m. Estime o número n de bolas que seriam necessárias para que B_n atinja atingir uma altura da ordem de 4 km. Nesse caso, d pode ser desprezado.
- Estime o número n de bolas que seriam necessárias para que B_n atinja a velocidade de escape da Terra, da ordem de 11 km/s.

Questão 54 (ITA 2009) – 🌐

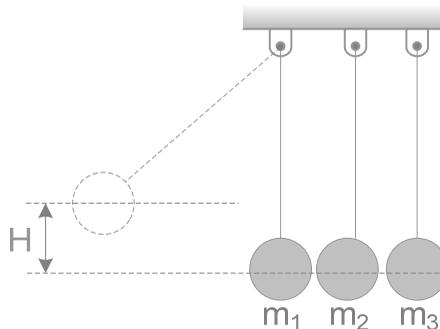
Considere uma bola de basquete de 600g a 5 m de altura e, logo acima dela, uma de tênis de 60 g. A seguir, num dado instante, ambas as bolas são deixadas cair. Supondo choques perfeitamente elásticos e ausência de eventuais resistências, e considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$, assinale o valor que mais se aproxima da altura máxima alcançada pela bola de tênis em sua ascensão após o choque.

- a) 5 m b) 10 m c) 15 m d) 25 m e) 35 m

Questão 55 – 🌐

Três esferas de raios iguais e massas diferentes estão suspensas por fios de comprimento iguais, de maneira que quase encostam entre si e seus centros estão alinhados. A esfera de massa m_1 é inclinada até uma altura H e abandonada do repouso. Se a gravidade local vale g , determine:

- as massas m_2 e m_3 , sabendo que, após a bola 1 colidir com a bola 2, e esta colidir com a bola 3, as bolas possuem quantidade de movimento de mesmo valor;
- as alturas H_1, H_2 e H_3 atingidas por cada bola, após esse episódio.



- a) o valor máximo para a velocidade u ;
 b) o valor mínimo para a velocidade u .

Questão 60 – 🎧

Uma bola é abandonada do repouso de uma altura h , num local onde a gravidade vale g , e cai verticalmente colidindo com o piso. Sendo e o coeficiente de restituição dessa colisão, calcule:

- a) o tempo necessário para que a bola pare de saltar;
 b) a distância total percorrida pela bola;
 c) a energia mecânica dissipada no processo.

Questão 61

Uma bola cai de uma altura $H = 9\text{m}$, colide com o solo e sobe novamente até uma altura X . Em seguida, cai novamente e colide com o solo, subindo até uma nova altura $h = 4\text{m}$, e assim sucessivamente, até a bola parar. O prof. Renato Brito pede para você determinar ($g = 10\text{ m/s}^2$):

- a) o coeficiente de restituição dos impactos
 b) a altura X
 c) a distância total percorrida pela bola até ela parar.

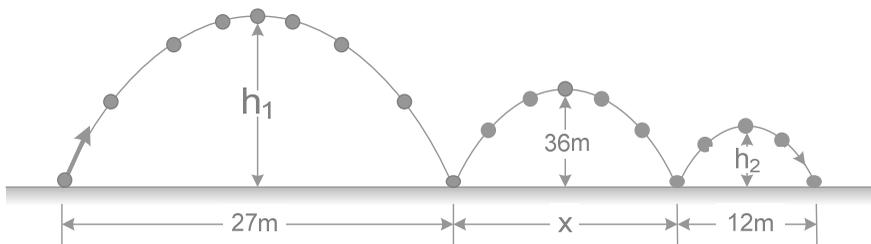
Questão 62 – 🎧

Uma bola de futebol que estava em repouso sobre a superfície de uma quadra é chutada com velocidade u formando um ângulo α com a horizontal. A gravidade local vale g . Sabendo que o coeficiente de restituição entre a bola e a quadra de futebol vale e , determine:

- a) a que distância da posição inicial a bola tocará o solo pela segunda vez;
 b) a que distância da posição inicial a bola tocará o solo pela n -ésima vez;
 c) a distância horizontal percorrida pela bola até ela parar de saltar.

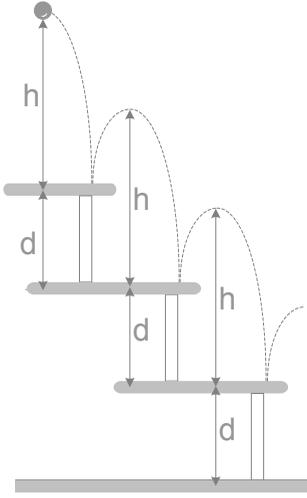
Questão 63

A figura mostra uma parte da trajetória descrita por uma bola de tênis que foi lançada obliquamente, a partir do solo, num planeta de gravidade desconhecida. Sabendo que o solo é liso e a resistência do ar é desprezível, o prof. Renato Brito pede que você determine as alturas h_1 e h_2 , bem como a distância x .

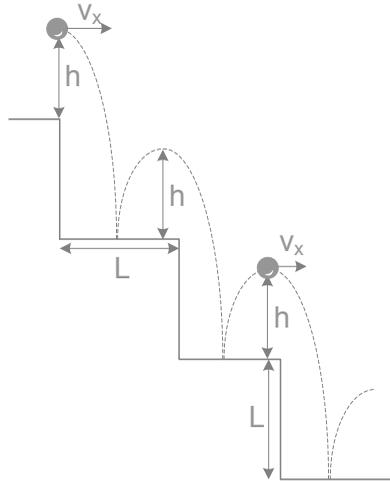


Questão 64 – 📍

Uma bola cai de uma altura h acima do primeiro degrau e desce a escada, como mostra a figura, subindo sempre uma altura h acima de cada degrau. Sendo e o coeficiente de restituição, determine a altura d de cada degrau a fim de que a bola siga a trajetória mostrada na figura.



questão 64

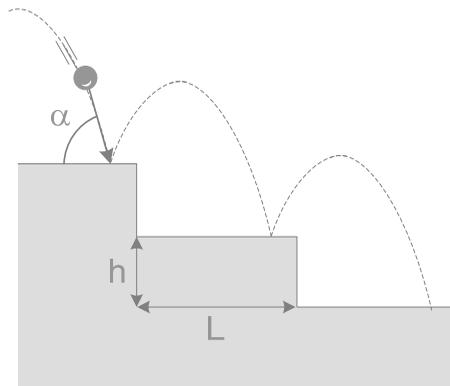


questão 65

Questão 65 – 📍

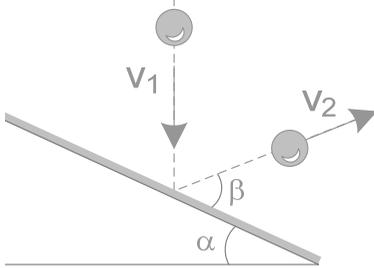
Seja a escada mostrada na figura na qual cada degrau tem comprimento e largura iguais a L . Uma bolinha de aço vai descendo a escada, degrau por degrau, sempre colidindo na mesma posição em cada degrau e sempre atingindo uma mesma altura h acima de cada degrau. Sabendo que o coeficiente de restituição vale e e a gravidade local vale g , determine:

- a velocidade horizontal v_x necessária, em função de g , L e e ;
- a altura h atingida acima de cada degrau em função de L e e .

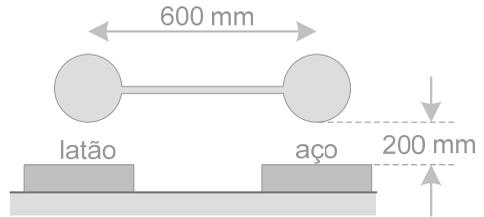


questão 66

b) calcule o ângulo β .



questão 73



questão 74

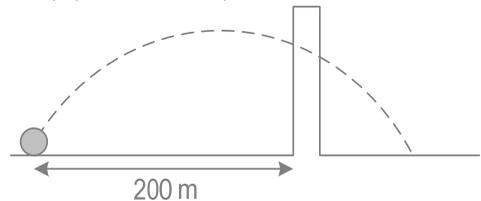
Questão 74 – 🎧 (Merian)

Duas bolas de aço idênticas estão interligadas por uma haste rígida de massa desprezível como mostrado na figura e são abandonadas do repouso na posição horizontal de uma altura de 200 mm acima das placas de base pesadas de latão e aço. Se o coeficiente de restituição aço-latão $e_1 = 0,3$ e o coeficiente de restituição aço-aço vale $e_2 = 0,9$, determine a velocidade angular ω da haste logo após o impacto. Admita que as colisões das bolas com as bases sejam simultâneas.

Questão 75

Uma bola de borracha de 1 kg foi lançada, a partir do solo, com velocidade inicial $v_0 = 50 \text{ m/s}$ numa direção que forma um ângulo $\alpha = 37^\circ$ com a horizontal. A trajetória parabólica do projétil está contida num plano perpendicular a um enorme paredão de aço, fixo ao solo a uma distância $d = 200 \text{ m}$ do ponto de lançamento. Sabendo que a bola colide elasticamente com o paredão rígido, determinar a que distância do paredão a bola se chocará com o solo pela primeira vez. Dado: $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\sin 37^\circ = 0,6$, $\cos 37^\circ = 0,8$

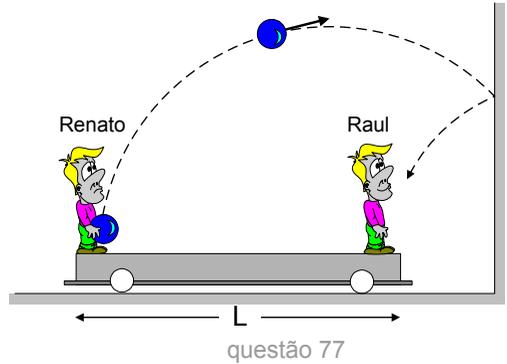
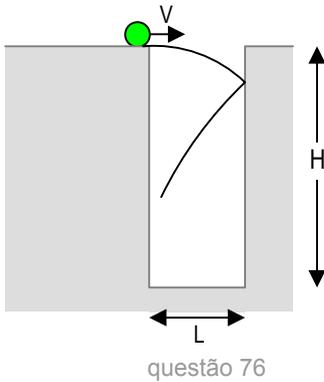
- 10 m
- 20 m
- 30 m
- 40 m
- 50 m



Questão 76 – 🎧

Uma bola foi lançada com velocidade horizontal v na entrada de um poço de profundidade $H = 80 \text{ m}$ e seção quadrada de lado $L = 6 \text{ m}$, num local em que a gravidade vale $g = 10 \text{ m/s}^2$. A bola sofrerá N colisões elásticas sucessivas com as paredes até chegar ao fundo do poço.

- determine o número N de colisões, para $v = 10 \text{ m/s}$;
- para que tenhamos $N = 40$, determine o intervalo de valores para v .



Questão 77 –

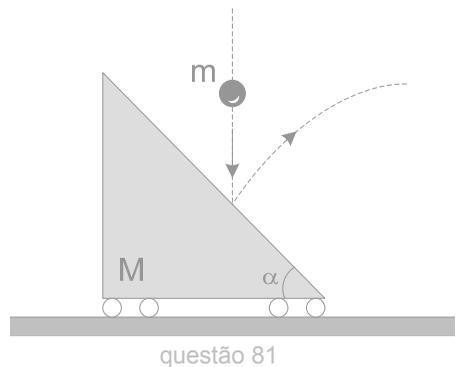
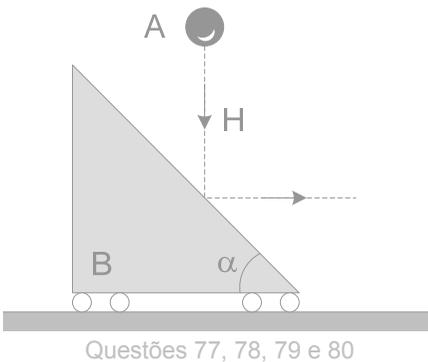
Admita que todo o sistema da figura esteja parado quando Renato (de massa $2M$) arremessa a bola (de massa M) obliquamente com velocidade V_0 formando um ângulo α com a horizontal. A bola colide elasticamente com a parede e chega até as mãos do irmão Raul (de massa $2M$). Determine:

- a velocidade adquirida pela plataforma (de massa $4M$) logo após Renato jogar a bola;
- a velocidade adquirida pela plataforma logo após Raul segurar a bola.

Questão 78

Uma bola A de massa m é abandonada do repouso de uma altura H sobre um prisma B de massa M também inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal lisa. O prisma encontra-se apoiado sobre roletes e é livre para se mover na horizontal. Sabendo que a gravidade local vale g , e que a velocidade da bola, após a colisão, aponta na horizontal para a direita, o prof. Renato Brito lhe pergunta:

- Qual o coeficiente de restituição e dessa colisão em função de M , m e α ?
- Quais as velocidades da bola e do prisma, logo após a colisão, em função de M , m , g , H e e ?



Questão 79 (UNIP-SP)

Na figura temos um plano horizontal sem atrito e um bloco **B**, em repouso, com o formato de um prisma. Uma pequena esfera **A** é abandonada do repouso, da posição indicada na figura, com $H = 1,2 \text{ m}$ e, após uma queda livre, colide elasticamente com o prisma. Despreze o efeito do ar e adote $g = 10 \text{ m/s}^2$. Sabe-se que, imediatamente após a colisão, a esfera **A** tem velocidade horizontal. A massa do prisma **B** é o dobro da massa da esfera **A**. A velocidade adquirida pelo prisma **B**, após a colisão, tem módulo igual a:

- a) 2,0 m/s b) 4,0 m/s c) 8,0 m/s d) 16 m/s e) 1,0 m/s

Questão 80

Na figura temos um plano horizontal sem atrito e um prisma **B**, de massa $2m$, inicialmente em repouso, livre para se mover horizontalmente num local onde $g = 10 \text{ m/s}^2$. Uma pequena esfera **A**, de massa m , é abandonada do repouso, da posição indicada na figura e, após uma queda livre de uma altura $H = 15 \text{ cm}$, colide com o prisma, sendo o coeficiente de restituição $e = 0,5$. Sabendo que, imediatamente após a colisão, a esfera **A** tem velocidade horizontal, o prof. Renato Brito pede que você determine:

- a) a velocidade relativa entre A e B logo após a colisão.
b) o ângulo α de inclinação do prisma.

Questão 81 – 

Abandona-se do repouso, na posição indicada na figura, uma esfera de massa $m = 2 \text{ kg}$. A esfera atinge, com velocidade $v_0 = 26 \text{ m/s}$, a superfície lisa de um prisma de massa $M = 12 \text{ kg}$ inicialmente em repouso. O prisma, suportada por roletes, pode mover-se livremente no plano horizontal liso. Sabendo-se que $\alpha = 45^\circ$ e que o coeficiente de restituição entre a esfera e o prisma vale $e = 0,5$, o prof. Renato Brito pede que você determine a velocidade adquirida pelo prisma após a colisão.

Questão 82 – 

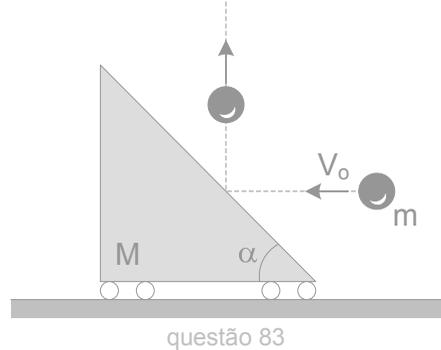
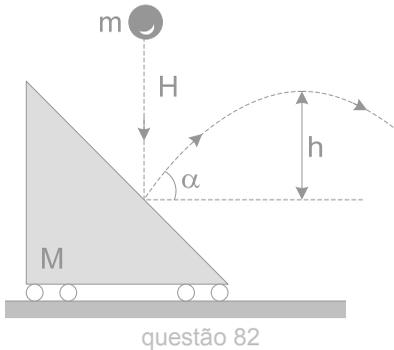
Uma esfera de massa m é abandonada do repouso de uma altura H acima de um prisma de massa M que se encontra apoiado sobre um solo horizontal liso. Após colidir elasticamente com o prisma, a esfera adquire velocidade formando ângulo α com a horizontal e descreve uma trajetória parabólica conforme a figura. Se a gravidade local vale g , o prof. Renato Brito pede que você determine a altura máxima h atingida pela esfera em sua trajetória parabólica.

