Curso de Cálculo – ITA

ORGANIZAÇÃO EDUCACIONAL FARIAS BRITO

Sumário

Cálculo

Cálculo

1ª parte – limite

I – Limites e limites laterais

Definição: lim f(x) = L se para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então, $|f(x) - L| < \varepsilon$, $x \in I - \{a\}$, em que I é um intervalo aberto, tal que $a \in I$.

Teorema: $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$
$= \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

O teorema acima faz referência aos limites laterais.
A definição desses conceitos será vista em sala de aula.

Propriedades dos limites

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ se $f(x) = c$, $\forall x \in R$

2. $\lim\limits_{x\to a} \left[c \cdot f(x)\right] = c \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $c \in R$

3. $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) + g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$, se não houver indeterminação.

4. $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$, se não houver indeterminação e se os limites existirem. Dessa propriedade, segue que $\lim\limits_{x\to a} (f(x))^n = (\lim\limits_{x\to a} f(x))^n$, $n \in N^*$

5. Se $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, então, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

Teorema do confronto

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ e $f(x) < g(x) < h(x)$, $\forall x \in I - \{a\}$
(I é um intervalo / $a \in L$), então, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.

EXERCÍCIOS

01. Calcule os limites a seguir.

A) $\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}}$

B) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^4 + x - 2}{x^2 - 1}$

C) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2}$

D) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{2x} - \sqrt{x^2 - 3}}{3 - x}$

E) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - 1}}$

F) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x} - x}{x - 2}$

G) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x + 2} + \sqrt[3]{x}}{x + 1}$

H) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$

I) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1 - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{1 - x}}$

J) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^3 + x}{|x^3 - x|}$

K) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^6 - 4096}{x + 4}$

02.

I. Uma vez que você conheça $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ em um ponto interior do domínio de **f**, você pode então, determinar $\lim\limits_{x\to a} f(x)$? Justifique sua resposta;

II. Determine $a \in R$ para que exista $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ em que:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, \text{ se } x > -1 \\ 3, \text{ se } x = -1 \\ 5 - ax, \text{ se } x < -1 \end{cases}$$

03. (EN) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x}{x^2 - 1}$ é igual a:

A) 0
B) 1
C) – 1
D) ∞
E) $-\infty$

04. Seja $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$; $a_0 \neq 0$. Mostre que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_0x^n$.

05. Calcule os limites a seguir, caso existam.

A) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3 + 2x^2 - 1}{x^4 - 4x^3}$

B) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

C) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} - x\right)$

D) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{|x|} - x\right)$

E) $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x - 1}{x + 2}$

F) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{(x - 1)^4}$

G) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - x}{x^3 - x^2}$

H) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x + 1}{|x^2 - 4|}$

I) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x} - x}{x}$

J) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{2}{x^2 - 1}\right)$

K) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 2}$

L) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^4 + 1}}{x - 1}$

M) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + 5x + 4}$

N) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\frac{3}{2}} + 1}{x - 2}$

O) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - 4}}{2x + 5}$

P) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{5x + 3}{x(x + 1)}$

Q) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1 - x}{(3 - x)^2}$

R) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1 + \sqrt[7]{x}}{1 - \sqrt[7]{x}}$

S) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{1}{x}\right)$

T) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 - 5x + 7} - x\right)$

U) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$

V) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x\right)$

06. (UU-MG) O valor do limite $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x\right)$ é:

A) zero
B) $+\infty$
C) $-\infty$
D) 2
E) 1

07. (Mack-SP) O $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}\right)$ é:

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) ∞

08. Calcule **a** e **b** sabendo que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2ax^2+(b+1)x+3}{2x+1}=5.$

09. Para quais valores de **a** e **b** tem-se $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{ax^2+bx+3}=1$?

10. (EN) O valor de $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+x^2-2}{x^5+2x^2-3}$ é:

A) $\dfrac{2}{3}$ B) $\dfrac{4}{5}$
C) 1 D) $\dfrac{3}{2}$
E) 2

11. (EN) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+1})=$

A) 0 B) 2
C) 3 D) 4
E) ∞

12. O $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$ é igual a:

A) 0 B) $\dfrac{1}{16}$
C) $\dfrac{1}{12}$ D) $\dfrac{1}{2}$
E) 1

13. O $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+b}+\sqrt{x+a}-\sqrt{b}-\sqrt{a}}{x}$ é igual a:

A) $\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}$ B) $\dfrac{1}{2\sqrt{b}}+\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$
C) $\dfrac{1}{2\sqrt{a+b}}$ D) $\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}+\dfrac{1}{2}$
E) $\dfrac{\sqrt{a+b}}{2}$

14. Suponha que, para todo **x**, $|g(x)|\le x^4$. Calcule $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x}$.

15. Suponha que $g(x)\le f(x)\le h(x)$ para qualquer $x\ne2$ e suponha que $\lim\limits_{x\to2}g(x)-\lim\limits_{x\to2}h(x)=-5$. Podemos concluir alguma coisa sobre os valores de **f**, **g** e **h** em x = 2? Seria possível f(2) = 0? Seria possível lim f(x) = 0? Justifique suas respostas.

16. (Epusp-SP) Calcule $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ sabendo que, para todo x > 1, $(x-1)^2<(x^2-1)\,f(x)<(x+1)^2$.

II – Limites com trigonometria

Teorema (limite trigonométrico fundamental): $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=1$

EXERCÍCIOS

01. Calcule os limites a seguir.

A) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\operatorname{sen}x}$ B) $\lim\limits_{t\to\pi}\dfrac{\operatorname{sen}t}{\pi-t}$

C) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{x}$ D) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos t}{t-\frac{\pi}{2}}$

E) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}3x}$ F) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\cos x}{\operatorname{sen}x}$

02. (F.M. Santos) O $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{5x}$ é:

A) 0 B) 1
C) 5 D) $\dfrac{1}{5}$
E) n.d.a.

03. (UC-MG) O valor do $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}^2kx}{x}$ é:

A) K B) 1
C) 0 D) k^2
E) 2

04. (UC-MG) O valor do $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ é:

A) –1 B) 0
C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{2}{3}$

05. (Sta. Casa-SP) Calculando $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{sen}2x-\cos2x-1}{\cos x-\operatorname{sen}x}$ obtém-se:

A) $\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}$
C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ D) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
E) n.d.a.

06. (UC-MG) Se f(x) = ℓn x – ℓn(sen 5x), então, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ é:

A) – ℓn 5 B) 5
C) 0 ℓn D) 1 ℓn
E) ∞

07. O valor de $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}^2x}{\operatorname{sen}x^2}$ é:

A) –1 B) 0
C) 1 D) 2
E) $+\infty$

08. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x^2}$ vale:

A) 4 B) 2
C) 1 D) $\dfrac{1}{2}$
E) $\dfrac{1}{4}$

09. (EN) Se $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{cotg}x)^{\frac{1}{\ell nx}}=p$, então:

A) $0\le p\le\dfrac{1}{3}$

B) $\dfrac{1}{3}<p\le\dfrac{1}{2}$

C) $\dfrac{1}{2}<p\le1$

D) $1<p\le2$

E) $2<p\le3$

10. (EN) Qual o valor do $\lim\limits_{x\to 0^+}(\text{cotg}\,x)^{\frac{1}{\ell nx}}$?

A) e B) $\frac{1}{e}$

C) 0 D) – 1

11. O valor do $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ell n(x+1)-\text{sen}\,x}{\text{sen}^2 x}$ é:

A) $-\infty$ B) $-\frac{1}{2}$

C) 0 D) $\frac{1}{2}$

E) não existe

12. Os números de assíntotas horizontais distintas e verticais distintas da curva $y=\frac{3x}{x^2-2}$ são, respectivamente, iguais a:

A) 0 e 2 B) 1 e 1
C) 1 e 2 D) 2 e 1
E) 2 e 2

13. $\lim\limits_{x\to 0}(\sec x)^{\frac{1}{x^2}}$ é igual a:

A) e

B) $\sqrt{e}$

C) 2

D) e^2

E) $\frac{1}{2}$

III – Limite exponencial fundamental – definição do número "e"

$$\boxed{e=\lim_{n\to +\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ ou } e=\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}}$$

EXERCÍCIOS

01.

A) Prove o teorema: se a > 0, então, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ell na$.

B) Demonstre que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ell n(1+x)}{x}=1$.

02. (EN) O valor de $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$ é:

A) e
B) 1
C) $\sqrt{e}$
D) ∞
E) e^{-2}

03. (EN) Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,e^{\frac{1}{x}}$.

A) 0

B) 1

C) $\sqrt{e}$

D) e

E) ∞

04. Sejam **f**, **g** : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ e $g(x)=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}$.

Mostre que $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)g(x))=1$ e deduza daí que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=e^{-1}$.

05. Use a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica dos n + 1 números $1-\frac{1}{n}$, ..., $1-\frac{1}{n}$, 1 e prove que a sequência $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ é crescente. Conclua que $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\geq\frac{1}{4}$, $\forall n>1$.

06. Calcule.

A) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{4x}$

B) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-2}{x}$

2ª parte – continuidade

Continuidade

Dada uma função f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e um número $x_0\in\mathbb{R}$, dizemos que **f** é contínua em x_0 se:

I. $\exists f(x_0)$;

II. $\exists\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

III. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Teoremas:

- Se **f** e **g** são funções contínuas em **a**, então, são contínuas as funções f + g, f – g, f × g e $\frac{f}{g}$. Neste último caso, desde que g(a) ≠ 0.

- Se $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=b$ e se **f** é uma função contínua em **b**, então, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(g(x)))=f(\lim\limits_{x\to\infty} g(x))$.

- $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$, an ≠ 0, é uma função contínua.

EXERCÍCIOS

01. Para que valor de **k** a função f(x) = $\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, \text{ se } x \neq 0 \\ 2^k, \text{ se } x = 0 \end{cases}$ é contínua em x = 0?

02. (UF. Uberlândia-MG) A função f(x) = $\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ não está definida para x = 1. Para que a função f(x) seja contínua no ponto x = 1, devemos completá-la com f(1) igual a:

A) 0
B) $+\infty$
C) $\dfrac{1}{3}$
D) $\dfrac{2}{3}$
E) $-\infty$

03. (PUC-SP) Sobre a função y = f(x) = $\begin{cases} 1, \text{ se } x \leq 3 \\ +\sqrt{x-3}, \text{ se } x > 3 \end{cases}$ pode-se afirmar que:

A) é definida e contínua $\forall x \in R$.
B) é definida e contínua somente para x > 3.
C) é definida $\forall x \in R$ e descontínua somente para x = 3.
D) é definida e contínua somente para $x \leq 3$.
E) nenhuma das respostas anteriores.

04. Para a função f(x) = $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}}{x-2}, \text{ se } x \neq 2 \\ k, \text{ se } x = 2 \end{cases}$; encontre **k**, tal que **f** é contínua em 2.

05. Prove que a equação $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1 = 0$ tem uma solução entre 0 e 1.

06. Verifique se cada função dada é contínua no valor indicado.

A) f(x) = $\dfrac{-3x^2-x+1}{x^3-1}$, c = – 1

B) h(x) = $\begin{cases} -1, \text{ se } x < 0 \\ 1, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$, c = 0

C) m(x) = $\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} \end{cases}$, se x ≠ 2, c = 2

D) F(x) = $\begin{cases} x^2-1, \text{ se } x < -2 \\ -\dfrac{3x}{2}, \text{ se } x \geq -2 \end{cases}$, c = – 2

E) H(x) = $\begin{cases} x^2-x, \text{ se } x > -1 \\ x-x^2, \text{ se } x \leq -1 \end{cases}$, c = – 1

F) N(x) = $\begin{cases} x-1, \text{ se } x < 0 \\ 1-x, \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2-1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$, c = 0 e c = 1

G) P(x) = $\begin{cases} \dfrac{x-\pi}{1+\cos x}, \text{ se } x \neq \pi \\ 1, \text{ se } x = \pi \end{cases}$, c = π

07. O valor de **a** para que a função:

f(x) = $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}, \text{ se } x \neq 3 \\ a, \text{ se } x = 3 \end{cases}$ seja contínua em x = 3 é:

A) $\sqrt{3}$
B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
C) $\dfrac{1}{3}$
D) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$
E) $\dfrac{1}{6}$

08. Se f(x) = $\begin{cases} |x-2|, \text{ se } x \geq 1 \\ x, \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2}, \text{ se } -1 < x < 0 \\ 1, \text{ se } x \leq -1 \end{cases}$ tem-se que:

I. f(x) só não é derivável para x = – 1, x = 0 e x = 1;
II. f(x) só não é contínua para x = 0;
III. f(x) só não é derivável para x = – 1, x = 0, x = 1 e x = 2;
IV. f(x) é contínua em todo o seu domínio, mas não é derivável para x = 1, x = 0 e x = – 1.

Pode-se concluir que:
A) somente a afirmação I é falsa.
B) todas as afirmações são verdadeiras.
C) as afirmações II e III são verdadeiras.
D) as afirmações I e III são falsas.
E) somente a afirmação IV é verdadeira.

09. O valor de **a** que torna a função:

f(x) = $\begin{cases} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, \text{ se } x \neq 0 \\ 2a, \text{ se } x = 0 \end{cases}$ contínua em x = 0 é:

A) 2
B) $2\sqrt{e}$
C) $\dfrac{e}{2}$
D) $\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$
E) $2e^2$

10. Encontre os valores das constantes **a** e/ou **b** para que as funções dadas sejam contínuas em $(-\infty, \infty)$.

A) f(x) = $\begin{cases} a^2+x, \text{ se } x < -1 \\ x^2+2, \text{ se } x \geq -1 \end{cases}$

B) g(x) = $\begin{cases} x-b, \text{ se } x \geq 2 \\ x^2+bx-3, \text{ se } x < 2 \end{cases}$

C) j(x) = $\begin{cases} -x^2-2a, \text{ se } x < 1 \\ ax+bx, \text{ se } 1 \leq x < 3 \\ bx^2-ax, \text{ se } x \geq 3 \end{cases}$

11. Mostre que a função f(x) = $[g(x)]^3 - g(x) + 1$ é contínua em **c**, se g(c) = 0, $\lim\limits_{x \to c^-} g(x) = -1$ e $\lim\limits_{x \to c^+} g(x) = 1$.

12. Mostre que a função f(x) = $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, se x ≠ 0 e f(0) = 1 é contínua em 0.

3ª parte – derivada

I – Derivada

Seja **f** uma função definida em um intervalo aberto **I** e x_0, um elemento de x_0. Chama-se derivada de **f** no ponto x_0 o limite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se este existir e for finito.

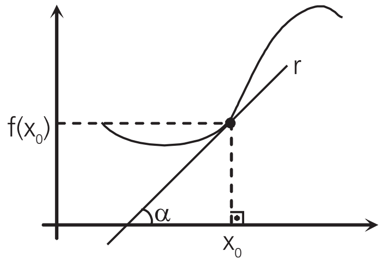
Notação:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ ou } \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ou

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

A interpretação geométrica da derivada de **f** em um ponto x_0 é a tangente do ângulo de inclinação da reta tangente ao gráfico de **f** no ponto $(x_0, f(x_0))$.



$f'(x_0) = \text{tg}\,\alpha = m_r$

coeficiente angular da reta **r**

Derivadas das funções elementares:

I. $f(x) = c,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$;

II. $f(x) = x^n,\ n \in N^* \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$;

III. $f(x) = \text{sen}\, x \Rightarrow f'(x) = \cos x$;

IV. $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen}\, x$;

V. $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$;

Obs.: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$;

VI. $f(x) = \text{tg}\, x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$;

VII. $f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x \ell n a}$;

Obs.: $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Regras de derivação

I. $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$;

II. $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$;

III. $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$;

IV. $f(x) = g(f(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(f(x))f'(x)$ (regra da cadeia);

V. $y = f(x)$ e $x = f^{-1}(y) \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ (derivada da inversa).

Derivada e continuidade

Se $f: A \to \mathbb{R}$ é derivável em $x_0 \in A$, então, **f** é contínua em x_0. Por isso, se **f** não é contínua em x_0, então, **f** não é derivável em x_0.

EXERCÍCIOS

01. Encontre a equação da reta que satisfaz as condições estabelecidas.
A) É tangente à curva $y = x^2$ e paralela à reta $x + y = 1$.
B) É tangente à curva $y = -x^2$ e normal à reta $-x + y = 1$.
C) É normal à curva $y = x^2 + 1$ e paralela à reta $x - y = 0$.
D) É tangente à curva $y = x^2 - \dfrac{1}{12}$ e forma um ângulo de 30 graus com o eixo **x**.
E) É normal à curva $y = \sqrt{8 - x^2}$ e forma um ângulo de $\dfrac{3\pi}{4}$ com o eixo **x**.
F) É tangente à curva $y = -\sqrt{x}$ e passa por $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$.
G) É normal à curva $y = \sqrt{x^2 + 1}$ e passa por (2, 0).

02. (FEI-SP) Ache a declividade da reta tangente à curva $y = x^2$ no ponto de coordenadas (– 2; 4).

03. Mostre que uma reta tangente à parábola $y = ax^2 + bx + c$ é horizontal se, e somente se, ela tangencia a parábola no seu vértice.

04. Determine a derivada das funções dadas.
A) $a(x) = -x^2$
B) $c(x) = x^3 - x + 2$
C) $e(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
D) $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$
E) $i(x) = \dfrac{x - 3}{x + 3}$
F) $k(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 2}}$

05. (UCMG) A derivada de $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{5x + 1}}$ no ponto x = 0 é:
A) – 1
B) 0
C) 1
D) 2
E) 3

06. (UFPR) Se $f(x) = \dfrac{\ell n x^2}{e^{2x}}$, então, $f'(1)$ é:
A) $2e^{-2}$
B) $-2e^{-2}$
C) e
D) 2
E) $2e^2$

07. (UFPA) Se f(x) = sen x, então, a derivada quarta $f^{IV}(x)$ vale:
A) – sen x
B) cos x
C) sen x
D) – cos x
E) sen x cos x

08. (UFPA) Se y = x cos x, então, $y''(x)$ =
A) x sen x
B) x cos x
C) – (x sen x + cos x)
D) – (x cos x + 2 sen x)
E) x(cos x – sen x)

09. (UFPA) Se $f(x) = e^{e^x}$, então, $f''(x)$ é:
A) $e^x e^{e^x}(e^x + 1)$
B) $e^{e^x} e^x + e^{2x}$
C) $e^{e^x} e^x + 1$
D) $e^{e^x} e^x$
E) $e^{e^x} e^x (e^{2x} + 1)$

10. (UFPA) Se $f(x) = e^{x^2}$, então, $f''(0)$ será:
A) 2
B) 4
C) 0
D) 1
E) 3

11. (UFPA) Se **u**, **v** e **w** são funções de uma mesma variável, qual o valor da derivada do produto u v w?

A) $u'v'w'$
B) $u'v'w + u'v\,w$
C) $(uv' + u'v)w'$
D) $u'vw + uv'w + u\,vw'$
E) $u'v'w + u'vw' + uv'w'$

12. Seja **f** a função real cuja derivada é $f'(x) = 3x^2 + 1$. Se $f(0) = 1$, podemos afirmar que $f(1)$ é igual a:

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 6

13. Se $f(x) = xg(x)$ para todo **x** em um intervalo aberto contendo 0 e **g** é contínua em 0, mostre que $f'(0) = g(0)$.

