ELSEVIER

IACI MALTA SINÉSIO PESCO HÉLIO LOPES

CÁLCULO A UMA VARIÁVEL

VOLUME 1

UMA INTRODUÇÃO AO CÁLCULO

CAMPUS

EDITORA PUC RIO

ELSEVIER

IACI MALTA   SINÉSIO PESCO   HÉLIO LOPES

CÁLCULO A UMA VARIÁVEL

VOLUME 1

UMA INTRODUÇÃO AO CÁLCULO

CAMPUS

EDITORA PUC RIO

CÁLCULO A UMA VARIÁVEL

VOLUME 1

Elsevier Editora Ltda.
Conhecimento sem Fronteiras
Rua Sete de Setembro, 111 – 16º andar
20050-006 – Centro – Rio de Janeiro – RJ

Rua Quintana, 753 – 8 º andar
04569-011 – Brooklin – São Paulo – SP
Serviço de Atendimento ao Cliente
0800-0265340
sac@elsevier.com.br

Revisão: Nina Luna

Editoração eletrônica: Yunelsy Nápoles

Capa: Guilherme Xavier

Produção digital: Freitas Bastos

Em coedição com: Editora PUC-Rio
Rua Marquês de S. Vicente, 225
Casa Editora/Projeto Comunicar
22451-900 – Gávea
Rio de Janeiro – RJ
Tel.: (21)3527-1838/1760
www.puc-rio.br/editorapucrio

PUC RIO

CIP-Brasil. Catalogação-na-fonte.
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ

M226c
v.1 Malta, Iaci
Cálculo a uma variável, volume I: uma introdução ao cálculo / Iaci Malta, Helio Lopes, Sinesio Pesco. - 1. ed. - Rio de Janeiro: Elsevier: PUC-Rio, 2015.
470 p. : il. ; 24 cm.

ISBN: 978-85-352-5456-3
(PUC-Rio) 978-85-8006-153-6

1. Matemática - Estudo e ensino. I. Lopes, Helio. II. Pesco, Sinésio. II. Título.

CDD: 510
14-18666 CDU: 51

Agradecimentos

Queremos agradecer a Geovan Tavares dos Santos, que coordenou o projeto Matmídia do Departamento de Matemática da PUC-Rio e cujo empenho foi muito importante para a publicação deste livro pela Editora PUC-Rio/Edições Loyola.

Agradecemos também a Edições Loyola e à Editora PUC-Rio que além de publicarem o livro durante 12 anos, proporcionaram a oportunidade de que o mesmo recebesse a *Menção Honrosa* do Prêmio Jabuti, 2003.

Agradecemos especialmente a Gilda Palis, com quem foram feitas as primeiras discussões e avaliações que resultaram no programa para uma introdução ao cálculo. Dirce Uesu Pesco também merece nossos agradecimentos especiais pelo apontamento cuidadoso de vários erros que apareciam nas diversas versões em apostilas. Agradecemos também a Carlos Tomei, Paul Schweitzer, George Svetlichny, Sérgio Volchan, Marcos Craizer e Humberto Bortolossi pelas valiosas sugestões e críticas, a Tatiana Iwashita e Marco Antonio Pinto Fibger que colabo-raram na preparação das respostas aos exercícios, a Jessica Quintanilha Kubrusly e Felipe Duarte Cardozo de Pina, pela revisão das respostas dos exercícios do volume II, a José Cal Neto e Leonardo Navarro de Carvalho, que prepararam a versão Tex para a primeira apostila e a Tina Velho, que se responsabilizou pelas figuras do texto.

Finalmente, agradecemos a Andre Wolff, da Editora Elsevier, pelo seu empenho em estabelecer uma parceria com a Editora PUC-Rio que viabilizou esta nova edição do livro.

Iaci Malta, Sinésio Pesco e Hélio Lopes

Ao Estudante

Em geral a leitura de um texto matemático não é fácil. Além de ser necessária uma certa desenvoltura de leitura em geral, a compreensão de um texto matemático necessita de um mínimo de conhecimento da linguagem e da lógica matemáticas, razão pela qual iniciamos este livro tratando desse tema. Uma das coisas que pode atrapalhar o aproveitamento de um texto matemático é a expectativa de *entender* o que está sendo lido no sentido de identificar algo que já se conheça. Na verdade, praticamente tudo o que está nesse texto é, provavelmente, novo para você. Assim não se assuste com o fato de não estar *entendendo*, pois a sua compreensão só pode ocorrer como resultado de um trabalho para aprender o conteúdo apresentado. Talvez seja importante pensar que você, além do cálculo, também estará aprendendo a aprender.

Por isso, além de fornecer informações de conteúdo matemático este texto tem, igualmente, o objetivo de ajudá-lo a desenvolver sua capacidade de raciocínio organizado, assim como de desenvolver sua capacidade de expressar com clareza e de forma organizada o seu raciocínio.

Assim, para que esse objetivo seja atingido, ao fazer um exercício você deve sempre justificar com clareza suas conclusões, isto é, descrever os passos que o levaram à solução do exercício relacionando-os com as propriedades e teoremas que foram usados. Isso o auxiliará, inclusive, na própria compreensão dos conceitos, propriedades e teoremas. Pense que cada exercício resolvido é um exemplo da aplicação dos conceitos e teoremas que foi construído por você. Estudar com o objetivo de decorar conceitos e técnicas não é produtivo. A memorização de conceitos, técnicas e teoremas ocorre naturalmente quando resolvemos exercícios atentos para os processos que conduzem às suas soluções.

Os exercícios estão distribuídos ao longo de cada capítulo de tal forma que você possa o quanto antes testar sua compreensão dos conteúdos apresentados. A ideia é que os primeiros exercícios de cada seção sejam feitos com consulta imediata ao texto, de forma que a utilização dos conceitos e teoremas na resolução dos exercícios o ajude a compreender o conteúdo de cada seção. Ao resolver um exercício sempre procure responder a pergunta *para o que esse exercício serve? Qual é a sua relação com a teoria?* Isso também poderá ajudá-lo em seu aprendizado, já que os exercícios são elaborados também para destacar o que há de mais importante em cada seção.

Você pode encontrar resposta para a maioria dos exercícios na seç ão respostas, mas é importante ter em mente que a maioria das respostas não contém justificativas. Assim a confirmação da sua solução é apenas parcial, e sua melhor garantia é a referência que você mesmo faz aos teoremas (ou propriedades) usadas para chegar à solução.

O curso cujo conteúdo é o tema deste livro é, provavelmente, seu primeiro contato com a matemática (no caso, o cálculo) apresentada da forma como se faz matemática. Esperamos que, independentemente de sua apreciação da beleza do cálculo, você descubra que o método que você desenvolveu para aprender cálculo é útil para aprender qualquer outro assunto.

Iaci Malta, Sinésio Pesco e Hélio Lopes

Sumário

Apresentação

O material que compõe este livro começou a ser escrito quando fui convidada a organizar um programa para uma disciplina de matemática que preparasse alunos das áreas de biologia e agronomia para um primeiro curso de cálculo tradicionalmente dirigido a alunos da área de ciências exatas.

As ideias que nortearam minha proposta para tal disciplina, denominada então Cálculo o, foram, basicamente, olhar para o aluno como um jovem recém ingresso na universidade, em oposição a tratá-lo como um estudante secundário (que em geral é considerado apto a apenas ser treinado na execução de alguns algoritmos), buscar meios e conteúdos que viessem a desenvolver suas capacidades de raciocínio e expressão organizados, capacidades estas imprescindíveis para uma efetiva compreensão da matemática, assim como já introduzi-los no contexto numérico, isto é, no contexto do cálculo aproximado e dos recursos computacionais.

Daí resultou o que é apresentado nos primeiros seis capítulos deste livro que compõem o primeiro volume *Uma introdução ao cálculo*.

O capítulo 1, *Elementos da linguagem e da lógica matemáticas*, já reflete esse "olhar para o jovem universitário" e sua presença no programa tem o objetivo de permitir a passagem do "apenas aprender a fazer" para o "aprender a fazer compreendendo o que faz". A inclusão desse tema no livro reflete minha convicção, forjada no ensino de matemática na universidade, de que, para a maioria das pessoas, o aprendizado das regras mínimas da lógica matemática não ocorre espontaneamente a partir do aprendizado de alguns algoritmos matemáticos.

O capítulo 2, *Os números reais*, além de fornecer conteúdo já familiar, com o qual se pode promover a fixação da linguagem e das regras da lógica matemática, introduz os conceitos de aproximação e erro, a noção de cálculo aproximado.

O tema sequências de números reais, tradicionalmente evitado em cursos de cálculo, é apresentado no capítulo 3, e aí está para o que serve: introduzir, do ponto de vista conceitual, o aluno no mundo dos algoritmos que, com a acessibilidade aos computadores, se tornou o mundo daqueles que utilizam a matemática. Além disso, considero que a utilização de sequências para definir limites de funções é bem mais eficiente em promover a compreensão desse difícil e importante conceito.

No capítulo 4, *Funções reais*, uma ênfase especial é dada ao que denominamos *leitura gráfica*, isto é, à relação entre propriedades algébricas e geométricas (gráficas) de uma função. Também é discutida a utilização de programas gráficos para o estudo do comportamento de funções reais.

O capítulo 5, *Continuidade e limites de funções reais*, reforça o objetivo de introduzir o aluno no mundo (real) do cálculo aproximado: apresenta o conceito de função contínua não como resultado da imaginação criativa de matemáticos, mas sim como uma necessidade prática já que as funções contínuas são aquelas com as quais, efetivamente, se pode fazer cálculos aproximados. Tanto o conceito de continuidade como o de limite de função são introduzidos a partir do conceito de seqüência convergente. Essa opção se deve à minha convicção de que o conceito de limites de sequências é mais acessível à compreensão pelo fato de representar um processo discreto.

No capítulo 6, *As funções elementares*, são utilizados os recursos desenvolvidos nos capítulos anteriores para introduzir e estudar as funções elementares algébricas, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. Nesse capítulo também aproveitamos o conceito de sequência convergente, agora para construir as funções exponenciais. Essa opção tem a vantagem de introduzir as exponenciais e logarítmicas antes de derivada e integral e de dar um significado menos misterioso à exponencial de um número, isto é, o número que pode ser calculado por aproximações obtidas por meio de operações familiares, a exponenciação inteira e a radiciação.

Os capítulos que tratam do cálculo diferencial e integral, e que compõem o segundo volume, são basicamente tradicionais, exceto por uma maior ênfase nos aspectos numérico e conceitual. Por exemplo, como motivação para a introdução do conceito de derivada, foi escolhida a aplicação do Método de Newton para encontrar aproximações da raiz quadrada de dois.

Com relação ao cálculo integral, a opção adotada foi começar pela introdução do conceito de integral definida (em oposição à antiderivação). Essa escolha foi feita pelo fato de que soluções aproximadas de um problema revelam direta-mente que sua solução resulta numa integral quando as aproximações obtidas são identificadas como somas de Riemann. Em particular, a independência dos dois conceitos, derivada e integral, fica destacada e sua relação é, então, dada pelo Teorema Fundamental do Cálculo. A escolha do problema do cálculo do comprimento de arco para motivar a introdução do conceito de integral definida, ao invés do tradicional problema de cálculo de áreas, teve o objetivo de desvincular a integral definida do conceito de área, já que em geral o problema que é resolvido por uma integral não tem nenhuma relação com a área da região determinada pelo gráfico da função que está sendo integrada. De fato, neste texto, integrais definidas são usadas para definir a área de uma região determinada pelo gráfico de uma função contínua.

Pode-se dizer que o tratamento dado ao conteúdo matemático deste livro aponta para um enfoque mais conceitual. De fato, a ênfase num treinamento extensivo na execução de algoritmos usados em cálculos exatos se tornou inadequada devido à realidade atual de grande acessibilidade aos recursos computacionais (programas poderosos que fazem qualquer coisa). Por outro lado, uma compreensão mais conceitual se tornou necessária, no sentido de fornecer recursos para uma análise crítica de resultados obtidos por intermédio de programas computacionais.

De uma maneira geral, aquilo que neste livro pode ser visto como um trata-mento formal tem por objetivo ajudar o aluno a desenvolver sua capacidade de compreensão de um texto matemático e não a precisão matemática em si. Assim, demonstrações são encaradas mais como uma exemplificação do processo de obtenção de resultados matemáticos do que como provas da validade dos resultados.

Esse enfoque mais conceitual nos processos, em oposição ao enfoque na execução de algoritmos, e a preocupação com o desenvolvimento da capacidade de compreensão direta de um texto matemático refietem o pressuposto de que a universidade deve, prioritariamente, formar um autodidata. De fato, a velocidade com que novos conhecimentos são gerados atualmente aponta para a necessidade do desenvolvimento da capacidade de auto-aprendizado.

No que diz respeito à modelagem matemática, apenas alguns exemplos são apresentados neste livro. A opção de sacrificar esse tema em favor do conteúdo matemático foi feita, não pela pouca importância que nós, autores, damos a esse tema mas sim, pelo fato de que, devido à formação prévia do aluno que recém ingressa na universidade, problemas que pressupõem apenas conceitos de outras áreas já do domínio do aluno resultam ser artificiais e pouco interessantes. Em verdade, dada a grande importância desse tema, consideramos que o mesmo merece um tratamento especial, isto é, um texto diretamente dedicado à modelagem matemática, no qual o cálculo (diferencial e integral) seja apenas aplicado e os conceitos de outras áreas envolvidos na formulação dos problemas sejam devida-mente abordados.

No que diz respeito aos exercícios, optamos por apresentar exercícios simples, no sentido de não necessitarem de ideias muito elaboradas para sua solução. Tratam-se de exercícios cujas soluções são praticamente imediatas à compreensão do conteúdo matemático apresentado, e a idéia é que o aluno adquira o domínio do processo (conceitos e resultados utilizados) que o conduziu à solução. Assim, os exercícios privilegiam o aspecto conceitual, embora o caráter de treinamento no domínio de algoritmos não esteja ausente.

As informações históricas contidas neste livro foram obtidas em

Mathematics - its content, methods, and meaning (segunda edição, 1965) - publicação em russo editada por A. D. Alekasandrov, A. N. Kolmogorov e M. A. Lvrent'ev e publicação em inglês editada por S. H. Gould – MIT Press e AMS.

Iaci Malta

CAPÍTULO 1

Elementos da Linguagem e da Lógica Matemáticas

Para aprendermos Matemática no sentido de compreendermos os recursos que a Matemática nos oferece, necessitamos conhecer algumas regras básicas da linguagem e da lógica matemáticas. E claro que para apenas usarmos algum algoritmo, por exemplo aquele que nos permite somar dois números inteiros, não precisamos saber por que o algoritmo funciona, mas, para termos acesso a recursos menos elementares que a Matemática oferece, o conhecimento dessas regras mínimas é indispensável. Nesse nível, tentar entender Matemática sem esse conhecimento básico pode ser comparado a participar de um jogo sem conhecer, pelo menos, suas regras iniciais.

No entanto, apesar de se considerar natural que procuremos aprender algumas regras mínimas para participar de um jogo, no caso da Matemática parece ter-se instituído a tradição de que as pessoas aprendem espontaneamente as regras de jogo da Matemática, isto é, as regras da linguagem e da lógica matemáticas. Mas, na verdade, a experiência tem demonstrado que esse aprendizado espontâneo não é o que ocorre. Mais ainda, é bem possível que o desconhecimento dessas regras mínimas seja um das causas mais significativas da dificuldade no aprendizado da Matemática num nível menos elementar.

Um dos pontos delicados da ideia do aprendizado espontâneo é que muito embora na linguagem matemática as frases sejam construídas da mesma maneira que na linguagem do cotidiano, as regras de entendimento - isto é, a lógica - podem diferir nos dois casos. Isso é o que, em geral, ocorre com frases condicionais. Por exemplo, suponhamos que algumas pessoas ouviram o pai de João dizer que

Se João for aprovado no vestibular, então João terá um carro (*).

Não será nenhuma surpresa se ouvirmos alguém dizer que João foi aprovado no vestibular, pois soube que João já tem um carro.

Na verdade, essa é a conclusão a que chegaria a maioria das pessoas, isto é,

Se João tem um carro, então João foi aprovado no vestibular (**).

O que ocorre é que, ao darmos à primeira frase (*) o atributo de ser verdade, automaticamente damos à segunda frase (**) o mesmo atributo. E, de fato, essa é a convenção usual para o entendimento de frases condicionais na linguagem do cotidiano. Mas não é a convenção dada pela lógica matemática, e sua adoção na leitura de textos matemáticos leva, impreterivelmente, a sérios erros, comprometendo o aprendizado de um conteúdo matemático.

Para descrevermos a diferença de significados, observemos que as duas frases acima são do tipo *Se A, então B*, onde *A* e *B* representam condições ou propriedades. Na primeira frase (*), *A* representa a condição *João ser aprovado no vestibular, B* está representando a propriedade *João ter um carro* e a segunda frase (**) corresponde a *Se B, então A*.

Como veremos neste capítulo, as regras da lógica matemática estabelecem que, dadas as condições (ou propriedades) *A* e *B*, a qualidade de *verdade* da frase *Se A, então B* é independente da qualidade de verdade da frase *Se B, então A*. Em outras palavras, sabermos que a frase *Se A, então B* é verdadeira não nos informa, em absoluto, se a frase *Se B, então A* é verdadeira ou se é falsa.

No exemplo dado, se raciocinarmos de acordo com a lógica matemática, seremos levados a concluir que o fato de a frase (*) enunciar uma verdade não garante que o mesmo se dá com a frase (**). De fato, João pode ter ganhado um carro sem ter sido aprovado no vestibular, porque foi premiado num concurso e, nesse caso, (**) é falsa.

Essa diferença de entendimento, isto é, a diferença entre o que podemos chamar de lógica da comunicação no cotidiano e a lógica matemática nos alerta, em particular, para a inconveniência de utilizarmos frases que não pertençam ao contexto matemático para explicar, com exemplos, as regras da lógica matemática. Assim, o exemplo dado acima é a única frase fora do contexto matemático que aparece neste texto.

Em Matemática, frases da forma *Se A, então B* são muito usadas; de fato, todo resultado matemático pode ser descrito por uma frase desse tipo. Mais ainda, os resultados matemáticos que compõem o conteúdo de um curso de Cálculo podem facilmente ser enunciados nessa forma. Assim sendo, neste capítulo trataremos essencialmente de frases matemáticas (que chamaremos de proposições) expressas na forma *Se A, então B*.

Convém ressaltar que aqui apresentamos o que consideramos como sendo minimamente necessário para o aprendizado do conteúdo de um curso de Cálculo. A escolha da forma de apresentação foi norteada por razões didáticas. Os exemplos escolhidos usam apenas resultados e conceitos bastante conhecidos a respeito de números inteiros. Para os exercícios usamos também resultados conhecidos sobre números reais, que serão revistos no próximo capítulo.

1. A proposição "*Se* A, *então B*"

Como foi dito na introdução,

Se A, então B

é uma das formas de expressarmos proposições matemáticas. As letras A e B estão representando condições ou propriedades. Nesta proposição, a condição A, isto é, aquela que vem imediatamente após o *Se*, é chamada de *hipótese* e a condição B, que aparece imediatamente após o *então*, é chamada de *tese* da proposição.

Uma outra forma de expressarmos a proposição *Se A, então B* é por meio da notação

$$A \Longrightarrow B$$

que se lê *A implica B*. Daí esse tipo de proposição ser chamada uma *implicação*.

Por exemplo, as frases P_1, P_2 e P_3, enunciadas a seguir, são proposições deste tipo:

P_1: *Se m* e *n são inteiros pares, então o produto mn é um inteiro par*.

P_2: *Se m é um inteiro múltiplo de* 3, *então* m *é um inteiro múltiplo de* 9.

P_3: *Se* m *é um inteiro ímpar, então* $m = 2k^2 + 1$, *para algum número inteiro k*.

Na proposição P_1, a hipótese é a condição *m e n são inteiros pares*, e a tese é a condição *o produto mn é um inteiro par*. No caso da proposição P_2, a condição *m é um inteiro múltiplo de* 3 é a hipótese e, *m é um inteiro múltiplo de* 9 é a tese da proposição. Ou seja, a condição dada pela hipótese de P_2 é *m* ser um número inteiro múltiplo do número 3, e a condição de sua tese é *m* ser um inteiro múltiplo do número 9.

Se um objeto matemático satisfaz a condição dada pela hipótese, dizemos simplesmente que 0 objeto *satisfaz a hipótese* da proposição. Analogamente, se um objeto matemático satisfaz a condição dada pela tese, dizemos simplesmente que 0 objeto *satisfaz a tese* da proposição.

Por exemplo, m = 18 satisfaz tanto a hipótese quanto a tese de P_2- de fato, por um lado, o número 18 é um número inteiro e é múltiplo de 3 (satisfazendo a hipótese) e, por outro lado, 18 é múltiplo do número 9, satisfazendo a tese.

Já m = 6 satisfaz a hipótese (6 é um número inteiro que é múltiplo de 3) mas não satisfaz a tese de P_2, pois 6 não é um múltiplo de9.

Nosso objetivo principal é dar um significado preciso a afirmações como

A proposição P_1 é verdadeira

e

A proposição P_2 é falsa.

Para isso, começamos por enunciar as primeiras regras básicas da lógica matemática:

Ll *Uma proposição matemática só pode possuir um dentre os atributos* **verdadeira** *e* **falsa.**

L2 *Se, ao admitirmos que uma proposição possui um determinado atributo* (**verdadeira** *ou* **falsa**), *chegarmos à contradição da regra* **Ll**, *devemos concluir que o atributo correto é o outro* (**falsa** *ou* **verdadeira).**

A regra L2 é conhecida como *princípio do absurdo* e uma demonstração que se apoie nessa regra é chamada *demonstração por absurdo*. O uso da palavra absurdo decorre do fato de que contradizer uma regra, isto é, uma lei da lógica matemática é, em si, um absurdo.

Para podermos definir quando uma proposição *Se A, então B* possui o atributo *verdadeira* (e, consequentemente, quando possui o atributo *falsa*), necessitamos dos conceitos de exemplo e contraexemplo para uma tal proposição:

um exemplo para uma proposição do tipo **Se *A*, então *B*** *é um objeto matemático que satisfaz a hipótese e a tese da proposição.*

um contraexemplo para uma proposição do tipo **Se *A*, então *B*** *é um objeto matemático que satisfaz a hipótese e* ***não*** *satisfaz a tese da proposição.*

Se existe pelo menos um contraexemplo para uma proposição, dizemos que a proposição *admite contraexemplos*. Analogamente, com a frase *a proposição não admite contraexemplos* estamos dizendo que nenhum objeto matemático é um contraexemplo para a proposição.

Exemplos

1. A dupla de números $m = 4$e $n = 6$ *é* um exemplo para a proposição P_1 acima: 4 e 6 são inteiros pares (satisfazem a hipótese de P_1) e seu produto, $mn = 24$, é um inteiro par, isto é, a tese de P_1 também é satisfeita pelo par, $m = 4$ e $n = 6$.

2. O número inteiro 18 é um exemplo para P_2, pois, como já vimos acima, $m = 18$ satisfaz tanto sua hipótese quanto sua tese.

3. Como já vimos acima, $m = 6$ satisfaz a hipótese de P_2, mas não satisfaz sua tese, ou seja, $m = 6$ é um contraexemplo para a proposição P_2.

4. Um exemplo para P_3 é o número 9.

De fato, $m = 9$ é um inteiro ímpar (satisfaz a hipótese) que pode ser escrito na forma $9 = 2 \cdot 2^2 + 1$, isto é,

$$9 = 2k^2 + 1 \text{ com } k = 2,$$

e, portanto, $m = 9$ também satisfaz a tese de P_3.

5. O número 5 é um contraexemplo de P_3.

De fato, $m = 5$ satisfaz sua hipótese (é um inteiro ímpar), mas não satisfaz sua tese, pois, se k é um número inteiro, vemos que

$$\text{para } k = 0, \text{ temos que } 2k^2 + 1 = 1 \neq 5,$$
$$\text{para } |k| = 1, \text{ temos que } 2k^2 + 1 = 3 \neq 5$$
$$\text{e, para } |k| \geq 2, \text{ temos que } 2k^2 + 1 \geq 2 \cdot 2^2 + 1 = 9 > 5.$$

Ou seja, o número 5 não pode ser escrito na forma $2k^2 + 1$, com algum k inteiro. Em outras palavras, $m = 5$ não satisfaz a tese de P_3.

E importante observar que se um objeto matemático **não** satisfaz a hipótese de uma proposição, então esse objeto não pode ser nem exemplo nem contraexemplo para a proposição. A dupla de números, $m = 4$ e $n = 7$, não é contraexemplo e nem exemplo da proposição P_1 (não satisfaz a hipótese), embora seu produto seja um número par (28), isto é, satisfaz sua tese.

Podemos agora definir os critérios que usamos para dar a uma proposição do tipo *Se A, então B* um dos atributos, verdadeira ou falsa.

> *Uma proposição* **Se *A*, então *B*** *é verdadeira exatamente quando não admite contraexemplos.*

Em particular,

> *Uma proposição* **Se *A*, então *B*** *com a propriedade de que* **em todas as situações nas quais a hipótese é satisfeita tem-se que a tese também é satisfeita**, *é uma proposição verdadeira.*

Claramente, a propriedade acima (em negrito) garante que a proposição não admite contraexemplos, já que um contraexemplo tem que satisfazer a hipótese e não satisfazer a tese.

Assim, a proposição

P_1: *Se m e n são inteiros pares, então o produto mn é um inteiro par*

é uma proposição verdadeira, pois podemos verificar (ou mais precisamente, provar) que o produto de dois números inteiros pares quaisquer é sempre um número inteiro par, ou seja, qualquer objeto matemático que satisfaz sua hipótese (qualquer dupla de números inteiros pares) também satisfaz sua tese.

> *Uma proposição* **Se *A*, então *B*** *é falsa quando admite contraexemplos.*

Em particular, para provar que uma dada proposição é falsa, basta exibirmos um contraexemplo para ela.

Exemplos

6. No exemplo **2**, vimos que $m = 6$ é um contraexemplo para a proposição $P2$, ou seja, P2 admite contraexemplos e, portanto, P2 é falsa.

7. Analogamente, vimos, no exemplo **5**, que $m = 5$ é um contraexemplo para P_3, o que garante que P_3 também é falsa.

8. Considere a proposição

Se n é um número inteiro tal que $n^2 = 2$, então $n = 0$.

Como sabemos que, para qualquer número inteiro n, tem-se que $n^2 \neq 2$, temos que *não existe nenhum objeto matemático que satisfaça a hipótese dessa proposição*. Em particular, essa proposição não admite contraexemplos sendo, assim, verdadeira.

Uma proposição como a do exemplo **8**, isto é, para a qual não existe nenhum objeto matemático que satisfaça sua hipótese, ou, em outras palavras, uma proposição que não admite exemplos e nem admite contraexemplos, é dita verdadeira por vacuidade. Observe que, nesse caso, o fato de a proposição ser verdadeira não depende de sua tese ser ou não satisfeita. A proposição, bastante familiar a alunos de matemática, *o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto*, é verdadeira por vacuidade.

E importante que fique bem claro que:

- *para provarmos que uma proposição é falsa, basta exibirmos um contra-exemplo*,

- *a apresentação de exemplos* (*mesmo que muitos*) *para uma proposição* **não** *é suficiente para provar que a mesma é verdadeira*.

Observe que podemos exibir tantos exemplos para a propositiçã o P_2 quanto desejarmos e, no entanto, já sabemos que ela é falsa.

- *para provarmos que uma proposição é verdadeira, devemos mostrar que* **em toda situação em que sua hipótese é satisfeita tem-se que sua tese também é satisfeita**, *ou, equivalentemente, devemos mostrar que a proposição não admite contraexemplos*.

Como um exemplo, provemos que a proposição P_1 é verdadeira:

P_1: *Se m e n são inteiros pares, então o produto mn é um inteiro par*.

Consideremos a situação genérica em que a hipótese de P_1 é satisfeita, isto é, m e n denotam números inteiros pares quaisquer. Sabemos que, nesse caso, podemos escrevê-los na forma

$m = 2k$ e $n = 2p$, onde k e p são inteiros.

Usando agora as regras da multiplicação, temos que

$$\begin{aligned} mn &= (2k)(2p) \\ &= 2(2kp), \end{aligned}$$

isto é, mn é um inteiro par, já que é o produto do número 2 pelo número $2kp$ (lembre-se que sabemos que o produto de números inteiros é um inteiro). Em resumo, mostramos que se uma dupla, m,n, satisfaz a hipótese, então essa dupla satisfaz também a tese.

Observe que não fizemos uso de nenhuma propriedade adicional de m e n (isto é, nenhuma propriedade além daquela dada pela hipótese). Em particular, não atribuímos valores específicos para m e n como, por exemplo, fazer $m = 4$ e $n = 6$, ou $m = 22$ e $n = 8$. De fato, atribuir valores específicos para m e n e verificar que, com esses valores, a hipótese e a tese são satisfeitas corresponde a apenas dar exemplos para a proposição.

A partir do critério que adotamos para darmos a uma proposição o atributo de verdadeira, podemos entender como, em Matemática, usamos a informação de que uma dada proposição é verdadeira.

De fato, se uma proposição

P : *Se A, então B*

é verdadeira, sabemos que *todo objeto matemático que satisfaz a condição A* (ou equivalentemente, possui a propriedade A) também *satisfaz a condição B* (ou equivalentemente, também possui a propriedade B) e, portanto, se a é um objeto matemático que sabemos satisfazer a condição A, podemos usar o fato de que a também satisfaz a condição *B, sem precisarmos testar isso diretamente*. A utilidade disso é que o fato de o objeto a satisfazer a condição A pode ser uma informação já dada pelo problema que estamos querendo resolver ou, simplesmente, A pode ser uma condição mais fácil de ser testada do que B. Por exemplo, a proposição

Se $x > 1$, *então* $\sqrt{x} < x$

é verdadeira e, portanto, como $1,0354 > 1$ (isto é, $x = 1,0354$ satisfaz a hipótese da proposição), podemos ter certeza de que $\sqrt{1,0354} < 1{,}0354$, independente-mente de “calcularmos” o número $\sqrt{1,0354}$.

Por outro lado, é importante termos em mente que se uma proposição

P : *Se A, então B*

é verdadeira, *só podemos garantir que um objeto matemático satisfaz a condição B* (tese da proposição) *se já sabemos que esse objeto satisfaz a condição A* (hipótese da proposição).

Em particular, se uma implicação $A \Rightarrow B$ é verdadeira por vacuidade, isto é, porque não existe nenhum objeto que satisfaz sua hipótese (a condição *A*), essa implicação não tem nenhuma utilidade para provarmos que algum objeto satisfaz a condição *B*.

Em resumo, proposições do tipo do exemplo acima, isto é, proposições que são verdadeiras e possuem exemplos, são as proposições que geram diretamente novas informações, enquanto que aquelas que são verdadeiras por vacuidade não o fazem. Um *teorema* é uma proposição que possui exemplos e que já se sabe (isto é, já foi provado) ser verdadeira e, portanto, um teorema sempre gera novos resultados matemáticos.

Os conectivos *e* e *ou*

Em Matemática usamos os conectivos *e* e *ou* para construir novas condições a partir de condições dadas. Por exemplo, a partir da condição *m é um inteiro par* e da condição *n é um inteiro ímpar* podemos construir as duas condições, *A* e *B*, abaixo, usando, respectivamente, os conectivos *e* e *ou :*

A : *m é um inteiro par* e *n é um inteiro ímpar*
B : *m é um inteiro par* ou *n é um inteiro ímpar*.

Os objetos matemáticos que satisfazem a condição *A* são os pares de números inteiros, *m* e *n*, com *m* sendo par e *n* sendo ímpar. Por exemplo, o par $m = 2$ e $n = 5$ satisfaz *A*, enquanto que o par $m = 2$ e $n = 4$ não satisfaz *A*.

Por outro lado, os objetos matemáticos que satisfazem a condição *B* são os pares de números inteiros, *m* e *n*, para os quais pelo menos uma das duas propriedades (*m* ser par, *n* ser ímpar) é satisfeita. Por exemplo, o par $m = 2$ e $n = 4$ bem como o par $m = 2$ e $n = 5$ satisfazem *B*, mas o par $m = 3$ e $n = 4$ não satisfaz *B*.

Em geral, se *C* e *D* são condições matemáticas, dizemos que:

um objeto matemático *x satisfaz a condição* "*C e D*", se *x satisfaz a condição C e também satisfaz a condição D*.

um objeto matemático *x satisfaz a condição* "*C ou D*", se *x satisfaz pelo menos uma das condições C* e *D*.

Aqui é importante destacar que, em Matemática, o conectivo *ou* não é exclusivo, como ocorre na linguagem do cotidiano, isto é, não tem o significado de que apenas uma das condições pode ser satisfeita. Por exemplo, o par $m = 2$ e $n = 5$ satisfaz a condição B, como afirmamos acima, apesar das duas condições (m ser um inteiro par, n ser um inteiro ímpar) estarem sendo satisfeitas, já que 2 é um inteiro par e 5 é um inteiro ímpar.

Consideremos um exemplo de proposição em que a hipótese e a tese são dadas por condições compostas por conectivos:

$$P\text{: }\textit{Se } (x-1)x = 6 \text{ e } x^2 > 1, \textit{ então } x-2=1 \text{ ou } x+3>0.$$

Podemos verificar que os números –2 e 3 são exemplos para P. De fato,

$$(-2-1)\,(-2) = 6 \text{ e } (-2)^2 = 4 > 1,$$

isto é, $x = -2$ satisfaz a hipótese de P, já que satisfaz a condição $(x-1)x = 6$ e também satisfaz a condição $x^2 > 1$. Por outro lado, –2 também satisfaz a tese de P, já que $-2 + 3 = 1 > 0$, ou seja, $x = -2$ satisfaz uma ($x + 3 > 0$) das duas condições que compõem a tese ($x - 2 = 1$ ou $x + 3 > 0$).

Para $x = 3$, vemos que

$$(3-1)3 = 6 \text{ e } 3^2 = 9 > 1$$

e, portanto, o número 3 satisfaz a hipótese de P. Mais ainda, $3 - 2 = 1$, isto é, 3 satisfaz a condição $x - 2 = 1$, o que nos diz que 3 também satisfaz a tese de P (observe que poderíamos também concluir isso verificando apenas que 3 satisfaz a outra condição, $x + 3 > 0$).

A recíproca de "*Se A, então B*"

A partir de uma proposição

P: Se A, então B

podemos construir uma nova proposição do mesmo tipo, *Q: Se B, então A*,

que é chamada a *recíproca* de P. Claramente a recíproca de Q é P, daí dizermos que P e Q são proposições recíprocas.

Exemplos

9. A recíproca de

P_1: *Se m e n são inteiros pares, então o produto mn é um inteiro par*

é a proposição

Q_1: *Se o produto mn é um inteiro par, então m* e *n são inteiros pares*.

Já vimos que P_1 é verdadeira; agora podemos ver que $m = 2$ e $n = 3$ é um contraexemplo para a recíproca Q_1 e, portanto, Q_1 é falsa. De fato, o produto $mn = 2 \cdot 3 = 6$ é um inteiro par (satisfaz a hipótese), mas $n = 3$ é inteiro ímpar e não par, isto é, a dupla $m = 2$ e $n = 3$ não satisfaz a tese de Q_1.

10. A recíproca de

P_2: *Se m é um inteiro múltiplo de* 3, *então m é um inteiro múltiplo de* 9

é a proposição

Q2: Se m é um inteiro múltiplo de 9, *então m é um inteiro múltiplo de* 3.

Sabemos que P_2 é falsa. Por outro lado, sabemos que a hipótese

m é um inteiro múltiplo de 9

quer dizer, formalmente, que m pode ser escrito na forma

$m = 9k$ onde k é um número inteiro.

Mas sabemos também que $9 = 3 \cdot 3$ e, portanto,

$m = 3(3k)$,

o que quer dizer que m também é múltiplo de 3. Acabamos de provar que Q_2 é verdadeira, uma vez que provamos que em toda situação na qual sua hipótese é satisfeita tem-se que sua tese também é satisfeita.

11. A recíproca de

P3: *Se m é um inteiro ímpar, então* $m = 2k^2 + 1$, *para algum número inteiro* k, é a proposição

Q3: Se $m = 2k^2 + 1$, *para algum número inteiro k, então m é um inteiro ímpar.*

Sabemos que um número m é dito ímpar se pode ser escrito na forma

$$m = 2n + 1$$

com n sendo um número inteiro qualquer. Assim, se m satisfaz a hipótese de Q_3, isto é,

$$m = 2k^2 + 1, \textit{ para algum número inteiro } k,$$

então $n = k^2$ é um número inteiro, já que k é um inteiro, e $m = 2n + 1$, isto é, m é um inteiro ímpar. Provamos então que Q_3 é verdadeira, enquanto que, como vimos anteriormente, sua recíproca, que é P_3, é falsa.

12. Considere a proposição

P_4: *Se m é um inteiro e* m^2 *é par, então m é um inteiro par.*

cuja recíproca é a proposição

Q_4: *Se m é um inteiro par, então m é um inteiro e* m^2 *é par.*

Vamos mostrar que ambas são verdadeiras. Comecemos com $Q4$: se m satisfaz a hipótese de Q_4,então m é um número inteiro par, e, portanto

$$m = 2k, \text{ onde } k \text{ é um número inteiro.}$$

Daí, pela definição, $m^2 = m \cdot m$, obtemos que

$$m^2 = (2k)\,(2k) = 2(2k^2)$$

isto é, podemos concluir que m^2 também é par, pois é o produto do número 2 com o número inteiro $2k^2$. Ou seja, mostramos que toda vez que um número inteiro, m, satisfaz a hipótese de Q_4 tem-se que m também satisfaz sua tese. Podemos então concluir que Q_4 é verdadeira.

Vejamos agora que P_4 também é verdadeira: para provarmos isso, vamos mostrar que P_4 não admite contraexemplos. Como estabelecemos que nessa proposição m é um número inteiro, basta considerarmos a possibilidade de um número inteiro ser um contraexemplo.

Sabemos que um número inteiro ou é par ou é ímpar. Dentre os inteiros pares não há contraexemplos para P_4, pois se m é par, então m já satisfaz a tese de P_4 e, portanto, não pode ser um contraexemplo: de fato, qualquer m par é um exemplo para P_4 (o fato de que Q_4 é verdadeira garante isso). Ou seja, se existe algum contraexemplo m para P_4, temos que m deve ser ímpar, isto é,

$$m = 2n + 1$$

com n sendo algum número inteiro. Mas, nesse caso,

$$\begin{aligned} m^2 &= (2n + 1)^2 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 \\ &= 2(2n^2 + 2n) + 1 \end{aligned}$$

que é da forma

$$m^2 = 2k + 1$$

com $k = 2n^2 + 2n$ que é um número inteiro e, portanto, m^2 também é ímpar. Ou seja, vimos que se m é ímpar, então m^2 não é par e, portanto, não satisfaz a hipótese de P_4, o que quer dizer que m ímpar também não é contraexemplo para P_4. Assim, mostramos que P_4 não admite contraexemplos, isto é, mostramos que P_4 é verdadeira.

13. Nas proposições abaixo, x designa um número.

$$P_5\text{: } \textit{Se } (x - 1)x = 6, \textit{ então } x = 6 \textit{ ou } x - 1 = 6.$$

A recíproca de P_5 é a proposição

$$Q_5\text{: } \textit{Se } x - 1 = 6 \textit{ ou } x = 6, \textit{ então } (x - 1)x = 6.$$

Esse é um exemplo em que a proposição e sua recíproca são falsas. Para vermos isso, devemos exibir um contraexemplo para cada uma:
(i) $x = 3$ é um contraexemplo para P_5: de fato, se $x = 3$, então $x - 1 = 2$ e, portanto,

$$(x - 1)x = 2 \cdot 3 = 6,$$

isto é, $x = 3$ satisfaz a hipótese de P_5 e, mais ainda, temos que

$$x = 3 \neq 6$$

e,

$$x - 1 = 2 \neq 6,$$

o que nos diz que $x = 3$ não satisfaz sua tese.

(ii) $x_0 = 7$ é um contraexemplo para a recíproca, Q_5. De fato, se $x_0 = 7$, então $x_0 - 1 = 6$, isto é, $x_0 = 7$ satisfaz a hipótese de Q_5 e, por outro lado,

$$(x_0 - 1)x_0 = 6 \cdot 7 \neq 6,$$

o que nos diz que $x_0 = 7$ não satisfaz sua tese.

Os exemplos que acabamos de analisar mostram claramente a independência dos atributos de uma proposição e de sua recíproca. De fato, todas as possibilidades aparecem nesses exemplos:

- proposição verdadeira com recíproca falsa: P_1.

- proposição falsa com recíproca verdadeira: P_2 e P_3.

- proposição verdadeira com recíproca verdadeira: P_4.
- proposição falsa com recíproca falsa: P_5.

E extremamente importante ter em mente essa independência dos atributos de uma proposição e de sua recíproca quando lemos um texto matemático; a troca da hipótese pela tese, isto é, *lermos* a proposição mas *entendermos* sua recíproca, conduz inevitavelmente a uma má compreensão dos resultados matemáticos. E muito frequente a ocorrência de teoremas com recíprocas falsas (de fato, isso é o que mais acontece); ao longo deste texto serão apresentados vários exemplos dessa situação.

A experiência com alunos do primeiro curso de Matemática na universidade tem mostrado que, com muita frequência (provavelmente induzidos pela lógica da comunicação no cotidiano, como nos referimos na introdução), os alunos tendem a não distinguir a tese da hipótese de um teorema, isto é, assumem que o resultado descrito pelo teorema é verdadeiro (o que está correto) e assumem também que o resultado dado pela sua recíproca (trocaram agora a hipótese pela tese) também é verdadeiro, o que pode estar incorreto, já que sua recíproca pode ser falsa.

Embora essa não seja a situação mais comum, muitas proposições verdadeiras possuem recíprocas verdadeiras, daí a conveniência de podermos expressar de uma forma compacta uma proposição e sua recíproca: introduzimos então a proposição

A se, e somente se, B

onde, como antes, A e B representam condições ou propriedades.

> *Uma proposição do tipo* ***A* se, e somente se, *B*** *é verdadeira quando* **Se *A*, então *B*** *e sua recíproca*, **Se *B*, então *A***, *são ambas verdadeiras*.

Exemplos

P_a: *m e n são inteiros pares se, e somente se, o produto mn é um inteiro par.*

P_b: *m é um inteiro múltiplo de* 3 *se, e somente se, m é múltiplo de* 9.

P_c: *m é um inteiro ímpar se, e somente se,* $m = 2k^2 + 1$, *para algum inteiro k.*

P_d: *m é um inteiro e* m^2 *é par se, e somente se, m é um inteiro par.*

Observe que:

- P_a corresponde a P_1 e sua recíproca Q_1. Como Q_1 é falsa podemos concluir que P_a também é falsa.

- P_b corresponde a P_2 e sua recíproca Q_2 Como P_2 é falsa podemos concluir que P_b, também é falsa.

- P_c corresponde a P_3 e sua recíproca *Q3*. Como P_3 é falsa podemos concluir que P_c também é falsa.

- P_d corresponde a P_4 e sua recíproca Q_4. Como P_4 e Q_4 são verdadeiras podemos concluir que P_d é verdadeira.

Como no caso de *Se A, então B*, podemos também expressar *A se, e somente se, B* na forma de implicações

$$A \Leftrightarrow B$$

que se lê: *A implica B e B implica A*.

A negação de uma proposição

A *negação* de uma proposição *P* é uma outra proposição, denotada por *não P*, que tem a propriedade de possuir 0 atributo oposto ao de *P*, isto é,

- *não P* é verdadeira quando *P* é falsa,
- *não P* é falsa quando *P* é verdadeira,
- a negação de *não P* é a proposição *P*, isto é, *não*(*não P*) = *P*.

Enunciar a negação de uma proposição pode ser algo complicado, mas esse não é caso de proposições do tipo *Se A, então B;* de fato, dadas as condições *A* e *B*, consideremos a seguinte proposição.

$\tilde{p}$: *Existe um objeto matemático que satisfaz A* e *não satisfaz B*.

Observe que essa proposição é equivalente à afirmação de que a proposição *P: Se A, então B* admite um contraexemplo. Assim vemos que:

- se *P* é verdadeira, então *P* **não** admite contraexemplos e, portanto, $\tilde{p}$ é falsa.
- se *P* é falsa, então *P* admite um contraexemplo e, portanto, $\tilde{p}$ é verdadeira, ou seja, temos que *P* e $\tilde{p}$ possuem atributos opostos, daí

dizermos que $\tilde{P}$= *não P*.

Exemplo: Consideremos as proposições P_1, P_2, P_3 e P_4 dadas anteriormente.

Comecemos com P_1: um objeto matemático que satisfaz a hipótese de P_1 è

uma dupla de inteiros pares m e n

e um objeto matemático que não satisfaz a tese de P_1 é

uma dupla m e n tal que 0 produto mn não é um inteiro par,

logo, *não* P_1 é a proposição

não P_1: *Existe uma dupla de inteiros pares m e n tal que 0 produto mn não é um inteiro par.*

Por outro lado, um objeto matemático que satisfaz a hipótese de P_2 é

um inteiro m que é múltiplo de 3

e um objeto matemático que não satisfaz a tese de P_2 é

um inteiro m que não é múltiplo de 9

e, portanto,

nãoP_2: *Existe um número inteiro m que é múltiplo de* 3 e *que não é múltiplo de* 9.

De maneira análoga, obtemos

nãoP_3: *Existe um inteiro ímpar m tal que* $m \neq 2k^2 + 1$ *qualquer que seja 0 inteiro k.*

e

nãoP_4: *Existe um inteiro m com m*^{2} *par tal que m não é um inteiro par*.

Em resumo, apresentamos as seguintes regras e critérios da lógica matemática:

- *Toda proposição matemática possui um e somente um dos atributos* **verdadeira** e **falsa.**
- *Se, ao admitirmos que uma proposição possui um determinado atributo* (**verdadeira *ou* falsa**), *chegarmos à contradição da regra acima, devemos concluir que o atributo correto é o outro* (**falsa *ou* verdadeira).**
- *Uma proposição* **Se A, então *B*** *é verdadeira exatamente quando não admite contraexemplos*.
- *Uma proposição* **Se A, então *B*** *é falsa quando admite contraexemplos*.
- *Os atributos de uma proposição e de sua recíproca são independentes*.
- *Uma proposição* ***A* se, e somente se, *B*** *é verdadeira quando* **Se A, então *B*** *e sua recíproca*, **Se *B*, então A**, *são ambas verdadeiras*.
- *Uma proposição e sua negação possuem atributos opostos*.

Exercícios

1. Considere as seguintes afirmações:

    (i) *x* é um exemplo para uma proposição *Se A, então B*.

    (ii) *x* é um contraexemplo para uma proposição *Se A, então B*.

    Para cada uma dessas afirmações, escolha, dentre as opções abaixo, aquela que contém as condições que *x* deve satisfazer para que a afirmação correspondente seja verdadeira:

    (a) *x* satisfaz a hipótese.

    (b) *x* não satisfaz a hipótese.

    (c) *x* satisfaz a tese.

    (d) *x* não satisfaz a tese.

    (e) *x* satisfaz a hipótese e satisfaz a tese.

(f) x satisfaz a hipótese e não satisfaz a tese.
(g) x não satisfaz a hipótese e satisfaz a tese.
(h) x não satisfaz a hipótese e não satisfaz a tese.
(i) x não satisfaz a hipótese ou x não satisfaz a tese.
(j) x satisfaz a hipótese ou x satisfaz a tese.

2. Dê exemplos e contraexemplos (se existirem) para as proposições abaixo:

(a) Se $x \geq \frac{1}{5}$ então $-1 < x < 3$
(b) Se $-3 < x \leq 4$ então $x > -1$
(c) Se $\frac{3x-4}{x+2} < 1$ então $x < 0$
(d) Se $x < 0$ então $\frac{3x-4}{x+2} < 1$
(e) Se $|x - 1| < 2$ então $x \geq 0$
(f) Se $x > 1$ então $|x + 2| > 2$
(g) Se $x < 2$ então $x \leq 5$

3. Considere a seguinte proposição: Se $\frac{2x+1}{x-1} > 1$, então $x > -2$.

- Responda as perguntas abaixo:

(i) $x = -1$ é um exemplo para a proposição?
(ii) $x = -1$ é um contraexemplo para a proposição?
(iii) $x = -3$ é um contraexemplo para a proposição?
(iv) $x = -4$ é um exemplo para a proposição?
(v) $x = 2$ é um exemplo para a proposição?
(vi) A proposição é falsa ou verdadeira?

- Escolha a opção que melhor justifica sua resposta para a pergunta (i):

(a) $x = -1$ satisfaz a hipótese pois $-1 > -2$.
(b) $x = -1$ não satisfaz a hipótese.
(c) $x = -1$ não satisfaz a hipótese pois $\frac{2(-1)+1}{-1-1} = \frac{1}{2} < 1$.
(d) $x = -1$ não satisfaz a hipótese ($\frac{1}{2} < 1$) e satisfaz a tese ($-1 > -2$).
(e) $x = -1$ satisfaz a tese pois $-1 > -2$.

(f) $x = -1$ não satisfaz a tese pois $\frac{2(-1)+1}{-1-1} = \frac{1}{2} < 1$.

- Escolha a opção que melhor justifica sua resposta para a pergunta (ii):

(a) $x = -1$ satisfaz a hipótese pois $-1 > -2$.
(b) $x = -1$ não satisfaz a hipótese.
(c) $x = -1$ não satisfaz a hipótese pois $\frac{2(-1)+1}{-1-1} = \frac{1}{2} < 1$.
(d) $x = -1$ não satisfaz a hipótese ($\frac{1}{2} < 1$) e satisfaz a tese ($-1 > -2$).
(e) $x = -1$ satisfaz a tese pois $-1 > -2$.
(f) $x = -1$ não satisfaz a tese pois $\frac{2(-1)+1}{-1-1} = \frac{1}{2} < 1$.

- Escolha a opção que melhor justifica sua resposta para a pergunta (iii):

(a) $x = -3$ satisfaz a hipótese.
(b) $x = -3$ satisfaz a hipótese pois $\frac{2(-3)+1}{-3-1} = \frac{5}{4} > 1$.
(c) $x = -3$ satisfaz a hipótese, já que $\frac{2(-3)+1}{-3-1} = \frac{5}{4} > 1$, e não satisfaz a tese já que $-3 < -2$.
(d) $x = -3$ não satisfaz a tese pois $-3 < -2$.
(e) $x = -3$ satisfaz a hipótese e não satisfaz a tese.
(f) $x = -3$ não satisfaz a hipótese pois $-3 < -2$.
(g) $x = -3$ satisfaz a tese pois $\frac{2(-3)+1}{-3-1} = \frac{5}{4} > 1$.

- Escolha a opção que melhor justifica sua resposta para a pergunta (iv):

(a) $x = -4$ satisfaz a hipótese.
(b) $x = -4$ satisfaz a hipótese pois $\frac{2(-4)+1}{-4-1} = \frac{7}{5} > 1$.
(c) $x = -4$ não satisfaz a tese pois $-4 < -2$.
(d) $x = -4$ satisfaz a hipótese e não satisfaz a tese.
(e) $x = -4$ não satisfaz a hipótese pois $-4 < -2$.
(f) $x = -4$ satisfaz a tese pois $\frac{2(-4)+1}{-4-1} = \frac{7}{5} > 1$.
(g) $x = -4$ não satisfaz a hipótese, já que $-4 < -2$, e satisfaz a tese já que $\frac{2(-4)+1}{-4-1} = \frac{7}{5} > 1$.

- Escolha a opção que melhor justifica sua resposta para a pergunta (v):

(a) $x = 2$ satisfaz a hipótese.

(b) $x = 2$ satisfaz a hipótese pois $\frac{4+1}{2-1} = 5 > 1$.

(c) $x = 2$ satisfaz a hipótese pois $2 > -2$.

(d) $x = 2$ satisfaz a tese pois $2 > -2$.

(e) $x = 2$ satisfaz a hipótese e satisfaz a tese.

(f) $x = 2$ satisfaz a hipótese, já que $\frac{4+1}{2-1} = 5 > 1$, e satisfaz a tese já que $2 > -2$.

(g) $x = 2$ satisfaz a hipótese, já que $2 > -2$, e satisfaz a tese já que $\frac{4+1}{2-1} = 5 > 1$.

- Escolha a opção que melhor justifica sua resposta para a pergunta (vi):

(a) Porque $x = -1$ não é exemplo e nem é contraexemplo.

(b) Porque tem um contraexemplo.

(c) Porque tem um contraexemplo, $x = -3$.

(d) Porque tem um exemplo, $x = -3$.

(e) Porque tem um exemplo, $x = 2$.

(f) Porque tem um contraexemplo, $x = -2$.

(g) Porque não tem exemplos.

4. Considere a proposição: Se $x \in [-1, \infty)$, então $x > 1$.

(a) $x = 2$ é um exemplo para a proposição?

(b) $x = 0$ é um contraexemplo para a proposição?

(c) $x = -3$ é um contraexemplo para a proposição?

(d) A proposição é verdadeira ou falsa?

(e) Enuncie a recíproca da proposição.

5. Considere a proposição: Se $-2 < x \leq 3$, então $-\frac{1}{2} < x > 3$.

(a) $x = -1$ é um contraexemplo para a proposição?

(b) $x = 3$ é um exemplo para a proposição?

(c) $x = 0$ é um exemplo para a proposição?

(d) A proposição é verdadeira ou falsa?

(e) Enuncie a recíproca da proposição.

6. Considere a proposição: Se $\frac{2}{x+1} < 1$, então $x > 1$.

(a) $x = 0$ é um contraexemplo para a proposição?

(b) $x = -2$ é um contraexemplo para a proposição?
(c) A proposição é verdadeira ou falsa?
(d) Enuncie a recíproca da proposição.

7. Considere a seguinte proposição: Se $|x| > 1$, então $x > 1$.
   (a) $x = 0$ é um exemplo para a proposição?
   (b) $x = 0$ é um contraexemplo para a proposição?
   (c) $x = -2$ é um contraexemplo para a proposição?
   (d) Decida se a proposição é verdadeira ou falsa.
   (e) Enuncie a recíproca da proposição.
8. Considere a seguinte proposição: Se $\sqrt{\frac{3x^2+2x}{x^9-5x^3+1}} < 2x + 1$, então a; $x < -\frac{1}{2}$
   (a) $x = -1$ é um contraexemplo para a proposição?
   (b) $x = 0$ é um contraexemplo para a proposição?
   (c) Decida se a proposição é verdadeira ou falsa.
9. Considere a seguinte proposição: Se $\frac{x+17}{2x+6} < 3 - x$, então $-1 < x < \frac{1}{2}$.
   (a) $x = 0$ é um exemplo para a proposição?
   (b) $x = -2$ é um contraexemplo para a proposição?
   (c) $x = -4$ é um contraexemplo para a proposição?
   (d) Decida se a proposição é verdadeira ou falsa.
   (e) Enuncie a recíproca da proposição.
10. Considere a seguinte proposição: Se $x^3 + x - 1 < 0$, então $x < -1$.
   (a) $x = -1$ é um exemplo para a proposição?
   (b) $x = 0$ é um contraexemplo para a proposição?
   (c) $x = 1$ é um contraexemplo para a proposição?
   (d) $x = 1$ é um exemplo para a proposição?
   (e) Decida se a proposição é verdadeira ou falsa.
   (f) Enuncie a recíproca da proposição.
11. Considere a seguinte proposição: Se $8x^7 - 4x^5 + x^4 - 2x + 1 < 5$, então $x < -\frac{1}{2}$.
   (a) $x = -1$ é um exemplo para a proposição?
   (b) $x = 0$ é um contraexemplo para a proposição?

(c) $x = 1$ é um contraexemplo para a proposição?
(d) Decida se a proposição é verdadeira ou falsa.
(e) Enuncie a recíproca da proposição.

2. A demonstração em Matemática

Podemos dizer que uma demonstração em Matemática é a apresentação de argumentos que, usando resultados (isto é, proposições ou afirmações) que já sabemos serem verdadeiros e respeitando as regras da lógica matemática, nos permite concluir que uma determinada proposição (aquela que estamos demonstrando) possui o atributo *verdadeira*.

Para entendermos como se processa uma demonstração, devemos saber como usar a informação de que uma implicação (isto é, uma proposição da forma *Se A, então B*) é verdadeira. Vejamos um exemplo: a proposição P, a seguir, é verdadeira e, portanto,

$$P: \text{Se } n \text{ é um inteiro e } n > 6, \text{ então } 2^n > n^2$$

podemos concluir, por exemplo, que $2^7 > 7^2$, sem precisarmos efetuar as multiplicações e compararmos os dois resultados. De fato, como $7 > 6$, temos que $n = 7$ satisfaz a hipótese de P e, portanto, como estamos respeitando as regras e critérios da lógica matemática, 7 tem também que satisfazer sua tese, já que P é verdadeira.

Por outro lado, a proposição P não nos informa nada a respeito dos números 4 e 5, já que $n = 4$ ou $n = 5$ não satisfazem sua hipótese. De fato, agora fazendo as contas, podemos ver que $2^5 > 5^2$, mas não podemos chegar a essa conclusão por meio da proposição P. No caso de $n = 4$, também fazendo as contas, vemos que $2^4 = 4^2$.

Ou seja, se sabemos que uma proposição

P: Se A, então B

é verdadeira, e temos um objeto matemático X que satisfaz A, isto é, que satisfaz a hipótese de P, então **podemos concluir** que X também satisfaz B, a tese de P. De fato, se o objeto X, que satisfaz a hipótese de P, não satisfizesse também sua tese, teríamos que X seria um contraexemplo para P, o que não é possível, pois, nesse caso, P seria falsa também, contrariando assim a regra L1 da lógica matemática.

Em outras palavras, para provar que um objeto matemático X possui (ou satisfaz) uma determinada propriedade B a partir do fato de que X satisfaz uma dada condição A, é suficiente provarmos que a implicação $A \Rightarrow B$ é verdadeira.

Uma demonstração se processa por meio de uma ou mais etapas desse tipo. Mais explicitamente, cada etapa de uma demonstração consiste em se mostrar que uma implicação é verdadeira.

A demonstração direta

Uma *demonstração direta* de uma proposição é aquela em que mostramos diretamente que a proposição não admite contraexemplos, seja mostrando que

> *em todas as situações nas quais a hipótese é satisfeita tem-se que a tese também é satisfeita*,

como fizemos na demonstração de que P_1 é verdadeira, seja pela análise dos possíveis contraexemplos, como fizemos no exemplo **12** para provar que P_4 é verdadeira.

Para exemplificar 0 processo de demonstração que descrevemos acima, vamos destacar as etapas da demonstração de que a proposição P_1 é verdadeira, isto é, vamos enunciar cada implicação intermediária que construímos e provamos ser verdadeira.

P_1: *Se m e n são inteiros pares, então o produto mn é um inteiro par*.

Primeiro, consideramos uma dupla de inteiros pares, m e n, isto é, 0 objeto matemático que satisfaz a hipótese de P_1. A partir daí, construímos a implicação

$$m \text{ e } n \text{ são inteiros pares} \Rightarrow m = 2k \text{ e } n = 2p \text{ com } k \text{ e } p \text{ sendo inteiros} \qquad \mathbf{(1)}$$

que é verdadeira pela definição de número par. Logo, podemos concluir que a dupla m e n que satisfaz a hipótese de P_1 também satisfaz a tese de **(1)**. A partir dessa informação, construímos a implicação

$$m = 2k \text{ e } n = 2p \text{ com } k \text{ e } p \text{ sendo inteiros} \Rightarrow mn = 2q \text{ com } q \text{ sendo inteiro} \quad \mathbf{(2)}$$

que provamos ser verdadeira usando as propriedades da multiplicação de números inteiros. Assim, podemos concluir que nossa dupla m e n tem que satisfazer a tese de **(2)**, pois já sabemos que ela satisfaz a hipótese de **(2)**.

Finalmente, construímos a implicação

$$mn = 2q \text{ com } q \text{ sendo inteiro} \Rightarrow mn \text{ é inteiro par}, \tag{3}$$

que é verdadeira pela definição de número par. Ou seja, podemos concluir que nossa dupla m e n também tem que satisfazer a tese de **(3)** (que é a tese de P_1), pois já provamos que ela satisfaz sua hipótese.

Podemos também descrever uma demonstração direta, usando a terminologia de conjuntos. Para isso, dada uma proposição

$$P : \textit{Se } A\textit{, então } B$$

consideremos os conjuntos

H_P = conjunto dos objetos matemáticos que satisfazem a condição A,
T_P = conjunto dos objetos matemáticos que satisfazem a condição B.

Assim,

> dizermos que *todo objeto matemático que satisfaz a hipótese de P* (a condição A) *também satisfaz sua tese* (a condição B) é a mesma coisa que dizermos que *o conjunto H_P está contido no conjunto T_P* ($H_P \subset T_P$),

e, analogamente,

> dizermos que *existe um objeto matemático que satisfaz a hipótese de P, mas não satisfaz sua tese* (*um contraexemplo*), é a mesma coisa que dizermos que *o conjunto H_P* **não** *está contido no conjunto T_P* .

Podemos então dizer que a demonstração direta de que P é verdadeira é a demonstração direta de que $H_P \subset T_P$, enquanto que a apresentação de um contraexemplo, que é a demonstração direta de que P é falsa, corresponde a demonstrar que H_P não está contido em T_P.

Essa formulação pode ser útil no caso de uma proposição para a qual os conjuntos determinados pela hipótese e pela tese possam ser descritos de tal forma a serem facilmente comparados. Vejamos um exemplo:

$$P : Se\ \frac{3x-2}{x+2} > 1, \textit{então}\ x^2 - 1 > 0.$$

Resolvendo a desigualdade $\frac{3x-2}{x+2} > 1$, que dá a condição da hipótese de P, obtemos que

$$H_P = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 2\} = (-\infty, -2) \cup (2, \infty).$$

Resolvendo agora a desigualdade, $x^2 - 1 > 0$, dada pela tese, vemos que

$$T_P = \{x \in \mathbf{R} \mid x > -1 \text{ ou } x > 1\} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Comparando agora esses dois conjuntos, podemos usar o fato já conhecido de que

$$(-\infty, -2) \cup (2, \infty) \subset (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

para concluir que, para esse exemplo,

$$H_P \subset T_P$$

e, portanto, a proposição P desse exemplo é verdadeira. A demonstração se re-sumiu em resolvermos as duas desigualdades, e usarmos resultados já conhecidos que relacionam os conjuntos solução encontrados.

A demonstração por absurdo

Uma outra maneira de provarmos que uma proposição é verdadeira é conhecida como *demonstração por absurdo*.

Esse tipo de demonstração se processa da seguinte maneira: suponhamos que queremos provar que uma proposição P é verdadeira.

Começamos supondo, por absurdo, que P é falsa. Nesse caso, pelas regras que adotamos, podemos dizer que *não P* é verdadeira ou, equivalentemente, que *existe um contraexemplo para P*. A partir daí, procedemos exatamente como na demonstração direta, isto é, construímos implicações que provamos serem verdadeiras até chegarmos à conclusão de que uma certa proposição matemática é simultaneamente verdadeira e falsa, contrariando a regra Ll da lógica matemática; usamos então a regra L2 para concluir que a proposição tem que ser verdadeira.

Como um exemplo, provemos, por meio de uma demonstração por absurdo, que P_4 (já provado por demonstração direta no exemplo **12**) é verdadeira.

P_4: *Se m é um inteiro e* m^2 *é par, então m é um inteiro par.*

Demonstração: suponhamos, por absurdo, que P_4 é falsa. Então existe um contraexemplo para P_4, isto é,

existe *um inteiro m com* m^2 *par*

(um objeto matemático, m, que satisfaz a hipótese de P_4) tal que

m não é um inteiro par

(m *não satisfaz a tese de* P_4). Como *m* é um inteiro mas não é par, temos que *m* é ímpar, isto é,

$m = 2n + 1$ com n sendo algum inteiro,

daí

$$
\begin{aligned}
m^2 &= (2n + 1)^2 \\
&= 4n^2 + 4n + 1,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$m^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1$$

que é um inteiro ímpar, 0 que é um absurdo pois m é tal que m^2 é par, já que m satisfaz a hipótese de P_4. Observe que 0 absurdo a que chegamos é que m^2 é par e é ímpar, 0 que é equivalente à afirmação

m^2 *é um inteiro par*

ser verdadeira e falsa, 0 que contradiz a regra Ll.

Exercícios

Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou é verdadeira, justificando a sua resposta:

1. Se a e b são inteiros pares, então a soma $a + b$ é um inteiro par.

2. Se a e b são inteiros ímpares, então a soma $a + b$ é um inteiro ímpar.
3. *Se m e n* são inteiros ímpares, então o produto $m.n$ é um inteiro ímpar.
4. Se o produto de dois inteiros m *e* n é ímpar, então m e n são inteiros ímpares.
5. Se m é um múltiplo de 25, então m é um múltiplo de 5.
6. Se m é um múltiplo de 5, então m é um múltiplo de 25.
7. Se $2 < x < 5$, então $-1 < x < 6$.
8. Se $-1 < x < 6$, então $2 < x < 5$.
9. Se $x > -6$, então $-3 < x < 4$.
10. Se $-3 < x < 4$, então x; < −6.
11. Se n é inteiro ímpar positivo, então $n = 2k^2 + 2k + 1$, para algum inteiro k.
12. Se x *e* y são números reais tais que $xy = 1$, então $x = 1$ ou $y = 1$.
13. Se a; é um número real tal que $|x| > 1$, então $x < 1$ e $x < -1$.
14. Se a; é um número real tal que $x = \sqrt{4}$, então $x = 2$.
15. Se a; é um número real tal que $x^2 =2$, então $x = \sqrt{2}$.
16. Se a; é um número real tal que $x^2 = 2$, então $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.
17. Se x *é* um número real tal que $4 \leq x^2 \leq 9$, então a; pertence ao intervalo [2, 3].
18. Se x *é* um número real, então $x^2 \geq -x$.
19. Se x e y são números reais tais que $x > 100$ e $y > 2$, então $\frac{x}{y} >50$.
20. Se x é um número real e $x < 1$, então $x^2 < 1$.
21. Se x é um número real diferente de zero, então $(-x)$ *é* negativo.
22. Se x é um número real tal que $|x| > 1$, então $x > 1$.
23. Se x e y são números reais tais que $x < y$, então $x^2 < y^2$.
24. Se x e y são números reais tais que $x < y$, então $ax < ay$ para qualquer real a.
25. Se x e y são números reais tais que $x > 100$ e $y > 2$, então $(y - x) > -98$.
26. Se x é um número real positivo, então $(\sqrt{x})^2 = x$.

27. Se x é um número real, então $\sqrt{x^2} = x$.
28. Se x é um número real positivo, então $\sqrt{(-x)^2} = -x$..
29. Se $x = \sqrt{n}$, sendo n um número inteiro positivo, então x é irracional.
30. Se o produto de dois inteiros m e n é par, então m e n são pares.
31. Se x é um número real positivo, então $x^6 > x^4$.
32. Se $(x - 1)(x^2 - 4x + 4) = 0$, então $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 0$.
33. Se $\frac{2x+3}{x-1} < 1$, então $x < -4$.
34. Se x e y são números reais tais que $x < y$, então $|x| < |y|$.
35. Se x e y são números reais tais que $x < y < 0$, então $x^2 < y^2$.
36. Se x é um número real, então $x^4 + 5x^2 < x^5 + 500$.
37. Se x é um número real tal que $x < -1$, então $|x| > 1$.
38. Se $3x - 2 > x + 2$, então $x - 2 > \frac{x-5}{4}$.
39. Se $\frac{x+1}{x-7} \leq 2$, então $x^2 - 22x + 105 \geq 0$.
40. Se $\frac{5x+4}{2} < x - 1$, então $\frac{3x+5}{7} < -1$.

CAPÍTULO 2

Os Números Reais

O conceito de número, atualmente tão familiar para nós, foi construído muito lentamente. Durante um longo período de tempo, os números inteiros positivos, que surgiram com a necessidade de contagem, só tinham sentido quando conectados a uma coleção de objetos concretos.

Pode-se dizer que o conceito (abstrato) de número só surge com a escrita, isto é, com a utilização de símbolos para designá-los. De fato, a utilização de símbolos permitiu que se operasse com números excessivamente grandes para poderem ser visualizados como uma coleção de objetos, gerando assim a conceituação abstrata de número.

Os textos mais antigos, preservados da Babilônia e do Egito, que datam do segundo milênio a.C, tratam de vários problemas de aritmética, mas são apresentados sempre na forma de problemas concretos. Somente no século III a.C. os gregos reconheceram duas ideias importantes: a primeira, de que uma sequência de números poderia se estender infinitamente, e a segunda, de que não só seria possível operar com números arbitrários, mas também formular e provar propriedades gerais sobre eles.

Assim, como os números inteiros positivos surgiram da necessidade de contagem, podemos dizer que os números reais têm sua semente na geometria, ou seja, na necessidade de medir magnitudes geométricas – comprimento (distâncias), área e volume (em grego, geometria significa *medida de terra*).

Se, por um lado, os Gregos descobriram que nem todos os segmentos podiam ser medidos por uma fração (referida a uma unidade padrão) entre número inteiros, fato esse conhecido como a descoberta do número $\sqrt{2}$ pelos pitagóricos no século V a.C, por outro lado, o conceito de número real não surgiu entre eles. A definição rigorosa de número real, não dependente da geometria, só foi dada muito depois (anos setenta do século XIX) pelos matemáticos alemães Weirstrass, Dedekind e Cantor.

Neste capítulo apresentamos os números reais a partir de sua concepção geométrica, na qual números reais positivos surgem como medidas de comprimento de segmentos de reta. Introduzimos também, além de propriedades algébricas e geométricas dos números reais, os conceitos de aproximação e erro, que são fundamentais para o cálculo numérico.

1. A reta real

Seguindo então sua origem histórica, uma maneira de pensarmos os números reais positivos é considerá-los como sendo as medidas de comprimento de segmentos de reta. A partir daí, podemos identificar os números reais com os pontos de uma reta, que, com essa identificação, é denominada uma reta real.

Para isso, escolhemos um ponto da reta que associamos ao número real zero, denotado por 0, e um segmento de reta que convencionamos ter uma unidade de medida de comprimento. O ponto associado ao número 0 é chamado *origem da reta real* e o segmento escolhido é chamado de *segmento unitário*.

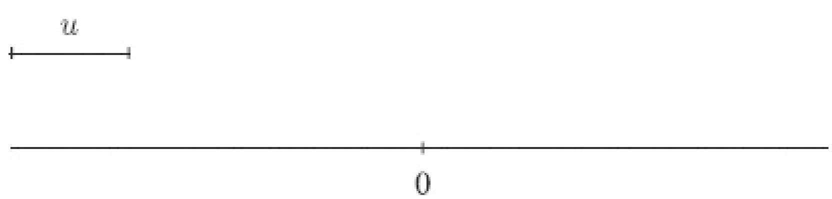


Figura 1.1

Colocando o segmento unitário, -u, sobre a reta real de tal forma que um de seus extremos fique sobre a origem 0, temos que o outro extremo determina um ponto na reta real que identificamos com o número real 1.

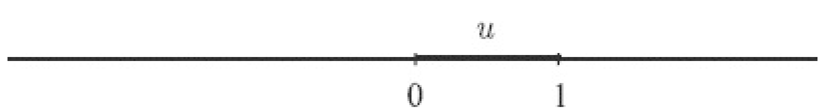


Figura 1.2

A semirreta cujo extremo é o ponto que representa o 0 e que contém o ponto que representa o 1 será chamada de *semirreta dos números positivos* (ou, simples-mente, *semirreta positiva*) e os números que são representados por pontos nesta semirreta são chamados de números (reais) positivos.

Justapondo n cópias do segmento unitário a partir do 0 na semirreta positiva, obtemos o ponto que representa o número natural n.

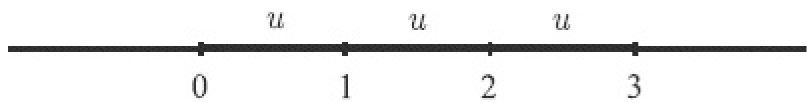


Figura 1.3

Lembremos que um número racional positivo, r, é um número que pode ser representado por uma razão

$$r = \frac{p}{q},$$

onde p *e* q são números inteiros positivos. Para determinarmos o ponto na reta real que corresponde ao número r procedemos da seguinte maneira:

• dividimos o segmento unitário em q segmentos de mesmo tamanho, obtendo um segmento s, que dizemos medir $\frac{1}{q}$ unidades de comprimento.
• justapondo, na semirreta positiva a partir de 0, p cópias do segmento s, determinamos o ponto que corresponde ao número racional $r = \frac{p}{q}$

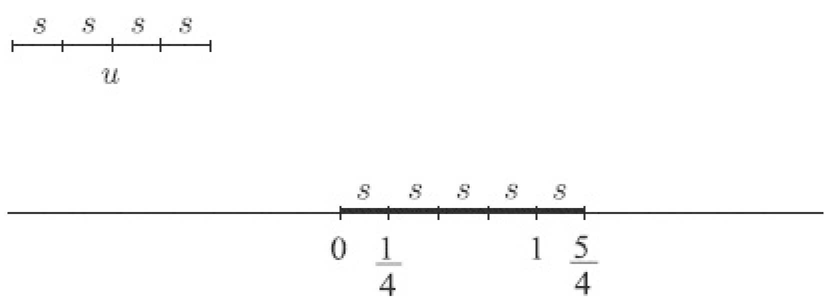


Figura 1.4

Em geral, se P é um ponto da semirreta positiva, então P corresponde a um número real positivo, a, *e* dizemos que o segmento de reta cujos pontos extremos são 0 e P tem a unidades de medida de comprimento. Reciprocamente, todo número real positivo a corresponde a um ponto da semirreta positiva que determina, com a origem, um segmento que mede a unidades de comprimento.

Os demais pontos da reta real, isto é, os pontos da semirreta que não contêm o 1, são identificados com números reais que são chamados números negativos. Convencionando que o número 1 está localizado à direita do 0, temos que os números reais positivos são representados por pontos à direita de 0 e os negativos pelos pontos à sua esquerda.

Convencionamos também que se usarmos um determinado símbolo (por exemplo, x ou y) para denotar um número real associado a um ponto P, usaremos o mesmo símbolo precedido do sinal – (por exemplo, $-x$ ou $-y$) para denotar o número real que está associado ao ponto Q, simétrico a P em relação à origem 0 (isto significa que P e Q não estão na mesma semirreta e determinam, com a origem 0, dois segmentos de mesmo tamanho).

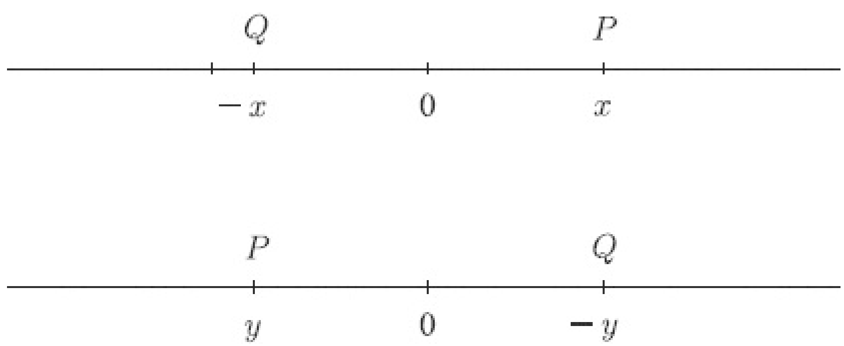


Figura 1.5

Em particular, se a denota um número real positivo, então $-a$ denota um número real negativo e, reciprocamente, se a denota um número negativo, então $-a$ denota um número positivo. O número $-a$ é chamado o *simétrico de* a.

Usaremos a expressão $a > 0$ para indicar que a denota um número positivo e a expressão $a < 0$ para indicar que a é um número negativo. Com essa notação podemos enunciar as propriedades acima da seguinte maneira:

- *Se* $a > 0$, *então* $-a < 0$.
- *Se* $a < 0$, *então* $-a > 0$.

Assim, temos que se a é um número real, então

(i) $a = 0$ (a é identificado com a origem da reta real), ou

(ii) $a > 0$ (a é identificado com um ponto à direita da origem), ou

(iii) $-a > 0$ (a é identificado com um ponto à esquerda da origem e, portanto, $-a$ é identificado com um ponto à direita da origem).

2. As operações algébricas com números reais

Nesta seção apresentamos, de uma forma sistemática, as operações soma e multiplicação ou produto de números reais (velhas conhecidas) com suas propriedades ou regras. O conjunto dos números reais será sempre denotado por $\mathbb{R}$.

Propriedades básicas

O conjunto de números reais admite duas operações, denominadas *soma* (+) e *multiplicação ou produto* (•). As propriedades dessas operações que apresentamos a seguir serão chamadas de propriedades elementares: assumimos que elas são válidas sem demonstração (o que, formalmente, equivale a dizer que estamos falando dos axiomas dos números reais). As demais propriedades algébricas dos números reais são demonstradas a partir dessas propriedades elementares.

Propriedades elementares: *Se a, b* e *c* são números reais quaisquer, então são válidas as seguintes propriedades:

Comutatividade: $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$
Associatividade: $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Distributividade: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
Elemento neutro: $a + 0 = a$
Elemento identidade: $1 \bullet a = a$
Elemento simétrico: $a + (-a) = 0$

Elemento recíproco: *Todo número real c* ***diferente*** *de* 0 *tem um recíproco, isto é, um número real denotado por* $\frac{1}{c}$ ou c^{-1} *que satisfaz:*

$$c \cdot c^{-1} = 1$$

Operações com números positivos: *Se a e b são números reais positivos, então a soma* $a + 6$, *e o produto ab são números positivos.*

Geometricamente, a soma de números reais a e b pode ser obtida transladando-se o segmento de reta cujos extremos são 0 e a de tal forma que o extremo que correspondia a 0 se localize, após a translação, no ponto b. O outro extremo do segmento transladado estará então no ponto que corresponde ao número $a + b$.

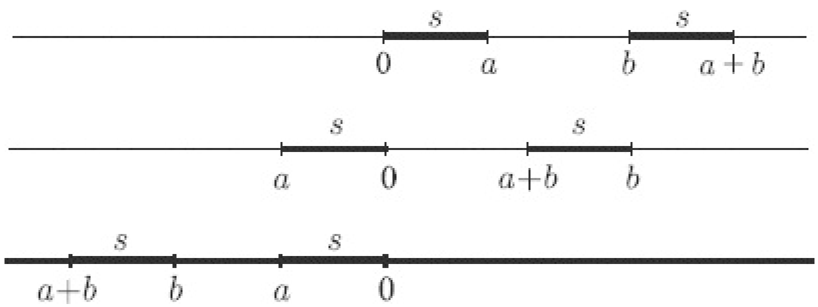


Figura 2.1

Em particular, a soma de dois números reais positivos é a medida de comprimento do segmento obtido pela justaposição de dois segmentos, um de comprimento a e outro de comprimento b. O produto de a e b pode ser interpretado como a área do retângulo de lados de comprimento a e b.

Uma outra observação que podemos fazer é que a operação subtração, ou diferença de dois números, $a - b$, nada mais é do que a própria operação soma: a diferença $a - b$ é a soma do número a com o simétrico do número b, ou seja, $a - b = a + (-b)$.

Analogamente, a divisão se reduz ao produto: dividir um número a por um número b é multiplicar o número a pelo recíproco do número b. Em particular, como apenas os números diferentes de 0 possuem um recíproco, não podemos efetuar divisões por 0. É conveniente estabelecermos que a notação $\frac{1}{b}$ ou b^{-1} subentende a condição $b \neq 0$.

Para simplificar a notação, convencionamos que se a e b são números reais, então

$$\begin{aligned} ab &= a \cdot b \\ a - b &= a + (-b) \\ \frac{a}{b} &= a \cdot (\frac{1}{b}) = a \cdot b^{-1}. \end{aligned}$$

Outras propriedades algébricas

Nosso objetivo nesta seção é não só explicitar ou relembrar as propriedades que usamos ao efetuar operações com os números reais, mas também dar alguns exemplos de como, a partir das propriedades algébricas elementares e das regras da lógica matemática, podemos demonstrar as demais regras usuais das operações soma e produto.

Vejamos um primeiro exemplo: sabemos que o produto de qualquer número real por 0 resulta no próprio número 0, mas, como essa não é uma das propriedades elementares, devemos demonstrá-la. Queremos então provar que a seguinte proposição é verdadeira:

$$\textit{Se } a \in \mathbb{R}, \textit{ então } a \cdot 0 = 0$$

Demonstração: Pela propriedade do elemento neutro, temos que

$$0 + 1 = 1$$

e, portanto, multiplicando por a, obtemos que

$$a \cdot (0 + 1) = a \cdot 1$$

Usando agora a distributividade, chegamos a

$$(a \cdot 0) + (a \cdot 1) = a \cdot 1$$

Mas sabemos, pela propriedade do elemento identidade, que $a \cdot 1 = a$, donde a igualdade acima se reduz a

$$(a \cdot 0) + a = a$$

Agora, somando $-a$ (o simétrico do número a) a ambos os membros da igualdade, obtemos

$$[(a \cdot 0) + a] + (-a) = a + (-a) \quad (*)$$

Pela associatividade, temos que

$$[(a \cdot 0) + a] + (-a) = (a \cdot 0) + [a + (-a)]$$

e portanto a igualdade (*) se reduz a

$$(a \cdot 0) + [a + (-a)] = a + (-a)$$

Pela propriedade do simétrico,

$$a + (-a) = 0$$

obtemos

$$(a \cdot 0) + 0 = 0.$$

Mas a propriedade do elemento neutro aplicada ao número $a \cdot 0$ nos diz que

$$(a \cdot 0) + 0 = a \cdot 0$$

e, portanto,

$$a \cdot 0 = (a \cdot 0) + 0 = 0$$

como queríamos provar. □

A seguir, listamos outras propriedades algébricas que são as regras conhecidas para operações com números reais. Cada uma dessas propriedades pode ser provada a partir das propriedades elementares e das outras já provadas. Demonstrar essas propriedades pode ser um bom treinamento para desenvolver o domínio da linguagem e da lógica matemáticas; a ordem em que as propriedades estão enunciadas permite que cada uma seja demonstrada usando-se as propriedades elementares e aquelas enunciadas antes.

Se a, b e c são números reais, então
(1) $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ *ou* $b = 0$.
(2) $a + b = 0 \Rightarrow b = -a$. *Em particular,* $-(-a) = a$.
(3) $-(a + b) = -a - b$.
(4) $(-a)b = -ab$. *Em particular*, $(-1)a = -a$.
(5) $(-a)(-b) = ab$.
(6) *Se a e b são negativos, então ab é negativo.*
(7) *Se a é positivo e b é negativo, então ab é negativo.*
(8) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$.
(9) $ab = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a}$.
(10) $ab = ac \Rightarrow a = 0$ *ou* $b = c$.

A ordenação dos números reais

A última propriedade elementar, isto é, que a soma e o produto de números positivos resulta em números positivos, permite ordenar os números reais. Isto significa que podemos definir uma relação que permite comparar dois números reais quaisquer. Essa relação é chamada uma *relação de ordem.*

Definição: Dados dois números reais a e b, dizemos que *a é menor do que b* (notação $a < b$) se $b - a > 0$ (isto é, $b - a$ é um número positivo).

Se $a < b$ dizemos também que *b é maior do que a* e podemos usar a expressão $b > a$ (lê-se b maior do que a).

Observe que se $a < b$, então, pela definição, $b - a$ é um número positivo e, portanto, seu simétrico, $-(b - a)$, é negativo. Mas, pelas propriedades da soma e do produto, temos que

$$-(b - a) = a - b,$$

ou seja, $a - b$ é negativo, isto é, se $a < b$, então $a - b < 0$.

Com essa definição temos uma outra maneira de dizermos

a é um número positivo

que é:

a é um número maior do que zero,

ou, simplesmente, *a é maior do que zero*. Analogamente, para indicarmos que a denota um número negativo, podemos usar a frase *a é menor do que zero*.

Como já sabemos, um número real tem que ou ser o 0, ou ser negativo (menor do que 0) ou ser positivo (maior do que 0). Podemos ver que dados dois número reais, a e 6, vale exatamente uma das três condições a seguir:

$$a < b,\ b < a \text{ ou } a = b.$$

De fato, temos três possibilidades para $b - a$:

(i) $b - a = 0$. Neste caso $a = b$.

(ii) $b - a > 0$. Neste caso $a < b$.

(iii) $b - a < 0$. Neste caso $b < a$.

O fato de que a soma de números positivos é um número positivo garante que a relação de ordem possui a propriedade da transitividade, isto é,

Se $a < b$ e $b <$ c, então $a < c$.

De fato, $a < b$ e $b < c$ significa, por definição, que $b - a$ e $c - b$ são positivos; então a soma, $(b - a) + (c - b) = c - a$ é positiva e, portanto, $a <$

c.

Antes de tratarmos das demais propriedades da relação de ordem, devemos observar que, a partir da interpretação geométrica da operação soma que fizemos na seção anterior, podemos visualizar a relação de ordem na reta real da seguinte forma:

> *a é menor do que b exatamente quando o número a é identificado com um ponto da reta real que se localiza à esquerda do ponto identificado com o número b.*

Em outras palavras, se percorrermos a reta real no sentido que vai do ponto 0 ao ponto 1, passamos pelo ponto a antes de chegarmos ao ponto b.

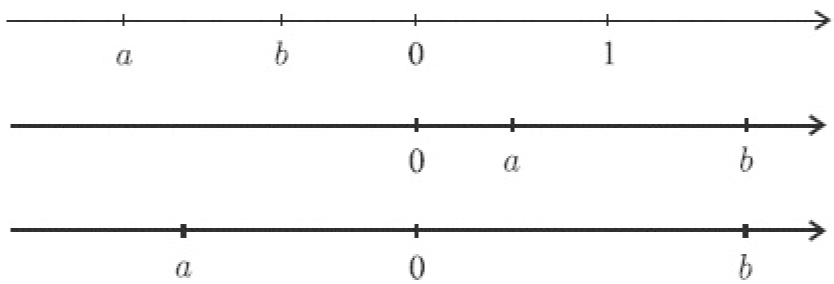


Figura 2.2

A relação de ordem e as operações soma e produto

As propriedades que enunciamos a seguir são o que conhecemos como regras para operarmos com desigualdades. Elas descrevem como a relação de ordem se comporta com respeito às operações soma e produto.

> *Se a, b, c e d denotam números reais, então são válidas as propriedades abaixo:*
>
> **(1)** *Se $a < b$ e c é qualquer número real, então $a + c < b + c$.*
> **(2)** *Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$.*
> **(3)** *Se $a > 0$, então $\frac{1}{a} > 0$.*
> **(4)** Se $a < 0$, então $\frac{1}{a} < 0$.
> **(5)** *Se $a < b$ e $c > 0$* (isto é, c é um número **positivo**), *então $ac < bc$.*
> **(6)** *Se $a < b$ e $c < 0$* (isto é, c é um número **negativo**), *então $ac > bc$.*
> **(7)** *Se $a \neq 0$, então* $a^2 = a \cdot a > 0$.

Observe que esta última propriedade simplesmente reflete o fato de que tanto o produto de dois números positivos quanto o produto de dois números negativos é um número positivo.

Essas propriedades são as regras que usamos para resolver desigualdades envolvendo números reais. Resolver uma desigualdade é efetuar operações algébricas, respeitando as regras acima, de maneira a obter uma desigualdade equivalente para a qual as soluções sejam evidentes.

Recordemos que, como ocorre com as equações, dizemos que

duas desigualdades são equivalentes se ambas têm exatamente as mesmas soluções.