Questão 83 – 

Uma bola de massa m é lançada horizontalmente com velocidade v_0 contra um prisma que repousa sobre um solo horizontal liso. O prisma tem massa M e sua superfície inclinada faz um ângulo α com a horizontal. Sabendo que, após a colisão, a velocidade da bola é vertical, o prof. Renato Brito pede que você:

- a) determine o coeficiente de restituição e dessa colisão, em função de m , M e α .

- b) admitindo agora que essa colisão seja elástica, determine uma relação entre m , M e α , usando apenas conservação da energia mecânica e da quantidade de movimento;
- c) compare as relações obtidas nos itens a e b. Elas coincidem, admitindo colisão elástica ($e = 1$) ?
- d) determine a velocidade do prisma após a colisão, em função de m , M e v_o .
- e) determine a altura máxima atingida pela bolinha, medida a partir da posição da colisão, em função de v_o , m , M , do coeficiente de restituição e da gravidade local g .



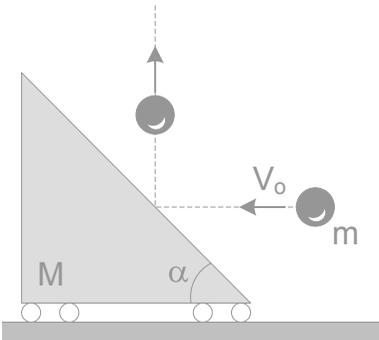
Questão 84

Uma bola de massa m é lançada horizontalmente com velocidade v_o contra um prisma que repousa sobre um solo horizontal liso. O prisma tem massa M e sua superfície inclinada faz um ângulo α com a horizontal. Sabendo que, após a colisão, a velocidade da bola é vertical, o prof. Renato Brito lhe pergunta:

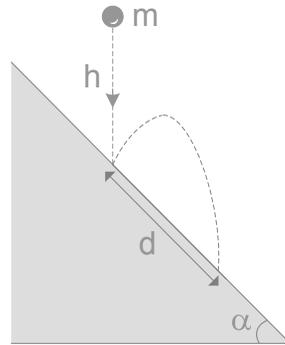
- a) quanto vale o coeficiente de restituição e dessa colisão, em função de m , M e α ?
- b) se a inclinação da rampa valesse $\alpha = 45^\circ$ e a colisão fosse elástica, a bola lançada horizontalmente ricochetearia verticalmente, após a colisão ?
- c) que condição limite deveria satisfazer as massas dos corpos a fim de que a bola lançada horizontalmente ricocheteasse verticalmente, admitindo colisão fosse elástica e $\alpha = 45^\circ$?

Questão 85 –

Uma bola cai do repouso, a partir de uma altura h , sobre um plano inclinado de inclinação α com a horizontal, num local em que a gravidade vale g . Após colidir com o plano inclinado, a bola salta novamente. A que distância d a bola colidirá com a rampa novamente ? Admita que o coeficiente de restituição vale e .



questão 84

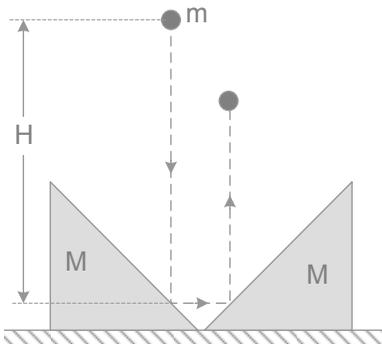


questão 85

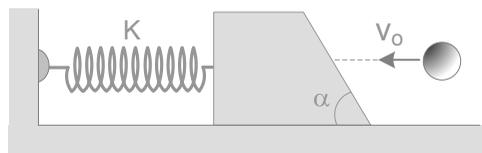
Questão 86 – 🌀

Sobre um plano horizontal liso repousam duas cunhas idênticas, de mesma massa M e mesma inclinação com a horizontal, livres para se mover ao longo da superfície horizontal. Uma esfera de massa m é abandonada do repouso, de uma altura H (veja figura) ricocheteia na 1ª cunha, em seguida, repica na 2ª cunha e sobe verticalmente. Admitindo que todas as colisões sejam elásticas e que $M \gg m$, determine a altura final atingida pela esfera.

- a) $\left(\frac{M-m}{M+m}\right) \cdot H$ b) $\left(\frac{2M-m}{2M+m}\right) \cdot H$ c) $\left(\frac{M-2m}{M+2m}\right) \cdot H$ d) $\left(\frac{M-m}{M+2m}\right) \cdot H$



questão 86



questão 87

Questão 87 – 🌀 (Beer – Johnson)

Uma esfera de massa $m = 4 \text{ kg}$ é lançada horizontalmente com velocidade $v_0 = 16 \text{ m/s}$ contra a superfície inclinada de um bloco de massa $M = 18 \text{ kg}$, inicialmente em repouso, conectado a uma mola ideal de constante elástica

2.26 – SISTEMAS COM MASSA VARIÁVEL – FORÇA PROPULSORA

Considere um vagão de massa contendo água em seu interior se movendo com velocidade escalar v . A massa do sistema vagão + água vale m . De repente, uma válvula de contenção se abre e o vagão passa a ejetar água a uma taxa constante $\phi = \Delta m/\Delta t$

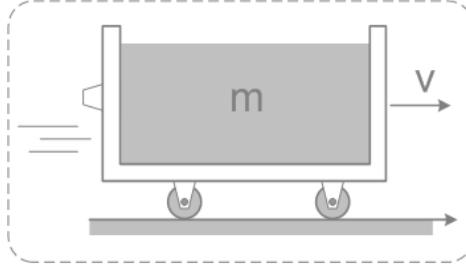


Figura 74 – Configuração inicial

Logicamente, durante o processo de ejeção da água, o vagão exerce uma força $F \leftarrow$ na porção Δm que deixou o vagão. Pela lei da ação e reação, esta porção aplica ao vagão uma força $F \rightarrow$ de mesmo valor e sentido contrário (Figura 75) que acaba fazendo o papel de força propulsora nesse vagão.

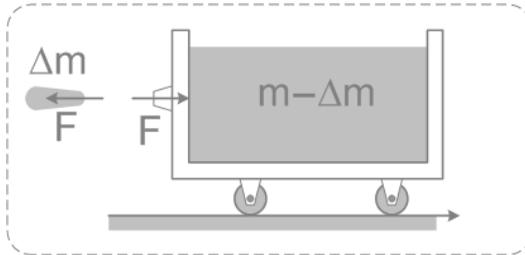


Figura 75 Força propulsora F trocada entre o vagão e a porção de água ejetada

Estamos interessados em determinar a intensidade da força propulsora $F \rightarrow$ que age no vagão durante esse processo de ejeção da água na Figura 75.

Admita que, num intervalo de tempo infinitesimal Δt , a velocidade do vagão sofra um aumento de v para $v + \Delta v$. Assim, a aceleração do vagão nesse episódio vale:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (\text{eq83})$$

e a força propulsora que age nele é dada por:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (\text{eq84})$$

Para determinar o valor da força F , dada pela relação eq84, faremos uso do princípio da conservação da quantidade de movimento de sistemas isolados.

Entendemos por **sistemas isolados** aqueles que não interagem com nenhum corpo fora da sua fronteira. Adicionalmente, para um sistema ser isolado, não deve haver transferência de matéria através de sua fronteira. Afinal, como a própria matéria que passa pela fronteira é portadora de qdm, a transferência de matéria pela fronteira implica automaticamente uma transferência de qdm através da fronteira, violando o conceito de sistema isolado.

Assim, tomaremos como sistema o conjunto “**vagão + água + água ejetada**”. Sem sombra de dúvidas, esse sistema está livre da ação de forças externas na horizontal, além de possuir massa total invariável. Dessa forma, podemos garantir que sua quantidade de movimento horizontal é conservada no referencial da Terra.

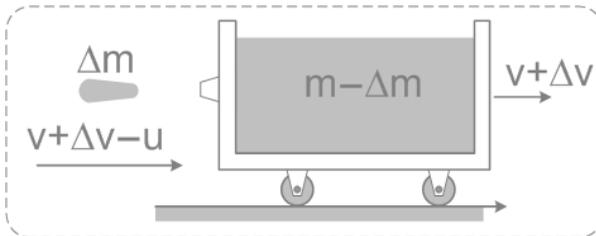


Figura 76 – Velocidades do vagão e da porção ejetada Δm em relação à Terra. Note que a velocidade da porção Δm ejetada, em relação ao vagão, vale u .

Admita que a porção de massa Δm seja ejetada com velocidade u em relação ao vagão, na Figura 76. Assim, qual a velocidade dessa porção Δm ejetada em relação à Terra? Ora, sua velocidade em relação à Terra valerá $v + \Delta v - u$.

Assim, a qdm inicial do sistema “*vagão + água + água ejetada*”, em relação à Terra (Figura 74), antes de ejetar a massa, é dada por:

$$Q_{\text{sist antes}} = m \cdot v$$

Após o intervalo de tempo infinitesimal Δt , a porção Δm terá sido ejetada do vagão e a qdm do sistema “*vagão + água + água ejetada*”, em relação à Terra (Figura 76), é dada por:

$$Q_{\text{sist depois}} = (m - \Delta m) \cdot (v + \Delta v) + \Delta m \cdot (v + \Delta v - u)$$

Pela conservação da qdm do sistema, temos:

$$m \cdot v = (m - \Delta m) \cdot (v + \Delta v) + \Delta m \cdot (v + \Delta v - u)$$

Desenvolvendo, encontramos:

$$m \cdot \Delta v = \Delta m \cdot u \quad (\text{eq85})$$

2.28 – O EMPUXO E A VELOCIDADE RELATIVA

O empuxo é a força que age num corpo ou sistema, quando ele sofre um acréscimo ou decréscimo de massa. Usando maior formalismo matemático, podemos generalizar dizendo que, em qualquer caso, o empuxo é dado pela expressão vetorial abaixo:

$$\vec{F}_e = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \vec{V}_{rel} \quad (\text{eq91})$$

onde:

- $\Delta m/\Delta t$ é a taxa de variação de massa do corpo ou sistema;
- \vec{V}_{rel} é a velocidade relativa da porção de massa Δm em relação a m , ou seja, a velocidade da porção de massa Δm no sistema de referência da massa m .

Na relação eq91, está subentendido a seguinte convenção de sinais algébricos:

$\frac{\Delta m}{\Delta t} > 0$ quando a massa do corpo ou sistema está aumentando;

$\frac{\Delta m}{\Delta t} < 0$ quando a massa do corpo ou sistema está diminuindo;

Assim, de acordo com a relação eq91, o empuxo \vec{F}_e aponta na mesma direção e sentido de \vec{V}_{rel} quando a massa do corpo ou sistema está aumentando; e na mesma direção e sentido contrário ao de \vec{V}_{rel} quando a massa do corpo ou sistema está diminuindo.

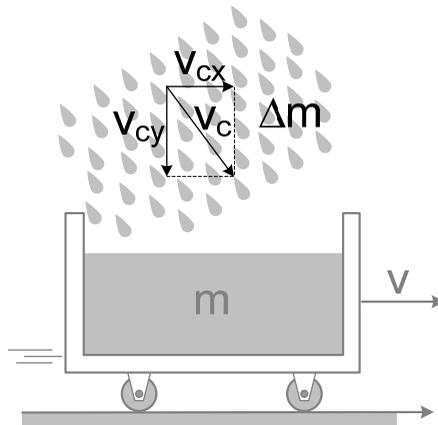


Figura 82 – chuva inclinada

Na maioria das situações, estamos interessados apenas numa das componentes do empuxo como, por exemplo, a componente dele na direção do movimento da massa m . Assim, para determinar apenas a componente do empuxo na direção de interesse, fazemos uso da componente da \vec{V}_{rel} na direção desejada.

Assim, para esclarecer, considere uma chuva que esteja caindo com velocidade V_c inclinada, conforme a Figura 82, sendo esta velocidade em relação à Terra.

Para determinarmos a componente do empuxo na direção do movimento do vagão (massa m), isto é, a sua componente horizontal F_{ex} , precisamos da velocidade relativa entre Δm (chuva) e m (vagão), na direção horizontal. Sendo V_{cx} a componente horizontal da velocidade da chuva e V a velocidade horizontal do vagão, ambos em relação à Terra, a velocidade relativa desejada tem módulo:

$$V_{rel} = |V - V_{cx}|$$

Assim, a componente horizontal do empuxo agindo no vagão tem módulo:

$$F_{ex} = \left| \frac{\Delta m}{\Delta t} \right| \cdot |V_{rel}| = \left| \frac{\Delta m}{\Delta t} \right| \cdot |V - V_{cx}| \quad (\text{eq92})$$

Se $V_{cx} > V$, é intuitivo o fato de que a chuva exercerá no vagão um empuxo a favor $F_{ex \rightarrow}$ do movimento dele, acelerando o vagão (Figura 83).

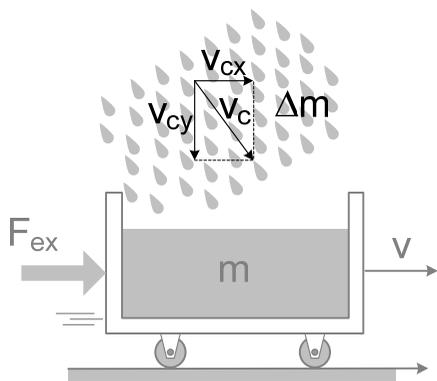


Figura 83 – caso $V_{cx} > V$

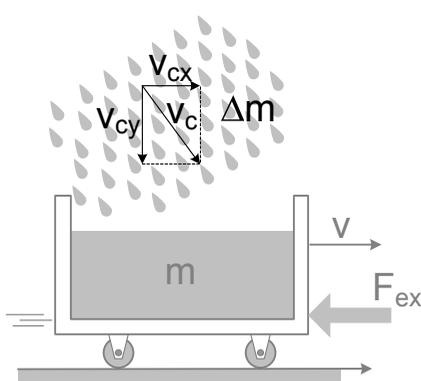


Figura 84 – caso $V_{cx} < V$

Caso contrário ($V > V_{cx}$), a componente horizontal do empuxo $F_{ex \leftarrow}$ agirá no sentido de retardar o vagão (Figura 84).

Finalmente, caso $V = V_{cx}$, a velocidade relativa entre m e Δm na horizontal será nula ($V_{rel} = V - V_{cx} = 0$) e, nesse caso, não haverá empuxo horizontal agindo sobre o vagão ($F_{ex} = 0$). Nesse caso, apesar de se mover sob a chuva, o vagão se moverá com velocidade constante (desprezando a ação de outras forças dissipativas).

Note que, embora não tenha sido mostrado nas figuras, existe também uma componente vertical do empuxo $F_{ey \downarrow}$ agindo sobre o vagão devido à velocidade relativa $V_{rel} = V_{cy \downarrow}$ entre a chuva (Δm) e o vagão (m) naquela direção, dada por:

$$F_{ey} = \left| \frac{\Delta m}{\Delta t} \right| \cdot V_{cy}$$

Quando um navio, por exemplo, ejeta água a uma taxa $\Delta m/\Delta t$ com velocidade V_o em relação ao próprio navio, numa direção que forma um ângulo α com a horizontal (Figura 85), este navio recebe, da água expelida, uma força empuxo F_e , na mesma direção e sentido contrário da velocidade relativa V_o (Figura 86), de intensidade dada pela relação eq91:

$$F_e = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot V_o$$

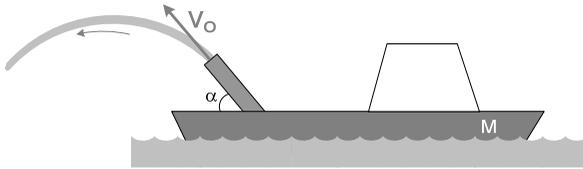


Figura 85

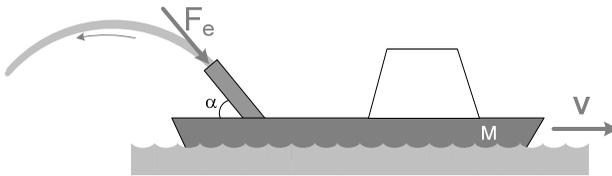


Figura 86

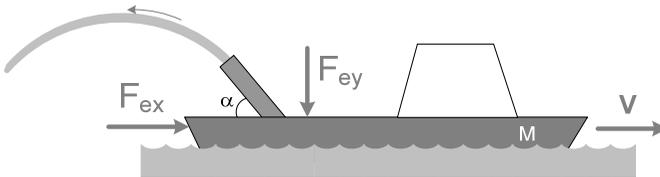


Figura 87

Entretanto, a componente do empuxo na direção \rightarrow do movimento do navio (Figura 87) vale apenas $F_{ex} = F_e \cdot \cos\alpha$, ao passo que a componente vertical do empuxo aponta para baixo \downarrow e tem módulo $F_{ey} = F_e \cdot \sin\alpha$.