14. Seja $f(x) = \dfrac{g(x)}{x+a}$, em que $g(a) = 2a$, $g'(a) = 1$ e $a \neq 0$, mostre que $f'(a) = 0$.

15. Se $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$ para todo **x** em um intervalo aberto contendo 0, mostre que $f'(0) = 0$.

16. Se $4x - 1 \leq f(x) \leq x^2 + 2x$ para todo **x** em um intervalo aberto contendo 1, mostre que $f'(1) = 4$.

17. (Epusp-SP) A função $y = |\text{sen}\, x|$:

A) é descontínua nos pontos da forma $k\pi$ (k inteiro).
B) não é derivável nos pontos da forma $k\pi$.
C) é derivável em qualquer ponto.
D) é derivável, mas não é contínua.
E) nenhuma das respostas anteriores.

18. (F.M. Santos-SP) Assinale a alternativa falsa.

A) Se existe $f'(x_0)$, então, existe também a reta tangente ao gráfico de f(x) no ponto de abscissa x_0.
B) Se f(x) é contínua em x_0, então, ela tem derivada em x_0.
C) A derivada da função identidade é a unidade.
D) Se f(x) tem derivada em x_0, então, ela é contínua em x_0.
E) A derivada da função seno é a função cosseno.

19. Para cada função f(x), verifique se é contínua em x = 0 e se é derivável em x = 0.

A) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq 0 \\ x, \text{ se } x > 0 \end{cases}$
B) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq 0 \\ 0, \text{ se } x > 0 \end{cases}$

20. Resolva.

A) Seja **f** uma função real derivável. Mostre que se **f** é função par, então**,** f' é função ímpar.
B) Mostre que se **f** é uma função diferenciável e de período **p**, então, f' é periódica.

21. (UnB-DF) Sabendo que para $0 < x < 1$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

determine o valor da soma $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$, quando $x = \dfrac{1}{2}$.

22. Calcule a derivada das funções dadas.

A) $F(x) = 2\,\text{sen}\sqrt{x}$
B) $H(t) = \text{sen}^2\, \dfrac{t}{2}$
C) $K(x) = \sqrt{x}\cos\sqrt{x}$
D) $M(x) = \dfrac{x - \text{sen}\, x}{\cos x}$

23. Use a regra da cadeia para calcular $\dfrac{dy}{dx}$.

A) $y = u^2 - 3u$ e $x = u^3 - 3u^2 + 1$
B) $t = y^3 - y$ e $x = t^3 - t + 2$
C) $y = \sqrt{t^2 - 1}$ e $x = \sqrt[4]{t^2 + 1}$
D) $y = \sqrt[3]{t+1}$ e $t = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

24. Se $f(x) = e^{3x} + (x + 1)\cos x$, então, $f'(0)$ é igual a:

A) 4
B) 3
C) 2
D) 1
E) 0

25. A derivada de $y = \dfrac{1}{2} \cdot \text{tg}^2 x + \ell n(\cos x)$ é:

A) $\sec^2 x - \text{tg}\, x$
B) $\dfrac{\cos x - 1}{\cos^2 x}$
C) $\text{tg}^3 x$
D) $\dfrac{\text{sen}\, x - \cos^2 x}{\cos^3 x}$
E) 0

26. A derivada de ordem **n** da função $f(x) = x \cdot e^x$ para x = 1 é:

A) e
B) ne
C) 2ne
D) ne^n
E) $(n + 1)e$

27. (EN) Se $f(x) = \ell n\, \text{sen}^2 x$, determine $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A) $-\ell n2$
B) 1
C) $\dfrac{\pi}{4}$
D) 2
E) $2\sqrt{2}$

28. A derivada $f'(1)$ da função $f(x) = \log_2 x^3$ é:

A) $\ell n2$
B) 0
C) 3
D) $3\ell n2$
E) $\dfrac{3}{\ell n2}$

29. Se $f(x) = \ell n\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, o valor de $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ é:

A) 0
B) $\dfrac{1}{3}$
C) $\dfrac{2}{3}$
D) $\dfrac{4}{3}$
E) $\dfrac{8}{3}$

30. Seja g(x) uma função real, derivável até a 3ª ordem para todo **x** real, tal que $g(0) = g'(0) = 0$ e $g''(0) = 16$. Se f(x) é uma função real definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{2x}, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$, então, $f'(0)$ é igual a:

A) 16
B) 12
C) 8
D) 4
E) 0

31. Sejam **f** e **g** funções definidas em $\mathbb{R}$ e deriváveis em $x = 0$, tais que $f(0) = 3$, $f'(0) = 4$, $g(0) = 1$ e $g'(0) = -1$. Então, $\left(\dfrac{2f+g}{f-g}\right)'(0)$ é igual a:

A) $\dfrac{21}{6}$ B) $\dfrac{7}{5}$

C) $-\dfrac{21}{4}$ D) $-\dfrac{21}{2}$

32. A reta S passa pelo ponto (3,0) e é normal ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto P(x, y). As coordenadas **x** e **y** de P são, respectivamente:

A) 2 e 4 B) $\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{1}{4}$

C) 1 e 1 D) $\dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{1}{9}$

E) $\dfrac{5}{2}$ e $\dfrac{25}{4}$

33. Se $f'(x) = \cos^2(e^{x+1})$, $f(0) = 3$, $g(x) = f(x + 1)$ e g^{-1} é a inversa de **g**, o valor de $(g^{-1})'(3)$ é:

A) $\cos^2 e$ B) $\sec^2 e$

C) tg e D) e^3

E) 1

34. A função real f(x) satisfaz a seguinte equação: $\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}+f(x)\right) = xf(x) - \dfrac{x}{2} + 3.$

Considere a função **g**, definida por $g(x) = k\dfrac{f(x)}{x}$ com $x \neq 0$ e $k \in \mathbb{R}$. Sabendo que $f(2) = -1$, podemos afirmar que o valor da constante real **k** para que $g'(2) = f'(2)$ é:

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{3}{4}$

C) $\dfrac{4}{3}$ D) $\dfrac{8}{5}$

E) 2

35. Considere **r** a reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto (1, f(1)). Sejam $f(1) = 3$ e $f'(1) = 2$. Se **r** intercepta o gráfico da função $g(x) = x^2 - 3x + 7$ nos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), então, os valores de y_1 e y_2 são, respectivamente:

A) 1 e 2 B) 2 e 3

C) 3 e 5 D) 5 e 7

E) 7 e 9

36. Seja $y = x^3 - 3x + 5$, em que $x = g(t)$, $g'(2) = 3$ e $g(2) = 4$. A derivada de **y** no ponto t = 2 é:

A) 9 B) 27

C) 45 D) 90

E) 135

37. A derivada da função $f(x) = \text{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ é:

A) $\dfrac{x^2}{x^2+1}$ B) $\dfrac{1}{1+x^2}$

C) $\dfrac{-1}{1+x^2}$ D) $\dfrac{-1}{x^2(1+x^2)}$

E) $\dfrac{1}{x}$

II – Derivação implícita

EXERCÍCIOS

01. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ usando derivação implícita.

A) $x^2 - y^2 = 1$ B) $xy = (x + y)^2$

C) $x^2 - y^2 = (x + y)^2$ D) $x^4y^3 - xy = 4 - \sqrt{xy}$

E) $\sqrt{x+y} = 1 - x^3y^2$ F) $\dfrac{x^2 - y^2}{x^3 + y^3} = x^4 + y^4$

G) $\cos(\text{sen } y) - xy = 1$ H) $\text{sen}(\cos^2 y) + \text{sen } x \cos y = 0$

I) $y^3 - t^3 = y + t$ e $x^2 + t^2 = x - t$ J) $u^2y - uy^2 = 1$ e $x^2 - u^2 = xu$

02. Supondo que y = f(x) seja uma função real derivável e que satisfaz a equação $xy^2 + y + x = 1$, podemos afirmar que:

A) $f'(x) = \dfrac{-f(x)}{2xf(x)-1}$

B) $f'(x) = \dfrac{-1-(f(x))^2}{2xf(x)+1}$

C) $f'(x) = \dfrac{-(f(x))^2}{2xf(x)+1}$

D) $f'(x) = \dfrac{-1+(f(x))^2}{2xf(x)+1}$

E) $f'(x) = \dfrac{1-(f(x))^2}{2xf(x)+1}$

III – Aplicações das derivadas de 1ª, 2ª e 3ª ordens

Dizemos que x_0 é um ponto extremo se x_0 for um ponto de máximo local ou de mínimo local de **f**. Nesse caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado valor extremo de **f**.

Teorema: Se $f: D \to R$ é uma função derivável no ponto $x_0 \in D$ e x_0 é ponto extremo de **f**, então, $f'(x_0) = 0$.

Teorema (de Rolle): Se **f** é uma função contínua em [a, b], derivável em (a, b) e f(a) = f(b), então, existe ao menos um ponto $x_0 \in (a, b)$, tal que $f'(x_0) = 0$.

Teorema do valor médio: Se **f** é uma função contínua em [a, b], derivável em (a, b), então, $\exists x_0 \in (a, b)$, tal que $\dfrac{f(b)\quad f(a)}{b-a} = f'(x_0)$.

Teorema: Seja **f** uma função contínua em [a, b] e derivável em (a, b). Então:
$f'(x) \geq 0$ em (a, b) $\Leftrightarrow$ **f** é crescente em [a, b];
$f'(x) \leq 0$ em (a, b) $\Leftrightarrow$ **f** é decrescente em [a, b].

Teorema: Seja **f** uma função contínua e derivável até segunda ordem no intervalo I = (a, b), com derivadas f' e f" também contínuas em I. Seja $x_0 \in I$, tal que $f'(x_0) = 0$. Assim:
$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ é ponto de máximo local de **f**;
$f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ é ponto de mínimo local de **f**.

Obs.: Veja critério geral (não necessário para nosso curso) na página 191 do livro *Matemática Elementar*, volume 8.

Teorema: Se **f** é uma função derivável até segunda ordem no intervalo I = [a, b], $x_0 \in (a, b)$ e $f''(x_0) \neq 0$, então:
$f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ concavidade do gráfico para cima;
$f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ concavidade do gráfico para baixo.

Ponto de inflexão

Dizemos que $(x_0, f(x_0))$ é um ponto de inflexão do gráfico de **f** quando em x_0 o gráfico de **f** muda de concavidade.

Teorema: Seja **f** uma função com derivadas até terceira ordem em $I = (a, b)$. Seja $x_0 \in (a, b)$. Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$, então, x_0 é abscissa de um ponto de inflexão. Além disso, se x_0 é abscissa de um ponto de inflexão do gráfico de **f**, então, $f''(x_0) = 0$.

Teorema: Se α é raiz de P(x) com multiplicidade **m**, então, α é raiz de P'(x) com multiplicidade m – 1.

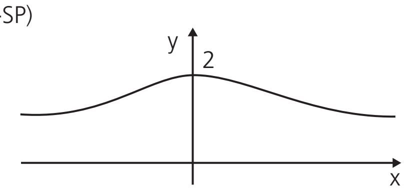
EXERCÍCIOS

01. (GV-SP) Dentre todos os números **x** e **y**, tais que 2x + y = 60, existe um par **a** e **b** para o qual o produto xy é o maior possível. Então, b – a vale:
A) 0
B) 10
C) 50
D) 15
E) 5

02. (Cesgranrio) Se (x; y) satisfaz à equação 3x + 4y = 12, então, o valor mínimo de $\sqrt{x^2 + y^2}$ é:
A) 12
B) $\frac{4}{3}$
C) 3
D) 4
E) $\frac{12}{5}$

03. (UFPA) O ponto de abscissa positiva da curva $y = \frac{2}{x}$ que está mais próximo da origem é:
A) (1, 2)
B) (2, 1)
C) $(3, \frac{2}{3})$
D) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
E) $\left(\sqrt[4]{2}, \frac{2}{\sqrt[4]{2}}\right)$

04. (UFSCar-SP)



O esboço acima pode representar o gráfico de:
A) $y = 3^{-x^2} + 1$
B) $y = 3^{-x} + 1$
C) $y = 3^{x} + 1$
D) $y = 3^{2x} + 1$
E) $y = 3^{\sqrt{x}} + 1$

05. (Mack-SP) Seja **f** uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $y = \frac{1}{x^2 + 1}$. Pode-se afirmar que:
A) **f** é sobrejetora.
B) **f** é injetora.
C) $\exists$x tal que y > 1.
D) $\lim\limits_{x \to -\alpha} f(x) = 1$.
E) $\lim\limits_{x \to +\alpha} f(x) = 1$.

06. (Epusp-SP) No intervalo –2 < x < 2, a função $y = \frac{2x}{x^2 + 2}$:
A) tem ponto de mínimo e ponto de máximo.
B) tem apenas ponto de mínimo.
C) tem apenas ponto de máximo.
D) tem ponto de inflexão horizontal.
E) nenhuma das respostas anteriores.

07. Se 3x + 4y = 100, qual é o valor mínimo de $\sqrt{x^2 + y^2}$?

08. Determine o comprimento do menor caminho que liga um ponto da reta y = x – 1 a um ponto da parábola $y = x^2$.

09. Dada a equação $x^3 - 12x + k = 0$, determine **k** nos casos:
A) para que tenha uma raiz real dupla.
B) para que tenha três raízes reais distintas.

10. Calcule **a** e **b** de modo que $f(x) = x^3 + 3ax^2 + b$, $x \in \mathbb{R}$, tenha um ponto de máximo em x = – 4 e admita uma única raiz real.

11.
A) Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{\ell n x}{x}$, x > 0.
B) Usando o ponto $x = \pi$, verifique que $\pi^e < e^\pi$.

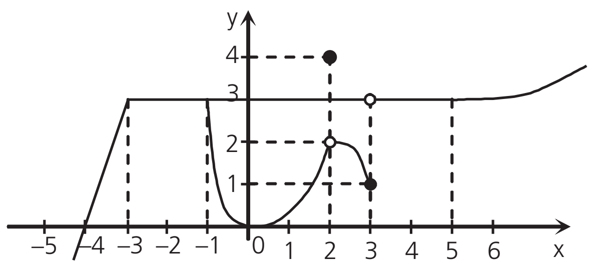
12. Para cada função, encontre:
I. os intervalos de crescimento e decrescimento;
II. os valores extremos locais, usando o teste da derivada primeira.

A) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2$
B) $h(x) = 20 + 20x + 5x^3 - x^5$
C) $G(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}$
D) $j(x) = \sqrt[3]{x^2}\,(x - 1)$
E) $k(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+3)}$
F) $n(x) = \frac{x - 2}{x^2 + 1}$
G) $q(x) = 2\operatorname{sen} x + \frac{\cos 2x}{2}$, $[0, 2\pi]$

13. Se $f(x) = x^3 + 3ax + b$, mostre que **f** tem mínimo e máximo locais se a < 0 e não tem nenhum valor extremo local se a > 0.

14. Uma função **f** tem derivada igual a $(x + 1)(x - 2)^2(x + 3)^3(x - 4)^4$, encontre os números em que **f** tem valores extremos. Quais desses valores extremos é mínimo ou máximo?

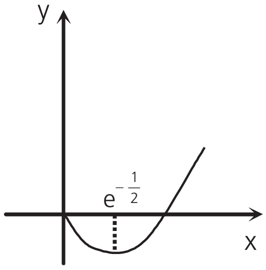
15. Seja y = f(x) uma função real cujo gráfico está representado a seguir. Nas proposições abaixo, coloque **C** na coluna à esquerda quando a proposição for certa e **E** quando for errada.
( ) f(x) é positiva e contínua $\forall x \in [-4, 5]$
( ) f(0) = f(– 4) = 0 e f(2) = 2
( ) f '(– 4) > 0 e f '(x) = 3 $\forall x \in\,]3, 5[$
( ) f(x) é crescente
$\forall x \in\,]-\infty, -3[\cup]0, 2[\cup]5, +\infty[$
( ) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2$



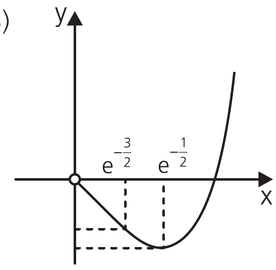
Lendo a coluna da esquerda, de cima para baixo, encontramos:
A) E – E – E – C – C
B) E – C – E – C – E
C) E – E – E – C – E
D) C – C – E – E – E
E) C – C – C – C – E

16. O gráfico da função $y = x^2 \cdot \ell nx$ é:

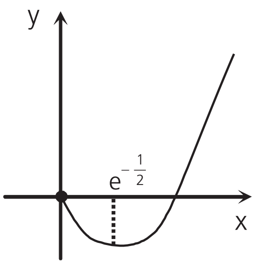
A)



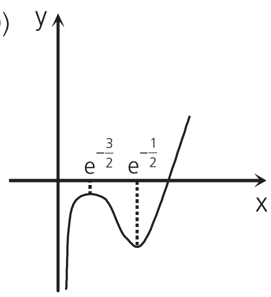
B)



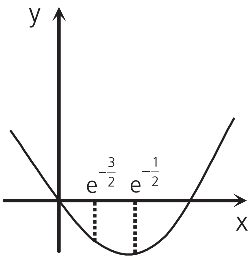
C)



D)

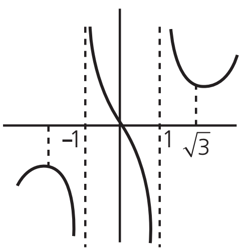


E)

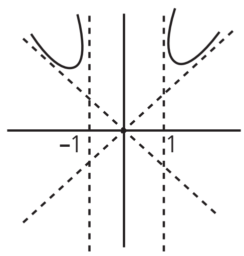


17. O gráfico da função $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ é:

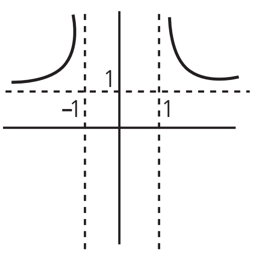
A)



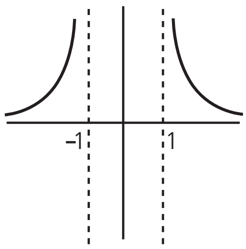
B)



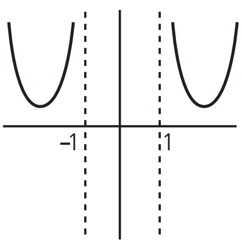
C)



D)



E)



18. Podemos observar que o gráfico de $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$:

A) cresce em $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$.
B) tem $(0, -1)$ como ponto de inflexão.
C) tem assíntota horizontal em $y = 1$ e assíntota vertical em $x = 1$ e $x = -1$.
D) tem concavidade voltada para cima para qualquer $x \in]-1, 1[$.
E) está definido para todo $x \in \mathbb{R}$.