Por exemplo, as desigualdades

$$\frac{2x-1}{2} < 2x \quad \text{e} \quad 2x+1>0$$

são equivalentes pois as duas têm como soluções os números reais que são maiores do que o número $-\frac{1}{2}$, isto é, os números reais, x, que satisfazem a desigualdade trivial

$$x > -\frac{1}{2}.$$

Para verificarmos que essa afirmação é verdadeira, observamos que se x é um número real que satisfaz a desigualdade

$$\frac{2x-1}{2} < 2x,$$

então, como $2 > 0$ (2 é um número positivo), podemos usar a regra **(5)** para multiplicarmos os dois membros dessa desigualdade por 2 e concluir que x também satisfaz a desigualdade $2x - 1 < 4x$, isto é,

$$\frac{2x-1}{2} < 2x \implies 2x-1 < 4x.$$

Por outro lado, se x é um número que satisfaz essa última desigualdade, podemos usar a mesma regra **(5)** para multiplicar por $\frac{1}{2}$ (que é um número positivo) seus dois membros e concluir que x tem que satisfazer a desigualdade anterior. Em outras palavras, as duas desigualdades têm o mesmo conjunto solução. Descrevemos esse fato dizendo que

$$\frac{2x-1}{2} < 2x \iff 2x-1 < 4x.$$

Analogamente, a regra **(1)** garante que somando $(-4x)$ aos dois membros da nova desigualdade a ordem é preservada levando à desigualdade equivalente

$$-2x-1<0.$$

Agora, usamos a regra (**6**) para, multiplicando os dois membros por -1 (que é um número negativo), chegarmos à desigualdade $2x+1>0$. Isto é,

$$-2x-1<0 \Leftrightarrow 2x+1>0.$$

O fato de que em cada etapa respeitamos as regras para operarmos com desigualdades garante que não perdemos nem introduzimos nenhuma solução. Assim, podemos concluir que as duas desigualdades

$$\frac{2x-1}{2} < 2x \quad \text{e} \quad 2x+1>0$$

têm as mesmas soluções, isto é, são equivalentes. Agora, somando -1 aos dois membros da segunda desigualdade e multiplicando por $\frac{1}{2}$ (que é um número positivo) os dois membros da desigualdade resultante, isto é,

$$\begin{aligned} & 2x+1>0 \\ \iff \quad & 2x>-1 \\ \iff \quad & x>-\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

obtemos uma outra desigualdade equivalente que já descreve de forma simples o conjunto solução, o conjunto dos números reais que são maiores do que o número $-\frac{1}{2}$.

A seguir, damos um exemplo de desigualdades que **não** são equivalentes:

$$\frac{2x-1}{x} > 1 \qquad \text{e} \qquad 2x-1>x.$$

Para nos convencermos disso, basta verificarmos que $x=-1$ é solução da primeira, já que

$$\frac{2(-1)-1}{-1} = 3 > 1,$$

mas não é solução da segunda, pois

$$2(-1) -1 = -3 < -1.$$

O fato é que, ao passarmos da primeira desigualdade, multiplicando seus dois membros por x, para a segunda, perdemos as soluções negativas da primeira. Isso ocorre porque se x é um número negativo que é solução de primeira desigualdade, então a regra **(6)** nos diz que a multiplicação por x (que estamos supondo designar um número negativo) nos leva à desigualdade $2x - 1 < x$, isto é,

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{2x-1}{x} > 1 & \text{e} & x < 0 \\ \Longrightarrow & 2x - 1 < x & \text{e} & x < 0 \\ \Longrightarrow & x < 1 & \text{e} & x < 0 \\ \Longrightarrow & x < 0, & & \end{array}$$

enquanto que

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{2x-1}{x} > 1 & \text{e} & x > 0 \\ \Longrightarrow & 2x - 1 > x & \text{e} & x > 0 \\ \Longrightarrow & x > 1 & \text{e} & x > 0 \\ \Longrightarrow & x > 1. & & \end{array}$$

Assim, podemos concluir que as soluções da desigualdade $\frac{2x-1}{x} > 1$ são os números reais, x, que satisfazem uma das condições, $x < 0$ ou $x > 1$.

Este exemplo mostra que, para respeitarmos as regras **(5)** e **(6)** e o fato de que o produto de qualquer número real pelo 0 resulta em 0, ao multiplicarmos os membros de uma desigualdade por um número, devemos sempre ter sob controle a informação de que se trata de um número positivo ou de um número negativo. No primeiro caso, a desigualdade (ou mais precisamente, a ordem) se mantém enquanto que no segundo caso a desigualdade se inverte. E claro que se multiplicamos os membros de uma desigualdade por 0 chegamos à identidade 0 = 0.

Exemplos

1. Resolver a desigualdade $\dfrac{2x+1}{3x-1} < 1.$

De imediato, vemos que para um número x ser solução, x deve satisfazer a condição, $3x - 1 \neq 0$, já que não é possível efetuarmos divisões por 0. Por outro lado, para simplificarmos a desigualdade, queremos multiplicar seus dois membros pelo número $3x - 1$. Logo, devemos considerar os dois casos:

(i) $3x - 1 > 0$. Neste caso, temos que

$$x > \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \frac{2x+1}{3x-1} < 1 \Rightarrow 2x+1 < 3x-1 \quad \text{e} \quad x > \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow x > 2 \quad \text{e} \quad x > \frac{1}{3} \Rightarrow x > 2.$$

(ii) $3x - 1 < 0$. Neste caso,

$$x < \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \frac{2x+1}{3x-1} < 1 \Rightarrow 2x+1 > 3x-1 \quad \text{e} \quad x < \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow x < 2 \quad \text{e} \quad x < \frac{1}{3} \Rightarrow x < \frac{1}{3}.$$

Ou seja as soluções são os números reais, x, que satisfazem uma das duas condições, $x < \frac{1}{3}$ ou $x > 2$.

2. Resolver a desigualdade $\dfrac{3x+1}{x-1} < 2.$

Como x deve satisfazer a condição $x - 1 \neq 0$, devemos considerar os casos:

(i) $x - 1 > 0$. Neste caso temos que

$$x > 1 \quad \text{e} \quad \frac{3x+1}{x-1} < 2 \Rightarrow 3x+1 < 2x-2 \quad \text{e} \quad x > 1$$
$$\Rightarrow x < -3 \quad \text{e} \quad x > 1.$$

Como não existem números reais que sejam menores do que -3 e maiores do que 1, concluímos que a desigualdade não possui solução entre os números que satisfazem a condição $x - 1 > 0$, isto é, entre os números que são maiores do que 1.

(ii) $x - 1 < 0$. Neste caso

$$x < 1 \quad \text{e} \quad \frac{3x+1}{x-1} < 2 \Rightarrow 3\,x + 1 > 2\,x - 2 \quad \text{e} \quad x < 1$$
$$\Rightarrow x > -3 \quad \text{e} \quad x < 1 \Rightarrow -3 < x \quad \text{e} \quad x < 1.$$

Ou seja, neste caso as soluções são os números reais, x, que satisfazem as duas condições, $x > -3$ e $x < 1$, isto é, os números que são maiores do que -3 e menores do que 1. Como o primeiro caso não forneceu solução, concluímos que essas são todas as soluções da desigualdade.

A seguir, estabeleceremos notações que são usadas para nomear certos conjuntos de números reais de uma forma simples.

• $a < c < b$: c denota um número real que é maior que o número denotado por a e menor que o número denotado por b. Dizemos também que c é um número entre os números a e b.

• $a \leq c$: a denota um número real que é menor ou igual ao número denotado por c.

• $a \geq c$: a denota um número real que é maior ou igual ao número denotado por c.

• $a \leq c < b$: c denota um número real que é maior ou igual ao número denotado por a e menor que o número denotado por b.

• $a < c \leq b$: c denota um número real que é maior que o número denotado por a e menor ou igual ao número denotado por b.

• $a \leq c \leq b$: c denota um número real que é maior ou igual ao número denotado por a e menor ou igual ao número denotado por b.

• Se a e b são números reais tais que $a \leq b$,

- os conjuntos

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$
$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\},$$
$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

são chamados *intervalos abertos*.

- os conjuntos

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$
$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\},$$
$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

são chamados *intervalos fechados*.

- os conjuntos

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$$
$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

são chamados simplesmente *intervalos* (não são abertos e nem fechados; podem ser chamados de intervalos *semiabertos*).

Em qualquer dos casos acima, a e b (ou simplesmente a, se for 0 caso) são chamados os extremos do intervalo. A partir da identificação dos números reais com pontos da reta real, vemos que a representação geométrica de um intervalo é:

• um segmento de reta no caso de intervalos com extremos a e b, incluindo ou não os pontos extremos, dependendo do caso.

Figura 2.3

• uma semirreta, no caso dos intervalos $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞) e $[a, \infty)$, incluindo ou não 0 ponto extremo, dependendo do caso. Qualquer um desses intervalos é dito um intervalo não limitado.

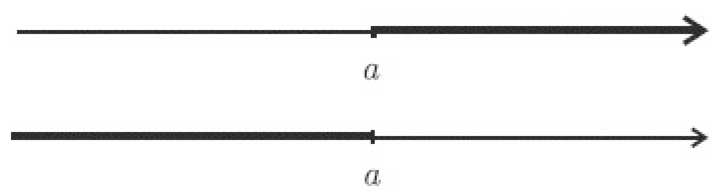


Figura 2.4

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Represente geometricamente os conjuntos abaixo:

   (a) $[1, 2] \cup [3, \frac{17}{2}]$.

   (b) $(-1, 1) \cup [1, \infty)$.

(c) $[-2, 3] \cap (3,6)$.

(d) $[-3, -1] \cap [-2, \infty)$.

2. Represente geometricamente os conjuntos abaixo:

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 3 \text{ ou } 2 \leq x \leq 5\}$.

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 2\}$.

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ e } x \geq -1\}$.

(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 7 < x < 10 \text{ ou } 7 \leq x \leq 10\}$.

(e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 1 > 0 \text{ ou } 1 - 4x < 0\}$.

(f) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 4 < 0 \text{ e } 4x + 1 \leq 0\}$.

(g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 > 0 \text{ e } x - 4 \leq 0\}$.

(h) $\{x \in \mathbb{R} \mid 6x - 1 = 0 \text{ e } 6x - 1 > 0\}$.

3. Em cada item abaixo, determine o conjunto dos números reais x que satisfazem as condições dadas:

(a) $-4 < 2 - 3x < 17$.

(b) $3(1 - x) + 7x < 33 - 4(5 - 2x)$.

(c) $\frac{7}{x} > 2$.

(d) $x^2 < x$.

(e) $x^2 < -x$.

(f) $x^3 \geq 4x$.

(g) $x^3 - 2x^2 + x \leq 0$.

(h) $(x - 4)(x + 4)(x + \sqrt{2}) < 0$.

(i) $(2x - 5)(-x + 4)\{5x + 1) \leq 0$.

(j) $(x + \sqrt{3})(x - 5)^2 = 0$.

(k) $\dfrac{x+1}{4x+2} < 1$.

(l) $\dfrac{5x-16}{x-2} \leq 3$.

(m) $\dfrac{x+1}{x^2+1} \leq 1$.

(n) $\dfrac{x-1}{x+3} \leq x+5$.

(o) $\dfrac{x^2+1}{x^4+2} + 1 \leq 0$.

(p) $\dfrac{(x-4)^2(x+7)}{(x^2+1)(x+2)^4} > 0$.

(q) $\dfrac{(x-\sqrt{2})^2(x-\frac{1}{10})(x+\sqrt{17})}{x^4+2x^2+1} = 0$.

4. Em cada item abaixo, determine o conjunto dos números reais x que satisfazem as condições dadas:

   (a) $\frac{4}{x+1} > 1$ e $2x - 1 > 0$.

   (b) $\frac{x-5}{x-1} \leq 0$ ou $x^2 - x - 6 \geq 0$.

   (c) $(x-3)(x-5) < 0$ e $(x+4)(x-8)(x-100) < 0$.

   (d) $(x-1)(x+\sqrt{2}) = 0$ ou $\frac{3-2x}{x^2-3x+2} \geq 0$.

5. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

   (a) Se $2x - 1 < 1$ ou $x + 1 > 0$, então $x > 0$.
   (b) Se $2x - 1 < 1$ e $x + 1 > 0$, então $x > 0$.
   (c) Se $x^2 - 1 < 0$ ou $2x \geq 1$, então $x \geq 0$.
   (d) Se $x^2 - 1 < 0$ e $2x \geq 1$, então $x \geq 0$.

6. Considere a desigualdade

$$\frac{2x-4}{x+1} > 1.$$

(a) $x = -2$ *é* solução da desigualdade?

(b) Encontre o erro na resolução abaixo:

Multiplicando-se os dois membros por $x + 1$ obtemos:

$$2x - 4 > x + 1.$$

Somando-se 4 aos dois membros temos:

$$2x > x + 5.$$

Diminuindo-se a; dos dois membros, obtemos finalmente que:

$$x > 5.$$

7. Mostre que as proposições abaixo são verdadeiras:

(a) Se $1{,}3 \leq x \leq 1{,}4$ e $2{,}8 \leq y \leq 2{,}9$, então $-1{,}6 \leq x - y \leq -1{,}4$.

(b) Se $2{,}9 \leq x \leq 3$ e $1{,}7 \leq y \leq 1{,}8$, então $\frac{2{,}9}{1{,}8} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{3}{1{,}7}$.

8. Mostre que as implicações abaixo são verdadeiras:

(a) $x^2 \leq 25 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$.

(b) $x^2 \geq 16 \Leftrightarrow x \geq 4$ ou $x \leq -4$.

9. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

(a) Se $x < y$ então $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

(b) Se $0 < x < y$ então $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

10. Em cada item a seguir, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira e enuncie sua recíproca. Decida se a recíproca é falsa ou verdadeira.

(a) Se $\frac{x+1}{3x-1} < 1$, então $x > 1$.

(b) Se $\frac{x-2}{x-6} < 0$, então $x > -1$.

(c) Se $\frac{x+4}{x-5} < 0$,então $x > -4$.

(d) Se $x > -3$, então $\frac{x-1}{x+3} > 0$.

(e) Se $(x-2)(x+3) > 0$, então $x < 2$.

(f) Se $x < 3$, então $(x+2)(x-3) < 0$.

(g) Se $x < 2$, então $(x-6)(x-3) > 0$.

(h) Se $\frac{x^3-4x^2}{x+4} > 0$, então $x > 1$ ou $x < -2$.

(i) Se $\frac{2+x-x^2}{x+1} < 7-2x$, então $-1 < x \leq 5$.

(j) Se $\frac{3x^2-3x+3}{x-1} < 2x+5$, então $x > 1$.

11. Determine o valor de a para o qual as soluções da inequação $\frac{x+a}{2x-1} < 1$ números do conjunto $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$.

12. Determine o valor de a para o qual as soluções da inequação $\frac{3x-13}{x+a} \leq 2$ são os números do conjunto $[-3,8)$.

13. Determine o valor de a para o qual as soluções da inequação $\frac{3x^2+ax-4}{3x-12} > \frac{1}{3}$,, são os números do conjunto $(0,1) \cup (4, \infty)$.

14. Considere a seguinte proposição: Se $a \in \mathbb{R}$ e $x < 1$, então $ax < a$.
    (i) A proposição é verdadeira ou falsa?
    (ii) Escolha, dentre as opções, aquela que melhor justifica sua resposta:
        (a) Porque também pode ser $ax > a$.
        (b) Pois para qualquer valor de a e $x = \frac{1}{2}$ tem-se que $\frac{a}{2} < a$.
        (c) Pois para $x = 0$, tem-se que $ax = 0 < a$.
        (d) Pois para $a = -1$ e $x = 2$ tem-se que $ax < a$ já que $-2 < -1$.
        (e) Pois se $a = -1$ e $x = 0$, então $ax = 0 > -1$.
        (f) Pois se $ax < a$, dividindo por a temos que $x > 1$.

15. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:
    (a) Se $x \leq a$, então $ax \leq a^2$.
    (b) Se $x \leq a$, então $a^2x \leq a^3$.

(c) Se $a < b$, então $a > \frac{b+a}{2} < b$.

3. A distância e os conceitos de aproximação e erro

Distância entre dois pontos

A utilização dos números reais como medidas das mais diversas magnitudes (comprimento, área, volume, tempo, são alguns exemplos) requer uma representação dos números reais que permita identificar um determinado número. A representação mais comumente utilizada é a que chamamos representação na base 10. Os algoritmos para as operações algébricas com números reais (isto é, as contas de somar, multiplicar ou dividir) que aprendemos no ensino elementar utilizam a representação na base 10.

Recordemos a representação na base 10 dos números inteiros positivos: o número que chamamos de *dez* e representamos por 10 é o número inteiro positivo com a propriedade de que cada inteiro positivo menor do que 10 é representado por um dos símbolos (que chamaremos algarismos), 1 (a unidade), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, satisfazendo a ordem

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10.$$

Denotamos por 10^n as potências do número 10 (onde n denota um inteiro maior que 1), isto é, a multiplicação de 10 por 10 um número inteiro, n, de vezes e convencionamos, para simplificar a notação, que $10^\circ = 1$ e $10^1 = 10$.

A representação na base 10 é tal que qualquer número inteiro positivo é representado pela justaposição de algarismos do conjunto {0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

A melhor forma de lembrarmos a interpretação dessa representação é considerarmos alguns exemplos:

$$54323 = 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^4$$
$$609 = 9 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^2$$

Em particular, temos que a potência 10^n é representada pela justaposição de n zeros à direita do 1: por exemplo,

$$\begin{aligned} 100 &= 0 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^2 \\ &= 0 + 0 + 10^2 = 10^2. \end{aligned}$$

Observe que, usando as propriedades das operações soma e produto e o fato de que $10^n \cdot 10 = 10^{n+1}$, obtemos a propriedade de que, na base 10, a multiplicação por 10 corresponde ao acréscimo de um 0 A direita. Por exemplo,

$$\begin{aligned}609 \cdot 10 &= (9 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^2) \cdot 10 \\ &= 9 \cdot 10^0 \cdot 10 + 0 \cdot 10^1 \cdot 10 + 6 \cdot 10^2 \cdot 10 \\ &= 9 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^3 \\ &= 0 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^3 \\ &= 6090.\end{aligned}$$

Na próxima seção apresentaremos a construção da representação decimal de números reais e veremos que não é possível obter uma representação finita para um número real qualquer.

Esse fato nos coloca frente ao problema de que não é possível efetuar cálculos exatos com números reais que não possuem um representação finita, já que qualquer algoritmo (isto é, qualquer maneira de *fazer cálculos numéricos*) só pode se processar a partir de um número finito de informações.

A solução para esse problema é efetuarmos cálculos aproximados, isto é, substituir um número que não possui uma representação finita por outro que a possua e fazer os cálculos com esse novo número, que é chamado uma aproximação do primeiro.

Por exemplo, sabemos que a representação decimal do número $\frac{1}{3}$ é a dízima periódica $0,33\overline{3}$, (a barra sobre o 3 informa que esse algarismo se repete indefinidamente), e, por isso, ao efetuarmos cálculos que incluem $\frac{1}{3}$, usamos o número 0,3 ou 0,33 ou ainda, 0,333 etc, dependendo da precisão que desejamos para o resultado. Isto é, sabemos que o resultado não vai ser exato, mas admitimos cometer um erro desde que suficientemente pequeno para os nossos propósitos.

Assim, somos conduzidos à necessidade de introduzir conceitos precisos que permitam entender e controlar cálculos nestas condições.

A primeira noção que precisamos é a de proximidade ou, equivalentemente, de *distância* entre dois números reais.

Dada a interpretação geométrica dos números reais, é natural usarmos, para definir a distância entre dois números reais, o segmento de reta cujos extremos são os pontos que estão identificados aos dois números, isto é, definimos:

Definição: Se *a* e *b* são números reais, dizemos que a *distância* entre *a* e *b* é o comprimento do intervalo cujos extremos são os pontos correspondentes da reta real.

Observe que, a partir da interpretação geométrica da soma de números reais, temos que *se $a < b$, então o comprimento do segmento de reta com extremos a e b é o número (positivo) $b - a$.*

Assim, se denotarmos por l o comprimento do segmento de extremos a e b temos que:

$$l = \begin{cases} b - a & se \quad a < b, \\ a - b & se \quad a > b. \end{cases}$$

Mas, como $a - b = -(b - a)$, podemos dizer que

a distância entre dois números a e b é $(b - a)$ ou seu simétrico $-(b - a)$, dependendo se $a < b$ ou $a > b$.

Isto sugere a conveniência de introduzirmos um conceito que expresse essa propriedade. O conceito que faz o que precisamos é denominado de *módulo* ou *valor absoluto* de um número real:

Definição: O *módulo* ou *valor absoluto* de um número real x, denotado por $|x|$, é definido por: $|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$

Por exemplo, $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ já que $\frac{1}{2} > 0$, enquanto que $|-1| = 1$, pois, como $-1 < 0$, temos que

$$|-1| = -(-1) = 1.$$

Observe que se $x > 0$, então $-x < 0$ e, portanto, pela definição, temos que

$$|-x| = -(-x) = x = |x|$$

Analogamente, se $x < 0$, então $-x > 0$, donde

$$|-x| = |-(-x)| = |x|.$$

Ou seja, um número e seu simétrico possuem o mesmo módulo, isto é, para qualquer número real x, tem-se que

$$|x| = |-x|$$

Em particular, se a *e* b são números reais quaisquer, então as diferenças $a - b$ *e* $b - a$ têm o mesmo valor absoluto, já que

$$-(a - b) = b - a$$

e, portanto,

$$|a - b| = |-(a - b)| = |b - a| .$$

Voltando agora à distância entre dois números reais, vemos que:

(i) se $a < b$, então a distância entre a e b é, como definimos acima, $b - a$, *e* como nesse caso $b - a > 0$, temos que $b - a = |b - a| = |a - b|$;

(ii) se $a > b$, então a distância entre a e b b é $-(b - a)$. Mas, nesse caso, $a - b > 0$ e, portanto, $-(b - a) = a - b = |a - b|$.

Ou seja, em resumo, a distância entre a *e* b é $|a - b|$ em qualquer dos casos. Em palavras,

a distância entre dois números, a e b, é o valor absoluto da diferença a – b.

Em particular, como definimos a distância entre dois pontos como sendo o comprimento do intervalo cujos extremos são os dois pontos, temos que o comprimento de um intervalo cujos extremos são os números a *e* b é $|a - b|$.

Observe ainda que, como para qualquer número real a, tem-se que

$$|a| = |a - 0|,$$

vemos que

o valor absoluto de um número real é a distância entre o número e o zero.

Em resumo, o valor absoluto de um número é um conceito algébrico que nos permite representar de uma única maneira, a noção (geométrica) de distância entre dois números, sem precisarmos especificar a ordem entre esses números (isto é, se $a < b$ ou $a > b$).

Uma propriedade com respeito à distância que é importante destacar, muito embora seja uma consequência imediata da definição, é que

se x e y são números de um intervalo $[a,b]$, *então a distância entre x e y é menor ou igual à distância entre a e b*, isto é

$$|x - y| \leq |a - b|. \quad (*)$$

De fato, o intervalo cujos extremos são os pontos x *e* y está contido no intervalo $[a, b]$ e, portanto, seu comprimento (que é a distância entre x e y) é menor ou igual ao comprimento de $[a, b]$ (que é a distância entre a e b). Observe que a igualdade só pode ocorrer se x e y coincidem com a e b.

Figura 3.1

Aproximação de números reais

A noção de distância entre dois números é o que precisamos para introduzir os conceitos de aproximação de números e estimativas para erro de aproximação.

Definição: Seja a um número real. Se ε é um número positivo ($\varepsilon > 0$), dizemos que um número real b é uma *aproximação para a com erro menor do que* ε se a distância entre a e b é menor do que ε, isto é,

$$|a - b| < \varepsilon.$$

Observe que se $\varepsilon > 0$ e $|a - b| < \varepsilon$, então

$$a - \varepsilon < b < a + \varepsilon.$$

De fato, $a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$ são os dois números cuja distância ao número a é exatamente ε (veja Figura 3.2). Assim, os números que distam de a menos do que ε são os números que se localizam entre os pontos $a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$.

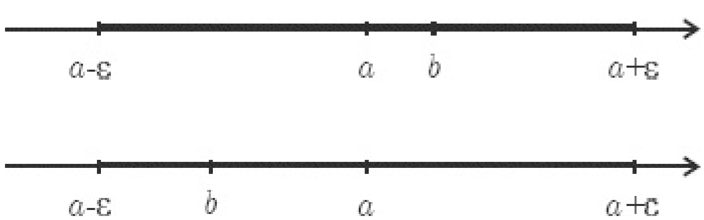


Figura 3.2

Para entendermos bem a noção de estimativas para erros de aproximação, é importante termos em mente as seguintes propriedades:

(i) Se b é uma aproximação para a com erro menor do que ε, e c é um número que pertence ao intervalo cujos extremos são a e b, então c também é uma aproximação para a com erro menor do que ε, isto é,

$$|a - c| < \varepsilon.$$

De fato, a e c pertencem ao intervalo cujos extremos são a e b e, portanto, pela propriedade que destacamos acima, temos que

$$\begin{aligned} & |a - c| \leq |a - b| < \varepsilon \\ \Longrightarrow \quad & |a - c| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Figura 3.3

(ii) Se b é uma aproximação para a com erro menor do que ε, e $\tilde{\varepsilon}$ é um número tal que $\varepsilon > \tilde{\varepsilon}$, então b também é uma aproximação para a com erro menor do que $\tilde{\varepsilon}$, isto é,

$$|a - b| < \varepsilon \text{ e } \varepsilon < \tilde{\varepsilon} \Rightarrow |a - b| < \tilde{\varepsilon}.$$

Essa propriedade é consequência imediata da transitividade da relação de ordem.

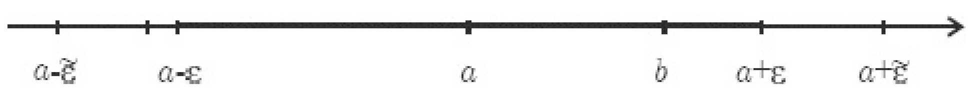


Figura 3.4

(iii) Se $a \in [b, c)$, então b é uma aproximação para a com erro menor do que $|b - c|$. De fato, a propriedade (*), acima, garante que $|a - b| < |b - c|$.

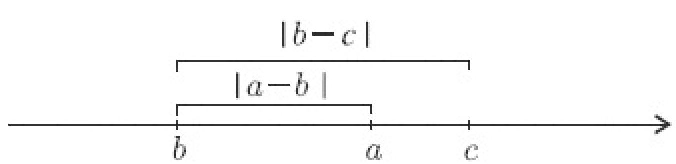


Figura 3.5

Exemplos

1. O número b = 0,3 é uma aproximação para $a = \frac{1}{3}$ com erro menor do que 10^{-1}.

De fato, sabemos que 0,3 = $\frac{3}{10}$, e, portanto,

$$0,3 = \frac{3}{10} < \frac{1}{3} < \frac{4}{10},$$

isto é, $\frac{1}{3}$ pertence ao intervalo $(\frac{3}{10}, \frac{4}{10})$ donde

$$\left|\frac{1}{3} - 0,3\right| < \left|\frac{3}{10} - \frac{4}{10}\right| = \frac{1}{10} = 10^{-1}.$$

Analogamente vemos que 0, 33 é uma aproximação para $\frac{1}{3}$ com erro menor do que 10^{-2}:

$$0,33 = \frac{33}{100} < \frac{1}{3} < \frac{34}{100}$$
$$\Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{3} - 0,33\right| < \left|\frac{33}{100} - \frac{34}{100}\right| = \frac{1}{100} = 10^{-2}.$$

Na verdade,

$$0,3 = \frac{30}{100} < \frac{31}{100} < \frac{1}{3}$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{100} = \left|\frac{30}{100} - \frac{31}{100}\right| < \left|\frac{1}{3} - 0,3\right|,$$

ou seja, 0, 33 é uma aproximação melhor para $\frac{1}{3}$ do que a aproximação 0,3.

2. O número b = 2, 85 é uma aproximação para $a = \frac{20}{7}$ com erro menor do que 10^{-2}.

Sabemos que 2,85 = $\frac{285}{100}$. Por outro lado, verifica-se que:

$$285 \cdot 7 < 20 \cdot 100 < 286 \cdot 7$$

e, portanto,

$$\frac{285}{100} < \frac{20}{7} < \frac{286}{100},$$

isto é, $\frac{20}{7}$ pertence ao intervalo $(\frac{285}{100}, \frac{286}{100})$. Podemos então concluir que

$$\left|\frac{20}{7} - 2,85\right| = \left|\frac{20}{7} - \frac{285}{100}\right| < \left|\frac{286}{100} - \frac{285}{100}\right| = \frac{1}{100} = 10^{-2}..$$

Como já dissemos anteriormente, não é possível obter uma representação finita para um número real qualquer, mas, na próxima seção, veremos que qualquer número real pode ser aproximado por números que possuem uma representação finita (chamados os *decimais exatos*) com erro tão pequeno quanto desejarmos.

Essa propriedade é muito importante porque é ela que garante que podemos fazer cálculos aproximados envolvendo qualquer número real com a precisão que desejarmos.

Os decimais exatos são um tipo particular de números racionais. Recordemos que um número real é dito *racional* se é o produto de um número inteiro p pelo recíproco de um inteiro $q \neq 0$. Em outras palavras, os números racionais são os números reais, r, que podem ser apresentados na forma

$$r = \frac{p}{q}, \text{ onde } p \text{ e } q \text{ são inteiros e } q \neq 0.$$

Ocorre que os pontos da reta real que representam os números racionais não preenchem a reta toda. Esse fato, conhecido como a descoberta do número *raiz quadrada de* 2, foi provado pelos grupos pitagóricos no século V antes de Cristo. Em termos da terminologia atual, isto significa que existem números reais que não são números racionais.

O número $\sqrt{2}$: consideremos um triângulo retângulo cujos catetos são segmentos de reta que medem uma unidade de comprimento. Pelo Teorema de Pitágoras, a hipotenusa é um segmento de reta cuja medida de comprimento, a (e, portanto a é um número real positivo), satisfaz a igualdade

$$a^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

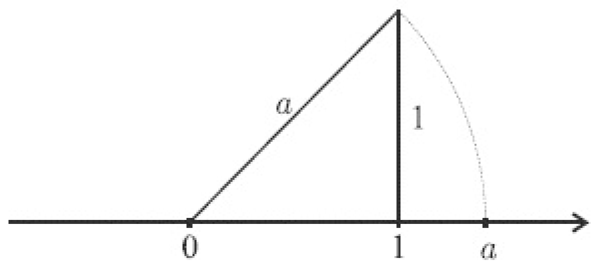


Figura 3.6

Mostremos que a não pode ser um número racional. Faremos uma demonstração por absurdo:

Suponhamos que a é um número racional. Então podemos escrever

$$a = \frac{p}{q}$$

com p *e* q sendo números inteiros e tais que pelo menos um deles é um inteiro ímpar. Então

$$a^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

e, como $a^2 = 2$, temos que

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$
$$\Longrightarrow 2\,q^2 = p^2.$$

Isto é, p^2 é um número par e, portanto, p também é par, já que o quadrado de um número ímpar também é ímpar. Isso significa que podemos escrever $p = 2\,k$, onde k é um número inteiro. Daí

$$2\,q^2 = p^2 = 4\,k^2$$
$$\Longrightarrow q^2 = 2\,k^2.$$

Isto é, q^2 também é um número par, o que é um absurdo, pois se p é par, então q tem que ser ímpar (lembre-se que um deles tem que ser ímpar), o que implica que q^2 também é ímpar (o absurdo é que q^2 não pode ser par e ímpar). $\square$

Podemos então concluir que o número real positivo que satisfaz a igualdade

$$a^2 = 2$$

não é um número racional. Convencionamos denominar esse número de *raiz quadrada de* 2 e representá-lo pelo símbolo $\sqrt{2}$. Isto é,

> $\sqrt{2}$ é o símbolo que representa o *único número real positivo que é solução da equação*
>
> $$x^2 = 2.$$

Os números reais que não são racionais são chamados números *irracionais*. Assim, em particular, $\sqrt{2}$ é um número irracional. Como veremos na próxima seção, a representação (ou expansão decimal) dos números reais nos permitirá caracterizar os números irracionais.

A partir da demonstração que demos acima, podemos dizer que o Teorema de Pitágoras garante a existência de números irracionais.

Para vermos que há infinitos irracionais, basta verificarmos que o produto de um número racional não nulo por um número irracional sempre resulta num irracional: de fato, a partir desse resultado, vemos que os números da forma $n\sqrt{2}$, com n sendo um inteiro qualquer não nulo, são números irracionais diferentes dois a dois.

Mas, na verdade, podemos provar que qualquer intervalo aberto não vazio de números reais possui uma infinidade de números irracionais. Geometricamente isto significa que qualquer segmento da reta real possui infinitos pontos que estão associados a números irracionais.

Propriedades do módulo e desigualdades

As propriedades do módulo ou valor absoluto de um número real que apresentamos a seguir são muito úteis não só para obtermos novas estimativas de erros a partir de estimativas conhecidas, como também para resolvermos desigualdades que envolvem o módulo de números reais.

Propriedades do módulo de um número: *Se x, y e ε são números reais, então,*

(1) $|x| \geq 0$ e $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(2) $|-x| = |x|$;
(3) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$;
(4) $|x \cdot y| = |x|\,|y|$;
(5) $|x + y| \leq |x| + |y|$;
(6) se $\varepsilon \geq 0$, então $|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$;
(7) se $\varepsilon > 0$, então $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$;
(8) se $\varepsilon \geq 0$, então $|x| \geq \varepsilon \Leftrightarrow x \leq -\varepsilon$ ou $x \geq \varepsilon$;
(9) se $\varepsilon \geq 0$, então $|x| > \varepsilon \Leftrightarrow x < -\varepsilon$ ou $x > \varepsilon$.

A propriedade (5) é conhecida como *desigualdade triangular*. Essa propriedade é muito útil para obtermos estimativas de erros para aproximações. Por exemplo, se *a e b* são números reais e queremos uma aproximação para a soma, *a* + *b*, com erro menor do que *e*, é suficiente obtermos aproximações, $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ de *a e b*, respectivamente, com erro menor do que $\frac{\varepsilon}{2}$, isto é, se

$$|a - \tilde{a}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } \left|b - \tilde{b}\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ então}$$
$$\begin{aligned} \left|(a + b) - (\tilde{a} + \tilde{b})\right| &= \left|(a - \tilde{a}) + (b - \tilde{b})\right| \\ &\leq |a - \tilde{a}| + \left|b - \tilde{b}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

e, portanto, $\tilde{a} + \tilde{b}$ é uma aproximação para a + *b* com erro menor do que *ε*.

Por exemplo, como obtivemos acima que 2, 85 e 0, 33 são, respectivamente, aproximações para $\frac{20}{7}$ e $\frac{1}{3}$ com erro menor do que 10^{-2} e $10^{-2} < \frac{10^{-1}}{2}$, podemos concluir que

$$2{,}85 + 0{,}33 = 3{,}18$$

é uma aproximação para $\frac{20}{7} + \frac{1}{3}$ com erro menor do que 10^{-1}.

As propriedades (**6**) a (**9**) são necessárias para a resolução de desigualdades que envolvem o módulo. Por exemplo, para determinarmos os número reais *x* que satisfazem à desigualdade

$$|x + 2| > 1,$$

usamos a propriedade (7):

$$\begin{aligned} & |x + 2| < 1 \\ \Longrightarrow\ & -1 < x + 2 < 1 \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{array}{rl} & -1 < x+2 \quad \text{e} \quad x+2 < 1 \\ \Longrightarrow & -1-2 < x \quad \text{e} \quad x < 1-2, \end{array}$$

ou seja,

$$-3 < x > -1.$$

Já a propriedade (3) nos garante que as soluções da equação

$$|x + 2| = 1$$

são $x = -3$ ou $x = -1$. De fato,

$$\begin{array}{rl} & |x+2| = 1 = |1| \\ \Longrightarrow & x+2 = 1 \quad \text{ou} \quad x+2 = -1 \\ \Longrightarrow & x = -1 \quad \text{ou} \quad x = -3. \end{array}$$

A interpretação geométrica das propriedades acima é muito útil. Por exemplo, os números x que satisfazem à desigualdade

$$|x - 1| < |x - 2|$$

são os números cuja distância ao número 1 é menor do que sua distância ao número 2. Passando à representação geométrica dos números na reta real, vemos que esses são os números associados aos pontos que se situam à esquerda do ponto médio, P, entre 1 e 2 (veja Figura 3.7).

Figura 3.7

Como $P = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$, temos que as soluções da desigualdade acima são os números x que satisfazem à desigualdade

$$x < \frac{3}{2}.$$

Para vermos a vantagem desse recurso, vamos resolver a desigualdade algebricamente:

$$|x-1| < |x-2|$$
$$-|x-2| < x-1 < |x-2|$$

isto é,

$$-|x-2| < x-1 \quad \text{e} \quad x-1 < |x-2|. \qquad (\star)$$

Agora, para trabalharmos com $|x - 2|$, devemos considerar os casos, $x - 2 \geq 0$ e $x - 2 \leq 0$:

(i) $x - 2 \geq 0$. Neste caso,

$$|x - 2| = x - 2$$

e, portanto, (*) se reduz a

$$-(x - 2) < x - 1 \text{ e } x - 1 < x - 2.$$

Mas observe que

$$x - 1 < x - 2 \Rightarrow -1 < -2,$$

o que é falso e, portanto, podemos concluir que nenhum número $x \geq 2$ é solução da inequação.

(ii) $x - 2 \leq 0$. Neste caso

$$|x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$$

e (*) se reduz a

$$x-2 < x-1 \quad \text{e} \quad x-1 < -x+2$$
$$-2 < -1 \quad \text{e} \quad 2x < 3$$
$$x < \tfrac{3}{2}.$$

Ou seja, $x \leq 2$ (da condição $x - 2 \leq 0$ que estamos considerando) e $x < \frac{3}{2}$ que tem como solução $x < \frac{3}{2}$.

Uma outra propriedade do módulo de um número real é sua relação com a raiz quadrada de números não negativos. No Capítulo 6 estudaremos com mais precisão a função *raiz quadrada* e, em geral, a função *raiz n*-ésima. Aqui apenas recordaremos a definição algébrica e as propriedades da raiz quadrada de números não negativos.

Consideremos a equação

$$x^2 = b,$$

onde b é um número real. Como o quadrado de qualquer número real é maior ou igual a zero, temos que se b é negativo, então essa equação não possui nenhuma solução, isto é, não existe $x \in \mathbb{R}$ que satisfaça a igualdade dada pela equação.

Por outro lado, podemos provar que se $b > 0$, então essa equação possui exata-mente duas soluções, sendo uma positiva e outra seu simétrico (que é negativo). Claramente se $b = 0$, então $x = 0$ é a única solução da equação.

Definição: Se $b \geq 0$, a *raiz quadrada de b*, denotada por $\sqrt{b}$, é a solução não negativa da equação $x^2 = b$.

Decorre dessa definição, por exemplo, que $\sqrt{4} = 2$ e que as soluções da equação

$$x^2 = 4$$

são os números $\sqrt{4} = 2$ e $-\sqrt{4} = -2$, e, portanto, não faz sentido dizer que $\sqrt{4} = \pm 2$.

Em geral, se $b \geq 0$, as soluções da equação

$$x^2 = b$$

são os números $\sqrt{b}$ e $-\sqrt{b}$, sendo que $\sqrt{b} \geq 0$.

São válidas as seguintes propriedades:
(1) Se $b \geq 0$, então $(\sqrt{b})^2 = b$.
(2) $\sqrt{x^2} = |x|$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.
(3) Se $0 \leq a < b$, então $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Em geral, se $n > 1$ é um número inteiro, e $b \geq 0$, podemos provar que a equação

$$x^n = b$$

possui uma única solução não negativa. Essa solução é chamada a *raiz n-ésima* de b e é denotada por $\sqrt[n]{b}$. Com essa definição temos que:

(1) se $b \geq 0$, então $\sqrt[n]{b} \geq 0$ e $(\sqrt[n]{b})^n = b$,
(2) se $0 \leq a < b$, então $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Resolva as desigualdades ou equações abaixo utilizando a interpretação geométrica de valor absoluto.
   (a) $|x| < 5$
   (b) $|x| \geq 2$
   (c) $|x-2| \leq 0{,}03$
   (d) $|x + 3| > 4$
   (e) $|5x-7| = 13$
   (f) $|3x + 2| > 5$
   (g) $|x - 3| = |x - 4|$
   (h) $|x + 3| = |x - 4|$
   (i) $|x + 2| = |x + 1|$
   (j) $|x + 1| < |x - 2|$
   (k) $|x + 5| + |x - 3| = 5$
   (l) $|x + 5| + |x-3| = 12$
2. Resolva algebricamente as desigualdades ou equações do exercício anterior.
3. Resolva as desigualdades abaixo utilizando a interpretação geométrica de valor absoluto.
   (a) $|x - 1| < |x - 4| < |x + 1|$
   (b) $|x + 1| < |x - 1| < |x - 2|$
   (c) $|x| < |x - 3| < |x - 1|$
4. Para cada um dos itens abaixo, dê uma desigualdade da forma $|x - a| < b$, cuja solução é o intervalo abaixo.
   (a) $(0,15)$
   (b) $(-3,9)$
   (c) $(-12,-2)$
   (d) $(-2,9)$
   (e) $(6,9;\ 7,1)$
5. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

(a) Se $|x - 5| < |x + 3|$, então $x > 1$.

(b) Se $|x - 3| + |x - 9| > 8$, então $x > 10$.

(c) Se $|x - 2| \geq |x + 4|$, então $x < -4$.

(d) Se $|x - 1| + |x - 5| = 10$, então $x < -4$.

(e) Se $|x - 4| \leq |x + 1|$, então $2x - 2 \geq 0$.

6. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

   (a) Se a distância de x a 2 é menor que 5 e a distância de y a 6 é menor que 8, então a distância de $(x + y)$ a 8 é menor que 15.

   (b) Se a distância de x a 4 é menor que 5 e a distância de x a 2 é maior que 2, então a; é um número positivo.

   (c) Se a distância de x a 1 é maior que 3 e a distância de x a 3 é maior que 2, então a x é maior que 5.

   (d) Se a distância de a a b é menor que a distância de a a C, então 6 está entre a e c.

7. Encontre um número real r tal que:

   Se a distância de x a 2 é menor que r e a distância de y a 6 é menor que r, então a distância de (a; + y) a 8 é menor do que 0,1.

8. Suponha que $L \leq x \leq U$. Mostre que:

$$|x - \frac{1}{2}(L + U)| \leq \frac{1}{2}|L - U|.$$

   Interprete geometricamente esta desigualdade.

9. Encontre valores para a e b de maneira que os números do intervalo (–1, 1) sejam as soluções da inequação

$$|2x - a| < x + b$$

10. Encontre valores para a e b de maneira que os números do intervalo (1, 3) sejam as soluções da inequação

$$|5x - a| < b$$

11. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

   (a) Se 2 é uma aproximação para x com erro menor do que 10^{-2}, então 2 é uma aproximação para x com erro menor do que 10^{-1}.

(b) Se 3 é uma aproximação para x com erro menor do que 10 , então $x < 3 + 10^{-2}$

(c) Se $x \in [2, 5)$, então 2 é uma aproximação para x com erro menor do que 4.

(d) Se 10 é uma aproximação para x com erro menor do que 1 então $x \in (9,11)$.

12. Dê exemplos de:

(a) três números reais para os quais 5 é uma aproximação com erro menor do que 10^{-1} .

(b) uma infinidade de número reais para os quais 9 é uma aproximação com erro menor do que 10^{-1}.

13. Mostre que $0 \leq x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$.

14. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

(a) Se $\sqrt{16} = x$, então $x = 4$.

(b) Se $\sqrt{x^2} = 5$, então $x = 5$.

(c) Se $\sqrt{x^2} = 5$, então $x = 5$ ou $x = -5$.

(d) Se $\sqrt{|x|} = 3$, então $x = 9$.

(e) Se $\sqrt{|x|} = 3$, então $x = 9$ ou $x = -9$.

15. Resolva as desigualdades abaixo:

(a) $\sqrt{x-2} \leq 3$

(b) $\sqrt{(x-3)^2} < 2$

(c) $\sqrt{x+3} > \sqrt{2x-5}$

(d) $\frac{-3}{\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1}$

4. Representação decimal de números reais

Nesta seção recordaremos a representação (ou expansão) decimal de um número real. Na seção anterior já recordamos a representação decimal (isto é, na base 10) dos números inteiros positivos; aqui obteremos uma representação análoga para um número real qualquer.

Primeiro, convencionamos que a representação decimal de um número real negativo é obtida acrescentando-se o sinal "–" à esquerda da representação decimal de seu simétrico que é um número positivo. Passemos então a descrever o processo pelo qual se obtém a representação ou expansão decimal de um número $a \geq 0$.

Comecemos por observar que os números inteiros não negativos dividem a semirreta positiva em intervalos da forma

$$[n, n + 1), \text{ onde } n \geq 0 \text{ é um número inteiro,}$$

que são intervalos disjuntos de comprimento 1. Isto é, usando a representação na base 10 de um número inteiro não negativo, estamos falando dos intervalos

$$[0, 1), [1, 2), [2, 3), [3, 4)\ldots, [21, 22), [22, 23)\ldots[135,136)\ldots$$

Desse fato decorre que se a é um número real não negativo, então a pertence a um desses intervalos, isto é, existe um único número inteiro *no* tal que $a \in [n_0, n_0 + 1)$. Este número *no* é chamado a *parte inteira* da expansão decimal de a.

Por exemplo, se $a \in [21, 22)$, então a parte inteira de a é 21. Em particular, todos os números do intervalo [21, 22) têm a mesma parte inteira, o número 21.

A *parte decimal* é constituída da justaposição de dígitos, $d_1, d_2, d_3, \ldots$, onde cada dígito, d_k, é um dos algarismos {0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} obtidos pelo processo que descreveremos adiante.

Se n_0 é a parte inteira do número a e $d_1d_2d_3\ldots$ é sua parte decimal, a representação ou expansão decimal de a é

$$a = n_0, d_1d_2d_3\ldots$$

Vejamos como determinamos d_1, o primeiro dígito da parte decimal. Dividindo o intervalo $[n_0, n_0 + 1)$ em dez subintervalos de mesmo comprimento, obtemos os intervalos

$$[n_0, n_0 + \frac{1}{10}), [n_0 + \frac{1}{10}, n_0 + \frac{2}{10}), \ldots, [n_0 + \frac{8}{10}, n_0 + \frac{9}{10}), [n_0 + \frac{9}{10}, n_0 + 1),$$

que são disjuntos, têm comprimento $\frac{1}{10}$ e cuja união é o intervalo $[n_0, n_0 + 1)$.

Figura 4.1

Observe que cada um dos subintervalos é da forma

$$[n_0 + \frac{d}{10}, n_0 + \frac{d+1}{10}),$$

onde d é um dos algarismos de 0 a 9.

Por exemplo, para o intervalo [21, 22), após a divisão, teremos os intervalos

$$[21, 21 + \frac{1}{10}), [21 + \frac{1}{10}, 21 + \frac{2}{10}), ..., [21 + \frac{8}{10}, 21 + \frac{9}{10}), [21 + \frac{9}{10}, 22).$$

Figura 4.2

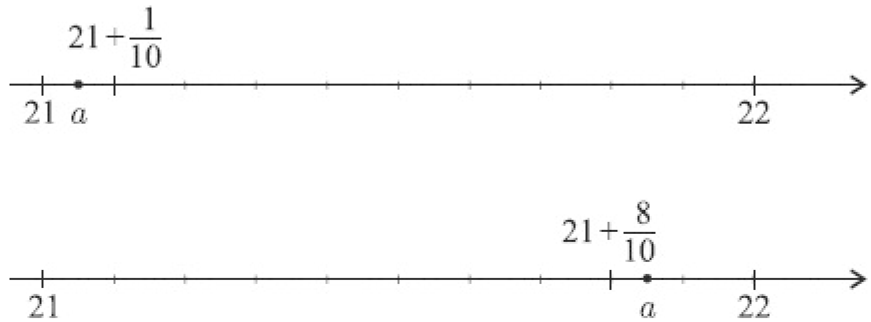
Assim se $a \in [n_0, n_0 + 1)$, temos que a pertence a um dos subintervalos de comprimento $\frac{1}{10}$: por definição, o primeiro dígito da parte decimal de a é o algarismo d_1 tal que

$$a \in [n_0 + \frac{d_1}{10}, n_0 + \frac{d_1 + 1}{10}).$$

Por exemplo, já vimos que se $a \in [21, 22)$, então $n_0 = 21$. Agora, se a pertence ao primeiro dos dez subintervalos, isto é, o intervalo

$$[21 + \frac{8}{10} + \frac{2}{100}, 21 + \frac{8}{10} + \frac{3}{100}).$$

então $d_1 = 0$ (Figura 4.3a). Por outro lado, se a pertence ao penúltimo dos dez intervalos $[21 + \frac{8}{10}, 21 + \frac{9}{10})$, tem-se que $d_1 = 8$ (Figura 4.3b).



Figuras 4.3(a) e (b)

No primeiro caso a expansão decimal de *a* será

$$a = 21{,}0\ldots,$$

e no segundo caso sua expansão decimal será

$$a = 21{,}8\ldots$$

sendo que os "…" indicam que não conhecemos os demais dígitos de sua expansão decimal.

Uma outra forma de dizermos que só conhecemos a parte inteira e o primeiro dígito da parte decimal do número *a* é dizermos, no segundo caso por exemplo, que *a expansão decimal de a até a primeira casa decimal é* 21,8.

Para obtermos o segundo dígito, d_2, repetimos o processo de dividir em dez subintervalos de mesmo comprimento, mas, agora, aplicado ao intervalo $[n_0 + \frac{d_1}{10}, n_0 + \frac{d_1+1}{10})$. Obtemos, assim, dez intervalos de comprimento $\frac{1}{100}$, já que esse último intervalo tem comprimento $\frac{1}{10}$. Isto é, obtemos os intervalos

$$[n_0 + \frac{d_1}{10}, n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{1}{100}), \ldots, [n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{9}{100}, n_0 + \frac{d_1+1}{10})$$

(observe que $n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{9}{100} + \frac{1}{100} = n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{10}{100} = n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{1}{10} = n_0 + \frac{d_1+1}{10}$).
O segundo dígito da expansão decimal de *a* é o algarismo d_2, tal que

$$a \in [n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100}, n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2+1}{100}).$$

Por exemplo, se $a = 21{,}8\ldots$, isto é,

$$n_0 = 21 \text{ e } d_1 = 8,$$

suponhamos que a pertença ao terceiro subintervalo da divisão do intervalo

$$[21 + \frac{8}{10}, 21 + \frac{9}{10}),$$

que é o intervalo

$$[21 + \frac{8}{10} + \frac{2}{100}, 21 + \frac{8}{10} + \frac{3}{100}).$$

Neste caso teremos $d_2 = 2$ e, portanto,

$$a = 21{,}82\ldots$$

Em geral, efetuando, sucessivamente, k vezes o procedimento de dividir o último intervalo obtido em dez subintervalos de mesmo comprimento (e mesmo tipo: fechado à esquerda e aberto à direita), determinamos os k primeiros dígitos, $d_1, d_2, \ldots, d_k$ da expansão decimal do número a. Ou seja,

$$a = n_0, d_1 d_2 \ldots d_k \ldots$$

exatamente quando

$$a \in [n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \ldots + \frac{d_k}{10^k},\ n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \ldots + \frac{d_k + 1}{10^k}),$$

ou, equivalentemente, quando a satisfaz as desigualdades

$$n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \ldots + \frac{d_k}{10^k} \leq a < n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \ldots + \frac{d_k + 1}{10^k}. \qquad (*)$$

Observe que um determinado dígito da expansão decimal de a é o 0 exatamente quando, na etapa que determina esse dígito, a pertence ao primeiro subintervalo da divisão. Por exemplo, se $a = 1{,}30\ldots$, então

$$a \in [1 + \frac{3}{10}, 1 + \frac{3}{10} + \frac{1}{100}),$$

que é o primeiro subintervalo da divisão do intervalo $[1 + \frac{3}{10}, 1 + \frac{4}{10})$ em dez intervalos de comprimento $\frac{1}{100}$. Reciprocamente, se $[1 + \frac{3}{10}, 1 + \frac{3}{10} + \frac{1}{100})$, então $d_2 = 0$, já que

$$a \in [1 + \frac{3}{10}, 1 + \frac{3}{10} + \frac{1}{100}) = a \in [1 + \frac{3}{10} + \frac{0}{100}, 1 + \frac{3}{10} + \frac{1}{100}).$$

Desse fato decorre que se, por exemplo, d é o número real

$$d = 2 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{5}{10^3},$$

então sua parte inteira é 2 com

$$d_1 = 3,$$
$$d_2 = 1,$$
$$d_3 = 5,$$

e todos os demais dígitos são o 0. Daí dizermos que sua expansão decimal é

$$d = 2,315.$$

Em geral, se a é um número da forma

$$d = n_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + ... + \frac{d_k}{10^k},$$

então os dígitos de índice maior do que k são o 0, e dizemos que sua expansão decimal é

$$d = n_0, d_1 d_2 \ldots d_k$$

(sem os três pontos, indicando que sabemos que os demais dígitos são o 0). Neste caso dizemos que a representação (ou expansão) decimal de d é *finita*, ou que d é um *decimal exato*.

Em particular, as representações decimais de $21 + \frac{8}{10} + \frac{2}{100}$ e $21 + \frac{8}{10} + \frac{3}{100}$ são

$$21 + \frac{8}{10} + \frac{2}{100} = 2,82$$
$$21 + \frac{8}{10} + \frac{3}{100} = 2,83,$$

e, portanto, a = 21,82… é equivalente a

$$21{,}82 \leq a < 21{,}83.$$

Na Figura 4.4 representamos, na reta real, a divisão do intervalo [21, 22) em dez subintervalos de comprimento $\frac{1}{10}$, e damos uma ampliação do subintervalo [21, 8; 21, 9) com sua divisão em dez intervalos de comprimento $\frac{1}{100}$.

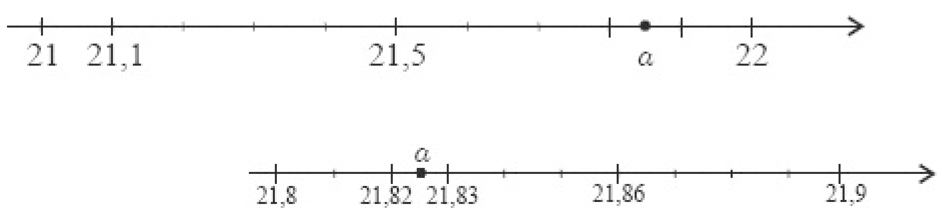


Figura 4.4

Os decimais exatos são os extremos dos intervalos obtidos pelas divisões sucessivas em dez subintervalos de mesmo comprimento, começando-se com um intervalo de comprimento 1 cujos extremos são números inteiros. Esses são os números com os quais podemos fazer cálculos exatos, isto é, são os números com os quais podemos *fazer cálculos numéricos*.

Em geral, usando a representação dos decimais exatos, podemos reescrever a condição (*), que um número $a = n_0, d_1 d_2 \ldots d_k \ldots$ satisfaz, na forma

$$n_0, d_1 d_2 \ldots d_k \leq a < n_0, d_1 d_2 \ldots d_k + \frac{1}{10^k}. \qquad (**)$$

Por exemplo, a = 3,201556…, exatamente quando a satisfaz as desigualdades

$$3,\, 201556 \leq a < 3,\, 201557.$$

Observe que as desigualdades (**) nos dizem, em particular, que se

$$a = n_0, d_1 d_2 \ldots d_k \ldots,$$

então

$$0 \leq a - n_0, d_1 d_2 ... d_k < \frac{1}{10^k} = 10^{-k},$$

isto é,

$$|a - n_0, d_1 d_2 ... d_k| < 10^{-k},$$

e, portanto, $b = n_0, d_1 d_2 \ldots d_k$ é uma aproximação para a com erro menor do que 10^{-k}.

Em geral, se $a = n_0, d_1 d_2 d_3 \ldots$, dizemos que

o truncamento de a na k-ésima casa decimal é 0 *decimal exato*

$$a_k = n_0, d_1 d_2 d_3 \ldots d_k$$

O truncamento de a na k-ésima casa é também chamado a expansão decimal de a até a k-ésima casa decimal. Com essa denominação, a estimativa que obtivemos acima nos diz que

o truncamento de um número a na k-ésima casa decimal é uma aproximação para a com erro menor do que 10^{-k},

ou seja, se $a = n_0, d_1 d_2 d_3 \ldots d_k$ e $a_k = n_0, d_1 d_2 d_3 \ldots d_k$, então

$$|a - a_k| < 10^{-k}.$$

Em particular, como cada truncamento é um decimal exato, temos que se a é um número real qualquer, então a pode ser aproximado por um decimal exato com erro tão pequeno quanto desejarmos. Por exemplo, se queremos aproximar um número a por um decimal exato com erro menor do que 10^{-9}, basta calcularmos a parte inteira e os nove primeiros dígitos de sua expansão decimal. Essa propriedade é importante porque é ela que garante que podemos efetuar cálculos aproximados com a precisão que desejarmos.

Exemplos

1. Se $a = 3, 201556\ldots$, então

• $a_1 = 3{,}2$ é o truncamento de a na primeira casa decimal e, portanto, é uma

aproximação para a com erro menor do que 10^{-1}, isto é, $|a - 3,2| < 10^{-1}$.
• $a_2 = 3,20 = 3,2$ é o truncamento de a na segunda casa decimal e, portanto, é uma aproximação para a com erro menor do que 10^{-2}, isto é, $|a - 3,2| < 10^{-2}$ (observe que, nesse exemplo, $a_1 = a_2$).
• $a_4 = 3,2015$ é o truncamento de a na quarta casa decimal e, portanto, é uma aproximação para a com erro menor do que 10^{-4}, isto é, $|a-3,2015| < 10^{-4}$.

2. Se $a = \frac{1}{3}$, então a expansão decimal de a é

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{3},$$

sendo que a barra sobre o algarismo 3 indica que esse algarismo se repete indefinidamente.

Assim,

• $a_1 = 0,3$ é o truncamento de $\frac{1}{3}$ na primeira casa decimal e, portanto, é uma aproximação para $\frac{1}{3}$ com erro menor do que 10^{-1}, isto é, $|\frac{1}{3} - 0,3| < 10^{-1}$.
• $a_2 = 0,33$ é o truncamento de $\frac{1}{3}$ na segunda casa decimal e, portanto, é uma aproximação para $\frac{1}{3}$ com erro menor do que 10^{-2}, isto é, $|\frac{1}{3} - 0,33| < 10^{-2}$.
• $a_4 = 0,3333$ é o truncamento de $\frac{1}{3}$ na quarta casa decimal e, portanto, é uma aproximação para $\frac{1}{3}$ com erro menor do que 10^{-4}, isto é, $|\frac{1}{3} - 0,3333| < 10^{-4}$.

3. Pelo algoritmo da divisão (isto é, da *conta de dividir*), podemos ver que

$$\frac{53}{165} = 0,3\overline{21},$$

onde, como no caso anterior, a barra sobre o par 21 indica que esse par de algarismos se repete indefinidamente. Então,

- $a_1 = 0,3$ é o truncamento de $\frac{53}{165}$ na primeira casa decimal e, portanto, é uma aproximação para $\frac{53}{165}$ com erro menor do que 10^{-1}, isto é, $\left|\frac{53}{165} - 0,3\right| < 10^{-1}$..

- $a_2 = 0,32$ é o truncamento de $\frac{53}{165}$ na segunda casa decimal e, tanto, é uma aproximação para $\frac{53}{165}$ com erro menor do que 10^{-2}, isto é, $\left|\frac{53}{165} - 0,32\right| < 10^{-2}$.

- $a_8 = 0,32121212$ é o truncamento de $\frac{53}{165}$ na oitava casa decimal e, portanto, é uma aproximação para $\frac{53}{165}$ com erro menor do que 10^{-8}, isto é,

  $\left|\frac{53}{165} - 0,32121212\right| < 10^{-8}$.

4. Se $a = 2,3114\ldots$, então, $10a = 23,114\ldots$, isto é, a expansão decimal do número 10a é obtida da expansão decimal de a, deslocando-se a vírgula uma casa para a direita.

   De fato, como 2, 3114 é o truncamento de a na quarta casa decimal, temos que

$$2 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{4}{10^4} \leq a < 2 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4}$$

   e, portanto,

$$23 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} \leq 10a < 23 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{5}{10^3}$$

   isto é,

$$23,114 \leq 10a < 23,115$$

   o que nos diz que o truncamento na terceira casa decimal de 10a é 23,114.

Observe que o exemplo 4 é o caso particular do que conhecemos como a regra de multiplicação de um número por uma potência de 10: se a é um número real e $k \geq 1$ é um inteiro, a expansão decimal de $10^k a$ é obtida da expansão decimal de a, deslocando-se a vírgula k casas para a direita.

Analogamente, a expansão decimal de $10^{-k}a$ é obtida da expansão decimal de a deslocando-se a vírgula k casas para a esquerda, acrescentando-se tantos 0 quanto se fizer necessário: por exemplo, se $a = 1,32\ldots$, então, $10^{-2}a = 0,0132\ldots$.

Se a expansão decimal de um número a apresenta um grupo de algarismos que se repete indefinidamente como nos exemplos **2** e **3** acima, dizemos que a expansão decimal de *a* é uma *dízima periódica*. O grupo de algarismos que se repete é chamado a dízima da expansão.

Podemos provar que a expansão decimal de um número *a* é uma dízima periódica exatamente quando *a* é um número racional (observe que os decimais exatos, que são números racionais, são dízimas periódicas cuja dízima se constitui apenas do algarismo 0). Que a expansão decimal de um número racional é uma dízima periódica segue-se do algoritmo da divisão (conta de dividir). Vejamos, num exemplo, como podemos verificar que um número cuja expansão decimal é uma dízima periódica é um número racional. Consideremos $a = 3,1\overline{24}$, então

$$
\begin{aligned}
10a &= 31,\overline{24} \\
10a - 31 &= 0,\overline{24} = 0,24\overline{24} \\
10^2(10a - 31) &= 24,\overline{24} \\
10^2(10a - 31) - 24 &= 0,\overline{24} = 10a - 31 \\
10^2(10a - 31) - (10a - 31) &= 24 \\
99\,(10a - 31) &= 24 \\
a &= \frac{24}{990} + \frac{31}{10}.
\end{aligned}
$$

e, portanto, $a = 3,1\overline{24}$ é um número racional

Assim, podemos dizer que os números irracionais se caracterizam pela propriedade de que sua expansão decimal é infinita, isto é, possui infinitos dígitos não nulos, sendo que nenhum grupo se repete indefinidamente, isto é,

a expansão decimal de um número irracional é infinita e não periódica.

Em particular, como $\sqrt{2}$ é irracional, sua expansão decimal possui essa propriedade e, portanto, nunca poderemos conhecer todos os seus dígitos.

Alguns truncamentos de $\sqrt{2}$: para determinarmos truncamentos de $\sqrt{2}$ usamos a propriedade de que se $0 \leq a < b$, então $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

- Temos que

$$
\begin{aligned}
& 1 \leq 2 < 4 \\
\Longrightarrow\quad & 1 \leq \sqrt{2} < \sqrt{4} = 2,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$1 \leq \sqrt{2} < 2,$$

e, portanto, a parte inteira de $\sqrt{2}$ é 1.

• Para determinarmos o primeiro dígito da parte decimal, devemos encontrar qual dos subintervalos do intervalo [1, 2), como na figura abaixo, contém o número $\sqrt{2}$.

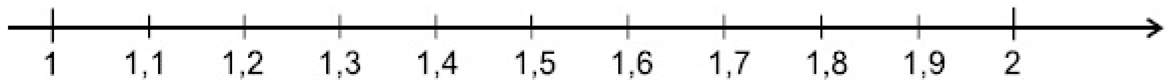


Figura 4.5

Para isso, calculamos os quadrados de cada um dos extremos, verificando que

$$\begin{aligned} & (1,4)^2 = 1,96 \leq 2 < 2,25 = (1,5)^2 \\ \Longrightarrow \quad & 1,4 \leq \sqrt{2} < 1,5, \end{aligned}$$

e, portanto, o dígito da primeira casa decimal de $\sqrt{2}$ é o algarismo 4, isto é,

$$\sqrt{2} = 1,4...$$

• Repetindo o procedimento para os extremos da divisão do intervalo [1,4; 1,5), em dez subintervalos de mesmo comprimento, concluímos que

$$\begin{aligned} & (1,41)^2 = 1,9881 \leq 2 < 2,0164 = (1,42)^2 \\ \Longrightarrow \quad & 1,41 \leq \sqrt{2} < 1,42, \end{aligned}$$

e, portanto, o dígito da segunda casa decimal de $\sqrt{2}$ é o algarismo 1, isto é,

$$\sqrt{2} = 1,41...$$

• Analogamente, obtemos

$$\begin{aligned} & (1,414)^2 = 1,999396 \leq 2 < 2,002225 = (1,415)^2 \\ \Longrightarrow \quad & 1,414 \leq \sqrt{2} < 1,415, \end{aligned}$$

e, portanto, o dígito da terceira casa decimal de $\sqrt{2}$ é o algarismo 4, isto é,

$$\sqrt{2} = 1,414...$$

Observe que $\sqrt{2} \neq 1{,}414$ (lembre-se que 1,414 é um número racional e $\sqrt{2}$ é irracional), mas como 1,414 é o truncamento de $\sqrt{2}$ na terceira casa decimal, podemos afirmar que

$$\left|\sqrt{2} - 1,414\right| < 10^{-3}.$$

Em outras palavras, 1, 414 é uma aproximação para $\sqrt{2}$ com erro menor do que 10^{-3}.

Uma propriedade bastante prática da representação decimal dos números reais é que a relação de ordem entre dois números pode ser determinada comparando--se as partes inteiras e dígito a dígito de suas expansões decimais. Se a e b são números não negativos, comparamos suas partes inteiras: se diferentes, o maior é aquele que possui a maior parte inteira. Se ambos possuem a mesma parte inteira, comparamos os dígitos de cada casa decimal até encontrarmos dois dígitos distintos: o maior é aquele que possui o maior dígito dessa casa decimal. Por exemplo, se

$$a = 1{,}253723\ldots \text{ e } 6 = 1{,}2536897\ldots,$$

então $a > b$, já que suas expansões decimais coincidem até a terceira casa decimal e o quarto dígito de a é maior do que o quarto dígito de b.

Pela nossa definição de representação decimal, temos que a representação decimal da unidade é o número 1 e, no entanto, é bastante usual dizer-se que a dízima periódica $0{,}\overline{9}$ é igual a 1. Ou seja, a igualdade

$$0,\overline{9} = 1$$

tem uma natureza diferente da igualdade

$$0,\overline{3} = \frac{1}{3},$$

já que a segunda tem o significado de *a expansão decimal de* $\frac{1}{3}$ é $0{,}\overline{3}$, enquanto que a primeira não tem esse significado (já que a expansão decimal de 1 é 1 e não $0{,}\overline{9}$).

De fato, podemos provar que nenhuma dízima periódica cuja dízima é formada apenas pelo algarismo 9 é a expansão decimal de um número real como definido nesta seção. No próximo capítulo formularemos conceitos que nos permitirão dar sentido à igualdade $0,\overline{9} = 1$.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Ordene cada conjunto de números abaixo, do menor para o maior:

   (a) $\frac{23}{9}$; $3,6$; $\frac{17}{6}$

   (b) $\sqrt{3}$; $1,732$; $1,733$

   (c) $-\frac{5}{12}$; $-\frac{12}{4}$; $-\frac{11}{3}$

   (d) $-\frac{3}{2}$; $\sqrt{4}$; $\sqrt[3]{-8}$

   (e) $1\frac{3}{5}$; $1,4$; $\frac{4}{3}$; $\frac{8}{5}$; $1,333$; $1,3334$

2. Dê exemplos de:

   (a) oito números racionais entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$

   (b) uma infinidade de racionais entre $\frac{1}{3}$ e$\frac{2}{3}$

   (c) uma infinidade de racionais entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$

   (d) uma infinidade de irracionais entre 1 e 2

3. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

   (a) Se um número é irracional, então sua expansão decimal não é finita.

   (b) Se um número real tem expansão decimal não finita, então é irracional.

   (c) Se um número é racional, então sua expansão decimal é finita.

   (d) Se um número real tem expansão decimal finita, então é um número racional.

4. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

   (a) Se x e y são números racionais, então $x + y$ *é* racional.

   (b) Se $x + y$ é racional, então x *e* y são números racionais.

   (c) Se x é um número racional e y é um número irracional, então $x + y$ é irracional.

   (d) Se x e y são números racionais, então xy é racional.

   (e) Se xy é racional, então x *e* y são números racionais.

   (f) Se x é um racional não nulo e y é um irracional, então xy é irracional.

5. Determine os três primeiros dígitos da parte decimal da expansão de

$\sqrt{5}$.

6. Ache um truncamento da expansão decimal de $\sqrt[3]{9}$ que seja uma aproximação desse número com erro menor do que 10^{-2}.
7. Calcule uma aproximação de $\sqrt{7}$ com erro menor do que 10^{-3}.
8. Suponha que a é uma aproximação para $\sqrt{3}$ com erro menor do que $\frac{1}{2}$ 10^{-3} e que b é uma aproximação de $\sqrt{7}$ com erro menor do que $\frac{1}{2}10^{-3}$. Mostre que:
   (a) $(a + b)$ é uma aproximação de $(\sqrt{3} + \sqrt{7})$ com erro menor do que 10^{-3}.
   (b) $(a - b)$ *é* uma aproximação de $(\sqrt{3} - \sqrt{7})$ com erro menor do que 10^{-3}.
9. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:
   (a) Se b é uma aproximação de $\sqrt{2}$ com erro menor do que 10^{-1} , então b é uma aproximação de $\sqrt{2}$ com erro menor do que 1.
   (b) Se b é uma aproximação de $\sqrt{2}$ com erro menor do que 1, então b é uma aproximação de $\sqrt{2}$ com erro menor do que 10^{-} .
   (c) Se $1{,}4 < b < 1{,}5$, então b é uma aproximação de $\sqrt{2}$ com erro menor do que 10^{-1}.
10. Considere $x = 2,\overline{7}$. Decida qual das afirmações abaixo verdadeira:
    (a) 2, 73 é uma aproximação para x com erro menor do que 0, 04.
    (b) 2, 78 é o truncamento de x na segunda casa decimal.
    (c) 2, 777 é uma aproximação para x com erro menor do que 10^{-3}
    (d) Nenhuma das respostas anteriores é verdadeira.
11. Considere $x = 3,\overline{6}$.
    (a) E correto afirmar que 3, 65 é uma aproximação para a com erro inferior a 10^{-2}?
    (b) Calcule uma representação racional para a (ou seja, escreva $a = \frac{p}{q}$ com p e q inteiros) e confira sua resposta do item (a).
12. Considere $a = \frac{17}{3}$.. Decida quais das afirmações abaixo são verdadeiras:
    (a) $x = 5{,}667$ é uma aproximação para a com erro menor do que 10^{-2}.
    (b) $x = 5{,}667$ é expansão decimal de a na terceira casa decimal.

(c) Se $|x - a| < 10^{-2}$ então $x = 5,66$.

(d) $x = 5,66$ é o truncamento da expansão decimal de a na segunda casa decimal.

13. Considere $a = 2{,}181981\ldots$. Decida quais das afirmações abaixo são verdadeiras:

(a) $x = 2{,}18$ é uma aproximação para a com erro menor do que 10^{-2} .

(b) Se $2{,}179 \leq x < 2{,}182$, então x é uma aproximação para a com erro menor do que 10^{-2}.

(c) Se x é uma aproximação para a com erro menor do que 10^{-2} , então $2{,}179 \leq x < 2{,}182$.

(d) $x = 2{,}181$ é o truncamento da expansão decimal de a na terceira casa decimal.

(e) $x = 2,181$ é o truncamento da expansão decimal de a na segunda casa decimal.

14. Dados dois números reais $a = 2{,}122001\ldots$ e $b = 2{,}1220010\ldots$, quais das afirmações abaixo podemos garantir estarem corretas?

(a) $a = b$.

(b) $a > b$.

(c) $|a - b| < 10^{-6}$.

15. Dados dois números reais $a = 2{,}122001\ldots$ e $b = 2{,}122003\ldots$, quais das afirmações abaixo podemos garantir estarem corretas?

(a) $b - a = 0,000002$.

(b) $|a - b| < 10^{-4}$.

(c) $a < b$.

16. Dê quatro números reais que sejam aproximações para $3,578947855\ldots$ com erro menor do que 10^{-3}.

17. Calcule:

(a) $\sqrt{2} + 1,73\overline{3}$ com erro menor do que 10^{-2}

(b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ com erro menor do que 10^{-2}

18. Sabendo que $a \in (1,235; 1,237)$, ache uma aproximação b para a com erro inferior a 10^{-3}. Pode-se concluir que b é o truncamento da expansão decimal de a na terceira casa decimal?

19. Decida se a proposição abaixo é falsa ou verdadeira:

Se $|x - 3,\overline{8}| < 10^{-2}$, então o truncamento de x na segunda casa decimal é 3,

5. Exercícios suplementares

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Represente geometricamente os conjuntos abaixo:

   (a) $(-2, \frac{1}{2}] \cup [0, 3]$

   (b) $(2, 5) \cup [1, 9)$

   (c) $[-1, \frac{3}{2}) \cap (0, \frac{1}{2}]$

   (d) $[-3, -1] \cap [2, 4]$

   (e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq \frac{5}{4} \text{ ou } -1 < x \leq \frac{9}{5}\}$

   (f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \text{ e } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{16}{7}\}$

   (g) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 6 > 0 \text{ ou } 2x + 1 < 0\}$

   (h) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 6 > 0 \text{ e } 2x + 1 < 0\}$

   (i) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| \leq 3 \text{ e } |x - 1| > 1\}$

   (j) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 3 \text{ ou } |x - 3| > 2\}$

2. Em cada item abaixo, determine o conjunto dos números reais x que satisfazem cada equação ou desigualdade.

(a) $-\frac{3}{2} < \frac{2x}{5} - 8 \leq 10$

(b) $2 - 4x < 8 + \frac{5x}{3}$

(c) $x^3 > x^2$

(d) $x^4 \geq x^3$

(e) $x^3 < 14x - 5x^2$

(f) $(4x-3)(2-x) \geq 0$

(g) $(x-2)^3 \geq 0$

(h) $(2x-1)^2(3x+2) = 0$

(i) $\dfrac{x+3}{2x-3} \leq 3$

(j) $\dfrac{x^2+1}{x+3} \geq 0$

(k) $\dfrac{6x-8}{3x-1} < 8x+3$

(l) $\dfrac{(x-1)^3(x-2)^2}{(x+3)(3x+7)^4} \leq 0$

(m) $\dfrac{(x+2)^7(2x-8)^5(3x-10)^{100}}{x^2-4x+4} = 0$

3. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

   (a) Se $x > 1$ ou $|x + 1| \leq 3$, então $x > 0$.
   (b) Se $x \geq 1$ e $|x - 1| < 1$, então $1 \leq x \leq 2$.
   (c) Se $|x + 2| \leq 2$ e $|x| > 1$, então $x > -4$.
   (d) Se $|x + \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}$ e $|x + 2| \geq 1$, então $|x + 1| \geq 1$.
   (e) Se $|x + \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}$ *e* $|x + 2| \geq 1$, então $|x + 1| \geq 1$ ou $x = -1$.

4. Considerando $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$, encontre o erro no seguinte desenvolvimento: Se

$$x = y,$$

então, multiplicando ambos os membros por x obtemos:

$$x^2 = xy.$$

Subtraindo y^2 em cada membro temos:

$$x^2 - y^2 = xy - y^2$$
$$(x - y)(x + y) = (x - y)y.$$

Dividindo por $x - y$, obtemos:

$$x + y = y,$$

mas $x = y$, logo:

$$y + y = y \Longrightarrow 2y = y.$$

E como $y \neq 0$, obtemos que:

$$2 = 1.$$

5. Mostre que as proposições abaixo são verdadeiras:

   (a) Se $\begin{cases} 3,2 < x < 3,4, \\ 0,8 < y < 0,9, \end{cases}$ então $1,4 \leq x - 2y \leq 1,8.$

   (b) Se $\begin{cases} 5,1 \leq x \leq 5,2, \\ 1,3 \leq y \leq 1,4, \end{cases}$ então $\frac{11,5}{3,9} \leq \frac{2x+y}{x-y} \leq \frac{11,8}{3,7}.$

6. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

(a) Se $\frac{x-1}{x+1} \leq 0$, então $\frac{x+2}{x-3} < 0$.

(b) Se $\frac{3x-2}{x^2-4x-5} > 0$, então $\frac{x+1}{x-5} \geq 0$.

(c) Se $\frac{(x^2-8x+12)(x-3)}{(x-7)(x-2)} = 0$, então $\frac{(x^2-9x+18)(x-5)}{x+1} = 0$.

(d) Se $x \geq 0$ e $\sqrt{\sqrt{x}} - x = 0$, então $x = 0$ ou $x = 1$..

(e) Se $|x| < 1$, então $x^2 < x < 1$..

(f) Se $0 < x < 1$, então $0 < x^3 < x^2 < x < 1$..

(g) Se $(x+y)^2 = x^2 + y^2$, então $x = 0$ ou $y = 0$..

(h) Se $(x+y)^3 = x^3 + y^3$, então $x = 0$ ou $y = 0$ ou $x = -y$..

7. Determine o valor de a para o qual as soluções da desigualdade $\frac{2x+5}{x^2+x-a}$ são os números do conjunto $(-\infty, -3) \cup [-\frac{5}{2}, 2)$.

8. Para quais valores de a a equação $\frac{(x-\pi)(3x-a)}{x^2-8} = 0$ tem uma única solução?

9. Determine os valores de a e b para que as soluções da desigualdade $\frac{x-a}{x-b} \leq 0$ sejam os números do conjunto (2, 3].

10. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

    (a) Se $x^2 = y^2$, então $x = y$ ou $x = -y$.

    (b) Se $x < y$, então $x^2 < y^2$.

11. Demonstre que a proposição abaixo é verdadeira:

Se $x > 0$, então $\sqrt{3}$ pertence ao intervalo cujos extremos são x e $\frac{3}{x}$.

12. Demonstre que a proposição abaixo é verdadeira:

$$\text{Se } 0 < x < y, \text{ então } x < \sqrt{xy} < y.$$

13. Resolva as desigualdades ou equações abaixo utilizando a interpretação geométrica de valor absoluto:

    (a) $|x| \leq 2$.

    (b) $|x + 4| < 2$.

    (c) $|2x - 5| < 6$.

(d) $|4x + 8| \geq 2$.

(e) $|x + 4| > |x - 6|$.

(f) $|x - 2| = |x + 5|$.

(g) $|x + 4| + |x + 2| < 9$.

(h) $|x + 1| + |x + 3| > 6$

(i) $|3x - 6| + |3x + 3| \leq 15$.

14. Resolva algebricamente as desigualdades ou equações do exercício anterior.

15. Em cada item abaixo, dê uma desigualdade da forma $|x - a| > b$ cuja solução seja o conjunto dado:

(a) $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

(b) $(-\infty, -2) \cup (8, \infty)$.

(c) $(-\infty, -6) \cup (-30, \infty)$.

(d) $(-\infty, -\pi) \cup (-\sqrt{3}, \infty)$.

16. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

(a) Se $|x + 8| > |x - 2|$, então $x \geq -5$.

(b) Se $|x + 2| + |x + 5| = 3$, então $-6 \leq x \leq -1$.

(c) Se $-6 \leq x \leq -1$, então $|x + 2| + |x + 5| = 3$.

(d) Se $|x - 7| + |x| \geq 11$, então $|x - 2| + |x - 4| > 8$.

(e) Se $|x| + |x - 3| < 2$, então $|x - 2| > |x - 1|$.

17. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

(a) Sejam x *e* y dois números reais. Se a distância de x a 3 é menor do que 4 e a distância de y a 5 é menor do que 6, então a distância de $(2x + y)$ a 11 é menor do que 10.

(b) Se a distância de x a 1 é menor do que 2 ou a distância de x a 6 é maior do que 4, então $-1 < x < 10$.

(c) Se a distância de x a 5 é maior do que 1 e a distância de x a 7 é maior do que 2, então $x > 7$.

18. Encontre valores para a e 6 de maneira que os números do intervalo (–1, 5) sejam as soluções da inequação

$$|2x - a| < b.$$

19. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

    (a) Se 2 é uma aproximação para x com erro menor do que 1, então $\frac{3}{2}$ é uma aproximação para x com erro menor do que $\frac{3}{2}$.

    (b) Se 1 é uma aproximação para x com erro menor do que 1, então $\frac{1}{2}$ é uma aproximação para X com erro menor do que $\frac{1}{2}$.

    (c) Se 4 é uma aproximação para x com erro menor do que 10^{-2}, então $x > 4-10^{-2}$.

    (d) Se $x \in (4, 6)$, então 5 é uma aproximação para X com erro menor do que 1.

20. Dê exemplos de:

    (a) dois números reais negativos para os quais 0 é uma aproximação com erro menor do que 0,1.

    (b) uma infinidade de números racionais para os quais 12 é uma aproximação com erro menor do que 0,1.

    (c) uma infinidade de números irracionais para os quais 1 é uma aproximação com erro menor do que 1.

21. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

    (a) Se x e y são números irracionais, então $x + y$ *é* irracional.

    (b) Se $x + y$ é irracional, então x *e* y são números irracionais.

    (c) Se x e y são números irracionais, então xy é irracional.

    (d) Se xy é irracional, então x *e* y são números irracionais.

22. Dê exemplos de:

    (a) uma infinidade de racionais entre $\frac{17}{3}$ e $\frac{41}{5}$..

    (b) uma infinidade de racionais entre $-\sqrt{3}$ e -1.

    (c) uma infinidade de irracionais entre 2 e 3.

23. Determine o primeiro dígito da parte decimal da expansão de $\sqrt{10}$.

24. Suponha que a é uma aproximação para $\sqrt{5}$ com erro menor do que $\frac{10^{-4}}{2}$ *e* que b é uma aproximação de $\sqrt{6}$ com erro menor do que $\frac{10^{-4}}{2}$. Mostre que $\frac{a+b}{2}$ é uma aproximação de $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{2}$ menor do que $\frac{10^{-4}}{2}$.

25. Considere $a = \frac{15}{7}$. Decida quais afirmações abaixo são verdadeiras:

    (a) $x = 2{,}143$ é uma aproximação para a com erro menor do que 10^{-3}

.

(b) $x = 2{,}143$ é o truncamento da expansão decimal de a na terceira casa decimal.

(c) $x = 2{,}142$ é o truncamento da expansão decimal de a na terceira casa decimal.

(d) Se x é uma aproximação com erro menor do que 10^{-4} para a, então *x é o* truncamento da expansão decimal de a na quarta casa decimal.

26. Considere $a = 3,\ 121122111\ldots$. Decida quais afirmações abaixo são verdadeiras:

    (a) $x = 3{,}1298$ é uma aproximação para a com erro menor do que 10^{-2}.

    (b) $x = 3{,}1211$ é o truncamento da expansão decimal de a na quarta casa decimal.

    (c) $x = \frac{31211}{10000}$

    (d) Se $3{,}12 \leq x < 3,\ 121$, então x é uma aproximação para a com erro menor do que $0,\ 002$.

27. Dados dois números reais $a = 5,\ 18182\ldots$ e $b = 5{,}181820\ldots$, quais das afirmações abaixo podemos garantir estarem corretas?

    (a) $a < b$.

    (b) $a > b$.

    (c) $a = b$.

    (d) nenhuma das afirmações anteriores.

28. Dê quatro números reais que sejam aproximações de $-4,\ 27\ldots$ com erro menor do que 10^{-2}.

29. Calcule:

    (a) $0,\overline{7} + 1,\overline{8}$ com erro menor do que 10^{-2}.

    (b) $0,\overline{8} + 2,\ 69\overline{6}$ com erro menor do que 10^{-3}.

    (c) $0,\overline{53} - 0,\overline{486}$ com erro menor do que 10^{-2} .

    (d) $2,\ 41834\ldots - 1,\ 98965\ldots$ com erro menor do que 10^{-2} .

30. Se $x = 1,\overline{7} - 1{,}4298\ldots$, decida quais das afirmações abaixo podemos garantir estarem corretas:

    (a) $1,\ 77776 - 1,\ 4299 \leq x \leq 1,\ 77778 - 1,\ 4298$.

    (b) $a = 0,\ 35$ é o truncamento da expansão decimal de x na segunda casa decimal.

(c) $a = 0,347$ é o truncamento da expansão decimal de x na terceira casa decimal.

(d) $a = 0,348$ é uma aproximação para x com erro menor do que 10^{-3}.

31. Se $x = 1,\overline{7} - 1{,}4297\ldots$, decida quais das afirmações abaixo podemos garantir estarem corretas:

(a) $a = 0,347$ é o truncamento da expansão decimal de x na terceira casa decimal.

(b) $a = 0,348$ é o truncamento da expansão decimal de x na terceira casa decimal.

(c) $a = 0,347$ é uma aproximação para x com erro menor do que 10^{-3}.

(d) $a = 0,348$ é uma aproximação para x com erro menor do que 10^{-3}.

32. Decida se a proposição abaixo é falsa ou verdadeira:

Se $|x - 3,\overline{8}| < 10^{-3}$, então o truncamento de x na segunda casa decimal é $3,88$.

CAPÍTULO 3

Sequências de Números Reais

Os conceitos de sequência de números reais e de sequência convergente, que introduzimos neste capítulo, são ferramentas com as quais podemos modelar matematicamente processos discretos mas infinitos. Decorre daí a importância do tema sequências de números reais ser tratado num curso de cálculo. Um exemplo simples de um processo discreto infinito é a construção da representação decimal de um número real, na qual os algarismos das casas decimais são obtidos sequencialmente. Como veremos, esse processo corresponde à construção de uma determinada sequência convergente.

O conceito de limite pode ser considerado um dos conceitos mais difíceis dentre os que estabelecem a fronteira da matemática elementar. Assim, é razoável esperarmos encontrar dificuldades não só em compreender mas também em apresentar esse conceito. Nossas escolhas para a apresentação do tema sequências de números reais foram feitas com o objetivo de conduzir à compreensão dos conceitos de sequência e de limite mais por meio de exemplos e da utilização de teoremas sobre convergência do que do domínio formal das definições.

A escolha dos exercícios propostos também foi feita mais com o objetivo de ajudar na compreensão dos conceitos apresentados do que em proporcionar um treinamento de cálculo de limites.

As demonstrações de alguns teoremas (indicados pelo o sinal *) são apresentadas no apêndice do capítulo.

1. Sequências e convergência

Como sabemos, todo número real tem uma representação decimal, mas vimos também que nem todos os números possuem uma representação finita. No entanto, ao mesmo tempo que necessitamos de todos os números reais (o exemplo mais simples disso é a medida de comprimentos), do ponto de vista prático só sabemos fazer cálculos numéricos com os decimais exatos. Daí a importância dos conceitos de aproximação e erro e da propriedade fundamental de que podemos obter aproximações por decimais exatos tão boas quanto necessário para qualquer número real.

Por outro lado, frases como *todo número real pode ser tão bem aproximado quanto necessário por decimais exatos* envolvem um processo infinito que não está nada evidente. Para darmos maior precisão a frases como essa, necessitamos introduzir os conceitos de sequência e limite de sequências de números reais.

O conceito de sequências

Definição: Uma *sequência* de números reais é um lista infinita de números ordenados pelos naturais, isto é, uma sequência nos dá um número real que é o primeiro termo da sequência, um número que é o 2° termo da sequência e assim por diante.

Exemplos

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

é uma sequência cujo primeiro termo é o número 1, o segundo é $\frac{1}{2}$, *o* terceiro é $\frac{1}{3}$ e em geral o *n*-ésimo termo é 0 número$\frac{1}{n}$.

2. 1,2, 3,…, *n,* …

é uma sequência cujo *n*-ésimo termo é 0 número *n*, para $n \geq 1$.

3. 1,0, 1,0, 1,0, … ,1,0, 1, …

é uma sequência cujo *n*-ésimo termo é 1 se *n* é ímpar, e 0 se *n* é par.

4. 2, 2, 2,…,2,…

é uma sequência tal que qualquer termo é 0 número 2.