Exemplo Resolvido 24: Uma corrente fina, flexível, cuja densidade linear é λ , está amontoada sobre uma mesa, como mostra a figura. Um operador segura uma das extremidades da corrente e a suspende verticalmente com velocidade constante v num local onde a gravidade local vale g . Para tanto, ele precisa exercer uma força F sobre essa extremidade.

- ache uma expressão para o módulo dessa força F em função da altura x da extremidade superior da corrente em relação ao nível da mesa;
- Se a corrente possui um comprimento total L , calcule o trabalho realizado por essa força F para levantar essa corrente com velocidade constante V , desde $x = 0$ até $x = L$, quando o último elo perde o contato com a mesa.

do comprimento x da corrente que já se encontra sobre o prato da balança mais essa força empuxo $\downarrow F_e$ (Figura 92c).

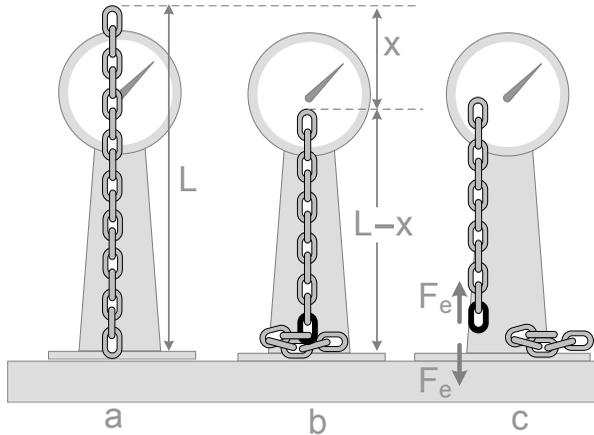


Figura 92

O elo preto da corrente que está entrando em contato com a balança (Figura 92b), após a corrente ter caído uma distância x sob ação da gravidade g , possui uma velocidade relativa ao prato da balança dada por $V_{rel} = \sqrt{2 \cdot g \cdot x}$. Assim, a força empuxo $F_e \downarrow$ exercida (Figura 92c), quando uma porção de massa Δm do trecho vertical da corrente é acrescentada à massa m que já se encontra sobre o prato da balança, é dada por:

$$F_e = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot V_{rel} = \frac{\lambda \cdot \Delta x}{\Delta t} \cdot v = \lambda \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot v = \lambda \cdot v \cdot v = \lambda \cdot v^2 = \lambda \cdot (\sqrt{2gx})^2, \text{ com } \lambda = M/L$$

$$F_e = \frac{M}{L} \cdot 2gx \Rightarrow F_e = \frac{2Mg}{L} \cdot x$$

Adicionalmente, o peso do comprimento x da corrente que já se encontra sobre o prato da balança (Figura 92c) vale:

$$P = m \cdot g = (\lambda \cdot x) \cdot g = \frac{M}{L} \cdot x \cdot g \Rightarrow P = \frac{M \cdot g}{L} \cdot x$$

Assim, a marcação da balança, após a corrente ter caído uma distância x , vale:

$$F_{total} = F_e + P = \frac{2Mg}{L} \cdot x + \frac{Mg}{L} \cdot x \Rightarrow F_{total} = \frac{3M \cdot g}{L} \cdot x \quad (\text{eq100})$$

Assim, de acordo com o resultado encontrado, a marcação da balança em cada instante é três vezes maior do que o peso da parte da corrente que já se encontra em repouso sobre o prato da balança ($F_{total} = 3P$).

Durante a queda da corrente, o parâmetro x aumenta no intervalo $0 \leq x \leq L$, e a marcação da balança (eq100) varia em função de x de acordo com o gráfico abaixo:

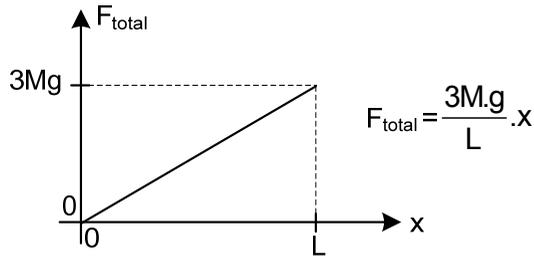


Figura 93

Exemplo Resolvido 27: A extremidade livre de uma corrente de comprimento total L e densidade linear ρ , é abandonada a partir do repouso em $x = 0$ sob ação da gravidade g . Determine:

- a) a força que a corrente exerce no teto, em função da distância x caída pela sua extremidade livre;
- b) a tração ao longo do trecho imóvel da corda em função da distância h ao teto e da distância x percorrida pela sua extremidade livre.

Solução:

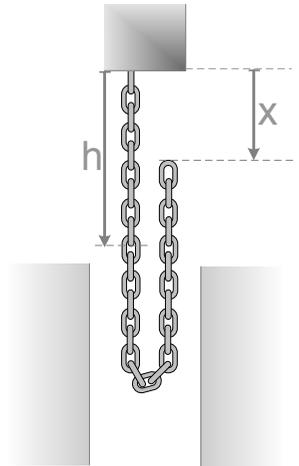
a) A Figura 94c mostra o diagrama das forças que agem no ramo esquerdo da corrente, durante a queda livre do seu ramo direito.

Agem, nessa parte imóvel da corrente, o seu peso $m.g \downarrow$, a força $F \uparrow$ que o teto exerce sobre o primeiro elo da corrente e o empuxo $F_e \downarrow$ que o elo terminal preto exerce sobre o último elo do ramo esquerdo, ao ser bruscamente levado ao repouso.

Como o ramo esquerdo da corrente permanece em repouso (equilíbrio estático), podemos escrever:

$$F_R = m.a \Rightarrow F - m.g - F_e = 0$$

$$\therefore F = m.g + F_e \quad (\text{eq101})$$

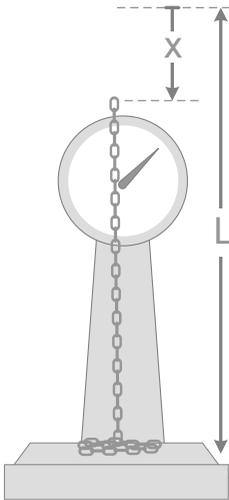


Para determinarmos o peso $m.g$ do ramo esquerdo, precisamos determinar os comprimentos y e z nas Figuras 94a e 94b.

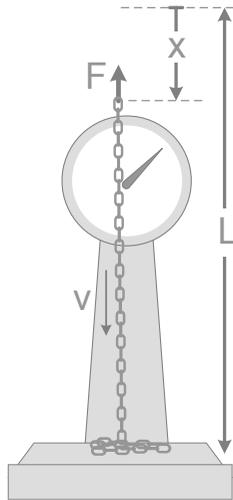
PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

Questão 97

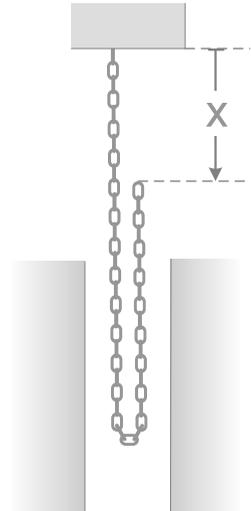
Uma corrente fina, flexível, de comprimento total L e densidade linear ρ é abandonada do repouso da posição vertical, com seu último elo inferior apenas tocando o prato de uma balança, determine a marcação da balança durante o processo de queda livre da corrente, em função da altura x caída por ela.



Questão 97



Questão 98



Questão 99

Questão 98

A extremidade superior de uma corda de comprimento total L e densidade linear ρ é abaixada com uma velocidade constante v pela força F . Determine:

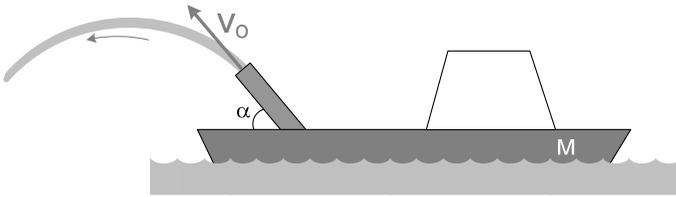
- a marcação da balança em função de ρ , da distância x descida pela corrente e da gravidade g ;
- a intensidade da força F em função de x , ρ e g .

Questão 99

A extremidade livre de uma corrente de comprimento total L e massa total M é abandonada do repouso da posição indicada na figura, em $x = 0$, sob ação da gravidade g . Determine a força que a corrente exerce no teto, em função da distância x caída pela sua extremidade livre

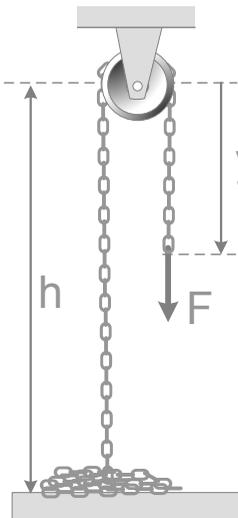
Questão 100

Um navio cargueiro encontra-se em alto mar e faz uso de um sistema de propulsão que coleta água pela base do seu casco ejetando 24 toneladas de água por minuto com velocidade 54 km/h em relação ao navio numa direção que forma um ângulo $\alpha = 60^\circ$ com a horizontal. O navio se move com velocidade constante sob ação de uma força de resistência ao seu movimento dada por $R = k \cdot v$, onde v é a velocidade do navio em relação ao mar e a constante vale $k = 400 \text{ kg/s}$. Determine a velocidade v do navio.

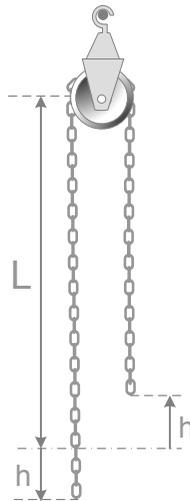
**Questão 101** –

A corrente da figura tem comprimento total L , densidade linear ρ e todos os atritos são desprezíveis. Desprezando o pequeno tamanho e a massa da polia, determine:

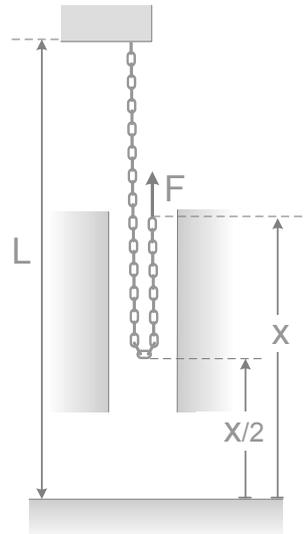
- A força F necessária para descer a corrente com uma velocidade constante v , em função de ρ , g , v , h e y ;
- A força que o solo exerce na pilha de corrente.



Questão 101



Questão 102

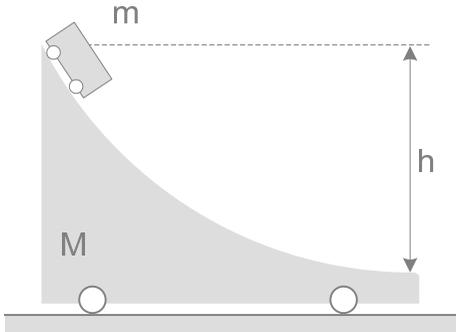


Questão 103

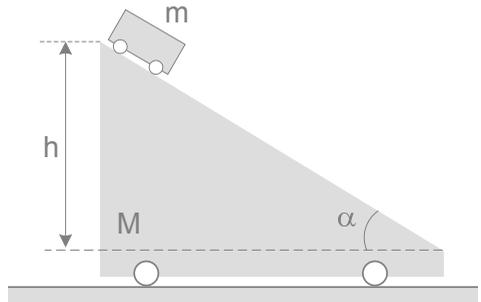
Questão 120

Um carro de massa M tem a forma de uma rampa curva cuja extremidade inferior é horizontal. Ele está em repouso sobre uma superfície horizontal lisa quando um carrinho de massa m é abandonado na rampa à altura vertical h acima da extremidade inferior da mesma. Sabendo que todos os atritos são desprezíveis e a gravidade local vale g , determine:

- a velocidade da rampa no instante em que o carrinho perde o contato com ela;
- a velocidade v do carrinho pequeno nesse instante.



questão 120



questão 121

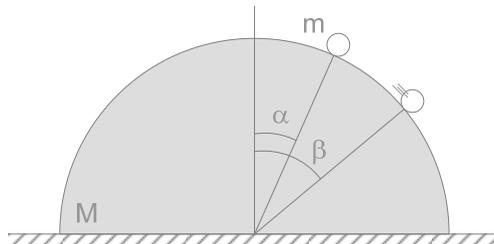
Questão 121 – 🎧

Uma rampa possui massa M e sua superfície inclinada faz um ângulo α com a horizontal. Ela está em repouso sobre uma superfície horizontal lisa quando um carrinho de massa m é abandonado sobre ela a uma altura vertical h acima da sua extremidade inferior. Sabendo que todos os atritos são desprezíveis e a gravidade local vale g , determine:

- a velocidade da rampa no instante em que o carrinho perde o contato com ela;
- a velocidade v do carrinho pequeno nesse instante.

Questão 122 (Seletiva para a IPHO) – 🎧

Um hemisfério de massa M e raio R encontra-se inicialmente em repouso, livre para se mover sobre uma superfície horizontal lisa. Uma bolinha de massa m e raio r é abandonada do repouso sobre o hemisfério, numa posição que forma ângulo α com a horizontal. Se a gravidade local vale g , o prof. Renato Brito pede que você determine:

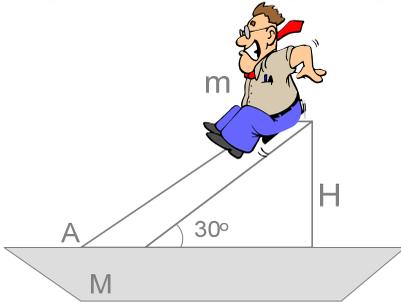


- a velocidade angular ω da bolinha numa posição que forma um ângulo β com a vertical, $\beta > \alpha$.

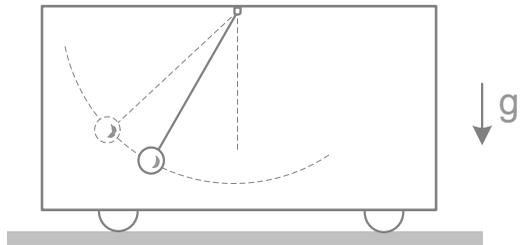
- b) a velocidade de recuo rampa hemisférica na situação do item a;
 c) a altura da bolinha em relação à superfície horizontal, quando ela perder o contato com a rampa hemisférica.

Questão 123 - (ITA 78)

Um garoto pode deslizar sobre um escorregador solidário com um barco, a partir de uma altura H . O plano do escorregador forma um ângulo 30° com o plano horizontal. A massa m do garoto é igual à metade da massa M do conjunto barco + escorregador. Supondo que o sistema inicialmente esteja em repouso e desprezando os atritos, determine a velocidade do barco no instante em que o garoto atingir o ponto A em função da gravidade g e da altura H .



questão 123



questão 124

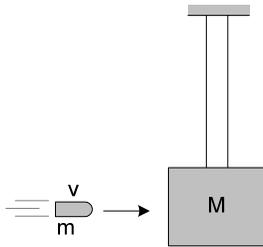
Questão 124 – 🎧

Um vagão de massa M está livre para se mover ao longo de um solo horizontal liso. Um pêndulo simples de massa m e comprimento inicial L foi pendurado ao teto do vagão como mostra a figura. Estando o sistema inicialmente em repouso, o pêndulo é abandonado a partir de uma posição em que o fio forma um ângulo α com a direção vertical. Qual será a velocidade do vagão quando o fio do pêndulo estiver fazendo um ângulo β com a vertical, com $\beta < \alpha$? A gravidade vale g .