19. A função $f(x) = xe^{1/x}$ é decrescente no intervalo:

A) $]1, +\infty[$
B) $]-\infty, 1[$
C) $]-\infty, 0[$
D) $]0, +\infty[$
E) $]0, 1[$

20. Os valores mínimo e máximo de $f(x) = xe^{-x^2}$ no intervalo $[0, 1]$ são, respectivamente:

A) 0 e $\dfrac{1}{e}$
B) 0 e $\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$
C) $\dfrac{1}{e}$ e $\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$
D) 0 e $\dfrac{1}{2e^4}$
E) 0 e $\mathbf{e}$

21. Para $x > 0$, o valor mínimo de x^x é obtido para **x** igual a:

A) $\dfrac{1}{10}$
B) $\dfrac{1}{3}$
C) $\dfrac{1}{e}$
D) $\dfrac{1}{2}$
E) 1

22. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2e^x$ é:

A) crescente, $\forall x \in \mathbb{R}$.
B) decrescente, $\forall x \leq 0$
C) crescente, $\forall x > -1$
D) crescente, $\forall x > -2$
E) decrescente, $\forall x \in]-2, 0[$

4ª parte – integral

Integral

$$\int f(x)dx = g(x) + c \Leftrightarrow g'(x) = f(x) \quad \text{(integral indefinida)}$$
$\uparrow$
primitiva de **f**

$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$, sendo **g** uma primitiva de **f**.

Integração por partes

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$
$$\Rightarrow u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x)\,dx + \int u(x) \cdot v'(x)\,dx$$
$$\boxed{\Rightarrow \int v(x) \cdot u'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\,dx}$$

Exemplo: calcule $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

Volumes dos corpos sólidos

Os volumes dos corpos formados pela revolução de um trapézio mistilíneo, limitado por uma curva contínua $y = f(x)$, pelo eixo Ox e duas verticais $x = a$ e $x = b$, em torno dos eixos Ox e Oy, são expressos, respectivamente, pelas fórmulas $V_x = \int_a^b y^2dx$ e $V_y = 2\pi \int_a^b xydx$.

EXERCÍCIOS

01. Calcule a integral indefinida.

A) $\int(-dx)$

B) $\int(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x})\,dx$

C) $\int\left(x^3-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

D) $\int(x-1)^9\,dx$

E) $\int\sqrt{3x-1}\,dx$

F) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

G) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-2x}}$

H) $\int\sqrt[3]{x^2+6x+9}\,dx$

I) $\int x^2\sqrt[3]{4-2x^3}\,dx$

J) $\int\frac{1}{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x}}\,dx$

K) $\int x^2\sqrt{1-x}\,dx$

L) $\int\frac{x\,dx}{x+\sqrt{x^2+1}}$

M) $\int e^{-x}\operatorname{sen} e^{-x}dx$

N) $\int\frac{1-\operatorname{sen}x}{\cos x}dx$

O) $\int\frac{1-\operatorname{sen}x}{\cos^2x}dx$

P) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}$

Q) $\int x\operatorname{cotg}(1-x^2)\,dx$

R) $\int\cos x\operatorname{cossec}(\operatorname{sen}x)\,dx$

S) $\int\operatorname{tg}^3x\sec^2x\,dx$

T) $\int\operatorname{tg}^3x\sec^{\frac{3}{2}}x\,dx$

U) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{4-\operatorname{sen}^2x}}$

V) $\int\frac{x\,dx}{x^4+1}$

W) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x}+2\sqrt{x}}$

X) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$

Y) $\int\frac{\ell n x}{x}dx$

Z) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{e^x}-1\right)dx$

α) $\int\frac{e^x dx}{e^x+1}$

β) $\int\frac{x}{e^{x^a-1}}dx$

γ) $\int e^{x-e^x}dx$

δ) $\int\frac{3^x dx}{3^x-3}$

02. Obtenha uma primitiva F(x) da função $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$, tal que $F(0) = 1$.

03. Obtenha uma primitiva F(x) da função $f(x) = 1 - \operatorname{sen} x$, tal que $F(0) = 0$.

04. Determine uma função real f(x) sabendo que $f'(x) = e^x$ e $f(0) = 2$.

05. (UFPA) Sendo **f** e **g** funções de **x** e **k** uma constante real, podemos afirmar que:

I. $\int[f(x)+g(x)]\,dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx;$;

II. $\int f(x)\cdot g(x)\,dx=\int f(x)dx\cdot\int g(x)dx;$;

III. $\int k\,f(x)\,dx=k\int f(x)dx.$.

As afirmações corretas são:

A) I
B) I e II
C) I, II e III
D) I e III
E) III

06. (UFPA) Se **f** e **g** são funções tais que $f'(x) = g(x)$, então, temos:

A) $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$

B) $\int_a^b f(x)\,dx=g(b)-g(a)$

C) $\int_a^b g(x)\,dx=f(b)-f(a)$

D) $\int f(x)\,dx=g(x)+C$

E) $\int f(x)\,dx=\int g(x)\,dx+C$

07. (UFPA) Qual o valor da área limitada pela parábola $y = x^2 + 1$, o eixo dos **x** e as retas $x = -1$ e $x = 1$?

A) $\frac{4}{3}$
B) $\frac{5}{3}$
C) 3
D) $\frac{7}{3}$
E) $\frac{8}{3}$

08. (UFPA) A área da região limitada entre a curva $y = x(1 - x)$ e o eixo dos **x** é:

A) $\frac{1}{6}$
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{1}{3}$
D) 1
E) 2

09. (UFPA) A área determinada entre a reta $y = 3$ e o gráfico da função $y = 4 - x^2$, em unidades de área, vale:

A) $\frac{2}{3}$
B) $\frac{4}{3}$
C) $\frac{8}{3}$
D) $\frac{16}{3}$
E) $\frac{32}{3}$

10. (Epusp-SP) Sendo **A** a área limitada pela curva $y = \frac{1}{x}$ e pelas retas $x = 1$, $x = 3$ e $y = 0$, tem-se:

A) $A < 0{,}3$.
B) $0{,}3 < A < 0{,}8$.
C) $0{,}8 < A < 1{,}5$.
D) $1{,}5 < A < 10$.
E) Nenhuma das anteriores.

11. (UFPA) Qual o valor de $\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx$?

A) – 1
B) 0
C) $\frac{1}{2}$
D) 1
E) 2

12. (UFPA) O valor de **m** para que a área acima da parábola $y = x^2$ e abaixo da reta $y = mx$ seja 36, com $m > 0$, será:

A) 16
B) 8
C) 6
D) 4
E) 2

13. (UFPA) O valor de $\int_{-1}^{1}(x^2+x+1)\,dx$ é igual a:

A) 0
B) 1
C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{5}{2}$
E) $\frac{8}{3}$

14. (UFPA) O resultado de $\int_0^1\frac{a\,dx}{e^x}$ é:

A) a (e – 1)
B) $\frac{a}{e}$
C) a · e
D) $\frac{a(1-e)}{e}$
E) $\frac{a(e-1)}{e}$

15. (UFPA) O valor de $\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2}dx$ é:

A) 0 B) $\frac{1}{2}$

C) 1 D) $\frac{3}{2}$

E) 2

16. Encontre o valor da integral dada.

A) $\int_0^1 (2x^3 - x + 4)\,dx$ B) $\int_0^{\sqrt{2}} x(x^2-1)^6\,dx$

C) $\int_{-6}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} - 1\right)dx$ D) $\int_{-2}^{2} x\sqrt{x+2}\,dx$

E) $\int_1^4 \frac{\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}dx$ F) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2x-x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

G) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{4+x^4}$ H) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\cos 2x}{1\quad \text{sen}2x}dx$

I) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}^3 x}{\sqrt{1+\cos x}}dx$ J) $\int_e^{e^2} \frac{\ell n \ell n x}{x \ell n x}dx$

K) $\int_0^1 \frac{dx}{2^{x+1}-1}$

17. Calcule a área da região limitada pelas curvas indicadas.

A) $y = 2x - x^2$ e $y = 0$

B) $y = 2x - x^2$, $y = 0$ e $x = -1$

C) $y = x^3 - 1$, $y = 0$ e $x = 2$

D) $y = x^3 - 1$ e $x - y = 1$

E) $y^2 = x$ e $y = x^2$

F) $y^2 = x$, $y = x^2$ e $y = 1$

G) $y^2 = x$, $y = x^2$ e $4x + 4y = -1$

H) $y^2 = x$, $x = 1 - y^2$ e $x = 1$, no quarto quadrante

I) $y^2 = x^3$ e $x = 1$

J) $x = y^3 - y^2$ e $x = 0$

K) $y = x\sqrt{x^2+3}$ e $y = 2x$

L) $x^{2} + y^{2} = 1$ e os eixos coordenados

M) $y^2 = x(x-1)^2$

N) $y = x^4 - 4x^2$ e $y = \cos \frac{\pi x}{4}$

18. A integral $\int \sqrt{1+9x}\,dx$ é:

A) $\frac{2}{27}(1+9x)^{\frac{3}{2}} + c$ B) $\frac{2}{3}(1+9x)^{\frac{3}{2}} + c$

C) $\frac{1+9x}{3} + c$ D) $\frac{2}{9}(1+9x)^{\frac{1}{2}} + c$

E) $\frac{\sqrt{1+9x}}{3} + c$

19. O valor de $\int_0^1 (1-e^x)^2 \cdot e^x\,dx$ é:

A) $\frac{(e-1)^3}{3}$ B) $\frac{(1-e)^3}{3}$

C) $(e-1)^3$ D) $(1-e)^3$

E) $(1-e)^2\,e$

20. O valor de $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \text{tg}^2(2x)\,dx$ é:

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{6}$

C) $\sqrt{2}-1$ D) $\frac{8\sqrt{2}-3\pi}{24}$

E) $\frac{4-\pi}{8}$

21. Seja **p** uma constante real positiva. A integral $\int e^{\frac{\ln(2px)}{2}}dx$ é igual a:

A) $\frac{2}{3}(2px)^{\frac{3}{2}} + c$ B) $p(2px)^{\frac{-1}{2}} + c$

C) $\frac{1}{3}(2px)^{\frac{3}{2}} + c$ D) $\frac{2}{3}x(2px)^{\frac{1}{2}} + c$

E) $\frac{1}{3}x(2px)^{\frac{-1}{2}} + c$

22. Seja $f(x) = \frac{x^4}{8} + \frac{x^{-2}}{4}$. O valor de $\int_1^2 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ é:

A) $\frac{11}{16}$ B) $\frac{17}{16}$

C) 2 D) $\frac{33}{16}$

E) $\frac{17}{8}$

23. A área da superfície hachurada na figura é:

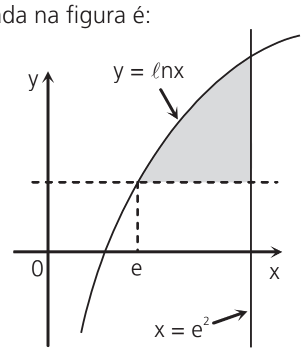
A) 1

B) e^2

C) e

D) $\ell n2$

E) e + 1



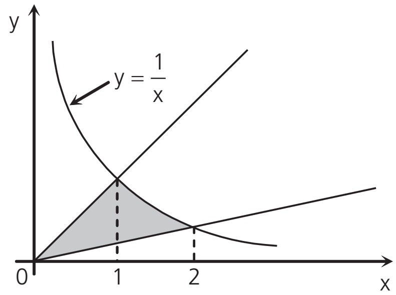
24. Considere os gráficos das funções y = sen x e y = cos x, $x \in [-\pi, \pi]$. A área da superfície limitada inferiormente por y = sen x e superiormente por y = cos x mede:

A) $4\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$

C) 2 D) $\sqrt{2}$

E) $2 + \sqrt{2}$

25. A área da região hachurada na figura abaixo é igual a:



A) 2 B) 1

C) e^2 D) $1 + \ell n2$

E) $\ell n2$

26. O valor de $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \cdot \text{sen}\left(\frac{3}{x}\right)dx$ é:

A) $\frac{\pi}{3}$ B) 1

C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{3}$

E) -1

27. Coloque (**V**) para verdadeiro ou (**F**) para falso na lacuna de cada afirmativa dada abaixo, assinalando a alternativa correta.

( ) Se **f** é uma função real derivável no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ e $f'(x_0) = 0$, então, x_0 é a abscissa de um ponto de mínimo local ou máximo local de **f**.

( ) Se **A** é uma matriz quadrada de ordem **n** e det $A \neq 0$, então, **A** é inversível.

( ) Se **h** e **g** são funções reais deriváveis no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, então, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)}{g(x)}$ não existe.

( ) O vetor $\vec{u} = (-3, 2, 1)$ é perpendicular aos vetores $\vec{v} = (1, 2, -1)$ e $\vec{w} = (0, 2, -4)$.

( ) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = \frac{1}{3}[(x+1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{3}{2}}] + C$.

A) F – V – V – V – F
B) V – V – F – F – V
C) V – F – V – V – F
D) F – V – F – V – V

28. (EN) O valor de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x + 3}}\,dx$ é:

A) $\sqrt{3}$
B) 2
C) $2 + \sqrt{3}$
D) $4 - \sqrt{3}$
E) $2 - \sqrt{3}$

29. O valor de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} 2x(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 2x}}\,dx$ é:

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
B) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$
C) $\sqrt{2}$
D) $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
E) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$

30. Sabendo-se que a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x^2+15}-8}, & \text{se } x \neq 7 \\ a, & \text{se } x = 7 \end{cases}$$

é contínua em x = 7 e que $b = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cdot \operatorname{sen} 4x\,dx$, o valor de $\dfrac{a}{b}$ é:

A) $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$
B) $2\sqrt{7}$
C) $\dfrac{6\sqrt{7}}{49}$
D) $\dfrac{4\sqrt{7}}{49}$
E) $7\sqrt{7}$

Regra de L'Hôpital

Para resolvermos limites e limites laterais que têm indeterminação podemos utilizar as Regras de L'Hôpital (matemático francês, 1661 – 1704). Mas antes, vejamos os tipos de indeterminações.

Indeterminações: $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \cdot (\pm\infty), \pm\infty \pm \infty, 0^0, 1^{\pm\infty}$ e $(\pm\infty)^0$

Vejamos agora as Regras de L'Hôpital.

1ª Regra: sejam **f** e **g** funções deriváveis num intervalo aberto **I**, exceto provavelmente num valor **c** em **I**. Se g'(x0 ≠ 0, ∀x ≠ c em **I** e $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$, então, $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ se $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g'(x)} = L$, em que L pode ser $\pm\infty$ e $x \to c$ pode ser substituído por $x \to c^-$ ou $x \to c^+$.

Corolário: se valem as condições do teorema acima, em que o intervalo I é ilimitado inferiormente ou superiormente, então, suas conclusões valem se $x \to c$ for substituído por $x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$, respectivamente.

2ª Regra: se valem as condições da 1ª regra ou do seu corolário e $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, então, valem as conclusões da 1ª regra ou do seu corolário.

Cuidado: antes de usar as Regras de L'Hôpital, verifique se as condições são cumpridas. Por exemplo, calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x}}{x^2}$.

O resultado correto é ∞. Mas derivando-se numerador e denominador, obtemos uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. Novamente derivando, obtemos como resultado que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x}}{x^2} = 1$, final incoerente devido à falta das condições iniciais.

Obs. 1: (sobre os 3 últimos tipos de indeterminação) Aplicando-se $\ln$ (função contínua), reduzimos aos casos já estudados anteriormente.

Obs. 2: (sobre a indeterminação do tipo $0 \cdot (\pm\infty)$) Basta escrever $f(x)g(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ ou $f(x)g(x) = \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$.

Obs. 3: (sobre a indeterminação do tipo $\pm\infty \pm \infty$) Escrever $f(x) - g(x) = f(x)\left[1 - \dfrac{g(x)}{f(x)}\right]$.

Cálculo no IME

Limites

EXERCÍCIOS

01. Calcule o limite da função $y = \dfrac{x^m - a^m}{x - a}$ quando **x** tende para **a**.

02. Calcule $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}}$

03. Calcule $T = \dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{\pi}{x}\right)^x}{i^i}$

04. Seja a função definida por:

1, se **x** é um número racional ≥ 2

$\dfrac{1}{2}$, se **x** é um número racional < 2

0, se **x** é um número irracional ≥ 3

– 4, se **x** é um número irracional < 3

Calcule.

$$S = f\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + f\left[\lim_{x\to 1}\frac{\pi(x-1)}{\ell n\, x}\right] + f\left[\lim_{x\to 0} e^{\frac{2\operatorname{sen} x}{x}}\right] + 4f(\log_2 1)$$

Obs.: $\ln$ é logaritmo natural;
$\log_a$ é logaritmo na base **a**.

05. Para cada número real **r**, seja $\hat{r}$ o arco de **r** grados.
Calcule $\lim\limits_{x\to\delta} \dfrac{\operatorname{sen}\hat{x} - \operatorname{sen}\hat{\delta}}{x-\delta}$

06. $C = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x)$. Calcule C.

07. $D = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x+2}$. Calcule D.

08. $G = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}$. Calcule G.

09. Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$.

10. Seja a sequência real (x_n), n = 0, 1, … tal que:
$\lim\limits_{x\to\infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$, n = 2, 3, ...

Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n - x_{n-1}}{n}\right) = 0$

11. Considere a função $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ definida em

$0 < x < \infty$. Calcule o valor de **f** em cada ponto e esboce o seu gráfico.

12. Dada a função racional: $f(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$ e sabendo que
a, b, c, m, n, p $\in \mathbb{Z}$ e que:
I. f (2) = 0;
II. Para x = – 1 tem-se uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$;
III. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -6$;
IV. x = 1 é raiz do polinômio $mx^2 + nx + p$;
V. $f(3) = \dfrac{1}{f(4)}$.

Determine os coeficientes **a**, **b**, **c**, **m**, **n** e **p**.

13. Para t > 0 e x ≥ 1, defino a função f_t, real de variável real, como:
$f_t(x) = x\left[\dfrac{x^t - (t+1)}{t}\right]$
Supondo-se que o limite indicado exista, define-se:
$f(x) = \lim\limits_{t\to 0} f_t(x)$, x ≥ 1.

Determine $f(e^2)$, onde **e** é a base dos logaritmos neperianos.

Derivadas

14. Derive a função $y = e^{x^x}$.

15. Determine as raízes de:
$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0$$
sabendo que: D_1 = m.d.c. $[f(x), f'(x)] = x^2 - x - 2$.

16. Se: $y = c^{3t}$
$t = \operatorname{sen}^2 x + 3x$
$x = 5u$

calcule o valor da derivada dy/du no ponto u = 0.

17. Se o deslocamento de um móvel, em função do tempo, é dado por $x = (t \cdot 2^t)^2 - \sqrt[3]{\sec^2(t^2-1)}$, determine a sua velocidade no instante t = 1. Use $\mathbb{L}$n 2 = 0,7.

18. Dada a função $v(x) = Ax^2 \cdot \mathbb{L}n(1/x)$, determine a constante A para que o valor máximo de v(x) seja igual a 1.

19. Sendo **f** e **g** funções reais de variável real, tais que:
I. $f(x) = \begin{cases} g(x)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;
II. **g** é derivável em x = 0 e g(0) = g'(0) = 0.
Calcule f'(0).

20. Determine os pontos de inflexão da gaussiana $y = e^{-x^2}$.

Obs.: **e** indica base dos logaritmos neperianos.