Para denotarmos uma sequência, usamos a notação (a_n) (ou simplesmente a_n) onde, para cada n, a_n designa 0 número que é 0 n-ésimo termo da sequência. Nos referiremos ao inteiro n como 0 índice do termo a_n. Assim, no exemplo 1, acima, temos a sequência (a_n) com

$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = \frac{1}{2},$$
$$a_3 = \frac{1}{3},$$

e, em geral,

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

No exemplo **2**, temos a sequência (bn) com

$$b1 = 1,$$
$$b2 = 2,$$
$$b3 = 3,$$

e, em geral,

$$b_n = n, \quad n \geq 1.$$

No exemplo **3** é dada a sequência, x_n definida por: x_n é 1 se o índice n é um número ímpar, e 0 se n é par. Essa sequência também pode ser definida pela fórmula

$$x_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2} \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

No exemplo 4, é dada a sequência $y_n = 2$, para $n \geq 1$, isto é, todos os termos dessa sequência dão o mesmo número, 2. Sequências assim, isto é, tal que todos os termos dão um mesmo número, são chamadas *sequências constantes*.

As sequências que damos a seguir são exemplos de uma classe muito importante de sequências: são as sequências definidas por uma fórmula de recorrência ou iteração.

Exemplos

5. Seja (u_n) a sequência definida pela fórmula:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2/u_n}{2} \quad \text{com} \quad u_0 = 1.$$

Fazendo $n = 0$, essa fórmula nos dá:

$$u_1 = \frac{u_0 + 2/u_0}{2}.$$

Substituindo, portanto, u_0 pelo valor dado 1, obtemos $u_1 = \frac{3}{2}$. Fazendo agora $n = 1$ na fórmula, obtemos:

$$u_2 = \frac{u_1 + 2/u_1}{2}.$$

Como já calculamos u_1, podemos substituí-lo pelo seu valor $\frac{3}{2}$, obtendo $u_2 = \frac{17}{12}$. Repetindo esse procedimento obtemos u_3 e assim por diante. Ou seja, uma vez conhecido o valor de u_n, podemos obter o valor do termo seguinte, u_{n+1}, usando a fórmula de recorrência e o valor já calculado de u_n.

6. Seja (x_n) a sequência dada por:

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2} \quad \text{com} \quad x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_2 = 3.$$

Como x_1 e x_2 já são dados, queremos calcular x_3. Para isso, vemos que como $3 = 1 + 2$, devemos fazer $n = 1$ na fórmula que define a sequência para obter

$$x_3 = \frac{x_2 + x_1}{2}.$$

Substituindo então x_1 e x_2 pelos valores dados, 1 e 3 respectivamente, obtemos $x_3 = 2$. Fazendo agora $n = 2$, temos:

$$x_4 = \frac{x_3 + x_2}{2}.$$

Como já conhecemos os valores de x_2 e x_3, essa igualdade nos dá $x_4 = \frac{5}{4}$. Em geral, neste exemplo, conhecidos os valores de dois termos consecutivos, x_n e x_{n+1}, a fórmula de recorrência nos fornece o termo seguinte, x_{n+2}.

7. Dado um número real x, seja s_n a sequência dada por:

$$s_{n+1} = s_n + x^{n+1} \text{ com } s_0 = 1.$$

Temos então que

$$s_1 = 1 + x,$$
$$s_2 = 1 + x + x^2,$$
$$s_3 = 1 + x + x^2 + x^3,$$

e, em geral,

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n.$$

Observe que no exemplo **7**, acima, cada s_n *é* a soma dos n termos da progressão geométrica de razão x. De fato, esse é um exemplo de um tipo de sequência que chamamos de *série*. Em geral, a partir de uma sequência qualquer, a_n, podemos sempre definir uma série, isto é, uma nova sequência, s_n, como a do exemplo anterior. Definimos

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

ou usando a notação de somatório

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

É usual adotarmos a notação $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ para nos referirmos à sequência $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.
Também, por simplicidade, muitas vezes é conveniente consideramos séries com k assumindo também o valor 0. Por exemplo, a série

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n.$$

pode ser descrita mais facilmente com a notação

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

Exemplos

8. Se a_n é a sequência $a_n = \frac{1}{n}$, a sequência $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ é a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2}, \\ s_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

e, em geral,

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

9. Se $a_n = \frac{1}{n^2}$, a série $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ é dada por

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2},$$

donde,

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2^2}, \\ s_3 &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}, \end{aligned}$$

e, em geral,

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

10. Seja b_n a sequência definida por:

$$\begin{aligned} b_1 &= 0,3, \\ b_2 &= 0,33, \\ b_3 &= 0,333, \\ &\vdots \\ b_n &= 0,\underbrace{3...3}_{n\ 3's}. \end{aligned}$$

Por exemplo, $b_{12} = 0,333333333333$. Agora, observe que se a_n é a sequência $a_n = \dfrac{3}{10^n}$, entao,

$$\begin{aligned} b_1 &= 0,3 = \frac{3}{10} = a_1, \\ b_2 &= 0,33 = 0,3 + 0,03 = a_1 + a_2, \\ b_3 &= 0,333 = a_1 + a_2 + a_3, \end{aligned}$$

e, em geral,

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

isto é, a sequência b_n é a série $b_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{3}{10^k}$.

Sequências convergentes

Vamos estudar um tipo especial de sequências que são chamadas *sequências convergentes*. Provavelmente já é familiar a frase

"$\frac{1}{n}$ *tende a zero quando n tende a infinito*"

com o significado de que

"os números $\frac{1}{n}$ ficam arbitrariamente próximos do zero quando n fica suficientemente grande".

Para darmos maior precisão a esta frase, vamos explicitar uma propriedade da sequência $a_n = \frac{1}{n}, \ \ n \geq 1.$.

Primeiro, observe que dado 0 inteiro positivo 1, podemos encontrar um outro inteiro, que denotaremos por no, com a seguinte propriedade:

$$\text{se} \quad n > n_0, \quad \text{então} \quad \frac{1}{n} < 10^{-1}.$$

De fato, tomando como n_0 o inteiro 10, por exemplo, temos que se n é um número inteiro maior que n_0, então 0 número $\frac{1}{n}$ é menor que $\frac{1}{n_0} = \frac{1}{10} = 10^{-1}$, isto é,

$$\text{se} \quad n > 10, \quad \text{então} \quad \frac{1}{n} < 10^{-1}.$$

Ou, em outras palavras, se n é um inteiro maior que o inteiro n_0= 10, então a distância do número $\frac{1}{n}$ ao número zero é menor que 10^{-1}, ou seja,

$$\text{se} \quad n > n_0, \quad \text{então} \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < 10^{-1}.$$

Observe que qualquer número maior do que 10 também serviria como n_0.

Analogamente, dado o inteiro 2, também podemos encontrar um inteiro positivo que, para simplificar a notação, também chamaremos de *no*, com a propriedade

$$\text{se} \quad n > n_0, \quad \text{então} \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < 10^{-2}.$$

Por exemplo, podemos escolher n_0 = 100 (ou algum inteiro maior do que 100), já que se n > 100, então $\frac{1}{n} < \frac{1}{100} = 10^{-2}$.. Ou seja, temos que

$$\text{se} \quad n > 100, \quad \text{então} \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < 10^{-2}.$$

Observamos agora que o que afirmamos para os inteiros 1 e 2 podemos também afirmar para qualquer inteiro positivo K, isto é,

dado um inteiro positivo K, podemos encontrar um inteiro positivo *denotado por no, para o qual a seguinte propriedade é válida:*

$$\text{se} \quad n > n_0, \quad \text{então} \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < 10^{-K}.$$

De fato, como fizemos no caso dos inteiros 1 e 2, para cada inteiro positivo K, basta escolhermos $n_0 = 10^K$ (ou algum inteiro maior do que 10^k).

Concluímos, assim, que a sequência $\frac{1}{n}$ possui a seguinte propriedade:

dado um inteiro positivo K, podemos encontrar um índice n_0*, tal que se n é um índice maior que o índice no, então a distância do número* $\frac{1}{n}$ *ao zero é menor do que* 10^{-K}.

Esta é a propriedade da sequência $\frac{1}{n}$ que é descrita mais informalmente pela frase acima,

os números $\frac{1}{n}$ *ficam arbitrariamente próximos de zero quando n fica suficientemente grande*,

e, mais simplesmente, pela frase, *a sequência* $\frac{1}{n}$ *tende* (*ou converge*) *a zero*. Vamos usar essa propriedade para definir convergência de sequências:

Definição: Dizemos que uma sequência a_n *converge ao número real a* quando *n tende a infinito*, se para cada número inteiro positivo K pudermos encontrar um índice *no* tal que

$$\text{se} \quad n > n_0, \quad \text{então} \quad |a_n - a| < 10^{-K}.$$

Se a_n é uma sequência que converge ao número a quando n tende ao infinito, dizemos também que a_n tende ao número a, quando n tende ao infinito.

Informalmente dizemos que a_n converge ao número a se os números a_n ficam arbitrariamente próximos de a quando n fica arbitrariamente grande. Em outras palavras, a_n converge ao número a quando a distância dos números a_n ao número a tende a zero, isto é,

Teorema 1.1: *Se* a_n *é uma sequência, então* a_n *converge para o número real a se e* *somente se a sequência* $d_n = |a_n - a|$ *, para* $n \geq 1$*, converge a zero.*

Observe que, na definição acima, o papel do inteiro positivo K é o de estabelecer uma tolerância para distâncias: a tolerância dada pelo número positivo 10^{-k}. Isto significa que, quando dizemos

"para cada inteiro positivo K…",

estamos querendo dizer

"dada uma tolerância 10^{-K}…".

O fato importante aqui é que à medida que damos valores para K cada vez maiores, os números 10^{-K} ficam cada vez menores e, portanto, estamos falando de distâncias (ou tolerâncias) arbitrariamente pequenas. Assim podemos, mais informalmente, dizer que:

uma sequência a_n *converge ao número real a se, por menor que seja a tolerância estabelecida, pudermos encontrar um índice no a partir do qual as distâncias entre os valores* a_n *da sequência e o número a são menores do que a tolerância estabelecida.*

Antes de apresentarmos alguns exemplos, chamamos a atenção para o fato de que, em geral, o índice n_0 depende do número positivo K (ou, mais precisamente, da tolerância 10^{-K}) e da sequência a_n. Isto é, em geral, valores maiores de K exigem valores maiores para *rio*, e dadas duas sequências convergentes, a_n e b_n, e um mesmo inteiro K, um certo valor para n_0 pode servir para a_n enquanto que b_n pode exigir um valor maior para n_o. Por exemplo, consideremos $a_n = 10^{-n}$ e $b_n = \frac{1}{n}$: dado um inteiro positivo K, para a sequência a_n podemos escolher $n_0 = K$, já que se $n > K$, então $10^{-n} < 10^{-K}$ e, portanto,

$$\text{se } n > K \text{ então } |a_n - 0| < 10^{-K}.$$

Mas, no caso de b_n, para o mesmo K necessitamos um valor maior para n_o, pois o índice $n = K + 1$ é maior do que K, mas $\frac{1}{n} = \frac{1}{K+1} > 10^{-K}$. É fácil verificar que para a sequência $\frac{1}{n}$ o menor valor que podemos escolher para *no* é 10^K.

Exemplos

11. Seja b_n a sequência definida por

$$\begin{aligned} b_1 &= 0,3, \\ b_2 &= 0,33, \\ b_3 &= 0,333, \\ &\vdots \\ b_n &= 0,\underbrace{3...3}_{n\ 3's}, \end{aligned}$$

que é a sequência do exemplo **10**. Como sabemos, para cada n, 0 número b_n coincide com a expansão decimal do número $\frac{1}{3}$ até a n-ésima casa decimal, isto é, b_n é 0 truncamento de $\frac{1}{3}$ na n-ésima casa decimal. Portanto, pela construção da expansão decimal, temos que para cada n

$$\left| b_n - \frac{1}{3} \right| < 10^{-n}.$$

Logo, se K é um inteiro positivo qualquer, e tomamos $n_0 = K$, temos que,

se $n > n_0$, então $10^{-n} < 10^{-K}$,

e, portanto, dado um inteiro positivo K, podemos encontrar um índice n_0 (basta tomar $n_0 = K$) tal que:

$$\text{se} \quad n > n_0, \quad \text{então} \quad \left| b_n - \frac{1}{3} \right| < 10^{-K}.$$

Isto é, provamos que a sequência b_n converge ao número $\frac{1}{3}$.

12. Seja a_n a sequência dada por

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0,9,\\
a_2 &= 0,99,\\
a_3 &= 0,999,\\
&\vdots\\
a_n &= 0,\underbrace{9\ldots9}_{n\ 9's},
\end{aligned}
$$

vamos verificar que a_n converge a 1 quando n tende a infinito. Temos que

$$|a_n - 1| = 10^{-n}, \text{ para } n \geq 1,$$

e, portanto, se K é um inteiro positivo dado e tomamos $n_0 = K + 1$, temos que se $n > n_0$, então,

$$10^n > 10^{n_0} > 10^K,$$

donde,

$$10^{-n} < 10^{-n_0} < 10^{-K},$$

e, portanto,

$$|a_n - 1| = 10^{-n} < 10^{-K} \text{ para } n > n_0 = K + 1.$$

Ou seja, dado um inteiro positivo K, se tomamos $n_0 = K + 1$, temos que:

$$\text{se } n > n_0, \text{ então } |a_n - 1| < 10^{-K}.$$

Isto é, provamos que a_n converge a 1 (esta é a razão pela qual ouvimos dizer que $1 = 0,9\overline{9}$

Como vimos no exemplo **11**, a sequência b_n converge ao número $\frac{1}{3}$ e, por outro lado, pela identificação de um número com sua representação decimal, vale a igualdade $\frac{1}{3} = 0,3\overline{3}$. Em analogia (e apenas em analogia, pois a expansão decimal do numero 1 é $1,\overline{0}$, ou simplesmente 1, e não $0,\overline{9}$) a identificações como essa e considerando que a sequência a_n definida acima converge ao número 1, admitimos dizer que $1 = 0,9\overline{9}$.

13. Sei $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, podemos mostrar que $x_n \to 0$.

De fato,

$$|x_n - 0| = |x_n| = \frac{|-1|^n}{|n|} = \frac{1}{n},$$

e, como já sabemos que $\frac{1}{n} \to 0$, isto é, $|x_n - 0| \to 0$, podemos usar o

Teorema 1.1 para concluir que $\dfrac{(-1)^n}{n} \to 0.$

Notação e convenções

Antes de prosseguirmos, é conveniente estabelecermos uma notação e convenções cujo uso permitirá a simplificação dos enunciados dos resultados que serão apresentados.

- Convencionamos que a frase

"a_n *converge a* a" subentende a frase "quando n tende a infinito".

- Se existe um número a tal que a_n converge a a, dizemos que

a_n é uma *sequência convergente* e que o número a é o *limite* de a_n.

Para dizermos que uma sequência a_n converge a um número a, podemos usar qualquer uma das notações a seguir:

- $a_n \to a$ (a_n converge a a ou a_n tende a a),
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (o limite de a_n quando n tende a infinito é a),
- $\lim a_n = a$ (o limite de a_n quando n tende a infinito é a).

- Se uma sequência não converge a nenhum número real, dizemos simplesmente que a sequência não converge ou que não é convergente.

- Com o objetivo de simplificação, convencionamos que a afirmação lim $a_n = a$ tem o significado de "a_n *é uma sequência convergente e o seu limite é* a".

Exemplos

14. O exemplo mais simples de sequência convergente é uma sequência constante:

> se c é um número real dado e $a_n = c$, para $n \geq 1$, então $a_n \to c$, pois $|a_n - c| = 0$ e, portanto, é sempre menor que qualquer tolerância dada, qualquer que seja o índice n.

15. A sequência $y_n = 10^{-n}$, $n \geq 1$, converge a 0 quando n tende a infinito.

16. A sequência $z_n = \frac{1}{n^2}$ converge a 0.

De fato, se K é um inteiro positivo, podemos tomar, por exemplo, $n_0 = 10^K$, pois neste caso se $n > n_0$, então:

$$n^2 > n > 10^K,$$

e, portanto,

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} < 10^{-K}.$$

17. As sequências $a_n = n$ e $x_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$, para $n \geq 1$, não convergem.

O argumento que usamos para mostrar no exemplo **16** que a sequência $\frac{1}{n^2}$ converge a 0 é o caso particular de um resultado geral que usamos com frequência:

Lema 1.2*: *Se* $|x_n| \leq a_n$ *e* $a_n \to 0$, *então* $x_n \to 0$.

Em particular, deste resultado decorre que:

Teorema 1.3*: *Se* $\lim b_n = b$, *então* $\lim |b_n| = |b|$.

Observe que no enunciado desse teorema está implícito que se uma sequência a_n é convergente, então a sequência $b_n = |a_n|$ também é convergente. No entanto, sabermos que a sequência dos módulos, $|a_n|$, é convergente não é suficiente para conhecermos o comportamento de a_n. Por exemplo, se

$$a_n = (-1)^n,$$

então $|a_n| = 1$, isto é, $|a_n|$ é a sequência constante igual a 1 e, portanto, é convergente mas a_n não é convergente. Em outras palavras, a sequência $a_n = (-1)^n$ é um contraexemplo para a recíproca do Teorema 1.3 e, portanto, essa recíproca é falsa.

Mais exemplos

18. Seja $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \geq 1$. Afirmamos que $a_n \to 0$.

De fato, como $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{n}$ e já sabemos que $\frac{1}{n}$ tende a 0, podemos usar o resultado do Lema 1.2, provando então que $a_n \to 0$.

19. A sequência

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2,13509, \\
a_2 &= 2,1350099, \\
a_3 &= 2,135000999, \\
&\vdots \\
a_n &= 2,135\overbrace{0...0}^{n\ 0's}\underbrace{9...9}_{n\ 9's},
\end{aligned}$$

converge a 2,135.

De fato, para cada n o número a_n coincide com 2,135 até n + 3 dígitos decimais, logo:

$$|a_n - 2,135| < 10^{-(n+3)}, \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

Agora, como $10^{-(n+3)} < 10^{-n}$ e já sabemos que a sequência $y_n = 10^{-n}$ tende a 0, podemos usar o Lema 1.2 para concluir que a distância de a_n ao número 2,135 tende a zero. Mas isso, já sabemos, quer dizer que a_n converge a 2,135.

20. Já a sequência

$$\begin{aligned} a_1 &= 2,13519, \\ a_2 &= 2,1351199, \\ a_3 &= 2,135111999, \\ &\vdots \\ a_n &= 2,135\overbrace{1\ldots1}^{n\ 1's}\underbrace{9\ldots9}_{n\ 9's}, \end{aligned}$$

converge a $\frac{2402}{1125}$.

De fato, para cada $n \geq 1$, temos que o número a_n e o número $2,135\bar{1}$ possuem o mesmo truncamento na n-ésima casa decimal e, portanto,

$$|a_n - 2,135\bar{1}| < 10^n, \text{ para } n \geq 1.$$

Como $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n} \to 0$, podemos usar o Lema 1.2 para concluir que $|a_n - 2,135\bar{1}| \to 0$, o que é equivalente a $a_n \to 2,135\bar{1}$. O resultado se segue do fato de que $\dfrac{2402}{1125} = 2,135\bar{1}$.

21. Se a é um número real e, para cada $n \geq 1$, a_n é o truncamento da expansão decimal de a até a n-ésima casa decimal, então a_n converge a a.

De fato, sabemos que

$$|a_n - a| < 10^{-n}, \text{ para } n \geq 1.$$

Logo, podemos usar também o Lema 1.2 e o fato de que a sequência 10^{-n} converge a zero para concluir que $|a_n - a| \to 0$, donde $a_n \to a$.

22. Se a sequência s_n é a série

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

e $s_n \to s$, dizemos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ (ou simplesmente, $\sum a_n$) converge

(ou que é convergente) e que

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Assim, podemos dizer (exemplo **11**) que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{1}{3},$$

e, analogamente, como a sequência do exemplo **12** é a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k}$ (verifique), podemos também dizer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 1.$$

23. Como já fizemos com a sequência dos truncamentos da expansão decimal de $\frac{1}{3}$ (exemplo 10), podemos escrever a sequência dos truncamentos, b_n, da expansão decimal de um número positivo $0 < b < 1$, como uma série da seguinte maneira.

Para cada $n \geq 1$, denotemos por d_n o dígito da n-ésima casa decimal da expansão de b, então,

$$
\begin{aligned}
b_1 &= 0, & d_1 &= \frac{d_1}{10}, \\
b_2 &= 0, & d_1 d_2 &= \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2}, \\
b_3 &= 0, & d_1 d_2 d_3 &= \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3}, \\
&\vdots \\
b_n &= 0, & d_1 d_2 \ldots d_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{10^k}.
\end{aligned}
$$

Como já sabemos pelo exemplo **21** que $b_n \to b$, podemos dizer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{10^k} = b.$$

Em geral, se $n,\ d_1 d_2 \ldots d_k \ldots$ é a expansão de um número real positivo a, então

$$a = n + 0{,}d_1 d_2 \ldots d_k \ldots,$$

e, portanto, podemos dizer que

$$a = n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{10^k}.$$

24. A série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k + 2}{10^k}$ converge para $3{,}\overline{13}$.

Para vermos isso basta observarmos que se destacamos o termo com $k = 0$, obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k + 2}{10^k} = 3 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k + 2}{10^k}.$$

Por outro lado, se para cada $k \geq 1$, 4 é o número

$$d_k = (-1)^k + 2,$$

então $d_k = 1$ se k é par e $d_k = 3$ se k é ímpar, isto é, d_k é o dígito da k-ésima casa decimal da expansão do número $0,\overline{13}$. Pelo resultado dado acima, podemos concluir que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + 2}{10^k} = 0,\overline{13},$$

donde,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k + 2}{10^k} = 3 + 0,\overline{13} = 3,\overline{13}.$$

25. Pode se demonstrar que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ não é convergente ao passo que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ é convergente e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Usando o resultado do exemplo **21**, podemos concluir que a lista infinita 0, 9 (que chamamos um decimal formal) não é a expansão decimal de nenhum número real: de fato, se $0,\overline{9}$ fosse a expansão decimal de algum número real a, então a sequência a_n do exemplo **12**,

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0,9, \\
a_2 &= 0,99, \\
a_3 &= 0,999, \\
&\vdots \\
a_n &= 0,\underbrace{9 \ldots 9}_{n\ 9's},
\end{aligned}$$

teria que convergir ao número a. Mas já vimos que $a_n \to 1$ e a expansão decimal do número 1 é $1,0\overline{0}$ (ou simplesmente 1) e não $0,\overline{9}$.

Em geral, um algoritmo que permite calcular aproximações tão boas quanto desejado de um número a nada mais é do que a construção de uma sequência (a_n) que converge ao número a.

De fato, para cada inteiro positivo n, podemos usar o algoritmo para calcular uma aproximação do número a, que chamamos de a_n, com erro menor do que 10^{-n}, ou seja,

$$|a_n - a| < 10^{-n}, \text{ para } n \geq 1.$$

Pelo Lema 1.2, como $10^{-n} \to 0$, temos que a_n converge a a.

Reciprocamente, se uma sequência (a_n) converge a a, então (a_n) fornece aproximações de a tão boas quanto quisermos.

Para vermos isso, observamos primeiro que se e é um número positivo qualquer, então podemos escolher um inteiro positivo K, tal que $10^{-K} \leq$ e.

De fato, se e $> 10^{-1}$ qualquer inteiro K serve; caso contrário tomamos K como o inteiro positivo tal que o primeiro dígito não nulo da expansão decimal de e ocorre na K-ésima casa decimal. Por exemplo, se e = 0, 0000326…, tomamos $K = 5$, pois

$$10^{-5} = 0{,}00001 < e.$$

Suponhamos agora que nos foi dado um número positivo e, e que necessitamos de uma aproximação do número a com erro menor do que e. Primeiro tomamos o inteiro positivo K tal que $10^{-K} \leq$ e. Como a_n converge ao número a, temos que existe um índice no tal que:

$$\text{se } n > no \text{ , então } |a_n - a| < 10^{-K} \leq \text{e}.$$

Isto é, qualquer termo da sequência (a_n) com índice maior que no é uma aproximação do número a com erro menor do que e.

Em outras palavras, podemos dizer que se a_n converge a a, então dada uma tolerância e (isto é, uma tolerância para erros de aproximações), existe um índice no a partir do qual tem-se que $|a_n - a| <$ e, ou seja,

$$\text{se } n > no \text{ , então } |a_n - a| < \text{e}.$$

Esse fato e o resultado dado no exemplo **21** resumem uma propriedade fundamental dos números reais: *qualquer número real é na verdade o limite de uma sequência de decimais exatos* e isso nos garante, como veremos mais adiante ao estudarmos propriedades de limites de sequências, que podemos efetuar cálculos aproximados, usando, para os números envolvidos, aproximações por decimais exatos tão boas quanto necessitarmos.

Na verdade, a importância dos conceitos de sequências e de limites de sequências de números reais vem do fato de que esses conceitos nos permitem descrever e usar com clareza propriedades fundamentais dos números reais.

Nos exemplos de sequências convergentes que demos acima, nós pudemos dizer qual era o limite, mas essa não é a situação geral. Na maioria dos casos relevantes, as sequências aparecem como aproximações cada vez melhores de um número que não conhecemos.

Esse é o caso quando calculamos numericamente soluções de uma equação polinomial, por exemplo, a equação

$$3x^5 - 2x^2 + x - 1 = 0.$$

Não sabemos qual é a solução exata da equação, embora possamos provar que existem soluções, mas usando métodos numéricos devidamente respaldados por resultados teóricos podemos calcular aproximações arbitrariamente boas dessa solução.

Em relação ao conceito de limite, uma observação que devemos fazer é que decorre da definição de convergência, que um número finito de termos de uma sequência não interfere na convergência da sequência.

Ou seja, se ignorarmos um número finito de termos de uma sequência a_n obteremos uma outra sequência b_n, que tem o mesmo comportamento de a_n em termos de convergência: b_n converge se e somente se a_n converge, e nesse caso o limite é o mesmo.

Por exemplo, se descartarmos os 100 primeiros termos da sequência a_n do exemplo **20**, obteremos a sequência

$$b_n = a_{n+100}, \text{ para } n \geq 1,$$

que também converge a $\frac{2402}{1125}$.

Por outro lado, se conhecemos apenas um número finito de termos de uma sequência, nada podemos afirmar a respeito da convergência ou não dessa sequência, por maior que seja o número de termos conhecidos. No entanto, calcular termos de uma sequência pode ser bastante útil, pois os termos calculados podem dar uma indicação de qual pode ser seu comportamento.

Por exemplo, consideremos a sequência (u_n) dada por

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2/u_n}{2},$$

com $u_0 = 2$. Calculando os termos u_n para $0 < n < 7$, obtemos:

$$u_1 = 1,5,$$
$$u_2 = 1,4166...,$$
$$u_3 = 1,41421566...,$$
$$u_4 = 1,41421356...,$$
$$u_5 = 1,41421356...,$$
$$u_6 = 1,41421356...,$$

Na verdade, se calcularmos mais termos vamos obter números que coincidem com u_6 até a oitava casa decimal. Esses dados nos sugerem então (e apenas sugerem) que essa sequência pode ter como limite um número cujo truncamento até a oitava casa decimal é 1, 41421356.

Mas, para termos certeza de que isso é o que ocorre, necessitamos de argumentos teóricos. Neste caso podemos provar que $u_n \to \sqrt{2}$ e, de fato, o truncamento de $\sqrt{2}$ até a oitava casa decimal é 1, 41421356. A demonstração de que $u_n \to \sqrt{2}$ é dada no apêndice deste capítulo.

Assim, em particular, a sequência $u_n = \frac{u_n + 2/u_n}{2}$ **não** converge ao número 1, 41421356, mas podemos afirmar que esse número é uma aproximação do limite (que é $\sqrt{2}$) com erro menor que 10^{-8}.

Para uma sequência desse tipo, o termo u_0 é chamado de condição inicial. Na verdade, podemos provar que para qualquer condição inicial $u_0 > 0$, a sequência u_n do exemplo acima converge para $\sqrt{2}$.

Essa sequência é gerada por um algoritmo chamado Método de Newton. Em geral, dado um número positivo a, podemos calcular aproximações para $\sqrt{a}$, usando a sequência x_n dada por:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}),$$

com x_0 sendo qualquer número positivo. O Método de Newton garante que $x_n \to \sqrt{a}$.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Dê exemplos de sequências não constantes, tais que:

   (a) $a_n \to 0,25$.
   (b) $b_n \to -2,31$.
   (c) $c_n \to \sqrt{2}$.
   (d) $d_n \to -1,\overline{23}$.

2. Em cada item, use o seu exemplo do item respectivo do exercício 1 para:

   (a) dar uma aproximação para 0, 25 com erro inferior a 10^{-8}.
   (b) dar uma aproximação para –2, 31 com erro inferior a 10^{-4}.
   (c) dar uma aproximação para $\sqrt{2}$ com erro inferior a 10^{-2}.
   (d) dar uma aproximação para $-1, \overline{23}$ com erro inferior a 10^{-8}.

3. Considere, para $n \geq 1$, a sequência dada por:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1,29, \\
a_2 &= 1,2299, \\
&\vdots \\
a_n &= 1,\underbrace{2\ldots\ldots2}_{n\,2's}\underbrace{9\ldots\ldots9}_{n\,9's}.
\end{aligned}
$$

   Decida qual das afirmações abaixo é verdadeira:

   (a) $a_n \to 1{,}3$.
   (b) $a_n \to 1{,}\overline{2}$.
   (c) a_n não é convergente.
   (d) Nenhuma das respostas anteriores é correta.

4. Seja (a_n), $n \geq 1$, a sequência dada por

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1,345,\\
a_2 &= 1,34455,\\
a_3 &= 1,3444555,\\
&\vdots\\
a_n &= 1,3\overbrace{4...4}^{n\ 4's}\underbrace{5...5}_{n\ 5's}.
\end{aligned}
$$

Qual das afirmações abaixo é correta?

(a) $a_n \to 1{,}34$.

(b) $\lim a_n = 1{,}35$.

(c) $\lim a_n = \frac{121}{90}$.

(d) a_n não converge.

(e) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

5. Seja (a_n), $n \geq 1$, a sequência definida por:

$$
a_n = \begin{cases} 1,1\overbrace{9...9}^{n\ 9\text{'s}} & \text{se } n \text{ é ímpar,}\\ 1,10\underbrace{9...9}_{n\ 9\text{'s}} & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}
$$

Decida qual das afirmações abaixo é correta:

(a) $a_n \to 1{,}11$.

(b) $a_n \to 1, 2$.

(c) a_n não converge.

(d) Nenhuma da afirmações anteriores é correta.

6. Seja (x_n), $n \geq 1$, a sequência definida por:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0,39,\\
x_2 &= 0,3399,\\
x_3 &= 0,333999,\\
&\vdots\\
x_n &= 0,\overbrace{3\ldots3}^{n\ 3's}\underbrace{9\ldots9}_{n\ 9's}.
\end{aligned}
$$

Decida qual das afirmações abaixo é verdadeira:

(a) $x_n \to 1/3$.

(b) $x_n \to 0,4$.

(c) x_n não converge.

(d) Nenhuma da afirmações anteriores é correta.

7. Seja (a_n), $n \geq 1$, a sequência definida por:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2,32129,\\
a_2 &= 2,3212299,\\
&\vdots\\
a_n &= 2,321\underbrace{2\ldots\ldots2}_{n\ 2's}\underbrace{9\ldots\ldots9}_{n\ 9's}.
\end{aligned}
$$

Decida qual das afirmações abaixo é correta:

(a) $a_n \to 2,321\overline{2}$.

(b) $a_n \to 2,32123$.

(c) $a_n \to 2,322$.

(d) (a_n) não é convergente.

8. Sabendo que uma sequência a_n satisfaz a condição

$$|a_n - \pi| < 10^{-5} \quad \text{para } n > 20$$

decida qual das afirmações abaixo podemos garantir estar correta:

(a) $a_n \to \pi$.

(b) cada termo a_n é uma aproximação para π com erro inferior a 10^{-5}.

(c) a_{22} é uma aproximação para π com erro inferior a 10^{-5}.

(d) a sequência a_n não converge a π.

9. Sabendo que (a_n) é uma sequência tal que

$$\text{se } 179 < n < 100000, \text{ então } |a_n - 30| < 10^{-20},$$

podemos garantir que $\lim a_n = 30$? Por que?

10. Considere a seguinte proposição:

$$\text{Se } |a_n - 1,2| < 10^{-8} \text{ para } n > 1, \text{ então } a_n \to 1,2.$$

(a) Decida se a proposição é falsa ou verdadeira.

(b) Enuncie a recíproca dessa proposição e decida se ela (a recíproca) é falsa ou verdadeira.

11. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

(a) Se a sequência $b_n = (a_n - a)$ converge a 0, então $a_n \to a$.

(b) Se $\lim(2 \cdot a_n) = 0$, então $a_n \to 0$.

(c) Se $a_n \to a$ e $b_n = a_{n+2}$ para $n \geq 1$, então $b_n \to a$.

(d) Se (a_n) e a são tais que $|a_n - a| < \frac{1}{n}$, para $n > 10^4$, então $a_n \to a$.

(e) Se (u_n) converge e $u_n < c$ para $n > 100$, então $\lim u_n \leq c$.

(f) Se $a_n \to 2,35116723\ldots$, então $a_n > 2,351167$ a partir de algum índice *no* (isto é, para $n > n_0$).

(g) Se a_n converge, então $b_n = |a_n|$ também converge.

(h) Se $|a_n|$ converge, então a_n também converge.

12. Se (a_n) é uma sequência tal que todo termo a_n *é* um número inteiro e

(a_n) é convergente, o que se pode dizer sobre a sequência?

13. Sejam a_n uma sequência e a um número real tais que $|a_n - a| < \frac{1}{2^n}$, para n > 1. Dado um inteiro $K > 0$, determine n tal que a_n é uma aproximação de a com erro menor que 10^{-K}.

2. Representação gráfica de sequências

Uma outra maneira de tentarmos entender o comportamento de uma sequência, ao em vez de examinarmos uma lista de números, é representar graficamente os número obtidos pelo cálculo de N termos da sequência.

Para isto, usamos duas retas perpendiculares. Uma reta horizontal na qual marcamos pontos que representam os índices dos termos da sequência de 1 até N. Uma reta vertical, que consideramos uma cópia da reta real com o 0 correspondendo ao ponto de interseção das duas retas, e os pontos da semi-reta superior correspondendo aos números positivos. Nesta reta, marcamos os valores de a_n para cada $1 \leq n \leq N$.

Para cada $1 \leq n \leq N$, pelo ponto que representa o índice n, traçamos uma reta vertical, e, pelo ponto que representa o número que é o termo a_n da sequência, traçamos uma reta horizontal. O ponto de interseção dessas duas retas é a representação gráfica do termo a_n da sequência (a_n) (veja Figura 2.1). Convencionamos nos referir a esse ponto dizendo que suas coordenadas são dadas pelo par ordenado (n, a_n).

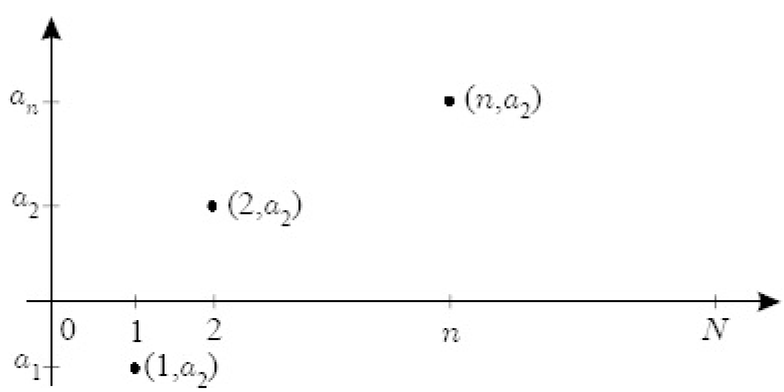


Figura 2.1

O que podemos dizer da representação gráfica de uma sequência (a_n) que converge a um número a?

Já sabemos que se e > 0, o conjunto dos números reais x cuja distância a um número a é menor do que e (i.e. $|x - a| < e$) é o intervalo (a – e, a + e).

Como vimos acima, se a_n converge a a, então, dada uma tolerância e, temos que existe um índice, que podemos denotar por *rio*, tal que

$$\text{se } n > n_o \text{ então } |a_n - a| < e.$$

Ou seja, temos que $a_n \in (a - e, a + \text{e})$ para $n > n_0$.

Isso nos diz que os pontos que representam graficamente esses termos da sequência têm que estar na faixa compreendida entre as retas horizontais que cortam o eixo vertical nos pontos que correspondem aos números $a - e$ e a + e (Figura 2.2).

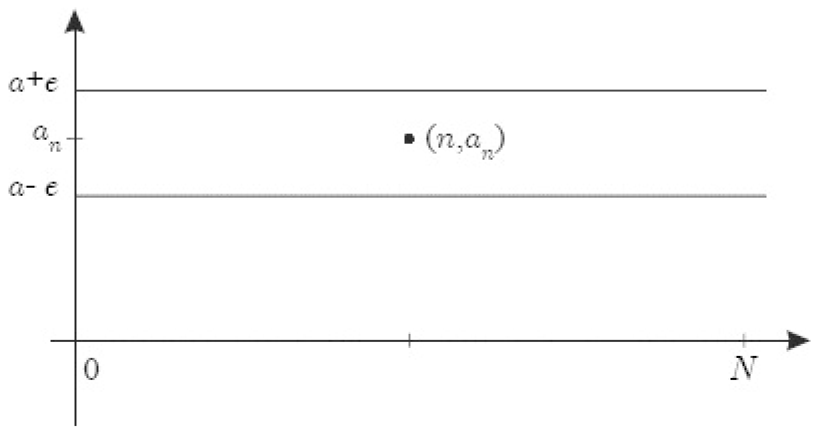


Figura 2.2

Ou seja, se N é suficientemente grande ($N > n_0$), ao fazermos a representação gráfica de (a_n), veremos que os pontos (n, a_n) estão nessa faixa para $n_0 < n \leq N$.

Isso nos sugere, então, que se constatarmos que na representação gráfica de uma sequência a_{ni} a partir de algum índice, os pontos (n, a_n) estão próximos de uma reta horizontal, é razoável supor que pode se tratar de uma sequência convergente e que o valor a, determinado pela interseção desta reta com o eixo vertical, é um candidato ao limite. Mas é muito importante termos em mente que, nessa situação, a é apenas um candidato ao limite.

Mais explicitamente, se dada a representação gráfica dos termos a_n de uma sequência, para $n \leq N$, verificamos que para $no < n \leq N$ tem-se que os pontos (n, a_n) estão na faixa compreendida entre as retas horizontais que cortam o eixo vertical nos pontos que correspondem aos números $a - e$ e a + e (veja Figura 2.2), podemos, no máximo, supor que o número a é um candidato a ser uma aproximação do limite com erro inferior a e.

De fato, mesmo que façamos experiências com N muito grande, nenhuma conclusão definitiva pode ser obtida. Como estamos tratando de um processo infinito (uma sequência tem infinitos termos), apenas por intermédio de resultados teóricos é possível se chegar a uma resposta definitiva.

Por exemplo, se fizermos a representação gráfica da sequência $\frac{1}{2^n}$, com valores de n grande, poderemos concluir que zero é um candidato ao limite da sequência, mas para afirmarmos que o limite é realmente 0 necessitamos de argumentos teóricos como os utilizados anteriormente.

Por outro lado, a visualização do gráfico de uma sequência só é útil se podemos calcular um número suficientemente grande de termos da sequência. Assim, um computador é uma ferramenta muito útil para o estudo do comportamento de sequências. Mas é bom ter em mente que, mesmo utilizando um computador, estaremos apenas calculando um número finito de termos.

3. Limites e as operações com sequências

Operações com sequências

Já vimos que o conjunto de números reais admite as operações de soma e produto, mas só sabemos "fazer contas" com os decimais exatos. Como, então, podemos efetuar cálculos com números que não são decimais exatos? Por exemplo, como calcular uma soma que envolva um número irracional?

De fato, já sabemos a resposta: a única coisa que podemos fazer é tomar aproximações dos números por decimais exatos e fazer os cálculos com as aproximações. Mas aí esbarramos com outra questão: o que o resultado obtido com as aproximações tem a ver com o número que estávamos querendo obter, isto é, com o resultado exato da operação?

Para respondermos a esta questão, voltamos à afirmação de que falar de números reais é essencialmente falar de sequências de números reais. Devemos, portanto, introduzir as operações soma e produto no contexto de sequências.

Se x_n e y_n são sequências de números reais, a soma $(x_n + y_n)$ é a sequência cujo n-ésimo termo é a soma $x_n + y_n$ dos n-ésimos termos de cada sequência.

Analogamente, temos a sequência produto $(x_n \cdot y_n)$, onde cada termo é obtido pelo produto dos termos correspondentes das sequências x_n e y_n. Se y_n é uma sequência que não se anula, isto é, $y_n \neq 0$ para qualquer n, então podemos também definir a sequência quociente $(\frac{x_n}{y_n})$, já que para cada n o quociente $\frac{x_n}{y_n}$ estará bem definido.

Teorema 3.1*: *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$*, então*

(i) $\lim(x_n + y_n) = a + b$;

(ii) $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

(iii) *se* $b \neq 0$, *então* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

Observe que, como qualquer número real c pode ser pensado como sendo a sequência constante y_n = c, para qualquer n, decorre de (ii) do teorema acima que

$$\lim c\, x_n = c \cdot \lim x_n$$

para qualquer sequência convergente x_n.

O Teorema 3.1 é uma ferramenta bastante útil no cálculo de limites, pois nos permite obter o limite de muitas sequências sem que precisemos verificar diretamente a condição exigida pela definição.

Por exemplo, usando esse teorema podemos concluir que a sequência $x_n = (1 - \frac{1}{n})$ converge a 1, pois podemos considerar o número 1 como sendo a sequência constante igual a 1 (e, portanto, convergente a 1) e sabemos que $\frac{1}{n}$ converge a 0. Pelo teorema temos que $x_n \to (1 + 0) = 1$.

Mas, de fato, a importância desse teorema é muito mais conceitual: é ele que nos garante que podemos realizar por aproximações as operações de soma, produto e quociente de números reais.

Mais precisamente, se a e b são números reais não nulos, então, para obtermos boas aproximações por decimais exatos de $a + b$, $a \cdot b$ e a/b, basta tomarmos aproximações por decimais exatos suficientemente boas para os números a e b.

Por exemplo, suponhamos que necessitamos fazer cálculos que envolvam o número $a = \frac{1}{3} + \sqrt{2}$. Como esse número não é um decimal exato, só poderemos efetuar os cálculos usando alguma aproximação que seja um decimal exato.

Suponhamos então que desejamos usar uma aproximação com erro menor do que 0, 01. Pelas contas que fizemos na demonstração acima, vemos que é suficiente tomarmos aproximações de $\frac{1}{3}$ e de $\sqrt{2}$ com erro menor que 0, 001.

De fato, tomando as aproximações 0,333 e 1,414 para $\frac{1}{3}$ e $\sqrt{2}$, respectivamente, temos

$$\left|(\frac{1}{3} + \sqrt{2}) - (0,333 + 1,414)\right| \leq \left|\frac{1}{3} - 0,333\right| + \left|\sqrt{2} - 1,414\right| < 0,002 < 0,01$$

ou seja, temos que $1,747$ é uma aproximação para $\frac{1}{3}+\sqrt{2}$ com erro menor que 0,01.

Exemplos

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n^2})=1.$

De fato, sabemos que $\frac{1}{n^2}\to 0$. Como $\frac{1}{2n^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$, podemos usar o teorema para obter

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot 0=0.$$

Pelo mesmo teorema concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n^2})=\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}=1+0,$$

já que $\lim\limits_{n\to\infty}1=1.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{3n^2+n}=\frac{1}{3}.$

Primeiro observamos que as sequências do numerador e do denominador **não são convergentes**, logo não podemos usar o Teorema 3.1 diretamente. Tentamos então rescrever a expressão que define a sequência:

$$n^2+1=n^2(1+\frac{1}{n^2})\quad\text{e}\quad 3n^2+n=n^2(3+\frac{1}{n}),$$

logo $a_n=\frac{n^2+1}{3n^2+n}$ pode ser escrita na forma

$$a_n=\frac{1+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}}.$$

Como $\lim(1+\frac{1}{n^2})=1$ e $\lim(3+\frac{1}{n})=3\neq 0$, podemos afirmar que $\lim a_n=\frac{1}{3}$.

Sequências limitadas

Como já foi destacado acima, 0 conhecimento dos valores de um número finito de termos de uma sequência não é suficiente para se decidir qual é 0 seu comportamento em termos de convergência. Desse fato decorre que sempre necessitamos de recursos teóricos para garantir que uma determinada sequência é convergente (ou não convergente).

No que se segue, daremos alguns resultados que são bastante úteis no estudo do comportamento de sequências.

Uma propriedade geral das sequências convergentes, como veremos no Teorema 3.2 adiante, é que 0 valor absoluto dos seus termos não pode crescer arbitrariamente, isto é, não pode assumir valores arbitrariamente grandes. Uma sequência com essa propriedade é dita limitada. Mais precisamente,

Definição: Uma sequência de números reais a_n é dita *limitada* se existe um número M tal que $|a_n| \leq M$, para todo $n \geq 1$.

Em outras palavras, uma sequência é limitada se todos os seus termos são números de um intervalo do tipo $[-M, M]$.

Observe que se a e b são números reais com $a < b$, sempre existe um número real M tal que

$$-M < a < b < M,$$

isto é, $[a, b] \subset [-M, M]$ (na verdade existe uma infinidade de números com essa propriedade, basta tomar M menor que 0 maior dos números $|a|$ e $|b|$). Logo, uma sequência a_n é limitada se, e somente se, para algum par de números reais a e b tem-se que

$$a_n \in [a, b] \text{ para todo } n \geq 1.$$

Exemplos

3. As sequências $x_n = (-1)^n$ e $y_n = \frac{1}{n}$ são limitadas.

De fato, para qualquer $n \geq 1$, tem-se que

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \text{ e } 0 < \frac{1}{n} \leq 1.$$

4. As sequências $a_n = n$, $b_n = 2^n$ e $c_n = -n$ são exemplos de sequências não limitadas.

De fato, dado qualquer intervalo da forma $[-M, M]$, existem infinitos termos dessas sequências que não pertencem ao intervalo dado.

5. A sequência $x_n = \dfrac{2n-1}{3n+1}$ é limitada, pois

$$2n - 1 < 3n + 1$$

e, portanto, $0 < \dfrac{2n-1}{3n+1} < 1$.

6. A sequência $x_n = \dfrac{3n^2}{2n+1}$ não é limitada, pois

$$3n^2 \geq 2n^2 + n = n(2n + 1),$$

donde, $x_n > n$. Como $a_n = n$ não é limitada, x_n também não é limitada.

Teorema 3.2*: ***Se a_n é uma sequência convergente, então a_n é limitada.***

De acordo com esse teorema, a propriedade de ser limitada é uma condição necessária para uma sequência ser convergente. Portanto, se sabemos que uma sequência não é limitada, podemos evocar esse teorema para concluir que essa sequência não é convergente. Esse é, por exemplo, o caso de sequências como $a_n = n$ e $b_n = 2^n$.

Em outras palavras, podemos dizer que ao estudar uma sequência, a primeira coisa que devemos fazer é tentar verificar se ela é limitada, pois, caso não seja, já sabemos que não se trata de uma sequência convergente.

Por outro lado, esse teorema é um bom exemplo de uma proposição que é verdadeira, mas cuja recíproca é falsa.

Para provarmos isso, é suficiente apresentarmos um contraexemplo: nesse caso a sequência x_n, cujos termos são dados por 0 se n é par e por 1 se n é ímpar, serve, pois é limitada já que $|x_n| \leq 1$, e não é convergente.

Em particular, é importante termos em mente que dizer que uma sequência é limitada **não é** a mesma coisa que dizer que a sequência tem um limite: de acordo com nossa convenção, dizer que uma sequência a_n tem um limite é o mesmo que dizer que a_n é convergente, isto é, $a_n \to a$, onde a é um número real, enquanto que dizer que uma sequência é limitada é apenas dizer que todos os seus termos tomam valores num intervalo limitado de números reais.

Sequências monótonas

Se a é um número real positivo e a_n é a sequência dada pelo truncamento da expansão decimal de a na n-ésima casa decimal, vemos que cada termo é maior ou igual ao termo anterior.

Por exemplo, se $a = 2,013908853\ldots$, então

$$a_4 = 2,0139 = 2{,}01390 = a_5, \text{ e}$$
$$a_7 = 2,0139088 < 2,01390885 = a_8.$$

Sequências com essa propriedade são chamadas sequências não decrescentes; mais precisamente,

Definição: Uma sequência a_n é dita *crescente* se para todo n tem-se que

$$a_{n+1} > a_n.$$

Se $a_{n+1} \geq a_n$ para todo n, dizemos que a_n é *não decrescente*.

Analogamente, definimos sequências decrescentes e não crescentes:

Definição: Uma sequência a_n é dita *decrescente* se para todo n tem-se que

$$a_{n+1} < a_n.$$

Se $a_{n+1} \leq a_n$ para todo n, dizemos que a_n é *não crescente*.

Observe que se $a_{n+1} > a_n$, então a desigualdade $a_{n+1} \geq a_n$ também é verdadeira, logo toda sequência crescente é não decrescente e, analogamente, toda sequência decrescente é não crescente. As sequências não crescentes (ou não decrescentes) são chamadas sequências *monótonas*.

Exemplos

7. $a_n = \frac{1}{n}$ é decrescente. De fato, $n + 1 > n$, e, portanto, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$.

8. $a_n = 2^n$ é crescente, pois $a_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2^n = a_n$.

9. $a_n = x^n$ é crescente se $x > 1$ e decrescente se $0 < x < 1$.

De fato, para qualquer $n \geq 1$, temos

$$x > 1 \Rightarrow x^n \cdot x > x^n,$$

e, portanto,

$$a_{n+1} = x^{n+1} = x^n \cdot x > x^n = a_n.$$

10. $a_n = x^n$ com $x < 0$ **não** é monótona.

Basta observarmos que se n é par, então n + 1 é ímpar, e se n é ímpar, então $n + 1$ é par, logo

$$a_n = x^n > 0 > x^{n+1} = a_{n+1}$$

para n par e

$$a_n = x^n < 0 < x^{n+1} = a_{n+1}$$

para n ímpar.

O teorema que enunciaremos a seguir apresenta uma propriedade fundamental dos números reais que nos permitirá, em particular, garantir que qualquer decimal que não possua uma dízima periódica constituída apenas pelo algarismo 9 é a expansão decimal de um número real.

Podemos dizer que esse teorema trata da propriedade que de fato caracteriza os números reais. Sua demonstração requer recursos que não foram apresentados neste texto e que, em geral, não são tratados num curso de cálculo.

Teorema 3.3: *Se a_n é uma sequência monótona e limitada, então a_n é convergente.*

Como vimos, a propriedade de ser limitada não é suficiente para garantir a convergência de uma sequência. Claramente a monotonicidade também não é suficiente para garantir convergência: $x_n = n$ é um exemplo simples de sequência crescente (e, portanto, monótona) que não é convergente.

O Teorema 3.3 nos diz que essas duas propriedades juntas, a monotonicidade e a limitação, garantem a convergência.

Esse teorema também é um exemplo de proposição que é verdadeira mas cuja recíproca é falsa. A sequência $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ é um contraexemplo para a recíproca do teorema: de fato, a_n é convergente (o limite é 0), mas não é monótona, pois para n ímpar $a_n < 0$ e para n par $a_n > 0$. E claro que a_n é limitada, já que é convergente (lembre-se do Teorema 3.2).

Um outro resultado útil a respeito de limites de sequências é o teorema seguinte:

Teorema 3.4: *Se a_n e b_n são sequências convergentes, com $a_n \leq b_n$, para todo n, então*

$$\lim a_n \leq \lim b_n.$$

Aqui é importante ressaltar que mesmo que os valores das sequências satisfaçam a desigualdade estrita (isto é, $a_n < b_n$), só podemos garantir que $\lim a_n \leq \lim b_n$. Por exemplo, se

$$a_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{n},$$

então $a_n < b_n$, e, no entanto, $\lim a_n = 0 = \lim b_n$.

Vamos usar a sequência dada abaixo para exemplificar como podemos usar resultados teóricos para estudar o comportamento de uma sequência.

Consideremos a sequência definida por:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,53, \\ a_2 &= 0,53553, \\ a_3 &= 0,535535553, \\ &\vdots \\ a_n &= 0,535535\ldots53 \overbrace{5\ldots5}^{(n-1)\ 5's} \underbrace{35\ldots53}_{n\ 5's}. \end{aligned}$$

Claramente a_n é crescente e limitada, pois $a_{n+1} > a_n$ e $|a_n| \leq 1$, para todo n. Logo o Teorema 3.3 garante que a_n é convergente, mas não dá nenhuma informação sobre seu limite.

Usando o Teorema 3.4, podemos mostrar que, para cada n, a expansão decimal de $a = \lim a_n$ coincide com a_n até o correspondente número de casas decimais de a_n. Isto é, por exemplo, que

$$a = 0,53553555355553\ldots,$$

já que $a_4 = 0,53553555355553$. Em particular, podemos também afirmar que a é um número irracional, já que sua expansão decimal não é finita nem periódica.

Mostremos, como exemplo, que a expansão decimal de a coincide até a quinta casa decimal com a_2, isto é, $a = 0,53553\ \ldots$; os mesmos argumentos servem para provar a afirmação em geral, mas a notação se torna muito pesada (como um exercício, prove a afirmação para $n = 3$).

De fato, temos que para todo $n \geq 2$

$$0,53553 < a_n < 0,535536,$$

e, portanto, pelo Teorema 3.4, concluímos que

$$0,53553 \leq a \leq 0,535536 < 0,53554 = 0,53553 + 10^{-5},$$

ou seja,

$$0,53553 \leq a < 0,53553 + 10^{-5},$$

e, portanto, $a = 0,53553\ \ldots$.

Em particular, provamos que existe um número real (o limite da sequência a_n) cuja expansão decimal é o decimal

$$0,535535\ldots53\underbrace{5\ldots5}_{n\ 5's}3\overbrace{5\ldots5}^{n+1\ 5's}3\ldots$$

Na verdade, um procedimento análogo pode ser usado para mostrar que qualquer decimal formal (uma lista infinita do tipo $n,d_1d_2\ldots$ como na expansão decimal de um número real) que não tenha um dízima formada apenas pelo algarismo 9 é a expansão decimal de um número real.

Mais precisamente, se d é um tal decimal (isto é, a lista formal acima), tomamos a sequência b_n, onde, para cada n, b_n é o número real cuja expansão decimal é finita e coincide com d até a n-ésima casa decimal. Obtemos assim uma sequência crescente e limitada de números reais e, portanto, convergente.

Como no exemplo, podemos concluir que a expansão decimal do limite desta sequência é o decimal d. Em particular, todo decimal que não é uma dízima periódica é a expansão decimal de um número irracional.

Por outro lado, como vimos para o decimal $0,9\overline{9}$, podemos concluir que se d é um decimal que tem uma dízima periódica constituída apenas pelo algarismo **9**, então d não é a expansão decimal de nenhum número real. De fato, a sequência dos truncamentos de d converge para um número real cuja expansão decimal é exata.

Por exemplo, a sequência de truncamentos do decimal formal $d = 32,200574799\overline{9}$ converge para o decimal exato $32,2005748$.

Como consequência, podemos provar uma propriedade interessante dos números reais: entre quaisquer dois números reais sempre existem números racionais e números irracionais.

Por exemplo, suponhamos que $a = 1,235459996\ldots$ e $b = 1,23546$ Comparando os dígitos das expansões decimais, vemos que $a < b$. Para obter um racional c entre a e b, basta tomarmos $c = 1,235459997$. A partir de c podemos construir um decimal que não é uma dízima periódica (e, portanto, é a expansão decimal de um número irracional), por exemplo,

$$d = 1,2354599971771777717\ldots 71\underbrace{7\ldots 7}_{n\ 7's}1\overbrace{7\ldots 7}^{n+1\ 7's}17\ldots.$$

Claramente $a < c < 1,2354599971 < d < 1,235459998 < 1,23546 \leq b$.

Em geral, se a e b são números reais com $0 < a < b$, sabemos que existe um primeiro dígito da expansão decimal de a que é menor que o dígito correspondente da expansão decimal de b (no exemplo acima é o quinto dígito, $5 < 6$). A partir daí, construímos um decimal exato c, tal que $a < c < b$. Tendo obtido o racional, construímos um decimal que não é uma dízima periódica, como no exemplo acima.

Já sabemos que se as expansões decimais de dois números reais, a e b, coincidem até a n-ésima casa decimal, então a distância entre a e b é menor do que 10^{-n}, isto é

$$|a - b| < 10^{-n}.$$

Observamos agora que se $\tilde{a}$ é uma aproximação para a com $|\tilde{a} - a| < 10^{-n}$ e sabemos que o dígito da n-ésima casa decimal de $\tilde{a}$ não é 9 nem 0, então a expansão decimal de a coincide com a expansão de d até a $(n - 1)$-ésima casa decimal.

Por exemplo, se sabemos que $1,248991$ é uma aproximação para um número a tal que $|a - 1,248991| < 10^{-3}$, então podemos concluir que $a = 1,24\ldots$. Por outro lado, observe que $|1,249 - 1,248991| < 10^{-3}$ e esses dois números não coincidem até a terceira casa decimal. Isso serve para nos dizer que a afirmação acima dá a melhor informação possível.

Vejamos mais exemplos de aplicações dos teoremas dados.

Exemplos

11. Se x é um número real tal que $0 < x < 1$, então $x^n \to 0$.

De fato, como $0 < x < 1$, temos que

$$x^{n+1} < x^n$$

para qualquer n, isto é, x^n é uma sequência decrescente. Por outro lado, é limitada pois $0 < x^n < 1$ para $n \geq 1$. Logo, pelo Teorema 3.3, a sequência $a_n = x^n$ converge a um número a. Mostremos que $a = 0$. Seja (b_n) a sequência dada por $b_n = x \cdot a_n$, para $n \geq 1$. Então, por (ii) do Teorema 3.1, temos que $b_n \to x \cdot a$. Mas observe que

$$b_n = x^{n+1} = a_{n+1},$$

e, portanto, (b_n) tem o mesmo comportamento que (a_n), ou seja,

$$\lim b_n = \lim a_n = a.$$

Como já havíamos concluído que $\lim b_{\mathrm{n}} = x \cdot a$ temos que $x \cdot a = a$, ou seja,

$$(x - 1) \cdot a = 0.$$

Mas $x \neq 1$, logo $a = 0$.

12. Consideremos a sequência s_n do exemplo 7 da seção 1 dada por

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n,$$

onde x; é qualquer número real tal que $|x| < 1$, isto é, estamos falando da série $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$

Vamos mostrar que $s_n \to \frac{1}{1-x}$, ou seja, que

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ se } |x| < 1.$$

Para isso, observemos que é suficiente verificar que podemos rescrever s_n como

$$s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

De fato, temos que $x^n \to 0$, pois $|x| < 1$ (veja exercício 16) e como $x^{n+1} = x \cdot x^n$, o Teorema 3.1 garante que

$$\lim x^{n+1} = \lim(x \cdot x^n) = x \cdot 0 = 0,$$

e, portanto, que $s_n \to \frac{1}{1-x}$.

Mostremos então a igualdade $s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ Temos que

$$x \cdot s_n = x \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1},$$

mas

$$x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = s_n - 1,$$

logo

$$x \cdot s_n = s_n - 1 + x^{n+1},$$

donde

$$s_n \cdot (1 - x) = 1 - x^{n+1},$$

e, portanto, como $x \neq 1$,

$$s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Observe que se (a_n) é uma sequência de números não negativos, isto é, $a_n \geq 0$ para $n \geq 1$, então a série $(\sum a_n)$ é uma sequência monótona crescente. Logo, temos que:

Uma série $\sum a_n$ de números não negativos ($a_n \geq 0$) converge se e somente se é uma série limitada. Isto é, se existe um número real M tal que, para $n \geq 1$ tem-se,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < M.$$

De fato, se $\sum a_n$ converge, então pelo Teorema 3.2 tem que ser limitada. Por outro lado, se $\sum a_n$ é limitada, como já sabemos que é monótona, podemos usar o Teorema 3.3 para concluir que $\sum a_n$ converge.

Exemplos

13. A série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ é convergente. Seu limite é o número **e**, que é a base dos logaritmos naturais. No apêndice deste capítulo damos uma demonstração de que essa série é limitada e, portanto, convergente, já que é uma série de números positivos.

14. A série $\sum_{k=0}^{\infty} (1,1)^k$ não é convergente. De fato, como 1,1 > 1, sabemos que $(1,1)^k > 1$ para qualquer $k \geq 1$. Logo,

$$\sum_{k=1}^{n} (1,1)^k > n,$$

e, portanto, a série não é limitada, já que a sequência $b_n = n$ não é limitada.

15. O exemplo **14** é um caso particular das séries $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, com $x \geq 1$. O argumento

é o mesmo: como $x \geq 1$, temos que $x^k \geq 1$ e

$$\sum_{k=1}^{n} x^k \geq n,$$

o que mostra que a série é uma série de números positivos não limitada e, portanto, não convergente.

Seguem-se dois teoremas que são frequentemente usados no cálculo de limites.

Teorema 3.5: *Se x_n, y_n e z_n são sequências tais que $x_n \leq z_n \leq y_n$, para todo n e*

$$\lim x_n = \lim y_n = a,$$

então z_n também é convergente e $\lim z_n = a$.

Teorema 3.6*: *Se $a_n \to 0$ e b_n é uma sequência limitada, então*

$$a_n b_n \to 0.$$

Exemplo

16. Considere a sequência

$$a_n = \frac{2\cos n + \operatorname{sen} n}{n}.$$

Sabemos que

$$|\cos n| \leq 1 \text{ e } |\operatorname{sen} n| \leq 1.$$

Logo

$$|2\cos n + \operatorname{sen} n| \leq 2|\cos n| + |\operatorname{sen} n| \leq 3$$

e, portanto,

$$b_n = 2\cos n + \operatorname{sen} n$$

é uma sequência limitada. Como $a_n = b_n \cdot \frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n} \to 0$, o Teorema 3.6 garante que $\lim a_n = 0$.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Em cada item abaixo, decida se a sequência dada é ou não convergente:

   (a) $x_n = 1 + (-1)^n$.

   (b) $x_n = \dfrac{1}{2^n} + (-1)^n$.

   (c) $x_n = \dfrac{n}{n+1}(-1)^n$.

   (d) $x_n = \dfrac{2n}{n+2}(1 - \dfrac{n}{n+1})$.

2. Dê exemplo de sequências a_n e b_n tal que:

   a_n e b_n não são convergentes e $(a_n - b_n) \to 0$.

3. Dê um exemplo de sequências x_n e y_n tal que x_n é convergente, y_n não é convergente e $x_n y_n$ é convergente.

4. Dê um exemplo de uma sequência decrescente e convergente, cujo limite é o número real $L = 2,302\overline{2}$.

5. Dê um exemplo de uma sequência crescente e convergente, cujo limite é o número real $L = 2,302\overline{2}$.

6. Dê exemplo de uma sequência não monótona e convergente, cujo limite é o número real $L = 2,302\overline{2}$.

7. Dê um exemplo de uma sequência crescente e convergente, cujo limite é o número real $L = -0,23$.

8. Dê quatro exemplos diferentes de sequências crescentes e convergentes, cujo limite é o número real $L = -1,\overline{2}$.

9. Verifique que

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^2 - 7n + 1}{n^2 - 1} = 6.$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + n - 2}{n^2 - 1} = 1.$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^4 - 3n^3 + (0,5)n^2 - \pi n + 1}{(0,002)n^5 + 2n + 1} = 0.$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-67)(2n+18)(n-9)(n+10)(7n+1)}{n^5} = 14.$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{11n^6 - 6n^2 + n - \sqrt{3}}{5n^8 - 9} = 0.$

10. Considere a proposição: *Se* $\lim(a_n - b_n) = 0$, entôo $\lim a_n - \lim b_n = 0$.

(i) Decida se a proposição é verdadeira ou falsa:

(ii) Escolha, entre as opções abaixo, aquela que melhor justifica sua resposta:

(a) Pois $\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$.

(b) Pois, pelo teorema sobre operações com limite, $\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$.

(c) Pois se $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ e $b_n = (-1)^n$, então $a_n - b_n = \frac{1}{n}$ e a_n não converge.

(d) Pois se $a_n = b_n$, então $a_n - b_n = 0$.

(e) Pois $a_n - b_n$ é praticamente zero, isto é, $a_n = b_n$.

11. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

   (a) Se a sequência $x_n = (a_n + b_n)$ converge, então a_n e b_n convergem.

   (b) Se a sequência $x_n = u_n \cdot v_n$ converge, então u_n e v_n convergem.

   (c) Se a_n e $z_n = a_n + b_n$ são sequências convergentes, então b_n também é convergente.

   (d) Se $(a_n + b_n) \to 2$, então $\lim a_n = 2 - \lim b_n$.

12. Considere a seguinte proposição: *Se x_n é limitada, então x_n tem limite*.

   (a) $x_n = 1 + (-1)^n$ é um contraexemplo para a proposição?

   (b) $x_n = \frac{1}{2^n} + (-1)^n$ é um contraexemplo para a proposição?

   (c) $x_n = n + \frac{(-1)^n}{n^2}$ é um exemplo para a proposição?

   (d) $x_n = n + \frac{(-1)^n}{n^2}$ é um contraexemplo para a proposição?

   (e) $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n^2}$ é um exemplo para a proposição?

13. Considere a sequência a_n definida por: a_1 =0,1 e, para $n > 1$, a_n é obtido justapondo-se à expansão decimal de a_{n-1}, os dígitos do número inteiro n. Por exemplo, a_2 = 0,12, a_{11} = 0, 1234567891011 e a_{12} = 0,123456789101112.

   (a) Mostre que a sequência converge e que seu limite é menor que 0,15.

   (b) Ache uma aproximação para o limite com erro menor que 10^{-7}.

14. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

   (a) Se a_n é uma sequência de termos positivos e $a_n \to 0$, então a_n é decrescente.

   (b) Se $|a_n|$ é uma sequência crescente, então a_n é crescente.

   (c) Se a_n é uma sequência crescente, então $|a_n|$ é crescente.

(d) Se x_n é uma sequência limitada, então x_n é convergente.

15. Considere o número irracional π. Dê exemplos de:

   (a) Uma sequência a_n decrescente que converge para π.

   (b) Uma sequência b_n crescente que converge para π.

   (c) Uma sequência não monótona que converge para π.

16. Usando o exemplo 11 da seção 3, mostre que a proposição

$$Se\ -1 < x \leq 0,\ então\ x^n\ converge\ a\ 0$$

é verdadeira (assim, junto com o que foi provado no exemplo 11, temos que se $|x| < 1$, então $x^n \to 0$).

17. Diga se as sequências u_n, cujos termos gerais estão dados abaixo, convergem. Para as convergentes diga qual é o limite:

   (a) $u_n = (-0.5)^n$.

   (b) $u_n = \cos(2\pi n)$.

   (c) $u_n = \cos(n\pi)$.

   (d) $u_{n+1} = \frac{1}{n}$ com $u_0 = 3$.

   (e) $u_n = \frac{1}{4} u_{n-1}$ com $u_0 = 100$.

   (f) $u_n = u_{n-1} + 2$ com $u_0 = 5$.

   (g) $u_n = 1 + 1,1 \cdot u_{n-1}$ com $u_0 = 0$.

   (h) $u_n = \cos(\frac{(2n+1)\pi}{2})$.

   (i) $u_n = 1 + 0,9 \cdot u_{n-1}$ com $u_0 = 1$.

   (j) $u_n = \cos(n\pi)$.

18. *Para cada número real $a > 0$, considere a sequência $u_n = \sqrt{a}$, $n \geq 1$:

   (a) Verifique que para $0 < a < 1$ a sequência u_n é crescente e limitada.

   (b) Verifique que para $a > 1$ a sequência u_n é decrescente e limitada.

(c) Em relação a convergência, o que você pode afirmar a respeito da sequência u_n para qualquer $a > 0$?

4. Limites infinitos

Dentre as sequências que não convergem, podemos destacar dois tipos que apresentam comportamentos bem determinados. Por exemplo, a sequência

$$x_n = 10^n \text{ para } n \geq 1,$$

não é convergente, mas tem a propriedade de que quando n cresce arbitrariamente, os valores da sequência também crescem arbitrariamente.

Convencionamos descrever essa propriedade dizendo que a sequência x_n, acima, *tende a infinito*. Em geral, definimos:

Definição: Dizemos que uma sequência de números reais a_n *tende a infinito quando n* tende a infinito se, dado qualquer número real B, podemos encontrar um índice *no* tal que

$$\text{se } n > n_0, \text{ então } a_n > B.$$

Se uma sequência a_n tende a infinito, dizemos também que o *limite de* a_n *é infinito* e usamos a notação

$$a_n \to \infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{ou, simplesmente,} \qquad \lim a_n = \infty$$

É fácil ver que a sequência acima, $x_n = 10^{ra}$, tende a infinito, mas o exemplo mais simples de sequência com esse comportamento é a sequência $a_n = n$.

As seguintes propriedades decorrem diretamente da definição acima:

Teorema 4.1: *Se* $\lim a_n = \infty = \lim b_n$, *então*

(i) $\lim(a_n + b_n) = \infty$

(ii) $\lim a_n b_n = \infty$

(iii) $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$

(iv) *se* $c_n \geq a_n$ para $n \geq 1$, *então* $\lim c_n = \infty$

Teorema 4.2*: *Se* $x_n > 0$ e $\lim x_n = 0$, *então* $\lim \frac{1}{x_n} = \infty$.

Exemplos

1. $\lim 2^n = \infty$, pois $2^n > n$ e $\lim n = \infty$.

2. Se $a > 1$, então $a^n \to \infty$.

De fato, se $a > 1$, então $x = \frac{1}{a}$ satisfaz $0 < x < 1$, e, portanto, temos que $x^n \to 0$, como provado anteriormente, com $x^n > 0$. Pelo teorema acima, $\frac{1}{x} = a^n \to \infty$.

3. Se $x > 1$, então a série $\sum_{k=0}^{n} x^k \to \infty$. De fato, já vimos que

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \geq n$$

e como $\lim_{n\to\infty} n = \infty$, podemos usar o Teorema 4.1 (iv) para concluir que $\sum_{k=0}^{n} x^k \to \infty$..

Como no caso de séries convergentes, se uma série, $\sum_{k=0}^{n} a_k$, tende a ∞, dizemos que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$.

4. Se b_n é uma sequência crescente e não limitada, então $\lim b_n = \infty$. Por quê?

Observemos agora que se a_n é uma sequência que tende a infinito, então a sequência $b_n = -a_n$ também tem um comportamento muito bem definido, embora diferente do comportamento de a_n: os termos de b_n, para n grande, são negativos e $|b_n| \to \infty$. Convencionamos descrever esse comportamento dizendo que b_n *tende a menos infinito*.

Definição: Dizemos que uma sequência de números reais b_n *tende a menos infinito* quando n tende a infinito, se $|b_n| \to \infty$ e $b_n < 0$ para n suficientemente grande.

Se uma sequência b_n tende a menos infinito, dizemos também que o *limite de b_n é menos infinito* e usamos a notação

$$b_n \to -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \quad \text{ou, simplesmente,} \quad \lim b_n = -\infty$$

Como consequência imediata dessa definição, temos que $\lim b_n = -\infty$ exata-mente quando $\lim(-b_n) = \infty$. Em particular, são válidas as seguintes propriedades:

Teorema 4.3: *Se* $\lim a_n = -\infty = \lim b_n$, *então*

(i) $\lim(a_n + b_n) = -\infty$

(ii) $\lim a_n b_n = \infty$

(iii) $\lim \frac{1}{a_n} = 0$

(iv) *se* $c_n \leq a_n$, para $n \geq 1$, *então* $\lim c_n = -\infty$

Teorema 4.4: *Se* $x_n < 0$ e $\lim x_n = 0$, *então* $\lim \frac{1}{x_n} = -\infty$.

Teorema 4.5: *Se* $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = -\infty$ e $\lim c_n = c$, *então*

(i) $\lim a_n b_n = -\infty$

(ii) $\lim(a_n + c_n) = \infty$ *e* $\lim(b_n + c_n) = -\infty$

(iii) $\lim a_n c_n = \infty$ *se* $c > 0$

(iv) $\lim a_n c_n = -\infty$ *se* $c < 0$

Exemplo

5. $\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^3}{n+1} = -\infty.= -\infty$. De fato,

$$\frac{1-n^3}{n+1} = \frac{n^3(\frac{1}{n^3}-1)}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{n^2(\frac{1}{n^3}-1)}{1+\frac{1}{n}},$$

e, como $\frac{\frac{1}{n^3}-1}{1+\frac{1}{n}} \to -1 < 0$ e $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$, o Teorema 4.5 (iv) garante que

$\frac{1-n^3}{n+1} \to -\infty.$

Aqui devemos fazer uma observação bastante importante: muito embora estejamos usando uma terminologia semelhante àquela usada para sequências convergentes, ∞ e $-\infty$ não são números reais. Assim, se dizemos que $a_n \to$ a, onde a é um número real, estamos falando de uma sequência convergente, enquanto que ao falarmos que $b_n \to \infty$, ou que $c_n \to -\infty$, estamos falando de sequências que não convergem. Em particular, **não** podemos dizer que uma sequência converge a ∞.

Na verdade, embora tradicionalmente adotada, essa terminologia não é muito adequada, pois nos conduz ao que chamamos um "abuso de linguagem": como convencionamos que uma sequência tem limite exatamente quando é convergente, se $a_n \to \infty$ não podemos dizer que a_n possui limite, apesar de dizermos que o limite de a_n é ∞.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Seja a_n, $n \geq 1$, a sequência definida por:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ ímpar,} \\ \frac{n}{2} & \text{para } n \text{ par.} \end{cases}$$

Decida qual das afirmações abaixo é correta:

(a) $\lim a_n = 0$.

(b) a_n não é convergente.

(c) $\lim a_n = \infty$.

2. Seja a_n, $n \geq 1$, a sequência definida por:

$$a_n = \begin{cases} -\frac{n+1}{2} & \text{para } n \text{ ímpar,} \\ \frac{n}{2} & \text{para } n \text{ par.} \end{cases}$$

Decida qual das afirmações abaixo é correta:

(a) $\lim a_n = -\infty$.

(b) $\lim a_n = \infty$.

(c) $\lim |a_n| = \infty$.

3. Dê exemplo de sequências a_n e b_n que satisfaçam as condições: $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = -\infty$ e $\lim(a_n + b_n) = 6$.

4. Dê exemplo de sequências a_n e b_n que satisfaçam as condições: $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = -\infty$ e $\lim (a_n + b_n) = \infty$.

5. Dê exemplo de sequências a_n e b_n que satisfaçam as condições: $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = -\infty$ e $\lim(a_n + b_n) = -\infty$.

6. Dê exemplo de sequências a_n e b_n que satisfaçam as condições: $b_n \neq 0$ para $n \geq 1$, $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = -\infty$ e $\lim \frac{a_n}{b_n} = -\infty$.

7. Dê exemplo de sequências a_n e b_n que satisfaçam as condições: $b_n \neq 0$ para $n \geq 1$, $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = -\infty$ e $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$.

8. Dê exemplo de sequências a_n e b_n que satisfaçam as condições: $b_n \neq 0$ para $n \geq 1$, $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = -\infty$ e $\lim \frac{a_n}{b_n} = -5{,}8$.

9. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

   (a) Se x_n é uma sequência monótona e não limitada, então $\lim x_n = -\infty$ ou $\lim x_n = \infty$.

   (b) Se $|b_n| \to \infty$, então $b_n \to \infty$ ou $b_n \to -\infty$.

10. Seja $a_n = \sqrt{n}$, $n \geq 1$.

   (a) Mostre que (a_n) é crescente e não limitada.

   (b) $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ é convergente?

   (c) Mostre que $c_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$, converge a 0.

11. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

(a) Se $\lim a_n = \infty$ e $\lim b_n = \infty$, então $\lim(a_n + b_n) = \infty$.

(b) Se $\lim a_n = a$ *e* $\lim b_n = \infty$, então $\lim(a_n + b_n) = \infty$.

(c) Se $\lim a_n = \infty$ e $\lim b_n = \infty$, então $\lim(a_n - b_n) = 0$.

(d) Se $\lim a_n = \infty = \lim b_n$, então $\lim a_n \cdot b_n = \infty$.

(e) Se $\lim a_n = a$, $\lim b_n = \infty$ e $a \neq 0$, então $\lim a_n \cdot b_n = \infty$.

(f) Se $\lim a_n = 0$ e $\lim b_n = \infty$, então $\lim a_n b_n = 0$.

(g) Se $\lim a_n = \infty$ e $\lim b_n = \infty$, então $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$.

(h) Se $\lim a_n = 0$ e $\lim b_n = \infty$, então $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$.

(i) Se $\lim a_n = \infty$ e $\lim b_n = 0$, então $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

(j) Se $\lim a_n = 0$, então $\lim \frac{1}{a_n} = \infty$.

(k) Se $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = \infty$, então $\lim a_n \cdot b_n = \infty$.

(l) Se $\lim a_n = -\infty$ e $\lim b_n = \infty$, então $\lim a_n \cdot b_n = -\infty$.

(m) Se $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = a$ e $a \neq 0$, então $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$; onde $a \neq 0$.

(n) Se $\lim a_n = a$, $\lim b_n = \infty$ e $a \neq 0$, então $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$.

12. Se $p(x) = a_k x^k + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ com $a_k \neq 0 \neq b_m$ (ou seja, p e q são polinômios de grau k *e* m respectivamente), calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$$

considerando as três possibilidades:

(a) $k < m$.

(b) $k > m$.

(c) $k = m$.

13. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

(a) Se $\lim a_n = \infty$, então a_n é monótona crescente.

(b) Se a_n não é limitada, então $\lim a_n = \infty$.

(c) Se $\lim x_n = \lim y_n$, então $\lim(x_n - y_n) = 0$.

(d) Se $\lim x_n = \lim y_n$, então $\lim \frac{x_n}{y_n} = 1$.

14. Diga se as sequências u_n cujos termos gerais estão dados abaixo convergem. Para as convergentes diga qual é o limite:

(a) $u_n = \frac{n^2+8}{n^2+10^9}$.

(b) $u_n = \frac{3n^3+1}{n-10}$.

(c) $u_n = \frac{n^2+10^{30}}{n^3+1}$.

(d) $u_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$.

(e) $u_n = \frac{n+5}{3n+7}$.

(f) $u_n = \frac{(n+10)(n-6)(2n+1)}{n^2}$.

5. Exercícios suplementares

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Dê exemplos de sequências não constantes, tais que:

(a) $a_n \to -1,5$.

(b) $b_n \to 4,\overline{2}$.

(c) $c_n \to \frac{18}{3}$.

(d) $d_n \to -\pi$.

2. Em cada item, use o seu exemplo do item respectivo do exercício 1 para:

(a) dar uma aproximação para $-1,5$ com erro inferior a 10^{-10}.

(b) dar uma aproximação para $4,\overline{2}$ com erro inferior a 10^{-8}.

(c) dar uma aproximação para $\frac{18}{3}$ com erro inferior a 10^{-8}.

(d) dar uma aproximação para $-\pi$ com erro inferior a 10^{-2}.

3. Considere, para $n \geq 1$, a sequência dada por:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -2,09, \\
a_2 &= -2,0099, \\
&\vdots \\
a_n &= -2,\underbrace{0......0}_{n\ 0's}\underbrace{9.......9}_{n\ 9's}.
\end{aligned}
$$

Decida qual das afirmações abaixo é verdadeira:

(a) $a_n \to -2, 0\overline{9}$.

(b) $a_n \to -2$.

(c) (a_n) não é convergente.

(d) Nenhuma das respostas anteriores é correta.

4. Seja (a_n), $n \geq 1$, a sequência dada por

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -1,9287, \\
a_2 &= -1,928877, \\
a_3 &= -1,92888777, \\
&\vdots \\
a_n &= -1,92\overbrace{8...8}^{n\ 8's}\underbrace{7...7}_{n\ 7's}.
\end{aligned}
$$

Qual das afirmações abaixo é correta?

(a) $a_n \to -1{,}9287$.

(b) $\lim a_n = -1{,}93$.

(c) $\lim a_n = \frac{192}{100}$.

(d) $\lim a_n = -1{,}92\overline{8}$.

(e) (a_n) não converge.

(f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

5. Seja (a_n), $n \geq 1$, a sequência definida por:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -5,06,\\
a_2 &= -5,096,\\
a_3 &= -5,0996,\\
&\vdots\\
a_n &= -5,0\overbrace{9...9}^{n\ 9's}6.
\end{aligned}$$

Decida qual das afirmações abaixo é correta:

(a) $a_n \to -6$.

(b) $a_n \to -5{,}1$.

(c) $a_n \to -5{,}09$.

(d) (a_n) não converge.

(e) Nenhuma da afirmações anteriores é correta.

6. Seja (x_n), $n \geq 1$, a sequência definida por:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1,81,\\
x_2 &= 1,81881,\\
x_3 &= 1,818818881,\\
&\vdots\\
x_n &= 1,\ 81881...\overbrace{8...8}^{n\ 8's}1.
\end{aligned}$$

Decida qual das afirmações abaixo é verdadeira:

(a) $x_n \to \frac{181}{100}$.

(b) $x_n \to 1{,}\overline{81}$.

(c) $x_n \to a$, onde a é um número irracional.

(d) (x_n) não converge.

(e) Nenhuma da afirmações anteriores é correta.

7. Seja (a_n), $n \geq 1$, a sequência definida por:

$$a_n = \begin{cases} 38,\overbrace{20...0}^{n\text{ 0's}}\overbrace{9...9}^{n\text{ 9's}} & \text{se } n \text{ é ímpar e,} \\ 38,\underbrace{19...9}_{n\text{ 9's}}\underbrace{6...6}_{n\text{ 1's}} & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Decida qual das afirmações abaixo é correta:

(a) $a_n \to 38{,}21$.

(b) $a_n \to 38{,}l$.

(c) $a_n \to \frac{382}{10}$.

(d) (a_n) não é convergente.

8. Sabendo que uma sequência a_n satisfaz a condição

$$|a_n + \sqrt{3}| < 10^{-30} \text{ para } n \geq 1$$

decida qual das afirmações abaixo podemos garantir estar correta:

(a) $a_n \to -\sqrt{3}$.

(b) cada termo a_n é um truncamento para $-\sqrt{3}$ na n-ésima casa decimal.

(c) cada termo a_n é uma aproximação para $-\sqrt{3}$ com erro inferior a 10^{-30}.

(d) a sequência a_n não converge a $-\sqrt{3}$.

9. Considere a seguinte proposição:

$$\textit{Se } |a_n - 4,5| < 10^{-9} \textit{ para } n \geq 1, \textit{ então } a_n \to 4,5$$

(a) Dê dois exemplos para a proposição acima.

(b) Decida se a proposição é falsa ou é verdadeira.

10. Sabendo que uma sequência a_n satisfaz a condição

$$|a_n + 1{,}8| < 10^{-n} \text{ para } n \geq 1$$

decida qual das afirmações abaixo podemos garantir estar correta:

(a) $a_n \to -1{,}8$.

(b) $a_n \to 1{,}8$.

(c) cada termo a_n é o truncamento para $-1{,}8$ na n-ésima casa decimal.

(d) a sequência a_n não converge.

11. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

(a) Se $\lim a_n = -\frac{1}{6}$, então $\lim |a_n| = \frac{1}{6}$.

(b) Se $a_n \to -1,834\overline{5}$, então $a_n < -1,834$ a partir de algum índice n_0.

(c) Se $a_n \to 0{,}1234567\ldots$, então $a_n > 0{,}1234$ a partir de algum índice n_0.

(d) Se $a_n \to a$ e $b_n = a_{n+}5 + a_{n+20}$, para $n \geq 1$, então $b_n \to 2a$.

(e) Se $a = -2,28\overline{8}$, então podemos dizer que $a = -2,3$.

12. Em cada item abaixo, dê exemplo de sequência não constante com a propriedade indicada:

(a) todo termo de a_n é um número irracional e $a_n \to \pi$.

(b) todo termo de a_n é um número irracional e $a_n \to 1$.

(c) todo termo de a_n é um número racional e $a_n \to \pi$.

(d) todo termo de a_n é um número racional e $a_n \to 1$.

13. Sejam a_n uma sequência e a um número real tais que $|a_n - a| < \frac{1}{5^n}$ para $n > 1$. Dado um inteiro $K > 0$, determine n tal que a_n é uma aproximação de a com erro menor que 10^{-K}.

14. Em cada item abaixo, decida se a sequência dada é ou não convergente:

(a) $x_n = \dfrac{10n + 1}{2n^3 + n^2}$.

(b) $x_n = \dfrac{3n^5}{8n^5 + 3n^3}$.

(c) $x_n = n + \dfrac{1}{(-2)^n}$.

(d) $x_n = \dfrac{(n-1)^3(n-2)^2(8n-3)}{(n-7)(n+10)^5}$.

15. Dê exemplo de duas sequências a_n e b_n limitadas e não convergentes que satisfaçam $\lim a_n \cdot b_n = 0$.

16. Considere a seguinte proposição: *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, *então* x_n *é decrescente*.

    (a) $x_n = 2000n - n^2$ é um contraexemplo para a proposição?

    (b) $x_n = -\frac{n^3}{n+1}$ é um exemplo para a proposição?

    (c) $x_n = \begin{cases} -n & \text{se } n \text{ é par,} \\ 0 & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$ é um contraexemplo?

    (d) $x_n = \begin{cases} -(n-1) & \text{se } n \text{ é par,} \\ -(n+1) & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$ é um exemplo?

17. Dê um exemplo de sequências x_n e y_n limitadas tal que x_n não é convergente, y_n não é convergente e $x_n + y_n$ é convergente.

18. Dê um exemplo de uma sequência decrescente e convergente cujo limite é o número real $L = -8,\overline{7}$.

19. Dê um exemplo de uma sequência crescente e convergente cujo limite é o número real $L = -8,\overline{7}$.

20. Dê exemplo de uma sequência não monótona e convergente cujo limite é o número real $L = -8,\overline{7}$.

21. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

(a) Se a_n é uma sequência decrescente com $a_n < 0$ para $n \geq 1$, então $\lim a_n = \infty$.

(b) Se a_n é uma sequência crescente com $a_n > 0$ para $n \geq 1$, então $\lim a_n = \infty$.

(c) Se $\lim a_n = \infty$, então a_n é uma sequência crescente.

22. Seja a_n, $n \geq 1$, a sequência definida por:

$$a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{para } n \text{ ímpar,} \\ \frac{2}{n} & \text{para } n \text{ par.} \end{cases}$$

Decida qual das afirmações abaixo é correta:

(a) $\lim a_n = 0$.

(b) $\lim a_n = \infty$.

(c) a_n não é convergente.

23. Seja $a_n, n \geq 1$, a sequência definida por

$$a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{para } n \text{ ímpar,} \\ n & \text{para } n \text{ par.} \end{cases}$$

Decida qual das afirmações a seguir é correta:

(a) $\lim a_n = 6$.

(b) $\lim a_n = \infty$.

(c) a_n não é convergente.

24. Dê exemplo de duas sequências, a_n e b_n, que satisfaçam: $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = 0$ e $\lim a_n b_n = \infty$.

25. Dê exemplo de duas sequências, a_n e b_n, que satisfaçam: $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = 0$ e $\lim a_n b_n = 0$.

26. Dê exemplo de duas sequências, a_n e b_n, que satisfaçam: $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = 0$ e $\lim a_n b_n = -9$.

27. Dê exemplo de duas sequências, a_n *e* b_n, que satisfaçam: $b_n \neq 0$ para $n \geq 1$, $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = 0$ e $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

28. Dê exemplo de duas sequências, a_n e b_n, que satisfaçam: $b_n \neq 0$ para n ≥ 1, $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = 0$ e $\lim \frac{a_n}{b_n} = -\infty$.

29. Calcule:

    (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{51n^6 - 80}{n^4 - n^3}$.

    (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{23n^2 + n^7}{75 - n^3}$.

    (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + 91}{(n-2)(7n-5)}$.

    (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(6n-9)(n+3)(38-3n)}{(n^2+2)(4n-7)}$.

    (e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(5-n)(2-3n^2)(9-5n)}{(10n-57)(6-2n)}$.

    (f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(4n+9)(2-16n^2)(n+8)}{(3n^2+n)(5n-20)}$.

6. Apêndice

Neste apêndice apresentamos as demonstrações de alguns resultados enunciados no Capítulo 3. A leitura dessas demonstrações pode auxiliar o desenvolvimento da habilidade de lidarmos com argumentos que envolvem o difícil conceito de limite.