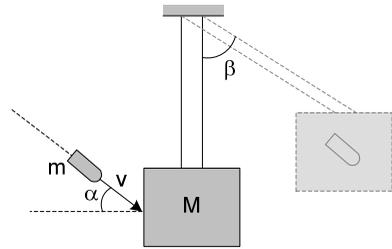
Questão 125 – 🎧

Um vagão de massa $2M$ está livre para se mover ao longo de um solo horizontal liso. Um pêndulo simples de mesma massa M e comprimento inicial L foi pendurado ao teto do vagão. Estando o sistema inicialmente em repouso, o pêndulo é abandonado a partir de uma posição em que o fio forma um ângulo 60° com a direção vertical. Se a gravidade local vale g . Determine:

- a) a velocidade máxima atingida pela bolinha durante as oscilações em relação ao vagão ;
 b) a velocidade máxima atingida pela bolinha durante as oscilações em relação à Terra;
 c) a amplitude das oscilações executadas pelo vagão.



questão 164



questões 165

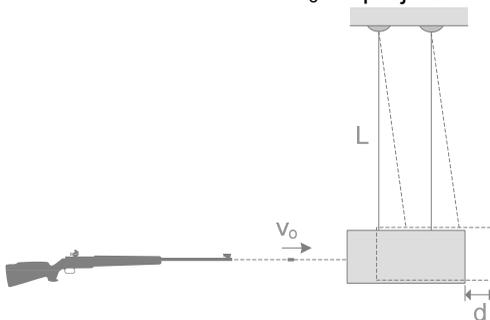
Questão 165 – 🎯

Um projétil de massa $m = 10 \text{ g}$ colide com uma caixa de madeira maciça de massa $M = 1,5 \text{ kg}$ suspensa ao teto através de um fio inextensível de comprimento $L = 55 \text{ cm}$, ficando alojado na caixa. O projétil incidiu na caixa com uma velocidade $v = 400 \text{ m/s}$ formando um ângulo $\alpha = 30^\circ$ com a horizontal. Determine (em graus) a máxima deflexão β que o pêndulo sofrerá em relação à vertical. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

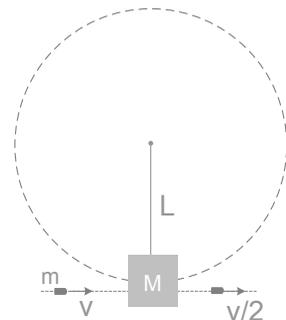
Questão 166 – 🎯

Para se medir a velocidade de saída de um projétil disparado de uma arma, utiliza-se um pêndulo balístico consistindo num bloco de $M = 30 \text{ kg}$ suspenso por dois fios de comprimento $L = 3,6 \text{ m}$ como mostra a figura. O pêndulo se afasta em uma distancia horizontal $d = 240 \text{ mm}$ quando atingido por uma bala de 40 g .

- a) Usando a aproximação do binômio de Newton $(1-x)^n \cong 1 - n \cdot x$, para $x \ll 1$, determine uma expressão aproximada para a altura atingida pela caixa após o impacto do projétil.
- b) Determine a velocidade v_0 do projétil.



questão 166



questões 167

Questão 167 – 🎯

Como se vê na figura, uma bala de massa m e velocidade v atravessa completamente um pêndulo de massa M . A bala emerge com a velocidade $v/2$. A massa do pêndulo está presa a um ponto fixo através de uma haste rígida de comprimento L e massa desprezível.

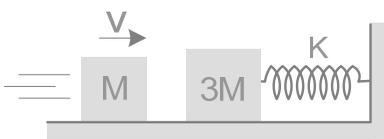
- a) Que valor mínimo da velocidade v fará o pêndulo descrever um círculo vertical completo?

b) Que valor mínimo da velocidade v fará o pêndulo descrever um círculo vertical completo, supondo que a haste rígida seja substituída por um fio de nylon flexível ?

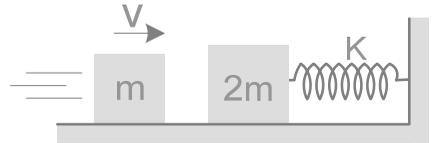
Questão 168

Um bloco de massa M , movendo-se com velocidade V , colide inelasticamente com um bloco de massa $3M$, inicialmente em repouso. O conjunto encontra uma mola de constante elástica K , causando uma deformação máxima $x = L$. Se o bloco de massa $3M$ fosse retirado do caminho, o bloco de massa M encontraria a mola diretamente, causando uma deformação máxima :

- a) L b) $2L$ c) $3L$ d) $4L$ e) $5L$



questão 168



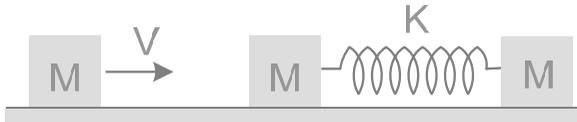
questão 169

Questão 169

Um corpo de massa m colide frontalmente com outro corpo de massa $2m$ inicialmente em repouso, conectada a uma mola de constante elástica K , conforme a figura. Se o coeficiente de restituição do choque vale e , determine a amplitude das oscilações executadas do sistema massa mola, após a colisão.

Questão 170 – 🌀

Duas caixas de mesma massa M estão inicialmente em repouso sobre uma superfície plana, horizontal e lisa, conectadas entre si através de uma mola ideal de constante elástica K e comprimento natural L_0 . Uma terceira caixa de mesma massa se aproxima do sistema com velocidade V e colide elasticamente como mostra a figura abaixo. Admita que a colisão seja unidimensional. Determine o comprimento máximo e mínimo atingido pela mola durante o movimento posterior do sistema.



Questão 171

Duas caixas de mesma massa $M = 800\text{g}$ estão inicialmente em repouso sobre uma superfície plana, horizontal e lisa, conectadas entre si através de uma mola ideal de constante elástica $K = 10\text{ N/m}$ e comprimento natural $L = 4\text{m}$. Uma terceira caixa de mesma massa $m = 800\text{ g}$ se aproxima do sistema com uma velocidade $V_0 = 5\text{ m/s}$ e colide elasticamente como mostra a figura. Admita que a colisão seja unidimensional. Determine o comprimento máximo e mínimo atingido pela mola durante o movimento posterior do sistema.

Questão 181

Dois blocos de massas m_1 e m_2 estão conectados entre si através de uma mola ideal de constante elástica k e repousam sobre uma superfície horizontal lisa. A mola encontra-se inicialmente relaxada. Se o bloco de massa m_2 recebe um breve impulso e adquire uma velocidade v_0 para a direita, determine:

- a velocidade do centro de massa do sistema;
- a máxima deformação que a mola vai atingir.

**Questão 182** – 🎧

Dois blocos de massas m_1 e m_2 estão conectados entre si através de uma mola ideal de constante elástica k e repousam sobre uma superfície horizontal lisa. A mola encontra-se inicialmente relaxada. Se cada bloco sofre a ação de uma força F constante no sentido de afastá-los, determine:

- a deformação máxima atingida pela mola;
- a distância percorrida por cada bloco até parar pela primeira vez.

Questão 183 – 🎧

Um bloco de massa m_1 está conectado a um bloco de massa m_2 através de uma mola ideal de constante elástica K inicialmente relaxada. Os blocos encontram-se sobre uma superfície horizontal lisa. Se uma força constante horizontal F passa a atuar sobre o bloco de massa m_2 , determine a máxima elongação atingida pela mola.

**Questão 184** – 🎧

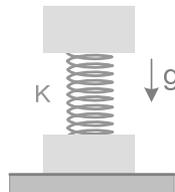
Dois blocos de massas m_1 e m_2 estão conectados entre si através de uma mola ideal de constante elástica k e repousam sobre uma superfície horizontal lisa. A mola encontra-se inicialmente relaxada. Se o bloco 1 é puxado por uma força constante F_1 e o bloco 2 é puxado por outra força constante F_2 , como mostra a figura, determine a deformação máxima atingida pela mola.

Questão 185 – 🌐

Duas lâminas, cujas massas são iguais a m , estão ligadas através de uma mola de coeficiente de rigidez k e comprimento natural L_0 . A lâmina superior foi comprimida para baixo o suficiente para que a deformação da mola fosse igual a x , sendo depois liberada. Determinar a que altura elevar-se-á depois disso o centro de massa do sistema. Desprezar a espessura das lâminas.

Dados:

$$x = 8 \text{ cm}, m = 1 \text{ kg}, k = 500 \text{ N/m}, g = 10 \text{ m/s}^2, L_0 = 10 \text{ cm}$$

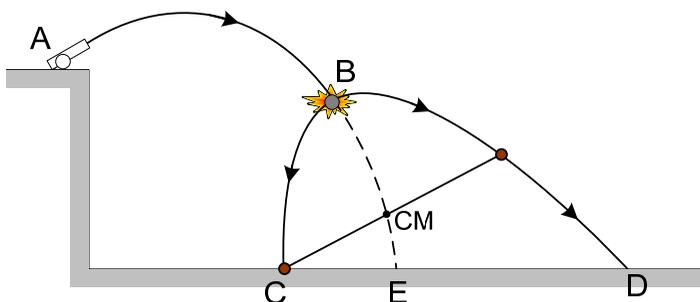
**Questão 186** – 🌐

Quando uma granada de massa $4M$ é lançada com velocidade V_0 formando um ângulo α com a horizontal, cai a uma distância $2D$ do ponto de lançamento, caso não haja detonação. Considere que a granada seja detonada no ponto mais alto da trajetória, explodindo em dois fragmentos de massas $3M$ e M . Se, após a explosão, o 1º fragmento cair (a partir do repouso) verticalmente a uma distância D do ponto de lançamento, o 2º fragmento cairá a que distância do ponto de lançamento?

- a) 7D b) 6D c) 5D d) 4D e) 3D

Questão 187 (ITA 78)

Uma bomba é atirada a partir da posição A. Na posição B ela explode em dois fragmentos iguais, que atingirão o solo nos pontos C e D, conforme a figura abaixo. Considere os choques dos fragmentos com o solo perfeitamente inelásticos. Pode-se afirmar que o C.M. (centro de massa) de sistema atingirá:



- a) a posição E do solo;
 b) o ponto médio entre C e D no solo;
 c) o ponto D, posição em que o fragmento de maior alcance atingirá o solo;
 d) um ponto indeterminado, visto que, quando o primeiro fragmento tocar o solo, o sistema estará sujeito a outra força externa;
 e) nenhuma das afirmações acima é correta.

Questão 225 (ITA 2000) –

Deixa-se cair continuamente areia de um reservatório a uma taxa de $3,0 \text{ kg/s}$ diretamente sobre uma esteira que se move na direção horizontal com velocidade v . Considere que a camada de areia depositada sobre a esteira se locomove com a mesma velocidade v , devido ao atrito. Desprezando a existência de quaisquer outros atritos, conclui-se que a potência em watts, requerida para manter a esteira movendo-se a $4,0 \text{ m/s}$, é:

- a) 0
- b) 3
- c) 12
- d) 24
- e) 48

Questão 226

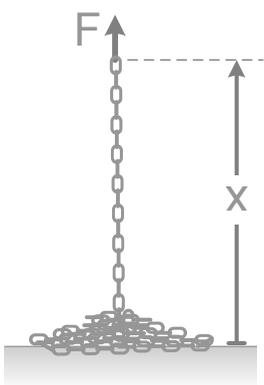
Uma corrente de massa igual a 750 g e $1,5 \text{ m}$ de comprimento está jogada no chão. Uma pessoa segura-a por uma das pontas e suspende-a verticalmente, com velocidade constante $v = 0,5 \text{ m/s}$.

- a) Determine a expressão $F(x)$ da força F exercida pela pessoa em função do comprimento suspenso x da corda, com $0 \leq x \leq 1,5 \text{ m}$. ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$)
- b) Qual é o trabalho realizado para levantar toda a corda até que toda ela perca o contato com o chão ?

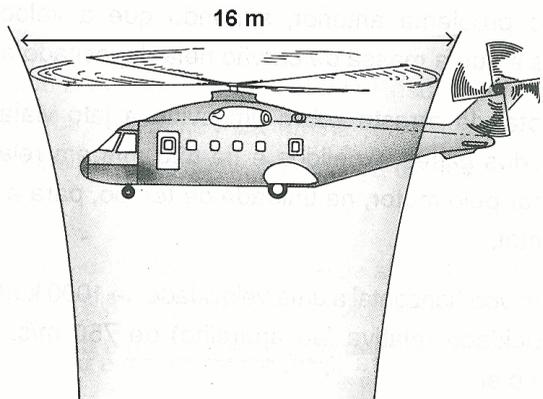
Questão 227 –

O helicóptero mostrado na figura tem massa 10 toneladas, quando vazio, e pode produzir uma corrente de ar para baixo com velocidade máxima $v = 25 \text{ m/s}$ e diâmetro 16 m . Supondo $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ a densidade do ar naquela altitude, a massa da carga extra que o helicóptero pode suportar, além do seu próprio peso, vale, aproximadamente:

- a) 1300 kg
- b) 5100 kg
- c) 2700 kg
- d) 3200 kg
- e) 1900 kg



questões 226



questão 227

Questão 228 (ITA 96)

Um avião a jato se encontra na cabeceira da pista com a sua turbina ligada e com os freios acionados, que o impedem de se movimentar. Quando o piloto aciona a máxima potência, o ar é expelido a uma razão de 100kg por segundo, a uma velocidade de 600m/s em relação ao avião. Nessas condições:

- a) a força transmitida pelo ar expelido ao avião é nula, pois um corpo não pode exercer força sobre si mesmo.
- b) as rodas do avião devem suportar uma força horizontal igual a 60kN.
- c) se a massa do avião é de 7×10^3 kg o coeficiente de atrito mínimo entre as rodas e o piso deve ser de 0,2.
- d) não é possível calcular a força sobre o avião com os dados fornecidos.
- e) nenhuma das afirmativas acima é verdadeira.

Questão 229 (SARAEVA) – 

No momento inicial, um foguete de massa M movia-se com velocidade V_0 livre da ação gravitacional. Ao final de cada segundo, o foguete expela uma porção de gás de massa m cuja velocidade em relação ao foguete, logo antes de ser expelida, vale u . Determine a velocidade adquirida pelo foguete decorridos n segundos.