21. Dada a equação x – cos (xy) = 0, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

22. Seja um polinômio $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ com coeficientes reais. Sabe-se que p(0) = 0, p(2) = 4, que a reta tangente a p(x) no ponto (1, 1) é paralela à reta y = 2x + 2 e que a reta tangente a p(x) no ponto (2, 4) é perpendicular à reta $y = -\dfrac{1}{3}x - 4$. Determine os coeficientes a_3, a_2, a_1, a_0.

23. Se x(t) é o número de parasitas existentes no tempo **t**, em uma população hospedeira y(t), a relação entre as duas populações pode ser descrita por $y^Ae^{By} = kx^Re^{Sx}$ em que A, B, R e S são constantes apropriadas. Pede-se determinar $\dfrac{dy}{dx}$.

24. É dada a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+k}{\sqrt[3]{x^2-1}}, & \text{se } x \neq \pm 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \\ -1, & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

A) Se k = – 1, determine os pontos de descontinuidade de **f**.
B) Se k = 0:
   I. Determine as raízes de f'(x) = 0.
   II. Determine as raízes de f''(x) = 0.
   III. Faça o esboço do gráfico da função em coordenadas ortonormais.

25. Seja I = [– 1, 2] $\in \mathbb{R}$. Dê exemplo de uma função contínua em **I** tal que não exista um ponto a ∈] – 1, 2[que satisfaça a condição: f(x) – f(– 1) = 3f'(a).

26. A derivada de ordem **n** de uma função y = f(x) é a primeira derivada da derivada de ordem n – 1 da mesma função, ou seja:
$y^{(n)} = \dfrac{d}{dx} y^{(n-1)}$
Calcule $[(x^2 + 1)\operatorname{sen} x]^{(20)}$

27. Seja a função $f(x) = 6\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right)$.
A) Determine os pontos de máximo, mínimo e de inflexão de f(x), caso existam.
B) Trace o gráfico desta função.

28. Considere as funções: $f(x) = a^x$, em que $a > 1$
$g(x) = \sqrt{2px}$, em que $p > 0$

Mostre que uma condição necessária e suficiente para que seus gráficos se tangenciem é $a = e^{\frac{p}{e}}$.

Neste caso, determine, em função de **p**, a equação da tangente comum.

29. Para que valores de **p** a equação $x^4 + px + 3 = 0$ tem raiz dupla? Determine, em cada caso, as raízes da equação.

Prove que $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{x_n - x_{n-1}}{n} \right) = 0$

30. Seja $f: [0, \infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que:

I. $f(0) = 0$;

II. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$, $\forall x \in \,]0, \infty[$;

III. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Pede-se:

A) os intervalos onde **f** é crescente (respectivamente, decrescente).

B) os intervalos onde o gráfico de **f** é côncavo para cima (respectivamente, para baixo).

C) onde ocorrem os pontos de máximo e mínimo absolutos e de inflexão?

Defina $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:

$f(x), x \geq 0$

$-f(x), x < 0$

Esboce o gráfico de **g**.

Integral

31. Dada a curva cuja equação é $y = -2x^2 + 2x + 12$, determine:

A) a equação da reta tangente a esta curva, que é paralela à corda comum aos círculos:

$x^2 - 4x + y^2 - 10y + 4 = 0$

$x^2 + 8x + y^2 - 16y + 76 = 0$

B) a área da superfície limitada pela curva dada e a reta $2x - y + 4 = 0$ (em cm^2), usando o cálculo integral.

32. Sendo **m** um número real maior que 1, calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{x \cdot \ell n\, x(\ell n\, \ell n\, x)^m}$.

33. Calcule em valor absoluto, como aplicação do Cálculo Integral, a soma das áreas das superfícies finitas limitadas pelos gráficos da curva: $x^2 + 2 = 0$; e das assíntotas da hipérbole $4x^2 - y^2 + 16 = 0$.

34. Dada a função $F(x) = 1 + 2x + |x - 1|$, calcule a integral definida de $F(x)$ entre os limites -1 e 2.

Obs.: $|N|$ é valor absoluto de **N**.

35. Sabendo-se que a função $h(x)$ possui a seguinte propriedade: $\dfrac{d}{dx} h(x) = -h(x)$, pede-se:

A) a solução da equação $\int t f(t) = x h(x) + h(x) + 1$.

B) os valores de **c** e $h(x)$, de tal forma que $\int_0^c t\, f(t) = \dfrac{2 - e}{e}$.

Questões da Escola Naval

36. (2005) O valor do $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} \right)$ é igual a:

A) $\dfrac{3}{2}$

B) $\dfrac{3}{4}$

C) $-\dfrac{1}{3}$

D) $-\dfrac{3}{2}$

E) $-\dfrac{4}{3}$

37. (2006) Seja $y = y(x)$ uma função real que satisfaz à equação $8y - \left(\dfrac{x^6 + 2}{x^2} \right) = 0$, $x \in \mathbb{R}^*_-$. O valor de $\displaystyle\int x^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}\, dx$ é:

A) $\dfrac{x^6}{12} + \dfrac{\ell n|x|}{2} + c$

B) $-\dfrac{x^4}{8} + \dfrac{x^{-2}}{4} + c$

C) $-\dfrac{x^6}{12} - \ell n|x| + c$

D) $\dfrac{-x^6}{12} - \dfrac{\ell n|x|}{2} + c$

E) $\dfrac{x^4}{8} - \dfrac{x^{-2}}{4} + c$

38. (2006) Sejam **f** e **g** funções reais de variável real.

Se $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{\sqrt{x^2 + 15} - 8}, & \text{se } x \neq 7 \\ \mathbf{a}, \text{ se } x = 7 & \text{se } x = 7 \end{cases}$ é contínua em $x = 7$ e

$g(x) = \ell n^2 \left(2x + \dfrac{6}{7} \right)$, pode-se afirmar que $g'\left(\sqrt{7}a\right)$ vale:

A) 0

B) $\ell n\, 2$

C) 1

D) $\ell n\, 4$

E) 2

39. (2006) Seja L a reta tangente ao gráfico da função real, da variável real, $Y(x) = e^{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3} \cos\left(\dfrac{3\pi}{4} - 2x \right)$ no ponto $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

Se P e Q são os pontos de interseção de L com os eixos coordenados, a medida da área do triângulo de vértices P, Q e (0, 0) é:

A) $\dfrac{\sqrt{2}\pi\,(\pi + 1)}{2}$

B) $\dfrac{\sqrt{2}(\pi + 1)^2}{8}$

C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4} \left(\dfrac{\pi}{2} + 1 \right)^2$

D) $\dfrac{\sqrt{2}(\pi - 1)^2}{4}$

E) $\dfrac{\sqrt{2}}{4} \left(\dfrac{\pi}{2} + 2 \right)^2$

40. (2006) Sejam **f** e **g** duas funções reais e deriváveis tais que $f'(x) = \sin\left(\cos\sqrt{x}\right)$ e $g(x) = f(x^2)$, $x \in \mathbb{R}^*_+$. Pode-se afirmar que $g'(x^2)$ é igual a:

A) $2x \sin(\cos x^2)$

B) $2x^2 \cos(\cos x^2)$

C) $2x^2 \sin(\cos x^2)$

D) $2x \cos(\cos x)$

E) $2x^2 \sin(\cos x)$

41. (2007) O valor de $\lim\limits_{x\to 1^+}[\ell n\, x \cdot \ell n(x-1)]$ é:

A) $+\infty$
B) e
C) 1
D) 0
E) -1

42. (2007) A reta **r**, tangente à curva de equação $x-\sqrt{xy}+y=1$, no ponto P = (x, y), é paralela ao eixo das abscissas. Pode-se afirmar que o ponto P também pertence à reta de equação:

A) x = 0
B) y = 1
C) y – x + 2 = 0
D) y – x – 1 = 0
E) 3y + 3x – 1 = 0

43. (2007) Sejam **a** e **b** constantes reais positivas, a ≠ b. Se **x** é uma variável real, então, $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}dx$ é:

A) $(\ell n\, a-\ell n\, b)\left(\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}\right)-2x+c$

B) $(\ell n\, b-\ell n\, a)\left(\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}\right)-2x+c$

C) $\frac{1}{(\ell n\, a-\ell n\, b)}\left(\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}\right)-2x+c$

D) $\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}-2x+c$

E) $\frac{1}{(\ell n\, b-\ell n\, a)}\left(\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}\right)-2x+c$

44. (2008) O valor de $\int 4\text{sen}\,(2x)\cdot\cos^2 x\;dx$ é:

A) $-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{4}+C$
B) $-\cos 2x+\frac{\text{sen}^2 2x}{2}+C$
C) $-\frac{4\cos^3 x}{3}+C$
D) $-\frac{3}{2}\cos 2x+C$
E) $-\cos 2x-\frac{\cos 4x}{4}+C$

45. (2008) Sejam L_1 a reta tangente ao gráfico da função real $f(x)=e^{\sqrt{x^2-3x}}$ no ponto P(– · f(–1)) e L_2 a reta tangente ao gráfico da função y = f’(x) no ponto Q(–1 · f(–1)). A abcissa do ponto de interseção de L_1 e L_2 é:

A) $-\frac{1}{9}$
B) $-\frac{1}{3}$
C) $\frac{1}{9}$
D) $\frac{1}{3}$
E) 1

46. (2008) A função real **f**, de variável real, é definida por f(x) = 𝕃n(x^5 + x^3 + x). Podemos afirmar que a equação da reta normal ao gráfico da função inversa f^{-1} no ponto (𝕃n3, f^{-1}(𝕃n3)) é:

A) y – 3x + 3𝕃n3 = 1
B) 3y – x + 𝕃n3 = 3
C) y + 3x – 𝕃n27 = 1
D) 3y + x – 𝕃n3 = –3
E) y + 3x – 𝕃n = 3

47. (2008) Considere y = f(x) uma função real, de variável real, derivável até a 2ª ordem e tal que f”(x) + f(x) = 0, ∀x ∈ ℝ. Se g(x) = f’(x) sen x – F(x) cos x + $\cos^2$ x, então:

A) $g(x)=\frac{\text{sen}2x}{2}+C$
B) g(x) = C
C) $g(x)=\frac{\cos 2x}{2}+C$
D) $g(x)=2f(x)-\frac{\cos 2x}{2}+C$
E) g(x) = sen x + $\cos^2$ x + C

48. (2008) Seja **f** a função real de variável real, definida por $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$. Podemos afirmar que:

A) **f** é derivável ∀x ∈ ℝ*.
B) **f** é crescente ∀x ∈ $\mathbb{R}_+$.
C) **f** é positiva ∀x ∈ $\mathbb{R}_+$ e (1 · f(1)) é o ponto de inflexão.
D) a reta 3y – 3x + 1 = 0 é uma assíntota do gráfico da **f** e (0, f(0)) é o ponto de máximo local.
E) **f** é derivável ∀x ∈ $\mathbb{R}^+$ – {1} e 3y – 3x – 1 = 0 é uma assíntota do gráfico da **f**.

49. (EN/2008) Nas proposições abaixo, coloque (**V**) na coluna à esquerda quando a proposição for verdadeira e (**F**) quando for falsa.

( ) O triângulo cujos vértices são obtidos pela interseção das retas y – x + 2 = 0, y + x – 8 = 0 e y = 0 é isósceles.
( ) A equação da circunferência cujo centro coincide com o centro da hipérbole $2y^2-x^2=6$ e que passa pelos focos desta é $x^2+y^2=8$.
( ) Seja **f** uma função rel e de variável real. Se **a** pertence ao domínio de **f** e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=b$, então, f(a) = b.
( ) Seja **f** uma função real e de variável real. Se **f** possui derivadas de todas as ordens em um intervalo I ⊂ ℝ, x_0 ∈ I e $f''(x_0)=0$, então, (x_0, f(x_0)) é um ponto de inflexão do gráfico de **f**.
( ) Se **a**, **b** e **c** são, respectivamente, as medidas dos lados opostos aos ângulos A, B e C de um triângulo ABC, então, o determinante $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ \text{sen}A & \text{sen}B & \text{sen}C\end{vmatrix}$ é nulo, para quaisquer **a**, **b** e **c** em **ℝ*.**

Lendo a coluna da esquerda, de cima para baixo, encontra-se:

A) V – V – V – F – V
B) V – V – V – V – F
C) F – F – F – V – F
D) F – F – V – V – V
E) V – F – F – F – V

50. (EN/2008) A equação $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{3}\text{sen}\,5x\cos 3x$ é dita uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem.

Quando x = 0, $\frac{dy}{dx}$ vale $\frac{43}{48}$ e y vale 2. O volume do cilindro circular reto, cujo raio da base mede $2\sqrt{2}$ m e cuja altura, em metros, é o valor de **y** quando x = 4π, vale, em metros cúbicos:

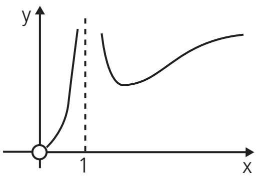
A) 4π(2π + 1)
B) 8π(4π + 1)
C) 4π(4π + 1)
D) 16π(π + 1)
E) 16π(2π + 1)

51. (EN/2008) Cada termo de uma sequência de números reais é obtido pela expressão $\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$, com n ∈ **ℝ*.** Se f(x) = $x\,\text{arcsen}\left(\frac{x}{6}\right)$ e S_n é a soma dos **n** primeiros termos da sequência dada, então, $f'\left(\frac{301}{100}S_{300}\right)$ vale:

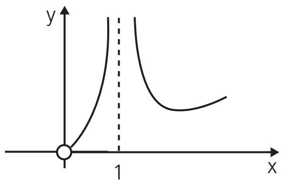
A) $\frac{2\sqrt{3}+\pi}{6}$
B) $\frac{6\sqrt{5}+5\pi}{30}$
C) $\frac{\sqrt{3}+2\pi}{18}$
D) $\frac{4\sqrt{3}+3\pi}{12}$
E) $\frac{\sqrt{3}+\pi}{3}$

52. (EN/2008) A melhor representação gráfica para a função real **f**, de variável real, definida por $\left|\dfrac{x}{\ell n x}\right|$ é:

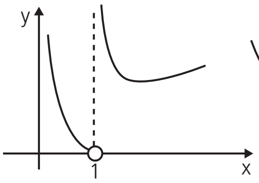
A)



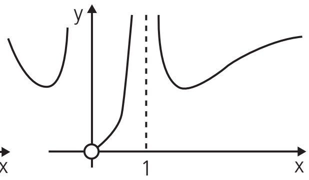
B)



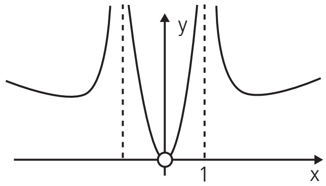
C)



D)



E)



53. (EN/2008) A medida da área da região plana limitada pela curva de equação $y = \sqrt{4x - x^2}$ e pela reta de equação y = x mede, em unidades de área:

A) $\dfrac{\pi}{4} + 2$
B) $\pi - 2$
C) $\pi + 4$
D) $\pi + 2$
E) $\pi - 1$

54. (EN/2008) O valor de $\displaystyle\int \frac{1 + x^2 + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{(1 - x^4)(1 + x^2)}}\,dx$ é:

A) arc cos x + arc cotg x + C
B) arc sen x – arc tg x + C
C) – arc sen x – arc cotg x + C
D) arc cos x + arc tg x + C
E) – arc cos x + arc tg x + C

55. (EN/2008) Considere a função real **f**, de variável real, definida por f(x) = x + ℓn x, x > 0. Se **g** é a função inversa de **f**, então, g”(1) vale:

A) 1
B) 0,5
C) 0,125
D) 0,25
E) 0

56. (EN/2009) Seja **f** uma função real, de variável real, definida por f(x) = $\text{arc tg}\left(\dfrac{x^3}{3} - x\right)$, x > 1, e **L** a reta tangente ao gráfico da função y = f^{-1} (x) no ponto $\left(0, f^{-1}(0)\right)$. Quando mede, em unidades de área, a área do triângulo formado pela reta **L** e os eixos coordenados?

A) $\dfrac{3}{2}$
B) 3
C) 1
D) $\dfrac{2}{3}$
E) $\dfrac{4}{3}$

57. (EN/2009) Considere a função real **f** de variável real e as seguintes proposições.

I. Se **f** é contínua em um intervalo aberto contendo $x = x_0$ e tem um máximo local em $x = x_0$, então, $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$;
II. Se **f** é derivável em um intervalo aberto contendo $x = x_0$ e $f'(x_0) = 0$, então, **f** tem um máximo ou mínimo local em $x = x_0$;
III. Se **f** tem derivada estritamente positiva em todo o seu domínio, então, **f** é crescente em todo o seu domínio;
IV. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ é infinito, então, $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)} = 1$;
V. Se **f** é derivável $\forall x \in R$, então, $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{f(x) - f(x - 2s)}{2s} = 2f'(x)$.

Podemos afirmar que:
A) todas são falsas.
B) todas são verdadeiras.
C) apenas uma delas é verdadeira.
D) apenas duas delas são verdadeiras.
E) apenas uma delas é falsa.

58. (EN/2009) Qual o valor de $\int \text{sen}\,6x \cos x\,dx$?

A) $-\dfrac{7\cos 7x}{2} - \dfrac{5\cos 5x}{2} + c$
B) $\dfrac{7\,\text{sen}\,7x}{2} + \dfrac{5\,\text{sen}\,5x}{2} + c$
C) $\dfrac{\text{sen}\,7x}{14} + \dfrac{\text{sen}\,5x}{10} + c$
D) $-\dfrac{\cos 7x}{14} - \dfrac{\cos 5x}{10} + c$
E) $\dfrac{7\cos 7x}{2} + \dfrac{5\cos 5x}{2} + c$

59. (EN/2010) Sejam f(x) = $\ell n(\cos x)^2$, $0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$ e F (x) = $\int\left[\left(f'(x)\right)^2 + \text{sen}^2 2x\right]dx$. Se F (0) = $\dfrac{7\pi}{8} - 5$, então, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}$ F(x) vale:

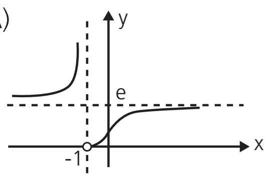
A) – 2
B) –1
C) 0
D) 1
E) 2

60. (EN/2010) Sejam **f** e **g** funções reais de variável real definidas por f(x) = 2 – arc sen(x^2 + 2x) com $-\dfrac{\pi}{18} < x < \dfrac{\pi}{18}$ e g (x) = f(3x). Seja L a reta normal ao gráfico da função g^{-1} no ponto (2, g^{-1}(2)), sendo g^{-1} a função inversa da função **g**. A reta L contém o ponto:

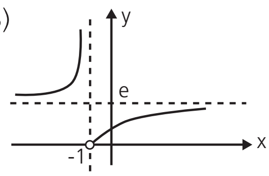
A) (–1, 6)
B) (–4, –1)
C) (1, 3)
D) (1, –6)
E) (2, 1)

61. (EN/2010) A figura que melhor representa o gráfico da função $y = e^{\frac{x-1}{x+1}}$ é:

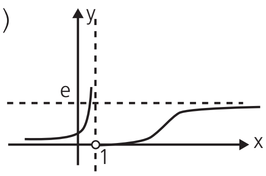
A)



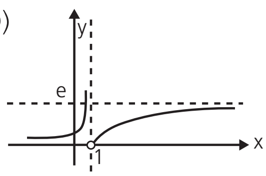
B)



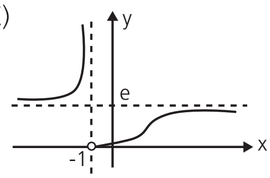
C)



D)



E)



Série de Taylor

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots}$$

I.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots,$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} = e,\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e,\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = 5e$$

II. $\cosh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots$

III. $\operatorname{sen} h x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots$

IV. $e^{ix} = \operatorname{cis} x$

V. $\ell n(x+1) = \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}, \ldots$

VI. $(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^r$, **r** real.

Exercícios Propostos

01. O produto $\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots\right)\left(1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} \ldots\right)$ é:

A) 1
B) e^{-2}
C) $-e^2$
D) -1
E) n.d.a.