Seção 1

Lema 1.2: *Se* $|x_n| \leq a_n$ *e* $a_n \to 0$, *então* $x_n \to 0$.

Esse resultado é bastante evidente e portanto vamos demonstrá-lo, não com o objetivo de convencimento, mas sim para dar exemplos de argumentos envolvendo o conceito de convergência de sequências.

Demonstração do lema: Suponhamos que a_n tende a 0 e que x_n é uma sequência tal que $|x_n| \leq a_n$. Então, dado um inteiro positivo K, sabemos que podemos escolher um índice n_0 tal que

$$\text{se } n > no, \text{ então } |a_n| < 10^{-K}$$

pois a_n tende a 0. Afirmamos que esse mesmo índice n_0 serve também para a sequência x_n: de fato, como $|x_n| \leq a_n \leq 10^{-K}$, temos que

$$\text{se } n > n_0, \text{ então } |x_n| < 10^{-K}. \qquad \square$$

Teorema 1.3: *Se* lim $b_n = b$, então lim $|b_n| = |b|$.

Demonstração: Pelo Teorema 1.1, temos que $|b_n - b| \to 0$, já que $b_n \to b$. Da desigualdade triangular decorre que

$$||b_n| - |b|| \leq |b_n - b|.$$

Podemos aplicar o Lema 1.2 para $x_n = ||b_n| - |b||$ e $a_n = |b_n - b|$ para obter o resultado. $\square$

A sequência u_n dada por

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n}), \ u_0 = 2,$$

converge a $\sqrt{2}$:

Demonstração: Primeiro, mostremos que se $x > 0$, então $\sqrt{2}$ pertence ao intervalo cujos extremos são x e $\frac{2}{x}$.

Realmente, se $0 < x \leq \sqrt{2}$ (o caso $\sqrt{2} \leq x$ é análogo), então:

$$0 < x^2 \leq 2,$$

donde,

$$0 < 2x^2 \leq 4$$

e, portanto,

$$0 < \sqrt{2}\,|x| \leq 2.$$

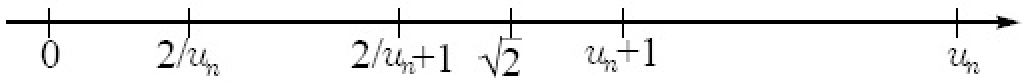
Como $x > 0$, temos que $0 < |x| = x$, donde

$$x \leq \sqrt{2} \leq \frac{2}{x}.$$

Agora, observamos que pela definição da sequência u_n acima, o termo u_{n+1} é o ponto médio entre u_{n+1} e $2/u_n$. Isto é, u_{n+1} é o ponto médio do intervalo I_n, cujos extremos são u_n e $2/u_n$. Em particular, a distância entre u_{n+1} e qualquer ponto do intervalo I_n não pode exceder a metade do comprimento do intervalo I_n, que é $|u_n - 2/u_n|$.

Por outro lado, contas simples nos dizem que $\frac{2}{u_{n+1}}$ também está no intervalo I_n, ou seja, podemos concluir que:

$$\left|u_{n+1} - \frac{2}{u_{n+1}}\right| \leq \frac{|u_n - 2/u_n|}{2}.$$



Logo, temos que,

$$\left|u_1 - \frac{2}{u_1}\right| \leq \frac{\left|u_0 - \frac{2}{u_0}\right|}{2},$$

donde,

$$\left|u_2 - \frac{2}{u_2}\right| \leq \frac{\left|u_1 - \frac{2}{u_1}\right|}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\left|u_0 - \frac{2}{u_0}\right|}{2} = \frac{\left|u_0 - \frac{2}{u_0}\right|}{2^2},$$

e, em geral, para cada n:

$$\left|u_n - \frac{2}{u_n}\right| \leq \frac{\left|u_0 - \frac{2}{u_0}\right|}{2^n}.$$

Como $u_0 = 2$, obtemos que para cada n:

$$\left|u_n - \frac{2}{u_n}\right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Isto é, o comprimento do intervalo I_n, de extremos u_n e $\frac{2}{u_n}$, é menor ou igual a $\frac{1}{2^n}$. Como provamos que $\sqrt{2}$ está nesse intervalo, podemos afirmar que a distância de $\sqrt{2}$ ao extremo u_n não pode ser maior do que o comprimento do intervalo todo, isto é, para cada n temos que

$$|u_n - \sqrt{2}| \leq \left|u_n - \frac{2}{u_n}\right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Como já sabemos que a sequência $\frac{1}{2^n}$ converge a 0, podemos usar o Lema 1.2 para concluir que $|u_n - \sqrt{2}|$ também converge a 0, e, portanto, que u_n converge ao número $\sqrt{2}$. □

Seção 3

Teorema 3.1: *Se* lim $x_n = a$ *e* lim $y_n = b$ *então*,

(i) $\lim(x_n + y_n) = a + b$;

(ii) $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

(iii) *se* $b \neq 0$, *então* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

Demonstração: Vamos demonstrar apenas a propriedade (i). Devemos mostrar que dado um inteiro K, conseguimos obter um inteiro n_0, a partir do qual (isto é, para $n > n_0$) tenhamos que:

$$|(x_n + y_n) - (a + b) < 10^{-K}$$

Para isso, dado o inteiro K, sabemos que o fato de $x_n \to a$ nos diz que podemos tomar um índice n_1 tal que:

$$\text{se } n > n_1, \text{ então } |x_n - a| < 10^{-(K+1)}.$$

Analogamente, como $y_n \to b$, podemos tomar um outro índice n_2 tal que

$$\text{se } n > n_2 , \text{ então } |y_n - b| < 10^{-(K+1)}.$$

Seja agora n_0 o maior do dois inteiros n_1 e n_2 Temos assim que se $n > n_0$, então $n > n_1$ e $n > n_2$ Logo, usando a desigualdade triangular, concluímos que se $n > n_0$, então:

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (a + b)| &\leq |x_n - a| + |y_n - b| \\ &< 10^{-(K+1)} + 10^{-(K+1)} \\ &= 2 \cdot 10^{-(K+1)} < 10^{-K}, \end{aligned}$$

que é o que precisávamos. □

Teorema 3.2: *Se a_n é uma sequência convergente, então a_n é limitada.*

Demonstração: Seja a_n uma sequência convergente e a o seu limite. Do que já vimos, decorre da definição de convergência que, dada uma tolerância e = 1, existe um índice n_0 tal que

$$\text{se } n > n_0, \text{ então } |a_n - a| < 1.$$

Seja L o maior dos números entre 1, $|a_1 - a|$, $|a_2 - a|$, ..., $|a_{n0} - a|$ e $M = L + |a|$. Então, para qualquer n, temos que

$$|a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq L + |a| = M.$$

Ou seja, mostramos que existe um número real M, tal que $|a_n| \leq M$ qualquer que seja o índice n. □

Teorema 3.6: *Se* $a_n \to 0$ e b_n *é uma sequência limitada, então* $a_n b_n \to 0$.

Demonstração: Como b_n é limitada, temos que existe um número real $M > 0$ tal que

$$|b_n| \leq M,$$

donde

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq M |a_n|$$

Como $|a_n| \to 0$, temos que lim $M |a_n| = M \cdot 0 = 0$. Pelo Lema 1.2, podemos concluir que $|a_n b_n| \to 0$ e portanto $a_n b_n \to 0$. □

A série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ *é convergente.*

Demonstração: Como se trata de uma série de termos não negativos, é suficiente provarmos que é limitada, isto é, devemos mostrar que a sequência $b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ é limitada. Para isso, observamos que

$$k! \geq 2^{k-1} = \frac{1}{2} 2^k,$$

e, portanto,

$$\frac{1}{k!} \leq 2 \frac{1}{2^k}.$$

Logo,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k}.$$

Mas sabemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2,$$

logo,

$$1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2,$$

e, portanto,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2},$$

donde

$$2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Ou seja, podemos concluir que para $n \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2 + 2 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 3.$$

Em particular, temos que

$$2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq 3.$$

Vamos usar o resultado do exemplo anterior para mostrar que a sequência

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

é convergente. Para isto, lembremos que, do binômio de Newton, temos que,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$

onde,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pela definição de fatorial, temos que se $k \geq 2$, então

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)).$$

Por outro lado, vemos que podemos escrever

$$n - j = n(1 - \frac{j}{n}),$$

para $1 \leq j \leq k-1$. Logo,

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$$

para $k \geq 2$. Fazendo agora $x = \frac{1}{n}$ no binômio de Newton, obtemos

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Substituindo $\binom{n}{k}$, para $k \geq 2$, pela expressão obtida acima, temos

$$a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}).$$

Como para $1 \leq j \leq k - 1$ os números $1 - \frac{j}{n}$ satisfazem $0 < 1 - \frac{j}{n} < 1$, temos que

$$0 < (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}) < 1$$

e, portanto, a série

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n})$$

é uma série de termos não negativos e satisfaz

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1.$$

Logo,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq 3$$

e, portanto, é convergente. Como

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^2},$$

concluímos que a_n é convergente e $2 \leq \lim a_n \leq 3$.

O limite da sequência $(1 + \frac{1}{n})^n$ é o número que conhecemos por e. Esse número é a base dos logaritmos naturais. Na verdade e também é o limite da série $\sum \frac{1}{k!}$ (que apenas provamos ser convergente), isto é, $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Seçao 4

Teorema 4.2: *Se* $x_n > 0$ e $\lim x_n = 0$, *então* $\lim \frac{1}{x_n} = \infty$.

Demonstração: Sabemos que, dado um número positivo B, podemos encontrar um inteiro positivo k tal que $10^k > B > 0$. Como $x_n \to 0$, sabemos que $|x_n| < 10^{-K}$ para n a partir de um índice n_0 Mas $x_n > 0$, logo, se $n > n_0$ temos

$$x_n = |x_n| < 10^{-K} < B^{-1},$$

donde $\frac{1}{x^n} > B$, para $n > n_0$. Pela definição temos que $\lim \frac{1}{x^n} = \infty$. □

CAPÍTULO 4

Funções Reais

O conceito de função é um dos mais importantes em Matemática. Na verdade, as funções permeiam nossa vida quotidiana mesmo que não nos apercebamos disso. Por exemplo, a quantia que pagamos a cada mês na nossa conta de luz depende, de uma forma determinada, da quantidade de energia que usamos nesse mês. O preço de uma corrida de táxi depende da distância que percorremos. Se nos detivermos por um momento a pensar nesse tema, acharemos com facilidade muitos exemplos de quantidades que dependem de outras quantidades de uma maneira bem determinada. Com as noções de número real e de função, a Matemática fornece recursos com os quais podemos descrever e analisar determinadas relações de dependência entre quantidades.

Neste capítulo, introduzimos o que denominamos de *funções reais*, isto é, determinadas relações de dependência entre quantidades descritas por números reais. Um exemplo, a que já nos referimos acima, é o que poderíamos chamar de *função conta de luz*, que a um número real (quantidade de energia utilizada) associa um outro número real (quantidade de reais que deve ser paga). As funções reais são o objeto de estudo do Cálculo.

Na apresentação do tema funções demos especial atenção ao que denominamos *leitura gráfica*, que trata de relacionar informações algébricas (fornecidas por expressões algébricas, como equações, desigualdades etc.) com informações geométricas (fornecidas por gráficos).

As funções reais e suas representações

Iniciamos aqui o estudo de funções reais, isto é, funções que associam números reais a números reais. Comecemos por definir precisamente o significado do que estamos chamando de função real.

Definição: Uma *função real*, f, é um objeto matemático que, a cada número x de um subconjunto D dos números reais, associa um único número $f(x)$. O conjunto D é chamado o *domínio* de f e o conjunto dos números reais que estão associados por f a algum número de D é chamado o *conjunto imagem* (ou, simplesmente, a *imagem*) de f.

Usamos a notação $f : D \to \mathbb{R}$ para dizer que estamos tratando da função real f cujo domínio é o conjunto D. Se $x \in D$ usamos também a notação $x \mapsto f(x)$ para dizermos que a função f associa o número $f(x)$ ao número x. Usamos também a notação dom(f) para o domínio de f.

Convencionamos, ainda, denotar o conjunto imagem de f por Im(f) e, se $K \subset D$, o conjunto dos números $f(x)$ com $x \in K$ é chamado de *imagem de K pela função f* e é denotado por $f(K)$.

Exemplos

1. Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^2 + 1$. Essa definição é equivalente à sentença

"*f é a função que a um número real do intervalo* [–1, 1] *associa a soma do quadrado desse número com o número* 1".

2. *Para cada número real x, seja d(x) a distância do ponto que representa o número x na reta real ao ponto que representa o* 0.

Como sabemos, a distância de um número x ao 0 é o que denominamos de valor absoluto ou módulo de x e denotamos por $|x|$. Assim, a função definida nessa frase é $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $d(x) = |x|$.

3. Consideremos um carro que vai do Rio de Janeiro a São Paulo em 5 horas.

Seja V a função que a um instante de tempo t, num período de cinco horas, associa a velocidade instantânea desenvolvida pelo carro t horas após o início da viagem.

Essa sentença define uma função real cujo domínio é o intervalo [0, 5]. De fato, para cada número real t do intervalo [0,5], existe um único número real $V(t)$ que é a velocidade, medida em km/hora, desenvolvida pelo carro t horas após o início da viagem. Esse é um exemplo de uma função real para a qual não existe uma expressão algébrica que descreva a regra de associação da função.

De uma maneira geral, podemos dizer que as funções reais podem ser definidas por expressões algébricas, por sentenças, gráficos, ou tabelas. Uma função só pode ser definida por meio de uma tabela se o seu domínio é um conjunto finito. Se não é esse o caso, tabelas darão apenas informações parciais sobre a função. E essa é a situação mais geral, isto é, na maioria dos casos, as tabelas são resultado de um número finito de medições dos valores de uma função cujo domínio não é um conjunto finito.

Por exemplo, no exemplo **2** acima, o motorista poderia anotar a velocidade do carro a cada, digamos, meia hora de viagem, obtendo a seguinte tabela:

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$V(t)$	0	90	85	90	75	80	100	110	90	90	0

Que nos diz, por exemplo, que $V(1, 5) = 90$, ou seja, uma hora e meia após o início da viagem o carro estava a uma velocidade de 90 km/h. Por outro lado, essa tabela não nos informa nada a respeito da função V, ou seja, da velocidade do carro entre os valores de tempo tabelados.

Na verdade, se o domínio de uma função é finito e suficientemente pequeno de tal forma que possamos utilizar uma tabela para dar todos os valores da função, não precisamos dos recursos teóricos da matemática para analisar essa função, basta lermos a tabela. Mas, como já dissemos, essa não é a situação mais comum.

Mais geralmente, pelo processo que podemos chamar de modelagem matemática, busca-se encontrar funções que possam ser analisadas usando os recursos teóricos da Matemática e que, dentro de limites aceitáveis de erros de aproximação, reproduzam um comportamento verificado numa tabela obtida por um número finito de experimentos. Essa função teórica poderá então ser usada para prever resultados para outros valores não tabelados. Vejamos um exemplo que vem da Física:

Suponhamos que uma bola é lançada verticalmente para cima de uma distância de 1 metro do chão, com um impulso que imprime à bola uma velocidade inicial de 20 metros por segundo. Temos que, a cada instante t após o seu lançamento, a bola estará a uma distância bem determinada, $d(t)$, do chão, ou seja, estamos falando de uma função real.

Suponhamos agora que, contando o tempo a partir do momento de lançamento, fizemos medições da distância da bola ao chão, obtendo a seguinte tabela:

t	1	2	3	4
$d(t)$	16,2	21,4	16,9	2,6

Certamente, usando apenas os dados da tabela, não podemos dizer, por exemplo, qual a distância da bola ao chão após cinco segundos do lançamento. No entanto, usando as leis da Física, podemos concluir que, a cada instante t, entre o momento do lançamento e o momento em que a bola toca o chão, a distância, $d(t)$, da bola ao chão é dada pela expressão

$$d(t) = 1 + 20t - 4{,}9t^2.$$

Agora, primeiro observamos que, se usamos essa expressão para calcular $d(1)$, obtemos um valor diferente daquele dado na tabela. Por outro lado, repetindo o experimento para fazer novas medições e calcular uma tabela com mais valores, poderemos verificar que os novos valores obtidos estão sempre próximos dos valores teóricos dados pela expressão. Isso nos permite pensar que a função teórica obtida a partir das leis da Física é um bom modelo para descrever o movimento do experimento, e que as diferenças observadas provavelmente são decorrentes da falta de precisão de nossas medidas.

Pois bem, uma vez adotado que essa função teórica é um modelo correto, podemos usar os recursos de análise da Matemática para responder questões como: em quanto tempo a bola para de subir e começa a cair, ou em que instante a bola tocará o chão etc, sem precisar fazer experimentos. Em particular, podemos saber que cinco segundos após o lançamento a bola já estará no chão. Mais ainda, usando o cálculo diferencial, que não é nosso tema aqui, poderemos dizer qual a velocidade da bola a cada instante t de tempo após o lançamento.

Como nesse exemplo, muitos problemas da Física, da Biologia e da Economia, entre outras áreas, são modelados por funções reais. Nesse texto, nosso objetivo é tratar de desenvolver e explicitar recursos matemáticos para o estudo de funções reais e não tratar do que chamamos de modelagem matemática.

Ou seja, trataremos aqui da questão de como obter informações de uma função dada, em vez de buscarmos obter funções reais que modelem problemas de outras áreas. Esse enfoque de modelagem poderá vir a ser tratado em outra oportunidade. Neste texto, os modelos, como o que tratamos antes, aparecem apenas a título de exemplos do processo em si, e não como motivação para o estudo de determinadas funções.

Uma convenção usualmente adotada para definirmos funções que possuem uma expressão algébrica é que, não sendo dado explicitamente o domínio, devemos assumir que o domínio é o conjunto de números reais para os quais a expressão faz sentido, isto é, os números com os quais podemos efetuar as operações indicadas na expressão.

Exemplos

4. Seja $f(x) = \frac{1}{x}$. Sabemos que 0 é o único número real com o qual a operação $1/x$ não pode ser efetuada, pois não podemos dividir nenhum número pelo 0 (ou, em outras palavras, 0 é o único número real que não possui um recíproco). Logo, pela convenção acima, o domínio de f é o conjunto de todos os números reais diferentes de 0.

5. Seja $f(x) = x^5 - 2x + 1$. Como a expressão que define f pode ser avaliada em qualquer número real, assumimos que o domínio de f é $\mathbb{R}$.

6. Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Como sabemos que apenas os números reais não negativos possuem uma raiz quadrada, o domínio de f neste exemplo é $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Podemos também dizer simplesmente que f está definida para $x \geq 0$.

A utilidade dessa convenção é a economia de palavras e notações quando estamos estudando teoricamente o comportamento de funções reais que aparecem com frequência na solução de problemas.

No entanto, na prática, quando estamos tratando de um problema que pode ser modelado por uma função real, seu domínio é, em geral, determinado pelo problema e não apenas pela expressão que dá a regra de associação da função. Vejamos um exemplo:

> *Qual é a área de um terreno retangular que tem um lado medindo c metros e que pode ser cercado com* 100 *metros de corda?*
>
> Solução: Denotemos por x a medida de comprimento de um dos lados do terreno e por y a medida do outro lado. Então, a área do terreno vai ser dada pelo produto xy e, como o perímetro deve ser 100 metros, x e y satisfazem a relação
>
> $$2(x + y) = 100,$$
>
> ou seja,
>
> $$y = 50 - x.$$
>
> Essa relação nos dá o número y em função do número x. Como nesse problema x e y são números que correspondem a comprimentos, devemos impor as condições

$$x > 0 \quad \text{e} \quad y > 0,$$

donde

$$x > 0 \quad \text{e} \quad y = 50 - x > 0,$$

e, portanto,

$$0 < x < 50.$$

Então, se denotarmos por $\mathcal{A}(x)$ a área de um terreno de que trata o problema, temos que

$$\mathcal{A}(x) = xy = x(50 - x),$$

ou seja, a área é dada pela função $\mathcal{A}(x) = -x^2 + 50x$ para $0 < x < 50$. Logo, a resposta é que c deve ser um número entre 0 e 50 para que o problema tenha solução e, nesse caso, a área é $\mathcal{A}(c)$. Ou seja, função $\mathcal{A} : (0, 50) \to \mathbb{R}$, definida pela expressão $\mathcal{A}(x) = -x^2 + 50x$, fornece a área do terreno em questão, a partir do comprimento de um dos lados.

Consideremos agora a função $f(x) = -x^2 + 50x$. Como as operações da expressão que define f podem ser efetuadas com qualquer número real, pela convenção que estabelecemos acima, o domínio de f é o conjunto de todos os números reais.

No entanto, muito embora as duas funções, $\mathcal{A}$ e f, tenham a mesma regra de associação, seus domínios são distintos e, portanto, as funções são diferentes. De fato, se $x \notin [0, 50]$, então $f(x) < 0$ e, portanto, não pode ser uma medida de área.

Uma outra situação em que é usual nos permitirmos definir uma função sem explicitar seu domínio é quando definimos funções a partir de outras funções já definidas.

Por exemplo, dada uma função $f : [-1, 2) \to \mathbb{R}$, podemos definir uma função g pela relação $g(x) = f(x) + 1$, sem nos referirmos explicitamente ao domínio de g. Neste caso, convencionamos que o domínio de g é o conjunto de números reais para os quais a relação (ou regra) que define g faz sentido. Nesse exemplo, o domínio de g é o mesmo intervalo $[-1, 2)$.

Um outro exemplo é a função h definida por $h(x) = f(x - 1)$. Nesse caso, vemos que para calcular $h(x)$ é preciso que possamos calcular $f(x - 1)$. Isso só pode ser feito se o número $(x - 1)$ está no domínio de f, isto é,

$$-1 \leq x - 1 < 2, \text{ donde } 0 \leq x < 3,$$

e, portanto, o domínio de h é o intervalo $[0,3)$.

Operações com funções

Uma outra maneira de definirmos novas funções reais a partir de funções reais conhecidas é usarmos as operações algébricas com números reais. Por exemplo, se f e g são funções reais *e x é* um número que pertence ao domínio de cada uma dessas funções, então $f(x)$ e $g(x)$ são números reais, podendo, portanto, serem somados, resultando no número real $f(x) + g(x)$. Podemos então definir uma nova função, h, que a cada número x, comum aos dois domínios, associa o número $h(x) = f(x) + g(x)$.

Em geral, se f e g são funções reais definimos as funções:

(i) soma, $f + g$, dada por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

(ii) produto, fg, dado por

$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$

(iii) quociente, $\frac{f}{g}$, dado por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Em relação ao domínio de cada uma dessas funções, mantemos a convenção estabelecida acima, isto é, o domínio é o conjunto dos números reais para os quais a regra que define a função faz sentido.

Assim, tanto o domínio da soma $f + g$ quanto o domínio do produto $f\,g$ *é o* conjunto dos números que estão na interseção dos domínios de f e g. Já o domínio do quociente não contém os valores de x para os quais $g(x) = 0$, uma vez que não podemos efetuar divisões por 0. Assim, o domínio da função quociente é constituído dos números da interseção dos domínios de f e g que satisfazem a condição $g(x) \neq 0$.

Exemplo

7. Sejam $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x^2 - 1$.

Como não estamos impondo nenhuma condição para os domínios, assumimos, seguindo a convenção que estabelecemos, que o domínio de cada função é o conjunto dos números reais para o qual a respectiva regra de associação faz sentido: nesse caso, as duas regras fazem sentido para qualquer número real e, portanto, o domínio de cada uma delas é $\mathbb{R}$. Então,

(a)

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$= (x+2) + (x^2 - 1)$$

$$= x^2 + x + 1,$$

sendo que o domínio de $f + g$, nesse exemplo, é o conjunto dos reais.

(b)

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$= (x+2)(x^2 - 1)$$

$$= x^3 + 2x^2 - x - 2,$$

sendo que o domínio de $f\,g$, nesse exemplo, é o conjunto dos reais.

(c)

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{x+2}{x^2 - 1},$$

sendo que o domínio de $\frac{f}{g}$, nesse exemplo, é o conjunto dos números reais que satisfazem a condição $x^2 - 1 \neq 0$, ou seja, $\text{dom}(\frac{f}{g}) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Utilizando a convenção estabelecida no texto, determine o domínio das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \dfrac{7x^5 - 4x^3 + 2}{x^2 - 9}$.

   (b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x+4)(x-1)}$.

   (c) $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 - 3x}$.

   (d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 3}}$.

   (e) $f(x) = \dfrac{5x}{1 - \sqrt{x+3}}$.

2. Seja $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x + 1$. Determine as funções abaixo e explicite o domínio em cada caso:

   (a) $(f + g)(x)$.

   (b) $(fg)(x)$.

   (c) $(\frac{f}{g})(x)$.

3. Seja $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ e $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$. Determine as funções abaixo e explicite o domínio em cada caso:

   (a) $(f + g)(x)$.

   (b) $(fg)(x)$.

   (c) $(\dfrac{f}{g})(x)$.

4. Seja $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x > 0, \\ 3x - 1 & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$ e $g(x) = |3x - 6|$ Determine as funções

abaixo e explicite o domínio em cada caso:

(a) $(f + g)(x)$.
(b) $(fg)(x)$.
(c) $(\frac{f}{g})(x)$.

5. Seja $f(x) = x^2 - 3x + 1$ e $g(t) = t^2 - 3t + 1$. Decida qual das afirmações abaixo é correta:

(a) $f = g$.
(b) $f(x) = g(t)$.
(c) $f \neq g$, pois $x \neq t$.

6. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x > 1, \\ 3x - 1 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

(a) Qual é o domínio de f?
(b) Calcule $f(0)$, $f(-1)$ e $f(2)$.
(c) Seja $g(x) = f(x - 2)$. Determine g explicitando seu domínio.
(d) Para que valores de x tem-se que $f(x) = 0$?
(e) Seja $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Qual é o domínio de h?

7. Seja $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Calcule $f(x - 3)$ e $f(t^2 + 1)$.

8. Seja $f(x) = |x|$. Expresse a função f sem usar o símbolo $|\ |$.

9. Seja $f(x) = |x - 1|$. Expresse a função f sem usar o símbolo $|\ |$.

10. Seja $f(x) = |x| - 1$. Expresse a função f sem usar o símbolo $|\ |$.

11. Seja $f(x) = |x^3|$. Expresse a função f sem usar o símbolo $|\ |$.

12. Seja $f(x) = x^2 - 3x + 2$ e $g(x) = f(|x|)$.Expresse a função g sem usar o símbolo $|\ |$

13. Seja $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$.

(a) Para que valores de x tem-se que $f(x) < 1$?

(b) Expresse a função f sem usar o símbolo $|\ |$.

14. O perímetro de um retângulo de largura l e comprimento c é 36cm. Encontre a função que dá a área do retângulo em função da largura l.

15. Quadrados de tamanhos iguais são cortados em cada canto de um pedaço retangular de papelão medindo 4 cm × 7 cm. Uma caixa sem tampa é construída virando-se os lados para cima. Encontre a função que dá o volume da caixa em função do comprimento dos lados do quadrado a ser cortado.

16. Encontre a função que dá a distância entre o ponto $P(2, 0)$ e um ponto Q pertencente à parábola $f(x) = x^2$.

17. Um cilindro circular reto de altura a e raio r deve ser inscrito numa esfera de raio 2. Determine o raio r desse cilindro em função de sua altura a.

18. Deseja-se fabricar latas cilíndricas sem tampa com 15 cm^3 de volume. Encontre a função que dá, em cm^2 , a quantidade de material necessária para fazer uma lata. Resolva o mesmo problema para a lata com tampa.

19. Um retângulo de largura l e comprimento c deve ser inscrito num círculo de raio 3. Determine a largura l desse retângulo em função de seu comprimento c.

20. Uma pista de atletismo de 800 m é formada por dois semicírculos e dois segmentos de reta paralelos. Encontre a função que dá a área do retângulo formado pelos trechos retos da pista em função do comprimento de um dos trechos retos.

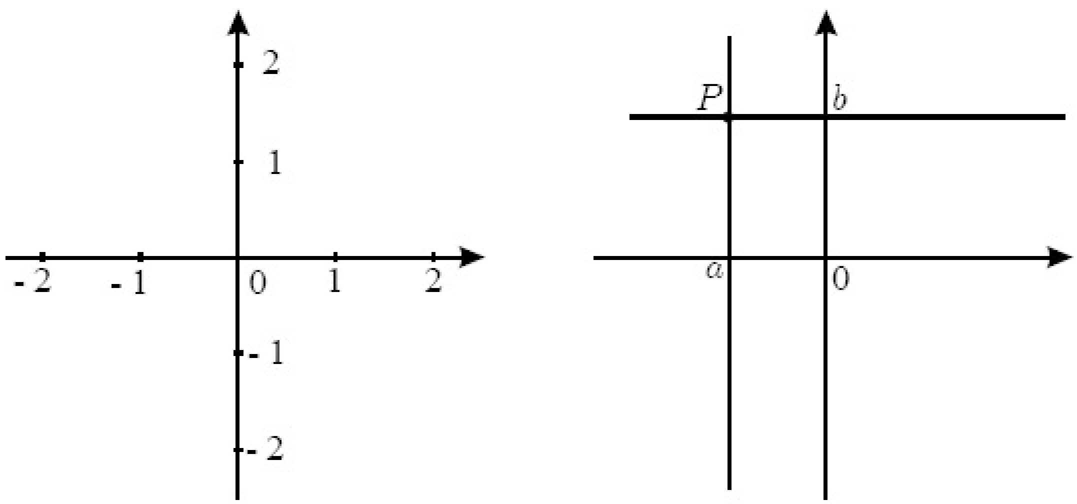
21. Um cilindro circular reto de altura a e raio r deve ser inscrito num cone reto de altura 3 e de raio 2. Determine o raio r desse cilindro em função de sua altura a.

2. O Plano Cartesiano e o gráfico de uma função real

O Plano Cartesiano

Para falarmos de gráficos de funções reais, necessitamos da representação geométrica do produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ou seja, do Plano Cartesiano.

Para isso tomamos duas retas perpendiculares, uma horizontal, que será chamada o eixo das abscissas, e uma vertical, o eixo das ordenadas. Interpretamos cada uma dessas retas como sendo cópia de uma reta real, de tal forma que as origens de cada uma dessas cópias correspondem ao ponto de interseção dos eixos. Os números reais positivos correspondem, na reta vertical, aos pontos da semi-reta superior, e na reta horizontal aos pontos da semi-reta à direita da origem. O Plano Cartesiano é o plano gerado por essas duas retas perpendiculares (veja Figura 2.1a).



(a) (b)

Figura 2.1

Dado um par ordenado de números reais (a, b), localizamos no eixo horizontal o ponto que corresponde ao número real a, e no eixo vertical o ponto que corresponde ao número real b. Pelo ponto que representa a, traçamos uma reta vertical e, pelo ponto que representa b, uma horizontal. Essas duas retas perpendiculares se interceptam num único ponto P do Plano Cartesiano que associamos ao par (a, b) (Figura 2.1b).

Com isso, temos que a cada par ordenado de números reais corresponde um único ponto do Plano Cartesiano.

Por outro lado, dado um ponto qualquer, P, do plano, temos que a reta vertical que passa por P intercepta o eixo horizontal num único ponto e, portanto, determina um primeiro número real a. Analogamente, a reta horizontal que contém P determina um único ponto no eixo vertical e, portanto, um segundo número real b. Ou seja, cada ponto do plano gerado pelos dois eixos determina um par ordenado de números reais. Os números reais a e b, são chamados as coordenadas do ponto P, sendo a (o primeiro número do par ordenado) denominado a abscissa de P e b sua ordenada.

Observe que, assim como identificamos o conjunto de números reais com um objeto geométrico, a reta, estamos agora identificando o conjunto de pares ordenados de números reais com um outro objeto geométrico, o plano. Essa correspondência entre pares ordenados de números reais e pontos do plano é chamada de um sistema de coordenadas do plano.

Como sabemos, quando fazemos a identificação dos números reais com uma reta, ao escolhermos os dois pontos que representam, respectivamente, o número 0 e o número 1, estamos determinando uma escala, isto é, estamos escolhendo um segmento unitário.

A escolha do ponto que representa o número 1 no eixo horizontal corresponde à escolha de uma escala nesse eixo. Analogamente, a escolha do ponto que representa o número 1 no eixo vertical corresponde à escolha de uma escala no eixo vertical. Como veremos mais adiante, muitas vezes é conveniente usarmos um sistema de coordenadas com escalas diferentes em cada eixo.

Pela identificação que fizemos temos que dois pontos estão numa reta horizontal se a segunda coordenada desses pontos é o mesmo número real. Em outras palavras, os pontos de uma reta horizontal são os pontos de coordenadas (x, y), onde b é um número real fixo e x percorre os reais.

Convencionamos descrever uma reta horizontal dizendo que são os pontos cujas coordenadas (x, y) satisfazem a equação

$$y = b, x \in \mathbb{R},$$

Em particular, o eixo horizontal é a reta $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Na Figura 2.2, r_1 é a reta cuja equação é

$$y = -0{,}5, x \in \mathbb{R},$$

e para a reta r_2 a equação é

$$y = 1, x \in \mathbb{R}$$

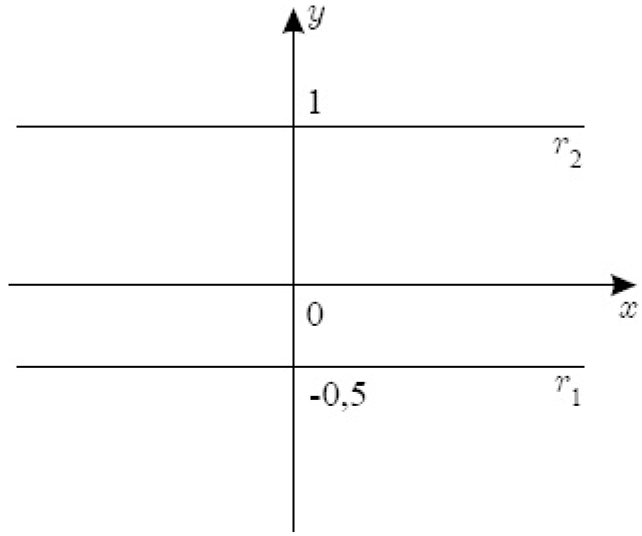


Figura 2.2

Analogamente, os pontos cujas coordenadas (x, y) satisfazem a equação

$$x = a,\ y \in \mathbb{R}$$

são os pontos de uma reta vertical. Em particular, temos que dois pontos estão numa mesma reta vertical se e somente se eles possuem a mesma abscissa. O eixo vertical tem por equação $x = 0$, $y \in \mathbb{R}$.

E usual nos referirmos a qualquer dessas retas, por exemplo a uma reta vertical, dizendo simplesmente a reta vertical $x = a$, ou simplesmente, a reta $x = a$, ficando subentendida a frase $y \in \mathbb{R}$.

Na Figura 2.3 são dadas a reta vertical $x = -2$ e a reta vertical $x = 1$.

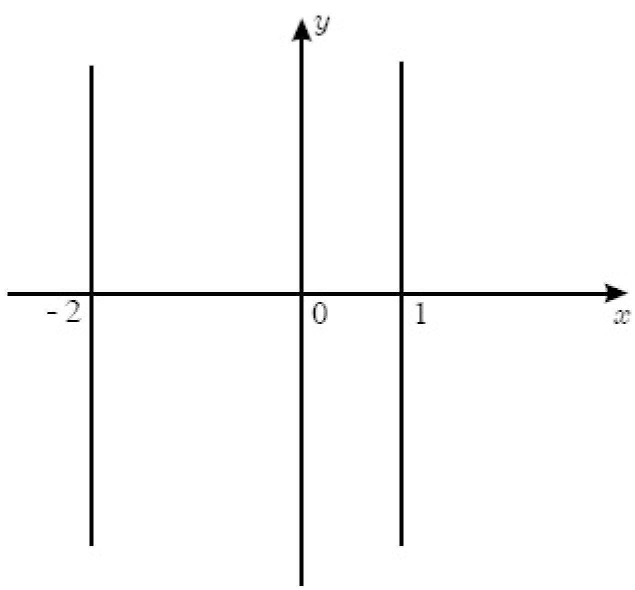


Figura 2.3

A reta $y = x$

Num sistema de coordenadas do Plano Cartesiano, consideremos os pontos para os quais a primeira coordenada é igual à segunda coordenada. Por exemplo, os pontos cujas coordenadas são (0, 0), (1,1), (−1, −1) e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ são pontos desse tipo. Em geral, podemos descrever esses pontos dizendo que são os pontos de coordenadas (x, y) que satisfazem a igualdade

$$y = x.$$

Por outro lado, podemos provar que todo ponto desse tipo é ponto de uma única reta no plano, a reta que passa pelos pontos (0,0) e (1,1): daí dizermos que $y = x$ é a equação dessa reta (Figura 2.4).

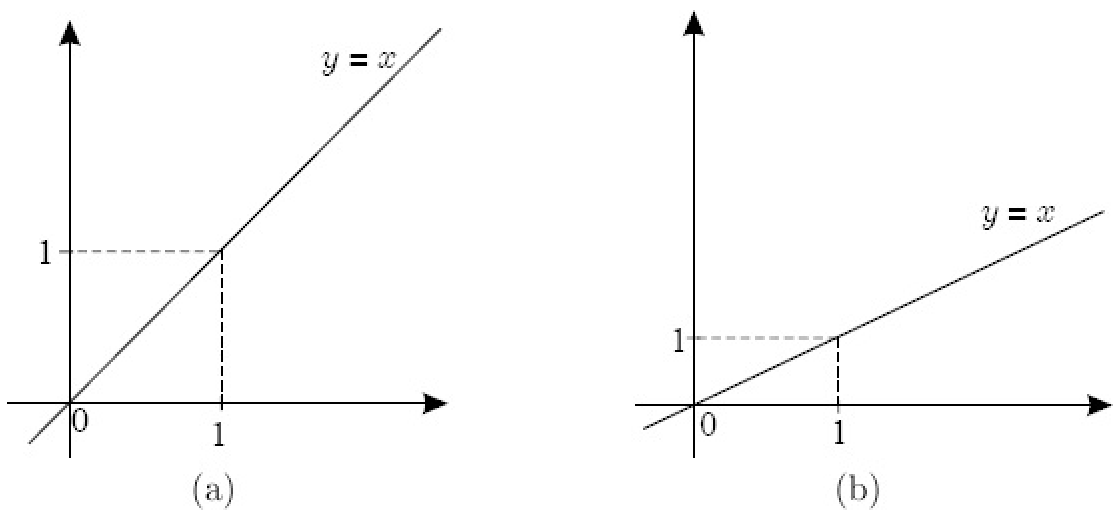


Figura 2.4

Observe que se adotamos a mesma escala nos dois eixos, então a reta $y = x$ coincide com a bissetriz do primeiro quadrante (Figura 2.4a), mas isso não ocorre se as escalas são diferentes (Figura 2.4b).

Uma propriedade bastante útil é que, se conhecemos a representação de um número real em um dos eixos, podemos usar a reta $y = x$ para determinar graficamente a representação desse número no outro eixo:

- se P é o ponto que representa o número a no eixo horizontal, isto é, $P = (a, 0)$, então o ponto $Q = (0, a)$, que representa o número a no eixo vertical, é obtido usando-se a reta $y = x$ da seguinte maneira: por P

traçamos um reta vertical e determinamos sua interseção com a reta $y = x$, que é o ponto cujas coordenadas são (a, a); o ponto Q é a interseção da reta horizontal que passa por (a, a) com o eixo vertical.

- se Q é o ponto que representa o número a no eixo vertical, isto é, $Q = (0, a)$, então o ponto $P = (a, 0)$, que representa o número a no eixo horizontal, é obtido usando-se a reta $y = x$ da seguinte maneira: por Q traçamos um reta horizontal e determinamos sua interseção com a reta $y = x$, que é o ponto cujas coordenadas são (a, a); o ponto P é a interseção da reta vertical que passa por (a, a) com o eixo horizontal.

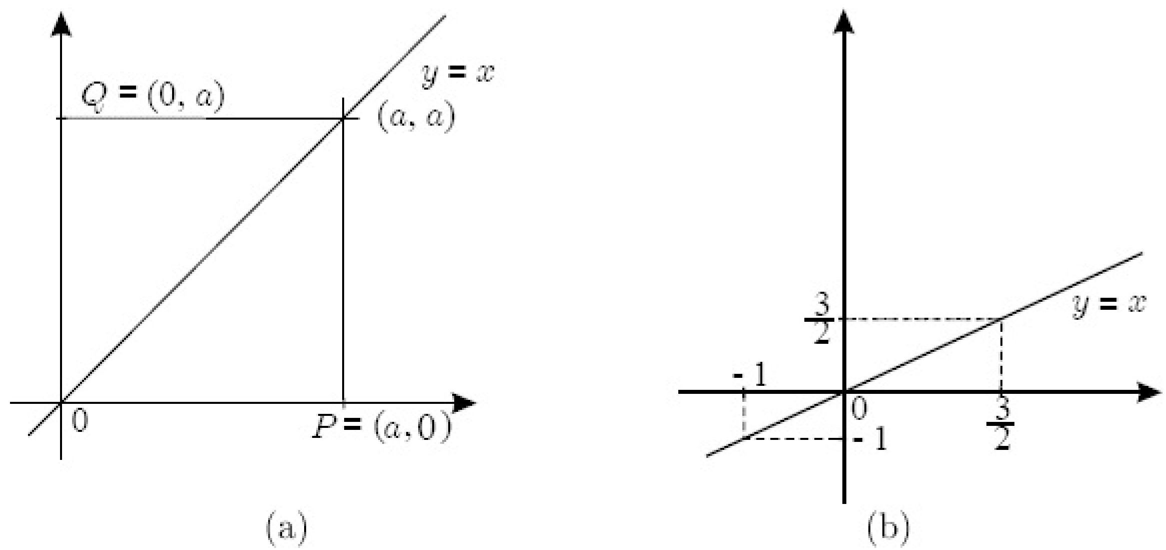


Figura 2.5

O gráfico de uma função real

Uma função real f determina um conjunto de pares ordenados de números reais: o conjunto constituído de todos os pares da forma $(x, f(x))$, onde x pertence ao domínio da função e $f(x)$ é o número real que está associado ao número x pela função f.

Esse conjunto é denominado o gráfico de f e, pelo que vimos antes, podemos identificá-lo com um conjunto de pontos do Plano Cartesiano.

Observe que, da maneira como formamos os pares ordenados, estamos identificando os números do domínio de f com pontos do eixo horizontal e os valores da imagem de f com pontos do eixo vertical.

Na Figura 2.6 damos o gráfico de uma função real cujo domínio é o intervalo $[-1, \frac{5}{2}]$ e a imagem, o intervalo $[-\frac{1}{2}, 2]$.

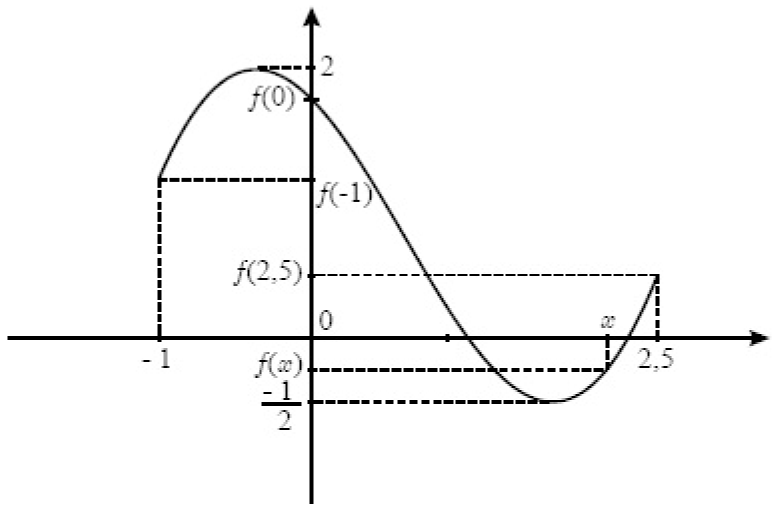


Figura 2.6

Concluímos então que uma função real determina um subconjunto do Plano Cartesiano. Esse fato nos sugere a seguinte pergunta: *que subconjuntos do Plano Cartesiano podem ser gráficos de funções?*

Para respondermos a essa pergunta analisaremos com cuidado as propriedades do gráfico de uma função *f*.

Sabemos que, como *f* é uma função, a cada número *x* do domínio de *f* está associado um único número real *f(x)*; isto nos diz que para cada número real *x* do domínio de *f* existe um único par ordenado no gráfico de *f* cuja abscissa é *x*. Essa propriedade pode ser descrita geometricamente por:

(i) *Uma reta vertical pode no máximo conter um ponto do gráfico de uma função.*
(ii) *Uma reta vertical de equação* $x = \text{a}$, $y \in \mathbb{R}$ *contém um ponto do gráfico de uma função se, e somente se, o número a está no domínio da função.*

Na Figura 2.7, onde é dado o gráfico da mesma função *f* da Figura 2.6, a reta vertical r_1, cuja equação é $x = -1,\ 5$, não toca o gráfico de *f* pois o número -1.5 não pertence ao domínio de *f*.

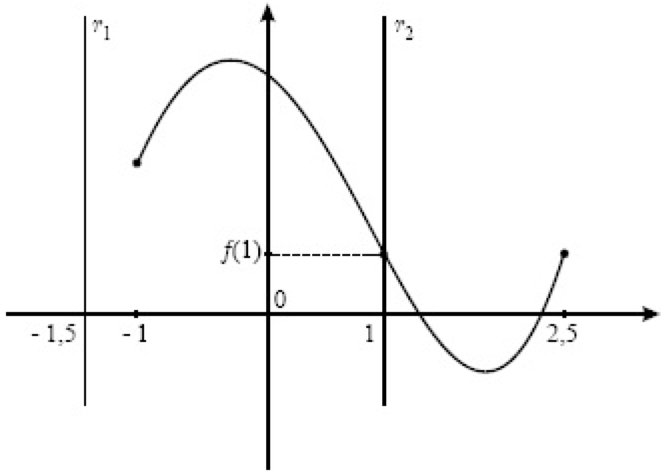


Figura 2.7

Por outro lado, a reta vertical r_2 intercepta o gráfico de f em exatamente um ponto, o ponto de coordenadas $(1, f(1))$, pois o número 1 está no domínio de f e a equação dessa reta é $x = 1$.

Com essa descrição, podemos responder à pergunta feita acima, caracterizando geometricamente os subconjuntos do plano que são gráficos de funções, ou, em outras palavras, conjuntos de pontos do plano que determinam, de uma maneira natural, uma função real: *são os conjuntos que têm a propriedade de interceptarem retas verticais no máximo em um ponto*.

Mais precisamente, se G é um tal conjunto, então G é o gráfico de uma função f definida da seguinte maneira:

1. *O domínio de f é o conjunto de números reais a, tais que a reta cuja equação é $x = a$, $y \in \mathbb{R}$ intercepta o conjunto G.*

2. *Se a está no domínio de f, então $f(a)$ é a ordenada do ponto de G cuja abscissa é o número a.*

Como as curvas desenhadas nas Figuras 2.8a e 2.8b só podem interceptar uma reta vertical no máximo em um ponto, concluímos que a curva de 2.8a define uma função $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ e as curvas de 2.8b definem uma função g: $[-2, -\frac{1}{2}] \cup [0, 1] \to \mathbb{R}$.

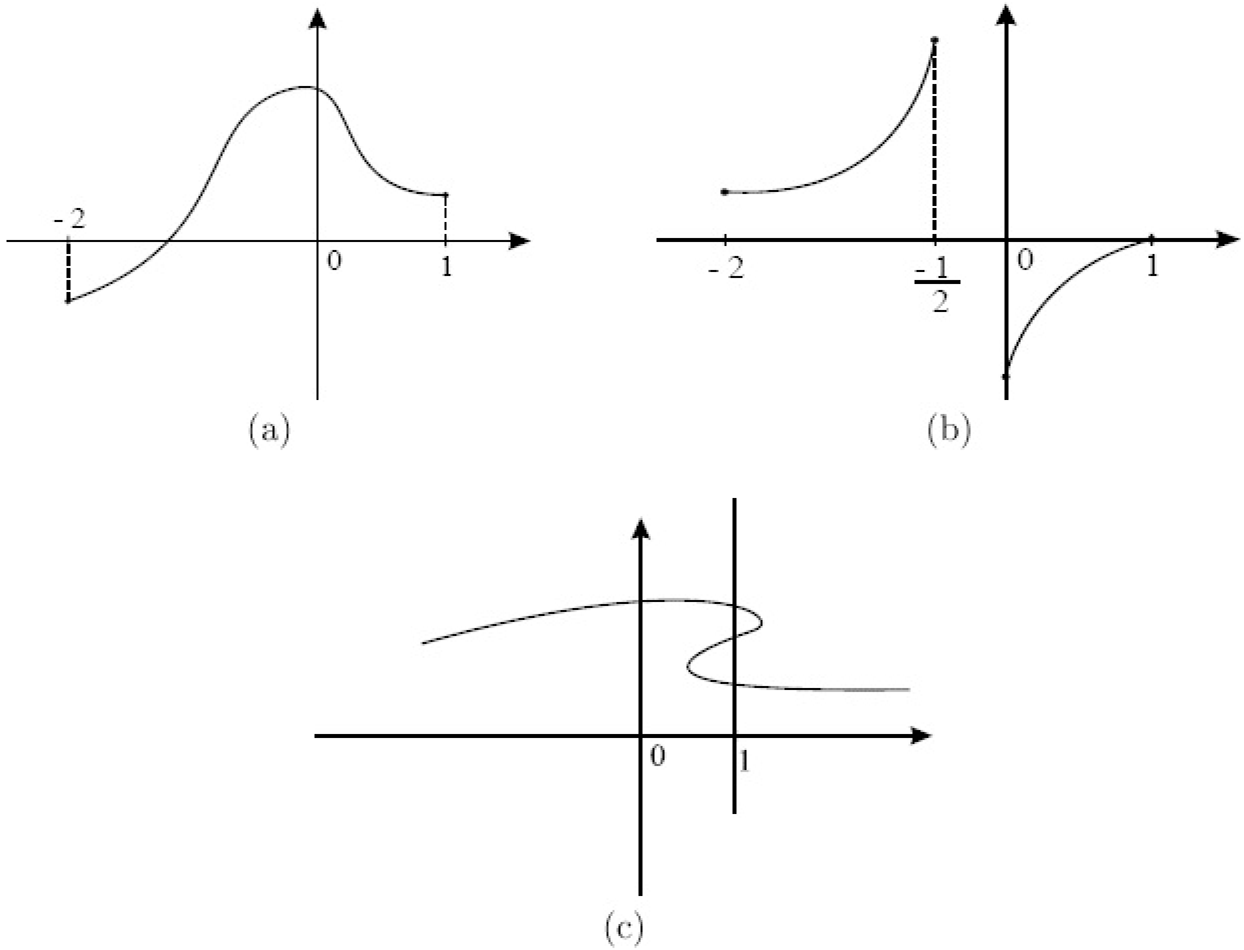


Figura 2.8

Já a curva da Figura 2.8c não é gráfico de nenhuma função, pois a reta vertical desenhada na figura corta a curva em mais do que um ponto.

A importância do gráfico de funções vem do fato de que é o gráfico que nos permite ter uma visão global do comportamento de uma função; é o gráfico que nos fornece de uma forma compacta várias informações sobre a função. Decorre daí a necessidade de aprendermos a “ler” gráficos de funções.

Leitura gráfica

Um dos temas com que nos deparamos com bastante frequência quando estudamos matemática trata do problema de resolver uma equação como, por exemplo,

$$x^2 + 3x + 2 = 1 \tag{4.1}$$
$$-3x + 5 = 0 \tag{4.2}$$
$$x^3 - 3x + 1 = -1 \tag{4.3}$$
$$\text{sen}\,(2x) + \cos x = 0 \tag{4.4}$$

Sabemos que um número real a é uma solução de uma equação do tipo acima se, ao substituirmos a variável x pelo número a, a igualdade indicada é satisfeita.

Por exemplo, se fazemos $x = 1$ em (3) obtemos que $-1 = -1$, que é verdade e, portanto, temos que $x = 1$ é uma solução de (3). Por outro lado, se fazemos $x = 0$ na mesma equação obtemos que $1 = -1$, o que é falso e, portanto, podemos afirmar que $x = 0$ não é solução de (3).

Considerando a equação (1), a primeira observação que fazemos é que, se definimos uma função f pela expressão à esquerda da igualdade, isto é, $f(x) = x^2 + 3x + 2$ para $x \in \mathbb{R}$, podemos reescrever a equação como

$$f(x) = 1.$$

Quando escrita dessa forma, vemos que um número a é solução dessa equação quando $f(a) = 1$.

Em outras palavras, perguntar se a equação (1) tem solução é perguntar se o número 1 está na imagem da função f e, nesse caso, as soluções são os números do domínio de f que estão associados ao número 1 pela função.

Em geral, equações como as dadas na página anterior sempre podem ser co-locadas no contexto de funções e descritas como sendo do tipo $f(x) = b$, onde f é uma função real e b um número real dado.

No exemplo (2), f é a função definida por

$$f(x) = -3x + 5 \text{ e } 6 = 0.$$

Em (3)

$$f(x) = x^3 - 3x + 1, \text{ com } b = -1,$$

e em (4)

$$f(x) = \text{sen}\,(2x) + \cos(x), \text{ com } b = 0.$$

E em geral temos que, nesse contexto,

• *perguntar se uma equação $f(x) = b$ tem solução é perguntar se o número b está na*

imagem da função f.
• *resolver a equação é encontrar os números do domínio de f que estão associados pela função ao número b.*

Essa formulação é importante pois nos permite interpretar graficamente equações do tipo acima. De fato, decorre da definição de gráfico de função que

• *a equação $f(x) = b$ tem solução se e somente se a reta $y = b$ corta o gráfico de f.*
• *se é esse o caso, as soluções são dadas pela abscissas dos pontos de interseção do gráfico com a reta $y = b$.*

Na Figura 2.9 abaixo, é dado o gráfico de uma função f cuja imagem é o intervalo $[-\frac{3}{2}, 1]$.

Em 2.9a, vemos que a reta $y = b$ intercepta o gráfico de f nos pontos de coordenadas (x_1, b), (x_2, b) e (x_3, b). Isso nos diz que a equação $f(x) = b$, para o valor de b indicado na figura, tem três soluções, a saber, os números x_1, x_2 e x_3 indicados no eixo horizontal.

Já a reta $y = c$, desenhada em 2.9b, não tem interseções com 0 gráfico de f, pois o número c marcado no eixo vertical não pertence à imagem de f. Por sua vez, isso nos diz que, nesse caso, a equação $f(x) = c$ não tem soluções.

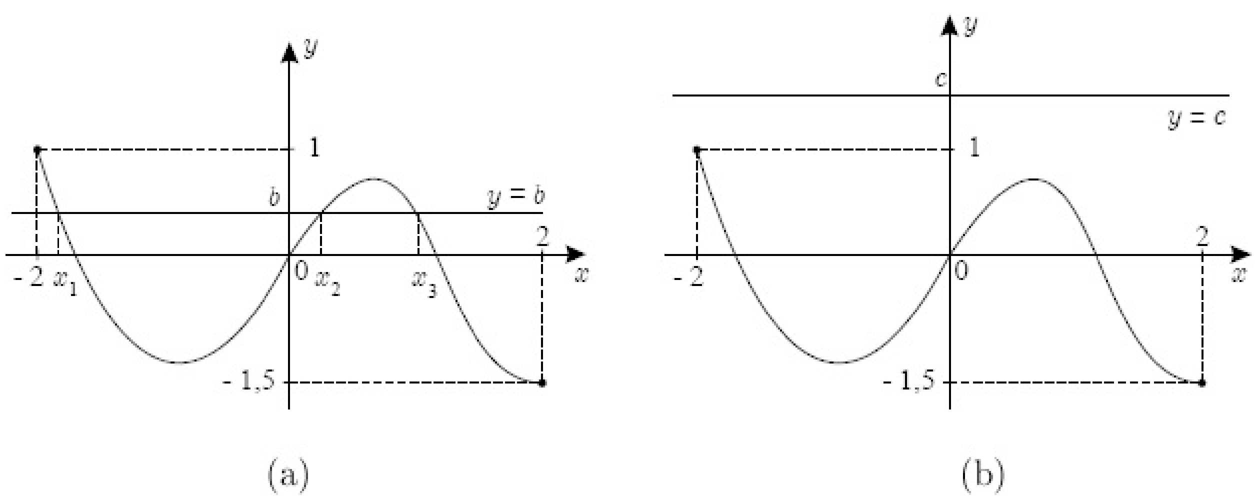


Figura 2.9

Podemos ver também que o gráfico nos dá informações sobre as soluções das desigualdades $f(x) < b$ e $f(x) > b$. De fato,

• *as soluções da desigualdade $f(x) > b$ são os números x do domínio de f para os quais* *os pontos correspondentes do gráfico, $(x, f(x))$, estão acima da reta $y = b$.*

Analogamente,

- *as soluções da desigualdade $f(x) < b$ são os números x tais que o ponto correspondente do gráfico $(x, f(x))$ está abaixo da reta $y = b$.*

No exemplo dado na Figura 2.9, as soluções da desigualdade $f(x) < b$, onde b está designando o número marcado no eixo vertical em 2.9a, são os números que pertencem ao conjunto $(x_1, x_2) \cup (x_3, 2]$. As soluções da desigualdade

$$f(x) > b$$

são os números do conjunto $[-2, x_1) \cup (x_2, x_3)$, enquanto que para o número indicado por c em 2.9b as soluções de

$$f(x) < c$$

são os números do intervalo $[-2, 2]$ (isto é, todo o domínio de f). Por outro lado, a desigualdade

$$f(x) > c$$

não tem solução (nenhum ponto do gráfico de f está acima da reta $y = c$).

Observamos agora que uma equação como a dada acima, $f(x) = b$, é uma caso particular da equação mais geral,

$$f(x) = g(x),$$

onde f e g são funções reais. De fato, basta tomarmos para g a função constante igual a b, isto é, $g(x) = b$ para qualquer x.

Para analisarmos a situação geral, consideremos as funções f e g cujos gráficos são dados abaixo na Figura 2.10.

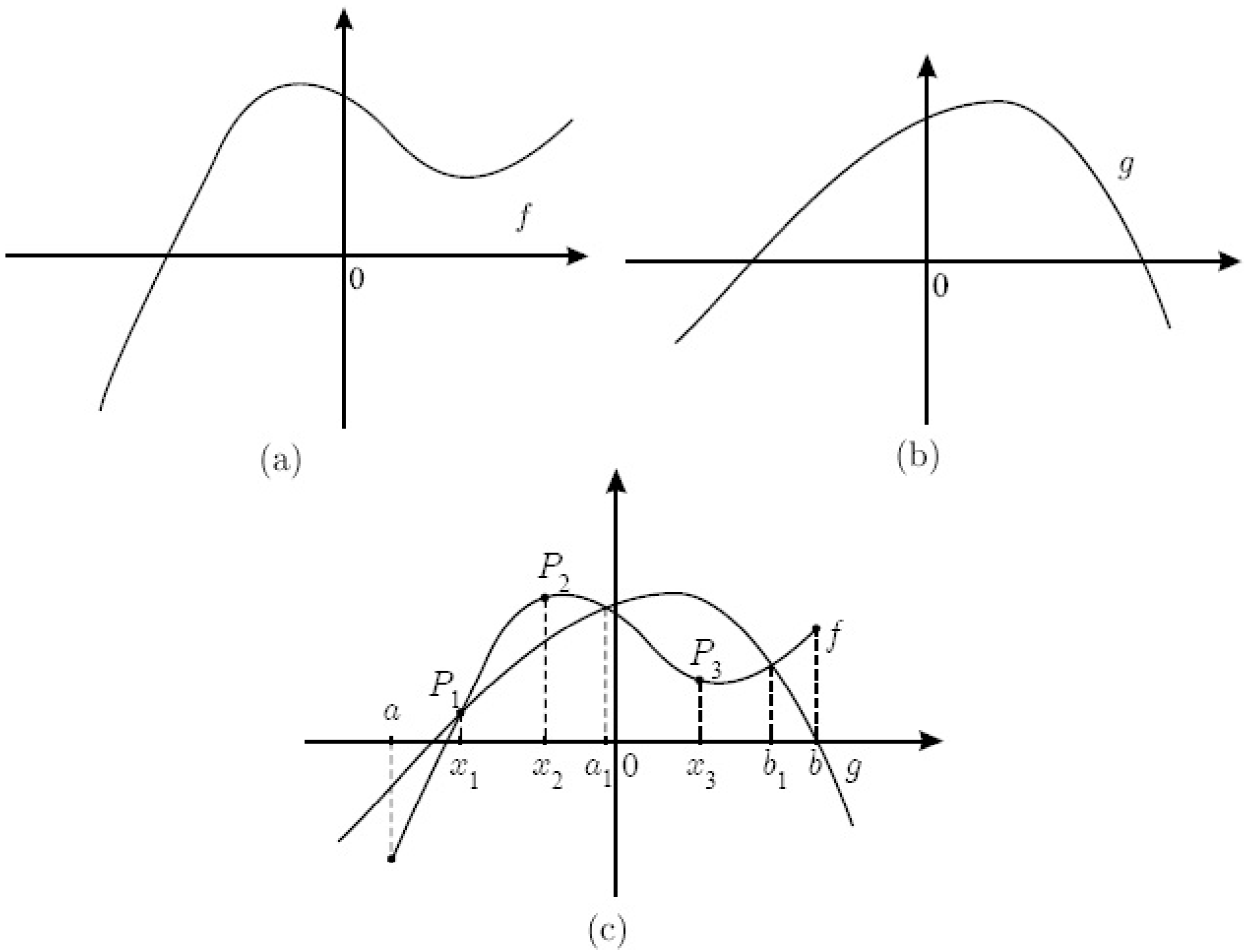


Figura 2.10

Nessa figura, onde em 2.10c são dados os gráficos de f e g num mesmo sistema de coordenadas, vemos que o ponto P_1, cuja abscissa é o número X_1, é um ponto de interseção dos dois gráficos.

Como P_1 é um ponto do gráfico de f, temos que suas coordenadas são dadas pelo par $(x_1, f(x_1))$. Por outro lado, P_1 também é um ponto do gráfico de g, logo, suas coordenadas também têm que ser dadas por $(x_1,\ g(x_1))$ e, portanto, podemos concluir que

$$f(x_1) = g(x_1),$$

ou seja, x_1 é uma solução da equação $f(x) = g(x)$.

Consideremos agora o ponto P_2, cuja abscissa é x_2, indicado na figura. Temos que P_2 é um ponto do gráfico de f e portanto sua ordenada é $f(x_2)$. Podemos ver que P_2 está acima do ponto do gráfico de g cujas coordenadas são $(x_2, g(x_2))$. Isto nos diz que a ordenada de P_2 tem que ser maior do que a ordenada de $(x_2, g(x_2))$, isto é,

$$f(x_2) > g(x_2),$$

e, portanto, x_2 é uma solução da desigualdade $f(x) > g(x)$.

De maneira análoga, considerando o ponto P_3, podemos concluir que x_3 é uma solução da desigualdade $f(x) < g(x)$.

Em geral, temos que:

- *As soluções da equação* $f(x) = g(x)$ *são as abscissas dos pontos de interseção do gráfico de* f *com o gráfico de* g.

- *Os números x, tais que o ponto do gráfico de* f, $(x, f(x))$, *está acima do ponto* $(x,g(x))$ *do gráfico de g, são as soluções da desigualdade* $f(x) > g(x)$.

- *Os números x tais que o ponto do gráfico de* f, $(x, f(x))$, *está abaixo do ponto* $(x, g(x))$ *do gráfico de g, são as soluções da desigualdade* $f(x) < g(x)$.

Exemplos

1. Para as funções f e g cujos gráficos são dados na Figura 2.10, temos:

- as soluções de $f(x) = g(x)$ são $x = x_1$ ou $x = a_1$ ou $x = b_1$.
- as soluções de $f(x) > g(x)$ são os números do conjunto $(x_1, a_1) \cup (b_1,b]$.
- as soluções de $f(x) < g(x)$ são os números do conjunto $[a, x_1) \cup (a_1, b_1)$.

2. Na Figura 2.11 abaixo, damos os gráficos da função seno e da reta $y = \frac{x}{2}$, para x no intervalo $[-\pi, \pi]$:

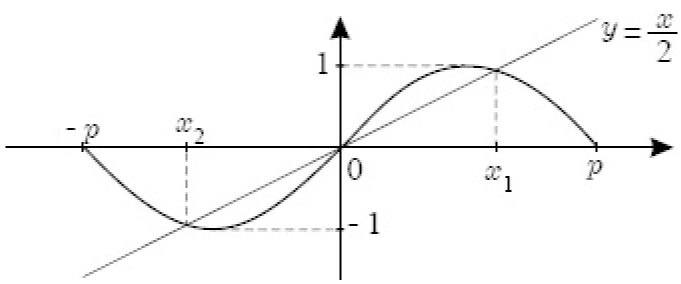


Figura 2.11

Pela figura, vemos que no intervalo $[-\pi, \pi]$, a reta $y = \frac{x}{2}$ corta o gráfico de seno em três pontos. Do que vimos podemos concluir que nesse intervalo a equação

$$\text{sena } x = \frac{x}{2}$$

tem três soluções.

Por outro lado, sabemos que a função seno satisfaz a condição $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$, qualquer que seja o número real x. Logo, como $\pi > 2$, temos que se $x > \pi$, então

$$x > \pi > 2,$$

donde,

$$\frac{x}{2} > \frac{\pi}{2} > 1 \geq \text{sen } x,$$

e, se $x < -\pi < -2$, então

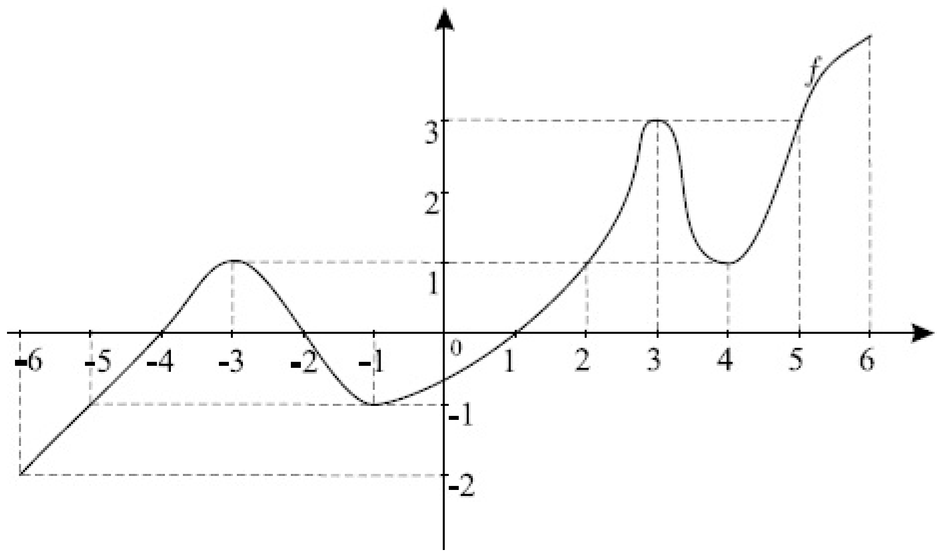
$$\frac{x}{2} < -\frac{\pi}{2} < -1 \leq \text{sen } x.$$

Ou seja, podemos concluir que no conjunto dos números reais as únicas soluções da equação $\text{sen } x = \frac{x}{2}$ são as três soluções $x = x_1$ ou $x = 0$ ou $x = x_2$, marcadas na Figura 2.11.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

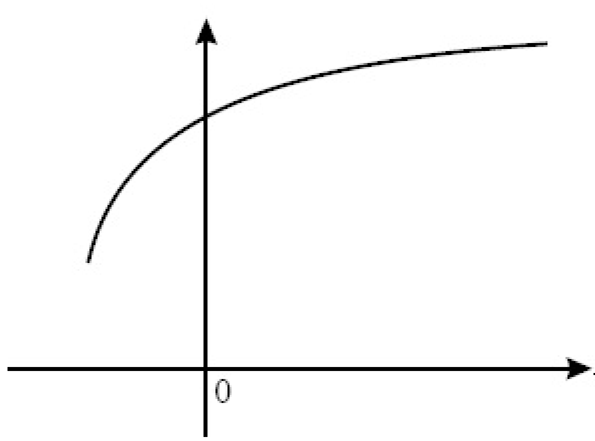
1. Considere a função dada pelo gráfico a seguir.

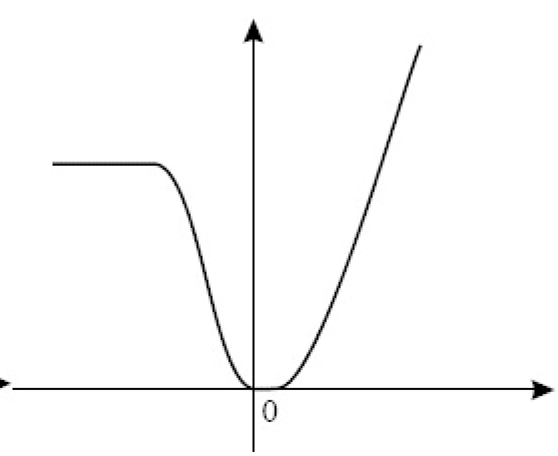


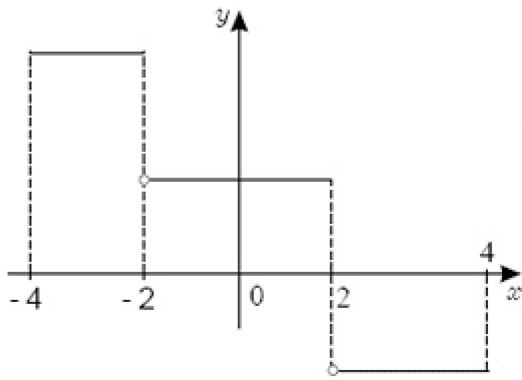
Determine os valores de x para os quais:

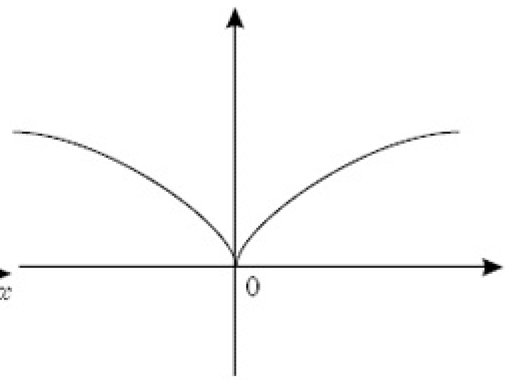
(a) $f(x) = 0$.
(b) $f(x) < 0$.
(c) $f(x) > 0$.
(d) $f(x) < -1$.
(e) $f(x) \geq 3$.
(f) $f(|x|) \geq 0$.
(g) $|f|(x) < 3$.
(h) $-1 < f(x) < 3$.

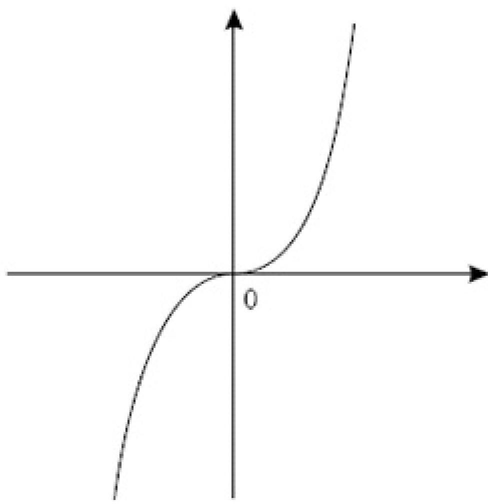
2. Selecione dentre as figuras a seguir aquelas que representam gráficos de funções e marque, no eixo horizontal, o domínio da função.

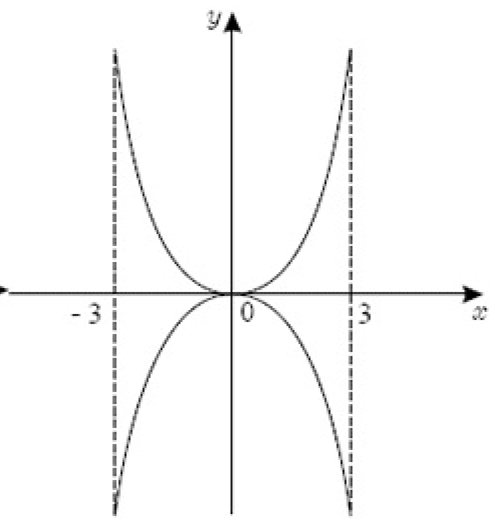


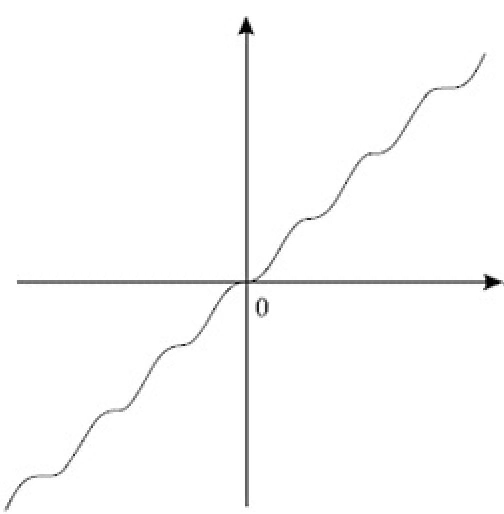


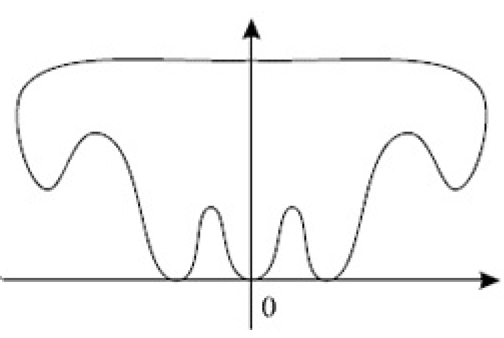








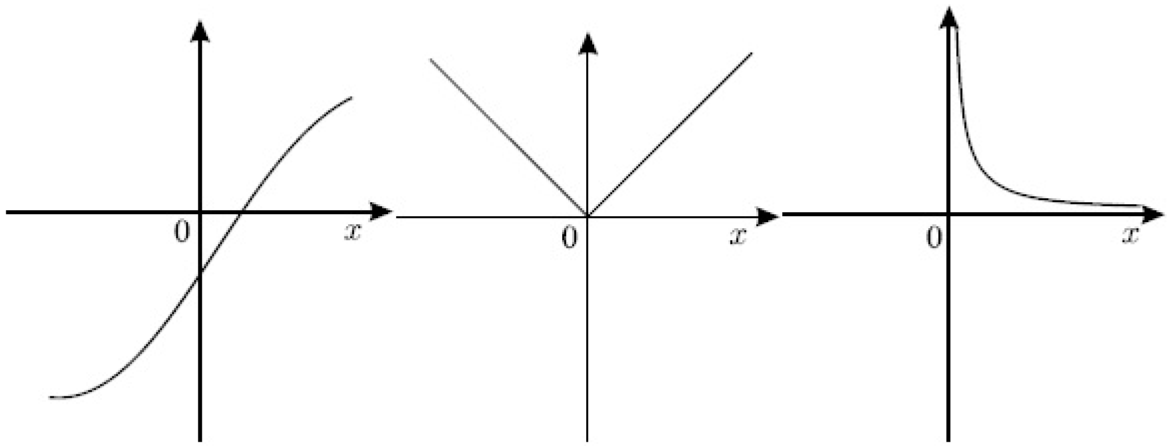




3. Um dos gráficos abaixo é um gráfico de uma função *f* que satisfaz

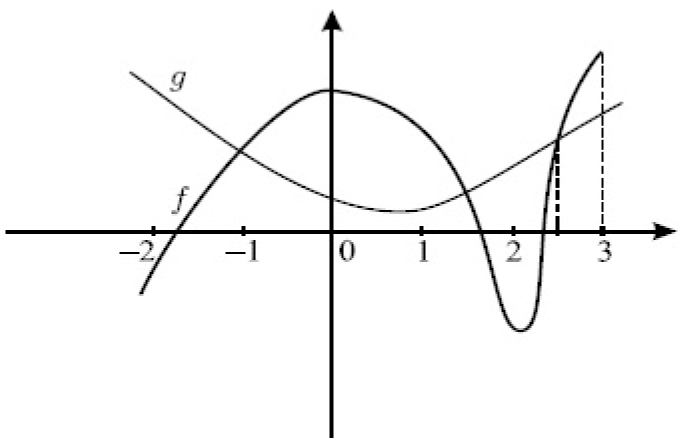
$$x > y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Qual deles?



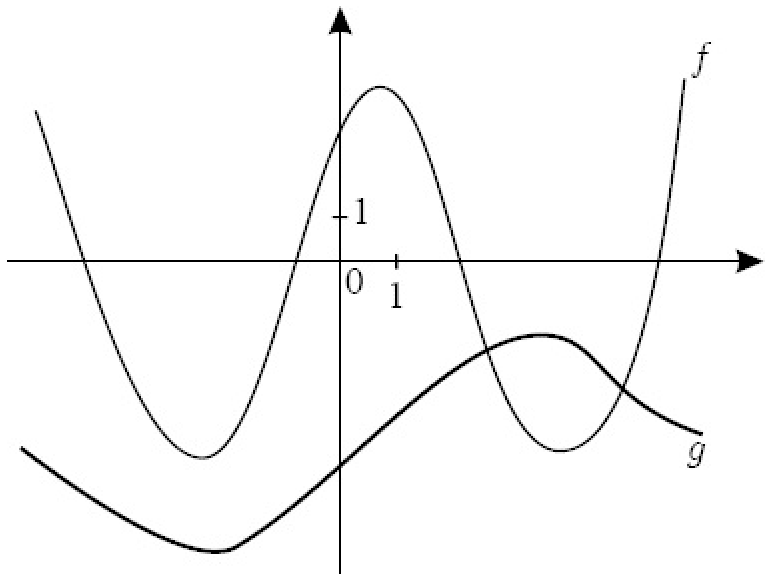
(a) (b) (c)

4. Na figura abaixo estão desenhados os gráficos de duas funções f e g.



(a) Para que valores de x tem-se que $f(x) > g(x)$?
(b) Para que valores de x tem-se que $f(x) < g(x)$?
(c) Quais são as soluções da equação $f(x) - g(x) = 0$?

5. Sejam f e g as funções definidas pelos gráficos abaixo.

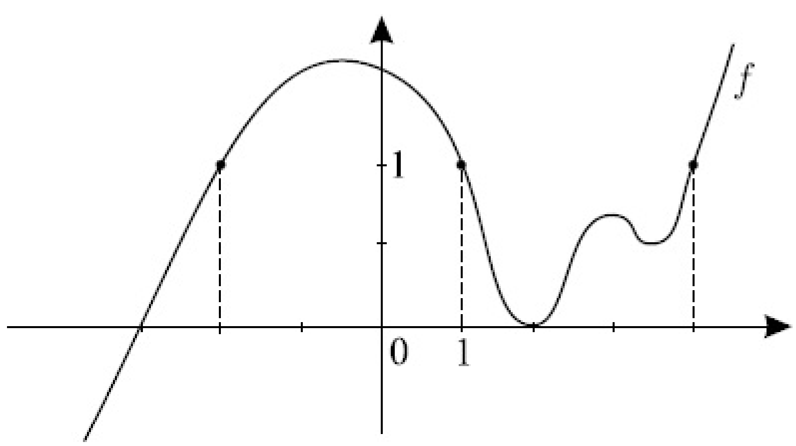


(a) Marque no eixo horizontal as soluções da equação $f(x) - g(x) = 0$.

(b) Marque no eixo horizontal os intervalos onde $f(x) < g(x)$.

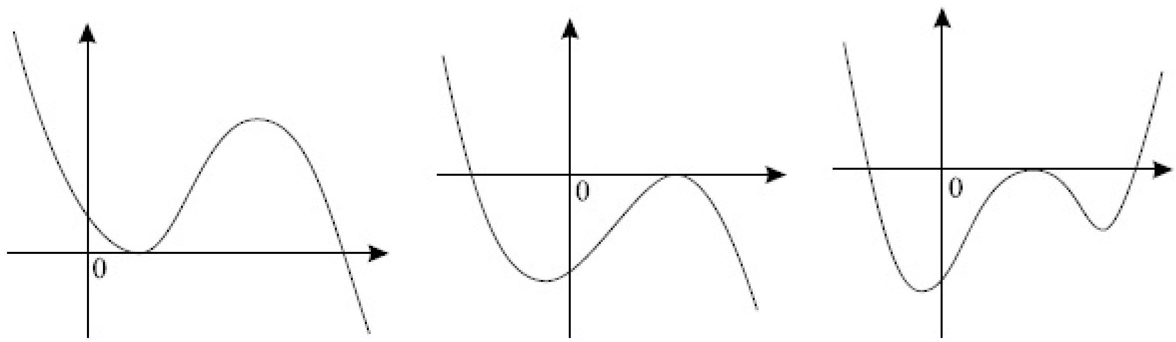
(c) Marque no eixo horizontal os intervalos onde $|f(x)| > g(x)$.

6. Seja f a função cujo gráfico é dado pela figura abaixo. Para quais valores de x tem-se $0 \leq f(x) \leq 1$?



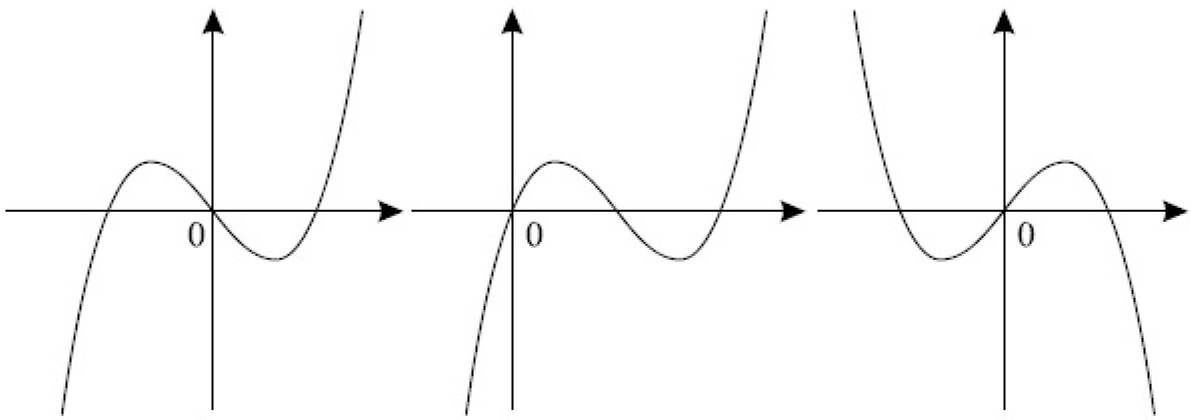
7. Desenhe gráficos de funções $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ e $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) > g(x)$ somente em $[-1, 0)$ e $f(x) < g(x)$ somente em $(0,1]$.

8. Um dos gráficos abaixo é o gráfico de uma função f tal que a equação $f(x) = 1$ tem exatamente três soluções. Qual deles?



(a) (b) (c)

9. Um dos gráficos abaixo é o gráfico de $f(x) = x^3 - x$. Qual deles?



(a) (b) (c)

10. Em cada item abaixo, desenhe o gráfico de uma função f que satisfaz as condições exigidas:

    (a) $f(x) > 1$ somente para $x \in (-1, 1)$.

    (b) f está definida em $[-1, 2]$ e, neste intervalo, a equação $f(x) = 1$ tem exatamente três soluções.

    (c) f satisfaz as condições (a) e (b) acima.

    (d) f é negativa em $[-2, 1]$ e positiva em $[2, 3]$.

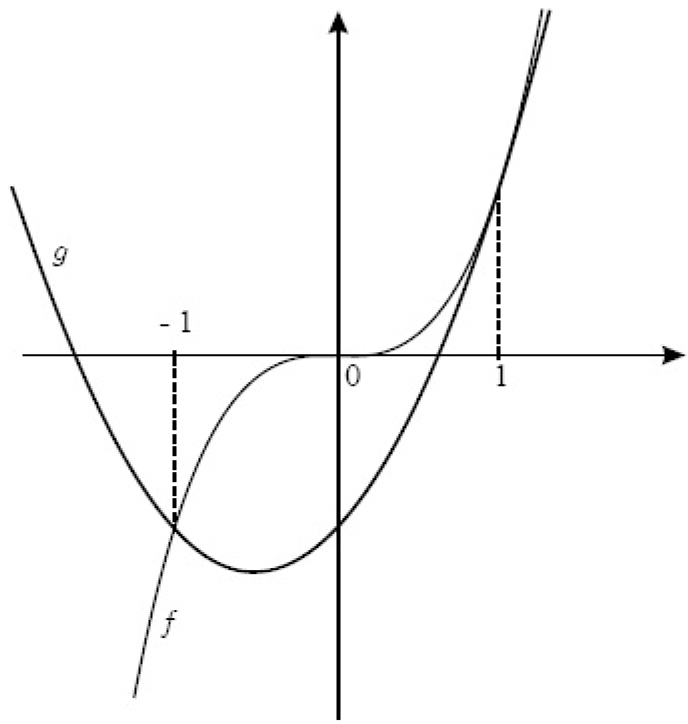
    (e) f é negativa em $[1, 2]$ e $f(x) > 1$ em $[-1, 0)$.

    (f) $f(x) > x$ somente para $x \in (-1, 1)$ e a equação $f(x) - x = 0$ tem exatamente quatro soluções no intervalo $[-1, 2]$.

    (g) f é não constante, positiva e satisfaz $f(x + 1) = f(x)$.

11. Que condições devem satisfazer os coeficientes a, b e c para que o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ contenha o ponto $(0,1)$ e intercepte a reta $y = x$?

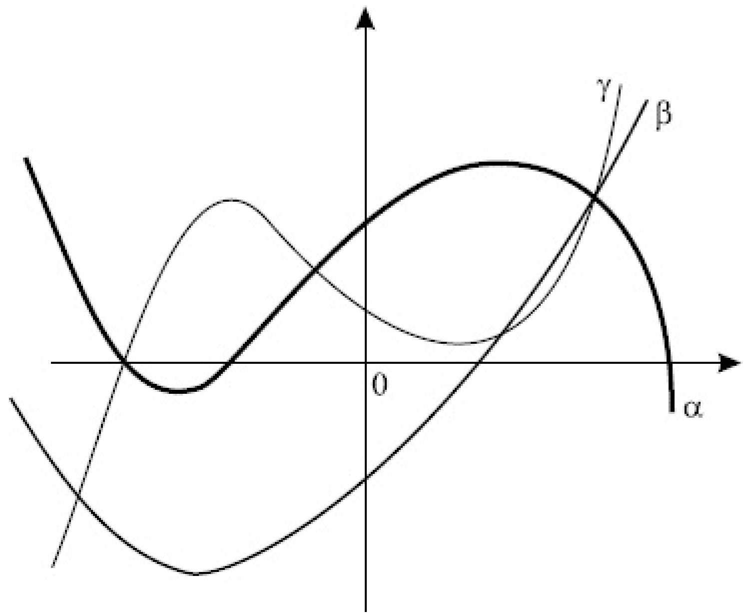
12. Determine a e b sabendo que na figura abaixo são dados os gráficos de $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2 + ax + b$.



13. Na figura abaixo são dadas três curvas identificadas pelas letras α, β e γ. Sabendo que essas curvas são os gráficos de funções f, g e h que possuem as propriedades:

(1) a equação $f(x) = g(x)$ tem três soluções.

(2) a equação $g(x) = h(x)$ só tem uma solução.



Decida qual das afirmações abaixo é verdadeira.

(a) O gráfico de f é a curva α.
(b) O gráfico de f é a curva β.
(c) O gráfico de f é a curva γ.
(d) Não é possível determinar qual curva é o gráfico de f.

14. Desenhe o gráfico de uma função f que satisfaça as três condições abaixo:

(i) a equação $f(x) = 1$ tem somente uma solução.
(ii) a equação $f(x) = -1$ tem somente duas soluções.
(iii) a equação $f(x) = 0$ tem mais do que quatro soluções.