3 Respostas e Soluções



1 – Trabalho e Energia

Questão 01 – Solução

$$T_N = 0$$

$$T_{FAT} = 0 + (-Fat \cdot b)$$

$$T_P = 0$$

$$T_F = F \cdot (a + b)$$

Pelo princípio do trabalho total, temos:

$$T_{total} = T_N + T_{FAT} + T_P + T_F = \Delta E_{cin} = E_{cin F} - E_{cin i}$$

$$-Fat \cdot b + F \cdot (a + b) = 0 - 0$$

$$Fat = F \cdot (a + b) / b = F \cdot (a/b + 1)$$

resposta: letra A

Questão 02 – Resposta: alternativa e

Questão 03 – Solução

Quando a bala penetra a parede, sofre a ação de uma força retardadora F (suposta constante) que realiza trabalho negativo, dissipando energia mecânica em calor. Durante a penetração da parede, o movimento é praticamente horizontal, o trabalho da força peso P é nulo. Pelo princípio do Trabalho total, temos:

$$T_{total} = E_{cin F} - E_{cin i} \Rightarrow -F \cdot D = 0 - m \cdot V^2 / 2 \Rightarrow F \cdot D = m \cdot V^2 / 2$$

Quando a bala é atirada com velocidade V_1 , ela penetra D_1 : $F \cdot D_1 = \frac{m \cdot V_1^2}{2}$

Quando a bala é atirada com velocidade V_2 , ela penetra D_2 : $F \cdot D_2 = \frac{m \cdot V_2^2}{2}$

Note que a força F é a mesma em casa episódio, conforme o enunciado. Dividindo uma equação pela outra, membro a membro, vem:

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{V_1^2}{V_2^2} \Rightarrow \frac{D_1}{D_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{10\text{cm}}{D_2} = \left(\frac{400}{600}\right)^2 \Rightarrow \frac{10\text{cm}}{D_2} = \frac{4}{9} \Rightarrow$$

$$D_2 = 22,5 \text{ cm}$$

Questão 04 – Resposta: alternativa c

Dica: – veja exemplo resolvido 2 – página 16

Questão 05

Solução: Apesar da tentação de dividir o problema em várias etapas, não o faça. Elegeremos o fundo do tanque como sendo a posição inicial da bola e, a última posição lá em cima como sendo a posição final, sem dar atenção a nenhuma outra posição intermediária, pela absoluta desnecessidade de fazê-lo.

$$T_{\text{total}} = T_E + T_P = E_{\text{cin}_F} - E_{\text{cin}_i}$$

$$(+E_1 \cdot H_1 + E_2 \cdot H_2) + (-P) \cdot (H_1 + H_2 + x) = 0 - 0$$

com $E_1 = d_1 \cdot v \cdot g$, $E_2 = d_2 \cdot v \cdot g$, $P = m \cdot g = d_3 \cdot v \cdot g$, onde v = volume da bolinha.

$$(+d_1 \cdot v \cdot g \cdot H_1 + d_2 \cdot v \cdot g \cdot H_2) - d_3 \cdot v \cdot g \cdot (H_1 + H_2 + x) = 0 - 0$$

$$d_1 \cdot H_1 + d_2 \cdot H_2 - d_3 \cdot (H_1 + H_2) = d_3 \cdot x$$

$$x = \frac{H_1 \cdot (d_1 - d_3) + H_2 \cdot (d_2 - d_3)}{d_3}$$

Questão 06

$$\text{Solução: } T_{\text{total}} = T_N + T_{\text{FAT}} + T_P = E_{\text{cin}_F} - E_{\text{cin}_i}$$

$$(0) + (-F_{at1} \cdot d_1 - F_{at2} \cdot d_2) + 0 = 0 - m \cdot (v_0)^2 / 2$$

$$-\mu_1 \cdot m \cdot g \cdot d_1 - \mu_2 \cdot m \cdot g \cdot d_2 = -m \cdot (v_0)^2 / 2$$

$$2\mu_1 \cdot g \cdot d_1 + 2\mu_2 \cdot g \cdot d_2 = (v_0)^2$$

$$2 \cdot (0,3) \cdot 10 \cdot 1 + 2 \cdot (0,25) \cdot 10 \cdot 2 = (v_0)^2 \Rightarrow v_0 = 4 \text{ m/s}$$

Questão 07

Solução:

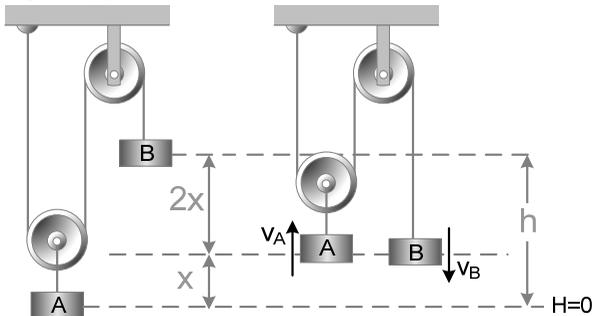
a) Apliquemos o trabalho total ao longo das três primeiras voltas, quando a velocidade cairá à metade do seu valor inicial:

$$T_{\text{total}} = T_N + T_{\text{FAT}} + T_P = E_{\text{cin}_F} - E_{\text{cin}_i}$$

Tudo isso são sutilezas que precisam ficar claras para o bom entendimento desse assunto. Em caso de dúvidas, o leitor deve reler as páginas 40 a 42.

Questão 22

Solução: Conforme aprendemos, no Capítulo 7 sobre Vínculos Geométricos, quando a caixa A sobe uma distância $x \uparrow$, a caixa B desce uma distância correspondente $2x \downarrow$. Em qualquer instante, as velocidades das caixas se relacionam por $v_B = 2v_A$.



Sendo o sistema conservativo (veja os Exemplo Resolvidos 10 e 11, página 59), podemos escrever:

$$(E_{\text{mec } A} + E_{\text{mec } B})_{\text{antes}} = (E_{\text{mec } A} + E_{\text{mec } B})_{\text{depois}}$$

$$(E_{\text{pot } A} + E_{\text{cin } A} + E_{\text{pot } B} + E_{\text{cin } B})_{\text{antes}} = (E_{\text{pot } A} + E_{\text{cin } A} + E_{\text{pot } B} + E_{\text{cin } B})_{\text{depois}}$$

$$(0 + 0 + m \cdot g \cdot 3x + 0) = \left(m \cdot g \cdot x + \frac{m \cdot v_A^2}{2} + m \cdot g \cdot x + \frac{m \cdot v_B^2}{2} \right), \text{ com } v_B = 2 \cdot v_A$$

$$m \cdot g \cdot x = \frac{m \cdot v_A^2}{2} + \frac{m \cdot (2v_A)^2}{2}, \text{ com } 3x = h, \quad x = h/3$$

$$m \cdot g \cdot \frac{h}{3} = \frac{5m \cdot v_A^2}{2} \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{15}}, \quad v_B = 2v_A \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{8 \cdot g \cdot h}{15}}$$

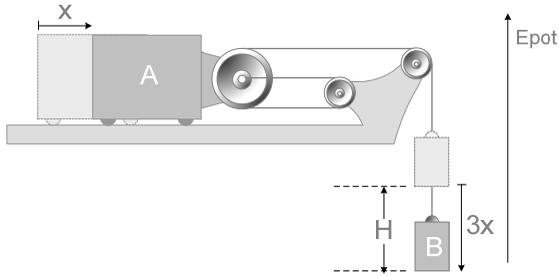
Questão 23

Solução: Conforme aprendemos, no Capítulo 7 sobre Vínculos Geométricos, quando a caixa A sofre um deslocamento $x \rightarrow$, a caixa B desce uma distância correspondente $3x \downarrow$. Em qualquer instante, as velocidades das caixas se relacionam por $v_B = 3v_A$. Sendo o sistema conservativo (veja os Exemplo Resolvidos 10 e 11, página 59), podemos escrever:

$$(E_{\text{mec } A} + E_{\text{mec } B})_{\text{antes}} = (E_{\text{mec } A} + E_{\text{mec } B})_{\text{depois}}$$

$$(E_{\text{pot } A} + E_{\text{cin } A} + E_{\text{pot } B} + E_{\text{cin } B})_{\text{antes}} = (E_{\text{pot } A} + E_{\text{cin } A} + E_{\text{pot } B} + E_{\text{cin } B})_{\text{depois}}$$

$$E_{\text{pot } A} + 0 + E_{\text{pot } B \text{ inicial}} + 0 = E_{\text{pot } A} + E_{\text{cin } A \text{ final}} + E_{\text{pot } B \text{ final}} + E_{\text{cin } B \text{ final}}$$



$$(E_{pot_{B \text{ inicial}}} - E_{pot_{B \text{ final}}}) = E_{cin_{A \text{ final}}} + E_{cin_{B \text{ final}}}$$

$$(+m \cdot g \cdot H) = \frac{(2m) \cdot v_A^2}{2} + \frac{m \cdot v_B^2}{2}, \text{ com } v_B = 3 \cdot v_A$$

$$+m \cdot g \cdot H = \frac{(2m) \cdot v_A^2}{2} + \frac{m \cdot (3 \cdot v_A)^2}{2} = \frac{11 \cdot m \cdot v_A^2}{2}$$

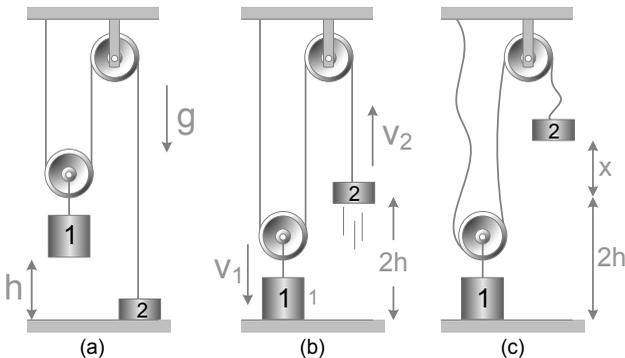
$$v_A = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H}{11}}$$

$$v_B = 3v_A \Rightarrow v_B = 3\sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H}{11}}$$

Note que, em qualquer situação, a energia potencial gravitacional é sempre uma função crescente com a altura h . A energia potencial de um corpo sempre aumenta quando ele se move em sentido oposto ao da gravidade (movimento forçado), e diminui quando o corpo se desloca a favor da gravidade. No problema em questão, a energia potencial da caixa B diminuiu durante seu movimento espontâneo a favor da gravidade.

Questão 24

Solução: Conforme aprendemos, no Capítulo 7 sobre Vínculos Geométricos, quando o corpo 1 sofre um deslocamento $h \downarrow$, o corpo 2 sobe uma distância correspondente $2h \uparrow$. Em qualquer instante, as velocidades das caixas se relacionam por $v_2 = 2 \cdot v_1$.



Sendo o sistema conservativo desde o instante inicial até o momento em que a caixa 1 toca o solo, (veja os Exemplo Resolvidos 10 e 11, página 59), apliquemos a conservação de energia desde a figura a até a figura b mostrados na figura acima:

$$(E_{mec\ 1} + E_{mec\ 2})_{antes} = (E_{mec\ 1} + E_{mec\ 2})_{depois}$$

$$(E_{pot\ 1} + E_{cin\ 1} + E_{pot\ 2} + E_{cin\ 2})_{antes} = (E_{pot\ 1} + E_{cin\ 1} + E_{pot\ 2} + E_{cin\ 2})_{depois}$$

$$m_1 \cdot g \cdot h + 0 + 0 + 0 = 0 + \frac{m_1 \cdot (v_1)^2}{2} + m_2 \cdot g \cdot (2h) + \frac{m_2 \cdot (v_2)^2}{2}$$

$$m_1 \cdot g \cdot h = \frac{m_1 \cdot (v_1)^2}{2} + m_2 \cdot g \cdot (2h) + \frac{m_2 \cdot (v_2)^2}{2} \quad \text{com } v_2 = 2 \cdot v_1 \quad \text{e} \quad m_1 = n \cdot m_2$$

$$(n \cdot m_2) \cdot g \cdot h = \frac{n \cdot m_2 \cdot \left(\frac{v_2}{2}\right)^2}{2} + m_2 \cdot g \cdot (2h) + \frac{m_2 \cdot (v_2)^2}{2}$$

$$n \cdot g \cdot h = \frac{n \cdot (v_2)^2}{8} + 2 \cdot g \cdot h + \frac{(v_2)^2}{2} \Rightarrow (v_2)^2 = \frac{8 \cdot (n-2) \cdot g \cdot h}{(n+4)}$$

A partir da figura **b** até a figura **c**, a tração no fio se torna nula (o fio afrouxa) e o corpo 2 prossegue em MRU sob ação exclusiva da gravidade ($a = g$), subindo uma distância adicional x até parar. A distância x pode ser prontamente determinada pela equação de Torricelli:

$$(v_{Final})^2 = (v_2)^2 - 2 \cdot g \cdot x$$

$$(0)^2 = (v_2)^2 - 2 \cdot g \cdot x \Rightarrow x = \frac{(v_2)^2}{2g} = \frac{1}{2g} \cdot \frac{8 \cdot (n-2) \cdot g \cdot h}{(n+4)} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot (n-2) \cdot h}{(n+4)}$$

Assim, a altura final atingida pela caixa 2, na figura **c**, é dada por:

$$H = 2h + x = 2h + \frac{4 \cdot (n-2) \cdot h}{(n+4)} \Rightarrow H = \frac{6 \cdot n \cdot h}{(n+4)}$$

Questão 25

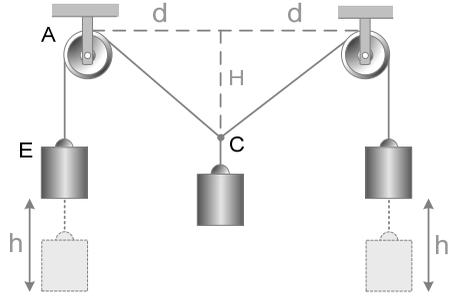
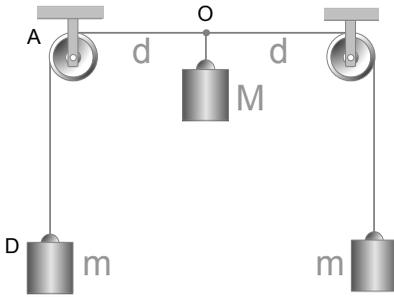
Solução: O sistema, abandonado a partir do repouso, evoluirá até uma posição mais baixa (mostrada na figura abaixo) que não é de equilíbrio, mas apenas de repouso momentâneo. A seguir, determinaremos a distância vertical H máxima descida pelo corpo central.

Como o comprimento do fio permanece constante durante todo esse episódio, podemos escrever:

$$OA + AD = CA + AE$$

$$AD - AE = CA - AO \Rightarrow h = \sqrt{d^2 + H^2} - d$$

Durante esse episódio, o sistema é conservativo. As forças de tração internas produzidas pelos fios inextensíveis agem meramente como vínculos geométricos, transmitindo as interações entre os corpos, de forma que seus trabalhos internos acabam se anulando, a exemplo do ocorrido nos Exemplo Resolvidos 10 e 11 na página 59. Assim, o trabalho líquido realizado sobre o sistema é devido às forças gravitacionais, o que nos garante o caráter conservativo do sistema.



Assim, podemos escrever:

$$(E_{mec\ 1} + E_{mec\ 2} + E_{mec\ 3})_{antes} = (E_{mec\ 1} + E_{mec\ 2} + E_{mec\ 2})_{depois}$$

Como não há energia cinética no sistema nem na posição inicial de repouso, nem na posição final de repouso, podemos escrever:

$$E_{pot_{1i}} + E_{pot_{2i}} + E_{pot_{3i}} = E_{pot_{1F}} + E_{pot_{2F}} + E_{pot_{3F}}$$

$$(E_{pot_{1i}} - E_{pot_{1F}}) + (E_{pot_{2i}} - E_{pot_{2F}}) + (E_{pot_{3i}} - E_{pot_{3F}}) = 0$$

$$(-m.g.h) + (+M.g.H) + (-m.g.h) = 0$$

$$M.g.H = 2.m.g.h \quad \Rightarrow \quad M.g.H = 2m.g.(\sqrt{d^2 + H^2} - d)$$

Elevando ao quadrado e reduzindo os termos semelhantes, chegamos à resposta desejada:

$$H = \left(\frac{4M.m}{4.m^2 - M^2} \right).d$$

O leitor deve notar que o cálculo feito acima equivale à aplicação do Princípio do Trabalho total. Veja:

$$T_{Total} = \Sigma T_{Todas} = E_{cin\ F} - E_{cin\ i}$$

$$T_{peso1} + T_{peso2} + T_{peso3} + T_{trações\ internas} = E_{cin\ F} - E_{cin\ i}$$

$$(E_{pot_{1i}} - E_{pot_{1F}}) + (E_{pot_{2i}} - E_{pot_{2F}}) + (E_{pot_{3i}} - E_{pot_{3F}}) + 0 = 0 - 0$$

$$(E_{pot_{1i}} - E_{pot_{1F}}) + (E_{pot_{2i}} - E_{pot_{2F}}) + (E_{pot_{3i}} - E_{pot_{3F}}) = 0$$

$$(-m.g.h) + (+M.g.H) + (-m.g.h) = 0$$

Como vemos, o cálculo acima, feito com base no Princípio do Trabalho Total, nos levará à mesma resposta encontrada anteriormente. Entretanto, o leitor precisa estar convicto de que **o trabalho líquido realizado por todas as forças internas que agem meramente como vínculo geométrico, tais como trações**

$$F_{R \text{ ctp}} = F_{in} - F_{out} = (T_B - 0) = \frac{m \cdot (v_B)^2}{R}, \text{ com } R = L \text{ e } v_B = \sqrt{3 \cdot g \cdot L}$$

$$T_B = \frac{m \cdot (3 \cdot g \cdot L)}{L} \Rightarrow T_B = 3 \cdot mg$$

Questão 62 – Resposta: alternativa a

Solução: Partindo do repouso da posição A ($v_A = 0$), qual a velocidade do pêndulo após percorrer um arco genérico α e passar pelo ponto B da Figura 1 ?