02. O valor de $(1+3)\,\ell n3 + \dfrac{(1+3)^2}{2!}(\ell n3) + \dfrac{(1+3)^3}{3!}(\ell n3) + \ldots$ é:

A) 18
B) 28
C) 36
D) 45
E) n.d.a.

03. Se $A = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{(2n-1)!}$, $B = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{(2n+1)}$, então, AB é igual a:

A) 1
B) e^2
C) $\dfrac{e-1}{e+1}$
D) $\dfrac{e+1}{e-1}$
E) n.d.a.

04. O valor de $\left(1 + \dfrac{a^2x^2}{2!} + \dfrac{a^4x^4}{4!} + \ldots\right)^2 - \left(ax + \dfrac{a^3x^3}{3!} + \dfrac{a^5x^5}{5!} + \ldots\right)^2$ é igual a:

A) e^{ax}
B) e^{-ax}
C) 0
D) 1
E) n.d.a.

05. O valor de $\dfrac{2}{3!} + \dfrac{4}{5!} + \dfrac{6}{7!} + \ldots$ é igual a:

A) $2e^{-2}$
B) e^{-2}
C) e^{-1}
D) $2e^{-1}$
E) n.d.a.

06. O valor de $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{1+2}{3!} + \dfrac{1+2+3}{4!} + \dfrac{1+2+3+4}{5!} + \ldots$ é igual a:

A) $\dfrac{e}{3}$
B) $\dfrac{e}{4}$
C) $\dfrac{e}{2}$
D) $\dfrac{e}{5}$
E) n.d.a.

07. O valor de $\dfrac{1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{3!} + \frac{2^6}{4!} + \ldots}{1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{2^2}{4!} + \ldots}$ é igual a:

A) $e^2 + 1$
B) $e^2 - 1$
C) $\dfrac{e-1}{e+1}$
D) $\dfrac{e+1}{e-1}$
E) n.d.a.

08. O valor de $1 + \dfrac{(\ell na)^2}{2!} + \dfrac{(\ell na)^4}{4!} + \ldots$

A) a
B) $\dfrac{1}{a}$
C) $\dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)$
D) $\dfrac{1}{2}\left(e^a + e^{-a}\right)$
E) n.d.a.

09. O valor de $\dfrac{9}{1!} + \dfrac{19}{2!} + \dfrac{35}{3!} + \dfrac{57}{4!} + \dfrac{85}{5!} + \ldots$ é igual a:

A) $7e - 3$
B) $12e - 5$
C) $16e - 5$
D) $15e - 4$
E) n.d.a.

10. A soma da série $\frac{3}{1!}+\frac{5}{2!}+\frac{9}{3!}+\frac{15}{4!}+\frac{23}{5!}+\ldots$ é:

A) 4e – 5 B) 4e + 3
C) 3e – 4 D) 3e + 4
E) n.d.a.

11. A soma da série $\frac{2}{1!}+\frac{6}{2!}+\frac{12}{3!}+\frac{20}{4!}+\ldots$ é:

0A) $\frac{3e}{2}$ B) e
C) 2e D) 3e
E) n.d.a.

12. A soma da série $9\frac{16}{2!}+\frac{27}{3!}+\frac{42}{4!}+\ldots$ é:

A) 5e B) 7e
C) 9e D) 11e – 6
E) n.d.a.

13. A soma da série $4+\frac{11}{2!}+\frac{22}{3!}+\frac{37}{4!}+\frac{56}{5!}+\ldots$ é:

A) 6e B) 6e – 1
C) 5e D) 5e + 1
E) n.d.a.

14. A soma da série $2+\frac{12}{2!}+\frac{28}{3!}+\frac{50}{4!}+\frac{78}{5!}+\ldots$ é:

A) e B) 3e
C) 4e D) 5e + 2
E) n.d.a.

15. O valor de $\frac{1^2}{3!}+\frac{2^2}{4!}+\frac{3^2}{5!}+\ldots$ é igual a:

A) e B) 2e
C) 2e – 5 D) 5e + 2
E) n.d.a.

Exercícios

Limite

01. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$

02. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$

03. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right]$

04. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$

05. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

06. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$

07. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right)$

08. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$

09. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\text{ sen }n!}{n^2+1}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1000x}{x^2-1}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{3x+7}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$

20. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

21. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2+1}$

22. $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$

23. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

24. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

25. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

26. $\lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

27. $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

28. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

29. $\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

30. $\lim_{x\to 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

31. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

32. $\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

33. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

34. $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\,(x>0)$

35. $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}\,(x\neq 0)$

36. $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^3-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$

37. $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$

38. $\lim_{x\to +\infty}\left[\sqrt{x(x+a)}-x\right]$

39. $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6-x}\right)$

40. $\lim_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

41. $\lim_{x\to +\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$

- Nas questões de **42** a **66**, calcule os limites trigonométricos.

42.

A) $\lim_{x\to 2} \frac{\text{sen } x}{x}$

B) $\lim_{x\to \infty} \frac{\text{sen } x}{x}$

43. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } 3x}{x}$

44. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } 5x}{\text{sen } 2x}$

45. $\lim_{x\to 1} \frac{\text{sen } \pi x}{\text{sen } 3\pi x}$

46. $\lim_{n\to \infty}\left(n \text{ sen}\frac{\pi}{n}\right)$

47. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

48. $\lim_{x\to a} \frac{\text{sen } x-\text{sen } a}{x-a}$

49. $\lim_{x\to a} \frac{\cos x-\cos a}{x-a}$

50. $\lim_{x\to -2} \frac{\text{tg } \pi x}{x+2}$

51. $\lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}\,x}{h}$

52. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{sen } x-\cos x}{1-\text{tg } x}$

53.

A) $\lim_{x\to 0} x\,\text{sen}\frac{1}{x}$

B) $\lim_{x\to \infty} x\,\text{sen}\frac{1}{x}$

54. $\lim_{x\to 1}(1-x)\,\text{tg}\frac{\pi x}{2}$

55. $\lim_{x\to 0} \text{cotg } 2x \text{ cotg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

56. $\lim_{x\to \pi} \frac{1-\text{sen}\frac{x}{2}}{\pi-x}$

57. $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$

58. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$

59. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg } x-\text{sen } x}{x^3}$

60. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{arc sen } x}{x}$

61. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{arc tg } 2x}{\text{sen } 3x}$

62. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\text{sen } \pi x}$

63. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\text{sen } 2x}{x+\text{sen } 3x}$

64. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$

65. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^3}$

66. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\text{sen } x}-\sqrt{1-\text{sen } x}}{x}$

- Nas questões de **67** a **78**, calcule os limites exponenciais.

67. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^x$

68. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$

69. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$

70. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\text{sen } x}{x}}$

71. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$

72. $\lim\limits_{n\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

73. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$

74. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

75. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

76. $\lim\limits_{n\to \infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$

77. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\text{sen } x)^{\frac{1}{x}}$

78.

A) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$

B) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

Observação: Se existe e é positivo o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, então, $\lim\limits_{x\to a}(\ell n f(x)) = \ell n\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$, pois Ln x é uma função contínua para x > 0.

Exemplo: Demonstrativo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ell n(1+x)}{x}=1$.

Solução: Temos:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ell n(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\ell n(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ell n\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ell n \ \ e=1.$$
A fórmula (*) usada com frequência durante a resolução dos exercícios.

- Nas questões **79** a **88**, calcule os limites.

79. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\ell n(2x+1)-\ell n(x+2)\right]$

80. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ell n(1+10x)}{x}$

81. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\ell n\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$

82. $\lim\limits_{x\to \infty} x\left[\ell n(x+1)-\ell n x\right]$

83. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ell n(\cos x)}{x^2}$

84. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

85. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}(a>0)$

86. $\lim\limits_{n\to \infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)(a>0)$

87. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

88. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\text{sen } x}$

Continuidade

89. Uma função é dada pelas fórmulas:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, \text{ quando } x\neq 2\\ A, \text{ quando } x=2\end{cases}$$

Como deve-se escolher o valor da função A = f(2), para que a função f(x) completada desta forma seja contínua, quando x = 2? Construa o gráfico da função y = f(x).

90. O segundo membro da igualdade $f(x)=1-x\text{sen}\dfrac{1}{x}$ carece de sentido, quando x = 0. Como escolher o valor de f(0) para que a função f(x) seja contínua, quando x = 0?

91. A função f(x) é indeterminada, quando x = 0. Determine f(0) de forma que f(x) seja contínua, quando x = 0, se:

A) $f(x) = \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$ (**n** é número natural)

B) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

C) $f(x) = \dfrac{\ell n(1+x) - \ell n(1-x)}{x}$

D) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$

E) $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

F) $f(x) = x \operatorname{cotg} x$

Derivadas

- Nas questões de **92** a **244**, calcule a derivada $\dfrac{dy}{dx}$.

Funções algébricas

92. $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

93. $y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}x + x^2 - 0{,}5x^4$

94. $y = ax^2 + bx + c$

95. $y = -\dfrac{5x^3}{a}$

96. $y = at^m + bt^{m+n}$

97. $y = \dfrac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

98. $y = \dfrac{\pi}{x} + \ell n 2$

99. $y = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{3}{2}} + x^{-3}$

100. $y = x^2 \sqrt[3]{x^2}$

101. $y = \dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}}$

102. $y = \dfrac{a+bx}{c+dx}$

103. $y = \dfrac{2x+3}{x^2 - 5x + 5}$

104. $y = \dfrac{2}{2x-1} - \dfrac{1}{x}$

105. $y = \dfrac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}$

Função trigonométrica e circulares inversas

106. $y = 5\operatorname{sen} x + 3\cos x$

107. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$

108. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

109. $y = 2t \operatorname{sen} t - (t^2 - 2)\cos t$

110. $y = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,cotg} x$

111. $y = x \operatorname{cotg} x$

112. $y = x \operatorname{arc\,sen} x$

113. $y = \dfrac{(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x - x}{2}$

Funções exponenciais e logarítmicas

114. $y = x^7 \cdot e^x$

115. $y = (x-1)e^x$

116. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

117. $y = \dfrac{x^5}{e^x}$

118. $f(x) = e^x \cos x$

119. $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$

120. $y = e^x \operatorname{arc\,sen} x$

121. $y = \dfrac{x^2}{\ell n x}$

122. $y = x^3 \ell n x - \dfrac{x^3}{3}$

123. $y = \dfrac{1}{x} + 2\ell n x - \dfrac{\ell n x}{x}$

124. $y = \ell n\, x \log x - \ell x\, a \log_a x$

Funções compostas

125. $y = \left(\dfrac{ax+b}{c}\right)^3$

126. $f(x) = (2a + 3by)^2$

127. $y = (3 + 2x^2)^4$

128. $y = \dfrac{3}{56(2x-1)^7} - \dfrac{1}{24(2x-1)^6} - \dfrac{1}{40(2x-1)^5}$

129. $y = \sqrt{1-x^2}$

130. $y = \sqrt[3]{a + bx^3}$

131. $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$

132. $y = \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$

133. $y = \sqrt{\text{cotg } x} - \sqrt{\text{cotg } \alpha}$

134. $y = 2x + 5\cos^3 x$

135. $x = \text{cossec}^2\, t + \sec^2 t$

136. $f(x) = -\dfrac{1}{6(1-3\cos x)^2}$

137. $y = \dfrac{1}{3\cos^3 x} - \dfrac{1}{\cos x}$

138. $y = \sqrt{\dfrac{3\text{sen } x - 2\cos x}{5}}$

139. $y = \sqrt[3]{\text{sen}^2 x} + \dfrac{1}{\cos^3 x}$

140. $y = \sqrt{1 + \text{arc sen } x}$

141. $y = \sqrt{\text{arc tg } x} - (\text{arc sen } x)^3$

142. $y = \dfrac{1}{\text{arc tg } x}$

143. $y = \sqrt{xe^x + x}$

144. $y = \sqrt[3]{2e^x - 2^x + 1} + \ell n^5 x$

145. $y = \text{sen}(x^2 - 5x + 1) + \text{tg}\dfrac{a}{x}$

146. $f(x) = \cos(\alpha x + \beta)$

147. $f(t)\ \text{sen } t\ \text{sen}(t + \varphi)$

148. $y = \dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$

149. $f(x) = \text{arc tg}\dfrac{x}{a}$

150. $y = -\dfrac{1}{20}\cos(5x^2) - \dfrac{1}{4}\cos x^2$

151. $y = \text{arc sen}\dfrac{1}{x^2}$

152. $f(x) = \text{arc cos}\sqrt{x}$

153. $y = \text{arc tg}\dfrac{1}{x}$

154. $y = \text{arc tg}\dfrac{1+x}{1-x}$

155. $y = 5e^{-x^2}$

156. $y = \dfrac{1}{5x^2}$

157. $y = x^2 10^{2^x}$

158. $f(t) = t\ \text{sen } 2^t$

159. $y = \text{arc cos } e^x$

160. $y = \ell n(2x + 7)$

161. $y = \log \text{sen } x$

162. $y = \ell n(1 - x^2)$

163. $y = \ell n^2 x - \ell n(\ell n\, x)$

164. $y = \sqrt{\ell n x + 1} + \ell n\left(\sqrt{x} + 1\right)$

Funções diversas

165. $y = \text{sen}^3 5x \cos^2 \dfrac{x}{3}$

166. $y = -\dfrac{11}{2(x-2)^2} - \dfrac{4}{x-2}$

167. $y = -\dfrac{15}{4(x-3)^4} - \dfrac{10}{3(x-3)^3} - \dfrac{1}{2(x-3)^2}$

168. $y = \dfrac{x^8}{8(1-x^2)^4}$

169. $y = \dfrac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{x}$

170. $y = \dfrac{x}{a^2\sqrt{a^2 + x^2}}$

171. $y = \dfrac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$

172. $y = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{18}{7}x\sqrt[6]{x} + \dfrac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}$

173. $y = \dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}$

174. $y = \dfrac{4}{3}\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}$

175. $y = x^4(a - 2x^3)^2$

176. $y = \left(\dfrac{a + bx^n}{a - bx^n}\right)^m$

177. $y = \dfrac{9}{5(x+2)^5} - \dfrac{3}{(x+2)^4} + \dfrac{2}{(x+2)^3} - \dfrac{1}{2(x+2)^2}$

178. $y = (a + x)\sqrt{a - x}$

179. $y=\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}$

180. $z=\sqrt[3]{y+\sqrt{y}}$

181. $f(t)=(2t+1)(3t+2)\sqrt[3]{3t+2}$

182. $x=\dfrac{1}{\sqrt{2ay-y^2}}$

183. $x=\ell n\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)-\ell n\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)$

184. $y=\dfrac{1}{15}\cos^3 x\left(3\cos^2 x-5\right)$

185. $y=\dfrac{\left(tg^2x-1\right)\left(tg^4x+10tg^2x+1\right)}{3tg^3x}$

186. $y = tg^2\ 5x$

187. $y=\dfrac{1}{2}\text{sen}\left(x^2\right)$

188. $y = sen^2\ (t^3)$

189. $y = 3sen\ x\cos^2 x + sen^3\ x$

190. $y=\dfrac{1}{3}tg^3\ x-tg\ x+x$

191. $y=-\dfrac{\cos x}{3sen^3x}+\dfrac{4}{3}\text{cotg}\ x$

192. $y=\sqrt{\alpha sen^2 x+\beta\cos^2 x}$

193. $y = arc\ sen\ x^2 + arc\ cos\ x^2$

194. $y=\dfrac{1}{2}(\text{arcsen}\ x)^2\ \text{arccos}\ x$

195. $y=\text{arcsen}\ \dfrac{x^2-1}{x^2}$

196. $y=\text{arcsen}\ \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

197. $y=\dfrac{\text{arccos}\ x}{\sqrt{1-x^2}}$

198. $y=\dfrac{1}{\sqrt{b}}\text{arcsen}\left(x\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$

199. $y=\sqrt{a^2-x^2}+a\,\text{arcsen}\dfrac{x}{a}$

200. $y=\sqrt{a^2-x^2}+a^2\,\text{arcsen}\dfrac{x}{a}$

201. $y=\text{arcsen}(1-x)+\sqrt{2x-x^2}$

202. $y=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\text{arcsen}\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x-x^2}$

203. $y=\ell n(\text{arcsen}\ 5x)$

204. $y=\text{arcsen}(\ell n\ x)$

205. $y=\text{arc}\,\text{tg}\dfrac{x\,\text{sen}\ \alpha}{1-x\cos\ \alpha}$

206. $y=\dfrac{2}{3}\text{arc}\,\text{tg}\dfrac{5tg\dfrac{x}{2}+4}{3}$

207. $y=3b^2\text{arc}\,\text{tg}\sqrt{\dfrac{x}{b-x}}-(3b+2x)\sqrt{bx-x^2}$

208. $y=-\sqrt{2}\text{arc}\,\text{tg}\dfrac{\text{tg}\ x}{\sqrt{2}}-x$

209. $y=\sqrt{e^{ax}}$

210. $y=e^{sen^2x}$

211. $F(x)=\left(2ma^{mx}+b\right)^p$

212. $F(t)=e^{\alpha t}\cos\beta t$

213. $y=\dfrac{(\alpha\,\text{sen}\ \beta x-\beta\cos\ \beta x)e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}$

214. $y=\dfrac{1}{10}e^{-x}(3\text{sen}\ 3x-\cos\ 3x)$

215. $y=x^n a^{-x^2}$

216. $y=\sqrt{\cos\ x}a^{\sqrt{\cos\ x}}$

217. $y=3^{\text{cotg}\frac{1}{x}}$

218. $y=\ell n\left(ax^2+bx+c\right)$

219. $y=\ell n\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$

220. $y=x-2\sqrt{x}+2\ell n\left(1+\sqrt{x}\right)$

221. $y=\ell n\left(a+x+\sqrt{2ax+x^2}\right)$

222. $y=\dfrac{1}{\ell n^2 x}$

223. $y=\ell n\cos\dfrac{x-1}{x}$

224. $y=\ell n\dfrac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$

225. $y=\ell n\dfrac{(x-1)^3(x-2)}{x-3}$

226. $y=-\dfrac{1}{2sen^2x}+\ell n\,\text{tg}\ x$

227. $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\dfrac{a^2}{2}\ell n\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$

228. $y=\ell n\,\ell n\left(3-2x^3\right)$

229. $y=5\ell n^3(ax+b)$

230. $y = \ell n \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}$

231. $y = \dfrac{m}{2}\ell n\left(x^2-a^2\right)+\dfrac{n}{2a}\ell n\dfrac{x-a}{x+a}$

232. $y = x \cdot \text{sen}\left(\ell n x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

233. $y = \dfrac{1}{2}\ell n\, \text{tg}\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos x}{\text{sen}^2 x}$

234. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \ell n\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$

235. $y = \dfrac{1}{3}\ell n\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$

236. $y = 2^{\text{arcsen } 3x} + \left(1 - \text{arc}\cos 3x\right)^2$

237. $y = 3^{\frac{\text{sen } ax}{\cos\ bx}} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\text{sen}^3 ax}{\cos^3 bx}$

238. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\ell n\dfrac{\text{tg}\frac{x}{1}+2-\sqrt{3}}{\text{tg}\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}}$

239. $y = \text{arc tg } \ell n\, x$

240. $y = \ell n\, \text{arcsen } x + \dfrac{1}{2}\ell n^2 x + \text{arcsen}\,\ell n\, x$

241. $y = \text{arc tg}\,\ell n\dfrac{1}{x}$

242. $y = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\text{arc tg}\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{6}\ell n\dfrac{x-1}{x+1}$

243. $y = \ell n\dfrac{1+\sqrt{\text{sen } x}}{1-\sqrt{\text{sen } x}} + 2\,\text{arc tg}\sqrt{\text{sen } x}$

244. $y = \dfrac{3}{4}\ell n\dfrac{x^2+1}{x^2-1} + \dfrac{1}{4}\ell n\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{1}{2}\text{arc tg } x$

Derivação Implícita

Encontre a derivada $y' = \dfrac{dy}{dx}$ das seguintes funções implícitas **y** nas questões de **245** a **258**.