3. Gráficos obtidos de gráficos

As translações horizontais

Consideremos as funções f e g definidas por:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 7 \text{ para } x \in [-3,-1],$$

$$g(x) = f(x-4) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5 \text{ para } x \in [1, 3].$$

Se utilizarmos um programa de computador para fazer o gráfico dessas funções num mesmo sistema de coordenadas, obteremos a seguinte figura:

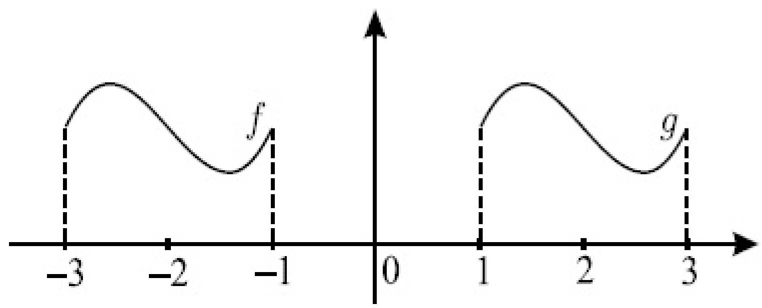


Figura 3.1

Observando a figura, vemos que os dois gráficos são muito parecidos. De fato, se cortarmos o papel ao longo do eixo vertical, e transladarmos horizontalmente o pedaço que contém o gráfico de f, de maneira que o segmento do eixo horizontal que corresponde ao intervalo $[-3, -1]$ fique sobre o segmento que corresponde a $[1, 3]$, veremos que as duas curvas se sobrepõem.

Uma reação tipicamente matemática é perguntar se esse fato é uma coincidência, ou se decorre de alguma propriedade mais geral. A resposta a essa pergunta é que esse comportamento é consequência de g estar definida por $f(x-4)$.

Para entendermos essa afirmação, vamos ver como podemos obter o gráfico de g apenas usando o gráfico de f (e não a expressão $g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$).

Para isso, observamos primeiro que, para que x seja um número real para o qual $g(x)$ está definido, é preciso que $f(x-4)$ esteja definido, isto é, o número $(x-4)$ tem que estar no domínio de f. Portanto,

$$-3 \leq x - 4 \leq -1,$$

donde

$$1 = -3 + 4 \leq x \leq -1 + 4 = 3.$$

Ou seja, o domínio de g é o intervalo $[-3-(-4), -1-(-4)] = [1, 3]$.

Com relação ao conjunto imagem, vemos que, pela definição de g, sua imagem coincide com a imagem de f. De fato, todo número real que pela função g está associado a algum número x do domínio de g, está também associado, pela função f, a um número do domínio de f (o número $x-4$).

Comecemos com um exemplo, tomando $x_0 = 2$. Para obtermos o ponto correspondente do gráfico de g, $(2, g(2))$, primeiro traçamos a reta vertical $x = 2$. Em seguida determinamos no eixo horizontal o ponto que representa o número $(2 - 4) = -2$.

Como (-2) está no domínio de f, a reta vertical por esse ponto corta o gráfico de f num único ponto cujas coordenadas são $(-2, f(-2))$ (veja Figura 3.2a). Isso nos diz que a reta horizontal $y = f(-2)$ intercepta o eixo vertical no ponto que representa o número real $f(-2)$.

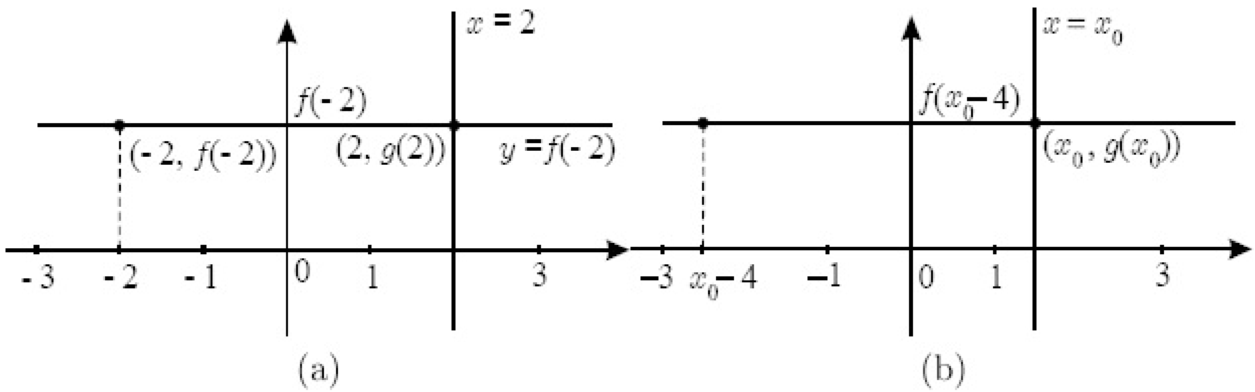


Figura 3.2

Como $g(2) = f(-2)$, temos que a interseção dessa reta horizontal com a primeira reta vertical (cuja equação é $x = 2$) que traçamos é o ponto do gráfico de g que queremos: o ponto cujas coordenadas são $(2, g(2))$. A conclusão é que obtivemos o ponto $(2, g(2))$ do gráfico de g simplesmente transladando o ponto $(-2, f(-2))$, horizontalmente (isto é ao longo de uma reta horizontal), de quatro unidades para a direita.

Podemos ver agora que tudo o que fizemos dando para x_0 o valor 2 pode ser feito dando para x_0 qualquer valor no intervalo $[1, 3]$, que é o domínio de g. De fato, para obtermos o ponto correspondente do gráfico de g, $(x_0, g(x_0))$, primeiro traçamos a reta vertical $x = x_0$. Em seguida, determinamos no eixo horizontal o ponto que representa o número $x_0 - 4$.

Como $(x_0 - 4)$ está no domínio de f, a reta vertical por esse ponto corta o gráfico de f num único ponto cujas coordenadas são $(x_0 - 4, f(x_0 - 4))$ (veja Figura 3.2b). Isso nos diz que a reta horizontal $y = f(x_0 - 4)$ intercepta o eixo vertical no ponto que representa o número real $f(x_0 - 4)$.

Pelo ponto $(x_0 - 4, f(x_0 - 4))$, traçamos uma reta horizontal. Como $g(x_0) = f(x_0 - 4)$, temos que a interseção dessa reta horizontal com a primeira reta vertical (cuja equação é $x = x_0$) que traçamos é o ponto do gráfico de g que queremos, o ponto cujas coordenadas são $(x_0, g(x_0))$.

A conclusão é que obtivemos o ponto $(x_0, g(x_0))$ do gráfico de g simplesmente transladando o ponto $(x_0 - 4, f(x_0 - 4))$ horizontalmente (isto é ao longo de uma reta horizontal), de quatro unidades para a direita.

Resumindo, concluímos que qualquer ponto do gráfico de g é obtido pela translação horizontal de quatro unidades para a direita de um ponto do gráfico de f. Descrevemos essa propriedade dizendo que o gráfico de g é a translação horizontal do gráfico de f de quatro unidades para a direita.

Agora, é fácil ver que se repetirmos cada um dos passos acima para a função h definida por $h(x) = f(x + 1)$, vamos concluir que o gráfico de h é a translação do gráfico de f de uma unidade para a esquerda.

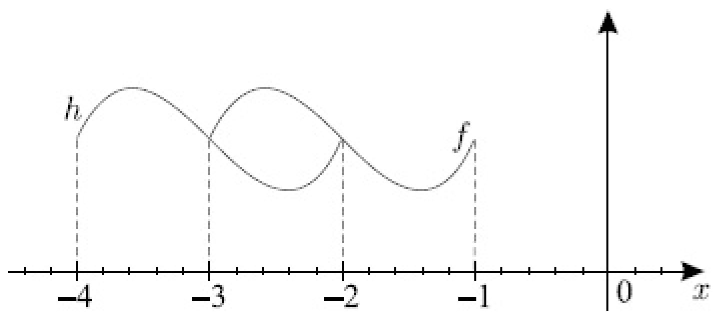


Figura 3.3

Mais geralmente, como tudo que fizemos poderia ser feito a partir do gráfico de qualquer função f (em nenhum passo usamos a expressão algébrica do exemplo acima), e de qualquer número real α no lugar de (-4) ou de 1, podemos concluir:

> *se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função real e g é definida por $g(x) = f(x + \alpha)$, então o gráfico de g é a translação horizontal do gráfico de f de $|\alpha|$ unidades, para a direita se α é negativo, e para a esquerda se α é positivo. Em particular, o domínio de g é o intervalo $[a - \alpha, b - \alpha]$, e sua imagem é a mesma de f.*

Exemplo

1. Dado o gráfico da função f na Figura 3.4, fazer o gráfico de $g(x) = f(x - 1)$.

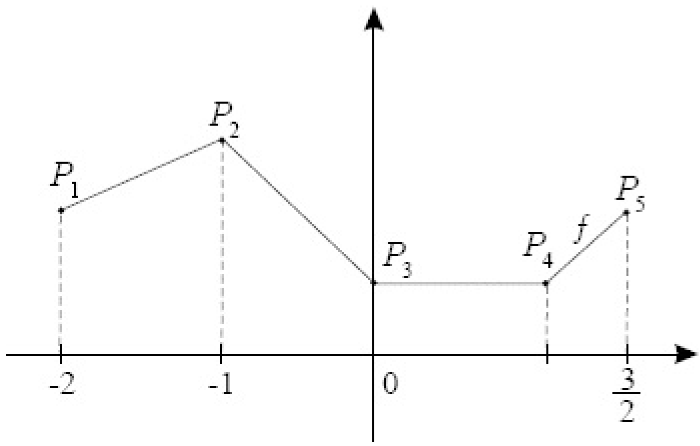


Figura 3.4

Solução: Já sabemos, pela expressão que define g, que seu gráfico é a translação horizontal do gráfico de f de uma unidade para a direita. Em particular, o domínio de g é a translação horizontal de uma unidade para a direita do domínio de f, que é o intervalo $[-2, \frac{3}{2}]$. Ou seja, o domínio de g é o intervalo $[-1, \frac{5}{2}]$.

Agora observamos que, como o gráfico de f é formado por segmentos de retas ligando os pontos P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 indicados na Figura 3.4, para fazermos o gráfico de g basta transladarmos esses pontos de uma unidade para a direita, obtendo os pontos Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 e Q_5, indicados na Figura 3.5a, e então ligarmos esses pontos por segmentos de retas (Figura 3.5b).

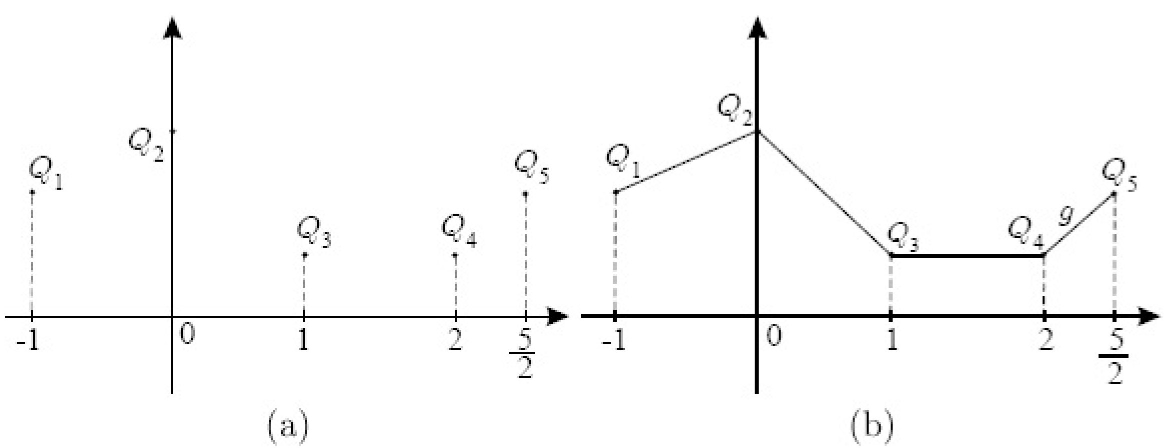


Figura 3.5

Na Figura 3.6, damos o gráfico de $h(x) = f(x + 1/2)$, onde f é a mesma função cujo gráfico é dado na Figura 3.4.

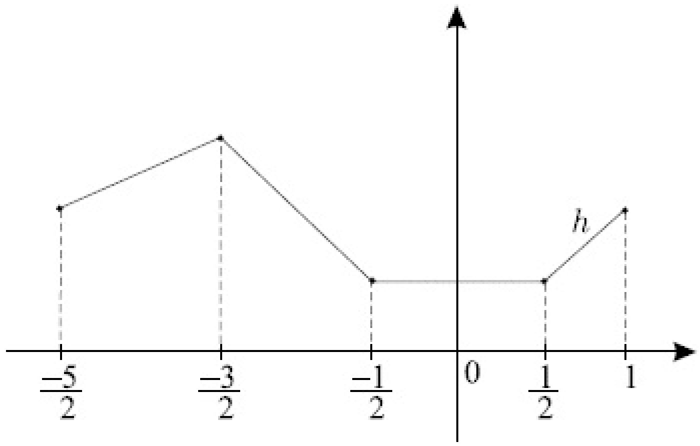


Figura 3.6

Aplicação ao gráfico de funções periódicas

As funções periódicas aparecem com muita frequência na descrição matemática de problemas físicos. Daí a importância de estudarmos esse tipo de funções. Por exemplo, sabemos que a função seno e a função cosseno são funções periódicas. Essas funções serão estudadas no Capítulo 6, mas até lá usaremos propriedades bastante conhecidas dessas funções.

Definição: Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é dita *periódica* se existe um número real $p > 0$ tal que para qualquer número $x \in D$, tem-se $x \pm p \in D$ e $f(x + p) = f(x)$. O menor dos números p com essa propriedade é chamado *o período de f*.

As funções seno e cosseno são periódicas de período 2π. Isso nos diz que

$$\text{sen}\,(x + 2\pi) = \text{sen}\, x$$

e

$$\cos(x + 2\pi) = \text{cosa}\, x$$

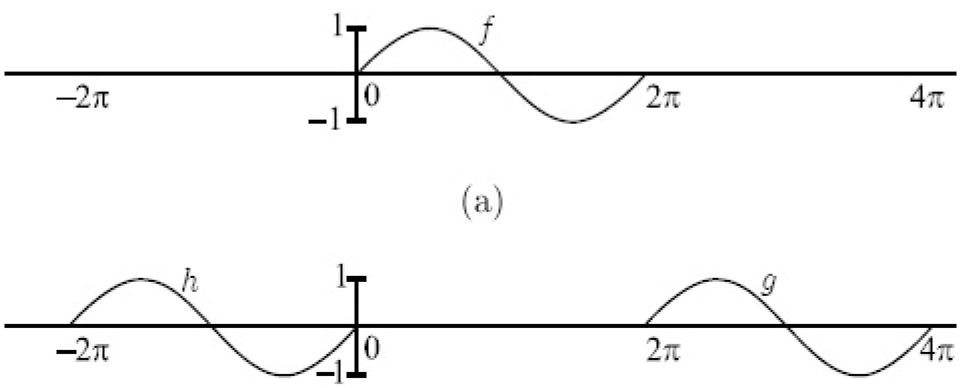
para qualquer número real x.

Na verdade sabemos mais do que isso, sabemos que $\text{sen}(x + 2k\pi) = \text{sena}\, x$, onde k é qualquer número inteiro. Essa é uma propriedade geral das funções periódicas, isto é, *se f é uma função periódica de período p, então $f(x + kp) = f(x)$ para qualquer número $x \in$ dom (f), onde k é qualquer número inteiro.*

Vamos usar essa propriedade para descrevermos o gráfico de uma função periódica. Comecemos com a função seno.

Vamos assumir que conhecemos o gráfico de seno para x no intervalo $[0, 2\pi]$. Chamemos de f a função seno para x nesse intervalo e seja $g(x) = f(x - 2\pi)$.

Pelo que vimos antes, temos que o domínio de g é o intervalo $[2\pi, 4\pi]$, já que é a translação de 2π unidades para a direita do intervalo $[0, 2\pi]$, que é o domínio da f. Mais ainda, o gráfico de g é uma translação horizontal do gráfico de f. Analogamente, se definimos $h(x) = f(x + 2\pi)$, temos que o gráfico de h é uma translação horizontal de 2π unidades para a esquerda do gráfico de f. Na Figura 3.7a são dados o gráfico de f , e os gráficos de g e h em 3.7b.



(b)

Figura 3.7

Agora, usamos a propriedade acima para $k = -1$ e $k = 1$ para vermos que g é a função seno no intervalo $[2\pi, 4\pi]$, e h é a função seno no intervalo $[-2\pi, 0]$.

Ou seja, concluímos que os gráficos da função seno nos intervalos $[-2\pi, 0]$ e $[2\pi, 4\pi]$ são translações horizontais, para a esquerda e para a direita, respectivamente, do gráfico de seno no intervalo $[0, 2\pi]$. Assim, fazendo os três gráficos dados acima num mesmo sistema de coordenadas, obtemos o gráfico da função seno no intervalo $[-2\pi, 4\pi]$ (Figura 3.8).

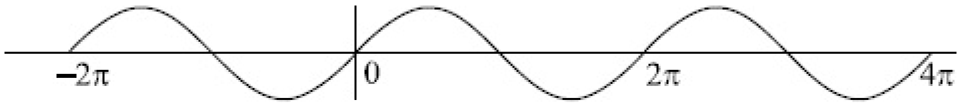


Figura 3.8

Finalmente observamos que o que foi feito com $k = -1$ e $k = 1$ pode ser feito com qualquer número inteiro k, para concluirmos que o gráfico de seno no intervalo de extremos $2k\pi$ e $2(k+1)\pi$ é uma translação horizontal de $2k\pi$ unidades (para a direita ou para a esquerda, dependendo do sinal de k) do gráfico de seno no intervalo $[0, 2\pi]$.

Em geral, se f é uma função periódica de período p, basta conhecermos seu gráfico num intervalo de comprimento p e fazermos translações de múltiplos inteiros do período.

Mais explicitamente, se conhecemos o gráfico num intervalo $[a, a + p]$, fazendo uma translação horizontal de, por exemplo, $3p$ unidades para a direita, obtemos o gráfico de f no intervalo $[a + 3p, a + 4p]$. No caso de seno, usamos o intervalo $[0, p] = [0, 2\pi]$ apenas por simplicidade.

Uma outra aplicação que podemos fazer desse resultado sobre translações horizontais é obtermos o gráfico de cosseno a partir do gráfico de seno.

Como veremos quando recordarmos as funções trigonométricas, as funções seno e cosseno satisfazem a relação

$$\text{cós}\ (x) = \text{sen}(x + \pi/2).$$

Pelo que sabemos agora, o gráfico de cosseno é então a translação do gráfico de seno, de $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda (ou, o que é o mesmo, o gráfico de seno é a translação do gráfico de cosseno de $\frac{\pi}{2}$ unidades para a direita, já que a relação acima também pode ser representada por $\text{sen}(x) = \cos(x; -\frac{\pi}{2})$).

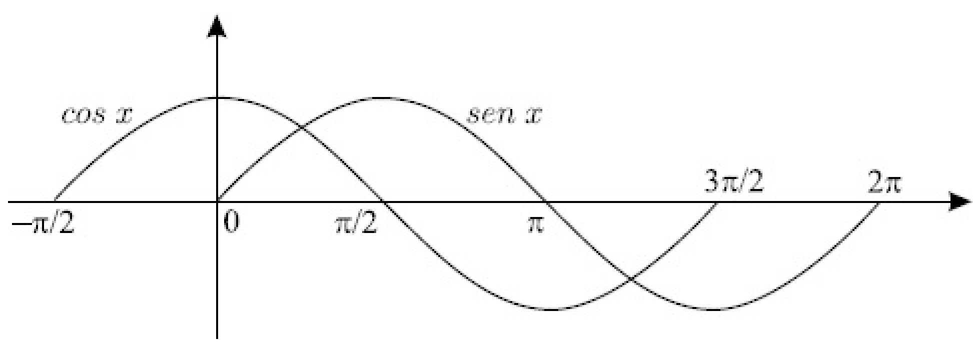


Figura 3.9: Gráficos de seno e cosseno

As translações verticais

Analisemos agora, ainda do ponto de vista gráfico, o comportamento de uma função g, definida por $g(x) = f(x) + (\beta$, onde f é uma função real dada e $(\beta$ um número real fixo.

Primeiro observamos que como o domínio de g coincide com o domínio de f, a cada ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f podemos fazer corresponder de maneira única o ponto

$$(x, g(x)) = (x, f(x)+(\beta)$$

do gráfico de g.

Vemos que esses pontos possuem a mesma abscissa, x, e, portanto, ambos estão numa mesma reta vertical. Mais ainda, para cada x do domínio de f (e, portanto, do domínio de g), o ponto $(x, g(x))$ está $|\beta|$ unidades acima do ponto correspondente do gráfico de f, $(x, f(x))$, se β é positivo, e $|\beta|$ unidades abaixo de $(x, f(x))$ se β é negativo.

Na Figura 3.10a são dados o gráfico de uma função f e um ponto do gráfico de $g(x) = f(x) + \beta$ com $\beta = 1$. Na Figura 3.10b são dados o gráfico da mesma função f e um ponto do gráfico de g com $\beta = -0, 5$.

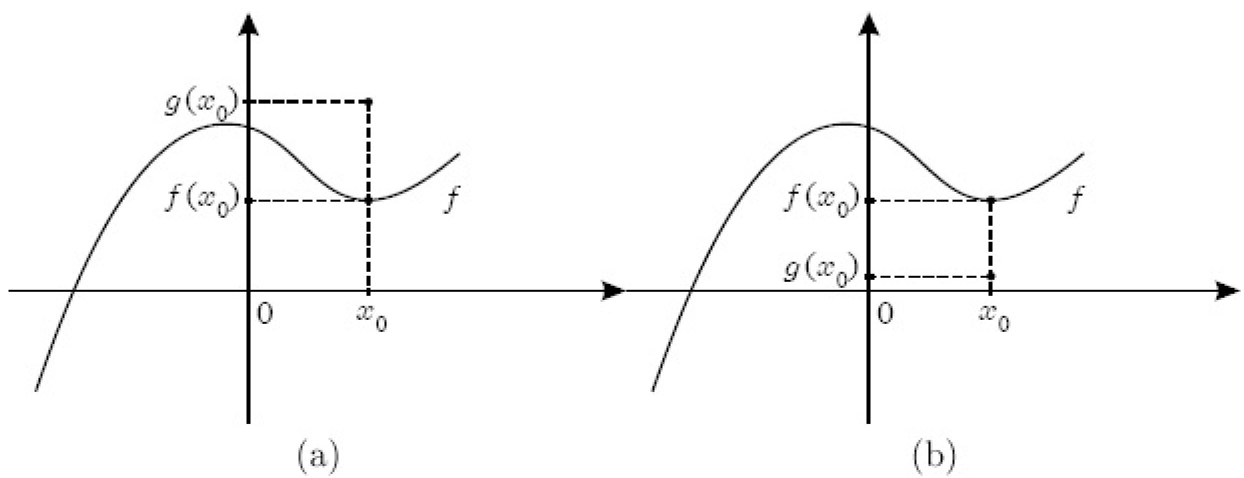


Figura 3.10

Resumindo, temos que o gráfico de g pode ser obtido do gráfico de f, transladando-se verticalmente cada ponto do gráfico de f de $|\beta|$ unidades para cima, se β é positivo, ou para baixo se β é negativo.

Dizemos então que o gráfico de g é uma translação vertical do gráfico de f, ou mais simplesmente que g é uma translação vertical de f. Em particular, se a imagem de f é o intervalo $[c, d]$ e g é a translação vertical de f, $g(x) = f(x) +$

β, então g tem o mesmo domínio que f e sua imagem é o intervalo $[c + \beta, d + \beta]$.

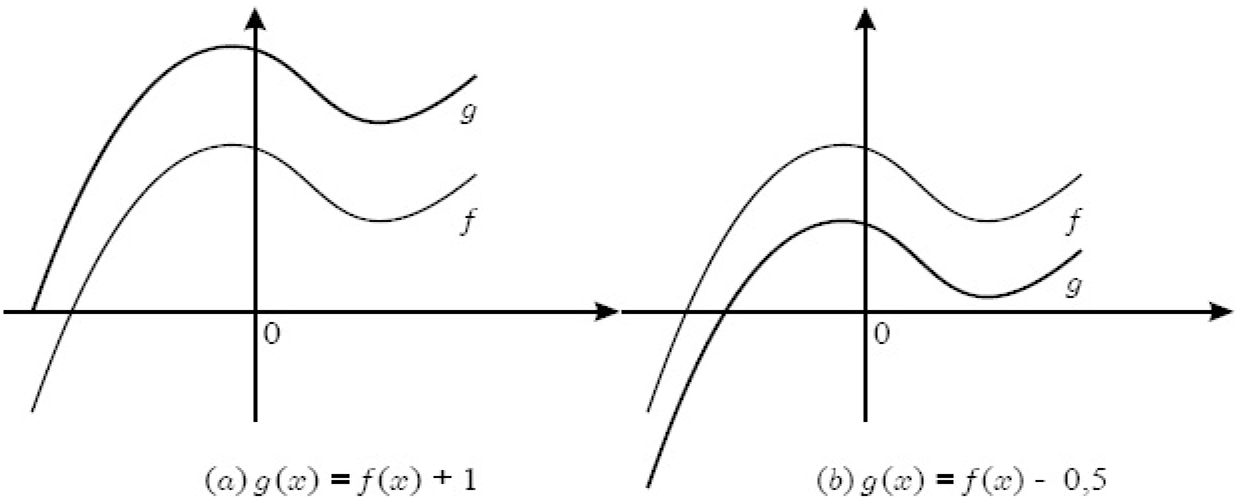


Figura 3.11

Exemplo

2. Na Figura 3.12 são dados o gráfico de uma função f (em 3.12a) e de uma função g (em 3.12b). Sabendo que $g(x) = f(x + \alpha) + \beta$ determinar os valores de α e β.

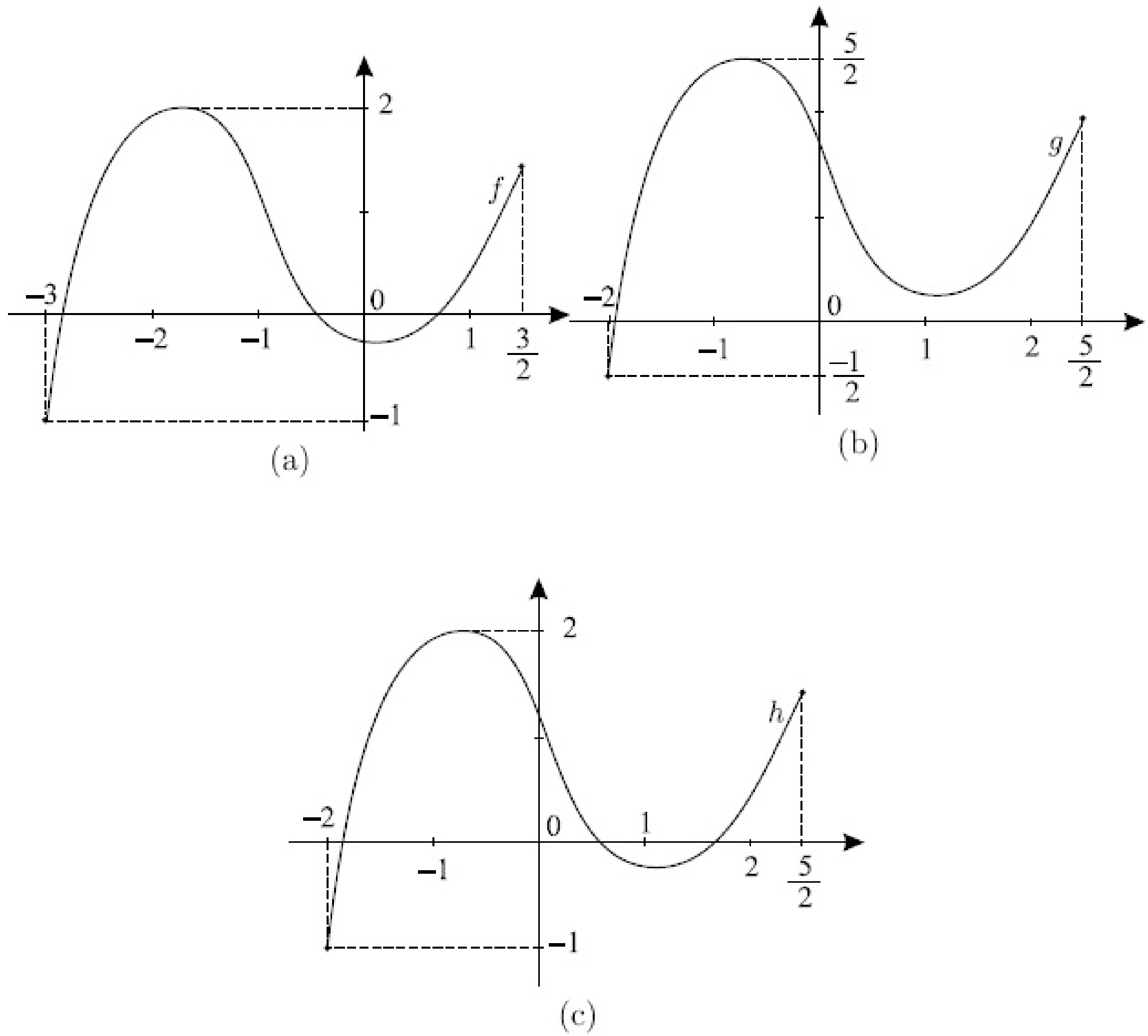


Figura 3.12

Solução: começamos por ler no gráfico de f que seu domínio é o intervalo $[-3, \frac{3}{2}]$ e sua imagem, o intervalo $[-1, 2]$. Do gráfico de g obtemos que o domínio de g é $[-2, \frac{5}{2}]$ e a imagem é $[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$.

Agora, se denotamos por $h(x) = f(x + \alpha)$, temos que h é uma translação horizontal de f. Isso nos diz que o domínio de h é o intervalo $[-3 - \alpha, \frac{3}{2} - \alpha]$ e sua imagem é a mesma de f, já que translações horizontais não alteram a imagem (ver Figura 3.12c).

Por outro lado, $g(x) = h(x)+\beta$ e, portanto, g é uma translação vertical de h. Isso, por sua vez, nos diz que o domínio de g é o mesmo de h (translações verticais não alteram o domínio), e sua imagem é uma translação vertical da imagem de h, o intervalo $[-1 + \beta, 2 + \beta]$. Ou seja,

$$\operatorname{dom}(h) = [-3-\alpha, \frac{3}{2}-\alpha] = \operatorname{dom}(g) = [-2, \frac{5}{2}] \tag{4.5}$$

$$[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}] = \operatorname{Im}(g) = [-1+\beta, 2+\beta] \tag{4.6}$$

De (5) obtemos

$$-3-\alpha = -2$$

e, portanto,

$$\alpha = -1.$$

De (6) temos

$$-\frac{1}{2} = -1+\beta,$$

donde $\beta = \frac{1}{2}$.

Aplicação às funções quadráticas (1)

Consideremos a função quadrática

$$h(x) = (x-1)^2 - 3.$$

Primeiro observamos que h é uma translação vertical de três unidades para baixo da função $g(x) = (x-1)^2$. Em seguida, vemos que g, por sua vez, é a translação horizontal de uma unidade para a direita da função $f(x) = x^2$.

Sabendo agora que o gráfico de f é a parábola abaixo (Figura 3.13a), obtemos o gráfico de g (Figura 3.13b) e então o gráfico de h (Figura 3.13c). Em particular, podemos afirmar sem fazer qualquer conta que a equação

$$x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3 = 0$$

tem duas soluções, sendo uma solução menor do que 0 e a outra maior do que 1.

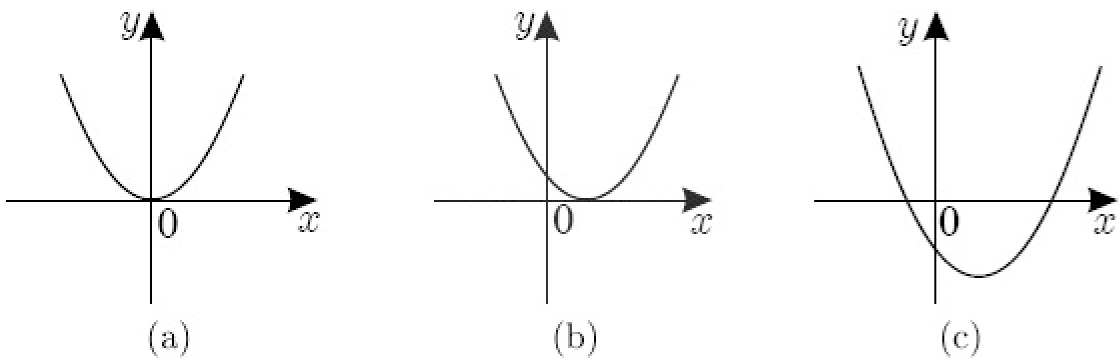


Figura 3.13

Na verdade, esse não é um caso tão particular como pode parecer. De fato, se $h(x) = x^2 + bx + c$, então podemos reescrever h da seguinte forma (essa forma de reescrever é conhecida como *completar quadrados):*

$$h(x) = x^2 + bx + c = x^2 + 2(\frac{b}{2})x + (\frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2 + c,$$

donde

$$h(x) = (x + \frac{b}{2})^2 + (c - (\frac{b}{2})^2),$$

ou seja, vemos que h é uma translação vertical da função $g(x) = (x + \frac{b}{2})^2$, que, por sua vez, é uma translação horizontal de $f(x) = x^2$.

As contrações e expansões uniformes

Uma outra situação em que podemos facilmente obter o gráfico de uma função g a partir do gráfico de uma função f é quando g é definida por $g(x) = f(\alpha x)$, onde α é um número real fixo.

Comecemos com um exemplo onde f é a função cujo gráfico é dado na Figura 3.14, e $\alpha = 2$, isto é, $g(x) = f(2x)$.

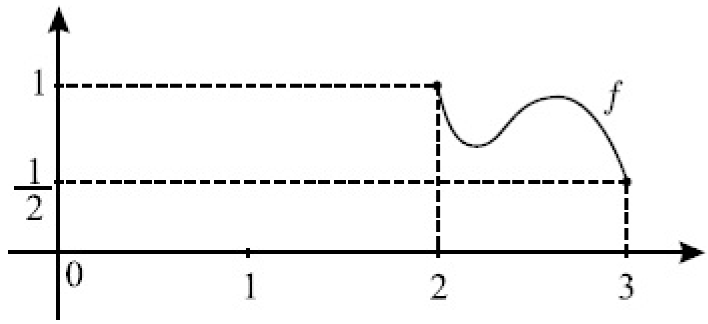


Figura 3.14

Da expressão que define g concluímos que x está no domínio de g, se $2x$ está no domínio de f. Do gráfico de f (Figura 3.14) obtemos que seu domínio é o intervalo [2,3], donde

$$2 \leq 2x \leq 3,$$

ou seja,

$$1 \leq x \leq 3/2.$$

Portanto, o domínio de g é o intervalo $[1, \frac{3}{2}]$. De fato, o domínio de g é obtido pela contração uniforme do domínio de f pela da função linear $x \mapsto \frac{x}{2}$. Isto é, cada número x_0 do domínio de f fornece o número $\frac{x_0}{2}$ do domínio de g.

Por outro lado, a imagem de g coincide com a imagem de f, logo, se imaginamos que cada ponto do domínio de f carrega consigo o ponto correspondente do gráfico de f, podemos ver que o gráfico de g é uma **contração** uniforme horizontal do gráfico de f (v. Figura 3.15).

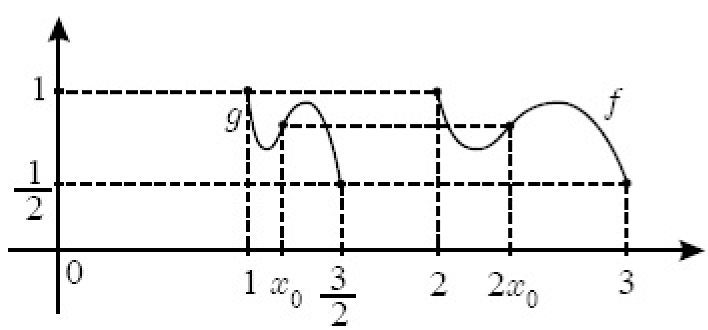


Figura 3.15

Analogamente, se $\alpha = \frac{1}{2}$, ou seja, $g(x) = f(\frac{x}{2})$, podemos ver que o domínio de g é o intervalo [4, 6] e que seu gráfico é obtido por um **expansão** uniforme horizontal do gráfico de f (Figura 3.16).

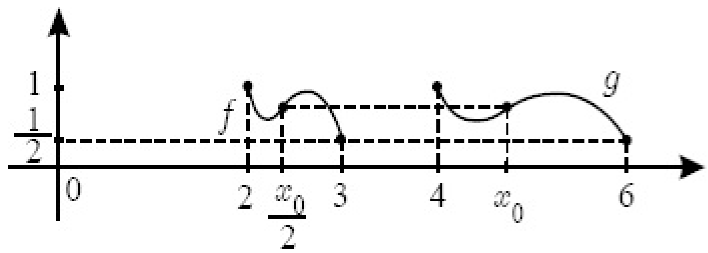


Figura 3.16

Para analisarmos o caso de α negativo, consideremos primeiro a função $\phi(x) = f(-x)$. Cada ponto do domínio de ϕ é obtido pela reflexão em relação ao eixo vertical de um ponto do domínio de f. Assim, se x_0 é um número no domínio de ϕ, então $-x_0$ está no domínio de f e o ponto $(x_0, \phi(x_0))$ é o simétrico em relação ao eixo vertical do ponto $(-x_0, f(-x_0))$ do gráfico de f (Figura 3.17b).

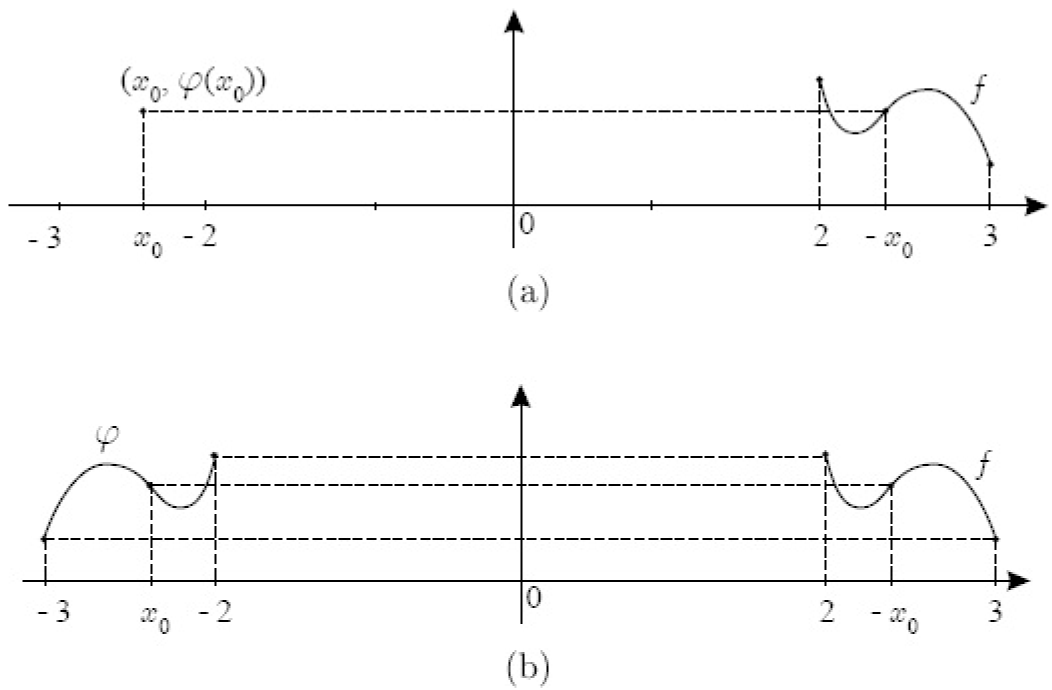


Figura 3.17

Ou seja, podemos concluir que o gráfico de ϕ é obtido pela reflexão do gráfico de f em relação ao eixo vertical (Figura 3.17b).

Agora *se* $\alpha = -2$, isto é, $g(x) = f(-2x)$ temos que $g(x) = \phi(2x)$. Logo, o gráfico de g é obtido do gráfico de f por meio de uma reflexão em relação ao eixo vertical, seguida de uma contração horizontal. Na Figura 3.18 são dados os gráficos de f, de $\phi(x) = f(-x)$ e de $g(x) = \phi(2x) = f(-2x)$.

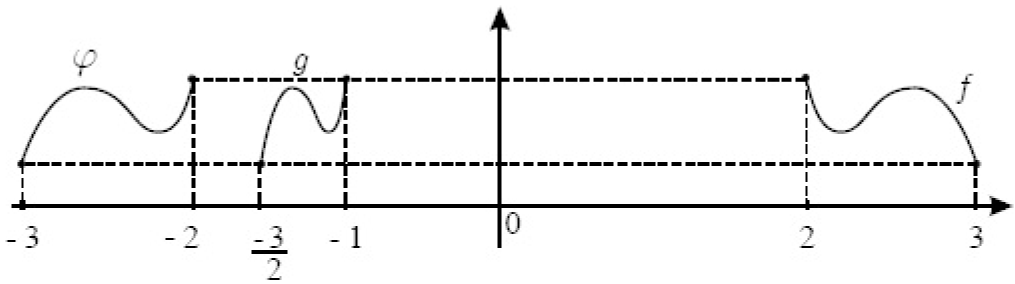


Figura 3.18

Em geral, podemos concluir que se $f : [a, b] \to, \mathbb{R}$ é uma função real, α é um número real diferente de 0 e $g(x) = f(\alpha x)$, então:

- O domínio de g é o intervalo $[\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha}]$ e sua imagem coincide com a imagem de f.
- Se $\alpha > 1$, o gráfico de $g(x) = f(\alpha x)$ é obtido do gráfico de f por uma contração horizontal uniforme.
- Se $0 < \alpha < 1$, então o gráfico de $g(x) = f(\alpha x)$ é obtido por uma expansão horizontal uniforme do gráfico de f.
- Se $\alpha = -1$, então o gráfico de g *é* a reflexão do gráfico de f em relação ao eixo vertical.
- Se $-1 < \alpha < 0$, então o gráfico de g *é* uma reflexão do gráfico de f em relação ao eixo vertical seguida de uma expansão horizontal.
- Se $\alpha < -1$, então o gráfico de g é uma reflexão do gráfico de f em relação ao eixo vertical seguida de uma contração horizontal.

Seguindo o procedimento acima, podemos também analisar funções da forma

$$h(x)=\beta f(x).$$

Nesse caso, observamos primeiramente que o domínio de h é o mesmo que o domínio de f, sendo que agora o conjunto imagem passa por transformações semelhantes às ocorridas com o domínio no caso anterior. Explicitamente temos:

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função real cujo conjunto imagem é o intervalo $[c, d]$, β um número real diferente de 0 e $h(x) = \beta f(x)$. Então:

- O domínio de h é o mesmo intervalo $[a, b]$ e a imagem de h é o intervalo $[\beta c, \beta d]$.

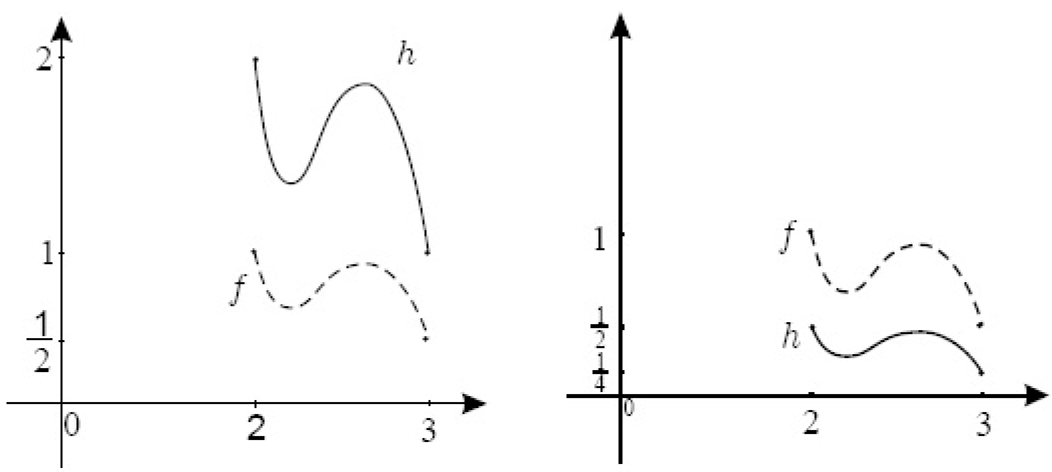
- Se $\beta > 1$, então o gráfico de $h(x) = \beta f(x)$ é obtido do gráfico de f por uma expansão vertical uniforme (v. Figura 3.19a, onde $\beta = 2$).

- Se $0 < \beta < 1$, então o gráfico de $h(x) = \beta f(x)$ é obtido por uma contração vertical uniforme do gráfico de f (v. Figura 3.19b onde $\beta = \frac{1}{2}$).

- Se $\beta = -1$, então o gráfico de h é a reflexão do gráfico de f em relação ao eixo horizontal (v. Figura 3.20a).

- Se $-1 < \beta < 0$, então o gráfico de h é uma reflexão do gráfico de f em relação ao eixo horizontal seguida de um contração vertical (v. Figura 3.20b, onde $\beta = -\frac{1}{2}$).

- Se $\beta < -1$, então o gráfico de h é uma reflexão do gráfico de f em relação ao eixo horizontal seguida de uma expansão vertical (v. Figura 3.20c onde $\beta = -2$).



(a) $\beta = 2$ (b) $\beta = \frac{1}{2}$

Figura 3.19

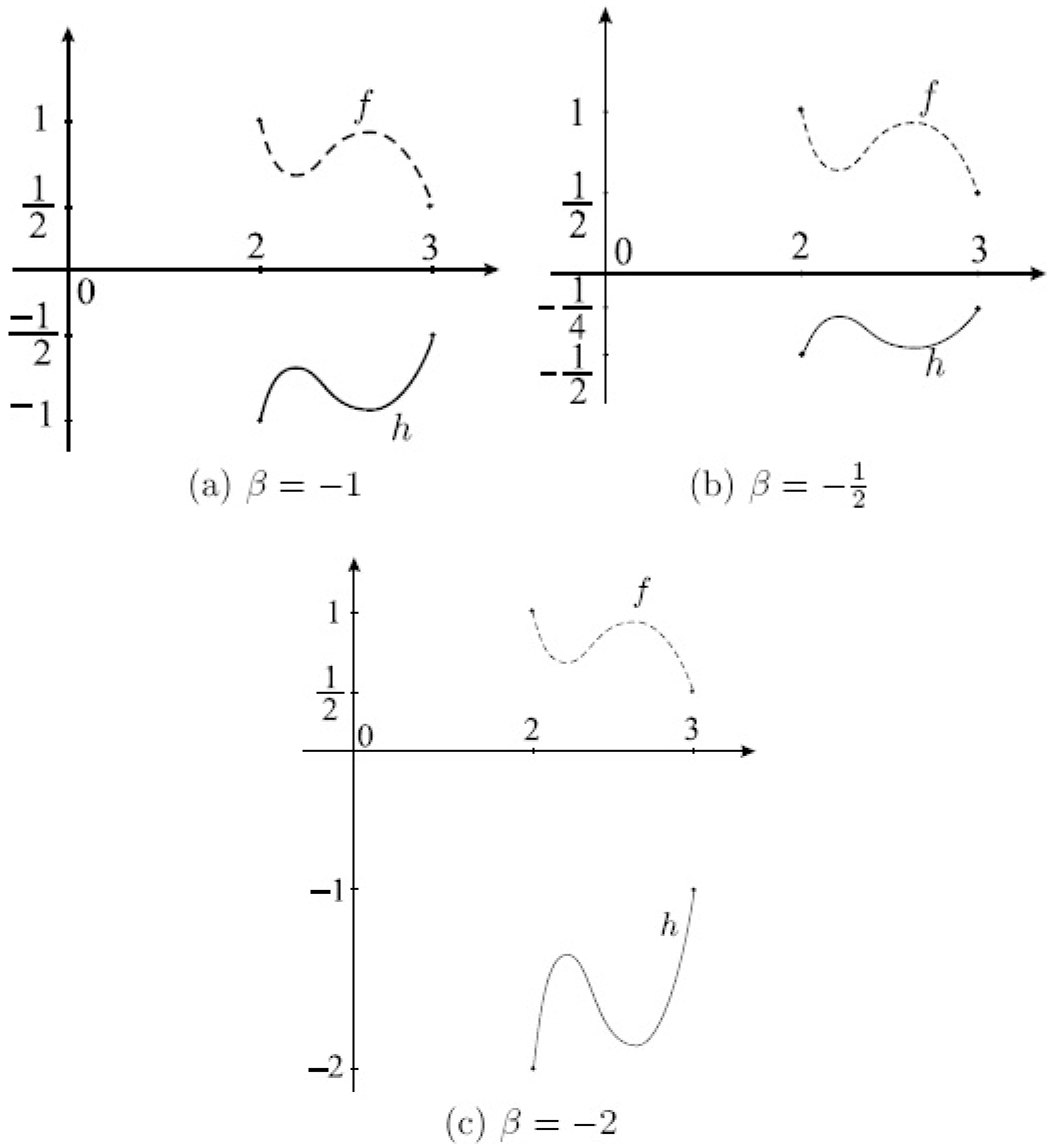


Figura 3.20

Uma consequência do caso $\alpha = -1$ é a simetria, em relação ao eixo vertical, do gráfico de um certo tipo de função que denominamos *função par*.

Definição: Uma função f é dita uma *função par* se, para qualquer número x do seu domínio, tem-se que $-x$ também pertence ao domínio de f e

$$f(-x) = f(x).$$

Uma função constante é um exemplo trivial de função par. O exemplo mais simples de uma função não constante que é uma função par é $f(x) = x^2$. De fato, qualquer que seja o número real x, temos que

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Em geral, se n é um inteiro par, a função $f(x) = x^n$ é uma função par. Um outro exemplo importante é a função cosseno que, como veremos no Capítulo 6, é uma função par.

Para analisarmos a simetria a que nos referimos acima, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par e g a função definida por

$$g(x) = f(-x), \text{ para } x \leq 0.$$

Então, o domínio de g é o intervalo $(-\infty, 0]$ e, pelo que vimos acima (caso $\alpha = -1$), seu gráfico é a reflexão em relação ao eixo vertical do gráfico de f no intervalo $[0, \infty)$. Mas, como f é uma função par, temos que para cada $x \leq 0$,

$$f(x) = f(-x) = g(x),$$

isto é, $f = g$ no intervalo $(-\infty, 0]$ e, portanto, seu gráfico neste intervalo é o gráfico de g. Vimos assim que o gráfico de f no intervalo $(-\infty, 0]$ é a reflexão, em relação ao eixo vertical, do gráfico de f no intervalo $[0, \infty)$. Um gráfico com essa propriedade é dito *simétrico em relação ao eixo vertical.*

Em particular, para fazermos um esboço do gráfico de uma função par, basta conhecermos seu gráfico no conjunto de números positivos de seu domínio.

Um outro tipo de função cujo gráfico também apresenta uma simetria, dita *simetria em relação à origem*, é o que chamamos *função ímpar:*

Definição: Uma função f é dita uma função *ímpar* se, para qualquer número x do seu domínio, tem-se que $-x$ também pertence ao domínio de f e

$$f(-x) = -f(x).$$

A função identidade, $f(x) = x$, é o exemplo mais simples de função ímpar. E, em geral, se n é um inteiro ímpar, a função $f(x) = x^n$ é uma função ímpar. Também veremos no Capítulo 6 que a função seno é outro exemplo importante de função ímpar.

Analogamente ao que fizemos para funções pares, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar e seja g a função definida por

$$g(x) = f(-x), \text{ para } x \leq 0,$$

então o domínio de g é o intervalo $(-\infty, 0]$ e seu gráfico é a reflexão, em relação ao eixo vertical, do gráfico de f no intervalo $[0, \infty)$. Por outro lado, como f é uma função ímpar, temos que para cada $x \le 0$,

$$f(-x) = -f(x),$$

donde

$$f(x) = -f(-x) = -g(x),$$

isto é, $f = -g$ no intervalo $(-\infty, 0]$ e, portanto, seu gráfico neste intervalo é a reflexão do gráfico de g em relação ao eixo horizontal. Podemos assim concluir que o gráfico de f no intervalo $(-\infty, 0]$ pode ser obtido pela reflexão do gráfico de f no intervalo $[0, \infty)$ em relação ao eixo vertical, seguida pela reflexão em relação ao eixo horizontal.

Assim como no caso das funções pares, para fazermos um esboço do gráfico de uma função ímpar basta conhecermos seu gráfico no conjunto de números positivos de seu domínio.

Observe que se (a, b) é um ponto do gráfico de uma função ímpar, então o ponto $(-a, -b)$ também pertence ao gráfico. Devido a essa propriedade, dizemos que o gráfico de uma função ímpar é *simétrico em relação à origem.*

Aplicação às funções quadráticas (2)

Como vimos anteriormente, o gráfico de uma função quadrática do tipo

$$g(x) = x^2 + bx + c$$

pode ser obtido do gráfico de $f(x) = x^2$. Agora temos condições de concluir que o gráfico de qualquer função quadrática

$$h(x) = ax^2 + bx + c,$$

com $a \neq 0$, pode ser obtido do gráfico de $f(x) = x^2$. De fato, basta reescrevermos h:

$$h(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + [\frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2].$$

Isto é,

$$h(x) = af(x + \frac{b}{2a}) + [\frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2].$$

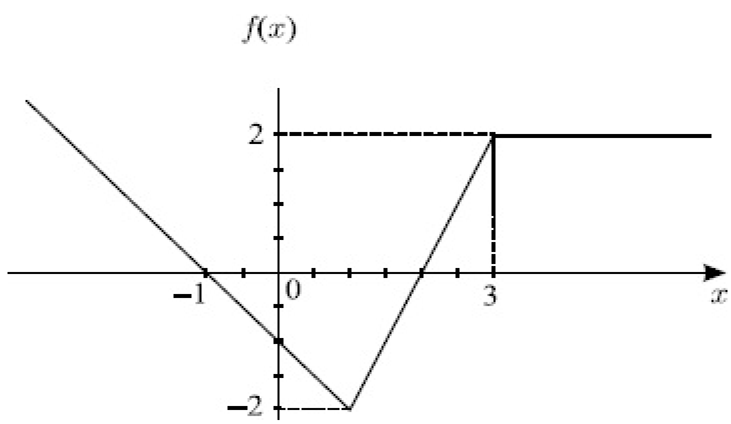
Em particular, podemos concluir daqui o resultado bastante familiar de que o vértice da parábola $y = ax^2 + bx + c$ tem coordenadas $(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$.

De fato, pelo que vimos, o vértice da parábola que é o gráfico de $g(x) = f(x + \frac{b}{2a}) + [\frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2]$ é obtido por translações horizontais e verticais do vértice de f que é a origem (0, 0). Assim, após a translação horizontal, as coordenadas do vértice passam a ser $(-\frac{b}{2a}, 0)$. Após a translação vertical, o vértice é o ponto $(-\frac{b}{2a}, \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2})$. Finalmente, como $h(x) = ag(x)$, a multiplicação da segunda coordenada pelo número a nos dá o resultado.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Na figura abaixo é dada a representação gráfica de uma função f. Desenhe as representações gráficas das funções abaixo, explicitando quais as transformações geométricas que permitem obtê-las a partir do gráfico de f.



(a) $-f(x)$.
(b) $|f(x)|$.
(c) $f(x) + 2$.
(d) $f(x + 2)$.
(e) $f(x - 2)$.
(f) $2f(x)$.

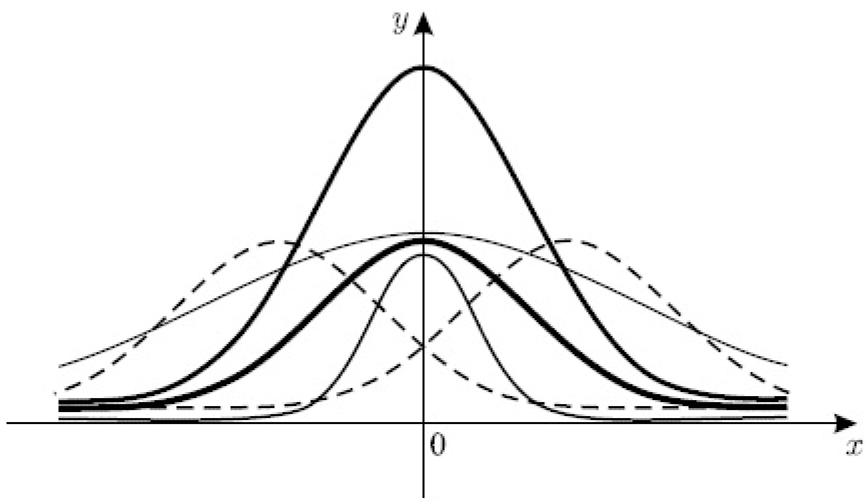
(g) $f(2x)$.

(h) $f(|x|)$.

(i) $f(-x)$.

(j) $f\left(\frac{x}{2}\right)$.

2. Considere as seis curvas do desenho abaixo. Sabendo que a curva com o traçado mais grosso é o gráfico de uma função g, associe as curvas restantes aos gráficos de:



• $g(2x)$ • $g(\frac{x}{2})$ • $2g(x)$ • $g(x+1)$ • $g(x-1)$

3. Considere uma função f cujo gráfico é dado pela figura abaixo. Desenhe o gráfico das funções

(a) $g_1(x) = f(x+1)$

(b) $g_2(x) = f(x) + 1$

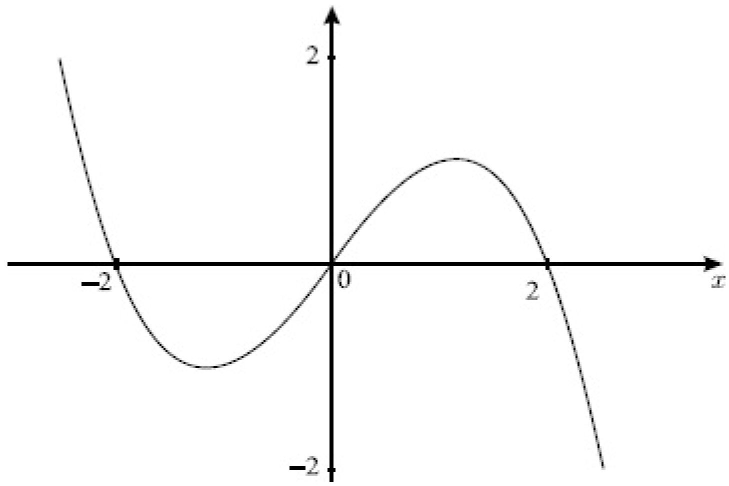
(c) $g_3(x) = f(x-2)$

(d) $g_4(x) = \mathrm{f}(x) - 2$

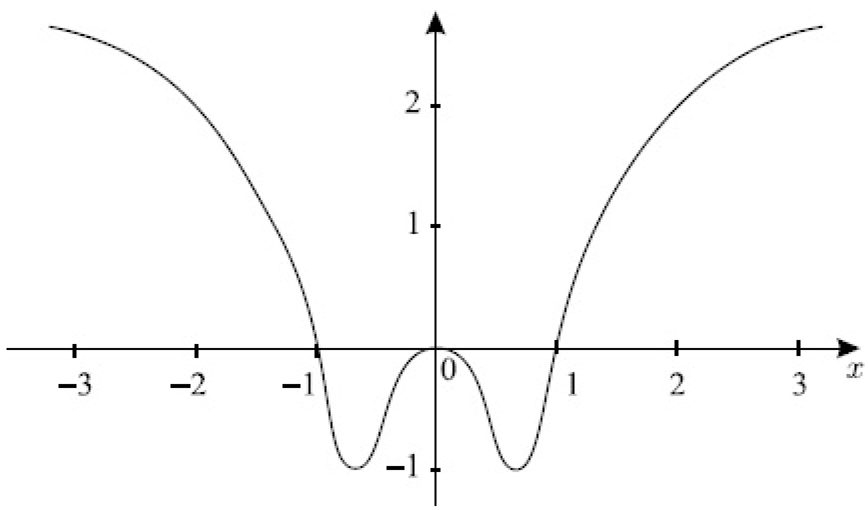
(e) $g_5(x) = \frac{1}{2}f(x)$

(f) $g_6(x) = 2f(x)$

(g) $g_7(x) = 3f(x - \frac{1}{2})$



4. Dado o gráfico da função f abaixo, desenhe e descreva as propriedades do gráfico da função g indicada em cada item.



(a) $g(x) = f(x) + \mathrm{c}$ (considere os casos $c > 0$ e $c < 0$).

(b) $g(x) = f(x + \mathrm{c})$ (considere os casos $c > 0$ e $c < 0$).

(c) $g(x) = f\left(\dfrac{x}{c}\right)$ (considere os casos $c > 1$, $0 < c < 1$ e $c < 0$).

(d) $g(x) = cf(x)$ (considere os casos $c > 0$ e $c < 0$).

(e) $g(x) = f(2x + 1)$.

(f) $g(x) = f(|x|)$.

(g) $g(x) = |f(x)|$.

5. A partir do gráfico da função f dado a seguir, faça o gráfico das seguintes funções:

(a) $g(x) = f(x) - 1$.

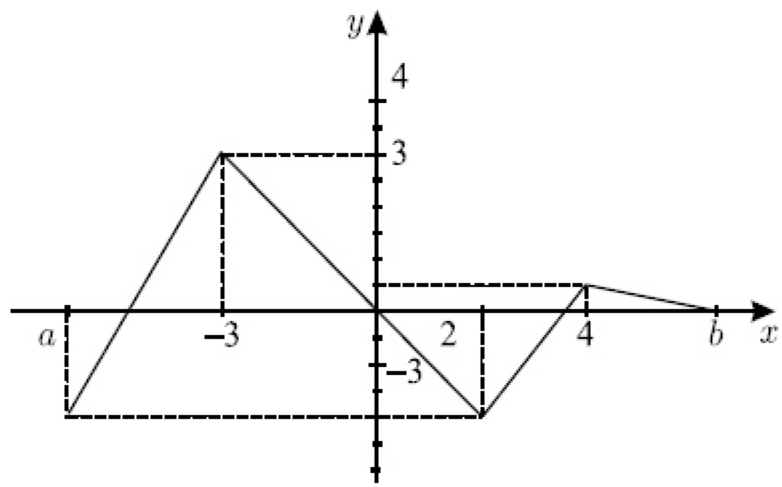
(b) $h(x) = -f(x)$.

(c) $q(t) = |f(t)|$.

(d) $r(y) = f(y + 1)$.

(e) $p(x) = f(x - 1)$.

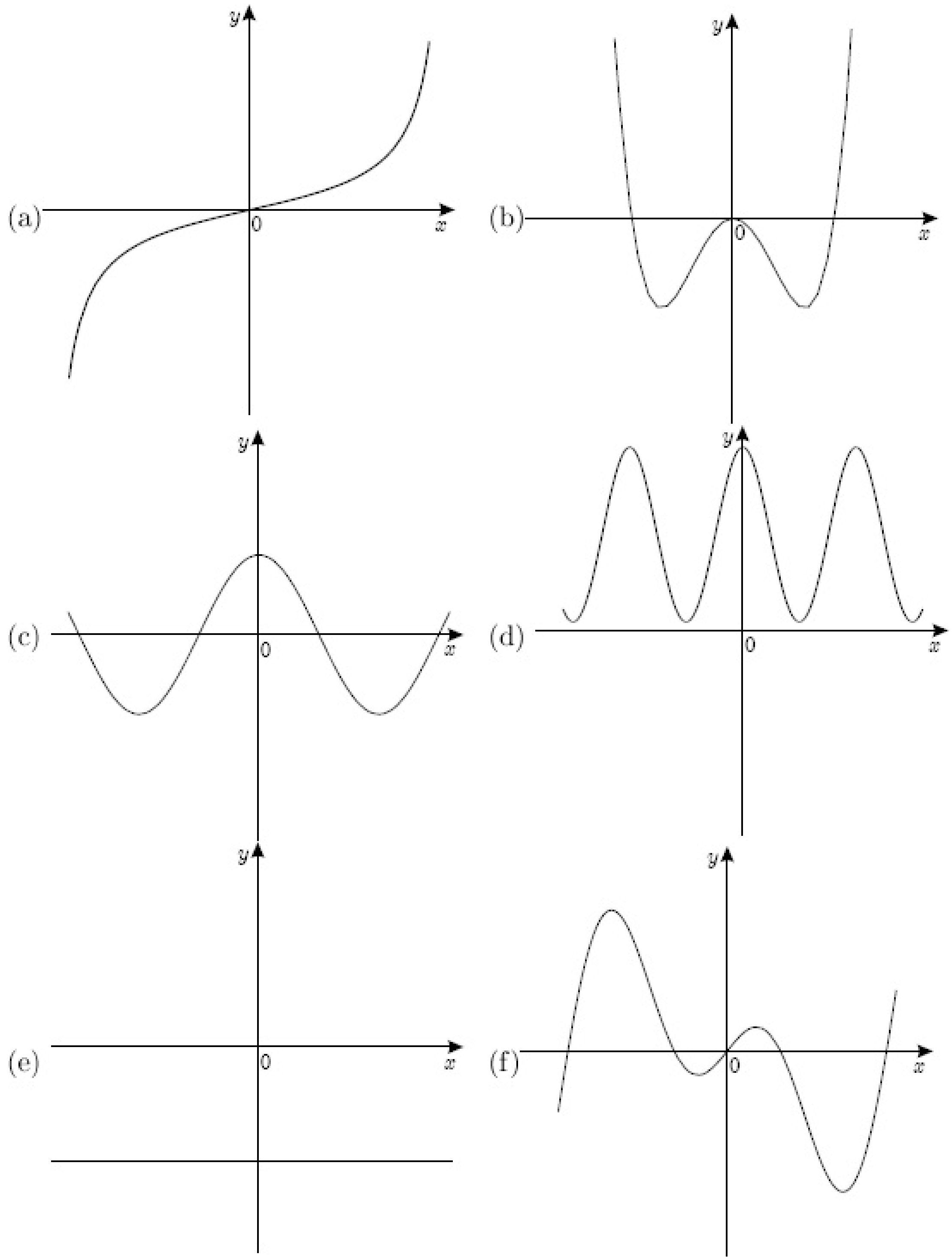
(f) $\psi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } a \leq x \leq 0, \\ |f(x)| & \text{se } 0 < x \leq b. \end{cases}$



6. Verifique quais funções abaixo são pares, quais são ímpares e quais não são pares nem ímpares:

(a) $f(x) = 3$.
(b) $f(x) = 0$.
(c) $f(x) = 2x^2 + 5$.
(d) $f(x) = 5x^3 + x$.
(e) $f(x) = 5x^3 + x + 2$.
(f) $f(x) = 6x^4$.
(g) $f(x) = 6x^4 - 8$
(h) $f(x) = 6x^4 - x$.
(i) $f(x) = |x|$.
(j) $f(x) = |x^3|$.
(k) $f(x) = |x^3 + 1|$.

7. Em cada figura abaixo é dado o gráfico de uma função qué é par ou ímpar. Determine quais são as funções pares e quais são as funções ímpares.



8. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou

verdadeira:

(a) Se f é ímpar, então $f(0) = 0$.

(b) Se f é par, então $f(0) = 0$.

(c) Se f é par, então a função $g(x) = |f(x)|$ é par.

(d) Se f é ímpar, então a função $g(x) = |f(x)|$ é par.

9. Seja $f(x) = \begin{cases} |x-1|-1 & \text{se } x \geq 0, \\ g(x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$

(a) Determine g para que f seja par.

(b) Determine g para que f seja ímpar.

10. Seja $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \geq 0, \\ g(x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$

(i) Determine g para que f seja par.

(ii) Encontre uma única expressão para f.

11. Mostre que a única função que é simultaneamente par e ímpar é a função $f(x) = 0$.

12. Seja f a função cujo gráfico é dado no item (f) do exercício anterior. Em cada item abaixo, faça um esboço do gráfico da função dada:

(a) $g(x) = -f(x)$.

(b) $g(x) = f(|x|)$.

(c) $g(x) = |f(x)|$.

(d) $g(x) = |f(|x|)|$.

(e) $g(x) = 1 + |f(x-1)|$.

13. Em cada item abaixo, faça um esboço do gráfico da função f:

(a) $f(x) = |x^2 + x - 2|$.

(b) $f(x) = |3x - 1|$.

(c) $f(x) = |-3\ |x| + 1|$.

(d) $f(x) = |g(|x|)|$, onde $g(x) = -x^2 - x + 2$.

14. Para cada item do exercício anterior, expresse a função f sem usar o símbolo $||$.

15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sabendo que $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ e $x_3 = 2$ são as soluções da equação $f(x) = 0$, resolva as equações abaixo:
    (a) $f(x - 2) = 0$.
    (b) $f(2x + 1) = 0$.
    (c) $f(3 - 2x) = 0$.

16. Seja $f(x) = |x^2 - 5x + 4|$
    (a) Resolva a equação $f(x) = x - \frac{1}{2}$.
    (b) Faça um esboço dos gráficos de f e de $g(x) = x - \frac{1}{2}$ num mesmo sistema de coordenadas, usando as informações do item (a).
    (c) Quais são as soluções da inequação $|x^2 - 5x + 4| < x - \frac{1}{2}$?

4. A função composta

Já vimos que se f é uma função, a expressão $h(x) = f(x + 1)$ define uma nova função h que denominamos uma translação horizontal de f.

Observe que, se denotamos por g a função definida por

$$g(x) = x + 1,$$

então a função h, acima, pode ser descrita por

$$h(x) = f(g(x)),$$

isto é, se $x = a$ pertence ao domínio de h, então para calcularmos o número $h(a)$ primeiro calculamos o número $g(a)$ e em seguida calculamos o número $f(g(a))$. Por exemplo, para $x = -1$, temos que $h(-1) = f(0)$, já que $g(-1) = 0$.

Esse processo de obter uma nova função a partir de duas funções conhecidas é chamado de *composição de funções* e a nova função é chamada de *função composta*. Por exemplo, as translações, contrações e expansões que estudamos antes são funções compostas.

Definição: Dado um par de funções f e g, *a composição de f com g* é a função $f \circ g$, definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Observe que, para calcularmos $(f \circ g)(x)$, precisamos, primeiro, poder calcular $g(x)$, ou seja, x deve ser um número do domínio da função g. Em seguida, devemos calcular $f(g(x))$, o que só pode ser feito se o número $g(x)$ pertence ao domínio de f. Em resumo, temos que o domínio da composta $f \circ g$ é o conjunto

$$\text{dom}\,(f \circ g) = \{x \in \text{dom}\,(g) \mid g(x) \in \text{dom}\,(f)\}.$$

Observe também que, a partir de duas funções f e g, podemos obter duas funções compostas: $f \circ g$, a composição de f com g, e $g \circ f$, a composição de g com f. Um fato que devemos ter em mente é que essas duas compostas podem ser funções diferentes; na verdade, isso é o que ocorre para a maioria dos pares de funções f e g.

Exemplos

1. Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 2x + 1$. Como o domínio de g é $\mathbb{R}$ e o domínio de f é o intervalo $[0, \infty)$, temos que o domínio da função composta $f \circ g$ é o conjunto dos números reais x, tais que $g(x) = 2x + 1 \in [0, \infty)$, ou seja,

$$2x + 1 \geq 0,$$

donde

$$2x \geq -1$$

e, portanto,

$$x \geq -1/2.$$

Isto é, o domínio de $f \circ g$ *é* o intervalo $[-1/2, \infty)$ e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = \sqrt{2x+1}.$$

Por outro lado, a composta $g \circ f$ é definida pela expressão

$$\begin{aligned}(g \circ f)\,(x) &= g(f(x)) \\ &= 2(f(x)) + 1 \\ &= 2\sqrt{x} + 1,\end{aligned}$$

sendo que seu domínio é o conjunto dos números reais não negativos, que é o domínio da função f.

2. Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 1$, então

(a) $(f \circ g)(x) = f(x - 1) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ e seu domínio é $\mathbb{R}$.

(b) $(g \circ f)(x) = g(x^2) = x^2 - 1$ *e* seu domínio é $\mathbb{R}$.

3. Se $f(x) = x^3 + 1$ e $g(x) = |x|$, então

(a) $(f \circ g)(x) = f(|x|) = |x|^3 + 1$. Em particular, $(f \circ g)(-1) = 1. + 1 = 2$.

(b) $(g \circ f)(x) = g(x^3+1) = |x^3 + 1|$. Em particular, $(g \circ f)(-1) = |(-1)^3 + 1| = 0$.

4. A função $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ é a composta $g \circ h$, onde

$$g(x) = \sqrt{x} \text{ e } h(x) = x^2 - 1.$$

De fato,

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1} = \text{f}(x).$$

5. Se $f(x) = x^2 + 1$, então

$$(f \circ f)(x) = x^4 + 2x^2 + 2.$$

De fato,

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = (f(x))^2 + 1 \\ &= (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2.\end{aligned}$$

Se a é um número do domínio da função composta $h = f \circ g$, podemos, a partir da reta $y = x$ *e* dos gráficos de f e de g (num mesmo sistema de coordenadas), determinar graficamente a imagem, $h(a) = (f \circ g)(a)$ (ou, equivalentemente, podemos determinar o ponto do gráfico de $f \circ g$ correspondente ao número a, isto é, o ponto $(a, h(a))$).

Para vermos isso, consideremos as funções f e g cujos gráficos são dados, juntamente com a reta $y = x$, na Figura 4.1.

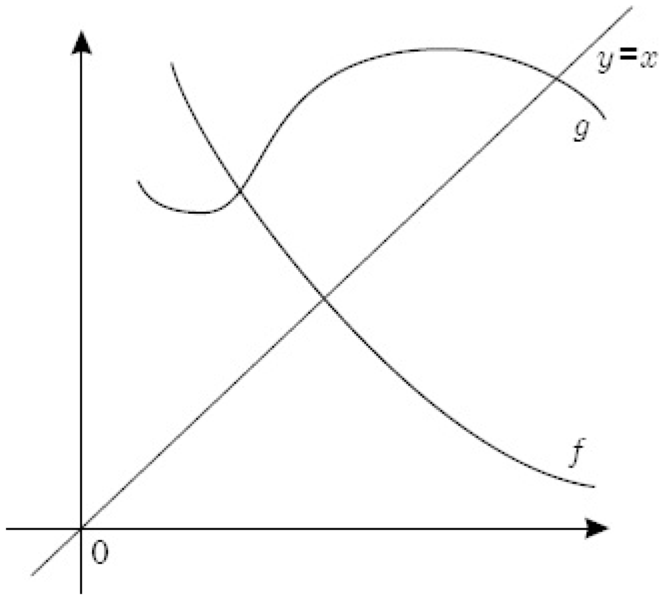


Figura 4.1

Se a é um número do domínio de $h = f \circ g$ e $b = g(a)$, então

$$h(a) = f(g(a)) = f(b),$$

e, portanto, para determinarmos o ponto $h(a)$, devemos, a partir do gráfico de f, localizar no eixo vertical o número $f(b)$. Mas, para isso, sabemos que é necessário determinar no eixo horizontal o ponto que representa o número b. Como $b = g(a)$, podemos, a partir da representação de a no eixo horizontal e do gráfico de g, determinar o número b no eixo vertical. Daí, usamos a reta $y = x$ para localizarmos b no eixo horizontal (Figura 4.2), isto é, traçamos uma reta horizontal (r_h na figura) passando pelo ponto que representa $b = g(a)$ no eixo vertical e determinamos sua interseção com a reta $y = x$, por onde traçamos um reta vertical (r_v na figura). O ponto de interseção dessa reta vertical com o eixo horizontal é a representação de $b = g(a)$.

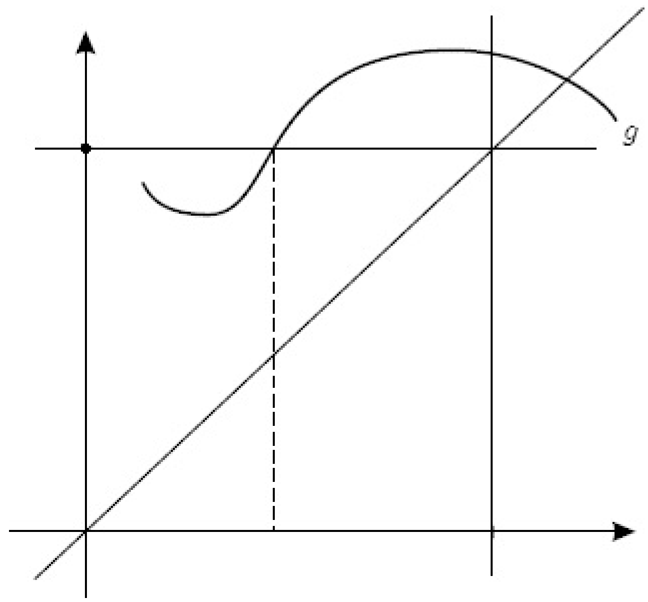


Figura 4.2

A partir da representação de $b = g(a)$ no eixo horizontal e do gráfico de f, determinamos a representação de $f(b) = h(a)$ no eixo vertical (Figura 4.3).

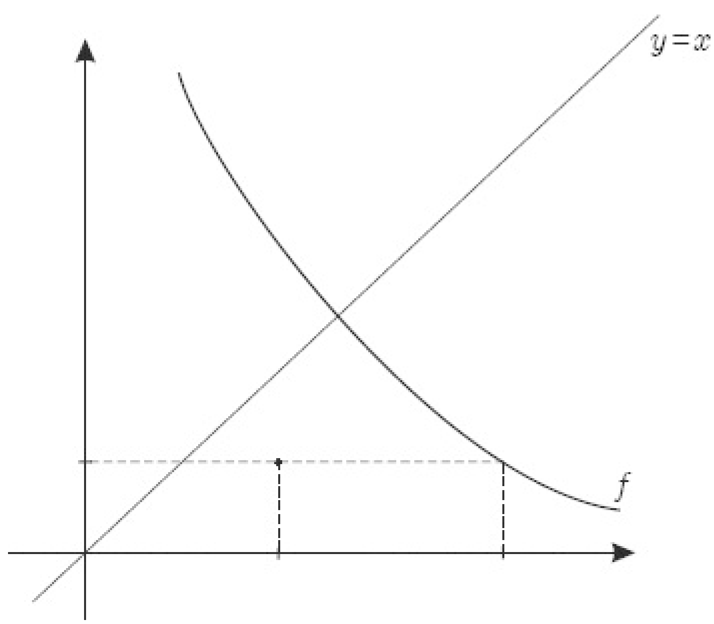


Figura 4.3

A Figura 4.4 representa todo o processo.

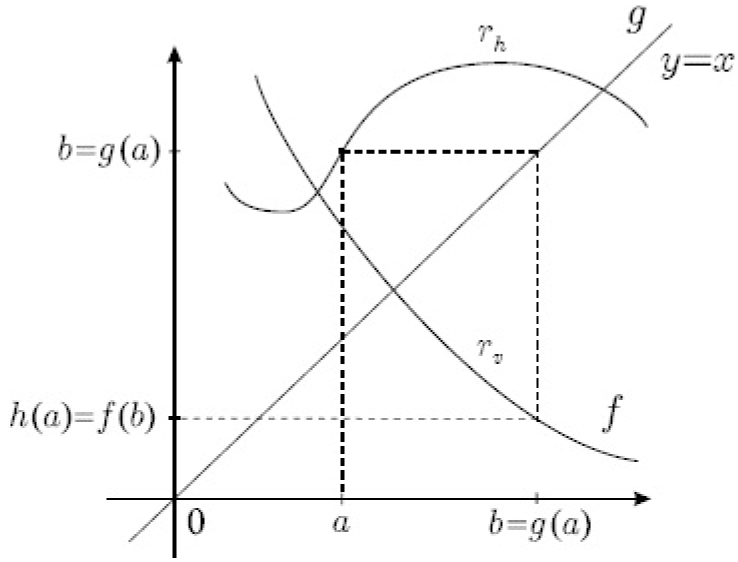


Figura 4.4

Exemplo

6. A partir do gráfico de f, dado na Figura 4.5a, podemos determinar no eixo vertical o número $(f \circ f \circ f)(1)$, isto é, $b = f(f(f(1)))$.

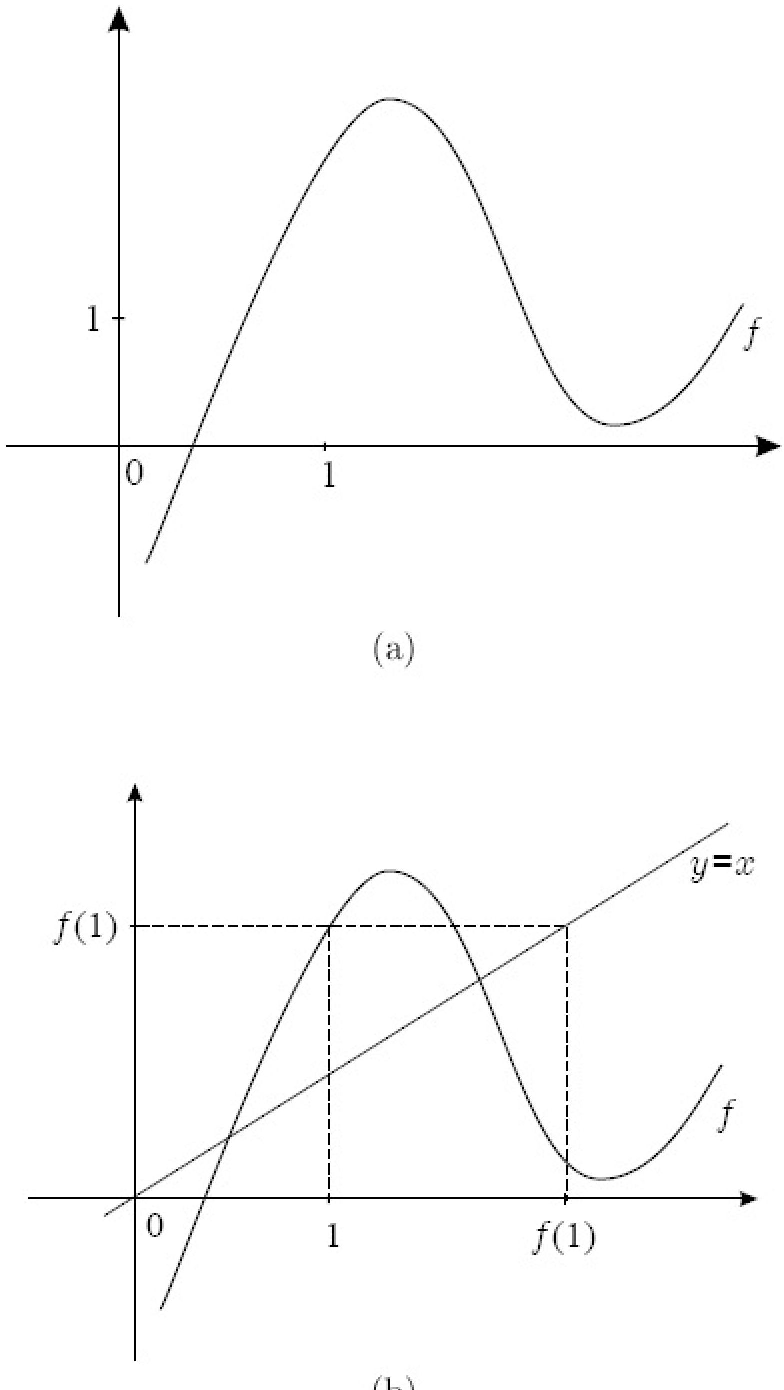


Figura 4.5

Primeiro, usamos os pontos (0,0) e (1,1) para traçarmos a reta $y = x$. Em seguida, usamos o gráfico de f para determinarmos o número $f(1)$ no eixo vertical e a reta $y = x$ para localizar sua representação no eixo horizontal (Figura 4.5b). Com essa representação e o gráfico de f, determinamos $f(f(1))$

no eixo vertical e, com a reta $y = x$, localizamos $f(f(1))$ no eixo horizontal (Figura 4.6a). Agora é só usar novamente o gráfico de f para determinar $f(f(f(1)))$ no eixo vertical (Figura 4.6b).

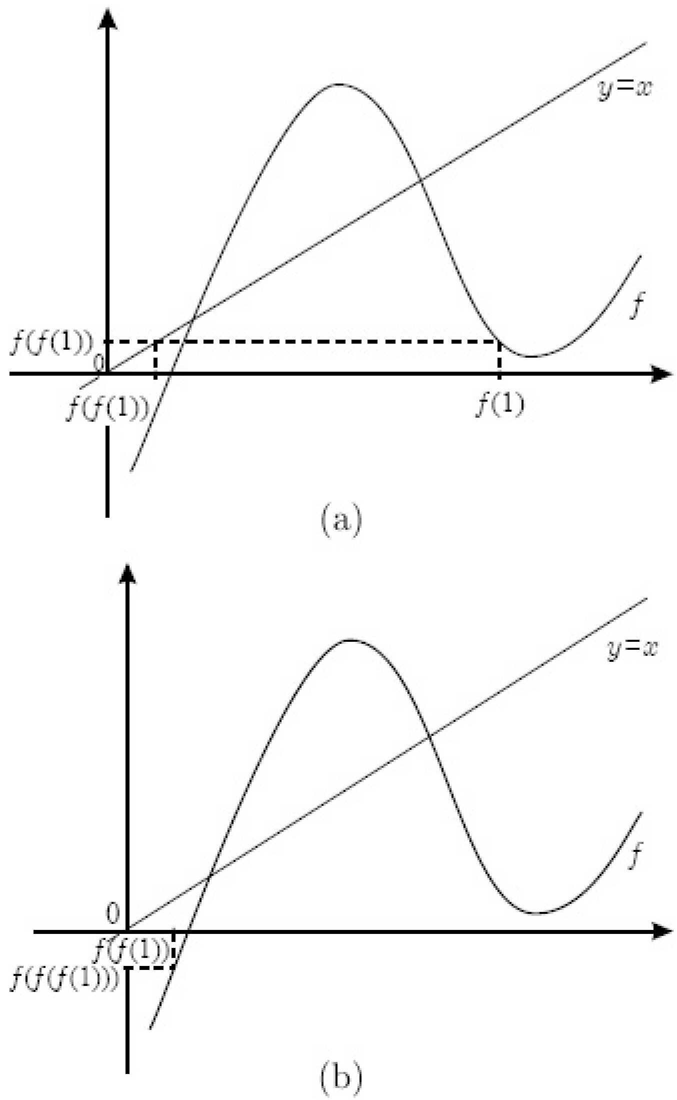


Figura 4.6

Na Figura 4.7 representamos todo o processo.