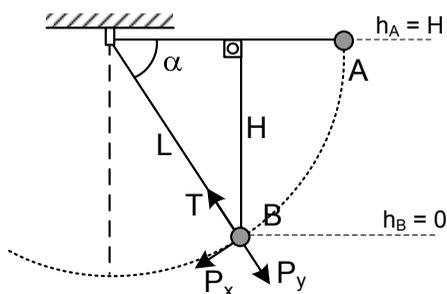


Figura s17

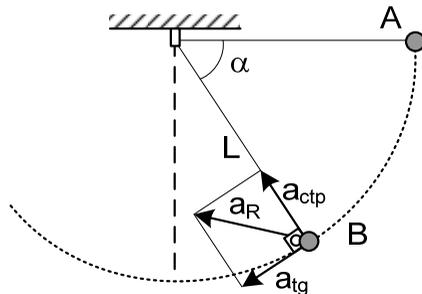


Figura s18

A conservação da energia mecânica entre as posições A e B, na Figura 1, nos permite escrever:

$$(E_{pot} + E_{cin})_A = (E_{pot} + E_{cin})_B$$

$$m \cdot g \cdot h_A + m \cdot (v_A)^2 / 2 = m \cdot g \cdot h_B + m \cdot (v_B)^2 / 2$$

Sendo $h_A = H = L \cdot \text{sen} \alpha$, $v_A = 0$ e $h_B = 0$, temos:

$$m \cdot g \cdot h_A + m \cdot (v_A)^2 / 2 = m \cdot g \cdot h_B + m \cdot (v_B)^2 / 2$$

$$m \cdot g \cdot (L \cdot \text{sen} \alpha) + 0 = 0 + m \cdot (v_B)^2 / 2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot L \cdot \text{sen} \alpha}$$

Assim, a componente centrípeta a_{ctp} da aceleração resultante da esfera do pêndulo, após percorrer o ângulo genérico α , vale:

$$a_{ctp} = v_B^2 / R, \text{ com } R = L \text{ e } v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot L \cdot \text{sen} \alpha}$$

$$a_{ctp} = 2 \cdot g \cdot L \cdot \text{sen} \alpha / L \Rightarrow a_{ctp} = 2 \cdot g \cdot \text{sen} \alpha$$

A componente tangencial a_{tg} da aceleração resultante pode ser determinada pela 2ª lei de Newton na direção tangencial (Figura 1):

$$F_{tg} = m \cdot a_{tg} \Rightarrow P_x = m \cdot a_{tg} \Rightarrow m \cdot g \cdot \text{cos} \alpha = m \cdot a_{tg} \Rightarrow a_{tg} = g \cdot \text{cos} \alpha$$

Assim, a aceleração resultante da bolinha do pêndulo, após percorrer um ângulo genérico α a partir do repouso horizontal, é dada por (Figura 2):

$$a_R = \sqrt{a_{\text{ctp}}^2 + a_{\text{tg}}^2} = \sqrt{(2g \cdot \text{sen} \alpha)^2 + (g \cdot \text{cos} \alpha)^2} = \sqrt{3 \cdot g^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha + g^2 \cdot (\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha)}$$

$$a_R = \sqrt{3 \cdot g^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha + g^2 \cdot (1)} = \sqrt{g^2 (3 \cdot \text{sen}^2 \alpha + 1)} \quad \therefore \quad a_R = g \sqrt{3 \cdot \text{sen}^2 \alpha + 1}$$

A expressão acima fornece a aceleração resultante do pêndulo, em função de α . Note que, partindo do repouso na posição horizontal ($v = 0$, para $\alpha = 0^\circ$), a aceleração resultante máxima ocorre para $\alpha = 90^\circ$:

$$a_{R_{\text{max}}} = g \sqrt{3 \cdot \text{sen}^2 \alpha + 1} = g \sqrt{3 \cdot \text{sen}^2 (90^\circ) + 1} = g \sqrt{3 \cdot (1)^2 + 1} = 2 \cdot g$$

Questão 63

Solução:

a) Partindo do repouso da posição A ($v_A = 0$), qual a velocidade do pêndulo após descer uma altura genérica H e passar pelo ponto B da Figura 1? A conservação da energia mecânica entre as posições A e B (veja Figura), nos permite escrever :

$$(E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}})_A = (E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}})_B$$

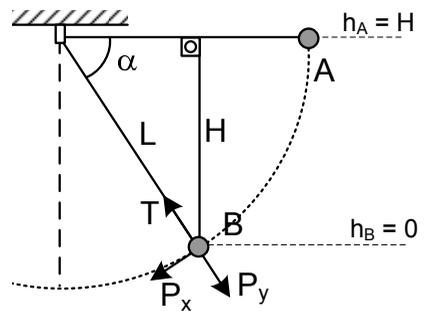
$$m \cdot g \cdot h_A + m \cdot (v_A)^2 / 2 = m \cdot g \cdot h_B + m \cdot (v_B)^2 / 2$$

Sendo $h_A = H$, $v_A = 0$ e $h_B = 0$, temos:

$$m \cdot g \cdot h_A + m \cdot (v_A)^2 / 2 = m \cdot g \cdot h_B + m \cdot (v_B)^2 / 2$$

$$m \cdot g \cdot (H) + 0 = 0 + m \cdot (v_B)^2 / 2 \Rightarrow$$

$$v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$



Assim, a tração no fio, ao passar descer a altura genérica H, é dada pela 2ª lei de Newton na direção radial (centrípeta, veja Figura):

$$F_{R_{\text{ctp}}} = m \cdot a_{\text{ctp}} \Rightarrow (F_{\text{in}} - F_{\text{out}}) = T - P_y = m \cdot (v_B)^2 / R, \quad \text{com } R = L$$

$$T - P_y = m \cdot (v_B)^2 / L \quad \text{com } T_B = m \cdot g, \quad P_y = P \cdot \text{sen} \alpha, \quad v_B = \sqrt{2gH}$$

$$T - m \cdot g \text{ sen} \alpha = m \cdot (2 \cdot g \cdot H) / L \quad \text{com } \text{sen} \alpha = H / L$$

$$T - m \cdot g \cdot (H/L) = m \cdot (2 \cdot g \cdot H) / L \Rightarrow T = \left(\frac{3mg}{L} \right) \cdot H^1$$

b) A expressão acima mostra uma dependência linear entre a tração T no fio e a altura H descida, no caso particular em que o pêndulo parte do repouso da posição horizontal.

Na expressão obtida acima, o termo entre parênteses é a razão entre a massa m_B da caixa sobre a rampa e a massa total $m_B + m_C$ do sistema. Sendo a massa da corrente diretamente proporcional ao seu comprimento, esse termo equivale à razão entre o comprimento da corrente (x) sobre a rampa (Figura s26) e o seu comprimento total (L).

Dessa forma, a aceleração dessa corrente da questão 108 (Figura s26) é dada por:

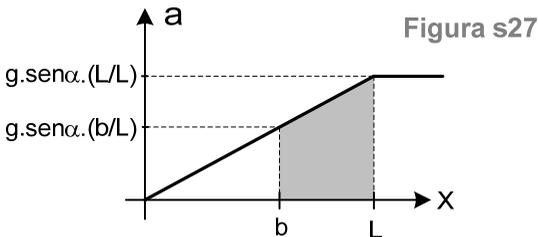
$$a = g \cdot \text{sen} \alpha \cdot \left(\frac{x}{L} \right) \quad (\text{eq3})$$

sendo, portanto, uma função linear de x .

A relação eq3 é válida apenas no intervalo $0 \leq x \leq L$. Para $x > L$, a corda já se encontrará integralmente sobre a rampa inclinada e sua aceleração se manterá constante valendo $a = g \cdot \text{sen} \alpha$. Dessa forma, uma expressão mais completa para descrever matematicamente a aceleração da corda é:

$$a = \begin{cases} g \cdot \text{sen} \alpha \cdot \left(\frac{x}{L} \right) & , \text{ para } 0 \leq x \leq L \\ g \cdot \text{sen} \alpha & , \text{ para } x > L \end{cases} \quad (\text{eq4})$$

Durante o episódio dessa questão 108 página 115, o comprimento x da parte pendente sobre a rampa varia desde o comprimento inicial $x_i = b$ até o comprimento final $x_f = L$. Assim, o gráfico da função dada por eq3 será:

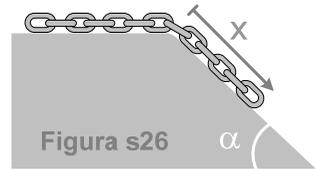
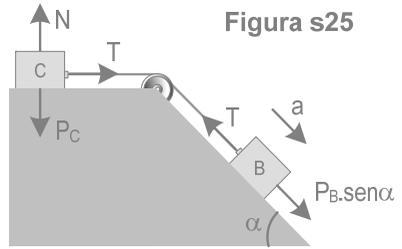


A área sombreada sob o gráfico (Figura s27) pode ser calculada pela diferença entre as áreas dos dois triângulos:

$$\text{área sombreada} = \frac{b \times g \cdot \text{sen} \alpha \cdot \frac{b}{L}}{2} - \frac{L \times g \cdot \text{sen} \alpha \cdot \frac{L}{L}}{2} = \frac{(L^2 - b^2) \cdot g \cdot \text{sen} \alpha}{2L}$$

Usando a equação de Torricelli generalizada (eq2), vem:

$$V^2 = V_0^2 + 2 \cdot (\text{área})$$

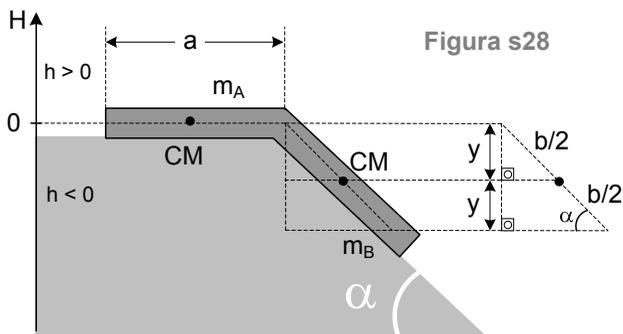


$$V^2 = 0 + 2 \times \frac{(L^2 - b^2).g.\text{sen}\alpha}{2L} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{(L^2 - b^2).g.\text{sen}\alpha}{L}} \quad (\text{eq5})$$

A expressão acima fornece a velocidade da corda no instante em que o comprimento pendente x sobre a rampa (Figura s26) atingir o seu comprimento total L .

Questão 108 – 2ª solução – Pela conservação da energia mecânica.

Esse problema também pode ser resolvido pela conservação da energia mecânica do sistema, dividindo a corrente em duas partes **a** e **b** e considerando o centro de massa de cada uma dessas partes como na Figura s28.



A parte sobre o plano horizontal tem massa m_A e comprimento a , enquanto a parte sobre a rampa inclinada tem massa m_B e comprimento b . Logicamente que a massa total da corda (corrente) vale $m = m_A + m_B$, assim como seu comprimento total vale $L = a + b$. A proporcionalidade entre a massa da corda e seu comprimento nos permite escrever:

$$\frac{m_A}{a} = \frac{m_B}{b} = \frac{m_A + m_B}{a + b} = \frac{m}{L} \Rightarrow m_B = m \cdot \frac{b}{L} \quad (\text{eq6})$$

Na situação inicial (Figura s28), toda a corda encontra-se em repouso $E_{\text{cin}_A} = E_{\text{cin}_B} = 0$. Adotando-se o nível de referência para $E_{\text{pot. gravitacional}}$ no plano horizontal (Figura s28), a parte **a** da corda (corrente) tem $E_{\text{pot. gravitacional}}$ nula ($m.g.H_A = 0$) ao passo que o trecho **b** da corda tem seu centro de massa CM a uma altura $y = (b/2).\text{sen}\alpha$ abaixo do nível de referência, portanto, o trecho **b** terá energia potencial gravitacional $E_{\text{pot}_B} = -m_B.g.y = -m_B.g.(b/2).\text{sen}\alpha$.

Assim, a energia mecânica da corda, na situação inicial, vale:

$$E_{\text{mec}_i} = (E_{\text{pot}_A} + E_{\text{cin}_A} + E_{\text{pot}_B} + E_{\text{cin}_B})_i$$

$$E_{\text{mec}_i} = 0 + 0 - m_B.g.(b/2).\text{sen}\alpha + 0 \quad (\text{eq7})$$

A seguir a corda escorregará gradativamente até que, na situação final, a extremidade esquerda da corda terá atingido a rampa, como mostra a Figura s29. Nesse instante, toda a corda se move com a mesma velocidade v ao longo

da rampa e seu centro de massa encontra-se a uma altura $y = (L/2) \cdot \text{sen} \alpha$ abaixo do nível de referência, portanto, a Epot. gravitacional da corda vale:

$$E_{\text{pot}} = -m \cdot g \cdot y = -m \cdot g \cdot (L/2) \cdot \text{sen} \alpha.$$

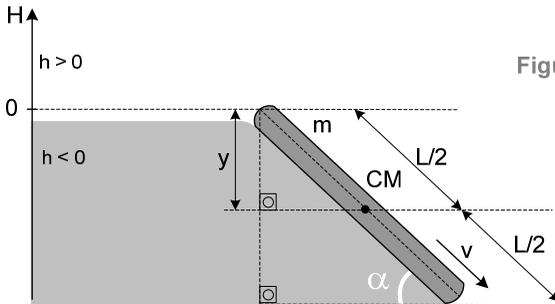


Figura s29

A energia mecânica da corda na situação final, portanto, vale:

$$E_{\text{mec}_F} = (E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}})_F = -m \cdot g \cdot (L/2) \cdot \text{sen} \alpha + \frac{m \cdot v^2}{2} \quad (\text{eq8})$$

Pela conservação da Energia mecânica da corda, entre as posições inicial e final, usando eq6, eq7 e eq8, temos:

$$-m_B \cdot g \cdot \frac{b}{2} \text{sen} \alpha = -m \cdot g \cdot \frac{L}{2} \text{sen} \alpha + \frac{m \cdot v^2}{2}, \text{ usando eq6, vem:}$$

$$-\left(m \cdot \frac{b}{L}\right) g \cdot \frac{b}{2} \text{sen} \alpha = -m \cdot g \cdot \frac{L}{2} \text{sen} \alpha + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$$v^2 = \frac{L^2}{L} \cdot g \cdot \text{sen} \alpha - \frac{b^2}{L} \cdot g \cdot \text{sen} \alpha \Rightarrow v = \sqrt{\frac{(L^2 - b^2) \cdot g \cdot \text{sen} \alpha}{L}}$$

que é o mesmo resultado encontrado em eq5 anteriormente. Dependendo do tipo de problema a ser resolvido, a 1ª solução apresentada fazendo uso da equação de Torricelli generalizada pode ser mais concisa do que a solução usando conservação de energia mecânica.

Questão 109) $v = \sqrt{\frac{g \cdot (L^2 - b^2)}{L}}$

Questão 110) B

Questão 111) $v = 2\sqrt{\frac{gL}{3}}$

Dica: A corda tem aceleração inicial $a_i = g/3$ e aceleração final $a_f = g$. Nesse meio tempo, a corda sofre um deslocamento $\Delta x = L$. Faça o gráfico linear da aceleração escalar em função do deslocamento escalar x e use a equação de Torricelli generalizada. Se preferir, use conservação de energia mecânica, atentando para o centro de massa CM dos trechos da corda.

Questão 120**Respostas:**

a) $\sqrt{\frac{2m^2gH}{M.(M+m)}}$,

b) $\sqrt{\frac{2MgH}{M+m}}$

(Dica: Veja a resolução da questão 119)

Questão 121 – 1ª Resolução equacionando no Referencial Inercial da Terra.**Solução:**

a) Quando o sistema é abandonado do repouso, o carrinho se move descendo a rampa que, por sua vez, se move para trás \leftarrow em relação à Terra. Para estudar esse movimento relativo, considere os seguintes parâmetros:

\vec{V}_T = velocidade do carrinho em relação à Terra;

\vec{V} = velocidade do carrinho em relação à rampa;

\vec{U} = velocidade da rampa em relação à Terra.