245. $2x - 5y + 10 = 0$

246. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

247. $x^3 + y^3 = a^3$

248. $x^3 + x^2y + y^2 = 0$

249. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

250. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{a^2}$

251. $y^3 = \dfrac{x-y}{x+y}$

252. $y - 0{,}3 \text{ sen } y = x$

253. $a \cos^2 (x + y) = b$

254. $\text{tg } y = xy$

255. $xy = \text{arc tg}\dfrac{x}{y}$

256. $\text{arc tg } (x + y) = x$

257. $e^y = x + y$

258. $\ell n x + e^{-\frac{y}{x}} = c$

Regra de L'Hôpital

- Nas questões de **259** a **278**, calcule os limites.

259. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x - \text{sen } x}{x^3}$

260. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\text{sen}\dfrac{\pi x}{2}}$

261. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos h\, x - 1}{1-\cos x}$

262. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg } x - \text{sen } x}{x - \text{sen } x}$

263. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2 x - 2\text{tg } x}{1+\cos 4x}$

264. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\text{tg } x}{\text{tg } 5x}$

265. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$

266. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ell n x}{\sqrt[3]{x}}$

267. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\pi}{x}}{\text{cotg}\dfrac{\pi x}{2}}$

268. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ell n(\text{sen } mx)}{\ell n \text{sen } x} (m > 0)$

269. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

270. $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{3}{4+\ell n x}}$

271. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\text{sen } x}$

272. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$

273. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$

274. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

275. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\text{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\text{tg}\frac{\pi x}{2}}$

276. $\lim\limits_{x\to +0}(\text{cotg } x)^{\frac{1}{\ell n x}}$

277. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\text{tg }x}$

278. $\lim\limits_{x\to 0}(\text{cotg } x)^{\text{sen } x}$

Assíntotas

Se um ponto (x, y) se desloca continuamente por uma curva y = f(x) de tal forma que pelo menos uma de suas coordenadas tenda ao infinito, enquanto que a distância entre este ponto e uma reta determinada tenda a zero, esta reta recebe o nome de assíntota de curva.

Assíntotas verticais (paralelas ao eixo OY)

Se existe um número **a** tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ a reta x = a é a assíntota (vertical).

Assíntotas oblíquas (em relação ao eixo das coordenadas)

Se existem os limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k_1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-k_1x\right] = b_1$,

a reta $y = k_1x + b_1$ será assíntota (oblíqua à direita, ou se $k_1 = 0$, horizontal direita, paralela ao eixo OX).

Se existem os limites $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = k_2$ e $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-k_2x\right] = b_2$,

a reta $y = k_2x + b_2$ é assíntota (oblíqua à esquerda, ou se $k_2 = 0$, horizontal esquerda, paralela ao eixo OX). O gráfico da função y = f(x) (que se supõe uniforme) não pode ter mais de uma assíntota direita (oblíqua ou horizontal), nem mais de uma assíntota esquerda (oblíqua ou horizontal).

Exemplo 1. Achar as assíntotas da curva $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.

Solução. Igualando a zero o denominador, obtemos duas assíntotas verticais: x = –1 e x = 1.

Vamos procurar as assíntotas oblíquas. Quando $x \to +\infty$, teremos:

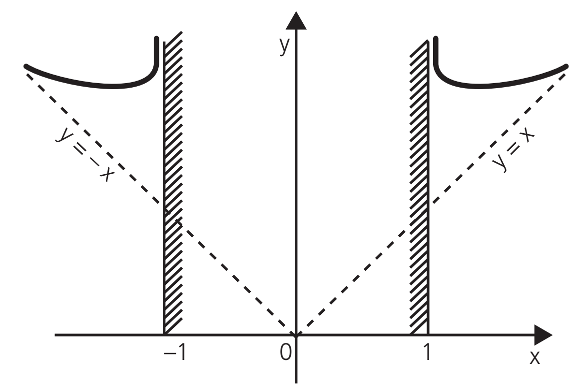
$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}(y-x) = \lim_{x+\infty}\frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = 0$$

Portanto, a assíntota direita será a reta y = x. Por analogia, quando $x \to -\infty$, teremos:

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = -1$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}(y-x) = 0$$



Dessa forma, a assíntota esquerda é y = – x. A investigação das assíntotas desta curva pode simplificar-se se considerarmos sua simetria.

- Nas questões **279** a **291,** encontre as assíntotas das curvas.

279. $y = \frac{1}{(x-2)^2}$

280. $y = \frac{x}{x^2-4x+3}$

281. $y = \frac{x^2}{x^2-4}$

282. $y = \frac{x^3}{x^2+9}$

283. $y = \sqrt{x^2-1}$

284. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

285. $y = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$

286. $y = x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$

287. $y = e^{-x^2} + 2$

288. $y = \frac{1}{1-e^x}$

289. $y = e^{\frac{1}{x}}$

290. $y = \frac{\text{sen } x}{x}$

291. ln (1 + x)

- Construa os gráficos das funções que se indicam a seguir, determinando o campo de existência de cada função, os pontos de descontinuidade, os pontos extremos, os intervalos de crescimento e decrescimento, os pontos de inflexão de seus gráficos, a direção da concavidade e da assíntota dos gráficos.

292. $y = x^3 - 3x^2$

293. $y = \frac{6x^2 - x^4}{9}$

294. $y = (x-1)^2(x+2)$

295. $y = \frac{(x-2)^2(x+4)}{4}$

296. $y = \frac{(x^2-5)^3}{125}$

297. $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$

298. $y = \dfrac{x^4 - 3}{x}$

299. $y = \dfrac{x^4 + 3}{x}$

300. $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$

301. $y = \dfrac{1}{x^2 + 3}$

302. $y = \dfrac{8}{x^2 - 4}$

303. $y = \dfrac{4x}{4 + x^2}$

304. $y = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$

305. $y = -\dfrac{x}{x^2 - 4}$

306. $y = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$

307. $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$

308. $y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$

309. $y = \sqrt{8 + x} + \sqrt{8 - x}$

310. $y = x\sqrt{x + 3}$

311. $y = \sqrt{x^3 - 3x}$

312. $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$

313. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$

314. $y = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$

315. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$

316. $y = \sqrt[3]{(x+4)^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2}$

317. $y = \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x-4)^2}$

318. $y = \dfrac{4}{\sqrt{4 - x^2}}$

319. $y = \dfrac{8}{x\sqrt{x^2 - 4}}$

320. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

321. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$

Integral

- Calcule as seguintes integrais indefinidas nas questões **322** a **359**.

322. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 5x + 7}{x + 3}\,dx$

323. $\displaystyle\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x - 1}\,dx$

324. $\displaystyle\int \left(a + \frac{b}{x - a}\right)^2 dx$

325. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$

326. $\displaystyle\int \frac{b\,dy}{\sqrt{1 - y}}$

327. $\displaystyle\int \sqrt{a - bx}\,dx$

328. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$

329. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} + \ell n\, x}{x}\,dx$

330. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2 + 5}$

331. $\displaystyle\int \frac{dx}{7x^2 - 8}$

332. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+b) - (a-b)x^2}\,(0 < b < a)$

333. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2 + 2}\,dx$

334. $\displaystyle\int \frac{x^3}{a^2 - x^2}\,dx$

335. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 4}\,dx$

336. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{7 + 8x^2}}$

337. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{7 - 5x^2}}$

338. $\displaystyle\int \frac{2x - 5}{3x^2 - 2}\,dx$

339. $\displaystyle\int \frac{3 - 2x}{5x^2 + 7}\,dx$

340. $\displaystyle\int \frac{3x + 1}{\sqrt{5x^2 + 1}}\,dx$

341. $\displaystyle\int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$

342. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2 - 5}$

343. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{2x^2 + 3}$

344. $\int \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}dx\,(a>0)$

345. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^4-x^4}}\,(a>0)$

346. $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx$

347. $\int \frac{x^2dx}{x^6-1}$

348. $\int \sqrt{\frac{\operatorname{arcsen} x}{1-x}}dx$

349. $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{4+x^2}dx$

350. $\int \frac{x-\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}dx$

351. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\,\ell n\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}$

352. $\int ae^{-mx}dx$

353. $\int 4^{2-3x}dx$

354. $\int (e^t-e^{-t})dt$

355. $\int \left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2dx$

356. $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}dx$

357. $\int \frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}}dx$

358. $\int e^{-(x^2+1)}xdx$

359. $\int x\cdot 7^{x^2}dx$

- Nas questões **360** a **383,** achar as seguintes integrais, utilizando a fórmula de integrais por partes.

360. $\int \ell n x\,dx$

361. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

362. $\int \operatorname{arcsen} x\,dx$

363. $\int x \operatorname{sen} x\,dx$

364. $\int x\cos 3x\,dx$

365. $\int \frac{x}{e^x}dx$

366. $\int x\cdot 2^{-x}dx$

367. $\int x^2e^{3x}dx$

368. $\int (x^2-2x+5)e^{-x}dx$

369. $\int x^3e^{-\frac{x}{3}}dx$

370. $\int x \operatorname{sen} x\cos x\,dx$

371. $\int (x^2+5x+6)\cos 2x\,dx$

372. $\int x^2\ell n x\,dx$

373. $\int \ell n^2 x\,dx$

374. $\int \frac{\ell n x}{x^3}dx$

375. $\int \frac{\ell n x}{\sqrt{x}}dx$

376. $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$

377. $\int x \operatorname{arcsen} x\,dx$

378. $\int \ell n\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

379. $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$

380. $\int \frac{x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx$

381. $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$

382. $\int 3^x\cos x\,dx$

383. $\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx$

384. $\int \operatorname{sen}(\ell n x)dx$

- Nas questões **385** a **400**, ache as integrais envolvendo potências de funções trigonométricas.

385. $\int \cos^2 x\,dx$

386. $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$

387. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,dx$

388. $\int \operatorname{sen}^3\frac{x}{2}\cos^5\frac{x}{2}dx$

389. $\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x}dx$

390. $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$

391. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx$

392. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x\,dx$

393. $\int \cos^6 3x\,dx$

394. $\int \frac{dx}{\text{sen}^4 x}$

395. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$

396. $\int \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^6 x} dx$

397. $\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x \cos^4 x}$

398. $\int \frac{dx}{\text{sen}^5 x \cos^3 x}$

399. $\int \frac{dx}{\text{sen}\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}$

400. $\int \frac{\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\text{sen } x \cos x} dx$

Bibliografia

ANTAR NETO, A. *et al*. *Noções de Matemática*. São Paulo: Moderna, 1979.

ANTAR NETO, A. *et al*. *Noções de Matemática*. São Paulo: Moderna, 1979.

DEMIDOVITCH, B. *et al. Problemas e Exercícios de Análise Matemática*. Moscow: Mir, 1977.

ENGEL, A. *Problem-Solving Strategies*. New York: Springer-Verlag, 1998.

ENGEL, A. *Problem-Solving Strategies*. New York: Springer-Verlag, 1998.

FILHO, E. A. *Exercícios de Geometria Plana*. São Paulo: Nobel, 1984.

IEZZI, G. et al. *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo: Atual, 1993.

IEZZI, G. *et al*. *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo: Atual, 1993.

IEZZI, G. *et al*. *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo: Atual, 1993.

LITVINENKO, V.; MORDKOVICH, A. *Solving Problems in Algebra and Trigonometry*. Moscou: Mir, 1987.

MACHADO, A. S. *Temas e Metas*. São Paulo: Atual, 1988.

MEGA, E.; WATANABE, R. *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1ª a 8ª: Problemas e Resoluções*. São Paulo: Núcleo, 1988.

MEGA, E.; WATANABE, R. *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1ª a 8ª: Problemas e Resoluções*. São Paulo: Núcleo, 1988.

Questões de olimpíadas e vestibulares diversos.

Questões de olimpíadas e vestibulares diversos.

Anotações

Samuel/Rev.: ____

CÁLCULO

1ª PARTE – LIMITE

I. Limites e limites laterais

01:

A) 2 B) $\frac{5}{2}$

C) 4 D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

E) 0 F) $-\frac{2}{3}$

G) $\frac{2}{3}$ H) 0

I) 0 J) – 1

K) -3×2^{11}

02: Não necessariamente, apenas se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

03: D

04: Demonstração

05:

A) 0 B) – 1
C) – ∞ D) ∞
E) – ∞ F) ∞
G) ∞ H) ∞
I) ∞ J) ∄ lim
K) – ∞ L) ∞
M) 0 N) ∞
O) $-\frac{\sqrt[3]{4}}{5}$ P) 4
Q) – ∞ R) – 1
S) – ∞ T) $-\frac{5}{2}$
U) 0 V) $\frac{1}{2}$

06: E

07: B

08: a = 0, b = 9

09: a = 0, b = 2

10: A

11: B

12: C

13: B

14: 0

15: Não, sim, não

16: 1

II. LIMITES COM TRIGONOMETRIA

01:

A) 1 B) 1
C) ∞ D) – 1
E) $\frac{2}{3}$ F) 0

02: D

03: C

04: C

05: B

06: A

07: C

08: B

09: B

10: B

11: C

12: C

13: B

III. LIMITE EXPONENCIAL FUNDAMENTAL – DEFINIÇÃO DO NÚMERO "E"

01: Demonstração

02: E

03: E

04: Demonstração

05: Demonstração

06:

A) $\frac{\ell n^2}{4}$ B) 2

2ª PARTE – CONTINUIDADE

01: 0

02: D

03: C

04: $\frac{1}{6}$

05: Demonstração

06:

A) Contínua
B) Descontínua
C) Descontínua
D) Contínua
E) Descontínua
F) Descontínua em 0 e contínua em 1.
G) Descontínua

07: D

08: C

09: D

10:

A) a = ±2

B) b = $\frac{1}{3}$

C) a = b = $-\frac{1}{4}$

11: Demonstração

12: Demonstração

3ª PARTE – DERIVADA

I. Derivada

01:

A) $x + y = -\frac{1}{4}$ B) $x + y = \frac{1}{4}$

C) $x - y = -\frac{7}{4}$ D) $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{1}{6}$

E) $x + y = 0$ F) $x + 2y = -1$

G) $x\sqrt{2} + y = 2\sqrt{2}$

02: arctg(– 4)

03: Demonstração

04:

A) $-2x$ B) $3x^2 - 1$

C) $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ D) $\frac{-1}{(x-1)^2}$

E) $\frac{6}{(x+3)^2}$ F) $\frac{-3}{2(x-2)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$

05: D
06: A
07: C
08: D
09: A
10: A
11: D
12: D
13: Demonstração
14: Demonstração
15: Demonstração
16: Demonstração
17: B
18: B
19: A) Contínua, não derivável B) Contínua, derivável
20: A) Demonstração B) Demonstração
21: 4
22:

A) $\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

B) $\frac{\operatorname{sen} t}{2}$

C) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\cos\sqrt{x} - \sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x}\right)$

D) $\frac{\cos x + x\operatorname{sen} x - 1}{\cos^2 x}$

23:

A) $\frac{2u - 3}{3u(u-2)}$ B) $\frac{1}{(3t^2 - 1)(3x^2 - 1)}$

C) $\frac{2\sqrt[4]{(t^2 + 1)^3}}{\sqrt{t^2 - 1}}$ D) $\frac{4x}{3\left[\sqrt[3]{t+1}(x^2 + 1)\right]^2}$

24: A
25: C
26: E
27: D
28: E
29: E
30: D
31: C
32: C
33: B
34: D
35: D
36: E
37: C

II. DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

01:

A) $\frac{x}{y}$

B) $-\frac{2x + y}{x + 2y}$

C) $\frac{-y}{x + 2y}$

D) $\frac{2y\sqrt{xy}(1 - 4x^3y^2) - y}{2x\sqrt{xy}(3x^3y^2 - 1) + x}$

E) $\frac{3x^2y^2 + \frac{1}{2\sqrt{x+y}}}{2x^3y + \frac{1}{2\sqrt{x+y}}}$

F) $\frac{2x - 4x^3(x^3 + y^3) - 3x^2(x^4 + y^4)}{2y + 4y^3(x^3 + y^3) + 3y^2(x^4 + y^4)}$

G) $-\frac{y}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} y)\cos y + x}$

02: B

III. APLICAÇÕES DAS DERIVADAS DE 1ª, 2ª E 3ª ORDENS

01: D
02: E
03: D
04: A
05: C
06: A
07: 20

08: $\frac{3\sqrt{2}}{8}$

09: A) ± 16 B) $-16 < k < 16$

10: $a = 2$ e $b < -32$ ou $b > 0$

11: Gráfico

12:

A) I. Crescimento $(-\infty, -1)$ e $(2, \infty)$, descrescimento $(-1, 2)$;
II. Máximo $f(-1) = \frac{11}{2}$, mínimo $f(2) = -8$.

B) I. Crescimento $(-2, 2)$, descrescimento $(-\infty, -2)$ e $(2, \infty)$;
II. Máximo $h(2) = 68$, mínimo $h(-2) = -28$.

C) I. Crescimento $(-2, 0)$ e $(2,\infty)$, descrescimento $(-\infty, -2)$ e $(0,2)$;
II. Mínimo $G(-2) = G(2) = 8$.

D) I. Crescimento $(-\infty, 0)$ e $(\frac{2}{5}, \infty)$, descrescimento $(0, \frac{2}{5})$;
II. Máximo $j(0) = 0$, mínimo $\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$.

E) I. Crescimento $(-\infty, -3)$, $(-3, -\frac{5}{3})$ e $(1, \infty)$, descrescimento $(-\frac{5}{3}, 1)$;
II. Máximo $k(1) = 0$, mínimo $k(-\frac{5}{3}) = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$.