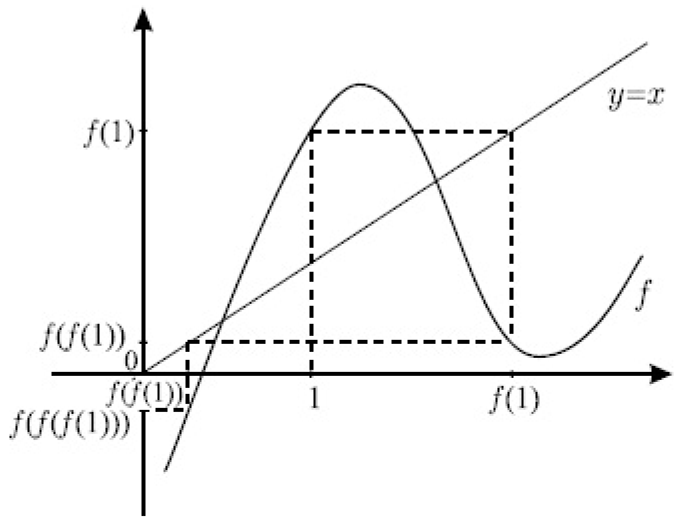


Figura 4.7

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Em cada item abaixo é dado um par de funções, f e g. Encontre a expressão para cada uma das compostas, f o g e g o f, descrevendo seus domínios (adotando a convenção de que para cada uma da funções f e g, seu domínio é o conjunto dos números reais para o qual a expressão dada faz sentido):

   (a) $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = |x|$.
   (b) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = |x|$.
   (c) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = |x - 1|$.
   (d) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ e $g(x) = |x|$.
   (e) $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

2. Escreva cada uma das quatro funções abaixo como a composta de três funções.

(a) $f_1(x) = 8 + \text{sen}^2 x$

(b) $f_2(x) = \cos^2(3x + 5)$

(c) $f_3(x) = \sqrt{8 + \text{sen } x}$

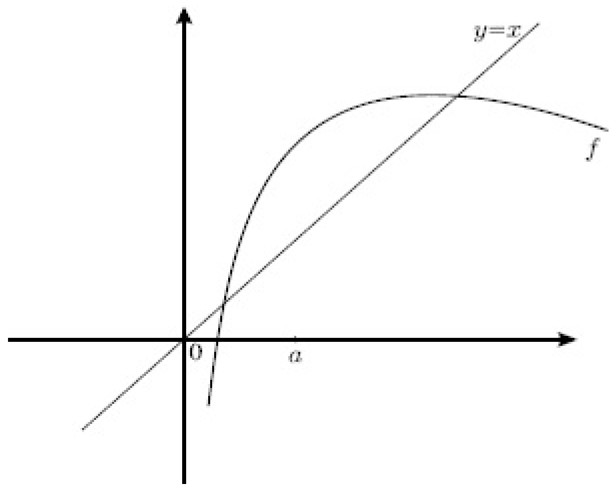
(d) $f_4(x) = -\frac{1}{\text{sen } x^4}$

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real e $g(x) = f(x^2 + 2x - 1)$, podemos dizer que:
   (a) $g = f$? Por quê?
   (b) $0 \in \text{dom}\,(g)$? Por quê?
   (c) $g = f \circ h$, onde $h(x) = x^2 + 2x - 1$?

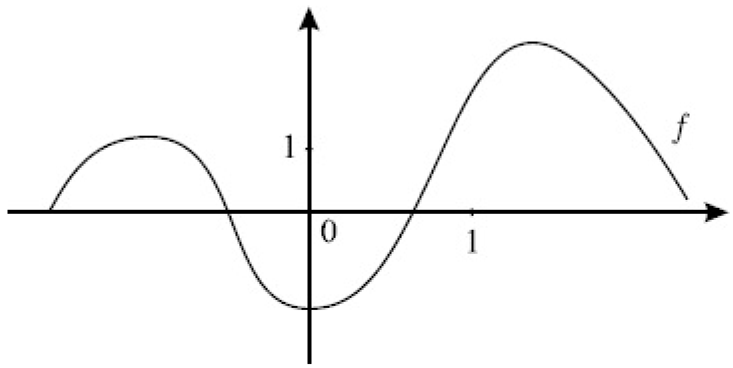
4. Seja $g(x) = f(x^2 + 1)$, onde f é uma função qualquer. Em cada item abaixo decida se a proposição dada é verdadeira ou falsa:
   (a) Se $f(1) = 1$, então $0 \in dom(g)$ e $g(0) = 1$.
   (b) Se a equação $g(x) = 0$ tem solução, então a equação $f(x) = 0$ tem solução.
   (c) Se a equação $f(x) = 0$ tem solução, então a equação $g(x) = 0$ tem solução.

5. Em cada item abaixo, dê um exemplo de funções f e g, definidas por expressões algébricas, que satisfaçam as condições dadas:
   (a) A equação $f(x) = 0$ tem uma solução e a equação $f(g(x)) = 0$ não tem solução.
   (b) A equação $f(x) = o$ tem uma solução e a equação $f(g(x)) = 0$ tem duas soluções.
   (c) A equação $f(x) = 1$ tem uma solução e a equação $f(g(x)) = 1$ não tem solução.
   (d) A equação $f(x) = 1$ tem uma solução e a equação $f(g(x)) = 1$ tem duas soluções.

6. Considere a função dada pelo gráfico abaixo. Marque no eixo vertical o ponto que corresponde ao número $f(f(f(a)))$.



7. Considere a função f dada pelo gráfico abaixo.

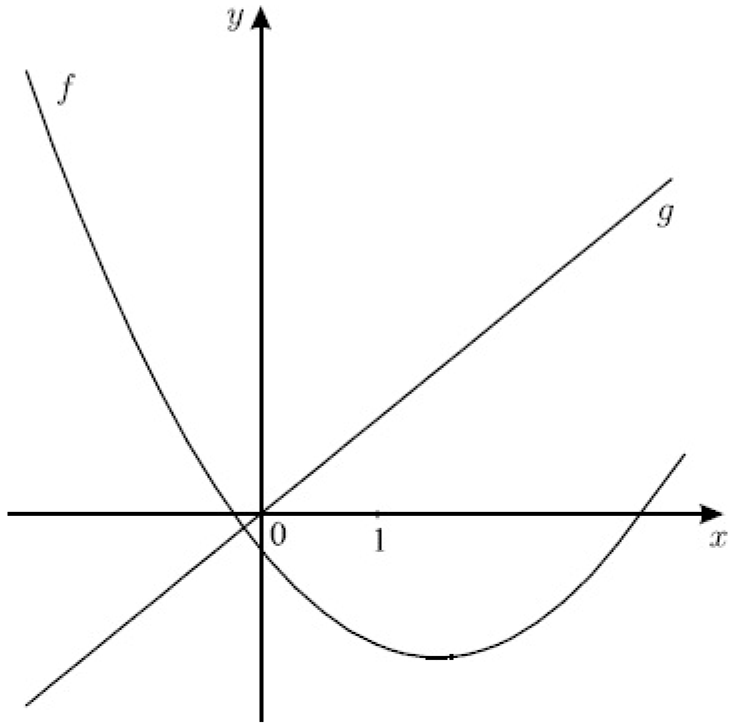


   (a) Marque no eixo vertical o ponto que corresponde ao número $f(f(1))$.
   (b) Marque no eixo-x; as soluções da equação $f(f(x)) = 1$.

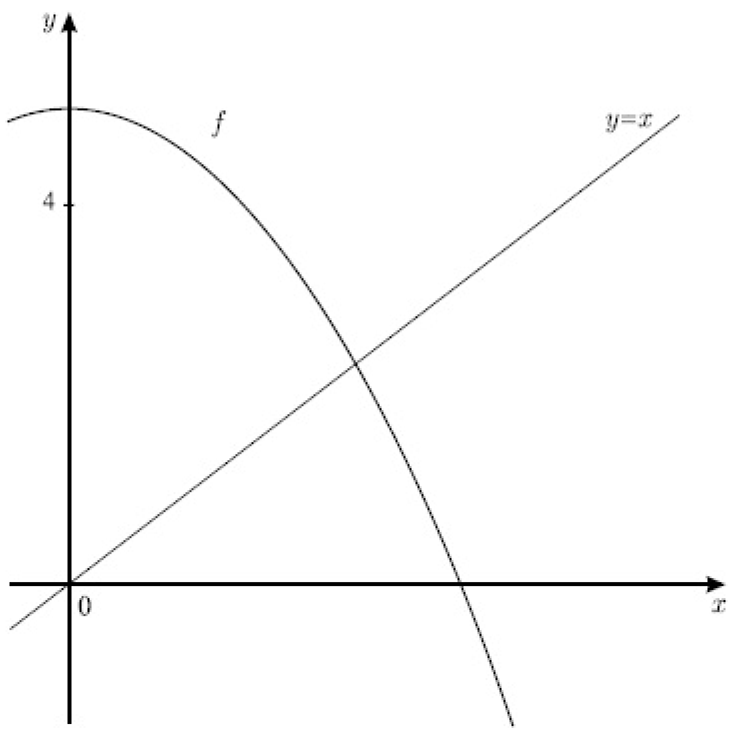
8. São dadas as seguintes informações sobre as funções f e g:
   (a) A imagem de g é o intervalo $[0, 2]$.
   (b) As soluções da equação $g(x) = 1$ são $0, -1$ e $\frac{1}{2}$.
   (c) As soluções da equação $f(x) = 0$ são -1, 1 e 3.

   Quais são as soluções da equação $f(g(x)) = 0$?

9. Na figura a seguir são dados os gráficos de uma função f e da função $g(x) = x$. Marque no eixo vertical o ponto que representa o número real $f(f(1))$

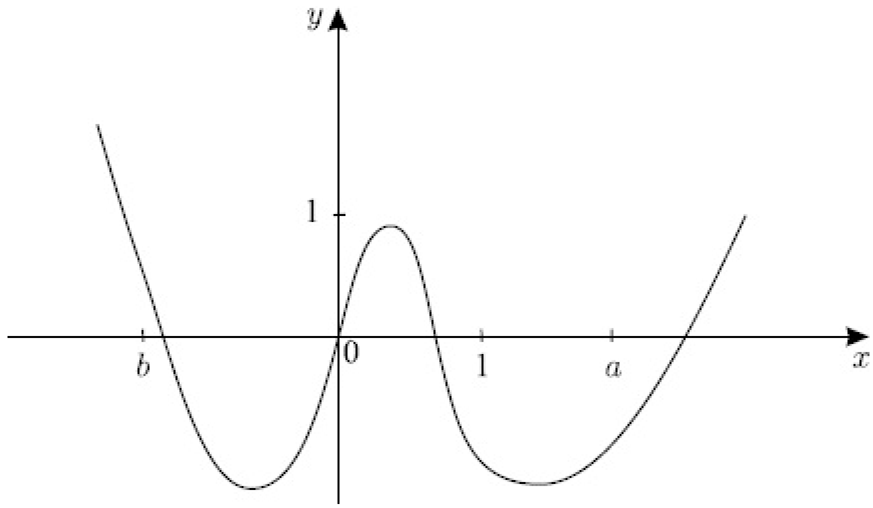


10. Marque no eixo horizontal da figura abaixo os pontos que representam as soluções da equação $f(f(x)) = 4$.



11. Considere a função f e os pontos a e b dados no gráfico abaixo.

Marque no eixo vertical os pontos correspondentes aos valores de $f(f(a))$ e $f(f(b))$.



5. Funções inversíveis

Consideremos agora as funções f, g e h cujos gráficos são dados na Figura 5.1 e observemos, primeiramente, que o comportamento de f em relação à interseção com retas horizontais é nitidamente diferente dos comportamentos de g e h.

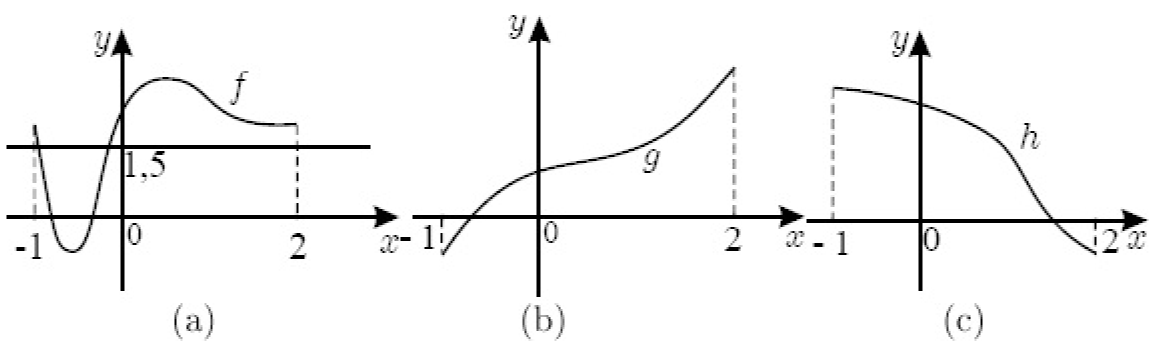


Figura 5.1

De fato, vemos, por exemplo, que o gráfico de f intercepta a reta horizontal $y = 1,5$ em dois pontos, enquanto que qualquer reta horizontal $y = b$ só pode interceptar tanto o gráfico de g quanto o de h no máximo em um ponto.

Por outro lado, embora essa seja uma propriedade comum para g e h, seus gráficos também nos dizem que essas funções têm comportamentos nitidamente distintos: se x_0 e x_1 são pontos do intervalo [–1,2] com x_0 à esquerda de x_1, então:

- no gráfico de g, o ponto $(x_1, g(x_1))$ está acima do ponto $(x_0, g(x_0))$ (v. Figura 5.2a).
- no gráfico de h, o ponto $(x_1, h(x_1))$ está abaixo do ponto $(x_0, h(x_0))$ (v. Figura 5.2b).

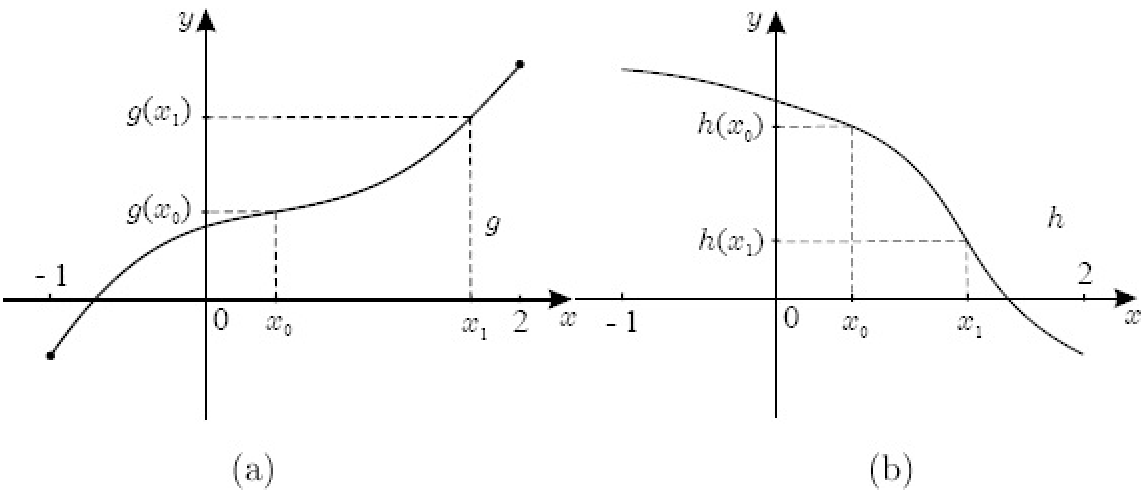


Figura 5.2

Algebricamente, essas propriedades se traduzem em: se x_0 e x_1 são pontos do intervalo [–1,2], com $x_0 < x_1$, então $g(x_0) < g(x_1)$ enquanto que $h(x_0) > h(x_1)$.

Dada a importância dessas propriedades é conveniente nomeá-las. Assim definimos:

Definição 5.1: Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e C um subconjunto de D. Dizemos que f é *crescente* em C, se para x e y pertencentes a C com $x < y$, tem-se que $f(x) < f(y)$. Se f é crescente em seu domínio, dizemos simplesmente que *f é uma função crescente*.

E, analogamente,

Definição 5.2: Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e C um subconjunto de D. Dizemos que f é *decrescente* em C, se para x e y pertencentes a C com $x < y$, tem-se que $f(x) > f(y)$. Se f é decrescente em seu domínio, dizemos simplesmente que *f é uma função decrescente*.

Observe que, pela definição, tanto as funções crescentes quanto as decrescentes têm a propriedade de que

$$\text{se } x \neq y, \text{ então } f(x) \neq f(y).$$

Isso nos diz que as funções crescentes e as decrescentes possuem a propriedade que destacamos para as funções g e h cujos gráficos são dados acima, isto é, retas horizontais cortam o gráfico da função no máximo em um ponto.

Exemplos

1. A função f da Figura 5.3a é crescente em $[x_1, x_2]$ e decrescente nos intervalos $[-1, x_1]$ e $[x_2, 2]$.

2. A função g da Figura 5.1b é crescente e a função h de 5.1c é decrescente.

3. A função $t \mapsto \operatorname{sen} t$ (Figura 5.3b) é crescente em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e decrescente em $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

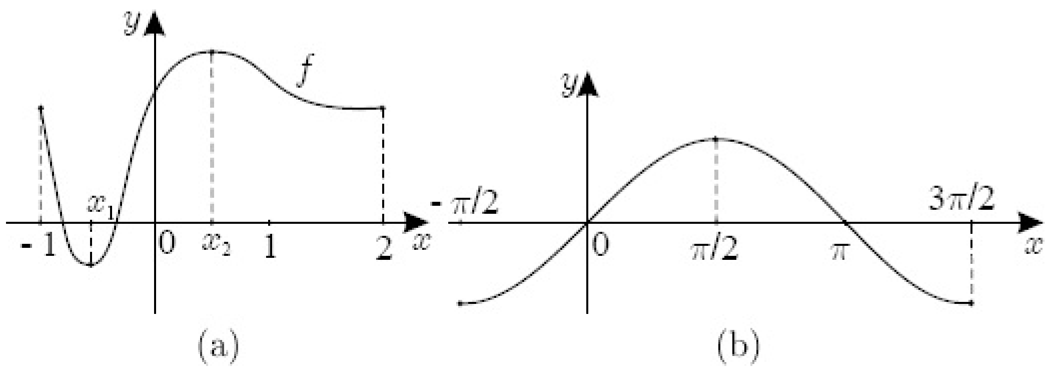


Figura 5.3

4. A função $u(x) = x^2$ é decrescente em $(-\infty, 0]$ e é crescente em $[0, \infty)$.

De fato, sabemos que, se $a < b < 0$, quando multiplicamos essas desigualdades por a ou por b que são números negativos obtemos

$$ab < a^2 \text{ e } b^2 < ab,$$

donde

$$b^2 < a^2,$$

ou seja, se $a < b < 0$, então $u(a) > u(b)$. Por outro lado, se o $< a < b$, ao efetuarmos as multiplicações as desigualdades se mantêm e, portanto, $u(a) < u(b)$.

No exemplo **4**, usamos nossa convenção de que uma vez que não foi explicitado o domínio de u, então assumimos que seu domínio é o conjunto de números com os quais a operação indicada pode ser efetuada, ou seja, nesse caso é todo o conjunto de números reais. Assim, a função u apresenta um comportamento misto e, portanto, não é nem crescente nem decrescente.

5. Consideremos a função $v : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida pela mesma regra de associação, $v(x) = x^2$, mas com outro domínio (apenas o intervalo $[0, \infty)$). Temos então que v é crescente em todo seu domínio e, portanto, é uma função crescente.

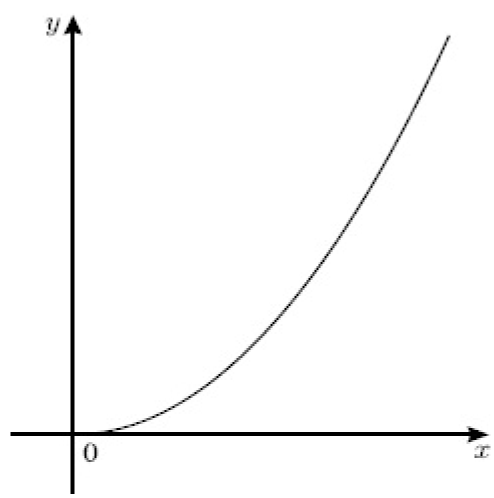


Figura 5.4

6. A função $w(x) = x^3$ é uma função crescente, enquanto que $x \mapsto \frac{1}{x}$ é decrescente em $(-\infty, 0)$ e em $(0, \infty)$ (Figura 5.5).

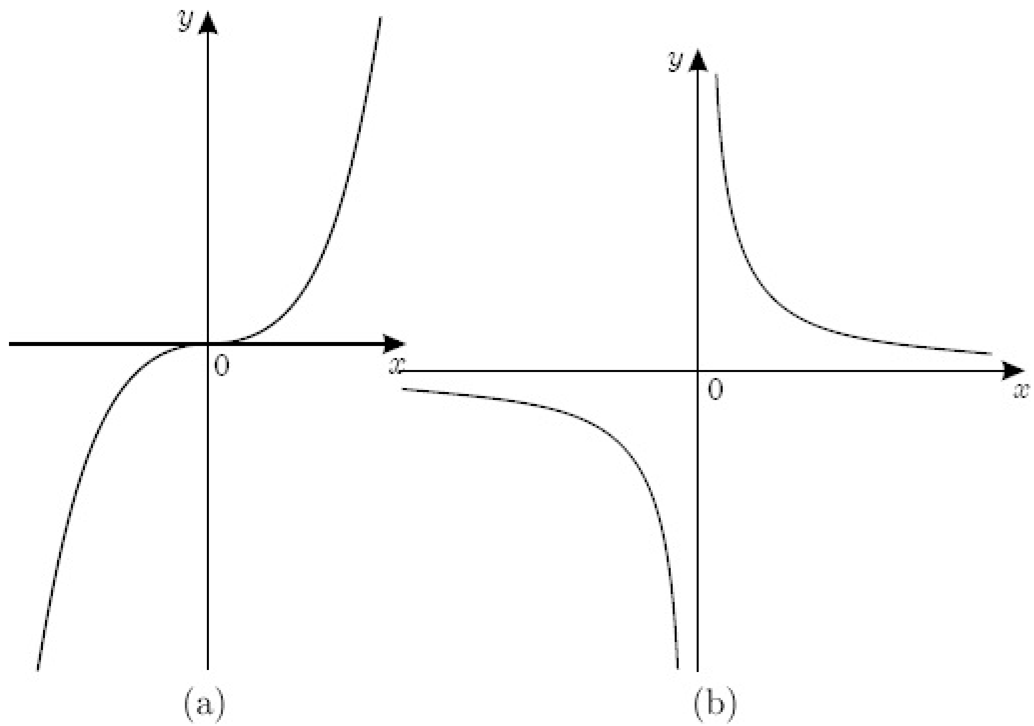


Figura 5.5

Em geral, pelo que vimos anteriormente, se f é uma função tal que retas horizontais cortam o gráfico de f no máximo em um ponto, então

para cada número b da imagem de f, existe um único número a do domínio de f tal que f(a) = b. (*)

Do que vimos acima, tanto as funções crescentes quanto as decrescentes possuem essa propriedade. Em particular a função $\upsilon : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\upsilon(x) = x^2$ possui a propriedade (*), já que é crescente. Como o conjunto imagem de υ é o intervalo $[0,\infty)$, a propriedade nos diz que para cada número $x_0 \geq 0$, existe um único número $a_0 \geq 0$, tal que $\upsilon(a_0) = x_0$, ou seja

$$a_0^2 = x_0,$$

e, portanto, a x_0 podemos associar de maneira única o número a_0.

Como já sabemos, a_0 é chamado a *raiz quadrada de* x_0 e é denotado por $a_0 = \sqrt{x_0}$. Acabamos então de obter uma nova função, cujo domínio é o intervalo $[0, \infty)$, e que a cada número $x \geq 0$ associa o único número não negativo $\sqrt{x}$ que satisfaz $(\sqrt{x})^2 = x$

Na Figura 5.6, onde está esboçado o gráfico de υ, determinamos graficamente a raiz quadrada de x_0. Já sabemos que para obter graficamente a solução da equação $\upsilon(x) = x_0$ devemos traçar uma reta horizontal pelo ponto que representa no eixo vertical o número x_0 (que pertence à imagem de υ), e então determinar as interseções dessa reta com o gráfico de υ.

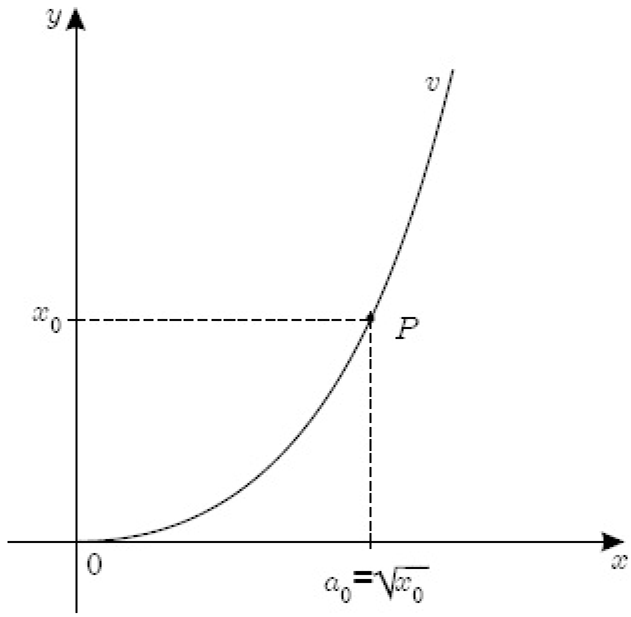


Figura 5.6

Nesse caso, só obtemos um ponto P, já que υ é crescente. A única solução da equação é então a abscissa de P, que denotamos por a_0 e que, portanto, é o número que corresponde à interseção do eixo horizontal com a reta vertical que passa por P.

Aqui é interessante comentarmos um erro que muito frequentemente é cometido pelos alunos. E muito comum os alunos dizerem que $\sqrt{4} = \pm 2$, o que não faz sentido. Esse erro decorre de uma confusão com a função que acabamos de obter e as soluções da equação $x^2 = b$.

Pela convenção que estabelecemos há pouco temos:

- O símbolo $\sqrt{x}$ é uma forma compacta de nos referirmos ao

único número não negativo que quando elevado ao quadrado resulta no número real x.

- O domínio da função $\sqrt{x}$ é o conjunto de números não negativos, logo só podemos *extrair* a raiz quadrada de números não negativos.

- Se $x \geq 0$, então $\sqrt{x} \geq 0$, logo se $x = 4$, por exemplo, $\sqrt{4} = 2$ e, portanto, não faz sentido dizermos que $\sqrt{4} = \pm 2$. De fato, $-2 = -\sqrt{4}$.

- Se consideramos a equação $x^2 = b$ com $b \geq 0$ (se $b < 0$, então a equação não tem soluções no conjunto dos números reais), o que estabelecemos acima nos diz que o número (não negativo) que denotamos pelo símbolo $\sqrt{b}$ é uma solução. Por outro lado, como $(-\sqrt{b})^2 = (\sqrt{b})^2$, podemos concluir que $-\sqrt{b}$ é a outra solução. Assim podemos dizer que as soluções reais da equação $x^2 = b$, com $b \geq 0$, são $x = \sqrt{b}$ ou $x = -\sqrt{b}$, ou simplesmente $x = \pm\sqrt{b}$. Por exemplo, se $b = 4$, então as soluções de $x^2 = 4$ são $x = \pm\sqrt{4}$; como $\sqrt{4} = 2$, concluímos que as soluções são $x = \pm 2$.

Observe que, a partir da operação *elevar ao quadrado*, pudemos definir uma nova operação, *extrair a raiz quadrada*, e a peça chave para isso foi o fato de que a função $\upsilon : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\upsilon(x) = x^2$ possui a propriedade (*).

Em geral, uma função f com a propriedade (*) nos permite definir uma nova função que denominamos a função inversa de f e denotamos por f^{-1}. O domínio da função inversa é a imagem de f, e f^{-1} é definida da seguinte maneira:

> *Se* Im(f) *é o conjunto imagem de f* e $x \in$ Im(f), *então $f^{-1}(x) = a$, onde a é o único número do domínio de f tal que $f(a) = x$.*

Uma função com a propriedade (*) é dita *inversível*. Pelo que vimos, tanto as funções crescentes quanto as decrescentes possuem a propriedade (*) e, portanto, são inversíveis.

Exemplos

7. Consideremos o exemplo $\upsilon : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\upsilon(x) = x^2$ já analisado acima. Pelo que vimos, podemos concluir que υ é inversível e $\upsilon^{-1} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, sua função inversa, é dada por

$$\upsilon^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

isto é, υ^{-1} é a função raiz quadrada.

8. Se $f(x) = 2x + 1$, então f é crescente e, portanto, inversível.

A imagem de f é o conjunto dos reais, logo se b é um número real, então b está na imagem de f e, portanto,

$$b = f(a) = 2a + 1,$$

para algum número real a, donde

$$a = \frac{(b-1)}{2},$$

ou seja, pela definição de função inversa, $f^{-1}(b) = a = \frac{(b-1)}{2}$. Em resumo, temos que a função inversa de f tem o conjunto dos números reais como domínio (já que $\mathbb{R}$ é o conjunto imagem de f) e é definida pela expressão

$$f^{-1}(x) = \frac{(x-1)}{2}.$$

9. A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é decrescente em $(-\infty, 0)$ e em $(0, \infty)$, mas não é uma função decrescente já que $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$. No entanto, essa função possui a propriedade (*) e, portanto, é inversível.

É importante ficar claro que o símbolo f^{-1} não se refere à função $\frac{1}{f}$: de fato, f^{-1} e $\frac{1}{f}$ são funções diferentes. Por exemplo, se v é a função do exemplo **7** acima, vimos que

$$v^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

enquanto que $\frac{1}{v}(x) = \frac{1}{v(x)} = \frac{1}{x^2}$.

Decorre da definição de função inversa que o conjunto imagem de f^{-1} é o domínio de f. Mais ainda, f^{-1} também possui a propriedade (*) (isto é, é inversível) e sua função inversa é a própria f.

O teorema a seguir enuncia a propriedade que caracteriza algebricamente as funções inversíveis:

Teorema 5.1: Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é *inversível* se, e somente se, para x e y pertencentes a D tem-se que

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Usando esse teorema podemos mostrar que a composição de funções inversíveis gera uma função inversível, isto é,

Teorema 5.2: *Se f e g são funções inversíveis, então f o g é inversível.*

Demonstração: pelo Teorema 5.1, devemos mostrar que se $x \neq y$, então $(f \circ g)(x) \neq (f \circ g)(y)$. De fato, se x e y pertencem ao domínio de f o g e $x \neq y$, então, como g é inversível, podemos concluir que

$$g(x) \neq g(y)$$

e, portanto,

$$f(g(x)) \neq f(g(y)),$$

já que f também é inversível. □

A maneira informal mais simples de descrevermos a relação entre uma função inversível e a sua função inversa é dizendo que *uma desfaz o que a outra faz*. Vejamos o que queremos dizer com essa frase utilizando alguns exemplos:

- se começamos com o número 0, 5 e efetuamos a operação *elevar ao quadrado* (isto é, calculamos $v(0, 5)$, com v sendo a função do exemplo **7**, obtemos o número 0,25, que é um número positivo e, portanto, podemos *extrair sua raiz quadrada* (isto é, podemos calcular $v^{-1}(0{,}25)$), obtendo o número 0,5, com o qual começamos.

- se começamos com o número 2 e avaliamos a função f do exemplo **8**, $f(x) = 2x + 1$, obtemos o número 2.2 + 1 = 5. Se a esse resultado aplicamos agora a função inversa, obtemos $f^{-1}(5) = \frac{(5-1)}{2}$ que nos dá de volta o número 2, com o qual começamos as operações.

Ou seja, em geral queremos dizer que, se avaliamos uma função inversível f num número qualquer a do seu domínio, obtendo o número $f(a)$, e a esse número aplicamos a função inversa f^{-1} (isso pode ser feito pois $f(a)$ está na imagem de f que é o domínio de f^{-1}), obteremos como resultado o próprio número a, isto é,

$$f^{-1}(f(a)) = a,$$

qualquer que seja a, pertencente ao domínio de f.

Como, por definição, $(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a))$, temos que a relação entre uma função e sua inversa pode ser descrita usando-se o conceito de função composta que introduzimos na seção anterior:

se f é uma função inversível e f^{-1} é a sua função inversa, então
$(f^{-1} \circ f)(x) = x$ *para* $x \in \text{dom}(f)$ e
$(f \circ f^{-1})(y) = y$ *Para* $y \in \text{dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f)$.

Em outras palavras, a composição de uma função inversível com sua função inversa resulta na função identidade.

Aqui é importante ressaltarmos que as especificações dos domínios nas expressões acima são fundamentais.

Para esclarecermos essa afirmação, sejam v e v^{-1} as funções do exemplo **7** acima. Isto é,

$$v : [0, \infty) \to \mathbb{R} \text{ com } v(x) = x^2 \text{ e}$$

$$v^{-1} : [0, \infty) \to \mathbb{R} \text{ com } v^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Pela relação entre uma função e sua inversa, temos que

$$v^{-1} \circ v(x) = x \text{ para } x \geq 0,$$

ou seja,

$$\sqrt{x^2} = x \text{ para } x \geq 0.$$

A restrição acima, de que $x \geq 0$, é extremamente importante pois, se h é a função definida pela expressão

$$h(x) = \sqrt{x^2},$$

pela convenção que já estabelecemos, o domínio de h é $\mathbb{R}$, já que x^2 é um número não negativo qualquer que seja x. Ou seja, $v^{-1} \circ v$ e h são funções diferentes, já que possuem domínios diferentes, muito embora possuam a mesma regra de associação.

Em particular **não** podemos dizer que $h(x) = x$, pois essa igualdade não é válida para valores negativos de x (por exemplo $h(-1) = 1 \neq -1$).

De fato, sabemos que, por definição, $\sqrt{x^2}$ é o único número **não negativo** que quando elevado ao quadrado resulta em x^2. Como $|x|$ é um número que satisfaz essas duas condições ($|x| \geq 0$ e $|x|^2 = x^2$), temos que

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Ou seja, $h(x) = |x|$.

Esse é o resultado que usamos quando resolvemos uma equação do tipo $x^2 = d$ ou, mais geralmente, uma equação do tipo $(f(x))^2 = d$, onde f é uma função real e $d \geq 0$.

Por exemplo, vamos resolver a equação $x^2 = 5$. Como ambos os membros dessa igualdade são números não negativos, podemos extrair suas raízes quadradas, obtendo

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{5}.$$

Agora observamos que essa equação é equivalente a

$$h(x) = \sqrt{5},$$

e, portanto, pelo que foi visto há pouco, chegamos a

$$|x| = \sqrt{5},$$

que tem como solução $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$.

Se usássemos a igualdade $\sqrt{x^2} = x$, que só é válida para $x \geq 0$, encontraríamos apenas a solução $x = \sqrt{5}$.

Em geral, da equação

$$(f(x))^2 = d$$

passamos a

$$\sqrt{(f(x))^2} = \sqrt{d},$$

que é equivalente a

$$h(f(x)) = \sqrt{d},$$

ou seja,

$$|f(x)| = \sqrt{d},$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$f(x) = \sqrt{d} \text{ ou } f(x) = -\sqrt{d}.$$

Aplicação: Vamos usar esse resultado para obter a solução geral de uma equação quadrática,

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a \neq 0.$$

Primeiro reescrevemos a equação, *completando quadrados*, obtendo

$$a\left((x+\frac{b}{2a})^2+(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2})\right)=0.$$

Como $a \neq 0$, temos que

$$(x+\frac{b}{2a})^2+(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2})=0,$$

que nos dá

$$(x+\frac{b}{2a})^2=-(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}),$$

que é o mesmo que

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Observe que como no lado esquerdo dessa ígualdade aparece um quadrado (que sempre é não negativo), vemos que para haver alguma solução é preciso que o lado direito também seja não negativo, isto é, acabemos de obter a condição (bastante conhecida) de que para haver soluções reais para a equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

é preciso ter $b^2 - 4ac \geq 0$. Se esse é o caso, extraindo as raízes quadradas obtemos

$$\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}},$$

donde

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}$$

que nos dá a solução

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2|a|} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|},$$

donde

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}.$$

Como $|a| = a$, se $a > 0$, e $|a| = -a$, se $a < 0$, obtemos em ambos os casos as duas soluções

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad \square$$

Observação: No exemplo acima, a equação é do tipo

$$(f(x))^2 = d;$$

com

$$f(x) = x + \frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad d = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Em geral, se f é uma função inversível, usamos sua função inversa para resolvermos uma equação

$$y = f(x)$$

De fato, se $y = f(x)$, então

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$$

isto é, podemos obter x em termos de y.

Por outro lado, se f é uma função tal que para cada $x \in \text{dom}(f)$, podemos resolver a equação $y = f(x)$ obtendo uma única solução, isto é, se encontramos uma função g tal que

$$\text{se } y = f(x), \text{ então } g(y) = x,$$

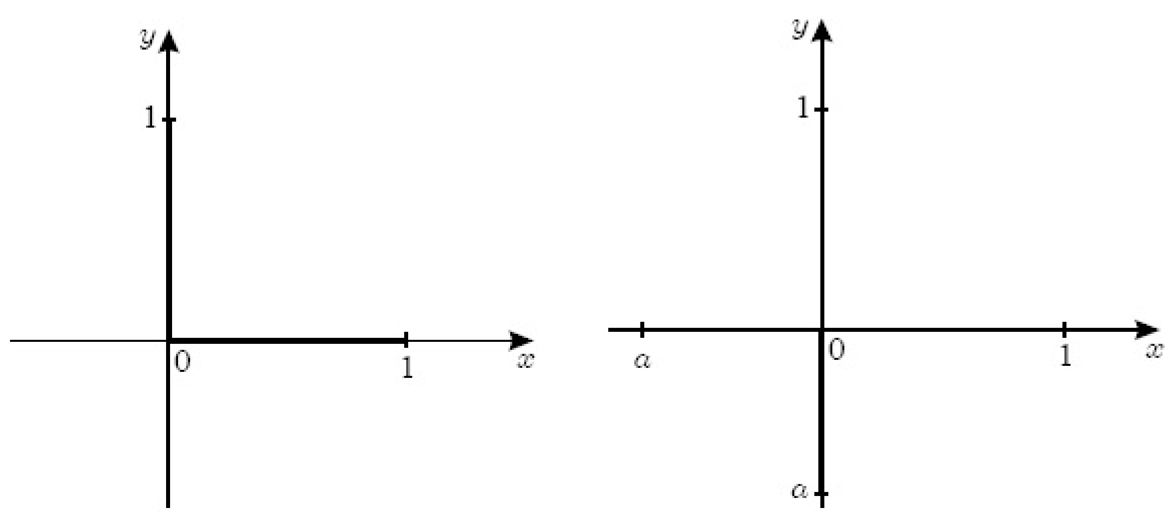
podemos afirmar que f é uma função inversível com $f^{-1}(y) = g(y)$ para todo $y \in \text{dom}\,(f^{-1}) = \text{Im}(f)$.

O gráfico da função inversa

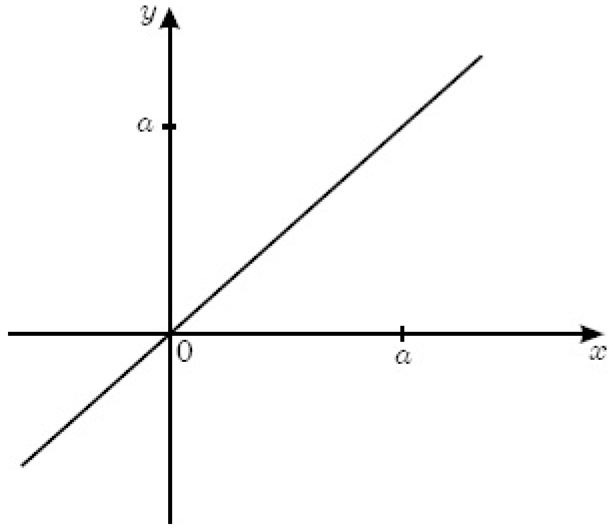
Nosso objetivo agora é mostrar como podemos obter o gráfico da inversa de uma função a partir do gráfico da função.

Para isso, trabalharemos com um sistema de coordenadas do plano tal que a escala usada no eixo horizontal é a mesma que a usada no eixo vertical. Com isso, queremos dizer que o segmento que representa o intervalo [0,1] no eixo horizontal tem o mesmo comprimento que o segmento que representa o mesmo intervalo no eixo vertical (Figura 5.7a).

Como consequência de colocarmos cl IXLGSIXLcl GSCcücl nos dois eixos, temos que qualquer que seja o número real a, o segmento do eixo horizontal que tem como extremos a origem e o ponto que representa o número a tem o mesmo tamanho que o segmento correspondente do eixo vertical (Figura 5.7b). Isso nos diz que o conjunto de pontos que têm as duas coordenadas iguais, digamos (a,a), é a reta que passa pela origem e faz um ângulo de 45 graus (ou $\frac{\pi}{4}$ radianos) com eixo horizontal (Figura 5.7c).



(a) (b)



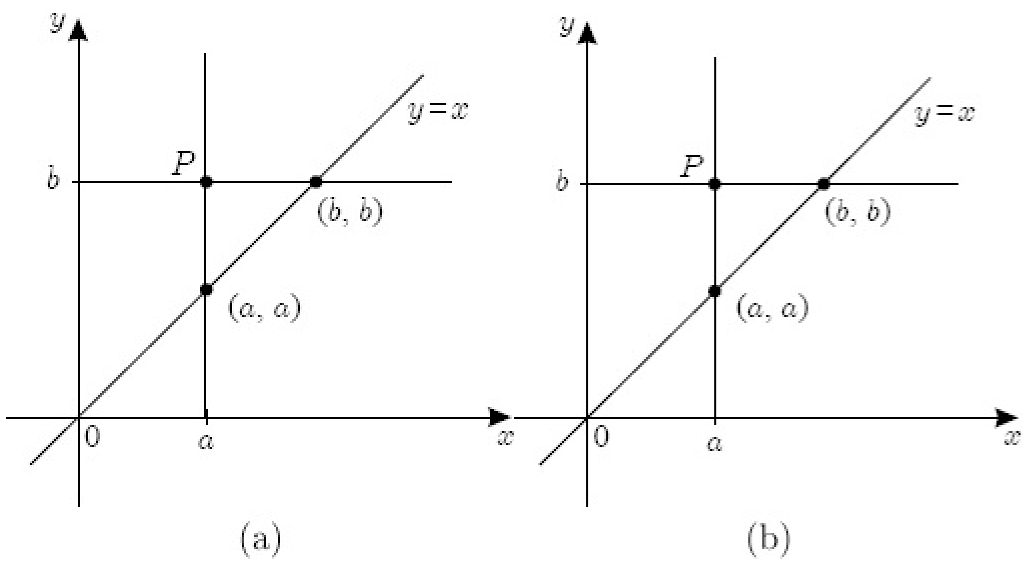
(c)

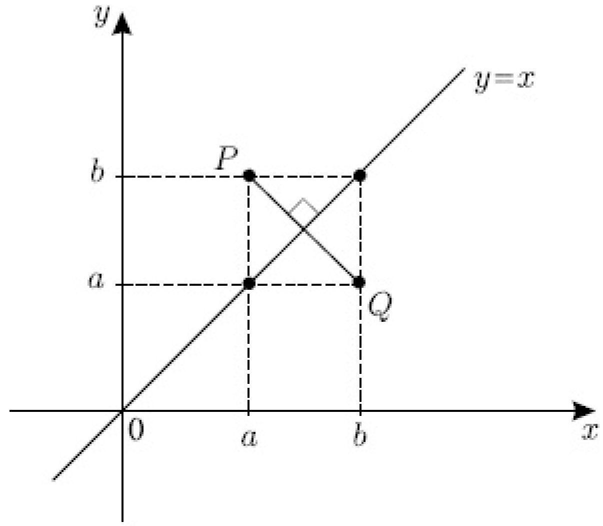
Figura 5.7

Assim, os pontos dessa reta são os pontos de coordenadas (*x, y*) que satisfazem a equação $y = x$. Nos referiremos então a essa reta como sendo a reta $y = x$. Essa reta é chamada a diagonal principal.

Vejamos agora como, dado o ponto *P* de coordenadas (*a,b*), podemos deter-minar graficamente o ponto *Q* de coordenadas (*b, a*).

Traçando a reta horizontal que passa pelo ponto (*a, b*), podemos determinar sua interseção com a reta $y = x$, que é o ponto cujas coordenadas são (*b,b*). Traçando a reta vertical que passa por (*a, b*), determinamos sua interseção com a reta $y = x$, que tem coordenadas (*a, a*) (Figura 5.8a).





(c)

Figura 5.8

Pelo ponto (a, a) traçamos uma reta horizontal r_h, e, pelo ponto (b, b), uma reta vertical r_v. O ponto Q de coordenadas (b, a) é o ponto de interseção das retas r_h e r_v. De fato, r_h,é a reta de equação $y = a$, $x \in \mathbb{R}$e r_v tem equação $x = b$, $y \in \mathbb{R}$. Logo, as coordenadas do ponto (b, a) satisfazem as equações de ambas as retas e, portanto, o ponto Q está na interseção dessas retas (Figura 5.8b).

Agora observamos que, como usamos a mesma escala nos dois eixos, os pontos de coordenadas (a, b) e (b, a) são vértices numa diagonal de um quadrado que tem o segmento da reta $y = x$ entre os pontos (a, a) e (b, b) como a outra diagonal (Figura 5.8c).

Conhecida essa geometria, vemos que podemos obter o ponto (b, a) refletindo em relação à diagonal $y = x$ o ponto (a, b), usando a reta que passa por (a, b) e é ortogonal à reta $y = x$.

Convencionamos dizer, simplesmente, que o ponto (b, a) é a reflexão (ortogonal) do ponto (a, b) em relação à reta $y = x$.

Vejamos agora como usamos esses fatos para obter o gráfico da função inversa a partir do gráfico da função.

Consideremos, como exemplo, a função f cujo gráfico é dado abaixo (Figura 5.9 a). Pelo que já vimos, sabemos que f é crescente e, portanto, inversível.

Comecemos fazendo $x_0 = 2$. Pelo gráfico, vemos que $f(2) = 1$, e, portanto, o ponto (2,1) é um ponto do gráfico de f.

Por outro lado, como $f(2) = 1$ temos que 1 pertence à imagem de f e, portanto, ao domínio de f^{-1}. Mais ainda pela definição da função inversa, sabemos que $f^{-1}(1) = 2$, logo o ponto (1, 2) é um ponto do gráfico de f^{-1}.

Pelo que vimos acima, basta refletirmos o ponto (2,1) em relação à diagonal $y = x$ para obtermos o ponto $(1, 2) = (1, f^{-1}(1))$ (Figura 5.9b).

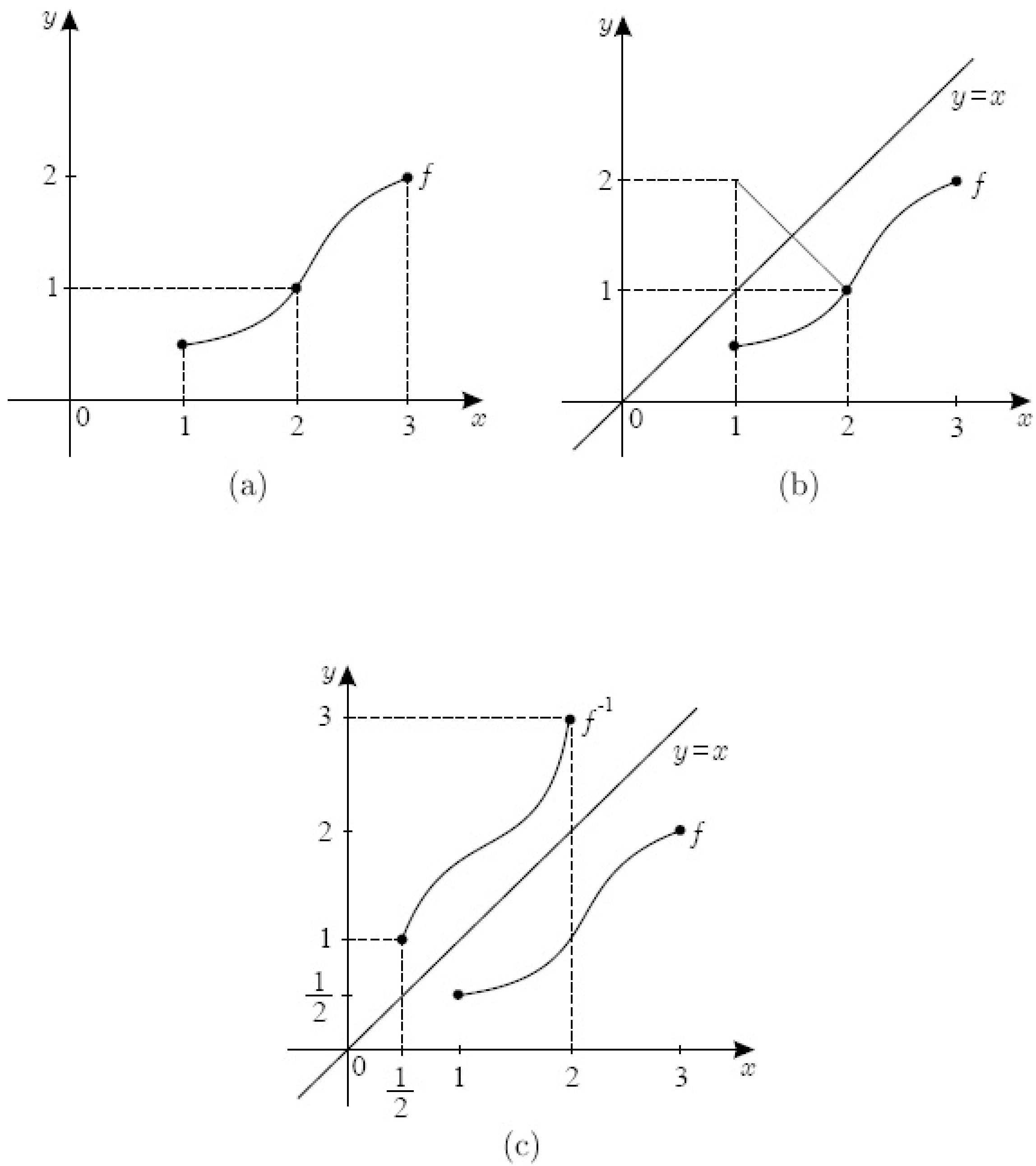


Figura 5.9

Em geral, para cada número $a \in [1,3]$ (que é o domínio de f), temos que a reflexão, em relação à diagonal $y = x$, do ponto correspondente do gráfico de f,

$$(a, f(a)) = (a, b),$$

nos dá o ponto

$$(b, a) = (b, f^{-1}b))$$

do gráfico de f^{-1}. Dizemos então que o gráfico de f^{-1} é a reflexão do gráfico de f em relação à diagonal $y = x$ (Figura 5.9c).

Exemplos

10. Abaixo damos o gráfico da função $x \mapsto \sqrt{x}$, obtido pela reflexão do gráfico de $x \mapsto x^2$, com $x \geq 0$, em relação à reta $y = x$.

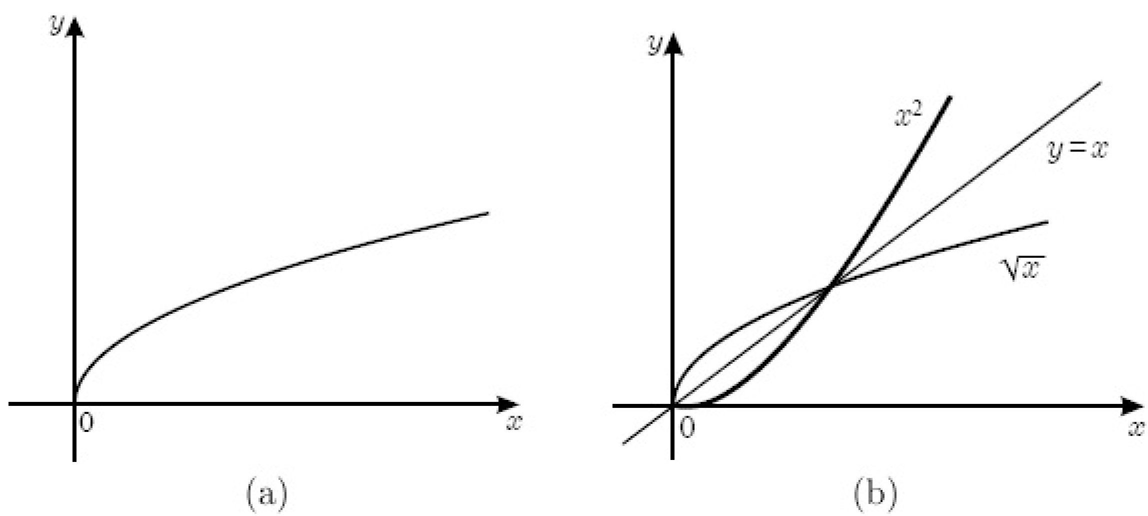


Figura 5.10

11. O gráfico da função $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, é obtido, da mesma maneira, a partir de sua função inversa $x \mapsto x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

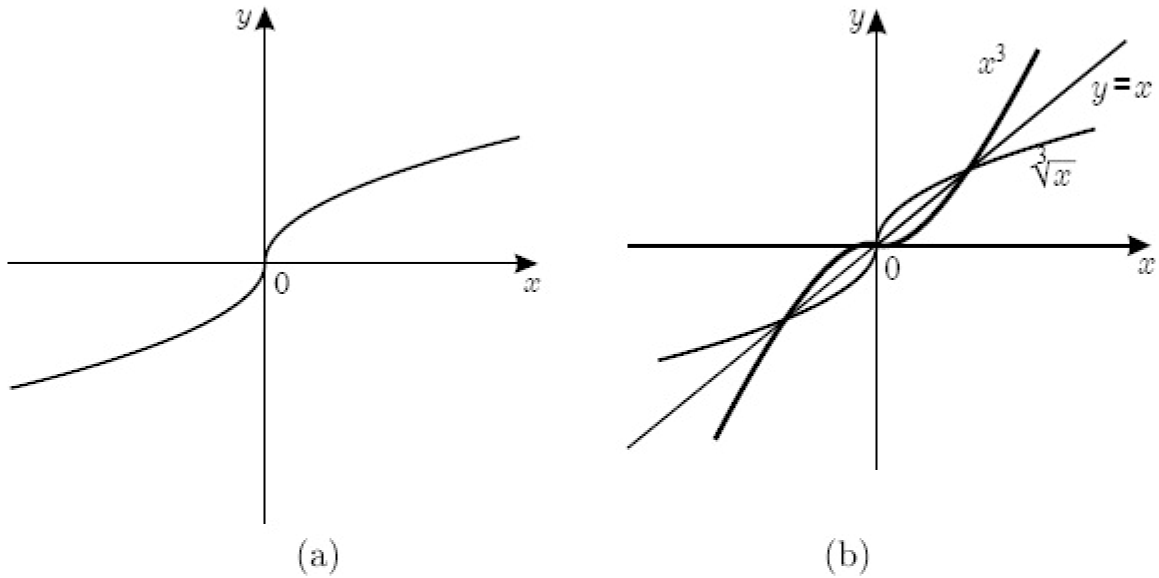


Figura 5.11

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. São dadas as seguintes informações sobre a função f:

   - $f(-7) = 1$.
   - $f(-3) = -5$.
   - $f(1) = 2$.
   - f é crescente em$[-3, 1]$.
   - f é decrescente em $[-7, -3]$ e em $[1, 7]$.
   - $f(7) = 0$.

   Para cada uma das desigualdades abaixo, diga se ela é falsa, verdadeira ou não é possível decidir a partir das informações acima:

   (a) $f(-6) > f(-4)$

   (b) $f(-6) = 2$.

   (c) $f(4) < f(5)$.

   (d) $f(2) = 3$.

(e) $f(-4) < 5$.

(f) $f(-5) > f(4)$.

2. Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Em cada item abaixo, decida se a afirmação é verdadeira ou falsa:

(a) f é inversível.

(b) $f^{-1}\sqrt{2} = 1$.

(c) $f^{-1}\sqrt{2} = -1$.

(d) $f^{-1}(2) = \sqrt{5}$.

(e) $f^{-1}(2) = \sqrt{3}$.

(f) O domínio de f^{-1} é o intervalo $[0, \infty)$.

(g) O domínio de f^{-1}é o intervalo $[1, \infty)$.

3. Ache uma expressão para f^{-1}, onde f é a função do exercício anterior.

4. Decida se as proposições abaixo são verdadeiras ou falsas.

(a) Se f é uma função crescente, então f é inversível.

(b) Se f é uma função inversível, então f é uma função crescente ou é uma função decrescente.

5. Seja $g : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Essa função é inversível? Se for, ache uma expressão para sua função inversa explicitando o domínio.

6. Sabendo que a função $f(x) = x^3 + x - 2$ *ê* crescente, decida, em cada item abaixo, se a afirmação é verdadeira ou falsa:

(a) O domínio de f^{-1} é o intervalo $[0, \infty)$.

(b) $f^{-1}(2) = 1$.

(c) $f^{-1}(-1) > 0$.

(d) $f^{-1}(-2) = 0$.

(e) $f^{-1}(3) \neq 0$.

(f) A função $h(x) = x^3 + x$ é inversível.

7. Em cada item abaixo decida se a proposição é verdadeira ou falsa:

(a) Se f é inversível *e* $x = 2$ *é* solução da equação $f(x) = 0$, então $f^{-1}(0) = 2$.

(b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é inversível, então $f^{-1}(0)$ é a única solução da equação $f(x) = 0$.

(c) Se f é inversível, então equação $f(x) = 0$ tem no máximo uma solução.

(d) Se a equação $f(x) = 0$ tem somente uma solução, então f é inversível.

8. Dê dois exemplos de função inversível que sejam diferentes dos exemplos dados no texto.

9. Seja f uma função inversível. Mostre que:

   (a) $g(x) = f(x + 2)$ é inversível e $g^{-1}(x) = f^{-1}(x) - 2$.

   (b) $h(x) = f(ax + b)$, com $a \neq 0$, é inversível e $h^{-1}(x) = \frac{1}{a}(f^{-1}(x) - 2)$.

   (c) $\phi(x) = -f(x)$ é inversível e $\phi^{-1}(x) = f(-x)$.

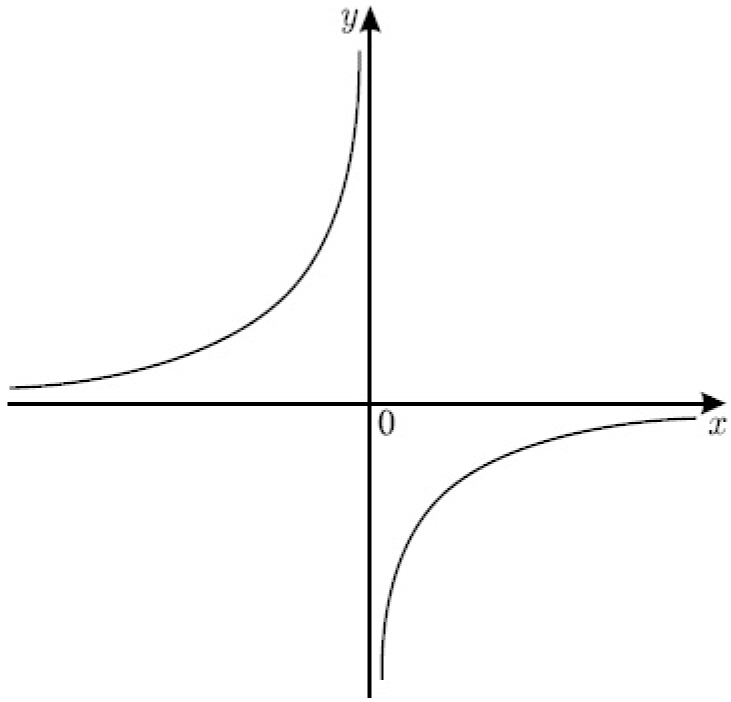
   (d) $\psi(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ é inversível e $\psi^{-1}(x) = f^{-1}(\frac{1}{x})$.

10. Mostre que se f e g são inversíveis, então $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

11. Seja $h(x) = \sqrt{-2x - 1}$. A função h é inversível? Se for, encontre uma expressão para sua inversa explicitando seu domínio. Repita o exercício para a função $g(x) = \sqrt{-2x - 1}$

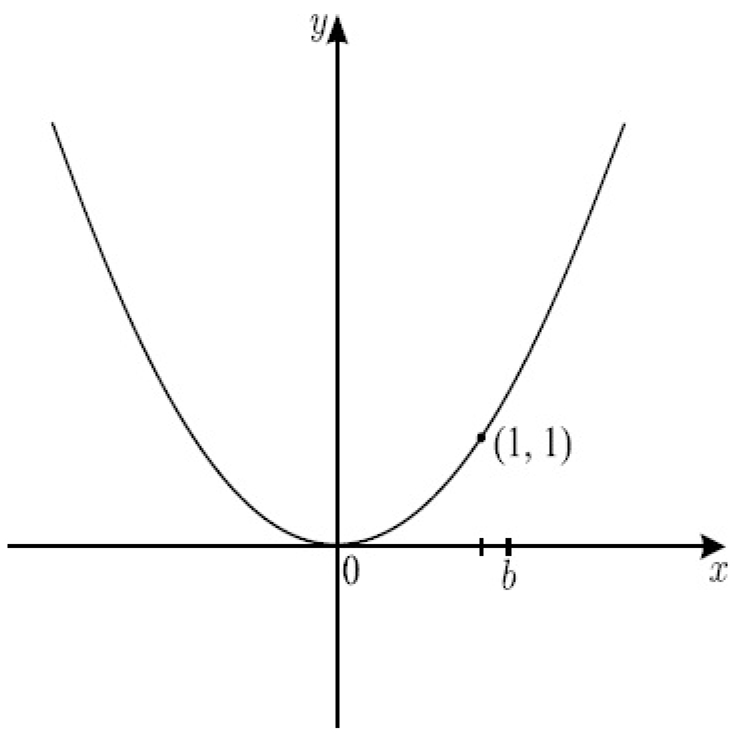
12. Seja f uma função inversível e $g(x) = \sqrt{f(x) + 1}$. Ache uma expressão para g^{-1} em termos de f^{-1}.

13. Considere a função f cujo gráfico é dado abaixo:

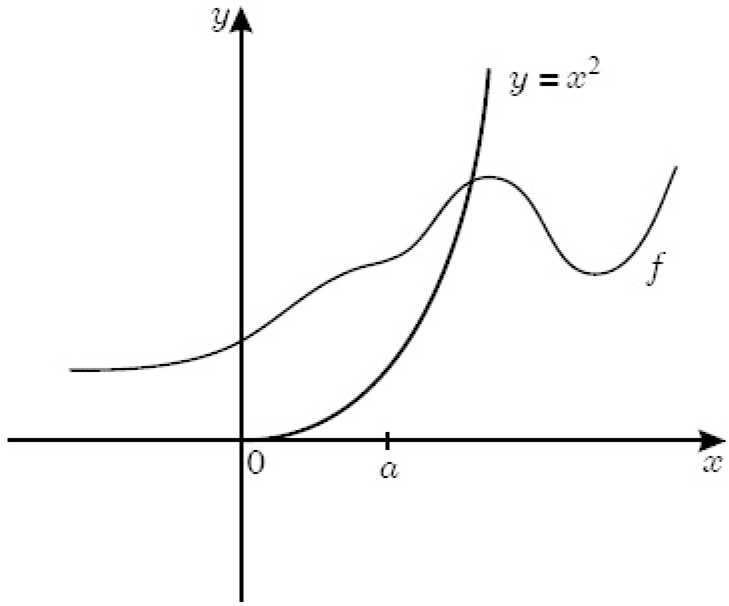


A função f é inversível?

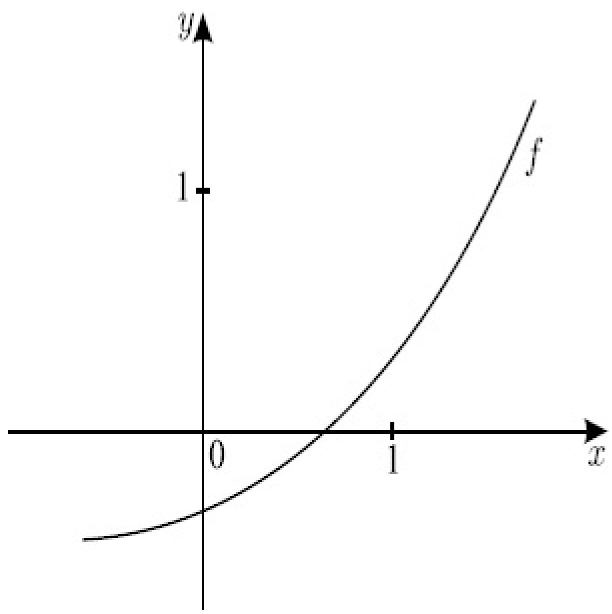
14. Sabendo que a curva abaixo é o gráfico de $f(x) = x^2$ ponto correspondente a $\sqrt{b}$.



15. Marque no eixo x o ponto que representa $\sqrt{f(a)}$.



16. No gráfico abaixo, marque o ponto de coordenadas $(1, f^{-1}(1))$.



17. Ache a inversa da função $f(x) = x$. Compare f^{-1} com a função $g(x) = [f(x)]^{-1}$. Repita o exercício para a função $g(x) = \frac{1}{x}$.

6. Esboço de gráficos

A principal utilidade de tratarmos de gráficos de funções é que o gráfico nos permite ter uma visão global do comportamento de uma função real. Em outras palavras, é no gráfico que podemos expressar de forma compacta várias informações relevantes sobre o comportamento da função.

Em particular, gráficos são muito úteis quando queremos comparar funções. Vejamos um exemplo: já sabemos que a maioria dos números reais não possui uma representação decimal exata com a qual possamos efetuar cálculos exatos. Em decorrência desse fato, sabemos que a maioria dos cálculos é feita por aproximação, sendo que a precisão do resultado final depende das aproximações que tomamos para os números envolvidos.

Suponhamos que necessitamos calcular uma aproximação para o número $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Certamente podemos tomar uma aproximação b para $\sqrt{3}$ e tomar $a_0 = \frac{1}{b}$ como aproximação para a.

Por outro lado, sabemos que podemos reescrever o número a da forma $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (essa forma de reescrever é bastante conhecida como processo de *racionalização*). Nesse caso usaríamos b para calcular a aproximação $a_1 = \frac{b}{3}$. É então natural perguntarmos (e há quem pergunte) se há alguma diferença, e, se for esse o caso, qual é essa diferença.

Para respondermos a essa pergunta, primeiro observamos que se f é a função definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, então

$$a = f(\sqrt{3}) \text{ e } f(b) = a_0,$$

isto é, calcular a é avaliar a função f no número $\sqrt{3}$, e calcular a aproximação a_0 é avaliar a função f no número b. Por outro lado, se $g(x) = \frac{x}{3}$ vemos

$$g(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3} = a \quad \text{e} \quad g(b) = \frac{b}{3},$$

ou seja, podemos também calcular a avaliando a função g no número $\sqrt{3}$, e calcular a outra aproximação a_1 corresponde a avaliar a função g na aproximação b do número a.

Em resumo, para obter aproximações do número $\frac{1}{\sqrt{3}}$ tanto podemos usar a função f quanto a função g.

Na Figura 6.1 damos os gráficos de f e g num mesmo sistema de coordenadas. Numa primeira leitura, vemos que se $0 < b < \sqrt{3}$, os pontos correspondentes do gráfico de g estão abaixo da reta horizontal $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, o que nos diz que $g(b) < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

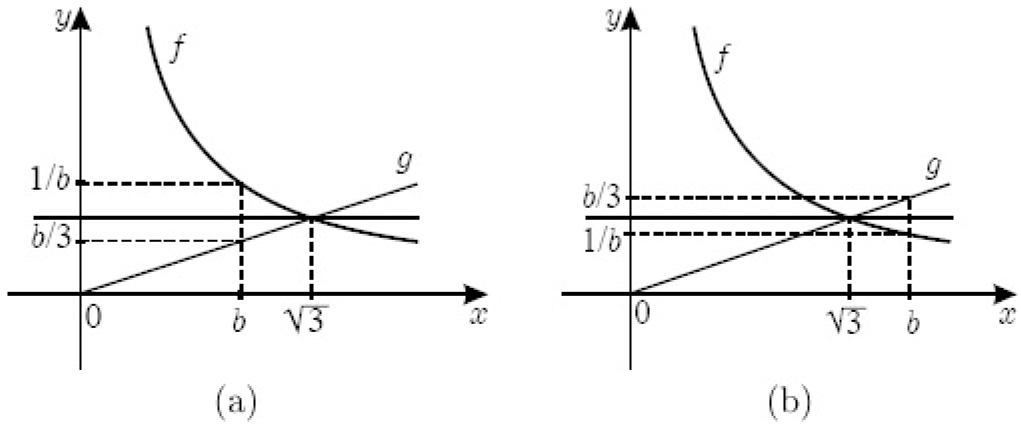


Figura 6.1

Ou seja, se b é uma aproximação de $\sqrt{3}$ por falta ($b < \sqrt{3}$), então a função g nos dá também uma aproximação por falta de $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Analogamente, se $b > \sqrt{3}$, então $g(b) > \frac{1}{\sqrt{3}}$, isto é, se b é uma aproximação por excesso de $\sqrt{3}$, então $g(b)$ também é uma aproximação por excesso de $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

No caso de f, a situação se inverte: a partir de aproximações por falta de $\sqrt{3}$, f fornece aproximações por excesso de $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e vice-versa.

Como estamos falando de cálculos aproximados, a questão natural para a qual queremos resposta é qual das duas funções, f ou g, fornece a melhor aproximação para o número $\frac{1}{\sqrt{3}}$, a partir de uma aproximação dada, b, do número $\sqrt{3}$.

Como sabemos, o erro ao fazermos uma aproximação é dado pelo valor absoluto da diferença entre o valor exato e o valor aproximado. Assim, se denotamos por e_0 o erro quando tomamos a aproximação $a_0 = f(b)$ e por e_1 o erro com a aproximação $a_1 = g(b)$, temos:

$$e_0 = \left|\frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| \quad \text{e} \quad e_1 = \left|\frac{b}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right|.$$

Graficamente, e_0 é o comprimento do segmento (vertical) cujos extremos são os pontos de coordenadas $(b, \frac{1}{b})$ e $(b, \frac{1}{\sqrt{3}})$, enquanto e_1 é o comprimento do segmento e extremos $(b, \frac{b}{3})$ e $(b, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Logo, para termos a resposta bastaria compararmos esse dois segmentos. No entanto, isso pode ser muito impreciso, daí a conveniência de olharmos com mais cuidado as expressões que definem e_0 e e_1.

Primeiro, observamos que essas expressões naturalmente definem funções da variável b, que, nessa questão, representa aproximações de $\sqrt{3}$. Isso nos diz, em particular, que como $\sqrt{3} > 0$, devemos impor a condição $b > 0$. Isto é, estamos falando das funções

$$e_0(b) = \left|\frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| \quad \text{e} \quad e_1(b) = \left|\frac{b}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right|, \text{ para } b > 0.$$

Agora, pelo que já vimos nas sessões anteriores, basta compararmos os gráficos dessas duas funções que são dadas na Figura 6.2.

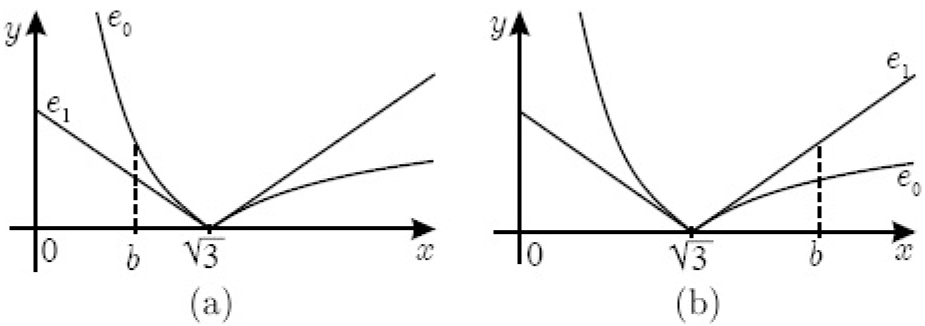


Figura 6.2

Pelos gráficos vemos que a resposta à nossa questão é:

- a partir de aproximações de $\sqrt{3}$ por falta ($0 < b < \sqrt{3}$), a função g fornece aproximações de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ melhores que as dadas pela função f, já que, nesse caso, $e_1(b) < e_0(b)$.

- a partir de aproximações de $\sqrt{3}$ por excesso ($b > \sqrt{3}$), a função f fornece aproximações de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ melhores que as dadas pela função g, já que, nesse caso, $e_0(b) < e_1(b)$.

No exemplo que desenvolvemos acima, mostramos não só a utilidade de gráficos de funções, mas também a conveniência de descrevermos certos problemas usando funções. O exemplo dado pode parecer ingênuo, mas na verdade com esse exemplo simples descrevemos um processo que se aplica a situações bem mais complicadas.

Para vermos um outro exemplo da utilidade dos gráficos, consideremos as funções f e g, definidas por $f(x) = 4\text{sen}^2(2x)$ e $g(x) = \cos^2 x - \cos^4 x$, para $x \in$

$[-1,2]$.

Se usarmos um programa gráfico para obter os gráficos dessas funções num mesmo sistema de coordenadas, verificaremos imediatamente que elas coincidem, o que não é evidente à primeira vista a partir das expressões algébricas. Na verdade, identidades trigonométricas fornecem uma grande variedade de expressões distintas que definem uma mesma função.

A rigor, o gráfico de uma função f é um objeto matemático puramente teórico:

é o conjunto de pares da forma $(x,f(x))$, *sendo x um número do domínio de f.*

O que de fato podemos fazer é o que denominamos um esboço do gráfico da função, isto é, um desenho que tem distorções e limitações de várias naturezas, inclusive aquelas decorrentes das ferramentas que usamos (lápis e papel ou máquinas).

Em particular, se o domínio da função não for um conjunto finito (e razoavelmente pequeno), temos que nos contentar em representá-la graficamente utilizando apenas um número finito de informações sobre a função.

E essa é a situação geral, daí a importância de sabermos coletar o que podemos chamar de *informações-chave* sobre a função. Para esclarecermos essa afirmação vejamos um exemplo:

Suponhamos que queremos fazer o gráfico de $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$. É muito comum os livros apresentarem uma tabela com um gráfico ao lado como na Figura 6.3.

x	$f(x)$
-1/3	8/3
1/3	0
2/3	-1/3
1	0
5/3	8/3

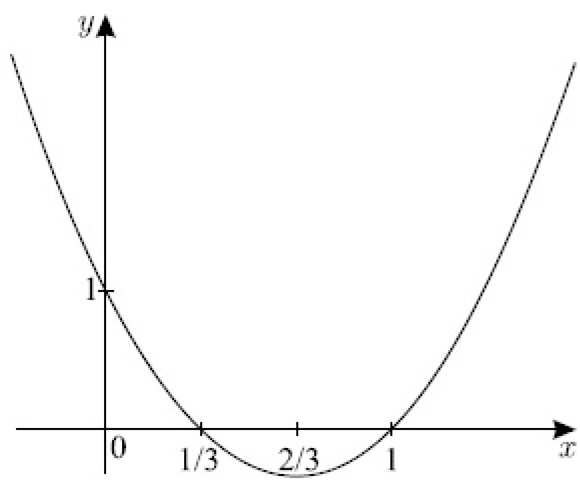


Figura 6.3

No entanto, só com as informações da Tabela acima não é possível concluir que o gráfico ao lado está correto. De fato existem infinitas funções para as quais a tabela acima é válida, e, na verdade, uma tabela qualquer pode ser de pouca utilidade para fazermos um esboço do gráfico dessa função. Listamos abaixo as informações-chave para esse exemplo:

1. $f(0) = 1$, $f(\frac{2}{3}) = -\frac{1}{3}$, f é decrescente no intervalo $(-\infty, \frac{2}{3})$ e crescente em $(\frac{2}{3}, \infty)$.

2. O gráfico de f é uma curva que pode ser traçada sem que se tire o lápis do papel. Descrevemos essa propriedade dizendo que é uma curva contínua.

3. No ponto $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ a curva é tangente ao eixo horizontal.

4. O gráfico é simétrico em relação à reta vertical $x = \frac{2}{3}$, isto é, se dobrarmos o papel exatamente nessa reta vertical os dois pedaços da curva ficarão sobrepostos.

Verifique que utilizando essas informações da maneira mais simples possível obtemos um esboço bastante razoável do gráfico dessa função. E, de fato, esse é o que podemos chamar de um conjunto minimal de informações que precisamos para fazer um esboço fiel desse gráfico.

Outras informações, além dessas, nos permitirão fazer um esboço com uma maior precisão, mas já temos aqui uma boa descrição do comportamento dessa função.

Voltando à tabela dada acima, um aluno poderia argumentar que procedendo da mesma maneira, isto é, marcando os pontos dados pela tabela e em seguida unindo esses pontos por uma curva contínua da forma mais simples sem fazer “bicos”(esse procedimento usa as propriedades (2) e (3) acima), obtemos um esboço tão bom quanto o anterior.

De fato, isso é verdade, mas somente porque a escolha dos números x que compõem a tabela foi feita levando em consideração as informações (1) e (4) acima.

Para vermos isso com clareza, basta considerarmos a tabela com um gráfico, como na Figura 6.4 dada abaixo. Muito embora essa tabela também seja válida para a função, se procedermos da mesma maneira, isto é, unirmos os pontos dados pela tabela por uma curva contínua, obteremos o esboço de um gráfico (Figura 6.4) que não reflete o comportamento dessa função.

x	$f(x)$
-1	8
0	1
1	0
2	5

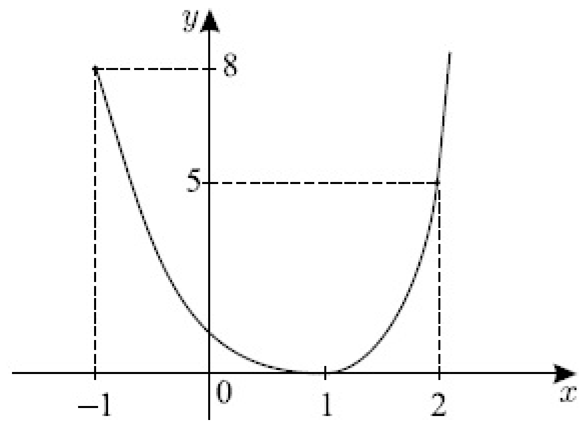


Figura 6.4

O que podemos aprender do que foi exposto acima é que o procedimento de unir, por uma curva contínua, pontos do gráfico obtidos de uma tabela só nos conduz a um esboço correto, muito embora não totalmente preciso, se a tabela é obtida a partir de uma escolha adequada de valores de x no domínio da função.

Um dos temas do curso de Cálculo I (Cálculo diferencial e integral de funções reais de uma variável) da universidade trata exatamente dos elementos teóricos que permitem caracterizar os critérios dessa escolha para uma certa classe de funções reais.

Em geral, os textos de matemática do segundo grau, ao tratar do tema funções, apresentam uma tabela e um gráfico sem chamar a atenção de que o gráfico foi obtido usando outras informações além daquelas fornecidas pela tabela.

Isso frequentemente leva os alunos à conclusão errada de que o gráfico de uma função pode ser obtido a partir de uma tabela arbitrária, simplesmente unindo por uma linha contínua a meia dúzia de pontos calculados.

Um outro reflexo do mal entendimento dos alunos a respeito do uso de tabelas para se fazer um esboço do gráfico de uma função é a atitude, generalizada, de calcular uma tabela com mais do que dois pontos para fazer o gráfico de uma função afim, $f(x) = ax + b$.

De fato, aprendemos que o gráfico de uma função desse tipo é uma reta e, portanto, como sabemos da geometria que dois pontos determinam uma reta no plano, é suficiente montarmos uma tabela com apenas dois pontos.

Na verdade, dada, por um lado, a pouca precisão com que conseguimos marcar pontos com lápis e papel, e, por outro lado, a precisão de uma reta, tentar usar uma tabela com mais de dois pontos, nesse caso, atrapalha ao invés de ajudar. E muito frequente os alunos se verem na difícil (na verdade impossível) situação de tentarem fazer passar uma reta por cinco pontos que não são colineares.

Infelizmente, até mesmo livros de cálculo para a universidade induzem os alunos a esse tipo de erro, quando, na parte introdutória, apresentam exemplos de gráficos a partir de expressões algébricas (em geral parábolas e retas) antes de apresentarem a teoria.

O que ocorre é que a intenção dos autores é apenas mostrar a representação gráfica e dar alguns exemplos numéricos por meio de uma tabela, mas os alunos têm a tendência de acrescentar a relação de causa e efeito.

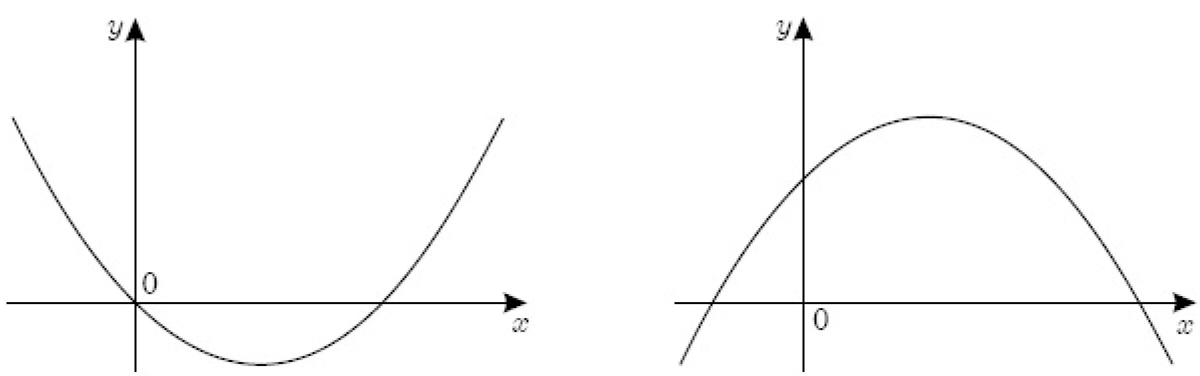
Uma outra limitação quando queremos representar graficamente uma função real aparece quando o domínio da função é um conjunto não limitado, isto é, quando seu domínio, por exemplo, contém um intervalo do tipo (a, ∞) ou do tipo $(-\infty, a)$.

Assim, como só podemos representar 0 gráfico da função num conjunto limitado, em geral 0 gráfico só está fornecendo informações sobre 0 comportamento da função numa parte limitada de seu domínio.

No entanto, um certo tipo de funções apresenta um comportamento simples fora de um intervalo limitado e assim nos conduz à conveniência de estabelecer (nesses casos) uma convenção que nos permita obter informações corretas sobre 0 comportamento da função na parte do domínio que não está representada graficamente.

Por exemplo, quando representamos graficamente uma função afim, cujo gráfico é uma reta, já estamos habituados a interpretar que a reta se estende indefinidamente tanto para a esquerda quanto para a direita.

Analogamente, quando representamos 0 gráfico de uma função quadrática, cujo gráfico sabemos ser 0 que chamamos de uma parábola, também já estamos acostumados a interpretar que 0 comportamento expresso em cada lado do inter-valo que usamos para fazer 0 gráfico se mantém, isto é, para a esquerda a função é decrescente e para a direita é crescente (Figura 6.5a), ou crescente no intervalo não limitado à esquerda e decrescente no intervalo não limitado à direita (Figura 6.5b).



(a) (b)

Figura 6.5

Para funções que têm esse comportamento bem definido num **subintervalo** não limitado de seu domínio, ou seja, são crescentes ou é decrescentes, podemos determinar a parte limitada de seu domínio onde ocorrem as mudanças de crescente para decrescente e vice-versa, e estabelecer a convenção de que 0 comportamento expressado no final do intervalo que usamos para fazer 0 gráfico se mantém. Vejamos uns exemplos:

Exemplos

1. Seguindo a convenção estabelecida acima, ao ser dito que na Figura 6.6 é dado o gráfico de $f(x) = x^3 - x$, para $x \in \mathbb{R}$, podemos interpretar que:

- f é crescente nos intervalos $[2, \infty)$ e $(-\infty, -\frac{3}{2}]$.
- se damos valores arbitrariamente grandes para $x \in [2, \infty)$, obteremos valores $f(x) \in [f(2), \infty)$ arbitrariamente grandes.
- se damos valores para x no intervalo $(-\infty, -\frac{3}{2}]$, com $|x|$ arbitrariamente grande, obteremos valores $f(x) \in (-\infty, -\frac{2}{3}))$ com $|f(x)|$ também arbitrariamente grandes.

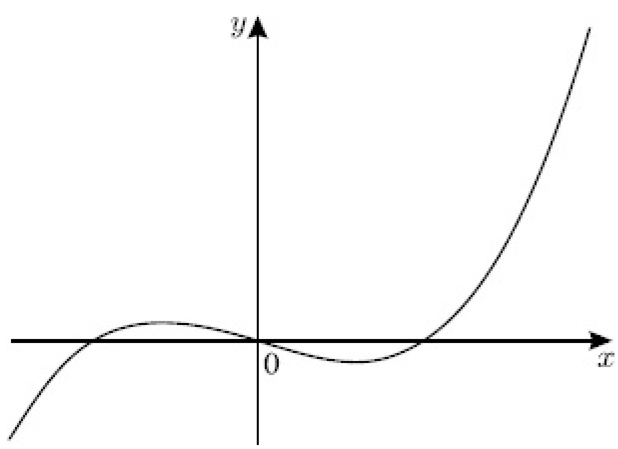


Figura 6.6

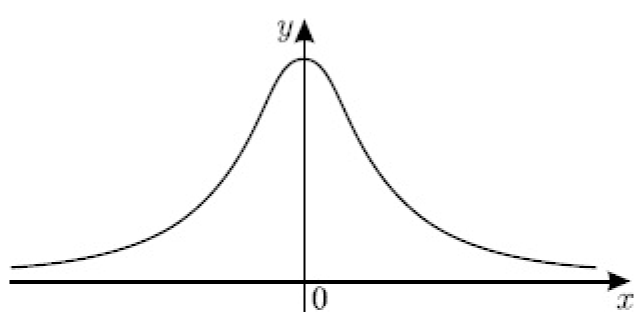


Figura 6.7

2. Na Figura 6.7 é dado o gráfico de $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)}$.

De acordo com a convenção acima, podemos concluir que *f* é crescente no intervalo $(-\infty, -3]$ e decrescente em $[3, \infty)$. Além disso, nesse caso, o comportamento do gráfico próximo dos extremos do intervalo $[-3, 3]$ nos informa também que se damos valores para x num desses intervalos, com $|x|$ arbitrariamente grande, então $f(x)$ é positivo e arbitrariamente próximo de 0. De fato, pela expressão da função vemos que se $|x|$ é um número muito grande, então $(x^2 + 1)$ também é muito grande e positivo, logo $\frac{1}{(x^2+1)} = f(x)$ é positivo e muito pequeno. Esse comportamento de *f* é descrito dizendo que a reta horizontal $x = 0$ *é* uma assíntota do gráfico de *f*.

Alerta: Aqui é muito importante salientarmos que só podemos interpretar um gráfico, segundo a convenção acima, se está dito explicitamente que ali estão contidas informações sobre a função em todo o seu domínio. Se usamos um computador ou calculadora gráfica, devemos estar conscientes de que as máquinas só calculam valores de $f(x)$ para x no intervalo que escolhemos e, portanto, nenhuma conclusão pode ser tirada a respeito do comportamento de *f* fora do intervalo escolhido.

Gráficos de funções utilizando computadores

Como já salientamos, a representação gráfica de uma função nos fornece de uma forma compacta várias informações importantes sobre a função. Mais precisamente, no gráfico de uma função podemos visualizar simultaneamente várias propriedades que descrevem o comportamento da função. Assim, gráficos de funções são muito úteis desde que possam ser obtidos com a precisão necessária para descrever corretamente o comportamento das funções.

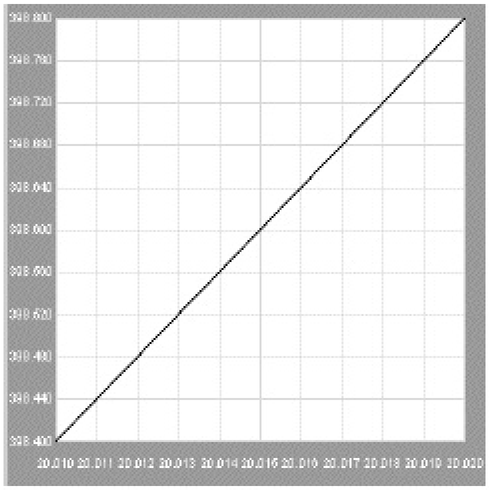
Neste capítulo, vimos algumas situações em que podemos obter o gráfico de uma função a partir do gráfico já conhecido de uma outra função. Nos próximos capítulos desenvolveremos recursos teóricos para estudar o comportamento de uma função, recursos esses que, em particular, são utilizados para se chegar a um esboço correto do seu gráfico.