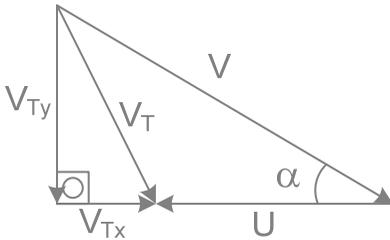


Figura 1

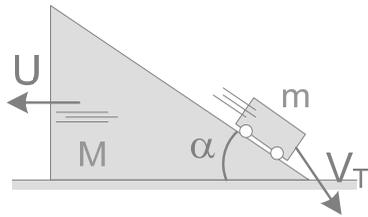


Figura 2

Pelo Princípio da Relatividade de Galileu, podemos escrever:

$$\vec{V}_{\text{carrinho}/\text{Terra}} = \vec{V}_{\text{carrinho}/\text{rampa}} + \vec{V}_{\text{rampa}/\text{Terra}}$$

$$\vec{V}_T = \vec{V} + \vec{U} \quad (\text{eq1})$$

O *diagrama de velocidades* ilustrado na Figura 1 traz tanto a relação vetorial eq1, quanto as componentes V_{TX} e V_{TY} da velocidade V_T do carrinho em relação à Terra.

Como o sistema encontra-se isolado de forças externas na horizontal (o chão é liso), a qdm do sistema se conserva nessa direção, no referencial inercial da Terra:

$$\begin{aligned} \Sigma Qx_{\text{antes}} &= \Sigma Qx_{\text{depois}} \\ 0 + 0 &= M.(-U) + m.(+V_{TX}) \\ \mathbf{M.U} &= \mathbf{m.V_{TX}} \quad (\text{eq2}) \end{aligned}$$

Note que, ao escrever a expressão acima da conservação da qdm do sistema na horizontal, em relação à Terra, tomamos apenas as componentes horizontais das velocidades do carrinho e da rampa em relação à Terra.

A conservação da energia mecânica do sistema, em relação à Terra, nos permite escrever:

$$m.g.H = \frac{M.U^2}{2} + \frac{m.V_T^2}{2} \quad (\text{eq3})$$

Antes de prosseguir, o prof. Renato Brito chama a atenção do leitor para alguns detalhes importantes:

- *A relação eq3 trata da conservação da Emec do sistema no referencial inercial da Terra, portanto todas as velocidades que figuram em eq3 são velocidades em relação à Terra. Confira agora mesmo esse fato;*
- *Note que, ao contrário da qdm, a energia mecânica não é uma grandeza vetorial, portanto não tem orientação nem é somada pela regra do paralelogramo;*
- *Assim, não faz sentido, por exemplo, escrever expressão da conservação da Emec do sistema apenas na direção horizontal ou apenas na direção vertical, visto que energia nem sequer tem direção;*
- *Esse procedimento de analisar o problema numa direção, ignorando a outra direção perpendicular, é possível com a qdm do sistema por se tratar de uma grandeza vetorial;*
- *Sempre que formos calcular a energia cinética de cada corpo, não podemos tomar apenas essa ou aquela componente da velocidade, mas sim, a velocidade resultante do corpo no referencial considerado.*

Da geometria da Figura 1, podemos escrever:

$$V_{TX} = V.\cos\alpha - U \quad (\text{eq4})$$

Nossa meta inicial, nesse problema, é determinar a velocidade **U** final da rampa em função das massas **M** e **m**, da altura **h** e da gravidade **g** local. Observando eq3, percebemos que devemos previamente obter uma expressão para V_T em função de **U** a fim de substituí-la em eq3 e determinar **U**.

Substituindo eq4 em eq2, vem:

$$M.U = m.V_{TX} = m.(V.\cos\alpha - U) = m.V.\cos\alpha - m.U$$

$$V = \frac{(M+m).U}{m.\cos\alpha} \quad (\text{eq5})$$

A fim de determinar uma expressão para V_T em função de **U**, faremos uso da lei dos cossenos no triângulo da Figura 1:

$$V_T^2 = V^2 + U^2 - 2.V.U.\cos\alpha \quad (\text{eq6})$$

Substituindo eq5 em eq6, vem:

$$V_T^2 = \frac{(M+m)^2 \cdot U^2}{m^2 \cdot (\cos \alpha)^2} + U^2 - \frac{2 \cdot U^2 \cdot (M+m)}{m \cdot \cos \alpha} \cdot \cos \alpha$$

Desenvolvendo e reduzindo os termos semelhantes, encontramos:

$$V_T^2 = \frac{U^2 \cdot (m^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha + 2M \cdot m \cdot \text{sen}^2 \alpha + M^2)}{m^2 \cdot (\cos \alpha)^2} \quad (\text{eq7})$$

Finalmente encontramos uma expressão para V_T em função de U ☺. Agora, substituindo essa relação encontrada (eq7) na conservação da Emec do sistema (eq3), vem:

$$m \cdot g \cdot H = \frac{M \cdot U^2}{2} + \frac{m}{2} \cdot \frac{U^2 \cdot (m^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha + 2M \cdot m \cdot \text{sen}^2 \alpha + M^2)}{m^2 \cdot (\cos \alpha)^2}$$

Desenvolvendo e reduzindo os termos semelhantes, vem:

$$U = \sqrt{\frac{2m^2 g \cdot H \cdot \cos^2 \alpha}{(M+m) \cdot (M+m \cdot \text{sen}^2 \alpha)}} \quad (\text{eq8})$$

A expressão acima fornece a velocidade final da rampa em relação à Terra, no instante em que o carrinho perde o contato com a rampa. A relação eq8 é a resposta do item **a** dessa questão.

b) Para determinar a velocidade final V_T (Figura 2) do carrinho em relação à Terra, ao perder o contato com a rampa, substituímos eq8 em eq7 :

$$V_T^2 = \frac{U^2 \cdot (m^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha + 2M \cdot m \cdot \text{sen}^2 \alpha + M^2)}{m^2 \cdot (\cos \alpha)^2}$$

$$V_T^2 = \frac{2m^2 g \cdot H \cdot \cos^2 \alpha}{(M+m) \cdot (M+m \cdot \text{sen}^2 \alpha)} \cdot \frac{(m^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha + 2M \cdot m \cdot \text{sen}^2 \alpha + M^2)}{m^2 \cdot (\cos \alpha)^2}$$

$$V_T = \sqrt{\frac{2g \cdot H \cdot (m^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha + 2M \cdot m \cdot \text{sen}^2 \alpha + M^2)}{(M+m) \cdot (M+m \cdot \text{sen}^2 \alpha)}} \quad (\text{eq9})$$

Veja, a seguir, a 2ª resolução para esse problema, desta vez no referencial não-inercial da própria rampa.

Questão 121 – 2ª Resolução – No Referencial Não-Inercial da rampa.**Solução:**

a) No referencial não-inercial da rampa, a própria rampa encontra-se em repouso permanente, não apresentando nem velocidade nem aceleração (obviamente, ninguém possui velocidade em relação a si mesmorsrsr ☺). Nesse referencial, apenas o carrinho se move, descendo a rampa.

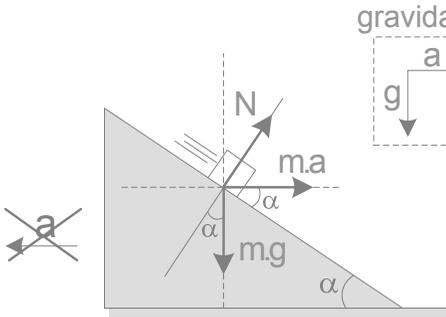


Figura 3

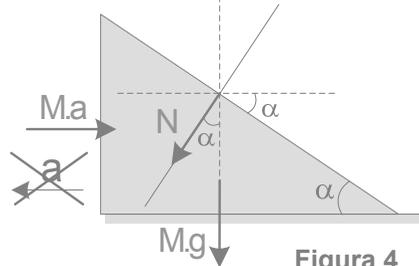


Figura 4

Ao mudar do referencial inercial da Terra para o referencial não-inercial da rampa, segundo o Princípio da Equivalência (largamente estudado nos capítulos 4 e 6 do volume 1 dessa obra), a aceleração $\leftarrow a$ que a rampa possui no referencial da Terra é substituída por um campo gravitacional de mesmo módulo $a \rightarrow$ no referencial da rampa (Figura 3). Esse campo gravitacional $a \rightarrow$, por sua vez, produz, na rampa e no carrinho, forças gravitacionais respectivamente iguais a $m.a \rightarrow$ e $M.a \rightarrow$, conforme o diagrama de forças nas Figuras 3 e 4.

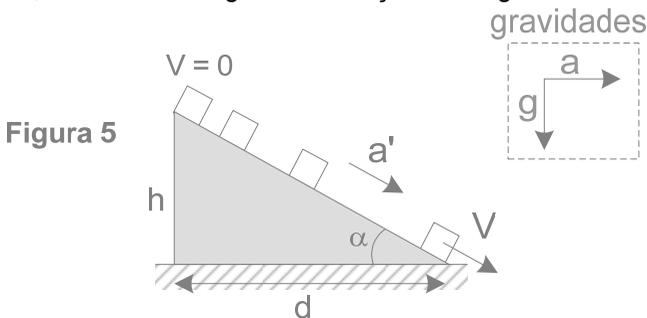


Figura 5

Durante o seu movimento de descida ao longo da rampa, o carrinho encontra-se em equilíbrio na direção normal (Figura 3), o que nos permite escrever:

$$N = m.g.\cos\alpha - m.a.\sen\alpha \quad (\text{eq10})$$

O equilíbrio das forças que agem na rampa, na direção horizontal (Figura 4) nos permite escrever:

Questão 140

Solução: Para estudar o movimento desse sistema, considere os seguintes parâmetros:

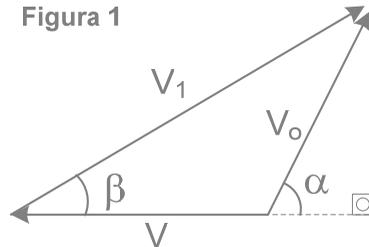
V_1 = velocidade do projétil em relação ao canhão;

V_o = velocidade do projétil em relação à Terra;

V = velocidade de recuo do canhão em relação à Terra;

β = inclinação do cano do canhão em relação a horizontal;

α = inclinação da velocidade V_2 em relação a horizontal.



Pelo Princípio da Relatividade de Galileu, podemos escrever:

$$\vec{V}_{\text{projétil}/\text{Terra}} = \vec{V}_{\text{projétil}/\text{canhão}} + \vec{V}_{\text{canhão}/\text{Terra}}$$

$$\vec{V}_o = \vec{V}_1 + \vec{V} \quad (\text{eq1})$$

A Figura 1 mostra o diagrama vetorial que representa a relação eq1, bem como os ângulos envolvidos no problema.

a) Como o sistema canhão + projétil encontra-se isolado de forças externas na horizontal (o chão é liso), a conservação da qdm do sistema nessa direção, no referencial inercial da Terra, permite escrever :

$$\Sigma Qx_{\text{antes}} = \Sigma Qx_{\text{depois}}$$

$$0 + 0 = M \cdot (-V) + m \cdot (+V_o \cdot \cos \alpha)$$

$$M \cdot V = m \cdot V_o \cdot \cos \alpha \quad (\text{eq2})$$

$$V = \frac{m}{M} \cdot V_o \cdot \cos \alpha$$

Note que, ao escrever a expressão da conservação da qdm do sistema na horizontal, em relação à Terra, tomamos apenas as componentes horizontais das velocidades do projétil e do canhão em relação à Terra. Confira agora mesmo esse fato.

b) Da geometria da Figura 1, podemos escrever:

$$V_1 \cdot \cos\beta = V + V_o \cdot \cos\alpha \quad (\text{eq3})$$

$$V_1 \cdot \sin\beta = V_o \cdot \sin\alpha \quad (\text{eq4})$$

Extraindo $V_o \cdot \cos\alpha$ de eq2 e substituindo em eq3, vem:

$$V_1 \cdot \cos\beta = V + V_o \cdot \cos\alpha$$

$$V_1 \cdot \cos\beta = V + \frac{M \cdot V}{m} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{M \cdot V_1 \cdot \cos\beta}{(M + m)}$$

c) Isolando V_1 em eq4, $V_o \cdot \cos\alpha$ de eq2 e substituindo em eq3, vem:

$$V_1 \cdot \cos\beta = V + V_o \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{V_o \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} \cdot \cos\beta = V + \frac{M \cdot V}{m}$$

$$\sin\alpha = \frac{(M + m) \cdot V \cdot \sin\beta}{m \cdot V_o \cdot \cos\beta} \quad (\text{eq5})$$

Isolando $\cos\alpha$ em eq2, vem:

$$\cos\alpha = \frac{M \cdot V}{m \cdot V_o} \quad (\text{eq6})$$

Da relação fundamental da trigonometria, a partir de eq5 e eq6, vem:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{(M + m) \cdot V \cdot \sin\beta}{m \cdot V_o \cdot \cos\beta} \right]^2 + \left[\frac{M \cdot V}{m \cdot V_o} \right]^2 = 1$$

$$(M + m)^2 \cdot V^2 \cdot \sin^2\beta + M^2 \cdot V^2 \cdot \cos^2\beta = m^2 \cdot V_o^2 \cdot \cos^2\beta$$

$$V = \frac{m}{\sqrt{(M + m)^2 \cdot \sin^2\beta + M^2 \cdot \cos^2\beta}} \cdot V_o \cdot \cos\beta$$

d) De eq3, vem: $(V_1 \cdot \cos\beta)^2 = (V + V_o \cdot \cos\alpha)^2 \quad (\text{eq7})$

De eq4, vem: $(V_1 \cdot \sin\beta)^2 = (V_o \cdot \sin\alpha)^2 \quad (\text{eq8})$

Somando eq7 e eq8, membro a membro, vem:

$$(V_1 \cdot \sin\beta)^2 + (V_1 \cdot \cos\beta)^2 = (V + V_o \cdot \cos\alpha)^2 + (V_o \cdot \sin\alpha)^2$$

$$V_1^2 = (V + V_o \cdot \cos\alpha)^2 + (V_o \cdot \sin\alpha)^2 \quad (\text{eq9})$$

Extraindo V_o de eq2, $V_o \cdot \cos\alpha$ de eq2 e substituindo em eq9, vem:

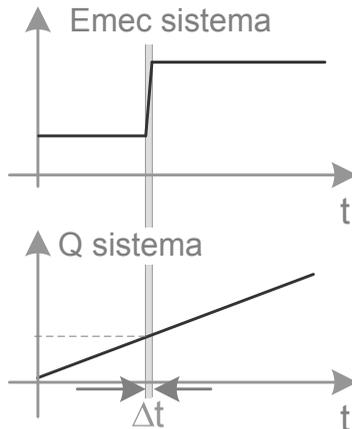
$$V_1^2 = \left(\frac{m.V}{m} + \frac{M.V}{m} \right)^2 + \frac{M^2.V^2}{m^2.\cos^2\alpha}.\text{sen}^2\alpha$$

$$V = \frac{m}{\sqrt{M^2.\text{sen}^2\alpha + (M+m)^2.\cos^2\alpha}}.V_1.\cos\alpha$$

Questão 141

Solução: Durante a queda da granada, a única força externa agindo nela é a força gravitacional (conservativa). Assim, durante a queda, a energia mecânica do sistema granada permanece constante, exceto durante o breve intervalo de tempo em que ocorre a explosão.

A energia química liberada na explosão impulsiona os fragmentos da granada em todas as direções, incrementando a energia cinética do sistema granada. Podemos dizer, portanto, que ocorre conversão de energia química (energia interna) da granada em energia mecânica apenas durante o breve intervalo de tempo que dura a explosão, justificando o aumento da energia mecânica dos sistema mostrado no gráfico abaixo. Logo após esse evento, a energia mecânica do sistema volta a permanecer constante.



Agora, o que dizer da qdm Q_{sist} do sistema durante a queda da granada? Ora, devido à ação da força peso (que acelera o sistema para baixo), a qdm do sistema aumenta linearmente com o tempo durante a queda da granada.

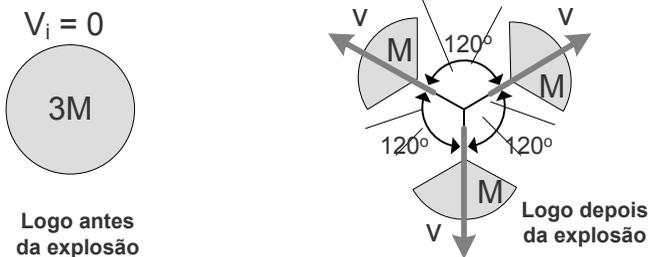
A explosão trata-se apenas de um evento *interno* ao sistema granada e, portanto, não provoca nenhuma perturbação no comportamento linear da qdm Q_{sist} do sistema em função do tempo, como mostrado no gráfico.