F) I. Crescimento $(2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5})$, descrescimento $(-\infty, 2-\sqrt{5})$ e $(2+\sqrt{5}, \infty)$;
II. Máximo $n(2+\sqrt{5}) = \dfrac{\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}$, mínimo $n(2-\sqrt{5}) = \dfrac{\sqrt{5}}{4\sqrt{5}-10}$.

G) I. Crescimento $[0, \frac{\pi}{2})$ e $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, descrescimento $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$;
II. Máximo $q(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}$ e $q(2\pi) = \frac{1}{2}$, mínimo $q(0) = \frac{1}{2}$ e $q(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{5}{2}$.

13: Demonstração

14: -1(mínimo); $2, -3, 4$ (inflexão)

15: A

16: B

17: B

18: B

19: E

20: B

21: C

22: E

4ª PARTE – INTEGRAL

01: A) $-x + C$

B) $\dfrac{2x\sqrt{x}}{3} - \dfrac{3x\sqrt[3]{x}}{4} - \dfrac{4x\sqrt[4]{x}}{5} + C$

C) $\dfrac{x^4}{4} - 3\sqrt[3]{x^2} + C$

D) $\dfrac{(x-1)^{10}}{10} + C$

E) $\dfrac{2}{9}\sqrt{(3x-1)^3} + C$

F) $\dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C$

G) $C - \sqrt{4-2x}$

H) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{(x+3)^5} + C$

I) $C - \dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(4-2x^3)^4}$

J) $\dfrac{2}{3}\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3} + C$

K) $C - \sqrt{(1-x)^3}\left[\dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{5}(1-x) + \dfrac{2}{7}(1-x)^2\right]$

L) $\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{(x^2+1)^3} - x^3\right) + C$

M) $\cos e^{-x} + C$

N) $\ln|1 + \operatorname{sen} x| + C$

O) $\operatorname{tg} x - \sec x + C$

P) $2\ln\left|\sec\sqrt{x} + \operatorname{tg}\sqrt{x}\right| + C$

Q) $C - \dfrac{1}{2}\ell n\left|\operatorname{sen}(1-x^2)\right|$

R) $\ell n\left|\cos(\operatorname{sen} x) - \operatorname{cotg}(\operatorname{sen} x)\right| + C$

S) $\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + C$

T) $2\left(\dfrac{\sqrt{\sec^7 x}}{7} - \dfrac{\sqrt{\sec^3 x}}{3}\right) + C$

U) $\operatorname{arcsen}\dfrac{\operatorname{sen} x}{2} + C$

V) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$

W) $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{2}} + C$

X) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,sec} x^2 + C$

Y) $\dfrac{1}{2}(\ell n x)^2 + C$

Z) $\ell n|x| - e^{-x} - x + C$

α) $\ln(e^x + 1) + C$

β) $C - \dfrac{1}{2}e^{1-x^2}$

γ) $C - e^{-e^x}$

δ) $\dfrac{1}{\ell n 3}\ell n\left|3^x - 3\right| + C$

02: $F(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

03: $F(x) = x + \cos x - 1$

04: $F(x) = e^x + 1$

05: D

06: C

07: E

08: A

09: B

10: C

11: E

12: C

13: E

14: E

15: B

16:

A) 4	B) $\frac{1}{7}$	C) $-\frac{23}{2}$
D) $\frac{32}{15}$	E) $\frac{4}{3}$	F) $\frac{19}{24}$
G) $\frac{\pi}{16}$	H) $\ell n\sqrt{2}$	I) $\frac{2}{15}(8\sqrt{2} - 7)$
J) $\frac{1}{2}(\ell n 2)^2$	K) $\log_2 3 - 1$	

17:

A) $\frac{4}{3}$　　B) $\frac{4}{3}$

C) $\frac{11}{4}$　　D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{1}{3}$　　F) 1

G) $\frac{7}{32}$　　H) $\frac{1}{3}(2-\sqrt{2})$

I) $\frac{4}{5}$　　J) $\frac{1}{12}$

K) $2\left(\sqrt{3}-\frac{5}{3}\right)$　　L) $\frac{1}{6}$

M) $\frac{8}{15}$　　N) $8\left(\frac{1}{\pi}+\frac{16}{15}\right)$

18: A
19: A
20: E
21: D
22: D
23: C
24: B
25: E
26: C
27: D
28: E
29: B
30: C

CÁLCULO DO IME

01: ma^{m-1}

02: 2

03: $e^{-\frac{\pi}{2}}$

04: 3

05: $\frac{200\cos\delta}{\pi}$

06: 0

07: e^3

08: $\frac{1}{3}$

09: e^{-2}

10: Demonstração

11: $f(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ \frac{1}{x}, & 0<x<1\\ x, & x>1\end{cases}$

12: $a=-8,\ b=5,\ c=14$

$m=2,\ n=0,\ p=-2$

13: e^2

14: $\frac{dy}{dx}=e^{x^x}\cdot x^x\ (\ln x+1)$

15: Nula

16: 45

17: 13,6

18: 2e

19: 0

20: $\left(\frac{\pm\sqrt{2}}{2},\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$

21: $-\frac{\text{cossec}(xy)+y}{x}$

22: $a_3=0,\ a_2=\frac{1}{2},\ a_1=1,\ a_0=0$

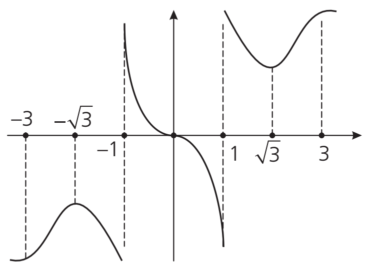
23: $\frac{kRx^{R-1}e^{Sx}+kx^Re^{Sx}S}{Ay^{A-1}e^{By}+y^Ae^{By}B}$

24: A) $x=\pm 1$

B) I. $\pm\sqrt{3}$

II. $0,\ \pm 3$

III.



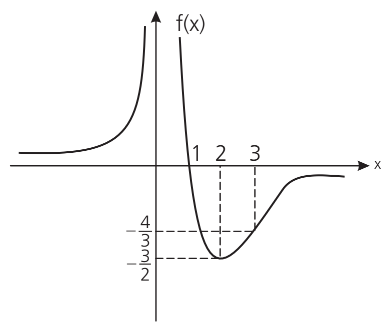
25: Demonstração

26: $-40x\cos x+(x^2-379)\,\text{sen}\,x$

27: A) $\left(2,-\frac{3}{2}\right)$ é ponto mínimo local.

$\left(3,-\frac{4}{3}\right)$ é ponto de inflexão.

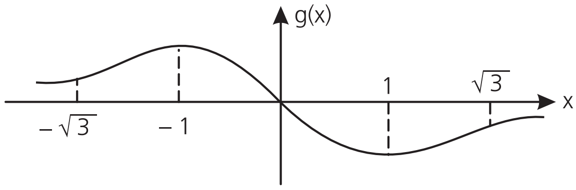
B)



28: Demonstração; reta tangente: $y=\frac{p}{\sqrt{e}}x+\frac{\sqrt{e}}{2}$.

29: $p=-4;\ x=(1,\ 1,\ -1\pm\sqrt{2}\,i)$
$p=4;\ x=(-1,\ -1,\ 1\ \pm\sqrt{2}\,i)$
$p=4i;\ x=(i,\ i,\ \pm\sqrt{2}-i)$
$p=-4i;\ x=(-i,\ -i,\ \pm\sqrt{2}\ +i)$

30: A) **f** crescente: $x > 1$
f decrescente: $0 \le x < 1$
B) Gráfico para cima: $x > \sqrt{3}$
Gráfico para baixo: $0 \le x < \sqrt{3}$
C) $n_{mín} = 1$, $x_{máx} = 0$
Ponto de inflexão em $x = \sqrt{3}$
Gráfico de **g**:



31: B) $\frac{64}{3}$

32: $\frac{(\ell n\, \ell n x)^{-m+1}}{-m+1} + C$

33: Nula

34: $\frac{17}{2}$

35: $h(x) = ae^{-x}$, a constante:
A) $f(x) = -ae^{-x}$
B) $c = 1$, $h(x) = e^{-x}$

36: B
37: D
38: D
39: B
40: C
41: D
42: D
43: C
44: E
45: A
46: C
47: C
48: D
49: E
50: E
51: A
52: A
53: B
54: E
55: C
56: B
57: A
58: D
59: B
60: D
61: A

SÉRIE DE TAYLOR							
01	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**
A	B	A	D	C	C	B	C
09	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	
B	A	D	D	B	D	C	

GABARITO EXERCÍCIOS LIMITE

01. $\frac{1}{2}$

02. 1

03. $-\frac{3}{2}$

04. 1

05. 3

06. 1

07. $\frac{3}{4}$

08. $\frac{1}{3}$. **Sugestão** (usar a fórmula $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

09. 0

10. 0

11. 1

12. 0

13. ∞

14. 0

15. 72

16. 2

17. 2

18. ∞

19. 0

20. 1

21. 0

22. ∞

23. -2

24. ∞

25. $\frac{1}{2}$

26. $\frac{a-1}{3a^2}$

27. $3x^2$

28. -1

29. $-\frac{1}{56}$

30. 12

31. $\frac{3}{2}$

32. $-\frac{1}{3}$

33. 1

34. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

35. $\dfrac{1}{3\sqrt[8]{x^2}}$

36. $-\dfrac{1}{3}$

37. 0

38. $\dfrac{a}{2}$

39. $-\dfrac{5}{2}$

40. $\dfrac{1}{2}$

41. 0

42. A) $\dfrac{1}{2}\text{sen}\,2$; B) 0

43. 3

44. $\dfrac{5}{2}$

45. $\dfrac{1}{3}$

46. π

47. $\dfrac{1}{2}$

48. cos a

49. – sen a

50. π

51. cos x

52. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

53. A) 0; B) 1

54. $\dfrac{2}{\pi}$

55. $\dfrac{1}{2}$

56. 0

57. $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

58. $\dfrac{1}{2}\left(n^2-m^2\right)$

59. $\dfrac{1}{2}$

60. 1

61. $\dfrac{2}{3}$

62. $\dfrac{2}{\pi}$

63. $-\dfrac{1}{4}$

64. π

65. $\dfrac{1}{4}$

66. 1

67. 1

68. $\dfrac{1}{4}$

69. 0

70. $\dfrac{3}{2}$

71. 0

72. e^{-1}

73. e^2

74. e^{-1}

75. e^{-4}

76. e^x

77. e

78. A) **Solução:**

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[1-(1-\cos\ x)\right]^{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1-2\text{sen}^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1-2\text{sen}^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\text{sen}^2\frac{x}{2}}}\right]^{-\frac{2\text{sen}^2\frac{x}{2}}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{2\text{sen}^2\frac{x}{2}}{x}\right)}$$

Como: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2\text{sen}^2\frac{x}{2}}{x}\right) = -2\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\text{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{x^2}{4x}\right] = -2\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{4} = 0$

então, $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos\ x)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$

B) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. **Solução**. Analogamente, ao anterior (ver **A**), $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos\ x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-2\text{sen}^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)}$. Já que:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\text{sen}^2\frac{x}{2}}{x^2}\right) = -2\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\text{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{x^2}{4x^2}\right] = -\frac{1}{2},$$

então, $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos\ x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

79. $\ell n\,2$

80. 10 lg e

81. 1

82. 1

83. $-\dfrac{1}{2}$

84. 1. **Sugestão:** (fazer $e^x - 1 = \alpha$, em que $\alpha \to 0$)

85. $\ell n\,a$. **Sugestão:** (usar a identidade $a = e^{\ln A}$)

86. $\ell n\,a$. **Sugestão:** (fazer $\dfrac{1}{n} = \alpha$, em que $\alpha \to 0$)

87. a – b

88. 1

89. A = 4

90. f(0) = 1

91. A) f(0) = n B) $f(0)=\frac{1}{2}$

C) f(0) = 2 D) f(0) = 2

E) f(0) = 0 F) f(0) = 1

92. $5x^4 - 12x^2 + 2$

93. $-\frac{1}{3}+2x-2x^3$

94. 2ax + b

95. $-\frac{15x^2}{a}$

96. $mat^{m-1} + b(m+n)t^{m+n-1}$

97. $\frac{6ax^5}{\sqrt{a^2+b^2}}$

98. $-\frac{\pi}{x^2}$

99. $2x^{-\frac{1}{3}}-5x^{\frac{3}{2}}-3x^4$

100. $\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}$. **Sugestão** $(y=x^2x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{8}{3}})$

101. $\frac{4b}{3x^2\sqrt[3]{x}}-\frac{2a}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

102. $\frac{bc-ab}{(c+dx)^2}$

103. $\frac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$

104. $\frac{1-4x}{x^2(2x-1)^2}$

105. $\frac{1}{\sqrt{z}(1-\sqrt{z})^2}$

106. 5 cos x – 3 sen x

107. $\frac{4}{\text{sen}^2 2x}$

108. $\frac{-2}{(\text{sen } x-\cos x)^2}$

109. t^2 sen t

110. y′ = 0

111. $\text{cotg } x-\frac{x}{\text{sen}^2 x}$

112. $\text{arc sen } x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

113. x arc tg x

114. $x^8e^x(x+7)$

115. xe^x

116. $e^x\,\frac{x-2}{x^3}$

117. $\frac{5x^4-x^5}{e^x}$

118. e^x (cos x – sen x)

119. x^2e^x

120. $e^x\left(\text{arc sen } x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

121. $\frac{x(2\ell n\,x-1)}{\ell n^3 x}$

122. $3x^2$ ℓn x

123. $\frac{2}{x}+\frac{\ell n\,x}{x^2}-\frac{2}{x^2}$

124. $\frac{2\ell n\,x}{x\ \ell n\ 10}-\frac{1}{x}$

125. $\frac{3a}{c}\left(\frac{ax+b}{c}\right)^2$

126. $12ab + 18b^2y$

127. $16x(3+2x^2)^3$

128. $\frac{x^2-1}{(2x-1)^8}$

129. $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

130. $\frac{bx^2}{\sqrt[3]{(a+bx^3)^2}}$

131. $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}-1}$

132. $\frac{1-tg^2x+tg^4x}{\cos^2 x}$

133. $\dfrac{-1}{2\text{sen}^2 x\sqrt{\text{cotg } x}}$

134. $2 - 15\cos^2 x \text{ sen } x$

135. $\dfrac{-16\cos 2t}{\text{sen}^3 2t}$. **Sugestão** $(x = \text{sen}^{-2} t + \cos^{-2} t)$

136. $\dfrac{\text{sen } x}{(1-3\cos x)^3}$

137. $\dfrac{\text{sen}^3 x}{\cos^4 x}$

138. $\dfrac{3\cos x + 2\text{sen } x}{2\sqrt{15\text{sen } x - 10\cos x}}$

139. $\dfrac{2\cos x}{3\sqrt[3]{\text{sen } x}} + \dfrac{3\text{sen } x}{\cos^4 x}$

140. $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\text{arc sen } x}}$

141. $\dfrac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\text{arc tg } x}} - \dfrac{3(\text{arc sen } x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$

142. $\dfrac{-1}{(1+x^2)(\text{arc tg } x)^2}$

143. $\dfrac{e^x + xe^x + 1}{2\sqrt{xe^x + x}}$

144. $\dfrac{2e^x - 2^x \ell n 2}{3\sqrt[3]{(2e^x - 2x + 1)^2}} + \dfrac{5\ell n^4 4}{x}$

145. $(2x-5)\cdot\cos(x^2 - 5x + 1) - \dfrac{a}{x^2\cos^2 \frac{a}{x}}$

146. $-\alpha \text{ sen } (\alpha x + \beta)$

147. $\text{sen}(2t + \varphi)$

148. $-2\dfrac{\cos x}{\text{sen}^3 x}$

149. $\dfrac{-1}{\text{sen}^2 \frac{x}{a}}$

150. $x \cos 2x^2 \text{ sen } 3x^2$

151. $\dfrac{-2}{x\sqrt{x^4 - 1}}$

152. $\dfrac{-1}{2\sqrt{x - x^2}}$

153. $\dfrac{-1}{1+x^2}$

154. $\dfrac{-1}{1+x^2}$

155. $-10xe^{-x^2}$

156. $-2x5^{-x^2}\ell n 5$

157. $2x\,10^{2x}(1 + x\,\ell n 10)$

158. $\text{sen } 2^t + 2^t\, t \cos 2^t\, \ell n\, 2$

159. $\dfrac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

160. $\dfrac{2}{2x+7}$

161. $\text{cotg } x \lg e$

162. $\dfrac{-2x}{1-x^2}$

163. $\dfrac{2\ell n x}{x} - \dfrac{1}{x\ell n x}$

164. $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ell n x + 1}} + \dfrac{1}{2(\sqrt{x} + x)}$

165. Solução

$$y' = (\text{sen}^3 5x)' \cos^2 \frac{x}{3} + \text{sen}^3 5x\left(\text{sen}^2 \frac{x}{3}\right)' = 3\text{sen}^2 5x \cos 5x \cdot 5\cos^2 \frac{x}{3} + \text{sen}^3 5x \cdot 2\cos \frac{x}{3}\left(-\text{sen}\frac{x}{3}\right)\frac{1}{3} = 15\,\text{sen}^2 5x \cos 5x \cos^2 \frac{x}{3} - \frac{2}{3}\text{sen}^3 5x \cos\frac{x}{3}\text{sen}\frac{x}{3}$$

166. $\dfrac{4x+3}{(x-2)^3}$

167. $\dfrac{x^2 + 4x - 6}{(x-3)^5}$

168. $\dfrac{x^7}{(1-x^2)^5}$

169. $\dfrac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}$

170. $\dfrac{1}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}$

171. $\dfrac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$

172. $\dfrac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}$

173. $x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}$

174. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$

175. $4x^3(a-2x^3)(a-5x^3)$

176. $\dfrac{2abmnx^{n-1}\left(a+bx^n\right)^{m-1}}{\left(a-bx^n\right)^{m+1}}$

177. $\dfrac{x^3-1}{(x+2)^6}$

178. $\dfrac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$

179. $\dfrac{3x^2+2(a+b+c)x+ab+bc+ac}{2\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}}$

180. $\dfrac{1+2\sqrt{y}}{6\sqrt{y}\sqrt[3]{\left(y+\sqrt{y}\right)^2}}$

181. $2(7t+4)\sqrt[3]{3t+2}$

182. $\dfrac{y-a}{\sqrt{\left(2ay-y^2\right)^3}}$

183. $\dfrac{1}{\sqrt{e^x+1}}$

184. $\text{sen}^3\, x \cos^2 x$

185. $\dfrac{1}{\text{sen}^4\, x \cos^4 x}$

186. $10\ \text{tg}\ 5x \sec^2 5x$

187. $x \cos x^2$

188. $3t^2\ \text{sen}\ 2t^3$

189. $3 \cos x \cos 2x$

190. $\text{tg}^4\, x$

191. $\dfrac{\cos 2x}{\text{sen}^4\, x}$

192. $\dfrac{(\alpha-\beta)\,\text{sen}\,2x}{2\sqrt{\alpha\,\text{sen}^2 x+\beta\cos^2 x}}$

193. 0

194. $\dfrac{1}{2}\dfrac{\text{arc sen}\,x\,(2\,\text{arc cos}\,x-\text{arc sen}\,x)}{\sqrt{1-x^2}}$

195. $\dfrac{2}{x\sqrt{2x^2-1}}$

196. $\dfrac{1}{1+x^2}$

197. $\dfrac{x\,\text{arc cos}\,x-\sqrt{1-x^2}}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

198. $\dfrac{1}{\sqrt{a-bx^2}}$

199. $\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}\ (a>0)$

200. $2\sqrt{a^2-x^2}\ (a>0)$

201. $\dfrac{-x}{\sqrt{2x-x^2}}$

202. $\text{arc sen}\sqrt{x}$

203. $\dfrac{5}{\sqrt{1-25x^2}\,\text{arc sen}\ 5x}$

204. $\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ell n^2\, x}}$

205. $\dfrac{\text{sen}\ \alpha}{1-2x\cos\ \alpha+x^2}$

206. $\dfrac{1}{5+4\,\text{sen}\ x}$

207. $4x\sqrt{\dfrac{x}{b-x}}$

208. $\dfrac{\text{sen}^2\, x}{1+\cos^2 x}$

209. $\dfrac{a}{2}e^{\frac{ax}{2}}$

210. $\text{sen}\ 2x\,e^{\text{sen}^2 x}$

211. $2m^2p(2ma^{mx}+B)^{p-1}a^{mx}\,\ell n\ a$

212. $e^{\alpha t}(\alpha\cos\ \beta t-\beta\,\text{sen}\ \beta t)$

213. $e^{\alpha x}\ \text{sen}\ \beta x$

214. $e^{-x}\cos 3x$

215. $x^{n-1}a^{-x^2}\left(n-2x^2\ell n\,a\right)$

216. $-\dfrac{1}{2}y\ \text{tg}\ x\left(1+\sqrt{\cos\ x}\,\ell n\,a\right)$

217. $\dfrac{3^{\text{cotg}\frac{1}{x}\ell n 3}}{\left(x\ \text{sen}\dfrac{1}{x}\right)^2}$

218. $\dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$

219. $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$

220. $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

221. $\frac{1}{\sqrt{2ax+x^2}}$

222. $\frac{-2}{x\ell n^3 x}$

223. $-\frac{1}{x^2}\operatorname{tg}\frac{x-1}{x}$

224. $\frac{2x+11}{x^2-x-2}$. **Sugestão:** y = 5 ℓn (x – 2) – 3 ℓn (x + 1).