Por outro lado, podemos pensar no sentido inverso, isto é, conhecermos o comportamento de uma função a partir do conhecimento de seu gráfico. O problema que se coloca aqui é que, se o domínio da função não é um conjunto finito (como é o caso das funções que são objeto de estudo do cálculo), nunca podemos representar todos os pontos de seu gráfico. Ou seja, estamos sempre limitados a representar apenas um número finito de pontos do gráfico e, por maior que seja esse número, apenas recursos teóricos podem garantir que o esboço obtido realmente descreve o comportamento da função. Ter esse fato em mente é extremamente importante quando tentamos representar graficamente uma função, mesmo quando, para isso, utilizamos os recursos de um computador.

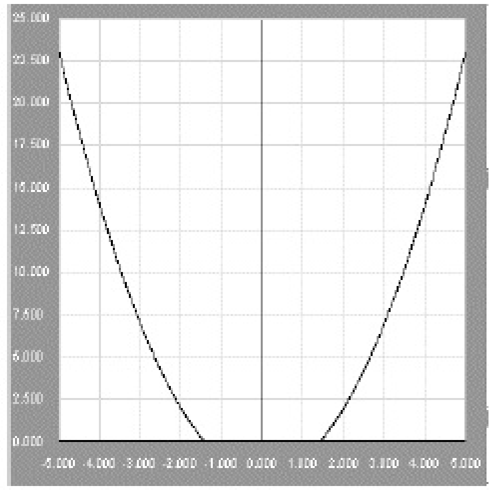
Os programas computacionais de gráficos de funções dão uma grande contribuição no estudo do comportamento de funções, mas para que essa contribuição seja efetiva é necessário termos uma ideia não só do potencial dos recursos computacionais, mas também de suas limitações.

Esses programas geram uma representação computacional do gráfico de uma função selecionando um número finito de pontos deste gráfico e acendendo esses pontos na tela do computador. A grande vantagem do computador é sua capacidade de realizar um grande número de operações em tempo útil, tornado viáveis tarefas que seriam impossíveis sem o seu auxílio. Assim, podemos montar um programa que, por exemplo, calcule e marque 5.000 pontos do gráfico de uma função em um intervalo dado. Mas, como veremos mais adiante, dependendo da função e do intervalo escolhido, esses 5.000 pontos podem nos fornecer informações erradas ou nenhuma informação sobre o comportamento da função.

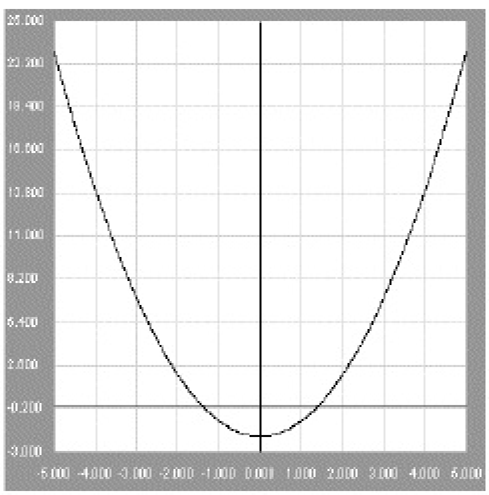
Por outro lado, como já dissemos, devemos estar cientes de que um gráfico feito por um computador, mesmo quando correto, só pode nos fornecer informações sobre o comportamento da função no intervalo de números reais escolhido. Isto é, em geral, o usuário fornece ao computador uma função (dada por uma expressão) e números a e b que informam ao computador que os pontos do gráfico devem ser obtidos a partir de números do intervalo $[a, b]$. É importante observar que o gráfico resultante nada nos informa sobre o comportamento da função fora desse intervalo. Por exemplo, os seis gráficos a seguir foram feitos com a mesma função, $f(x) = x^2 - 2$, mas com diferentes escolhas para o intervalo $[a, b]$ e para as escalas em cada eixo.



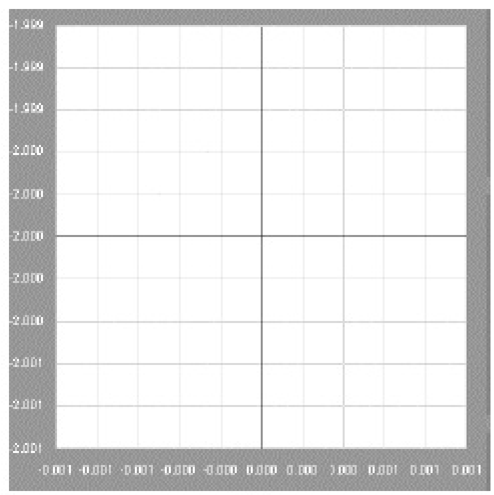
(a)


25.000
22.500
20.000
17.500
15.000
12.500
10.000
7.500
5.000
2.500
0.000
-5.000 -4.000 -3.000 -2.000 -1.000 0.000 1.000 2.000 3.000 4.000 5.000

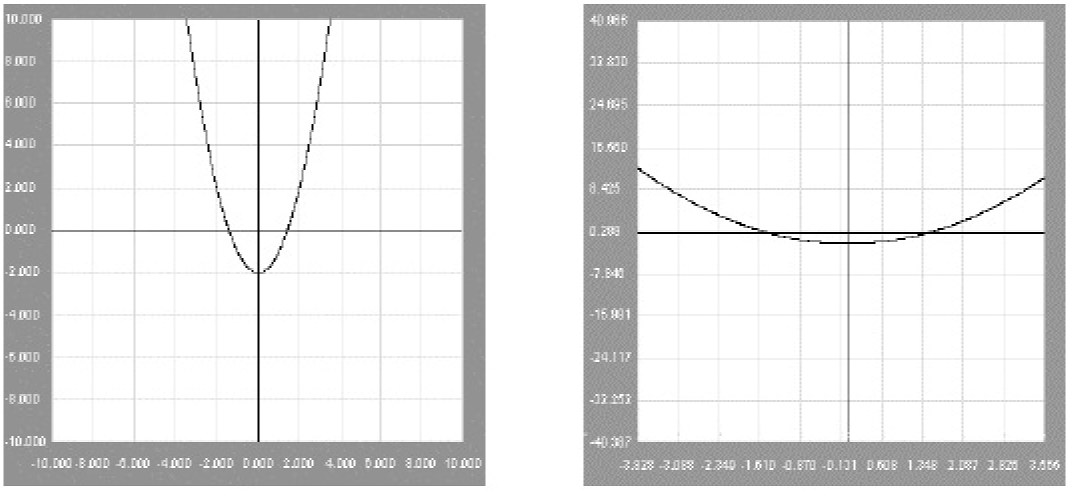
(b)


-5.000 -4.000 -3.000 -2.000 -1.000 0.000 1.000 2.000 3.000 4.000 5.000

(c)



(d)



(e) (f)

Figura 6.8

Em alguns programas gráficos a escala no eixo-x é determinada pela janela de visualização do programa (isto é, pela área da tela utilizada para representar o gráfico) e pela escolha do intervalo de variação da primeira coordenada, x, e a escala no eixo-y é determinada pela janela e pela escolha do intervalo de variação da segunda coordenada, y. Em outros programas gráficos (o do Maple, por exemplo) a escala é inicialmente determinada pelo programa, isto é, o intervalo de variação de x é escolhido pelo usuário e o programa determina um intervalo adequado para a variação de y. Em qualquer dos casos os critérios para a escolha de uma boa região de visualização dependem das necessidades do usuário e de informações teóricas sobre a função. Na falta de informações teóricas, podemos apenas usar o computador para fazer experimentos que possam nos convencer de que encontramos uma boa região de visualização.

Nas Figuras 6.9 e 6.10 são destacadas, no gráfico da Figura 6.8e, as regiões de visualização usadas para gerar, respectivamente, os gráficos das Figuras 6.8a e 6.8d.

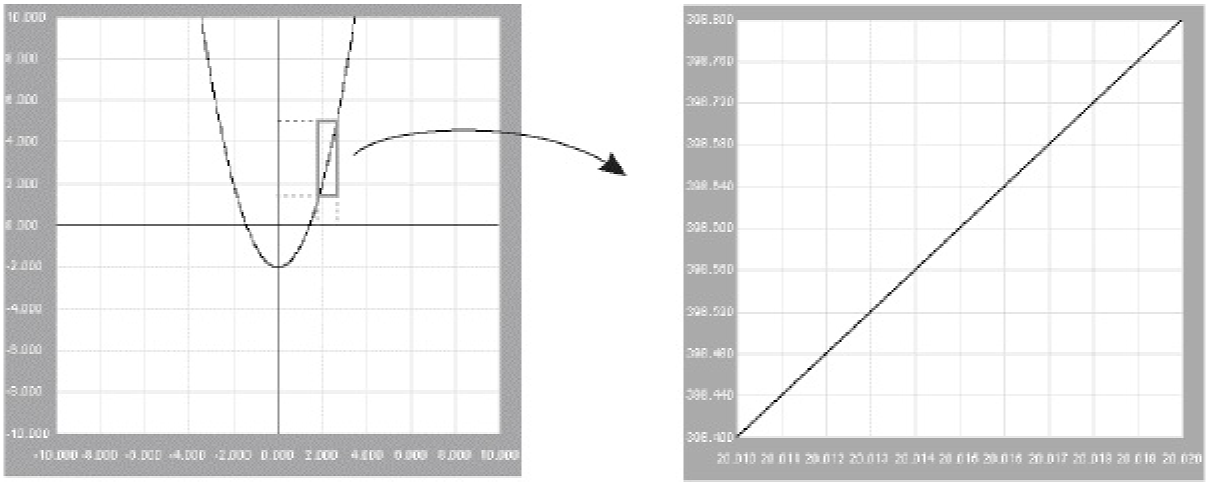


Figura 6.9

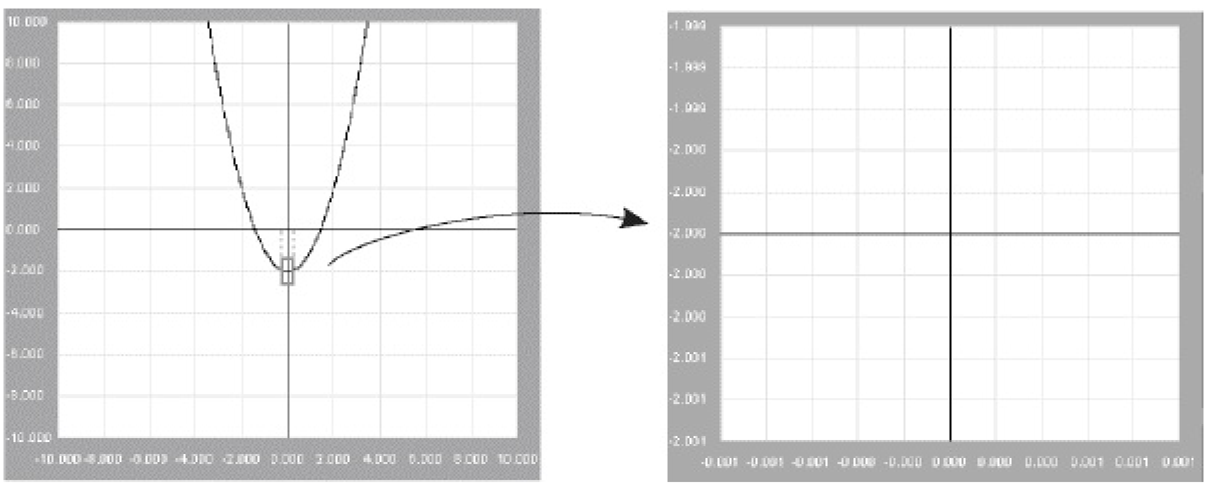


Figura 6.10

Observe que, devido à diferença das escalas, a região destacada, que é um retângulo na Figura 6.8e, é visualizada como um quadrado (a janela de visualização) nas Figuras 6.8a e 6.8d.

Como dissemos acima, dependendo da função e da região de visualização escolhida, isto é, o intervalo de variação de x e o intervalo de variação de y, mesmo calculando um grande número de pontos do gráfico podemos chegar a um gráfico errado ou não obter gráfico algum. Vejamos isso num exemplo: a Figura 6.11 foi obtida utilizando-se 1.001 pontos do gráfico da função $f(x) = \text{sen}\,(1000\pi x)$ no intervalo $[-2, 2]$.

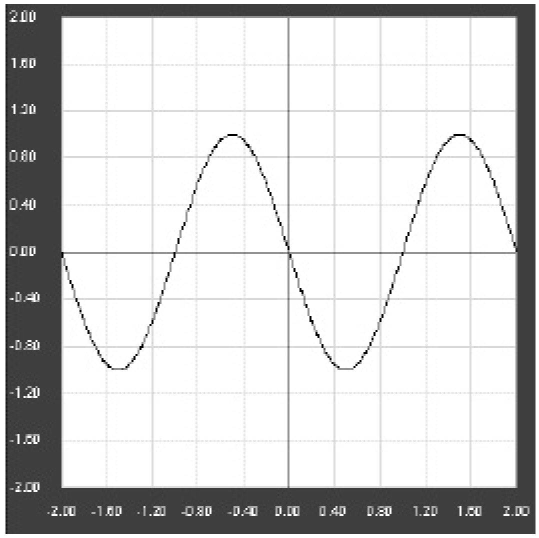


Figura 6.11

Especificamente, foram escolhidos 1.001 números do intervalo [−2, 2], igual-mente espaçados, e utilizados os pontos correspondentes do gráfico de *f*. Observando a figura podemos ter certeza de que algo está errado, pois já sabemos que *f* é uma contração horizontal do gráfico da função seno e, portanto, *f* não pode ser negativa num intervalo imediatamente à direita de $x = 0$.

O gráfico da Figura 6.12 foi obtido usando-se a mesma região de visualização, mas foram marcados 1.002 pontos do gráfico de *f*.

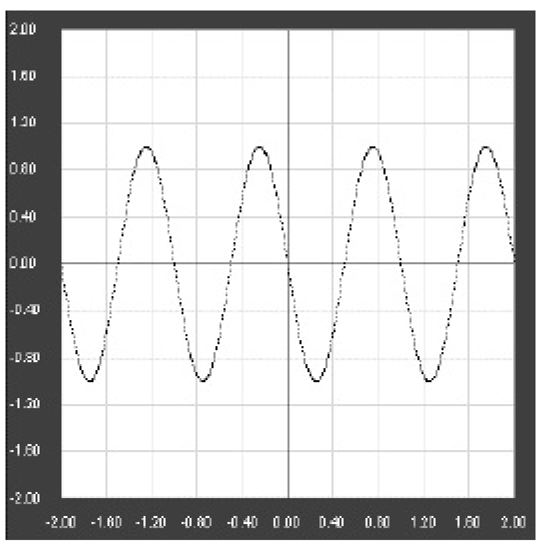
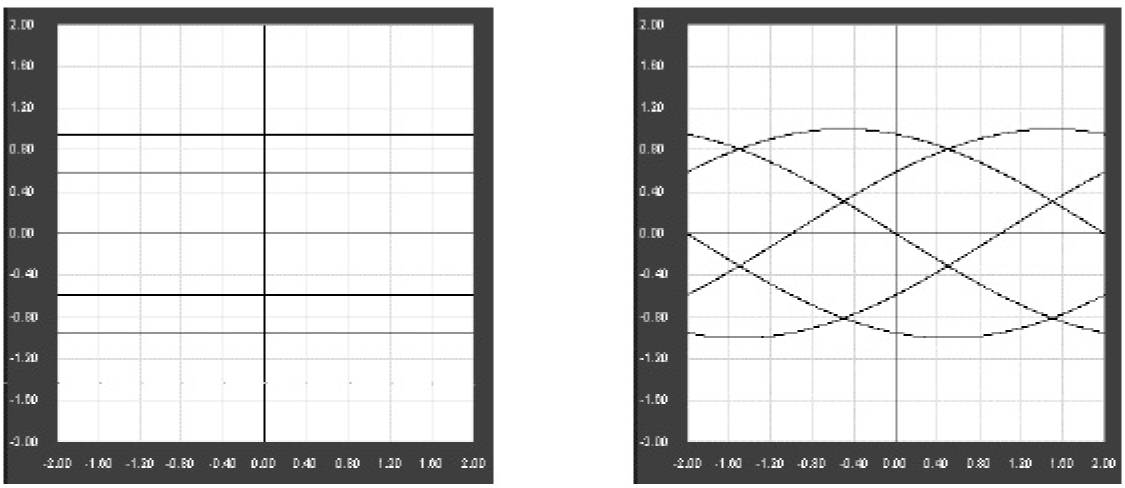


Figura 6.12

Comparando-se essas duas figuras, podemos concluir que algo está errado, mesmo sem usar qualquer informação sobre a função *f*. Isto é, se o gráfico que vimos na primeira figura fosse uma boa aproximação para o gráfico de *f* no intervalo dado, então o fato de que o gráfico da segunda figura foi feito com um ponto a mais não deveria gerar nenhuma diferença. Em geral, é de se esperar que se a região de visualização escolhida e o número de pontos usados são adequados para o estudo da função, então aumentar o número de pontos marcados não deve alterar a aparência do gráfico.

Poderíamos então ser levados a pensar que o problema é que estamos usando um número insuficiente de pontos do gráfico (o que é verdade) e que esse problema pode ser resolvido apenas aumentando o número de pontos a serem marcados. Nas Figuras 6.13a e 6.13b, usamos a mesma região de visualização e marcamos, respectivamente, 5.000 e 5.001 pontos do gráfico de *f*.



(a) (b)

Figura 6.13

E, mantendo a mesma região de visualização mas aumentando o número de pontos para 500.001, obtemos a Figura 6.14:

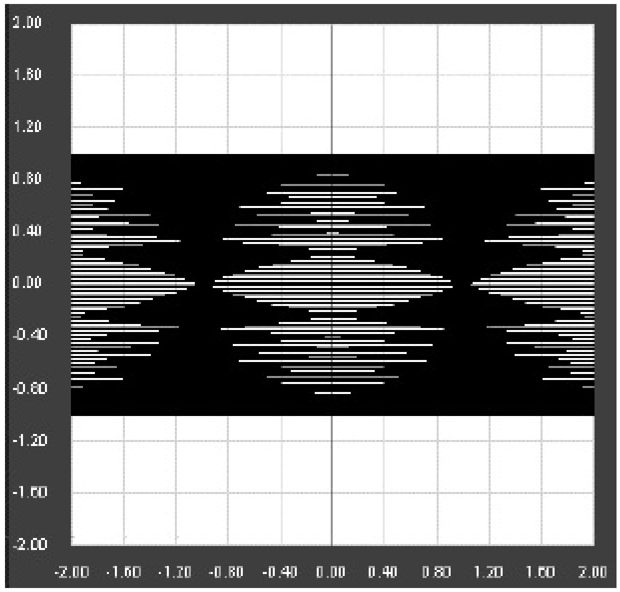


Figura 6.14

Claramente nenhuma dessas figuras nos fornece informações sobre o comportamento de f. O problema que temos aqui é que a escolha do intervalo $[-2, 2]$ para estudar a função $f(x) = \text{sen } (1000\pi x)$ não é uma boa escolha. Usando as informações teóricas que já conhecemos sobre essa função, isto é, que f é uma contração horizontal da função seno e que a função seno é periódica com período 2π, podemos concluir que basta fazermos o gráfico de f num intervalo de números x tais que

$$0 \leq 1000\pi x \leq 2\pi$$

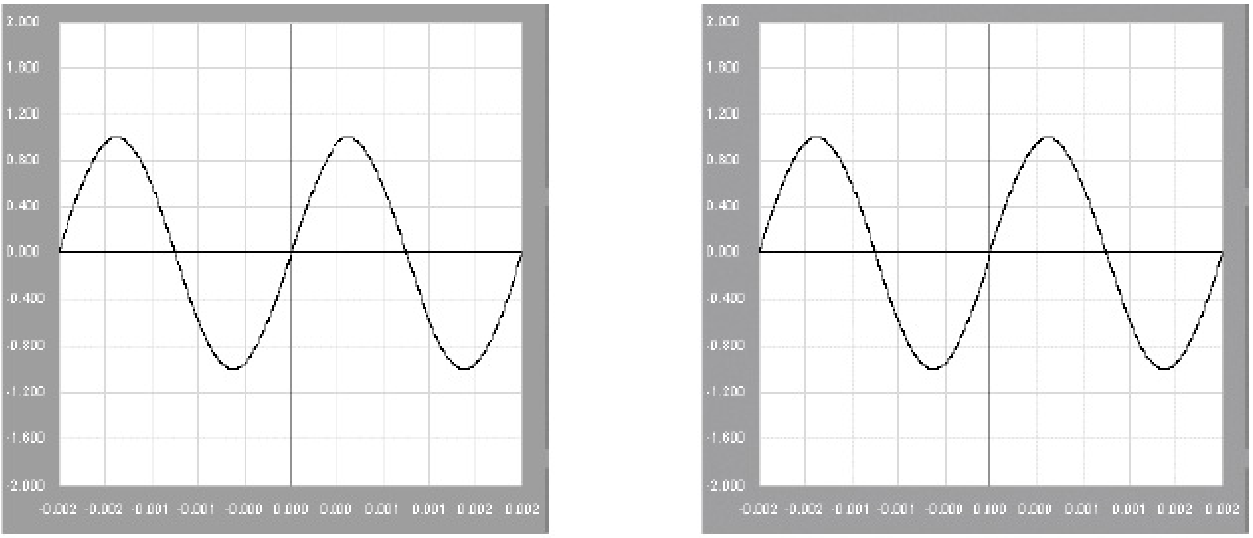
e, portanto

$$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{1000\pi} = 0,002,$$

que nos diz, em particular, que o período de f é $p = 0,002$.

Mais ainda, vemos que o intervalo $[-2, 2]$ contém 2.000 intervalos de comprimento 0, 002, ou seja, deveríamos ver no gráfico de f, nesse intervalo, 2.000 reproduções (contrações) do gráfico de seno no intervalo $[0, 2\pi]$, o que, de fato, podemos acreditar não ser possível.

Por outro lado, a Figura 6.15 foi obtida marcando-se, respectivamente, 5.000 e 50.000 pontos do gráfico de f no intervalo $[-0,002; 0,002]$. Podemos ver que o aumento do número de pontos marcados não gerou diferenças na aparência do gráfico obtido, o que é um indício de que a curva que vemos é uma boa aproximação para o gráfico de f (mas, de fato, só informações teóricas podem garantir que isso é verdade).



5.000 pontos | 50.000 pontos

Figura 6.15

Para entendermos as figuras incorretas que foram obtidas nesse exemplo, vamos dar uma ideia de como são geradas as imagens por um programa gráfico.

A tela do computador pode ser considerada uma matriz de células discretas, denominadas *pixels* (ou, mais simplesmente, um retângulo quadriculado, sendo que cada quadradinho do quadriculado é um pixel). Cada pixel pode estar aceso ou apagado e as imagens são geradas acendendo-se um determinado conjunto de pixels. A resolução da tela depende do monitor e da placa gráfica. As resoluções básicas encontradas na maioria dos monitores atuais são: 640×480, 800×600, 1024×768, 1280×1024 (isto é, 640 pixels em cada vertical e 480 pixels em cada horizontal etc). Em geral, o número de pixels usados na janela de visualização (isto é, a resolução da janela de visualização) é determinado pelo programa gráfico.

Assim, a representação do gráfico de uma função que vemos na tela é constituída pelo conjunto de pixels da janela de visualização (que é finito) que o programa decide acender. Desse modo, o computador é capaz apenas de gerar *aproximações* para o gráfico de uma função.

A Figura 6.16 mostra o gráfico da função $f(x) = \cos x$ gerado por um programa de computador, sendo que a ampliação representa em cinza os pixels que estão acesos.

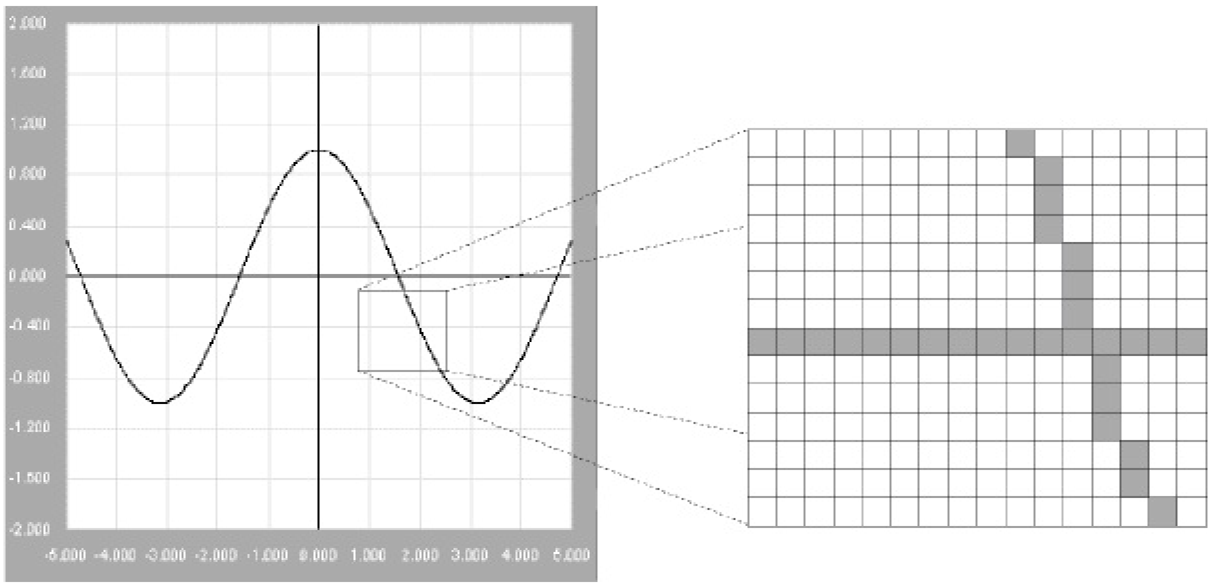


Figura 6.16

Em geral os dados que um programa precisa para fazer um gráfico são um número inteiro n, de pontos do gráfico da função a serem representados pelos pixels, e um intervalo de números reais de onde serão escolhidos esses pontos. A forma mais simples de escolher quais pontos serão utilizados é particionar o intervalo dado em n números, x_1, x_2 …, x_n igualmente espaçados. A partir daí o programa calcula os pontos $(x_i, f(x_i))$ do gráfico e acende os pixels correspondentes.

Para se obter a impressão visual de que o gráfico é uma curva contínua (se for o caso), isto é, para termos a impressão visual de que todos os pontos do gráfico no intervalo (que são infinitos) foram marcados, o número n deve ser maior que o número de pixels na direção do eixo x. Observe que, nesse caso, vários pontos calculados poderão acender o mesmo pixel. Vamos observar a figura anterior com mais detalhe:

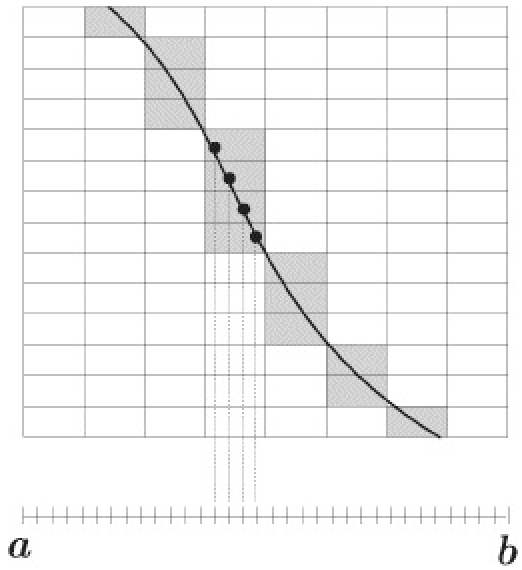


Figura 6.17

Essa figura representa uma situação em que a partição do intervalo [a, b] é muito mais refinada que a resolução em pixels na direção do eixo x, isto é, o n escolhido é maior do que o número de pixels da horizontal da tela utilizada. Nessa situação vários pontos calculados acendem alguns pixels contíguos numa mesma vertical, produzindo a impressão de continuidade.

Podemos agora descrever os problemas que podem ocorrer dependendo da função, da resolução da janela de visualização e das escolhas da região de visualização, do número de pontos que serão marcados.

Essencialmente são três os problemas que podem ocorrer:

- pontos do gráfico da função que devem ser distinguidos correspondem, pela escolha da região, a um mesmo pixel. Essa é uma situação simples na qual o aumento do número de pontos marcados não resolve o problema.
- pontos do gráfico que não foram marcados correspondem a pixels distantes daqueles que foram acesos. Nesse caso o resultado obtido, mesmo tendo a aparência de um gráfico de função, não é uma boa aproximação para o gráfico da função que está sendo estudada. Esse é o problema das curvas das Figuras 6.11 e 6.12.
- pontos do gráfico correspondem a pixels muito distantes numa mesma vertical. As Figuras 6.13a, 6.13b e 6.14 são exemplos desse problema.

Na Figura 6.18, ilustramos o que ocorreu com o gráfico da Figura 6.11. Ob-serve que o gráfico correto da função $f(x) = \text{sen}(1000\pi x)$ passa por todos os pixels na região representada. Assim, se aumentarmos muito o número de pontos calculados (isto é, se aumentarmos o n), quase todos os pixels que correspondem, em cada vertical, ao intervalo $[-1,1]$ serão acesos, como de fato ocorreu na situação da Figura 6.14.

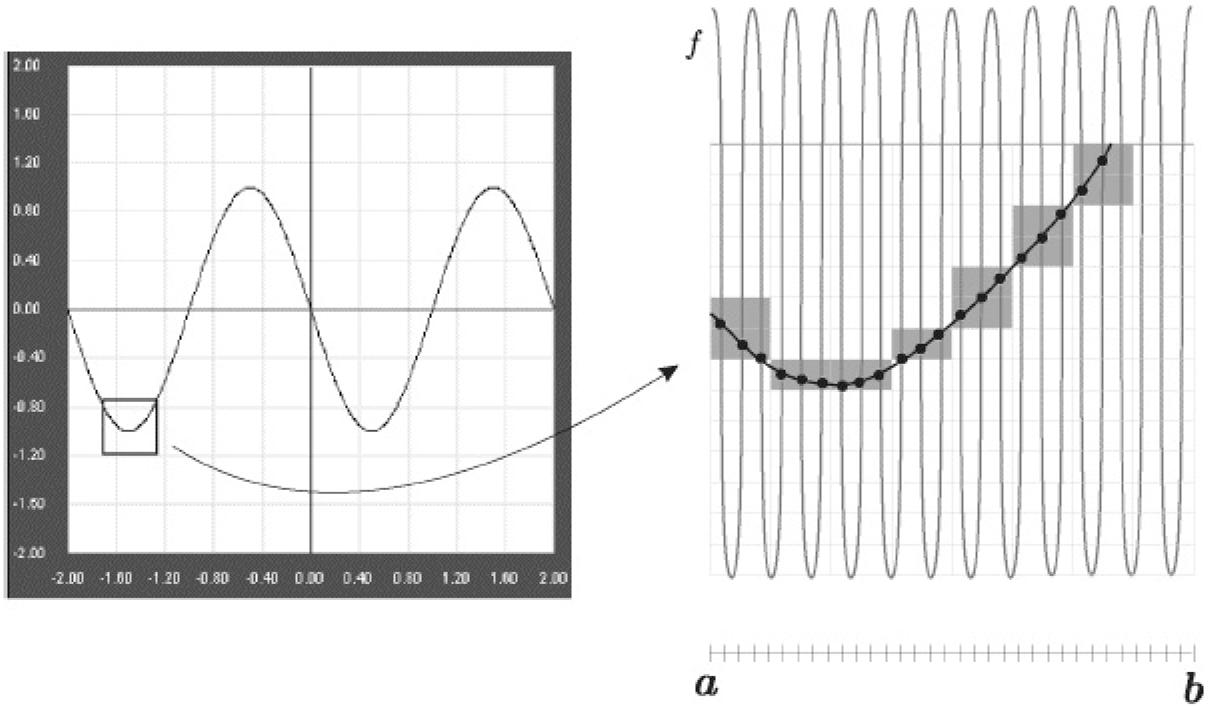


Figura 6.18

Qualquer um desses problemas só pode ser resolvido com uma escolha adequada da região de visualização. Vimos que o gráfico de $f(x) = \text{sen}(1000\pi x)$ no intervalo $[-2, 2]$ contém 2.000 reproduções (contrações horizontais) do gráfico da função seno no intervalo $[0, 2\pi]$, e, portanto, com a resolução de 315 pixels, cada pixel numa horizontal corresponde a um intervalo que contém $\frac{2000}{315}$ (aproximada-mente seis) dessas reproduções. Assim, nenhuma escolha para n é adequada para esta região de visualização e nenhum dos exemplos anteriores representa uma boa aproximação para o gráfico de f.

Observe que mesmo uma resolução de 2.000 pixels seria insuficiente para ob-termos uma boa aproximação do gráfico de f no intervalo $[-2, 2]$, já que, nesse caso, cada pixel na horizontal corresponderia a um intervalo no qual o gráfico de f é uma reprodução (contração horizontal) do gráfico da função seno num intervalo de comprimento 2π. Nesse exemplo, eliminamos o problema diminuindo o intervalo de variação de x.

O computador é sem dúvida um instrumento poderoso na execução das mais diversas tarefas do cálculo, porém devemos sempre ter em mente que o significado dos resultados computacionais depende da nossa capacidade de interpretá-los e validá-los.

7. Exercícios suplementares

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Utilizando a convenção estabelecida no texto, determine o domínio das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 4}$.

   (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{|2x - 5|}$.

   (c) $f(x) = \dfrac{8x^2 - 1}{\sqrt{x + 2} - 2\sqrt{x - 7}}$.

   (d) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{|x^2 - 5|}}$.

2. Seja $f(x) = \sqrt{x^2 - 49}$ e $g(x) = \sqrt{(x - 1)(x + 9)}$. Determine as funções abaixo e explicite o domínio em cada caso:

   (a) $(f + g)(x)$.

   (b) $(fg)(x)$.

   (c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$.

3. Seja $g(x) = |x + 4|$ e $f(x) = \begin{cases} 4 - 5x & \text{se } x > 1, \\ 2x^2 - x + 1 & \text{se } x \leq 1. \end{cases}$

   Determine as funções abaixo e explicite o domínio em cada caso:

   (c) $(f + g)(x)$.

   (b) $(fg)(x)$.

   (c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$.

4. Seja

$$f(x) = \begin{cases} |3x-8|-4 & \text{se } x \geq 2, \\ 2-2x & \text{se } x < 2. \end{cases}$$

(a) Calcule $f(1)$, $f(2)$, $(\frac{7}{3})$ e $f(3)$.

(b) Seja $g(x) = f(2x)$. Determine g.

(c) Para que valores de x tem-se que $f(x) = 0$?

(d) Seja $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Qual é o domínio de h?

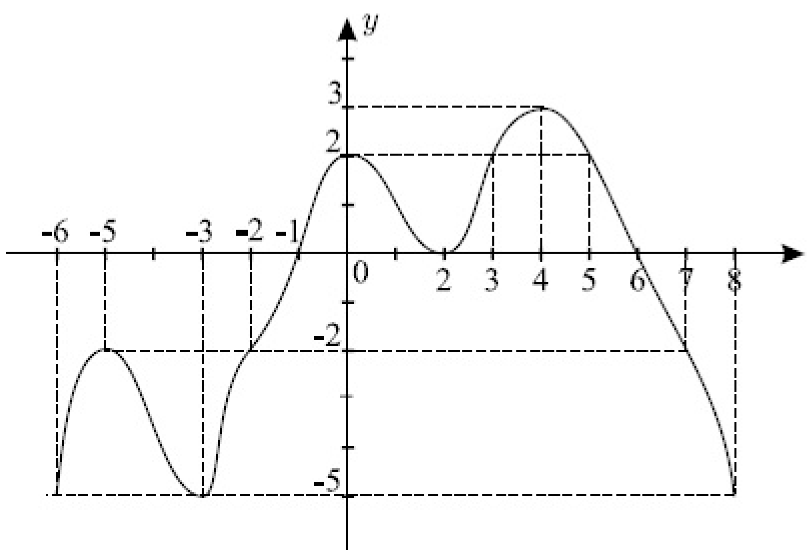
5. Seja $f(x) = |4x + 9|$. Expresse a função f sem usar o símbolo | |.

6. Seja $f(x) = |3x - 5| - x$. Expresse a função f sem usar o símbolo | |.

7. Seja $f(x) = |2x - 3| - 2x|$. Expresse a função f sem usar o símbolo | |.

8. Seja $f(x) = |4 - 6x|$ e $g(x) = f(|x|)$. Expresse a função g sem usar o símbolo | |.

9. Considere a função dada pelo gráfico a seguir.



Determine os valores de x para os quais:

(a) $f(x) = 0$.

(b) $f(x) < 0$.

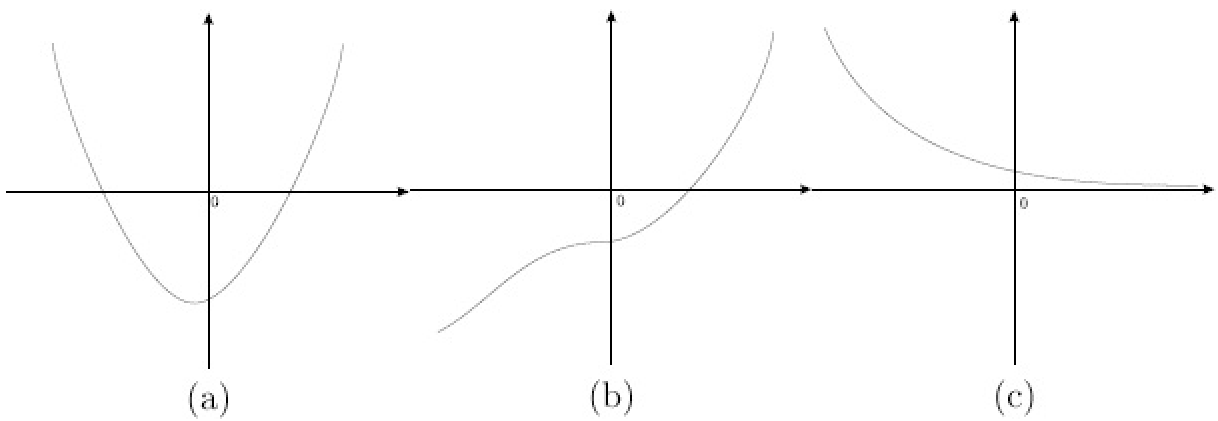
(c) $f(x) > 0$.

(d) $f(x) = -1$.
(e) $f(x) < -1$.
(f) $f(x) > -1$.
(g) $|f(x)| < 1$.

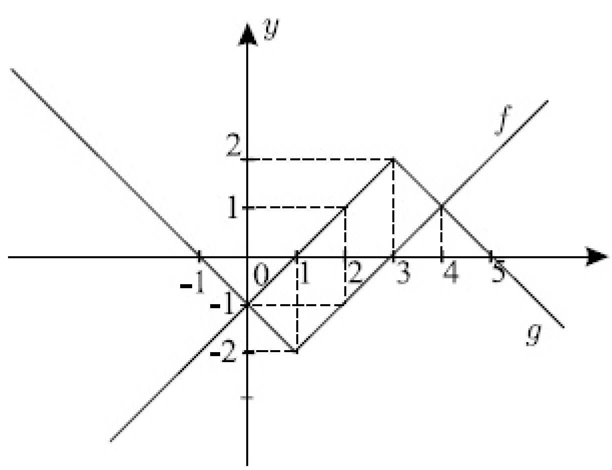
10. Um dos gráficos abaixo é um gráfico de uma função f que satisfaz

$$x > y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Qual deles?

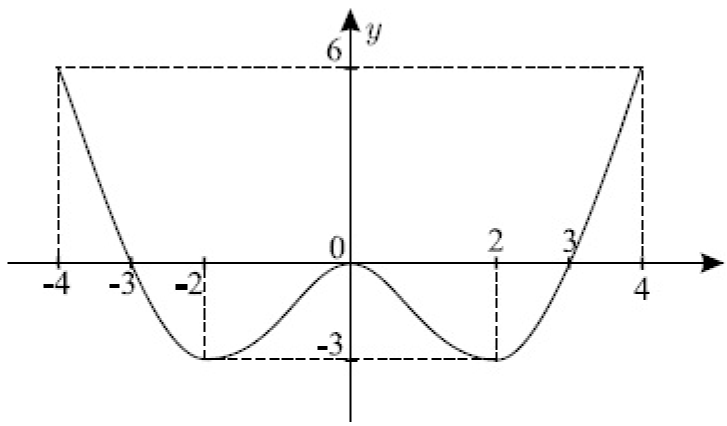


11. Na figura abaixo estão desenhados os gráficos de duas funções f e g.



(a) Para que valores de x tem-se que $f(x) > g(x)$?
(b) Para que valores de x tem-se que $f(x) < g(x)$?
(c) Quais são as soluções da equação $f(x) - g(x) = 0$?
(d) Quais são as soluções da desigualdade $|f(x)| > |g(x)|$?

12. Seja f a função definida pelo gráfico abaixo. Determine os valores de b para os quais a equação $f(x) - b = 0$ tem:



(a) nenhuma solução.
(b) duas soluções.
(c) três soluções.
(d) quatro soluções.

13. Seja f a função definida pelo gráfico do exercício anterior.

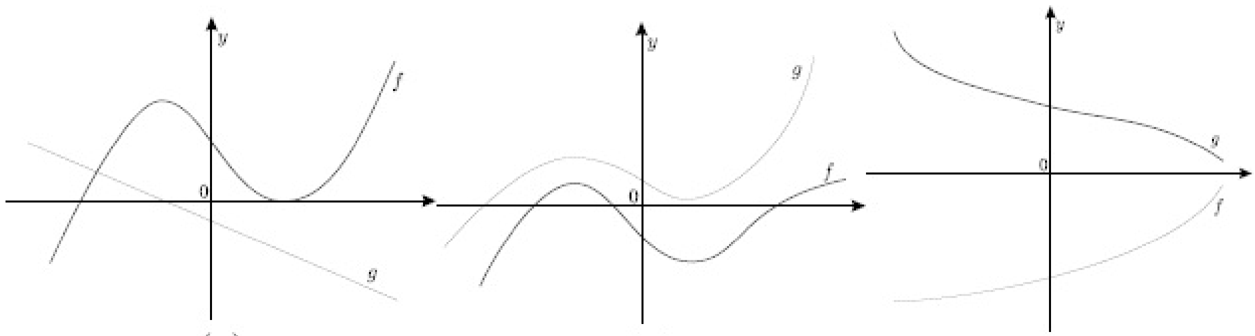
(a) Para quais valores de x tem-se que $-5 \leq f(x) \leq 0$?
(b) Quantas soluções tem a equação $f(x) = x$?

14. Desenhe gráficos de funções $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ e $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) > g(x)$ somente em $[-1, 0)$ e $f(x) < g(x)$ somente em $(0,1]$.

15. Desenhe o gráfico de uma função f que satisfaça as quatro condições dadas abaixo:

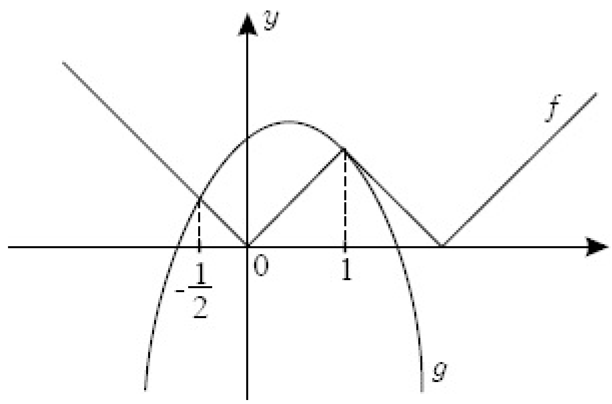
(i) $Dom(f) = [-3, 4]$.
(ii) $f(x) < -1$ se $-3 < x < 0$.
(iii) $f(x) > 1$ se $2 < x < 4$.
(iv) a equação $f(x) = 0$ tem exatamente duas soluções.

16. Um dos gráficos abaixo é o gráfico de duas funções f e g tal que a equação $f(x) - g(x) + 2 = 0$ tem exatamente três soluções. Qual deles?



(a) (b) (c)

17. Determine a e b sabendo que na figura abaixo são dados os gráficos de $f(x) = ||x - 1| - 1|$ e $g(x) = -x^2 + ax + b$.



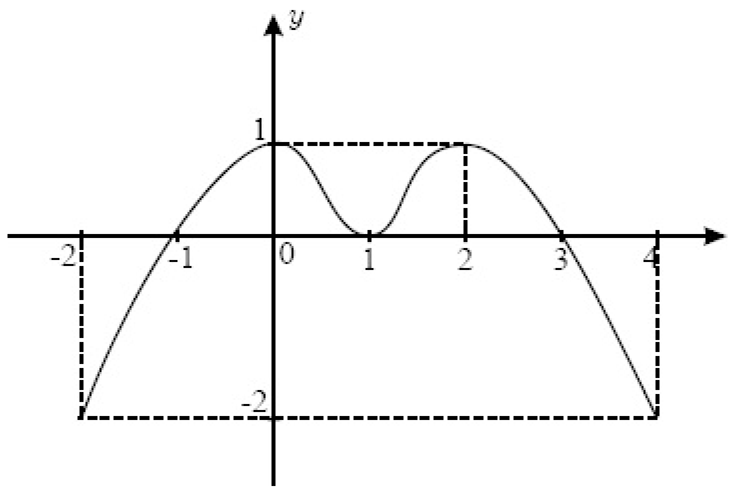
18. Seja $f(x) = \begin{cases} |x+1| - 1 & \text{se } x \geq 0, \\ g(x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$

    Determine g para que:

    (a) f seja par.

    (b) f seja ímpar.

19. A curva abaixo é a representação gráfica de uma função f. Desenhe as representações gráficas das funções abaixo, explicitando quais as transformações geométricas que permitem obtê-las a partir do gráfico de f.



(a) $-f(x)$.

(b) $|f(x)|$.

(c) $f(x) + 2$.

(d) $f(x + 2)$.

(e) $f(x - 2)$.

(f) $2f(x)$.

(g) $f(2x)$.

(h) $f(|x|)$

(i) $f(-x)$

(j) $f\left(\frac{x}{2}\right)$

20. Considere uma função f cujo gráfico é dado na figura abaixo. Desenhe o gráfico das funções:

(a) $g_1(x) = f(x + 1)$.

(b) $g_2(x) = f(x) + 1$.

(c) $g_3(x) = f(x - 2)$.

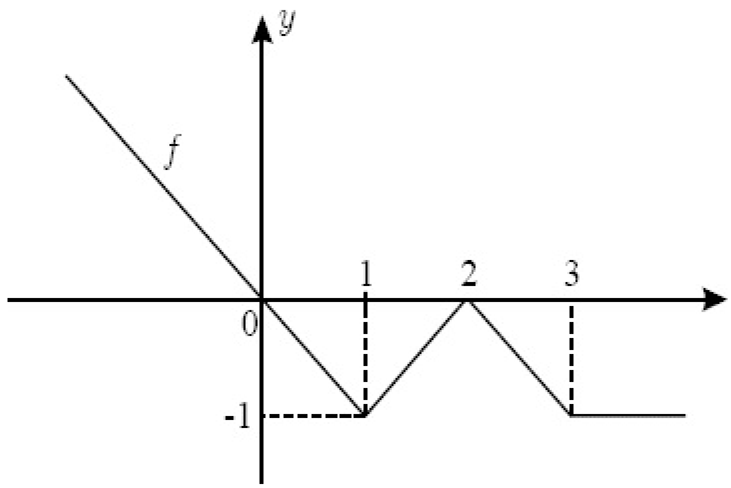
(d) $g_4(x) = f(x) - 2$.

(e) $g_5(x) = \frac{1}{2}f(x)$.

(f) $g_6(x) = 3f(x - \frac{1}{2})$.

(g) $g_7(x) = |f(x)|$.

(h) $g_8(x) = f(|x|)$.



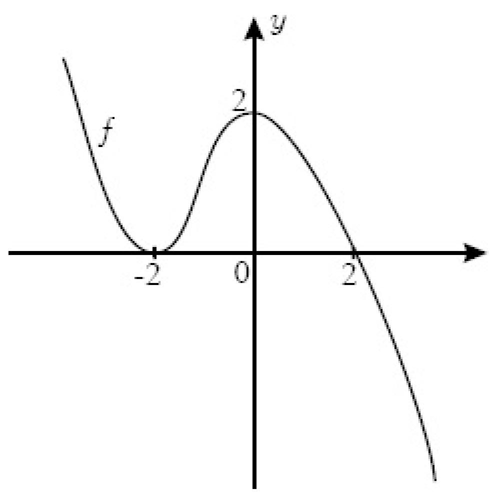
21. A partir do gráfico da função f dado abaixo, faça o gráfico das seguintes funções:

   (a) $g(x) = -|f(x)|$.

   (b) $h(x) = |f(x - 1)|$.

   (c) $q(x) = f(|x - 1|)$.

   (d) $r(x) = f(-x)$.



22. Verifique quais funções abaixo são pares, quais são ímpares e quais não são pares nem ímpares. Em todos os itens, n é um inteiro positivo.

   (a) $f(x) = x^n$ para n ímpar.

   (b) $f(x) = x^n$ para n par.

   (c) $f(x) = |x^n|$ para n ímpar.

   (d) $f(x) = x^n + 1$ para n ímpar.

(e) $f(x) = x^n + 1$ para n par.

23. Em cada item abaixo, faça um esboço do gráfico da função f:

(a) $f(x) = ||x + 1| - 2| + 1$.

(b) $f(x) = |5 - 4x|$.

(c) $f(x) = |7 + 2\,|x - 1||$.

(d) $f(x) = |g(|x + 1|)|$, onde $g(x) = 6 - 5x$.

24. Para cada item do exercício anterior, expresse a função f sem usar o símbolo $||$.

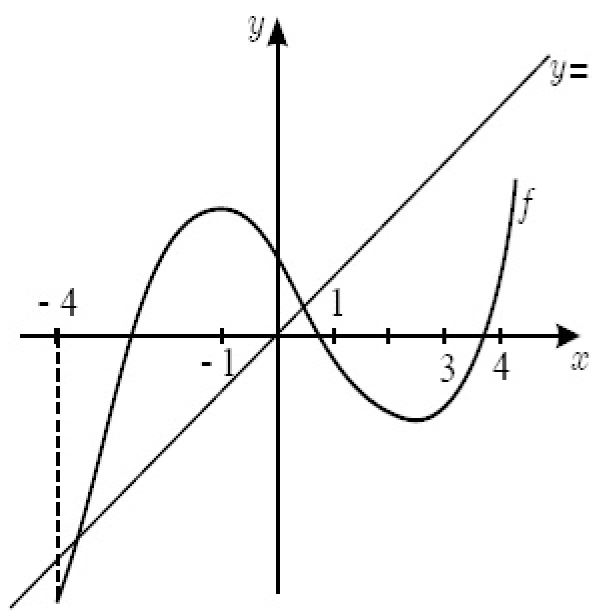
25. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sabendo que $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = 1$ e $x_3 = 2$ são as soluções da equação $f(x) = 0$, resolva as equações abaixo:

(a) $f(2x - 5) = 0$.

(b) $2f(|x - 1|) = 0$.

(c) $f(|x| + 1) = 0$.

26. Considere f a função definida pelo gráfico abaixo e decida qual das afirmações abaixo é verdadeira:



(a) O domínio da função $g(x) = f(|x|)$ é o intervalo $[0, 4]$.

(b) $f(f(-1)) < 0$.

(c) A equação $f(f(x)) = 1$ tem exatamente três soluções.

(d) A equação $f(x) - x = 0$ tem três soluções reais.

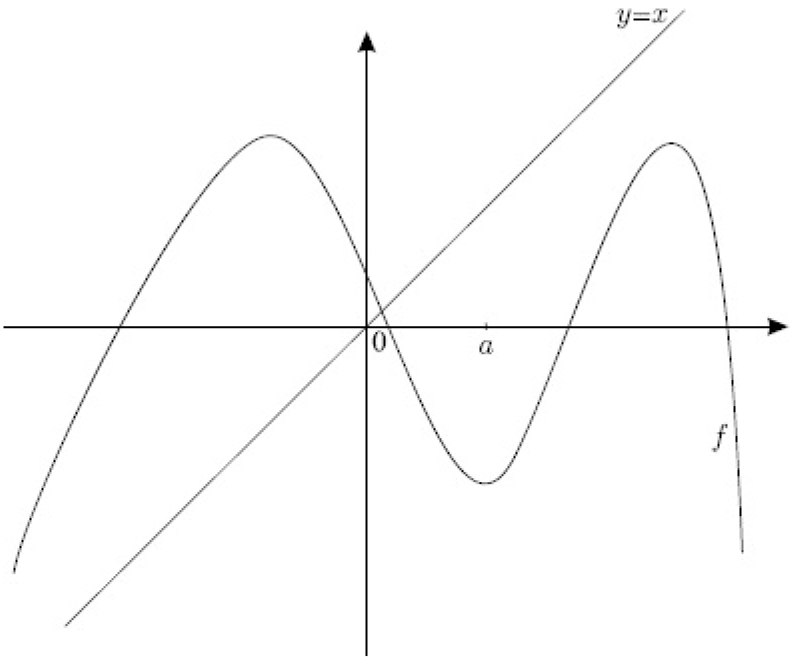
27. Seja f a função definida pelo gráfico do exemplo anterior. Faça um esboço do gráfico de:
    (a) $g(x) = f(|x|)$.
    (b) $h(x) = |f(|x|)|$.
    (c) $u(x) = 1 + f(-x)$.

28. Em cada item abaixo é dado um par de funções, f e g. Encontre a expressão para cada uma das compostas, $f \circ g$ e $g \circ f$, descrevendo seus domínios (adotando a convenção de que para cada uma da funções f e g, seu domínio é o conjunto dos números reais para o qual a expressão dada faz sentido):
    (a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ e $g(x) = \sqrt{x}$.
    (b) $f(x) = \left|x^2 - 7x + 6\right|$ e $g(x) = \sqrt{x - 6}$.
    (c) $f(x) = \frac{2x-1}{3x+1}$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+5}}$.

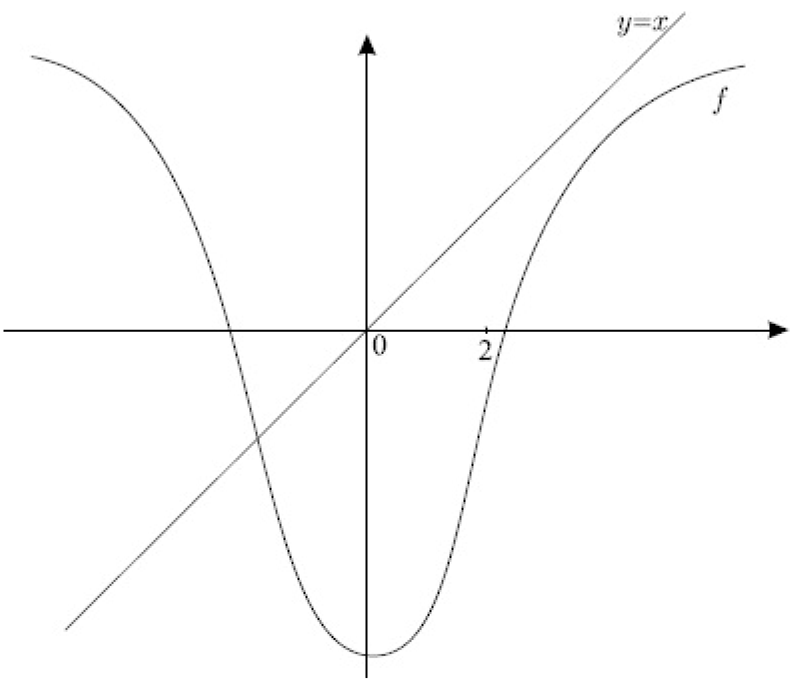
29. Escreva cada uma das quatro funções abaixo como a composta de três funções.
    (a) $f_1(x) = \sqrt{6 + (x^2 - 8x)^{50}}$.
    (b) $f_2(x) = \cos^3(\sqrt{x^2 - 6x + 1})$.
    (c) $f_3(x) = -\frac{1}{5|1+|x+1||}$.
    (d) $f_4(x) = \sqrt{|x^3 - 1| + 2}$.

30. Em cada item abaixo, dê um exemplo de funções f e g, definidas por expressões algébricas, que satisfaçam as condições dadas:
    (a) A equação $f(x) = -1$ tem uma solução e a equação $f(g(x)) = -1$ não tem solução.
    (b) A equação $f(x) = -1$ tem uma solução e a equação $f(g(x)) = -1$ tem duas soluções.
    (c) A equação $f(x) = -1$ tem uma solução e a equação $f(g(x)) = -1$ tem uma solução.

31. Considere a função dada pelo gráfico abaixo. Marque no eixo vertical o ponto que corresponde ao número $f(f(f(a)))$.



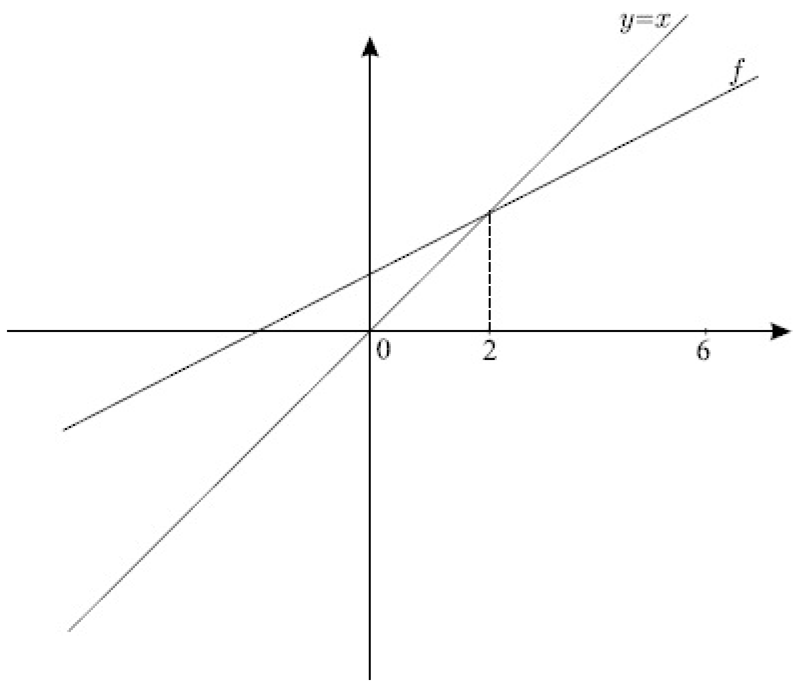
32. Considere a função f dada pelo gráfico abaixo.



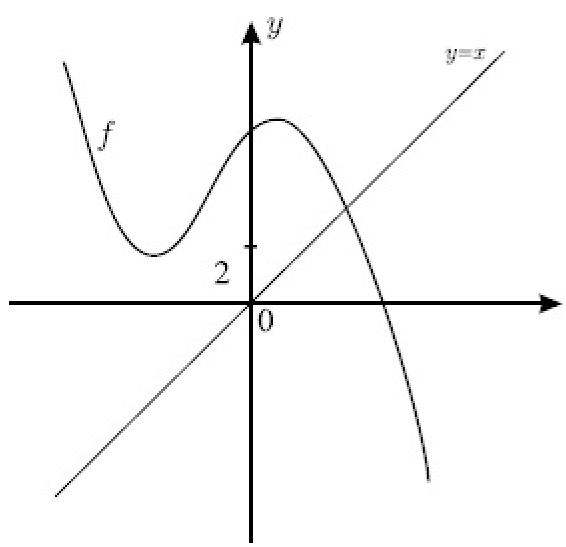
(a) Marque no eixo vertical o ponto que corresponde ao número $f(f(2))$.

(b) Marque no eixo-x as soluções da equação $f(f(x)) = 2$.

33. Na figura a seguir são dados os gráficos de uma função f e da função $g(x) = x$. Marque no eixo vertical o ponto que representa o número real $f(f(f(6))))$, $f(f(f(0)))$ e $f(f(f(2)))$.



34. Marque no eixo horizontal da figura abaixo os pontos que representam as soluções da equação $f(f(x)) = 2$.



35. Em cada item abaixo, faça um esboço do gráfico da função f:

(a) $f(x) = \sqrt{x-3}$.

(b) $f(x) = -\sqrt{x-5}$.

(c) $f(x) = \sqrt{|x|}$.

(d) $f(x) = \sqrt{|x-5|}$.

(e) $f(x) = \left|\sqrt{|x|} - 1\right|$.

(f) $f(x) = \left|3 - \sqrt{x-3}\right|$.

36. São dadas as seguintes informações sobre as funções f e g:

   (a) A imagem de g é o intervalo $[-2, 6]$.

   (b) As soluções da equação $g(x - 1) = 3$ são -1, $\frac{1}{4}$ e $\frac{5}{3}$.

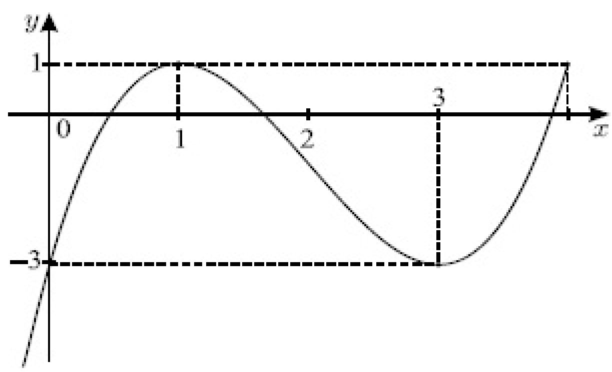
   (c) As soluções da equação $f(x + 1) = 0$ são -6, -4 e 2.

   Quais são as soluções da equação $f(g(x)) = 0$?

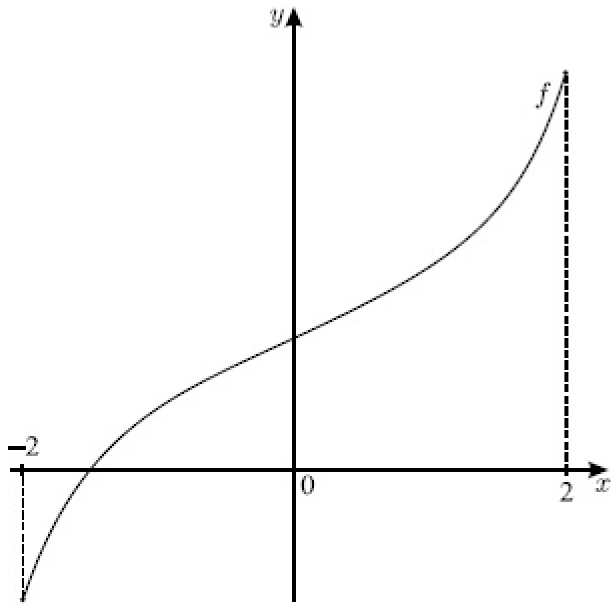
37. O gráfico de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ no intervalo $[\frac{-1}{4}, 4]$ é dado abaixo. Sabendo que f é crescente em $(-\infty, 0)$ e em $[3, \infty)$, determine:

   (a) os valores de b para os quais a equação $x^3 - 6x^2 + 9x + b = 0$ tem somente duas soluções.

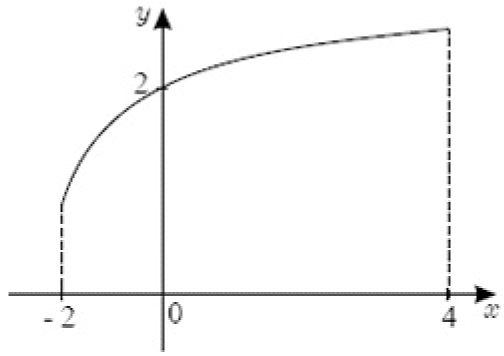
   (b) os valores de b para os quais a equação $x^3 - 6x^2 + 9x + 6 = 0$ tem somente três soluções.

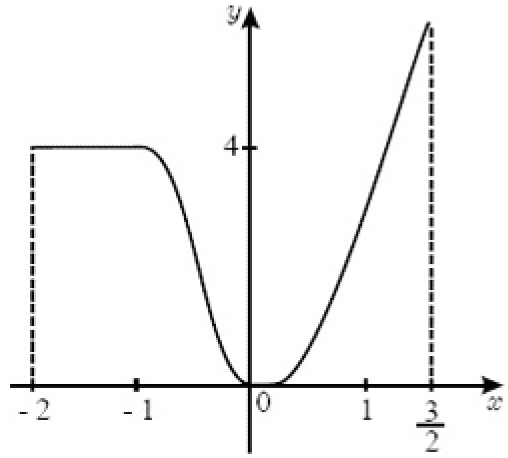


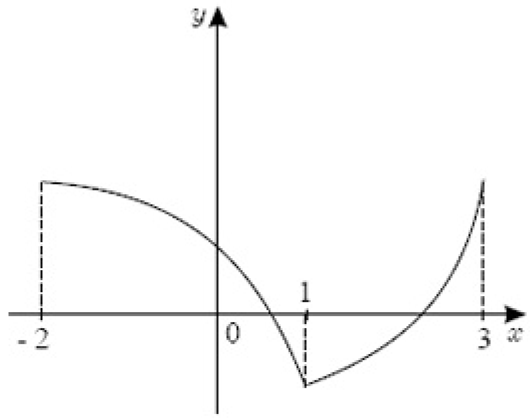
38. O gráfico da função $f(x) = \frac{1}{16}x^5 + x + 2$ restrita ao intervalo $[-2, 2]$ está esboçado na figura abaixo. Essa função é crescente em $(-\infty, -2]$ e em $[2, \infty)$. Quantas soluções tem a equação $\frac{1}{16}x^5 + x - 1 = 0$?

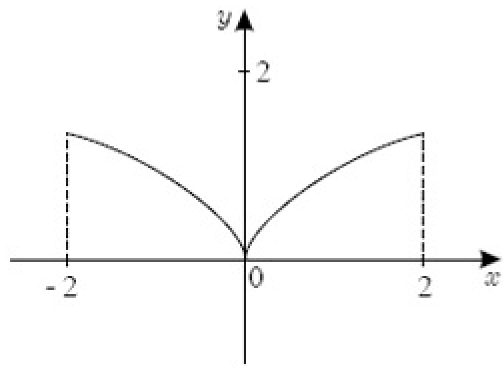


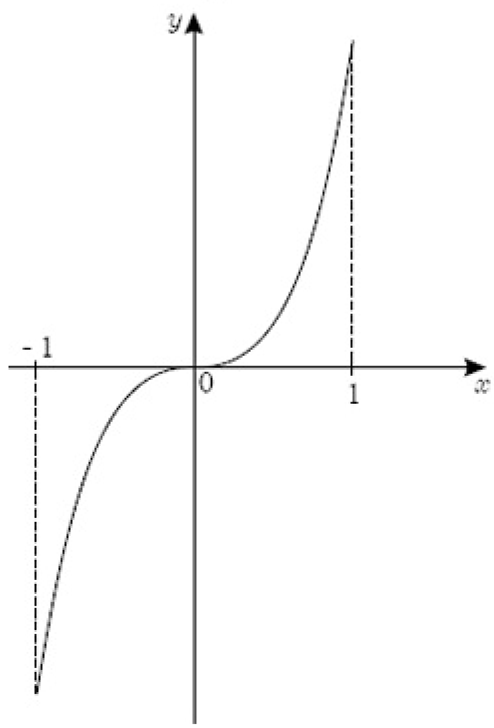
39. Observando os gráficos das funções abaixo, determine os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente.

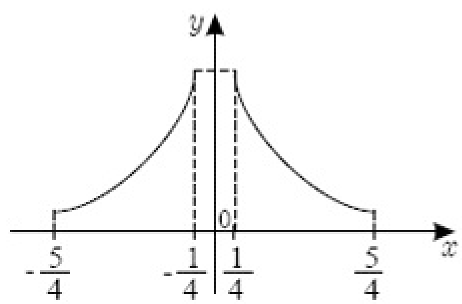












40. São dadas as seguintes informações sobre a função *f*:

- $f(-4) = -1$.
- $f(2) = f(-2) = 2$.
- $f(4) = 0$.
- f é crescente em $[-4, -2]$ e $[0, 2]$.
- f é decrescente em $[-2, 0]$ e $[2, 4]$.
- $f(x) > 0$ para $x \in [-2, 2]$.

Para cada uma das desigualdades abaixo, diga se ela é falsa, verdadeira ou não é possível decidir a partir das informações acima:

(a) $f(-3) > f(-2)$.
(b) $f(0) = 1$.
(c) $f(1) = f(-1)$.
(d) $f(-3) < f(3)$.
(e) $f(2, 8) > 0$.

41. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 2 & \text{se } x < -1 \\ x^2 + 2x + 3 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$. Em cada item abaixo, decida se a afirmação é verdadeira ou falsa:

(a) f é inversível.
(b) $f^{-1}(2) = -4$.
(c) $f^{-1}(2) = -1$.
(d) $f^{-1}(3) = 0$.
(e) $f^{-1}(-10) = 3$.

42. Decida se a proposição abaixo é verdadeira ou falsa.

Se f é uma função crescente, então f^{-1} é uma função decrescente.

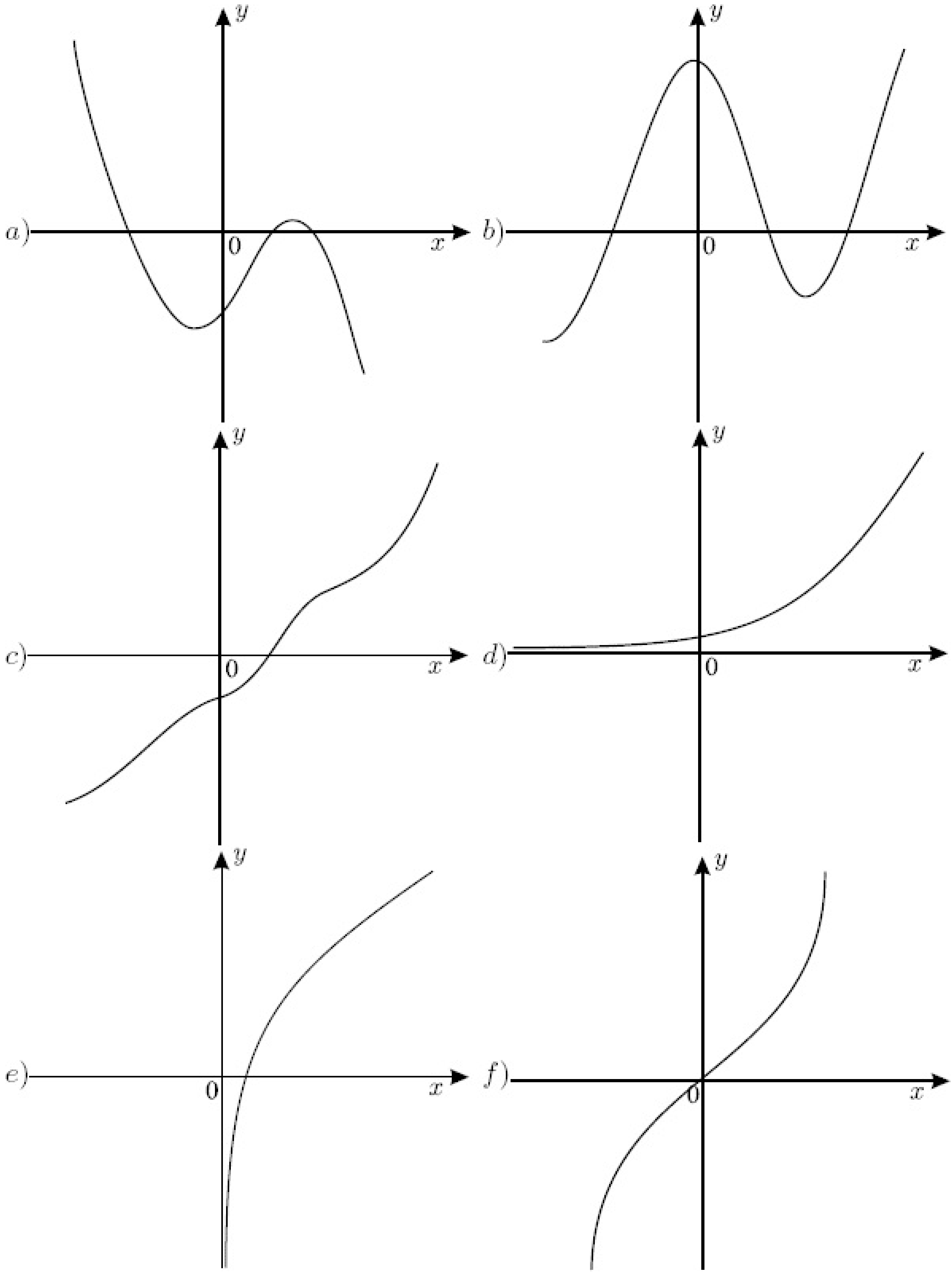
43. Sabendo que a função $f(x) = -2x^5 - 3x - 5$ é decrescente, decida, em cada item abaixo, se a afirmação é verdadeira ou falsa:

(a) O domínio de f^{-1} é o intervalo $(-\infty, 0]$.
(b) $f^{-1}(0) = -5$.

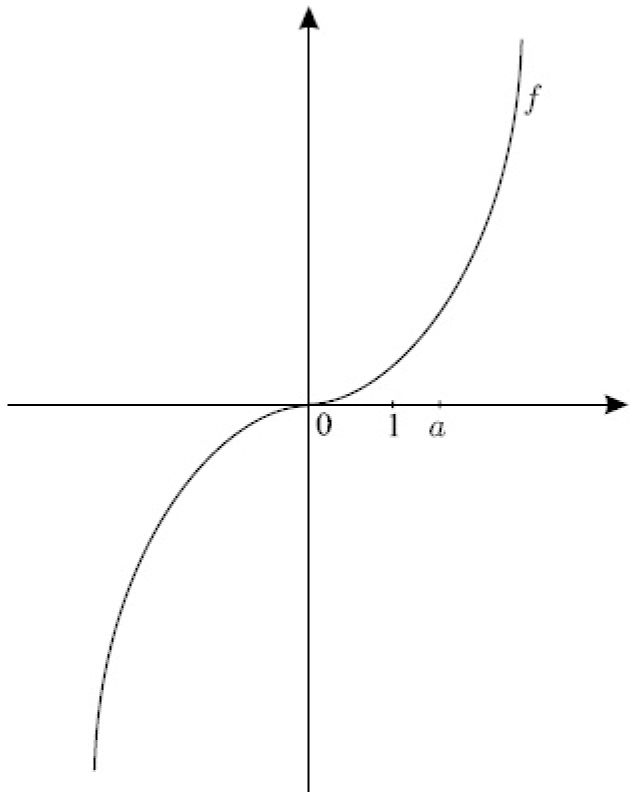
(c) $f^{-1}(-5)=0$.
(d) $f^{-1}(-4) > 0$.
(e) $f^{-1}(-2) \neq 0$.
(f) A função $h(x) = 2x^5 + 3x + 5$ é inversível.

44. Seja f uma função inversível e $g(x) = (f(x) - 5)^3$. Ache uma expressão para g^{-1} em termos de f^{-1}.

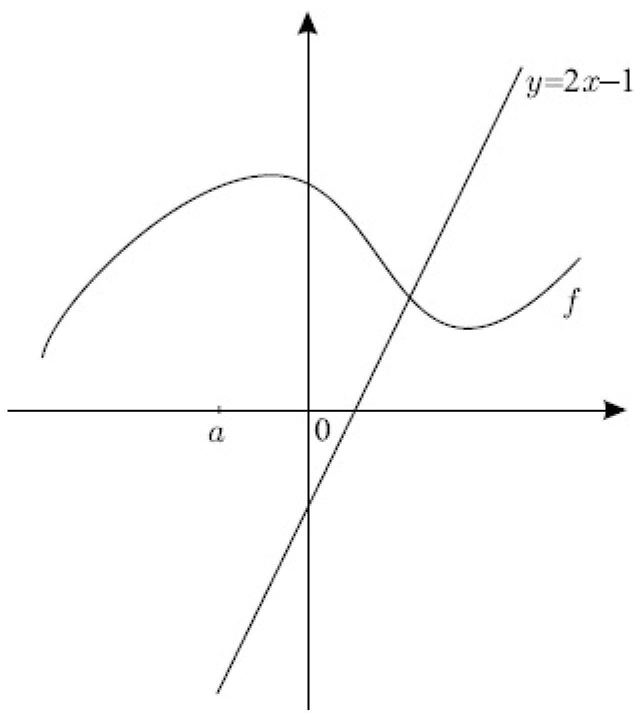
45. Observando os gráficos abaixo, determine quais representam gráficos de funções inversíveis:



46. Sabendo que a curva abaixo é o gráfico de $f(x) = x^3$, marque no eixo vertical o ponto correspondente a $\sqrt[3]{a}$.



47. Marque no eixo x o ponto que representa $\frac{f(a)+1}{2}$:



CAPÍTULO 5

Continuidade e Limites de Funções Reais

Neste capítulo introduzimos os conceitos de continuidade e limites de funções bem como apresentamos resultados que são necessários ao estudo de funções reais.

Como vimos no Capítulo 2, a maioria dos números reais (os irracionais) não possui uma representação decimal finita, o que, em particular, nos diz que não podemos fazer cálculos exatos com a maioria dos números reais. Esse fato nos conduziu à necessidade de introduzirmos os conceitos de aproximação e erro que nos permitem lidar com cálculos aproximados, isto é, fazer cálculos por aproximações.

Por outro lado, essa limitação (da representação dos números reais) se estende ao cálculo do valor de uma função num número irracional de seu domínio, isto é, para a maioria dos números, x, do domínio de uma função real f, o valor $f(x)$ só pode ser calculado por aproximações. O conceito de continuidade caracteriza a propriedade que nos diz quando podemos calcular aproximações para o valor $f(x)$, com qualquer precisão desejada, a partir de aproximações do número x. Assim sendo, a continuidade é uma propriedade básica para o cálculo com funções reais.

Com o objetivo de dar exemplos de demonstrações que envolvem os conceitos aqui tratados, apresentamos, no apêndice a este capítulo, as demonstrações dos teoremas indicados com o símbolo *. Apresentamos também uma definição de limite de uma função real, equivalente à definição que adotamos neste capítulo, que não utiliza o conceito de sequência convergente.

1. O conceito de continuidade

Já sabemos que muitos dos números reais (na verdade a maioria dos números reais) não possui uma representação decimal finita. Disso decorre que, se a é um tal número, mesmo uma operação tão simples quanto “elevar ao quadrado” só pode ser feita por aproximação.

Em outras palavras, se denotamos por f a função que a cada número x associa o seu quadrado, isto é, $f(x) = x^2$, para a maioria dos números reais a só podemos ter acesso ao valor $f(a)$ através de avaliações de f em aproximações de a por decimais exatos.

Por outro lado, dos resultados que vimos a respeito de convergência de sequências, aprendemos que se x_n é uma sequência que converge a a, então a sequência x_n^2 converge a a^2. Ou seja, a seguinte propriedade é válida para a função $f(x) = x^2$:

se a é um número real e x_n é uma sequência tal que $x_n \to a$, então a sequência imagem $f(x_n) \to f(a)$.

Essa propriedade é extremamente importante, pois nos garante que, a partir de aproximações de a, podemos obter aproximações de $f(a)$ tão boas quanto necessitarmos. Mais precisamente, se x_n estiver suficientemente próximo de a, então $f(x_n) = x_n^2$ será uma boa aproximação de $f(a) = a^2$.

Por exemplo, suponhamos que a é um número irracional cuja parte inteira de sua expansão decimal é 8 e queremos calcular uma aproximação de $f(a) = a^2$ com erro inferior a 10^{-5}.

Como sabemos que a sequência (a_n) dos truncamentos de a converge a a (e portanto, pela propriedade acima, $f(a_n) \to a^2$), podemos usar um dos trunca-mentos de a para obter a aproximação que queremos. Para determinarmos quais truncamentos podemos usar, observamos que

$$|f(a_n) - f(a)| = |a_n^2 - a^2| = |a_n + a||a_n - a| \leq (|a_n| + |a|)|a_n - a|.$$

Como a parte inteira de a é 8, temos que $8 \leq |a_n| \leq |a| < 9$ e, portanto,

$$|a_n| + |a| < 9 + 9 < 10^2.$$

Logo,

$$|a_n^2 - a^2| \leq (|a_n| + |a|)|a_n - a| < 10^2|a_n - a|.$$

Por outro lado, como a_n é a sequência dos truncamentos de a, sabemos que

$$|a_n - a| < 10^{-n}$$

e, portanto, podemos concluir que

$$|a_n^2 - a^2| < 10^2.10^{-n} = 10^{-n+2}.$$

Ou seja, $f\,(a7)$ = $|a_n^2 - a^2| < 10^2.10^{-n} = 10^{-n+2}$. é uma aproximação de $f(a) = a^2$ com a propriedade desejada. E claro que para qualquer $n > 7$, a_n também serve, mas também é claro que é conveniente usarmos o menor número de casas decimais que pudermos.

Funções com a propriedade acima são chamadas funções contínuas. Mais precisamente:

Definição: Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função real e $a \in D$. Dizemos que f é *contínua em a* se a seguinte propriedade é satisfeita:

se $x_n \in D$ e $x_n \to\bullet\, a$, então $y_n = f\,(x_n) \to f\,(\mathrm{a})$.

Se f é contínua em todos os pontos a do domínio D, dizemos simplesmente que f é contínua.

Se X é um conjunto contido no domínio de f e f é contínua em todos os pontos de X, dizemos também que f é *contínua em X*.

Os exemplos mais simples de funções contínuas são as funções constantes e a função identidade $f(x) = x$ (verifique a continuidade dessas funções).

Como um exemplo menos óbvio, vamos mostrar que a função $\sqrt{x}$ é contínua em $a = 3$. Para isso, devemos provar que para qualquer sequência $x_n \geq 0$ com a propriedade de convergir a 3, a sequência imagem $g(x_n) = \sqrt{x_n}$ converge a $\sqrt{3}$.

E importante salientar que não podemos particularizar a sequência x_n, isto é, não podemos usar nenhuma outra propriedade além daquelas que decorrem simplesmente do fato de que $x_n \to 3$.

Seja então x_n uma sequência de números não negativos tal que $x_n \to 3$. Primeiro observamos que provar que $\sqrt{x_n} \to \sqrt{3}$ é equivalente a provar que a sequência $\left(\sqrt{x_n} - \sqrt{3}\right)$ converge a 0.

Por outro lado, vemos que podemos escrever $\left(\sqrt{x_n} - \sqrt{3}\right)$ na forma

$$\sqrt{x_n} - \sqrt{3} = \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{3})(\sqrt{x_n} + \sqrt{3})}{\sqrt{x_n} + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{x_n})^2 - (\sqrt{3})^2}{\sqrt{x_n} + \sqrt{3}} = \frac{x_n - 3}{\sqrt{x_n} + \sqrt{3}}.$$

Agora observamos que

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x_n} + \sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

para qualquer n, isto é, a sequência $\frac{1}{\sqrt{x_n}+\sqrt{3}}$ é limitada. Como $(x_n - 3)$ é uma sequência que converge a 0, podemos usar o Teorema 3.6 do Capítulo 3 para concluir que

$$(\sqrt{x_n} - \sqrt{3}) \to 0.$$

A continuidade é uma propriedade extremamente importante: é ela quem garante, como vimos para a função $x \to x^2$, que podemos obter boas aproximações de f(a), avaliando a função em aproximações suficientemente boas de a.

Para termos a segurança de que o conceito de continuidade foi bem entendido, é conveniente negarmos a condição exigida para a continuidade de uma função em um número a do seu domínio, concluindo assim que:

> *se existe uma sequência $a_n \to a$ tal que a sequência imagem $f(a_n)$* ***não*** *converge a $f(a)$, então f* ***não*** *é contínua em a.*

Observe que isso nos diz que muito embora a sequência a_n forneça aproximações arbitrariamente boas de a, o mesmo não ocorre com a sequência $f(a_n)$ em relação a f(a), ou seja, os valores de $f(a_n)$ podem estar muito distantes do valor de $f(a)$. Em outras palavras, se uma função não é contínua em a, conhecer o valor da função em números arbitrariamente próximos de a não nos informa nada a respeito do valor f(a).

Vejamos um exemplo muito simples que permite ilustrar essa situação.

Seja f a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 0 & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Consideremos a sequência $a_n = 1 - 10^{-n}$. Já sabemos que $a_n \to 1$, mas, pela definição de f, temos que $f(a_n) = 0$ para qualquer n e, portanto, por maior que seja n a distância do número $f(a_n)$ a $f(1) = 1$ é sempre igual a 1.

Operações com funções e continuidade

Quando estudamos sequências, vimos a conveniência de considerarmos as operações soma, produto e quociente de sequências. Isso nos permite obter informações sobre o comportamento de certas sequências a partir do comportamento de sequências já estudadas.

O mesmo acontece com funções; por exemplo, se $h(x) = x^2 + x$, podemos ver que para cada x, $h(x)$ é dado pela soma dos valores das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$, isto é, para cada número real x

$$h(x) = f(x)+g(x).$$

O que interessa desse fato é que já temos informações sobre essas duas funções f e g.

Por exemplo, já sabemos que são funções contínuas. Isso nos diz que se a é um número real qualquer e $x_n \to a$, então

$$f(x_n) \to f(a) \text{ e } g(x_n) \to g(a).$$

O Teorema 3.1 do Capítulo 3 nos garante então que

$$(f(x_n) + g(x_n)) \to (f(\mathrm{a}) + g(a)).$$

Mas sabemos que

$$f(x_n) + g(x_n) = h(x_n) \text{ e } f(a) + g(a) = h(a),$$

ou seja, acabamos de concluir que

$$\text{se } x_n \to a, \text{ então } h(x_n) \to h(a).$$

Em outras palavras acabamos de verificar que h é uma função contínua a partir do fato que $h(x) = f(x) + g(x)$ para qualquer x e que f e g são contínuas.

Além das funções que podem ser obtidas de outras através das operações algébricas com números reais, já vimos que se f e g são funções reais podemos definir a composta $f \circ g$ e que se f é uma função inversível, então f determina uma outra função, sua inversa f^{-1}.

O teorema a seguir garante a continuidade de uma função a partir da continuidade de outras, isto é, sem que precisemos verificar diretamente que a função tem a propriedade que define a continuidade.

Teorema 1.1: *Se f e g são funções contínuas , então*
(i) *$f + g$, fg, f/g também são contínuas.*
(ii) *a função composta $f \circ g$ é contínua.*
(iii) *se f é inversível e seu domínio é um intervalo, então sua inversa f^{-1}* é contínua.

De imediato, vemos que usando sucessivamente este teorema podemos concluir que para cada $n \geq 1$, a função $x \to x^n$ é contínua. Usando novamente o mesmo teorema podemos ver que qualquer polinômio é uma função contínua e, portanto, qualquer quociente de polinômios $p(x)/q(x)$ também é uma função contínua.

Mais ainda, como a função $x \to x^2$, para $x \geq 0$, é contínua e inversível, o item (iii) do teorema garante que sua inversa, $x \to \sqrt{x}$, é também uma função contínua.

De fato, se n é um inteiro positivo, é fácil ver que a função $f(x) = x^n$, para $x \geq 0$, é crescente e, portanto, inversível. Logo, o item (iii) nos diz que sua função inversa, que denotamos por $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$ é contínua.

Observe que, com o objetivo de dar um exemplo, tivemos um certo trabalho para provar, a partir da definição, que a função *raiz quadrada* é contínua em $a = 3$. No entanto, usando o teorema acima, pudemos provar que essa função é contínua (ou seja, é contínua em qualquer número $a \geq 0$) apenas usando que $x \to x^2$ é contínua.

Em particular, podemos agora seguir no sentido inverso da definição, isto é, sabendo que $\sqrt{x}$ é uma função contínua, podemos concluir que se $x_n \geq 0$ é uma sequência que converge a um número a, então a sequência $\sqrt{x_n}$ converge a $\sqrt{a}$

Como exemplo de aplicação do item (ii) do teorema acima, vamos mostrar que se f é uma função contínua, então a função $|f|$, que a cada número x do domínio de f associa o número $|f(a;)|$, é também contínua.