O crescimento linear da qdm Q_{sist} do sistema, em função do tempo, se deve apenas à ação da gravidade (força externa) sobre o sistema granada (e seus

fragmentos), não tendo nenhuma relação com o evento explosão (forças internas).

Se observarmos a Emec do sistema logo antes da explosão e logo depois da explosão, veremos que ela bruscamente aumenta de valor devido à energia química liberada na explosão. A explosão produz incremento de Emec no sistema, mas não produz variação na qdm Q_{sist} do sistema. Assim, se observarmos a qdm Q_{sist} do sistema logo antes e logo depois da explosão ($\Delta t \cong 0$), ela é exatamente a mesma.

Pode parecer estranho, à primeira vista, que um evento possa produzir grande variação da Emec de um sistema sem alterar a sua qdm. Considere, entretanto, um exemplo em que uma granada de massa $3M$ estava inicialmente em repouso ($V_i = 0$) e, de repente, exploda simetricamente, como na figura abaixo:



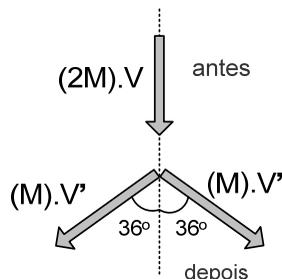
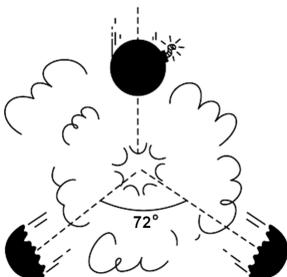
A energia cinética (mecânica) do sistema, logo antes da explosão era nula. Entretanto, logo após a explosão, a Emec (cinética) do sistema salta, bruscamente, para o valor:

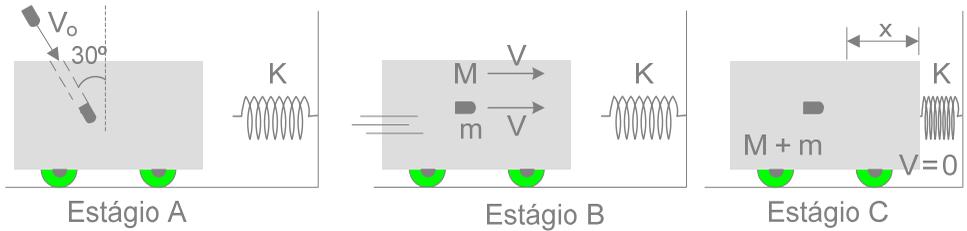
$$E_{mec \text{ FINAL}} = \frac{M.v^2}{2} + \frac{M.v^2}{2} + \frac{M.v^2}{2} = \frac{3M.v^2}{2}$$

Já a qdm Q_{sist} do sistema é nula logo antes da explosão e permanece ainda nula após a explosão, visto que qdm é uma grandeza vetorial.

$$\vec{Q}_{sist \text{ logo antes}} = \vec{Q}_{sist \text{ logo depois}} = \vec{0}$$

O leitor não pode perder de vista o caráter vetorial da qdm, pois ele tem um papel central na compreensão desse assunto.

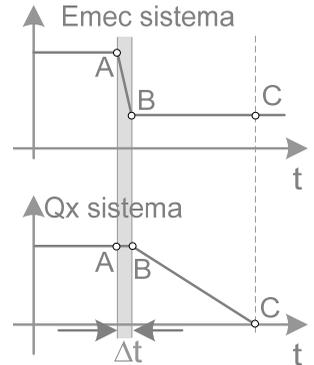




Assim, de A para B, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\Sigma Qx_{\text{estágio A}} &= \Sigma Qx_{\text{estágio B}} \\ 0 + m.Vx &= m.V + M.V \\ 0 + m.V_0.\text{sen}\alpha &= (m + M).V \\ 5.(200\text{g}).(0,5) &= (500\text{g}).V \\ \mathbf{V = 1\text{ m/s}}\end{aligned}$$

De B para C, ocorre a fase de compressão da mola. O trabalho realizado pela força elástica (conservativa) converte toda a E_{cin} do sistema em potencial elástica, de forma que a E_{mec} dos sistema se conserva de B para C.



$$(E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}})_{\text{estágio B}} = (E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}})_{\text{estágio C}}$$

$$\begin{aligned}0 + \frac{(M+m).V^2}{2} &= \frac{K.x^2}{2} + 0 \\ \frac{(0,5\text{ kg}).1^2}{2} &= \frac{5000.x^2}{2} \Rightarrow x = 1.10^{-2}\text{ m} \Rightarrow \mathbf{x = 1\text{ cm}}\end{aligned}$$

Em geral, em todas as questões em que ocorrem impactos verticais entre corpos, estando pelo menos um deles apoiado sobre o solo, a q_{dm} no sistema não se conserva na direção vertical. O chão (a Terra) amortece e absorve a q_{dm} vertical do sistema na vertical, portanto, não devemos nos preocupar com a q_{dm} vertical dos sistemas nesse tipo de problema.

Adicionalmente, parte da E_{mec} do sistema é convertida em calor durante a evolução do sistema de A para B, quando o projétil sofre ação da força de resistência à sua penetração ao bloco de madeira. Por esse motivo, o sistema tem um decréscimo de E_{mec} durante essa fase, que pode ser interpretada como uma colisão inelástica.

Questão 153

Solução: Durante o impacto do projétil com o bloco (estágio AB), ocorre uma mera transferência interna de parte da qdm do projétil para o bloco, sem alterar a qdm do sistema projétil + bloco. Assim, da conservação da qdm durante essa colisão, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\Sigma Q_{\text{estágio A}} &= \Sigma Q_{\text{estágio B}} \\ m \cdot v_0 &= (M + m) \cdot v \\ (0,02 \text{ kg}) \cdot (750 \text{ m/s}) &= (10,002 \text{ kg}) \cdot v \\ (0,02 \text{ kg}) \cdot (750 \text{ m/s}) &\cong (10 \text{ kg}) \cdot v \Rightarrow v \cong 1,5 \text{ m/s}\end{aligned}$$

No estágio BC, o bloco (com o projétil alojado nele) comprime a mola até atingir o repouso momentâneo. Durante esse estágio, o trabalho realizado pela força elástica converte parte da E_{cin} do sistema em energia potencial elástica, enquanto o trabalho realizado pela força de atrito converte parte da E_{cin} do sistema em calor.

Aplicando o Princípio do Trabalho realizado pelas forças não-conservativas no estágio BC, vem:

$$\begin{aligned}\Sigma T_{\text{FNC}} &= E_{\text{mec}}_{\text{estágio C}} - E_{\text{mec}}_{\text{estágio B}} \\ T_{\text{N}} + T_{\text{Fat}} &= (E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}})_{\text{estágio C}} - (E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}})_{\text{estágio B}} \\ 0 + (-\text{Fat} \cdot d) &= \left(\frac{k \cdot x^2}{2} + 0 \right) - \left(0 + \frac{M \cdot V^2}{2} \right).\end{aligned}$$

Sendo $\text{Fat} = \mu \cdot N = \mu \cdot M \cdot g$ e $d = x$, vem:

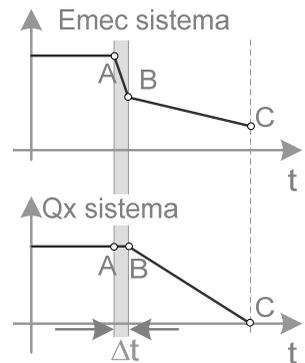
$$0 + (-\mu \cdot M \cdot g \cdot x) = \left(\frac{k \cdot x^2}{2} + 0 \right) - \left(0 + \frac{M \cdot V^2}{2} \right).$$

$$-\mu \cdot M \cdot g \cdot x = \frac{k \cdot x^2}{2} - \frac{M \cdot V^2}{2}$$

$$-(0,2) \cdot (10) \cdot (10) \cdot x = \frac{10 \cdot x^2}{2} - \frac{10 \cdot (1,5)^2}{2}$$

$$5x^2 + 20x - 11,25 = 0$$

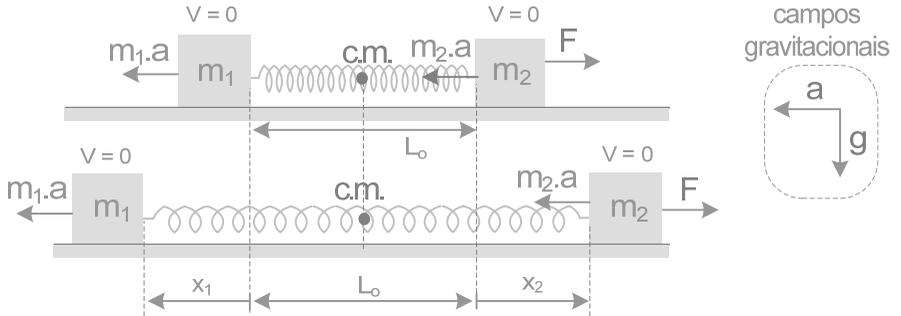
$$x = \frac{-20 + \sqrt{400 + 225}}{10} \Rightarrow x = 0,5 \text{ m}$$



Assim, quando o bloco atinge o repouso momentâneo no estágio C, a mola apresenta uma deformação $x = 0,5 \text{ m}$. Nos cálculos acima, a massa do bloco, juntamente com o projétil, foi aproximado de $10,02 \text{ kg}$ para 10 kg , dentro do bom senso esperado para um futuro engenheiro do IME.

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_{R \text{ externas}}}{\text{massa total}} = \frac{\mathbf{F}}{m_1 + m_2} \quad (\text{eq1})$$

Assim, conforme aprendemos nos capítulos 4 e 5 do volume 1 dessa obra, ao efetuarmos a mudança do referencial da Terra (inercial) para um referencial não-inercial (acelerado), essa aceleração $\mathbf{a} \rightarrow$ é sentida, no referencial do centro de massa, como um campo gravitacional extra de valor $\mathbf{a} \leftarrow$ que produz forças gravitacionais (fictícias) $\mathbf{F}_1 = m_1 \cdot \mathbf{a} \leftarrow$ e $\mathbf{F}_2 = m_2 \cdot \mathbf{a} \leftarrow$ nas massas m_1 e m_2 do sistema, respectivamente, como mostra a figura a seguir.



No referencial do centro de massa, portanto, os blocos 1 e 2 partem do repouso com a mola relaxada, sob ação das forças externas F , F_1 e F_2 e percorrem distâncias respectivamente iguais a x_1 e x_2 , em sentidos opostos, se afastando do centro de massa do sistema, até que a mola atinja uma deformação máxima $x_1 + x_2$ e os blocos entrem novamente o repouso momentâneo naquele referencial.

Logicamente, como estamos no referencial do próprio centro de massa, ele permanece imóvel durante todo esse episódio.

Assim, aplicando o Princípio do Trabalho das Forças Não-Conservativas, vem:

$$\begin{aligned} \Sigma T_{\text{FNC}} &= E_{\text{mec Final}} - E_{\text{mec Inicial}} \\ T_F + T_{F_1} + T_{F_2} &= (E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}})_{\text{Final}} - (E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}})_{\text{inicial}} \\ +F \cdot x_2 + F_1 \cdot x_1 - F_2 \cdot x_2 &= \frac{k \cdot (x_1 + x_2)^2}{2} - 0 \\ +F \cdot x_2 + m_1 \cdot a \cdot x_1 - m_2 \cdot a \cdot x_2 &= \frac{k \cdot (x_1 + x_2)^2}{2} \\ +F \cdot x_2 + \frac{m_1 \cdot F \cdot x_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 \cdot F \cdot x_2}{m_1 + m_2} &= \frac{k \cdot (x_1 + x_2)^2}{2} \\ \frac{F \cdot m_1 \cdot (x_1 + x_2)}{m_1 + m_2} &= \frac{k \cdot (x_1 + x_2)^2}{2} \end{aligned}$$

Da equação acima, temos duas opções:

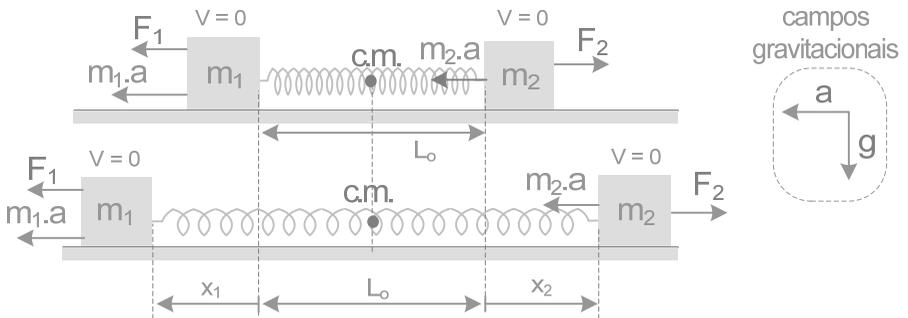
$$x_1 + x_2 = 0 \quad (\text{n\~{a}o conv\~{e}m}) \quad \text{ou} \quad x_1 + x_2 = \frac{2.F.m_1}{(m_1 + m_2).k} \quad \text{☺}$$

Questão 184

Solução: Esse problema é mais facilmente solucionável no referencial do centro de massa do sistema. De acordo com a relação eq29, página 176, a aceleração a do centro de massa desse sistema é dada por :

$$\mathbf{a} = \frac{F_{R \text{ externas}}}{\text{massa total}} = \frac{F_2 - F_1}{m_1 + m_2} \quad (\text{eq1})$$

Assim, conforme aprendemos nos capítulos 4 e 5 do volume 1 dessa obra, ao efetuarmos a mudança do referencial da Terra (inercial) para o referencial não-inercial (acelerado) do centro de massa, essa aceleração $a \rightarrow$ é sentida, no referencial do centro de massa, como um campo gravitacional extra de valor $\mathbf{a} \leftarrow$ que produz forças gravitacionais (fictícias) $f_1 = m_1 \cdot \mathbf{a} \leftarrow$ e $f_2 = m_2 \cdot \mathbf{a} \leftarrow$ nas massas m_1 e m_2 do sistema, respectivamente, como mostra a figura a seguir.



No referencial do centro de massa, portanto, os blocos 1 e 2 partem do repouso com a mola relaxada, sob ação das forças externas F_1 , F_2 , f_1 e f_2 e percorrem distâncias respectivamente iguais a x_1 e x_2 , em sentidos opostos, se afastando do centro de massa do sistema, até que a mola atinja uma deformação máxima $x_1 + x_2$ e os blocos atinjam novamente o repouso momentâneo.

Logicamente, como estamos no referencial do centro de massa, ele próprio permanece imóvel durante todo esse episódio.

Assim, aplicando o Princípio do Trabalho das Forças Não-Conservativas, vem:

$$\begin{aligned} \Sigma T_{FNC} &= E_{mec \text{ Final}} - E_{mec \text{ Inicial}} \\ T_{F_1} + T_{f_1} + T_{F_2} + T_{f_2} &= (E_{pot} + E_{cin})_{\text{Final}} - (E_{pot} + E_{cin})_{\text{inicial}} \\ (F_1 + m_1 \cdot a) \cdot x_1 + (F_2 - m_2 \cdot a) \cdot x_2 &= \frac{k \cdot (x_1 + x_2)^2}{2} - 0 \end{aligned}$$

Esse livro aborda de forma completa e detalhada toda a teoria de Trabalho e Energia, Impulso e Quantidade de Movimento incluindo o estudo minucioso dos mais variados tipos de colisões uni e bidimensionais. Além de analisar todas as propriedades da Dinâmica do centro de massa de sistemas de partículas, o autor explica de forma bastante clara e elegante os sistemas com massa variável, envolvendo problemas com correntes e força propulsora, usando apenas de Matemática de Ensino Médio.

Além da teoria completa, esse livro fortemente indicado para a preparação IME/ITA contém mais de 350 problemas resolvidos pelo autor, permitindo ao estudante autodidata obter um grande salto de conhecimento num relativamente curto espaço de tempo, ao assimilar todo o conteúdo desta obra.

Essa coleção de Mecânica para vestibulandos IME/ITA, é composta de:

Volume I - Cinemática e Leis de Newton

Volume II - Trabalho e Energia, Impulso e Quantidade de Movimento, Dinâmica do Centro de Massa e Sistemas com Massa Variável.

Volume III - Estática, Hidrostática, Gravação e MHS.



www.vestseller.com.br