225. $\frac{3x^2-16x+19}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

226. $\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x\cos x}$

227. $\sqrt{x^2-a^2}$

228. $\frac{-6x^2}{(3-2x^3)\,\ell n(3-2x^3)}$

229. $\frac{15a\,\ell n^2(ax+b)}{ax+b}$

230. $\frac{2}{\sqrt{x^2+a^2}}$

231. $\frac{mx+n}{x^2-a^2}$

232. $\sqrt{2}\operatorname{sen}\ell n x$

233. $\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x}$

234. $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

235. $\frac{x+1}{x^3-1}$

236. $\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\left[2^{\operatorname{arcsen}3x}\ell n 2+2(1-\arccos 3x)\right]$

237. $\left(3^{\frac{\operatorname{sen}ax}{\cos bx}}\ell n 3+\frac{\operatorname{sen}^2 ax}{\cos^2 bx}\right)\frac{a\cos ax\cos bx+b\operatorname{sen}ax\operatorname{sen}bx}{\cos^2 bx}$

238. $\frac{1}{1+2\operatorname{sen}x}$

239. $\frac{1}{x(1+\ell n^2 x)}$

240. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2\operatorname{arcsen}x}}+\frac{\ell n x}{x}+\frac{1}{x\sqrt{1-\ell n^2 x}}$

241. $-\frac{1}{x(1+\ell n^2 x)}$

242. $\frac{x^2}{x^4+x^2-2}$

243. $\frac{2}{\cos x\sqrt{\operatorname{sen}x}}$

244. $\frac{x^2-3x}{x^4-1}$

245. $\frac{2}{5}$

246. $-\frac{b^2x}{a^2y}$

247. $-\frac{x^2}{y^2}$

248. $-\frac{x(3x+2y)}{x^2+2y}$

249. $-\sqrt{\frac{y}{x}}$

250. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$

251. $\frac{2y^2}{3(x^2-y^2)+2xy}=\frac{1-y^3}{1+3xy^2+4y^3}$

252. $\frac{10}{10-3\cos y}$

253. – 1

254. $\frac{y\cos^2 y}{1-x\cos^2 y}$

255. $\frac{y}{x}\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$

256. $(x+y)^2$

257. $y'=\frac{1}{e^y-1}=\frac{1}{x+y-1}$

258. $\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$

259. $-\frac{1}{3}$

260. ∞

261. 1

262. 3

263. $\frac{1}{2}$

264. 5

265. ∞

266. 0

267. $\frac{\pi^3}{2}$

268. 1

269. 1

270. e^3

271. 1

272. 1

273. 1

274. $\frac{1}{e}$

275. $\frac{1}{e}$

276. $\frac{1}{e}$

277. 1

278. 1

279. x = 2; y = 0

280. x = 1, x = 3, y = 0

281. x = ± 2, y = 1

282. y = x

283. y = –x (esquerda), y = x (direita)

284. y = –1 (esquerda), y = 1 (direita)

285. x = ±1, y = –x (esquerda), y = x (direita)

286. y = – 2 (esquerda), y = 2x – 2 (direita)

287. y = 2

288. x = 0, y = 1 (esquerda), y = 0 (direita)

289. x = 0, y = 1

290. y = 0

291. x = –1

292. $y_{máx} = 0$ quando x = 0; $y_{mín} = -4$ quando x = 2; ponto de inflexão M_1 (1, –2)

293. $y_{máx} = 1$ quando $x = \pm\sqrt{3}$; $y_{mín} = 0$ quando x = 0; ponto de inflexão $M_{1.2}\left(\pm1; \frac{5}{9}\right)$

294. $y_{máx} = 4$ quando x = –1; $y_{mín} = 0$ quando x = 1; ponto de inflexão M_1 (0; 2)

295. $y_{máx} = 8$ quando x = –2; $y_{mín} = 0$ quando x = 2; ponto de inflexão M (0; 4)

296. $y_{mín} = -1$ quando x = 0; ponto de inflexão $M_{1.2}\left(\pm\sqrt{5}; 0\right)$ e $M_{3.4}\left(\pm1; -\frac{64}{125}\right)$

297. $y_{máx} = -2$ quando x = 0; $y_{mín} = 2$ quando x = 2; as assíntotas são x = 1, y = x – 1

298. Os pontos de inflexão são $M_{1.2}\left(\pm1; \pm2\right)$; a assíntota é x = 0

299. $y_{máx} = -4$ quando x = –1; $y_{mín} = 4$ quando x = 1; a assíntota é x = 0

300. $y_{mín} = 3$ quando x = 1; o ponto de inflexão é $-M\left(-\sqrt[3]{2}; 0\right)$; a assíntota é x = 0

301. $y_{máx} = \frac{1}{3}$ quando x = 0; o ponto de inflexão é $M_{1.2}\left(\pm1; \frac{1}{4}\right)$; a assíntota y = 0

302. $y_{máx} = -2$ quando x = 0; as assíntotas são x = ± 2 e y = 0

303. $y_{mín} = -1$ quando x = –2; $y_{máx} = 1$ quando x = 2; os pontos de inflexão são –O(0; 0) e $M_{1.2}\left(\pm2\sqrt{3}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; a assíntota é y = 0

304. $y_{máx} = 1$ quando x = 4; o ponto de inflexão é – $M\left(5; \frac{8}{9}\right)$; as assíntotas são x = 2 e y = 0

305. O ponto de inflexão é O(0; 0); as assíntotas são x = ± 2 e y = 0

306. $y_{máx} = -\frac{27}{16}$ quando $x = \frac{8}{3}$; as assíntotas são x = 0, x = 4 e y = 0

307. $y_{máx} = -4$ quando x = –1; $y_{mín} = 4$ quando x = 1; as assíntotas são x = 0 e y = 3x

308. A(0; 2) e B(4; 2) são os pontos extremos; $y_{máx} = 2\sqrt{2}$ quando x = 2

309. A(–8; –4) e B(8; 4) são os pontos extremos. O ponto de inflexão é O(0; 0)

310. O ponto extremo é A(–3; 0); $y_{mín} = -2$ quando x = –2

311. Os pontos extremos são $A\left(-\sqrt{3}; 0\right)$, $O\left(0; 0\right)$ e $B\left(\sqrt{3}; 0\right)$; $y_{máx} = \sqrt{2}$ quando x = –1; o ponto de inflexão é $M\left(\sqrt{3+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{6\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}}\right)$

312. $y_{máx} = 1$ quando x = 0; os pontos de inflexão são $M_{1.2}\left(\pm1; 0\right)$

313. Os pontos de inflexão são M_1(0; 1) e M_2(1; 0); a assíntota é y = –x

314. $y_{máx} = 0$ quando $x = -1$; $y_{mín} = -1$ (quando $x = 0$)

315. $y_{máx} = 2$ quando $x = 0$; os pontos de inflexão são $M_{1.2}\left(\pm 1; \sqrt[3]{2}\right)$; a assíntota é $y = 0$

316. $y_{mín} = -4$ quando $x = -4$; $y_{máx} = 4$ quando $x = 4$; o ponto de inflexão é $O(0; 0)$; a assíntota é $y = 0$

317. $y_{mín} = \sqrt[3]{4}$ quando $x = 2$; $y_{mín} = \sqrt[3]{4}$ quando $x = 4$; $y_{máx} = 2$ quando $x = 3$

318. $y_{mín} = 2$ quando $x = 0$, as assíntotas são $x = \pm 2$

319. As assíntotas são $x = \pm 2$ e $y = 0$

320. $y_{mín} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ quando $x = \sqrt{3}$; $y_{máx} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ quando $x = -\sqrt{3}$; os pontos de inflexão são $M_1\left(-3; -\dfrac{3}{2}\right)$, $O(0; 0)$ e $M_2\left(3; \dfrac{3}{2}\right)$; as assíntotas são $x = \pm 1$

321: $y_{mín} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ quando $x = 6$; o ponto de inflexão é $M\left(12; \dfrac{12}{\sqrt[3]{100}}\right)$; a assíntota é $x = 2$

322. $\dfrac{x^2}{2} + 2x + \ell n|x+3|$

323. $\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} + x^2 + 2x + 3\ell n|x-1|$

324. $a^2x + 2ab\ell n|x-a| - \dfrac{b^2}{x-a}$

325: $\ell n|x+1| + \dfrac{1}{x+1}$. **Sugestão:**

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2} = \int \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2}dx = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

326. $-2b\sqrt{1-y}$

327. $-\dfrac{2}{3b}\sqrt{(a-bx)^3}$

328. $\sqrt{x^2+1}$. **Solução:** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}$

329. $2\sqrt{x} + \dfrac{\ell n^2 x}{2}$

330. $\dfrac{1}{\sqrt{15}}\text{arc tg}\left(x\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)$

331. $\dfrac{1}{4\sqrt{14}}\ell n\left|\dfrac{x\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{x\sqrt{7}+2\sqrt{2}}\right|$

332. $\dfrac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\ell n\left|\dfrac{\sqrt{a+b}+x\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-x\sqrt{a-b}}\right|$

333. $x - \sqrt{2}\text{arc tg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$

334. $-\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{a^2}{2}\ell n|a^2-x^2|\right)$

335. $x - \dfrac{5}{2}\ell n(x^2+4) + \text{arc tg}\dfrac{x}{2}$

336. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ell n\left(2\sqrt{2}x + \sqrt{7+8x^2}\right)$

337. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\text{arc sen}\left(x\sqrt{\dfrac{5}{7}}\right)$

338. $\dfrac{1}{3}\ell n|3x^2-2| - \dfrac{5}{2\sqrt{6}}\ell n\left|\dfrac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right|$

339. $\dfrac{3}{\sqrt{35}}\text{arc tg}\left(\sqrt{\dfrac{5}{7}}x\right) - \dfrac{1}{5}\ell n(5x^2+7)$

340. $\dfrac{3}{5}\sqrt{5x^2+1} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\ell n\left(x\sqrt{5} + \sqrt{5x^2+1}\right)$

341. $\sqrt{x^2-4} + 3\ell n\left|x + \sqrt{x^2-4}\right|$

342. $\dfrac{1}{2}\ell n|x^2-5|$

343. $\dfrac{1}{4}\ell n(2x^2+3)$

344. $\dfrac{1}{2a}\ell n(a^2x^2+b^2) + \dfrac{1}{a}\text{arc tg}\dfrac{ax}{b}$

345. $\dfrac{1}{2}\text{arc sen}\dfrac{x^2}{a^2}$

346. $\dfrac{1}{3}\text{arc tg}\,x^3$

347. $\dfrac{1}{3}\ell n\left|x^3 + \sqrt{x^6-1}\right|$

348. $\dfrac{2}{3}\sqrt{(\text{arc sen}\,x)^3}$

349. $\dfrac{\left(\text{arc tg}\dfrac{x}{2}\right)^2}{4}$

350. $\dfrac{1}{8}\ell n(1+4x^2) - \dfrac{\sqrt{(\text{arc tg }2x)^3}}{3}$

351. $2\sqrt{\ell n\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}$

352. $-\dfrac{a}{m}e^{-mx}$

353. $-\dfrac{1}{3\ell n 4}4^{2-3x}$

354. $e^t + e^{-t}$

355. $\dfrac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \dfrac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}$

356. $\frac{1}{\ell na-\ell nb}\left(\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}\right)-2x$

357. $\frac{2}{\ell na}\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}x}a^{-\frac{1}{2}x}\right)$

358. $-\frac{1}{2e^{x^2}+1}$

359. $\frac{1}{2\ell n7}7^{x^2}$

360. $x\,\ell n\,x-x$

361. $x\,\text{arc tg}\,x-\frac{1}{2}\ell n\left(1+x^2\right)$

362. $x\,\text{arc sen}\,x+\sqrt{1-x^2}$

363. $\text{sen}\,x - x\cos x$

364. $\frac{x\,\text{sen}\,3x}{3}+\frac{\cos 3x}{9}$

365. $-\frac{x+1}{e^x}$

366. $-\frac{x\ell n2+1}{2^x\ell n^2 2}$

367. $\frac{e^{3x}}{27}\left(9x^2-6x+2\right)$

Solução: em lugar de integrar várias vezes por partes, pode-se empregar o seguinte método de coeficientes indeterminados:

$\int x^2e^{3x}dx=\left(Ax^2+Bx+C\right)e^{3x}$

ou, depois de derivar,

$x^3e^{3x}=\left(Ax^2+Bx+C\right)3e^{3x}+\left(2Ax+B\right)e^{3x}.$

Simplificando por e^{3x} e igualando entre si os coeficientes que têm as mesmas potências de **x**, obtemos:

$1 = 3A;\ 0 = 3B + 2A;\ 0 = 3C + B$, donde $A=\frac{1}{3};\ B=-\frac{2}{9};\ C=\frac{2}{27}.$

Em forma geral $\int P_n(x)e^{ax}dx=Q_n(x)e^{ax}$, onde $P_n(x)$ é o polinômio dado de grau **n** e $Qn(x)$ é um polinômio de grau **n** com os coeficientes indeterminados.

368. $-e^{-x\left(x^2+5\right)}$. **Sugestão:** ver o problema **367**.

369. $-3e^{-\frac{x}{3}}\left(x^3+9x^2+54x+162\right)$. **Sugestão:** ver o problema **367**.

370. $-\frac{x\cos 2x}{4}+\frac{\text{sen}\,2x}{8}$

371. $\frac{2x^2+10x+11}{4}\text{sen}\,2x+\frac{2x+5}{4}\cos 2x$

Sugestão: recomenda-se também utilizar o método dos coeficientes indeterminados na forma:

$\int P_n(x)\cos\beta x\,dx=Q_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\,\text{sen}\,\beta x$

em que $P_n(x)$ é o polinômio dado de grau **n** e $Q_n(x)$ e $R_n(x)$ são polinômios de grau **n** com coeficientes indeterminados (ver o problema **367**).

372. $\frac{x^3}{3}\ell n x-\frac{x^3}{9}$

373. $x\ell n^2x-2x\ell nx+2x$

374. $-\frac{\ell nx}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}$

375. $2\sqrt{x}\ell nx-4\sqrt{x}$

376. $\frac{x^2+1}{2}\text{arc tg}\,x-\frac{x}{2}$

377. $\frac{x^2}{2}\text{arc sen}\,x-\frac{1}{4}\text{arc sen}\,x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$

378. $x\ell n\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$

379. $-x\,\text{cotg}\,x+\ell n\left|\text{sen}\,x\right|$

380. $-\frac{x}{\text{sen}\,x}+\ell n\left|\text{tg}\frac{x}{2}\right|$

381. $\frac{e^x\left(\text{sen}\,x-\cos x\right)}{2}$

382. $\frac{3^x\left(\text{sen}\,x-\cos x\ \ell n3\right)}{1+\left(\ell n\,3\right)^2}$

383. $\frac{e^{ax}\left(a\,\text{sen}\,bx-b\cos bx\right)}{a^2+b^2}$

384. $\frac{x}{2}\left[\text{sen}\left(\ell nx\right)-\cos\left(\ell nx\right)\right]$

385. $\text{sen}\,x-\frac{1}{3}\text{sen}^3x$

386. $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3x-\frac{1}{5}\cos^5x$

387. $\frac{\text{sen}^3x}{3}-\frac{\text{sen}^5x}{5}$

388. $\frac{1}{4}\cos^8\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cos^6\frac{x}{2}$

389. $\frac{\text{sen}^2x}{2}-\frac{1}{2\text{sen}^2x}-2\ell n\left|\text{sen}\,x\right|$

390. $\frac{3x}{8}-\frac{\text{sen}\,2x}{4}+\frac{\text{sen}\,4x}{32}$

391. $\frac{x}{8}-\frac{\text{sen}\,4x}{32}$

392. $\frac{x}{16}-\frac{\text{sen}\,4x}{64}+\frac{\text{sen}^3 2x}{48}$

393. $\frac{5}{16}x-\frac{1}{12}\text{sen}\,6x+\frac{1}{64}\text{sen}\,12x-\frac{1}{144}\text{sen}^3 6x$

394. $-\text{cotg } x - \dfrac{\text{cotg}^3 x}{3}$

395. $\text{tg } x + \dfrac{2}{3}\text{tg}^3 x + \dfrac{1}{5}\text{tg}^5 x$

396. $-\dfrac{\text{cotg}^3 x}{3} - \dfrac{\text{cotg}^5 x}{5}$

397. $\text{tg } x + \dfrac{\text{tg}^3 x}{3} - 2\text{cotg } 2x$

398. $\dfrac{1}{2}\text{tg}^2 x + 3\ell n|\text{tg } x| - \dfrac{3}{2\text{tg}^2 x} - \dfrac{1}{4\text{tg}^4 x}$

399. $\dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{x}{2}} + 2\ell n\left|\text{tg}\dfrac{x}{2}\right|$

400. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\ell n\left|\text{tg}\dfrac{x}{2}\right| + \ell n\left|\text{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\right]$

Anotações

Anotações