De fato, $|f|$ é a função composta $g \circ f$, onde $g(x) = |x|$. Logo, como estamos supondo que f é uma função contínua, pelo item (ii) do teorema, é suficiente provarmos que g é contínua. Para isso, se a é um número real, seja x_n uma sequência tal que $x_n \to a$. Então, segue-se da desigualdade triangular que

$$|x_n| \leq |x_n - a| + |a| \quad e, \quad |a| \leq |x_n - a| + |x_n|,$$

donde

$$-|x_n - a| \leq |x_n| - |a| \leq |x_n - a|.$$

Como $|x_n - a| \to 0$ podemos concluir que $(|x_n| - |a|) \to 0$ e, portanto, $|x_n| \to |a|$. Ou seja, acabamos de provar que se $x_n \to a$, então $g(x_n) \to g(a)$. Como a pode ser qualquer número real, provamos que a função $g(x) = |x|$ é contínua.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Mostre que uma função constante, $f(x) = C$, é contínua.
2. Mostre que a função identidade, $f(x) = x$, é contínua.
3. Considere

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 1, \\ x & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

   (a) Calcule $f(1)$.
   (b) Calcule lim $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ com $a_n = 1 - \frac{1}{n}$.
   (c) f é contínua em $x = 1$?
   (d) Faça um esboço do gráfico desta função.
4. Considere

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{se } x \neq 3, \\ 7 & \text{se } x = 3. \end{cases}$$

   (a) Calcule $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ com $a_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$.
   (b) f é contínua em $x = 3$?
5. Seja f a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   Decida qual das seguintes afirmações é verdadeira.
   (a) A função f não é contínua em $x = 0$, pois

$$f\left(\frac{1}{2\pi n}\right) = \cos(2\pi n) \to 1 \text{ e } f\left(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right) = \cos(2\pi n + \tfrac{\pi}{2}) \to 0.$$

(b) A função f é contínua em $x = 0$, pois, se $x_n \to 0$, então $f(x_n) \to 0$, já que $f(0) = 0$ e se $x_n \neq 0$, $\cos(\frac{1}{x^n})$ é uma sequência limitada.

6. Na proposição abaixo f é uma função cujo domínio é o intervalo $[-1, 1]$ e x_n é uma sequência. Decida se a proposição é falsa ou verdadeira:

$$\text{Se } f(0) = 1 \text{ e } x_n \to 0, \text{ então } f(x_n) \to 1.$$

7. Na proposição abaixo f é uma função cujo domínio é o intervalo $[-1,1]$. Decida se a proposição é falsa ou é verdadeira:

Se $f\left(\frac{1}{n}\right) \to 5$, então $f(0) = 5$.

8. Seja f a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 1 & \text{se } x \neq 2, \\ -1 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

(a) Decida se a seguinte proposição é verdadeira ou é falsa:
Se $x_n \to 2$ então $f(x_n) \to f(2)$.

(b) f é contínua em $x = 2$?

9. Em cada item abaixo decida se a função dada é contínua ou não, justificando sua resposta:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x > 1, \\ 3x - 1 & \text{se } x < 1. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \geq 1, \\ 3x - 1 & \text{se } x < 1. \end{cases}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 - 1} & \text{se } x > 1, \\ 3x - 1 & \text{se } x < 1. \end{cases}$

10. Decida se as funções abaixo são contínuas:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 + \sqrt{x^2+1}}{1-x}$.

(b) $g(x) = \dfrac{1}{1-x^2} + x$.

11. Seja $a_n \to 1$. Em cada item abaixo, use o Teorema 1.1 do Capítulo 5 para calcular o limite indicado:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + \sqrt{3a_n^2 - 1})$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \sqrt{a_n^3+1}\right)^3$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{a_n} + \sqrt{2-a_n^3}}$.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n+1)\sqrt{2a_n^3 - 1}$.

12. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(\dfrac{\cos^3 \ n}{n^3} - 1 \right) \sqrt{\dfrac{\cos \ n}{n} + 2} \right]$.

13. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{x_n} - 2x_n^3 + 3}{\sqrt{x_n^2+3} + 2x_n}$, onde $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

14. Assuma que a função g(x) = cos x é contínua:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos \frac{\pi}{2n} = 1$?

(b) A função $f(x) = \sqrt{\cos x}$ é contínua?

O teorema do valor intermediário

O teorema que damos a seguir trata de uma propriedade muito importante das funções contínuas. Como ocorre com o Teorema 3.3 do Capítulo 3, que garante que sequências monótonas e limitadas são convergentes, esse teorema decorre de propriedades estruturais dos números reais que não são tratadas num curso de cálculo. Assim, sua demonstração não pode ser feita apenas com os recursos que já desenvolvemos.

Teorema do Valor Intermediário 1.2 (TVI): *Se f é uma função contínua num intervalo $[a, b]$ e $f(a) < c < f(b)$ (ou $f(b) < c < f(a)$), então existe um número $x_0 \in (a,$*

b) tal que $f(x_0) = c$.

Observe que este teorema nos diz que se f é uma função contínua num intervalo $[a, b]$, então qualquer número entre os valores $f(a)$ e $f(b)$ pertence à imagem do intervalo $[a,b]$ por f. Isto é, se c é um número entre $f(a)$ e $f(b)$,

$$f(a) < c < f(b) \quad \text{ou} \quad f(b) < c < f(a),$$

então a equação

$$f(x) = c$$

possui pelo menos uma solução no intervalo $[a, b]$: o número x_0 dado pelo teorema.

Vejamos um exemplo dessa aplicação do TVI. Suponhamos que queremos saber se a equação

$$x^3 - x = 1$$

tem solução. Primeiro observamos que, considerando f a função

$$f(x) = x^3 - x,$$

estamos querendo saber se a equação

$$f(x) = 1$$

tem solução. Como f é contínua (é um polinômio) e seu domínio é $\mathbb{R}$, sabemos que f é contínua em qualquer intervalo $[a, b]$. Assim, pelo TVI, para garantirmos que essa equação tem solução, é suficiente encontrarmos números a e b com a propriedade do número 1 estar entre $f(a)$ e $f(b)$. De fato, calculando $f(0)$ e $f(2)$, obtemos

$$f(0) = 0 \text{ e } f(2) = 6.$$

Como $f(0) < 1 < f(2)$ e f é contínua no intervalo $[0,2]$, podemos usar o TVI com a = 0, $b = 2$ *e* $c = 1$, para concluir que existe $x_0 \in [0, 2]$ tal que $f(x_0) = 1$, isto é, a equação

$$x^3 - x = 1$$

tem pelo menos uma solução no intervalo $[0,2]$.

O Teorema do Valor Intermediário pode também ser enunciado numa outra versão que damos abaixo. A conveniência de conhecermos as duas versões é que muitas vezes uma delas se aplica mais diretamente que a outra.

Teorema 1.2*: *Se I é um intervalo contido no domínio de uma função contínua f, então sua imagem $f(I)$ também é um intervalo.*

É o TVI que nos garante, por exemplo, que o gráfico de $x \rightarrow x^2$ *é* o que chamamos de uma curva contínua, isto é, uma curva que pode ser traçada sem que tiremos o lápis do papel.

Em geral, se I é um intervalo contido no domínio de uma função contínua f, então o gráfico de f para $x \in I$ é uma curva contínua. Aqui é importante salientarmos que a propriedade de que I é um intervalo é necessária para garantir o resultado. Vejamos isso através de um exemplo:

Exemplo: Consideremos a função definida pela expressão $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$.

Sabemos, pelo Teorema 1.1, que f é contínua, já que é a composição de duas funções contínuas:

$$x \longmapsto x^3 - x \quad \text{e} \quad x \longmapsto \sqrt{x},$$

isto é, $f(x) = g(h(x))$, onde $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = x^3 - x$. Pela convenção que estabelecemos, o domínio de f é o conjunto de números reais para os quais a regra de associação faz sentido, ou seja, é o conjunto dos números reais tais que $x^3 - x \geq 0$. Para determinarmos esse conjunto devemos resolver esta inequação. Temos que

$$x^3 - x = x(x^2 - 1),$$

logo, se $x^3 - x \geq 0$, então

$$x(x^2 \geq 1) \geq 0,$$

o que nos diz que

$$x \geq 0 \qquad e \qquad x^2 - 1 \geq 0,$$

ou

$$x \leq 0 \qquad e \qquad x^2 - 1 \leq 0.$$

Como já sabemos que

$$x^2 - 1 \leq 0 \quad \text{para} \quad -1 \leq x \leq 1$$

e que

$$x^2 - 1 \geq 0 \quad \text{para} \quad x \leq -1 \quad \text{ou} \quad x \geq 1,$$

obtemos que

$$\text{se} \quad x^3 - x \geq 0, \quad \text{então} \quad x \geq 1 \quad \text{ou} \quad -1 \leq x \leq 0.$$

Isto é, o domínio de f é a união de dois intervalos disjuntos:

$$\text{dom}(f) = [-1, 0] \cup [1, \infty).$$

Logo, não podemos esperar que o gráfico de f seja uma curva que pode ser traçada sem que se tire o lápis do papel. De fato, se $0 < a < 1$, nenhum ponto da reta vertical $x = a$ pertence ao gráfico de f, já que nesse caso a não está no domínio de f.

Informalmente, poderíamos dizer que o fato de o gráfico de f ser constituído de *dois pedaços* disjuntos não decorre de uma deficiência na continuidade de f, isto é, não decorre de uma descontinuidade da função (já sabemos que f é contínua), mas sim reflete o fato de que o domínio de f já tem esse *problema*, isto é, é constituído de dois pedaços disjuntos.

Na Figura 1.1 é dado o gráfico de f no conjunto $[-1, 0] \cup [1, 2]$.

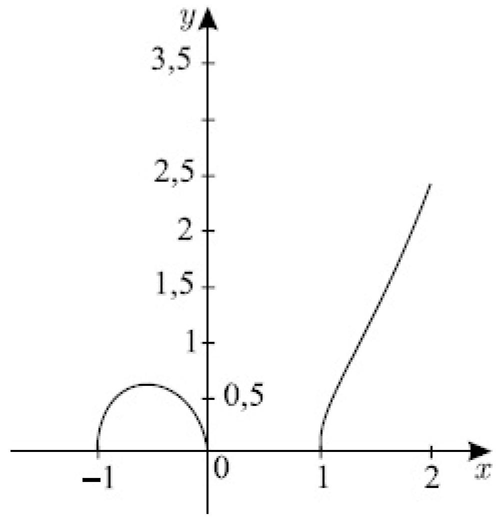


Figura 1.1

Antes de apresentarmos uma das aplicações práticas do TVI, o método da bisseção, que será tratado na próxima seção, enunciamos uma outra propriedade importante das funções contínuas. Como no caso do TVI, a demonstração dessa propriedade requer recursos que não são tratados num curso de cálculo.

Dizemos que uma função f é *limitada* se existe um número real M tal que $|f(x)| \leq M$, para qualquer número x no domínio de f.

O exemplo mais simples de uma função limitada é uma função constante. Exemplos não triviais de funções definidas no conjunto de todos os números reais que são limitadas são as funções seno e cosseno, que sabemos só assumirem valores entre -1 e 1, isto é, temos que

$$|\operatorname{sen} x| \leq 1 \quad \text{e} \quad |\cos x| \leq 1$$

para qualquer número real x.

Por outro lado, a função $f(x) = \frac{1}{x}$, para $x \neq 0$, é exemplo de uma função que **não** é limitada, já que f assume valores arbitrariamente grandes: de fato, dado qualquer número real M, se tomamos $0 < x < \frac{1}{M}$, então $|f(x)| = \frac{1}{x} > M$.

Como vimos, o TVI garante que a imagem de uma função contínua cujo domínio é um intervalo é também um intervalo. O teorema que enunciamos a seguir garante que a imagem de uma função contínua cujo domínio é um intervalo fechado também é um intervalo fechado.

Teorema 1.3: *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é contínua, então seu conjunto imagem é um intervalo fechado. Em particular,* f *é limitada.*

Aqui é importante salientarmos que as duas condições da hipótese, isto é, que se trata de uma função contínua e que seu domínio é um intervalo fechado *[a, b]*, são necessárias para que possamos concluir que a função é limitada.

Por exemplo, a função $g : (0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{x}$ é contínua mas não é limitada. Neste exemplo o que está faltando é a condição do domínio ser um intervalo fechado do tipo $[a,b]$.

Já a função $h : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 0, \end{cases}$$

que não é limitada, atende à condição sobre o domínio (que é o intervalo $[-1, 1]$), mas não é contínua, pois não é contínua em $x_0 = 0$, já que para sequências $x_n \to 0$, com $x_n > 0$, tem-se que $h(x_n) \to \infty$.

O método da bisseção

Muito frequentemente, ao resolvermos um problema modelado pela matemática, nos vemos frente à necessidade de resolver equações do tipo $f(x) = 0$.

Nesta situação nos deparamos com dois tipos de limitação: uma é que poucas equações deste tipo admitem fórmulas que forneçam suas soluções exatas, como é o caso quando se trata de uma equação do segundo grau; a outra é a que já temos discutido, que é o fato de que a maioria dos números reais só pode ser acessada por meio de aproximações.

Por exemplo, sabemos que as soluções exatas da equação $x^2 - 2 = 0$ são os números $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ mas sabemos também que $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ são apenas símbolos que representam os número irracionais que são as soluções dessa equação. Na verdade o melhor que podemos fazer, do ponto de vista prático, é calcular aproximações tão boas quanto desejarmos destes números, isto é, o melhor que podemos fazer é *resolver numericamente a equação*.

Em geral, resolver numericamente uma equação $f(x) = 0$ consiste em se obter aproximações arbitrariamente boas de um número real que é uma solução da equação. Ou seja, consiste na construção de uma sequência de números que converge a um número real α que satisfaz $f(\alpha) = 0$.

O método da bisseção é um processo para se resolver numericamente equações do tipo $f(x) = 0$, onde f é uma função contínua num intervalo. Esse método é uma aplicação do Teorema do Valor Intermediário.

Vejamos primeiro um exemplo, a equação $x^3 + x - 1 = 0$, que é do tipo acima com $f(x) = x^3 + x - 1$.

Temos que

$$f(0) = -1 \quad \text{e} \quad f(1) = 1,$$

e, portanto,

$$f(0) < 0 < f(1):$$

Como f é uma função contínua (logo contínua no intervalo [0,1]), o TVI garante que existe um número $\alpha \in (0,1)$, tal que $f(\alpha) = 0$, isto é, α é uma solução da equação $x^3 + x - 1 = 0$, como pode ser visualizado na Figura 1.2.

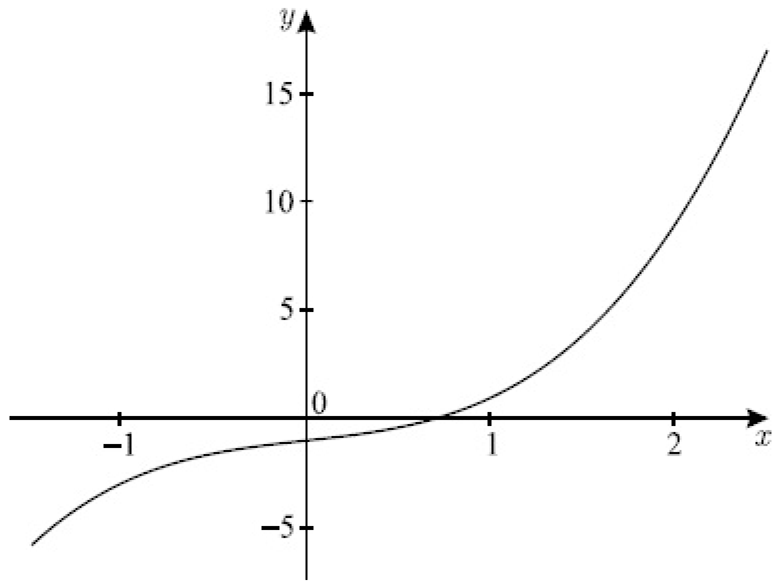


Figura 1.2

Como $\alpha \in (0,1)$ e $\frac{1}{2}$ é o ponto médio do intervalo (0,1), temos que

$$|\frac{1}{2} - \alpha| < \frac{1}{2},$$

e, portanto $x_1 = \frac{1}{2}$ é uma aproximação de α com erro inferior a $\frac{1}{2}$.

Agora, para calcularmos uma aproximação melhor, observamos que como $\alpha \in (0,1)$, então $\alpha \in (0\ \frac{1}{2}]$ ou $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$, e, para decidirmos qual é o caso, basta calcularmos $f(\frac{1}{2})$ e usarmos novamente o TVI.

De fato, como

$$f(\frac{1}{2}) < 0 < f(1),$$

podemos usar o TVI para concluir que $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ e, portanto, o ponto médio desse intervalo, que $x_2 = \frac{3}{4}$, é uma aproximação de α com erro menor do que $\frac{1}{2}|\frac{1}{2} - 1| = \frac{1}{4}$.

O princípio básico do método da bisseção é que podemos repetir esse procedimento, sendo que a cada passo sempre obtemos uma aproximação cuja estimativa para o erro, podemos garantir, é menor que a estimativa de erro da etapa anterior dividido por 2.

Essa estimativa para o erro decorre do fato geral de que se c é o ponto médio de um intervalo (a, b), então a distância entre c e qualquer ponto x do intervalo é menor que o tamanho do intervalo dividido por 2, isto é, $|x - c| < \frac{|b-a|}{2}$, qualquer que seja $x \in (a, b)$.

Por exemplo, calculando f em $x_2 = \frac{3}{4}$, obtemos que $f(\frac{3}{4}) > 0$ e, como já sabemos que $f(\frac{1}{2}) < 0$, concluímos que

$$f(\frac{1}{2}) < 0 < f(\frac{3}{4}),$$

donde, pelo TVI, temos que $\alpha \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Então $x_3 = \frac{5}{8}$, que é o ponto médio do intervalo $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, é uma aproximação para α com erro inferior a $\frac{1}{2}(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Em geral, se sabemos que f é contínua num intervalo $[a, b]$ e que f assume valores positivos e negativos, sabemos também, pelo TVI, que existe uma solução a da equação $f(x) = 0$ no intervalo (a, b).

Podemos, então, usar repetidamente o TVI e o processo de tomar o ponto médio de cada subintervalo que contém α, para obter uma sequência x_n de aproximações de α.

Como a cada etapa, a nova estimativa para o erro, como dissemos acima, é a estimativa da etapa anterior dividido por 2, e começamos com o intervalo (a, b), que tem comprimento $|a - b|$, vemos que as aproximações x_n satisfazem

$$|x_n - \alpha| < \frac{|a - b|}{2^n}.$$

Como a sequência $\frac{1}{2^n} \to 0 \to 0$, temos que $x_n \to \alpha$.

O processo de resolver numericamente uma equação $f(x) = 0$ pelo método da bisseção se inicia pela busca de números a e b tais que a função seja contínua no intervalo [a, b] com

$$f(a) < 0 < f(b) \quad \text{ou} \quad f(a) > 0 > f(b)$$

(o importante é que f *mude de sinal*). Essa busca pode ser feita a partir de informações teóricas sobre o comportamento da função, ou a partir de visualizações do gráfico da função usando-se recursos gráficos no computador.

As estimativas acima nos permitem determinar, a partir do comprimento do intervalo [a, b] e da precisão desejada, o número de etapas necessárias: se queremos um erro menor que 10^{-k}, devemos tomar n tal que

$$\frac{|a-b|}{2^n} \leq 10^{-k},$$

ou seja, queremos n tal que $2^n \geq 10^k |a - b|$.

Por exemplo, se queremos uma aproximação para a solução da equação $x^3 + x - 1 = 0$ que sabemos pertencer ao intervalo [0,1] com erro inferior a 10^{-2}, é suficiente calcularmos as sete primeiras aproximações, já que $2^7 > 10^2$ e, nesse caso, $a = 0$ e $b = 1$ o que dá $|a - b| = 1$ e, portanto, x_7 é a aproximação desejada.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Assuma que a função $g(x)$ = cós x é contínua:
   (a) A equação cos x = 0, 9999999999 tem solução?
   (b) As equação cós $x = 1 + 10^{-n}$, $n \geq 1$, têm solução?
   (c) A equação $\frac{1}{x}$ – cos x = 0 tem solução?
2. Se $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, 1 pertence à imagem de f?
3. Qual é o erro da seguinte “demonstração”?

   Demonstração de que a equação $\frac{1}{x} = 0$ tem solução: a função $f(x)$

$= \frac{1}{x}$ é contínua e, como $f(-1) = -1 < 0 < 1 = f(1)$, podemos usar o Teorema do Valor Intermediário para concluir que $f(a) = 0$ para algum número $-1 < a < 1$.

4. Qual é o erro da seguinte "demonstração"?

   Demonstração de que se $f(x) = f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x > 1, \\ -x^2 - 1 & \text{se } x \leq 1, \end{cases}$ então a equação $f(x) = 0$ tem solução: como $(x^2 - 1)$ e $(-x^2 - 1)$ são funções contínuas e, além disso $f(0) = -1 < 0 < 3 = f(2)$, podemos usar o Teorema do Valor Intermediário para concluir que $f(a) = 0$ para algum número $0 < a < 2$.

5. A função $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ tem uma raiz no intervalo [1,2]. Dê aproximações dessa raiz com erro menor que:

   (a) $\frac{1}{8}$.

   (b) $\frac{1}{10}$.

6. Seja $f : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Sabendo que $f(0,1)f(0,4) < 0$, em quantas etapas do método da bisseção podemos obter uma aproximação para r com erro inferior a 10^{-3}?

7. Seja $f(x) = x^2 - 10$.

   (a) Mostre que a equação $f(x) = 0$ tem solução no intervalo [2, 4].

   (b) Utilizando o intervalo [2,4] escreva os três primeiros passos do método da bisseção para encontrar uma aproximação para $\sqrt{10}$.

   (c) Qual o erro máximo cometido na aproximação obtida no item b)?

   (d) Partindo do intervalo [2, 4] quantos passos do método da bisseção seriam necessários para se obter uma aproximação para $\sqrt{10}$ com erro menor do que 0,1?

8. Seja $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1, 2$.

   (a) A equação $f(x) = 0$ tem solução no intervalo [1; 1, 2] ?

   (b) Se for o caso, calcule uma aproximação para uma raiz dessa equação com erro menor que 0, 03.

   (c) Quantas etapas do método da bisseção seriam necessários para se obter uma aproximação com erro menor que 10^{-3}, a partir dos dados acima?

9. Verifique que a equação abaixo tem uma solução r no intervalo [1,2] e

calcule uma aproximação para r com erro inferior a $\frac{1}{4}$.

$$x^3 - x^2 + x - \frac{3}{2} = 0$$

10. Calcule o valor da função $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$ em $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$.
    (a) Quantas soluções no intervalo $[-1,3]$ tem a equação $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$?
    (b) Calcule uma aproximação da maior delas com erro menor que $\frac{1}{8}$ partindo do intervalo $[-1,3]$.
11. Seja $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$:
    (a) Calcule uma aproximação do zero de f que pertence ao intervalo $[-1, 0]$ com erro menor que 0,1.
    (b) Quantas etapas do método da bisseção seriam necessárias para se obter uma aproximação com erro menor que $\frac{1}{100}$?

2. Limite de funções reais

Uma leitura que podemos fazer do fato de que uma função é contínua num número a do seu domínio é que isso nos informa qual é o comportamento da função em x próximo de a. De fato, sabemos que se f é contínua em a, então se x está suficientemente próximo de a, o valor $f(x)$ está próximo do número $f(a)$. Mais ainda, voltando à definição de continuidade, vemos que foi possível conhecer esse comportamento estudando as sequências imagem, $f(x_n)$ de sequências arbitrárias com a propriedade de convergir ao número a.

Esse tipo de informação, isto é, saber como uma função se comporta perto de um determinado número, é muito importante para 0 estudo da função (e ao estudarmos 0 conceito de derivada teremos exemplos muito claros desse fato).

Por exemplo, consideremos a função $f(x) = x$ sen $(\frac{1}{x})$. Essa função não está definida em $x = 0$, pois não podemos efetuar divisões por 0, mas está definida em qualquer outro número real. Em particular, faz sentido perguntarmos qual é seu comportamento próximo de $x = 0$.

Vemos que, para respondermos essa pergunta, podemos proceder de maneira análoga à usada para estudar o comportamento de uma função em um ponto de seu domínio. Só que agora, como $x = 0$ não está no domínio de

f, devemos considerar apenas sequências $x_n \to 0$ com a restrição extra de que $x_n \neq 0$.

Seja então x_n uma tal sequência e $y_n = f(x_n)$ a sequência imagem. Isto é,

$$y_n = x_n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right).$$

Agora basta observarmos que y_n é o produto da sequência x_n com a sequência $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right)$, que é limitada. Como $x_n \to 0$, o Teorema 3.6 do Capítulo 3 garante que y_n também converge a zero.

Ou seja, acabamos de provar que se $x_n \to 0$, com $x_n \neq 0$, então a sequência imagem $f(x_n) \to 0$. Em outras palavras, podemos dizer que se $x \neq 0$ está suficientemente próximo de 0, então $f(x)$ também está próximo de 0.

Esse comportamento é descrito dizendo que

o limite de $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ *quando* x *tende a* 0 *é o número* 0.

Em geral, se $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função *e* x_0 *é* um número real tal que f está definida em $I - \{x_0\}$, onde I é algum intervalo aberto contendo x_0, definimos:

Definição: Dizemos que o *limite de* $f(x)$ *quando* x *tende a* x_0 é um número real L se, para qualquer sequência x_n tal que:

(i) x_n pertence a I e $x_n \neq x_0$ para todo n,

(ii) x_n converge a x_0,

tem-se que a sequência imagem, $y_n = f(x_n)$, converge a L.

Notação: Para dizermos que o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 é L, usamos a notação

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Com essa definição, o comportamento da função $f(x) = x$ sem $\left(\frac{1}{x}\right)$ para x próximo de $x_0 = 0$ é descrito por

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Se existe algum número real L tal que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L,$$

dizemos que existe o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 ou, equivalentemente, que *f tem limite em $x = x_0$*.

É importante ficar claro que a condição

f está definida em $I - \{x_0\}$, onde I é algum intervalo aberto contendo x_0 nos diz, por um lado, que

para f ter limite em x_0 não é necessário que f esteja definida em x_0

(isto é, x_0 pode não pertencer ao domínio de f), e, por outro lado, que

no caso em que x_0 pertence ao domínio de f, o valor $f(x_0)$ não interfere no limite de f em x_0.

De fato, em qualquer caso, só interessam os valores $f(x)$ para x próximo e diferente de x_0.

A primeira consequência imediata da definição de limite que devemos destacar é o teorema abaixo, que dá a caracterização da continuidade de uma função em um ponto de seu domínio em termos de limites:

Teorema 2.1: *Uma função f é contínua em um ponto a de seu domínio se, e somente se, o $\lim_{x\to a} f(x)$ existe e coincide com o valor $f(a)$, isto é,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Como esse teorema é do tipo *se e somente se* (⇔), podemos utilizá-lo nos dois sentidos da implicação. O sentido ⇒ nos diz que *se sabemos que f é contínua em a, então podemos afirmar que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

isto é, podemos usar a informação de que f é contínua em $x = a$ para calcularmos o $\lim_{x\to a} f(x)$.

Mais precisamente, como podemos saber de forma indireta que certas funções são contínuas (usando o Teorema 1.1), podemos usar essa informação para calcular limites. Por exemplo, para calcularmos

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{x^2 - 1}$$

observamos que

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

é contínua em $x = 2$ (já que é uma composição de funções contínuas e $x = 2$ pertence ao seu domínio) e, portanto, pelo teorema acima, no sentido $\Rightarrow$, temos que

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{x^2 - 1} = \lim_{x\to 2} g(x) = g(2) = \sqrt{3}.$$

Podemos também usar esse sentido da implicação para concluir que uma dada função f não é contínua num número a de seu domínio quando existe o $\lim_{x\to a} f(x)$, isto é,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

mas $L \neq f(a)$. Por exemplo, se

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} & \text{se} \quad x \neq 2, \\ 1 & \text{se} \quad x = 2, \end{cases}$$

então,

$$\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2} \sqrt{x^2 - 1} = \lim_{x\to 2} g(x),$$

já que para $x \neq 2$ (que é o que nos interessa para calcularmos $\lim_{x\to 2} h(x)$ temos que $h(x) = \sqrt{x^2-1} = g(x)$ onde g é a função do exemplo acima. Como já sabemos que

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{x^2-1} = g(2) = \sqrt{3},$$

podemos concluir que

$$\lim_{x\to 2} h(x) = \sqrt{3} \neq 1 = h(2),$$

e, portanto, que h não é contínua em $x = 2$.

Por outro lado, o sentido ⇐ do teorema nos diz que

se sabemos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e verificamos que $L = f(a)$, então podemos concluir que f é contínua em $x = a$.

Por exemplo, consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - x + 1 & \text{se} \quad x \neq -1, \\ c & \text{se} \quad x = -1, \end{cases}$$

e suponhamos que queremos escolher um valor para c de maneira que f seja contínua em $x = -1$. Para utilizar o teorema (no sentido ⇐), devemos calcular o limite de f em $x = -1$. Para isso, primeiro vemos que

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} (x^4 - x + 1),$$

já que $f(x) = x^4 - x + 1$, para $x; \neq -1$. Em seguida, usamos o fato de que a função

$$u(x) = x^4 - x + 1, \text{ para } x \in \mathbb{R},$$

é contínua em $x = -1$, com $u(-1) = 3$ e, portanto, podemos usar o teorema no sentido ⇒ para obter que

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} u(x) = u(-1) = 3.$$

Como $c = f(-1)$, se escolhemos $c = 3$, temos que

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 3 = f(-1),$$

e, portanto, podemos usar o teorema (no sentido $\Leftarrow$) para concluir que f é contínua em $x = -1$.

Em resumo, se a pertence ao domínio de f e

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

o teorema acima garante que:

> *se $L = f(a)$, então f é contínua em $x = a$ e, se $L \neq f(a)$, então f não é contínua em $x = a$.*

Exemplos

1. Se $x \neq 1$, então o ponto do plano de coordenadas (x,x^3) é diferente do ponto $(1,1)$, e, portanto, esses dois pontos determinam uma reta no plano que não é vertical (essa reta é chamada uma reta secante ao gráfico de $f(x) = x^3$ em $x = 1$). Seja $s(x)$ o coeficiente angular (ou inclinação) dessa reta. Temos então que

$$s(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

é uma função real cujo domínio é o conjunto de números reais diferentes de 1.

> Como $s(x)$ está definida para números arbitrariamente próximos de 1, faz sentido nos perguntarmos qual é o comportamento de s próximo de $x_0 = 1$. Por exemplo, podemos nos perguntar se $s(x)$ tem limite em $x_0 = 1$. Para respondermos a essa pergunta, devemos considerar sequências x_n convergentes a 1, mas com $x_n \neq 1$, e estudar o comportamento de $s(x_n)$. Mas, como $x_n \to 1$, vemos que o numerador $x_n - 1$ converge a 0 e, portanto, não podemos usar nenhum teorema que conhecemos.
>
> Por outro lado, vemos que podemos reescrever $s(x)$ na forma

$$s(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1},$$

isto é, $s(x) = x^2 + x + 1$, para $x \neq 1$, e, portanto,

$$\lim_{x\to 1} s(x) = \lim_{x\to 1} x^2 + x + 1 = 3,$$

já que $f(x) = x^2 + x + 1$ é contínua (pois é um polinômio), e, portanto, $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 3$.

2. Vamos dar o exemplo de uma função que não tem limite em $x_0 = 0$. Esse tipo de exemplo é interessante pois através dele podemos perceber com clareza o próprio conceito de limite.

Seja $f(x) = sen\ (1/x)$. Vamos ver que nenhum número real L pode ser o limite de $f(x)$ quando x tende a 0. De fato, se tomamos a sequência $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ temos que a sequência imagem é

$$y_n = \text{sen}\ (2\pi n) = 0,$$

ou seja, y_n é a sequência constante igual a 0 e, portanto, converge a 0. Por outro lado, se tomamos $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$, então

$$\frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

donde

$$y_n = sen\,(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = sen\,\frac{\pi}{2} = 1,$$

isto é, a sequência imagem é constante igual a 1 e portanto converge a 1.

A conclusão que devemos tirar desses fatos é que, nesse exemplo, o comportamento da sequência imagem depende de qual sequência x_n convergindo a 0 estamos considerando. Esse fato nos garante que nenhum número pode ser o limite de $f(x)$ quando x tende a 0, já que, pela definição, para que o limite de uma função f em x_0 seja um número real L é necessário que as sequências imagem $f(x_n)$ tenham sempre o mesmo comportamento (convergir ao número L), independente de qual seja a sequência $x_n \to x_0$, com $x_n \neq x_0$.

Em geral, quando nenhum número real pode ser o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0, dizemos que não existe o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0, ou que f não tem limite em x_0.

Propriedades de limites

As propriedades que já vimos com respeito a limites de sequências se transferem de forma imediata a limites de funções:

Teorema 2.2: *Suponha que* $\lim_{x \to x_o} f(x) = L$ e $\lim_{x \to x_o} g(x) = M$. *Então,*

(i) $\lim_{x \to x_o} f(x) + g(x) = L + M$

(ii) $\lim_{x \to x_o} f(x)g(x) = LM$

(iii) *se* $M \neq 0$, $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.

Em relação à composição de funções, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.3: *Se* $\lim_{x \to x_o} f(x) = a$ *e* g *é uma função contínua em* $x = a$, *então*

$$\lim_{x \to x_o} g(f(x)) = g(a).$$

Demonstração: Seja x_n uma sequência tal que $x_n \to x_0$, com $x_n \neq x_0$. Como $\lim_{x \to x_o} f(x) = a$, temos que a sequência $y_n = f(x_n)$ converge ao número a. Por outro lado, como g é contínua em $x = a$, e $y_n \to a$, sabemos que $g(y_n) \to g(a)$. Isto é, mostramos que a sequência $g(f(x_n))$ converge sempre ao número $g(a)$, para qualquer sequência $x_n \to x_0$, com $x_n \neq x_0$. Pela definição de limite podemos concluir que $\lim_{x \to x_o} g(f(x)) = g(a)$. $\square$

Os teoremas que damos a seguir também são versões para funções de teoremas que vimos para sequências.

Teorema 2.4*: *Se f, g e h são funções tais que* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, *para todo número x de um intervalo aberto contendo o número* x_0 *e*

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L = \lim_{x \to x_o} h(x),$$

então $\lim_{x \to x_o} g(x) = L.$

Seja x_0 um número real e f uma função que está definida em $I - \{x_0\}$, onde I é algum intervalo aberto contendo x_0, então:

Teorema 2.5*: *Se f é uma função limitada e* $\lim_{x \to x_o} g(x) = 0$, *então* $\lim_{x \to x_o} f(x)g(x) = 0$

Usando esse teorema podemos, por exemplo, garantir que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

De fato, sabemos que a função $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ é limitada e que $\lim_{x \to 0} x^2 = 0.$.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x^3 - 2x + 2 & \text{se } x \neq 1, \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Decida qual das afirmações abaixo é correta:

(a) $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$.

(b) $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.

(c) f não tem limite em $x = 1$.

2. Dê um valor para a de tal forma que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} a^2x^2 + 2ax + 1 & \text{se} \quad x \neq -1, \\ 0 & \text{se} \quad x = -1, \end{cases}$$

seja contínua.

3. Calcule $\lim_{x\to 0} \sqrt{1 + x^2 \text{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)}$.

4. Decida qual das afirmações abaixo é verdadeira:

(a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 0$ pois $\lim_{x\to 2}(x^2-4) = 0$.

(b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 1$ pois $\lim_{x\to 2}(x^2-4) = 0$ e $\lim_{x\to 2}(x-2) = 0$.

(c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$.

5. Calcule os limites:

(a) $\lim_{x\to 3}(3x^5 + 7x - 1)$.

(b) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 7x}{x-1}$.

(c) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 3x - 10}{2x+1}$.

(d) $\lim_{x\to -7} \dfrac{x^2 + 6x - 7}{2x+14}$.

6. Decida qual das afirmações abaixo é verdadeira:

(a) Não existe $\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, pois a função $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ não está definida para $x = 0$.

(b) $\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)x = 0$, pois $\lim_{x\to 0} x = 0$ e $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ é uma função limitada.

7. Calcule os limites abaixo:

   (a) $\lim_{x\to 2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

   (b) $\lim_{x\to 2} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

   (c) $\lim_{x\to 2} (x-2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

   (d) $\lim_{x\to 2} (x-2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

8. * Para a função f do exemplo 2 da seção 2, arranje uma sequência x_n convergindo a 0, tal que a sequência imagem $y_n = f(x_n)$ não é convergente.

9. * Demonstre o Teorema 2.2 usando as propriedades equivalentes para limites de sequências do Teorema 3.1 do Capítulo 3.

3. Limites laterais

Do que já foi visto até agora, podemos concluir que informações sobre a existência de limites ou continuidade de uma função são importantes para o estudo da função. Por outro lado, nenhum dos resultados que vimos até agora facilita a obtenção dessas informações para funções cuja regra de associação é dada por mais de uma expressão, como, por exemplo, a função

$$h(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x \geq 0, \\ 1-x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

De fato, para sabermos se essa função possui ou não limite em $x_0 = 0$, devemos, pela definição, considerar *qualquer* sequência $x_n \to 0$, com $x_n \neq 0$ para cada n, e analisar o comportamento da respectiva sequência imagem, $y_n = h(x_n)$. No caso em que x_n é tal que $x_n > 0$, para cada n, isso é fácil, pois

$$y_n = h(x_n) = x_n^2 + 1 \to 1.$$

Analogamente, se x_n é tal que $x_n < 0$, para cada n, temos que

$$y_n = h(x_n) = 1 - x_n \to 1.$$

O problema aparece quando consideramos sequências x_n que convergem a zero assumindo infinitos valores positivos e infinitos valores negativos: nada do que foi visto até agora nos dá recursos para tratar genericamente esse caso. No entanto (e felizmente), pode-se demonstrar que basta conhecermos genericamente o comportamento dos dois primeiros tipos de sequências; no exemplo acima, como a sequência imagem $y_n = h(x_n)$ tem sempre o mesmo comportamento, (isto é, converge a 1) quer para as sequências x_n do primeiro tipo ($x_n > 0$ para cada n) quer para as do segundo tipo ($x_n < 0$ para cada n), podemos afirmar que $h(x_n)$ também converge a 1, no caso das demais sequências ($x_n \neq 0$), ou seja, podemos concluir que

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 1 = h(0)$$

e, em particular, h é contínua em $x = 0$.

Para enunciarmos esse resultado, introduzimos o conceito de *limite lateral*. Se a é um número real e f uma função definida num intervalo $(a, a + \delta)$, onde δ é algum número positivo, definimos:

> **Definição:** Dizemos que o *limite lateral de f(x) quando x tende ao número a pela direita* (ou, simplesmente, o *limite lateral à direita de f em x = a*) é um número real D, se para qualquer sequência x_n tal que $x_n \to a$, com $x_n > a$ para todo n, tem-se que $y_n = f(x_n) \to D$.

Para dizermos que o limite lateral à direita de f em $x = a$ é D, usamos a notação

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = D.$$

A notação $x \to a^+$ expressa a condição de que x tende ao número a por números maiores do que a.

Analogamente, definimos *limite lateral à esquerda:* se a é um número real e f uma função definida num intervalo $(a - \delta, a)$, onde δ é algum número positivo, definimos:

> **Definição:** Dizemos que o *limite lateral de f(x) quando x tende ao número a pela esquerda* (ou, simplesmente, o *limite lateral à esquerda de f em x = a*) é um número real E, se para qualquer sequência x_n tal que $x_n \to a$, com $x_n < a$ para todo n, tem-se

que $y_n = f(x_n) \to E$.

Nesse caso dizemos também que o *limite lateral à esquerda de f em* $x = a$ é E e usamos a notação

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = E.$$

Aqui $x \to a^-$ significa que x tende ao número a por números menores do que a.

Com essa terminologia, podemos dizer, por exemplo, que:

(1) $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$ e, como $f(x) = \sqrt{x}$ não está definida para número negativos, não faz sentido falarmos em seu limite lateral à esquerda em $x = 0$.

(2) $\lim\limits_{x \to -1^-} \sqrt{x^2 - 1} = 0 = \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x^2 - 1}.$

É importante destacarmos que

todas as propriedades que já enunciamos para limites de funções também são válidas para limites laterais.

Assim, quando necessário, nos referiremos aos teoremas dados para limites de funções para justificarmos propriedades de limites laterais, convencionando que, nesse caso, devemos substituir nos enunciados $x \to x_0$ por $x \to x_0^+$ ou por $x \to x_0^-$.

O seguinte teorema é o resultado que precisamos para concluir que a função h, exemplo com o qual iniciamos esta seção, tem a propriedade enunciada

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 1 = h(0).$$

Esse teorema relaciona os conceitos de limite e de limites laterais, e sua demonstração é uma consequência imediata das definições.

Teorema 3.1: *Se a é um número real e f uma função, então*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, e somente se,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Vejamos um exemplo em que este teorema é bastante útil. Seja *f* a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 1, \\ -x^2 + 2x & \text{se } x < 1, \end{cases}$$

e suponhamos que queremos saber se *f* é contínua.

Se $a > 1$ e x é um número suficientemente próximo de a, então x também é maior do que 1 e, pela definição de *f*, temos que $f(x) = x^2$, donde,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x^2 = a^2 = f(a),$$

isto é, *f* é contínua em qualquer número $a > 1$.

Analogamente, se $a < 1$, então $f(x) = -x^2 + 2x$, para x suficientemente próximo de a, donde

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}(-x^2 + 2x) = -a^2 + 2a = f(a).$$

Em resumo, podemos concluir que *f* é contínua em qualquer número $a \neq 1$.

Para $a = 1$, no entanto, vemos que, para x próximo de 1, a expressão que define *f* depende de x ser maior ou menor do que 1. Por outro lado, pela definição de limites laterais vemos que

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 = 1,$$

já que $f(x) = x^2$ para $x > 1$ e

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (-x^2 + 2x) = -1 + 2 = 1,$$

pois $f(x) = -x^2 + 2a$; para $x < 1$.

Como os dois limites laterais coincidem, podemos usar o Teorema 3.1 para concluir que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1,$$

e, portanto, que f também é contínua em $a = 1$, já que $f(1) = 1$.

Nesse exemplo usamos o Teorema 3.1 no sentido "se" do enunciado dado, isto é, a existência e igualdade dos limites laterais são condições suficientes para que exista o limite da função e que, nesse caso, o limite é o valor (único) dos limites laterais.

Frequentemente usamos também esse teorema no outro sentido, "somente se", isto é, que a existência e igualdade dos limites laterais são condições necessárias para que a função tenha um limite no ponto em questão. Vejamos um exemplo: seja g a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 1, \\ -x^2 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Como $g(x) = x^2$ para $x > 1$, temos que

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 = 1,$$

e que

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} -x^2 = -1,$$

já que $g(x) = -x^2$ se $x < 1$. Nesse caso, existem os limites laterais, mas assumem valores diferentes, 1 e -1, logo podemos concluir que g **não** tem limite em $x = 1$.

E importante observarmos que o Teorema 3.1 não garante a continuidade de uma função num ponto a de seu domínio, pois apenas garante a existência de $\lim_{x \to a} f(x)$. Mais precisamente, se sabemos que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x),$$

ainda não sabemos se f é contínua em $x = a$, podemos apenas concluir que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Para decidirmos sobre a continuidade (ou não) de f em $x = a$ temos que comparar L com $f(a)$ e usar o Teorema 2.1, isto é, se $L = f(a)$, então f é contínua em $x = $ a, e se $L \neq f(a)$, então f não é contínua em $x = a$.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Seja f a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 + 1 & \text{se } x \leq 0, \\ (x-1)^2 - 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

   (a) f é contínua em $x = 0$?

   (b) Faça um esboço do gráfico de f.

2. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^4 - 4x + 1 & \text{se } x \geq -1, \\ 18 - x & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

   (a) Calcule $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$.

   (b) Existe $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$?

   (c) f é contínua em $x = -1$?

3. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & \text{se } x \geq 1, \\ -2x + 3 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

   Decida qual das afirmações abaixo é correta:

   (a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2.$

   (b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1.$

   (c) f não tem limite em $x = 1$.

   (c) f não tem limite em $x = 1$.

4. Seja f definida por

$$f(x) = \begin{cases} a + x^2 & \text{se } x < -1, \\ a^2 + x & \text{se } x = -1, \\ a - x & \text{se } x > -1. \end{cases}$$

(a) Determine os valores de a tal que $\lim_{x \to -1} f(x)$ exista.

(b) Determine os valores de a tal que f seja contínua em $x = -1$.

5. Determine os valores para *a e b* de tal forma que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 1, \\ ax+b & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ 3x & \text{se } x \geq 2, \end{cases}$$

seja contínua em $\mathbb{R}$.

6. Determine os valores para *a, b e c* de tal forma que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} a(x+b) & \text{se } x \in (-\infty, -1), \\ 0 & \text{se } x \in [-1, 2], \\ (x-c)^2 & \text{se } x \in (2, \infty), \end{cases}$$

seja contínua em $\mathbb{R}$.

7. E possível escolher um valor para a tal que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - a^2 & \text{se } x > -1, \\ x^2 + a & \text{se } x \leq -1, \end{cases}$$

seja contínua?

8. Dê valores para a e b de tal forma que a função

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - bx + 1 & \text{se } x > 1, \\ 0 & \text{se } x = 1, \\ x^3 + ax + b & \text{se } x < 1, \end{cases}$$

seja contínua.

9. Determine um valor para a de tal forma que a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 2 & \text{se } x \geq 1, \\ -2x + 3 & \text{se } x < 1, \end{cases}$$

seja contínua no ponto $x = 1$.

10. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 + \sqrt{x} & \text{se } x \geq 1, \\ x - 1 & \text{se } x < 1, \end{cases}$ f é contínua em $x = 1$?

4. Comportamento assintótico

Quando estudamos sequências, vimos que algumas sequências, muito embora não fossem convergentes, possuíam um comportamento bem determinado como, por exemplo, a sequência $a_n = n^2$ e descrevemos esse comportamento dizendo que $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

No caso de funções, podemos fazer algo análogo: consideremos, por exemplo, a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Se tomamos qualquer sequência x_n convergindo a 0, mas com $x_n \neq 0$, temos que a sequência imagem $y_n = \frac{1}{x_n^2}$ tende a ∞. Descrevemos esse comportamento dizendo que $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *tende a infinito quando x tende a* 0, ou que o *limite de* $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *quando x tende a* 0 *é infinito* e denotamos por

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Em geral, definimos:

Definição: Seja x_0 um número real. Dizemos que o *limite de f* (x) *quando x tende a* x_0 *é infinito*, ou

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

se para qualquer sequência x_n, tal que $x_n \neq x_0$ e $x_n \to x_0$, tem-se que a sequência imagem $y_n = f(x_n)$ tende a infinito, isto é, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty.$.

Uma outra situação que podemos descrever com uma terminologia análoga pode ser exemplificada pela função $g(x) = \frac{1}{x}$. Essa função está definida para qualquer número real diferente de 0, em particular para $x > 1$. Assim dada uma sequência x_n tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, podemos falar da sequência imagem $y_n = g(x_n) = \frac{1}{x_n}$, que já sabemos convergir a 0.

Descrevemos esse comportamento dizendo que o *limite de* $g(x) = \frac{1}{x}$ *quando x tende a infinito é* 0, e denotamos por

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Em geral definimos:

Definição: Se f é uma função que está definida para $x > a$, onde a é algum número real, dizemos que o *limite de $f(x)$ quando x tende a infinito é L*, ou

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

se para qualquer sequência x_n, tal que lima; $x_n = \infty$, tem-se que a sequência imagem $y_n = f(x_n)$ converge a L.

Exemplo: Seja $f(x) = \frac{1}{x} + 1$. Já sabemos que se $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, então

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x_n} + 1\right) = 0 + 1 = 1,$$

e, portanto, podemos dizer $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right) = 1.$.

Considerando agora a função $h(x) = x^2$, observamos que se x_n é qualquer sequência com a propriedade de tender a infinito, então a correspondente sequência imagem, $y_n = x_n^2$, também tende a infinito.

Para funções f com o comportamento da função h, isto é, se x_n tende a infinito, então a correspondente sequência imagem $y_n = f(x_n)$ tende a infinito, dizemos que o *limite de $f(x)$ quando x tende a infinito é infinito*, e denotamos por

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

De maneira análoga, podemos descrever outros comportamentos usando a terminologia de limites:

Se, para qualquer sequência x_n tal que $x_n \neq x_0$ e $x_n \to x_0$, tem-se que $y_n = f(x_n) \to -\infty$, dizemos que o *limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 é* $-\infty$, e usamos a notação

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.$$

Se L é um número real e, para qualquer sequência x_n tal que $x_n \to -\infty$, tem-se que y_n

$= f(x_n) \to L$, dizemos que o *limite de* $f(x)$ *quando* x *tende a* $-\infty$ é L, e usamos a notação

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

Se, para qualquer sequência x_n tal que $x_n \to -\infty$, tem-se que $y_n = f(x_n) \to \infty$, dizemos que o *limite de* $f(x)$ *quando* x *tende a* $-\infty$ é ∞, e usamos a notação

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$$

Se, para qualquer sequência x_n tal que $x_n \to -\infty$, tem-se que $y_n = f(x_n) \to -\infty$, dizemos que o *limite de* $f(x)$ *quando* x *tende a* $-\infty$ é $-\infty$, e usamos a notação

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Por exemplo, para $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, temos que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$, ou seja,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Por outro lado, o comportamento de $h(x) = x^2$ é dado por $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \infty.$

Lembremos aqui que, como já foi visto no Capítulo 3, se $x_n \to \infty$ (ou se $x_n \to -\infty$), então x_n é uma sequência não convergente e, portanto, não possui limite. Assim, dizer que *o limite de* x_n é ∞ (ou $-\infty$), é apenas uma maneira de expressar uma determinada forma de a sequência não ser convergente (sendo, portanto, um abuso de linguagem). Analogamente, só dizemos que existe o limite de uma função num número a (ou em $\pm\infty$) quando o limite é um número real L. No caso de limites infinitos, nos permitimos dizer que o limite de uma função num número a é ∞ (ou $-\infty$), mas não dizemos que existe o limite da função em a, caracterizando assim mais um abuso de linguagem.

A seguir, enunciamos vários teoremas que são muito úteis para o cálculo de limites assintóticos ou, equivalentemente, para o estudo do comportamento assintótico de funções. Esses teoremas podem ser provados a partir de resultados que já conhecemos a respeito de limites de sequências. No apêndice deste capítulo apresentamos algumas demonstrações com o intuito de exemplificar as técnicas de demonstração.

Teorema 4.1: *Se L e M são números reais com* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ e $\lim_{x\to\infty} g(x) = M$, *então*

(i) $\lim_{x\to\infty} f(x) + g(x) = L + M.$

(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = LM.$

(iii) se $M \neq 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$

Esses resultados também são válidos para $x \to -\infty$.

Cada um dos teoremas que se seguem possui mais duas versões que são obtidas substituindo-se, respectivamente, a condição $x \to x_0$ por $x \to \infty$ e por $x \to -\infty$.

Teorema 4.2: *Suponha que* $\lim_{x\to x_o} f(x) = \infty = \lim_{x\to x_0} g(x)$. *Então*

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = -\infty.$

(ii) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \infty.$

(iii) $\lim_{x\to x_0} -f(x) = \infty.$

(iv) $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$

(v) *Se h é uma função tal que $h(x) \leq f(x)$, então* $\lim_{x\to x_0} h(x) = -\infty.$

Teorema 4.3: *Suponha que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty = \lim_{x\to x_0} g(x)$. *Então*

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = -\infty$.

(ii) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \infty$.

(iii) $\lim_{x\to x_0} -f(x) = \infty$.

(iv) $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

(v) *Se h é uma função tal que $h(x) \leq f(x)$, então* $\lim_{x\to x_0} h(x) = -\infty$.

Teorema 4.4: *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$., *então*

(i) $\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \infty$.

(ii) *se* $L > 0$, *então* $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \infty$.

(iii) *se* $L < 0$, *então* $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = -\infty$.

Teorema 4.5: *Se L é um número real com* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, *então*

(i) $\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = -\infty$.

(ii) *se* $L > 0$, *então* $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = -\infty$.

(iii) *se* $L < 0$, *então* $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \infty$.

Teorema 4.6*: *Se temos que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, com $f(x) \neq 0$, *então*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{|f(x)|} = \infty.$$

Aqui é importante salientar que esse resultado não é válido em geral se substituímos, no enunciado do teorema, $\frac{1}{|f|}$ pela função $\frac{1}{f}$, pois nesse caso, propriedade de que $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, pode não determinar o comportamento da função $\frac{1}{f}$ próximo de $x = x_0$. Esse é o caso, por exemplo, da função identidade, $f(x) = x$, para $x_0 = 0$: se $x_n \to 0$ por números positivos, temos que $f(x_n) = x_n$ também converge a 0 por números positivos e, portanto, $\frac{1}{f(x_n)} \to \infty$; por outro lado, se tomamos uma sequência $x_n \to 0$ por números negativos, teremos que $\frac{1}{f(x_n)} \to -\infty$.

Teorema 4.7: *Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,\ \ \lim_{x \to \infty} g(x) = L\ \ e\ \ \lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$,, *então*

(i) $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L$.

(ii) $\lim_{x \to x_0} h(f(x)) = \infty$.

Teorema 4.8: *Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,\ \ \lim_{x \to -\infty} g(x) = L\ \ e\ \ \lim_{x \to -\infty} h(x) =$ ∞, *então*

(i) $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L$.

(ii) $\lim_{x \to x_0} h(f(x)) = \infty$.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de utilização dos teoremas desta seção no cálculo de limites.

1. Para calcularmos $\lim_{x \to \infty} x^2$, podemos usar o Teorema 4.2 (ii) com a condição $x \to \infty$ e $f(x) = g(x) = x$. Assim, $\lim_{x \to \infty} x^2 = \lim_{x \to \infty} f(x)g(x) = \infty$.

2. Para calcularmos $\lim_{x \to \infty} (2 - \frac{1}{x})$, primeiro usamos o Teorema 4.2 (iv) com $x \to \infty$ para obter que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ e, em seguida, usamos o Teorema 4.1 (i), com $x \to \infty$, $f(x) = 2$ e $g(x) = -\frac{1}{x}$, concluindo que

$$\lim_{x \to \infty} (2 - \frac{1}{x}) = \lim_{x \to \infty} 2 + \lim_{x \to \infty} (-\frac{1}{x}) = 2 + 0 = 2.$$

3. Para calcularmos $\lim_{x\to\infty}(2x^2-x)$, primeiro observamos que, para $x \neq 0$,

$$2x^2 - x = x^2(2 - \frac{1}{x}).$$

Em seguida, usamos o Teorema 4.4 (ii) com a condição $x \to \infty$, $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$ e $g(x) = x^2$, obtendo

$$\lim_{x\to\infty}(2x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x^2(2 - \frac{1}{x}) = \infty.$$

4. Para calcularmos $\lim_{x\to x_0}(2x^2 - x)^4$, podemos primeiro usar o Teorema 4.2 (ii) com $x \to \infty$, obtendo

$$\lim_{x\to\infty} x^4 = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot x^2 = \infty.$$

Em seguida, usamos o Teorema 4.7 com $x \to \infty$, $f(x) = 2x^2 - x$ e $h(x) = x^4$ para concluir que

$$\lim_{x\to\infty}(2x^2 - x)^4 = \lim_{x\to\infty} h(f(x)) = \infty.$$

Para completarmos nosso estudo sobre comportamento assintótico, devemos enfatizar que nem sempre podemos determinar o comportamento assintótico de somas e produtos de funções apenas a partir dos limites das funções componentes.

Por exemplo, sabemos que $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty = \lim_{x\to\infty} x^4$, mas

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^4} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0,$$

enquanto que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{x^2} = \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty.$$

O que este exemplo nos diz é que nada podemos concluir a respeito do comportamento assintótico de um quociente, $\frac{f}{g}$, de duas funções, se apenas sabemos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \to x_0} g(x)$.

De fato, no caso dos dois quocientes $\frac{x^2}{x^4}$ e $\frac{x^4}{x^2}$, tanto o denominador quanto o numerador têm a propriedade de tender a infinito quando $x \to \infty$, mas os comportamentos assintóticos dos dois quocientes são diferentes: o primeiro quociente tende a 0, enquanto que o segundo tende a ∞, quando $x \to \infty$.

A função $h(x) = \frac{x}{2x+1}$ é um exemplo simples (aparentemente menos trivial) de quociente que possui um comportamento assintótico diferente dos dois casos acima, embora, também nesse caso, tanto o denominador quanto o numerador tenham a propriedade de tender a infinito quando $x \to \infty$: temos que para $x \neq 0$,

$$\frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{x}},$$

e, portanto,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{2x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2},$$

já que $\lim_{x \to \infty} (2 + \frac{1}{x}) = 2.$.

Por outro lado, como qualquer quociente pode ser visto como um produto, isto é,

$$\frac{g}{h} = \frac{1}{h} \cdot g = fg,$$

onde $f = \frac{1}{h}$, as informações que acabamos de obter nos alertam para o fato de que se

$$\lim f(x) = 0 \text{ e } \lim g(x) = \infty,$$

então nada podemos afirmar a respeito do limite do produto fg. De fato, consideremos dois exemplos:

a) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ e $g(x) = x$. Neste caso, temos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

e $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = 2x+1$. Então, novamente,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to\infty,} g(x) = \infty$$

mas

$$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x} = 2.$$

Finalmente, é importante que fique claro que ∞ e $-\infty$ não são números mas apenas símbolos que usamos para expressar um certo comportamento. Em particular, não podemos *fazer contas* com ∞ e $-\infty$ e expressões do tipo $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty - \infty$, $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ etc., não têm sentido.

Limites laterais infinitos

Como vimos anteriormente, os resultados e notações que já introduzimos não servem para descrever o comportamento da função $g(x) = \frac{1}{x}$ próximo de $x_0 = 0$.

Mas vimos também que se consideramos apenas sequências convergindo a 0 por números positivos, $x_n > 0$, então as sequências imagem têm sempre o mesmo comportamento, isto é, $g(x_n) = \frac{1}{x_n} \to \infty$, assim como para sequências $y_n \to 0$ com $y_n > 0$ sempre temos que $g(y_n) = \frac{1}{y_n} \to -\infty$..

Isso nos sugere utilizar a terminologia de limites laterais para descrever esse comportamento. Convencionamos então dizer que

o limite lateral à direita da função $g(x) = \frac{1}{x}$ *em* $x_0 = 0$ é ∞,

e que

o limite lateral à esquerda da função $g(x) = \frac{1}{x}$ *em* $x_0 = 0$ é $-\infty$.

Em geral, introduzimos o conceito de *limites laterais infinitos*. Se a é um número real e f, uma função definida num intervalo $(a, a + \delta)$, onde δ é algum número positivo, definimos:

Definição: Dizemos que o limite lateral de $f(x)$ quando x tende ao número a pela direita (ou, simplesmente, o limite lateral à direita de f em x = a) é ∞ se para qualquer sequência x_n tal que $x_n \to a$, com x_n > a para todo n, tem-se que $y_n = f(x_n) \to \infty$.

Para dizermos que o limite lateral à direita de f em $x = a$ é ∞ usamos a notação

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty.$$

Analogamente, se a é um número real e f, uma função definida num intervalo $(a - \delta, a)$, onde δ é algum número positivo, definimos:

Definição: Dizemos que o *limite lateral* de $f(x)$ *quando* x *tende ao número a pela esquerda* (ou, simplesmente, o *limite lateral à esquerda de* f *em* $x = a$) é ∞ se para qualquer sequência x_n tal que $x_n \to a$, com $x_n < a$ para todo n, tem-se que $y_n = f(x_n) \to \infty$.

Analogamente, para dizermos que o limite lateral à esquerda de f em $x = a$ é ∞ usamos a notação

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty.$$

Agora, substituindo nas duas definições anteriores o símbolo ∞ pelo símbolo $-\infty$, obtemos a definição das duas expressões análogas,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty.$$

Em resumo, com essa terminologia podemos, por exemplo, descrever o comportamento da função $g(x) = \frac{1}{x}$ para x próximo de 0, dizendo que:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty.$$

Exemplos

1. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = \infty$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty.$

2. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^2-1} = \infty$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x^2-1} = -\infty.$

3. Se

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2-1} & \text{se } x > 1, \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \leq 1, \end{cases}$$

então,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{1}{x^2-1} = \infty \quad \text{e}$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x} = 1.$$

Também no caso de limites laterais infinitos temos que

todas as propriedades que já enunciamos para limites infinitos de funções também são válidas para limites laterais infinitos.

Assim, quando necessário, nos referiremos aos teoremas dados para limites de funções para justificarmos propriedades de limites laterais, convencionando que, nesse caso, devemos substituir nos enunciados $x \to x_0$ por $x \to x_0^+$ ou por $x \to x_0^-$.

Os dois teoremas a seguir relacionam os dois conceitos, de limite infinito e de limites laterais infinitos:

Teorema 4.9: *Se a é um número real e f, uma função, então*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

se, e somente se,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty.$$

Teorema 4.10: *Se a é um número real e f, uma função, então*

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

se, e somente se,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty.$$

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Em cada item abaixo, o símbolo α pode representar um número real, ∞ ou $-\infty$, enquanto que a sempre representa um número real. Decida, para cada item, se a proposição é falsa ou verdadeira justificando sua resposta:

   (a) Se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \infty$, então $\lim_{x\to\alpha} f(x) + g(x) = \infty$.

   (b) Se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = a$ e $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \infty$, então $\lim_{x\to\alpha} f(x) + g(x) = \infty$.

   (c) Se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \infty$, então $\lim_{x\to\alpha} f(x) - g(x) = 0$.

   (d) Se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \infty$, então $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) = \infty$.

   (e) Se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = a$, $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \infty$ e $a \neq 0$, então $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) = \infty$.

   (f) Se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \infty$, então $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) = 0$.

   (g) Se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \infty$, então $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

   (h) Se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \infty$, então $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

   (i) Se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

   (j) Se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$, então $\lim_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

   (k) Se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = a$ e $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \infty$, então $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) = \infty$.

   (l) Se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \infty$, então $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) = -\infty$.

   (m) Se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\alpha} g(x) = a$ com $a \neq 0$, então $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

   (n) Se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = a$, $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \infty$ com $a \neq 0$, então $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

2. Calcule os limites abaixo

(a) $\lim_{x\to 3} \frac{2}{(x-3)^2}$.

(b) $\lim_{x\to 3} \frac{-8}{(x-3)^2}$.

(c) $\lim_{x\to -\infty} \frac{|x-5|}{x-5}$.

(d) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+1}{3x^4+2x}$.

(e) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^3-100}{3x^2-2x+1}$.

(f) $\lim_{x\to \infty} \frac{7x^6-8x}{10-3x^6}$.

(g) $\lim_{x\to -\infty} \frac{5x^3+6}{3x^4+2x}$.

(h) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3+9x-2}{4-2x^2}$.

(i) $\lim_{x\to -\infty} \frac{8-x^5}{9-2x^2}$.

(j) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

(k) $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

3. Estude o comportamento assintótico das funções abaixo:

(a) $f(x) = \frac{4}{x-3}$.

(b) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+4}$.

(c) $f(x) = \frac{|x-5|}{x-5}$.

(d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

4. Seja $f : \mathbb{R}\{0\} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = 2 \qquad e \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to -\infty} f(x).$$

Qual o número mínimo de soluções da equação $f(x) = x$?

5. Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz às seguintes condições:

(i) f é decrescente nos intervalos $(-\infty,-1), (0,1)$ e $(2,\infty)$.

(ii) f é crescente nos intervalos $(-1,0)$ e $(1,2)$.

(iii) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to -1} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \infty, \quad$ e $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$

(iv) $f(1) = 0$ e $f(2) = 1$.

Faça um esboço do gráfico de $g(x) = |f(x)|$.

6. Seja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = 2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Qual o número mínimo de soluções da equação $f(x) = x$?

7. Esboce o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ contínua tal que:
   - (i) a equação $f(x) = 0$ tenha cinco soluções.
   - (ii) $\lim_{x\to 0} f(x) > 0$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$.
   - (iii) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = -1$.
   - (iv) f é crescente nos intervalos $(-\infty, -2)$, $(-1, -\frac{1}{2})$ e $(2, 3)$ e é decrescente em $(-2, -1)$, $(-\frac{1}{2}, 1)$, $(1, 2)$ e em $(3, \infty)$.

8. Faça um esboço do gráfico de uma função $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:
   - (i) f é contínua.
   - (ii) f é crescente nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$.
   - (iii) f é decrescente no intervalo $(-1, 1)$.
   - (iv) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} f(x)$, $\quad \lim_{x\to -1} f(x) = 2 \quad$ e $\quad \lim_{x\to 1} f(x) = -1$.

9. Faça um esboço do gráfico de uma função $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:
   - (i) f é contínua.
   - (ii) f é decrescente em $(-1, 0)$.
   - (iii) f é crescente nos intervalos $(-\infty, -1), (0, 1)$ e $(1, \infty)$.
   - (iv) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to -1} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
   - (v) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$.

10. Faça um esboço do gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:
    - (i) f é contínua.
    - (ii) f é crescente nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$.
    - (iii) f é decrescente no intervalo $(-1, 1)$.
    - (iv) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\quad \lim_{x\to -1} f(x) = 2$.
    - (v) A imagem de f é o intervalo $[-1, 2]$.

11. Considere uma função $f : \mathbb{R} - \{1, 3\} \to \mathbb{R}$. com as seguintes

propriedades:

(i) f é contínua.

(ii) f é decrescente no intervalo $[2,3)$.

(iii) f é crescente nos intervalos $(-\infty,1)$, $(1,2]$ e $(3,+\infty)$.

(iv) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$.

(v) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$.

(vi) $f(0) = 1$.

(a) Quanto vale $f(2)$?

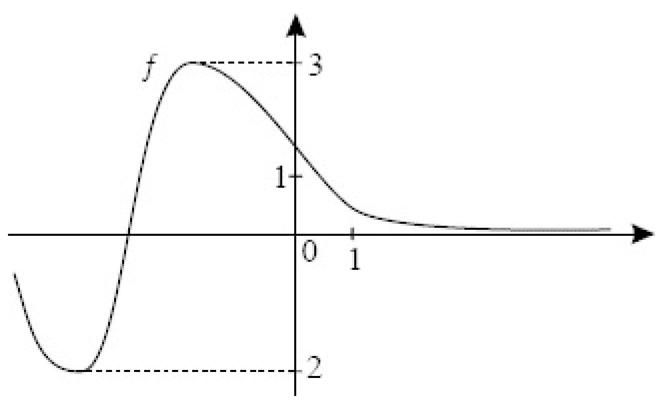
(b) Quanto vale $\lim_{x\to 0} f(x)$?

(c) Esboce o gráfico de f.

12. Decida se a proposição é falsa ou verdadeira:

    Se $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ é contínua com $f(0) = -1$ e $\lim_{x\to 0} f(x)$?, então a equação $f(x) = x$ tem pelo menos uma solução.

13. Seja $f : [-\frac{5}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua cujo esboço do gráfico em um intervalo é dado abaixo. Sabendo que f é decrescente no intervalo $(-1, \infty)$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, determine os valores de b para os quais a equação $f(x) - b = 0$ tem:



(a) nenhuma solução.
(b) uma solução.
(c) duas soluções.

5. Exercícios suplementares

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Considere

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 2 & \text{se } x > -1, \\ x - 3 & \text{se } x \le -1. \end{cases}$$

   (a) Calcule $f(-1)$.
   (b) Calcule $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$, com $a_n = -1 + \frac{1}{n}$.
   (c) f é contínua em $x = -1$?
   (d) Faça um esboço do gráfico desta função.

2. Considere

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 \text{sen}\left(\frac{1}{|x-2|}\right) & \text{se } x \ne 2, \\ 0 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

   (a) Calcule $\lim_{x\to 2} f(x)$.
   (b) f é contínua em $x = 2$?

3. Em cada item abaixo, decida se a função dada é contínua ou não:

(a) $f(x) = \begin{cases} 3x^5 - 2x^2 + 4 & \text{se } x > 0, \\ 2x^3 - 4x + 3 & \text{se } x \le 0. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 3x^5 - 2x^2 + 4 & \text{se } x > 0, \\ 2x^3 - 4x + 3 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-8}{x-2} & \text{se } x \ne 2, \\ 6 & \text{se } x = 2. \end{cases}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 2}$.

4. Na proposição abaixo f é uma função cujo domínio é o intervalo $[-1, 1]$ e x_n é uma sequência com $x_n \in [-1, 1]$. Decida se a proposição é falsa ou é verdadeira:

$$\text{Se } x_n \to 0 \text{ e } f(x_n) \to 1, \text{ então } f(0) = 1.$$

5. Seja f uma função contínua cujo domínio é o intervalo $[-4, 2]$. Sabendo que $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{5n^2-2n}{2-3n^2}\right) = -3$, determine $f\left(-\frac{5}{3}\right)$.

6. Seja $a_n \to 3$. Em cada item abaixo calcule o limite indicado:

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2a_n}{(a_n-3)^2}$.

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2a_n-6}{\sqrt{a_n^2-3}}$.

   (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+\sqrt{a_n+6}}{\sqrt{a_n+5}}$.

7. Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_n+\frac{2}{3}}-1}{2\sqrt{a_n^2+1}}$, onde $a_n = \dfrac{n^3-n^2}{3n^3}$.

8. Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_n+4}}{(a_n+2)^2}$, onde $a_n = \dfrac{(6+2n)(n-4)(3n-2)}{(3n-1)(1-n^2)}$.

9. Seja $f : (-2, 3) \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Sabendo que $f\left(-\frac{2}{3}\right) < 0 < f\left(\frac{6}{5}\right)$,, em quantas etapas do método da bisseção podemos obter uma aproximação para uma solução da equação $f(x) = 0$ com erro inferior a 10^{-2}?

10. Seja $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$.

    (a) Calcule $f(-1)$ e $f(2)$. A equação $f(x) = 0$ tem solução no intervalo $[-1, 2]$?

    (b) Calcule $f(0)$ e $f(1)$. Quantas soluções podemos garantir que a equação $f(x) = 0$ tem no intervalo $[-1, 2]$?

11. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - x + 4 & \text{se } x \le 0, \\ 4 + 3x - x^3 - x^4 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

    (a) A equação $f(x) = 0$ tem solução no intervalo $[-2, 0]$? E no intervalo $[0, 2]$?

    (b) Se for o caso, calcule uma aproximação para uma das soluções dessa equação com erro menor que 0, 01.

12. Seja $f(x) = 3x^3 - 3x + 1$:

(a) Calcule uma aproximação de uma solução da equação $f(x) = 0$ que pertença ao intervalo $[-1, 1]$ com erro menor que 0, 1.

(b) Quantas etapas do método da bisseção seriam necessárias para se obter uma aproximação com erro menor que 10^{-5}?

13. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 7x^3 - |1 - 2x| & \text{se } x \neq 1, \\ 4 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Decida qual das afirmações abaixo é correta:

(i) $\lim_{x \to 1} f(x) = 6$.

(ii) $f(1) = 6$.

(iii) f é contínua.

(iv) f não tem limite em $x = 1$.

14. Considere

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{se } x \neq 1, \\ 5 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim_{x \to 1} f(x)$.

(b) f é contínua em $x = 1$?

15. Calcule $\lim_{x \to -1} \dfrac{1}{\sqrt{2 + (x^2 - 1)\cos\left(\frac{1}{x+1}\right)}}$.

16. Calcule os limites:

(a) $\lim_{x \to 2} 4x^3 - 2x + 5$

(b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{3x - 8x^5 - 5}{x^2 - 3x}$

(c) $\lim_{x \to 9} \dfrac{x^3 - 17x^2 + 72x}{3x - 27}$

(d) $\lim_{x \to 7} \dfrac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 14x + 49}$

17. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x - 10} & \text{se } x \neq 2, \\ c & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

Determine o valor de c para que f seja contínua.

18. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^6 - 3x^2 - 1 & x \geq 0, \\ 12x^2 + 1 & x < 0. \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.

(b) Existe $\lim_{x \to 0} f(x)$?

(c) f é contínua em $x = 0$?

19. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x^3 - 2x - 1 & x < 1, \\ -1 & x = 1, \\ 2x^2 - |1 - x| - 2 & x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^-} f(x)$.

(b) Existe $\lim_{x \to 1} f(x)$?

(c) f é contínua em $x = 1$?

20. Determine os valores para a e b de tal forma que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 2a & \text{se } x < 2, \\ b - 3a & \text{se } x = 2, \\ x^2 - 2x + a & \text{se } x > 2, \end{cases}$$

seja contínua em $\mathbb{R}$.

21. Determine os valores para a e b de tal forma que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x + a & \text{se } x < -2, \\ x + 24 & \text{se } -2 \leq x < 3, \\ x^3 - 2x + b & \text{se } x > 3, \end{cases}$$

seja contínua em $\mathbb{R}$.

22. Determine os valores de a para que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in (-\infty, a), \\ -3x - 2 & \text{se } x \in [a, \infty), \end{cases}$$

seja contínua em $\mathbb{R}$.

23. Dado um número real a, considere a função definida por:

$$f_a(x) = \begin{cases} x + a^2 - a + 1 & \text{se } x < 3, \\ 13 - a & \text{se } x = 3, \\ 3x + a - 2 & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

(a) Para quais valores de a existe $\lim\limits_{x \to 3} f_a(x)$??

(b) Para quais valores de a a função f_a é contínua em $x = 3$?

24. Dado um número real a, considere a função definida por:

$$f_a(x) = \begin{cases} 2x^2 + a^2 - a & \text{se } x < 2, \\ a^2 - a + 8 & \text{se } x = 2, \\ x^3 + a(x + 4) - 12 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

(a) Para quais valores de a existe $\lim\limits_{x \to 2} f_a(x)$?

(b) Para quais valores de a a função f_a é contínua em $x = 2$?

25. Calcule os limites abaixo:

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^5 - 10x}{3x^3 - 2}$.

(b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{4x^3 - 1}{2x^4 - 90}$.

(c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(x^2 - 1)(x - 5)}{(2 - x)(x - 8)}$.

(d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{8 - 3x^4}{2x^2 + 1}$.

(e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{4x^6 - 8x^2 + 1}{5x^6 - 2}$.

(f) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1 - 5x^3}{8x^7 + 5}$.

(g) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - 8x^3}{2 - 3x^3}$.

26. Analise o comportamento assintótico das funções dadas abaixo:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-5)^2}$.

(b) $f(x) = \dfrac{(x-5)}{(x-5)^2}$.

(c) $f(x) = \dfrac{(x-5)^2}{(x-5)^2}$.

(d) $f(x) = \dfrac{(x-5)^3}{(x-5)^2}$.

27. Seja $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que:

$\lim_{x\to 0} f(x) = -1$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$,

Qual o número mínimo de soluções da equação $f(x) = x$?

28. Faça um esboço do gráfico de uma função $f : \mathbb{R} - \{-2, 1\} \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

(i) f é contínua.

(ii) f é decrescente nos intervalos $[-3, -2)$ e $(1, 2]$.

(iii) f é crescente nos intervalos $(-\infty, -3]$, $(-2, 1)$ e $[2, \infty)$.

(iv) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-2^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to1} f(x) = \infty$, e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

(v) $\lim_{x\to-3} f(x) = 3$ e $f(2) = 0$.

29. Faça um esboço do gráfico de uma função $f : \mathbb{R} - \{0, 4\} \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

(i) f é contínua.

(ii) f é decrescente nos intervalos $[2, 4)$.

(iii) f é crescente nos intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 2]$ e $(4, \infty)$.

(iv) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to0^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to4} f(x) = -\infty$, e $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(v) a equação $f(x) = 0$ tem quatro soluções.

30. Faça um esboço do gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

(i) f é contínua.

(ii) f é crescente no intervalo $[0, \infty)$.

(iii) f é decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$.

iv $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to0} f(x) = 0$.

31. Faça um esboço do gráfico de $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ onde f é a função do exercício anterior.

32. Faça um esboço do gráfico de uma função $f : \mathbb{R} - \{-2, 3\} \to \mathbb{R}$ com as seguintes
propriedades:

(i) f é contínua.

(ii) f é decrescente.

(iii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 4$, $\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to3^+} f(x) = \infty$.

33. Faça um esboço do gráfico de $g(x) = |f(x)|$ onde f é a função do

exercício anterior.

34. Faça um esboço do gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:
    (i) f é contínua.
    (ii) f é crescente nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(0, \infty)$.
    (iii) f é decrescente no intervalo $(-1, 0)$.
    (iv) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 3, \quad \lim_{x\to-1} f(x) = 0$
    (v) A imagem de f é o intervalo $[-1,3]$.

6. Apêndice

Aqui damos as demonstrações de alguns dos teoremas enunciados no capítulo.

Seção 1

O conceito de limite de função real

Na maioria dos livros de cálculo o conceito de limite de uma função real não é introduzido a partir do conceito de sequência convergente como fazemos aqui. Na verdade, a maioria desses livros não trata do tema sequências antes do cálculo diferencial e integral. A definição de limite que apresentamos a seguir é equivalente à definição que demos neste capítulo.

Se f é uma função e a um número real para o qual existe algum intervalo aberto I, tal que $a > \in I$ e $I - \{a\}$ está contido no domínio de f, definimos:

Definição: Dizemos que o *limite de f(x) quando x tende ao número a* é um número real L $\left(\lim_{x\to a} f(x) = L\right)$ se, dado número real positivo, $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um número real positivo, $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Seçao 2

Teorema 2.4: *Se f, g e h são funções tais que* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, *para todo número x de um intervalo aberto contendo o número* x_0 *e*

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L = \lim_{x \to x_o} h(x),$$

então $\lim_{x \to x_o} g(x) = L.$

Demonstração: Seja x_n uma sequência de números do intervalo aberto tal que $x_n \to x_0$. Devemos mostrar que, nesse caso, a sequência imagem $g(x_n)$ converge ao número L. E de fato, como por hipótese temos que

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L = \lim_{x \to x_o} h(x),$$

e $x_n \to x_0$, sabemos que $f(x_n) \to L$ e $h(x_n) \to L$. Mas para cada n temos que X_n é um número do intervalo aberto onde valem as desigualdades do enunciado, isto é,

$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$$

e, portanto o Teorema 4.4 do Capítulo 3 garante que a sequência $g(x_n)$ também converge ao número L.

□

Teorema 2.5: *Se f é limitada e* $\lim_{x \to x_o} g(x) = 0,$ *então* $\lim_{x \to x_o} f(x)g(x) = 0.$

Demonstração: Seja $x_n \to x_0$, com $x_n \neq x_0$. Como, por hipótese, f é limitada, temos que $f(x_n)$ é uma sequência limitada e, como $\lim_{x \to x_o} g(x) = 0$, sabemos que $g(x_n) \to 0$. Pelo Teorema 4.5 do Capítulo 3, temos que $f(x_n)g(x_n) \to 0$ e, portanto, segue-se da definição de limite de função que $\lim_{x \to x_o} f(x)g(x) = 0$.

□

Seçao 4

Teorema 4.6: *Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, *com* $f(x) \neq 0$, *então* $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{|f(x)|} = \infty.$

Demonstração: Se $x_n \to x_0$, com $x_n \neq x_0$, como $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $f(x) \neq 0$, temos que a sequência $|f(x_n)| \to 0$ por números positivos, donde

$$\frac{1}{|f(x_n)|} \to \infty, \text{ e, portanto, } \lim_{x \to x_0} \frac{1}{|f(x)|} = \infty.$$

□

Teorema 4.7: *Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} g(x) = L$ *e* $\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$, então

(i) $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L$.

(ii) $\lim_{x \to x_0} h(f(x)) = \infty$.

Demonstração: Seja x_n uma sequência tal que $x_n \neq x_0$ e $x_n \to x_0$. Como $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, temos que $f(x_n) \to \infty$ e, portanto, $g(f(x_n)) \to L$ e $h(f(x_n)) \to \infty$, já que $\lim_{x \to \infty} g(x) = L$. e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$. Ou seja, mostramos que para qualquer sequência $x_n \to x_0$ com $x_n \neq x_0$, tem-se que as sequências imagem, $(g \text{ o } f)(x_n)$ e $(h \text{ o } f)(x_n)$, satisfazem

$$(g \text{ o } f)(x_n) \to L$$

$$(g \text{ o } f)(x_n) \to \infty$$

isto é,

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x)) = L$$

e

$$\lim_{x \to x_0} h(f(x)) = \lim_{x \to x_0} (h \circ f)(x)) = \infty. \qquad \square$$

CAPÍTULO 6

As Funções Elementares

Neste capítulo estudaremos algumas funções que chamaremos *funções elementares*. Escolhemos essa denominação pelo fato de que, a partir dessas funções elementares e das operações soma, produto, quociente, composição e construção de funções definidas por mais de uma regra de associação, obtemos as funções que são objeto de estudo do cálculo.

Nos capítulos anteriores nos dedicamos a introduzir os recursos (conceitos, propriedades e teoremas), que nos permitem iniciar o estudo de funções reais. Neste capítulo utilizaremos esses recursos para estudar as funções elementares e algumas propriedades das funções polinomiais (ou polinômios reais).

No apêndice a este capítulo são dadas as demonstrações de alguns teoremas (aqueles indicados pelo símbolo funções *).

1. As funções elementares algébricas

As funções afins

Podemos dizer que as funções mais simples são aquelas cujo gráfico é uma reta; essas são as chamadas funções afins. Para caracterizarmos essas funções devemos determinar qual a relação algébrica entre as coordenadas (x, y) de pontos de uma reta.

Já sabemos que para uma reta ser o gráfico de uma função é necessário e suficiente que a reta não seja uma reta vertical. Assim, no que se segue, trataremos de retas não verticais.

Sejam r uma reta não vertical e P_1, P_2, P_3 e P_4 quatro pontos distintos de r. Traçando retas horizontais por P_1 e P_3 e retas verticais por P_2 e P_4, construímos os triângulos retângulos cujos vértices são P_1, P_2 e A e P_3, P_4 e B como na Figura 1.1.

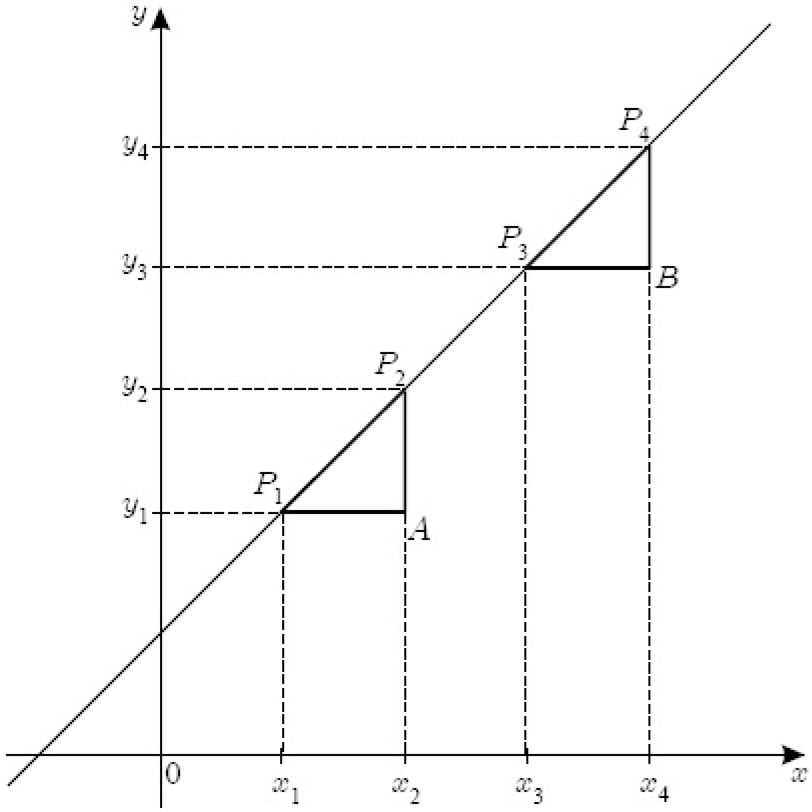


Figura 1.1

Da geometria plana sabemos que esses triângulos são semelhantes e, portanto, a razão entre os comprimentos dos catetos é a mesma para os dois triângulos. Ou seja, se (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) e (x_4, y_4) são, respectivamente, as coordenadas dos pontos P_1, P_2, P_3 *e* P_4, então

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}.$$

Denotemos essa razão por a. Como os pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 são pontos arbitrários de r, podemos concluir que se P *e* Q são quaisquer dois pontos distintos de r, com coordenadas (x_P, y_P) e (x_Q, y_Q), então

$$\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = a.$$

Em particular, se Q é 0 ponto de interseção da reta com 0 eixo vertical, com coordenadas $(0, b)$ e P um outro ponto qualquer de r com coordenadas (x, y), então

$$\frac{y - b}{x - 0} = a,$$

ou seja, as coordenadas (x, y) dos pontos de r satisfazem a relação $y = ax + b$.

Essa relação é chamada a equação da reta r e nos diz que os pontos de r são os pontos do plano cujas coordenadas são dadas por $(x, ax + b)$, com $x \in \mathbb{R}$ Em outras palavras, a equação da reta nos diz qual é a relação entre a primeira e a segunda coordenada de um ponto da reta.

Acabamos de verificar que se r é uma reta não vertical, então existem números reais a e b tais que as coordenadas (x, y) de qualquer ponto dessa reta estão relacionadas pela equação $y = ax + b$. O número a é chamado o *coeficiente angular* ou *inclinação* da reta e b é o *termo independente* ou *linear*. Observe que $y = b$ quando $x = 0$ e, portanto, b indica o ponto de interseção da reta com o eixo vertical.

Exemplo: Seja r a reta que passa pelos pontos de coordenadas $(-1, 2)$ e $(1, 3)$.

Então o coeficiente angular da reta é

$$\frac{2 - 3}{-1 - 1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

e, portanto, sua equação é $y = \frac{1}{2}x + b$ para algum número real b. Como o ponto de coordenadas $(1, 3)$ é um ponto da reta, suas coordenadas têm que satisfazer a relação dada pela equação, isto é, ao substituirmos y por 3 e x por 1, devemos obter uma igualdade. Temos então que $3 = \frac{1}{2} + b$, portanto $b = \frac{5}{2}$. Concluímos assim que a equação de r é $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Voltando agora às funções afins, temos que se f é uma função cujo gráfico é uma reta, então f é determinada pela expressão $f(x) = ax + b$, onde $y = ax + b$ é a equação da reta.

De fato, por um lado vimos que os pontos da reta têm coordenadas $(x, ax + b)$ e, por outro lado, como são pontos do gráfico de f, suas coordenadas devem ser $(x, f(x))$, donde $f(x) = ax + b$.

Vamos ver agora que se f é uma função definida por uma expressão desse tipo, isto é, $f(x) = ax + b$ para algum par de números reais a e b, então seu gráfico é uma reta. Para isso, vamos tomar dois pontos do gráfico de f, por exemplo $(0, f(0))$ e $(1, f(1))$, achar a equação da reta r que passa por esses dois pontos e comparar com a expressão que define f. Pelo que já vimos o coeficiente angular dessa reta é

$$\frac{f(0) - f(1)}{0 - 1} = \frac{b - (a + b)}{-1} = \frac{-a}{-1} = a,$$

e, como $(0, f(0))$ é o ponto de interseção r com o eixo vertical, concluímos que a equação de r é

$$y = ax + f(0).$$

Fazendo agora $x = 0$ na expressão que define f, obtemos que $f(0) = b$, ou seja, a equação de r é $y = ax + b$. Isso nos diz que tanto o gráfico de f quanto a reta r são o conjunto de pontos do plano cujas coordenadas são dadas por $(x, ax + b)$, ou seja, o gráfico de f é a reta r.

Resumindo, aprendemos que:

se f é uma função cujo gráfico é uma reta, então $f(x) = ax + b$ para algum par de números reais a e b. Reciprocamente, se f é uma função definida por uma expressão do tipo $ax + b$, então seu gráfico é uma reta.

Mas nesse percurso, aprendemos também que toda reta não vertical é descrita algebricamente por uma equação $y = ax + b$, isto significando que a reta é constituída pelos pontos do plano cujas coordenadas (x, y) satisfazem a relação dada pela equação.

Reciprocamente, vimos que dado qualquer par de números reais, a e b, o conjunto de pontos do plano cujas coordenadas satisfazem a relação dada por uma equação do tipo $y = ax + b$ é uma reta.

Uma observação interessante que podemos fazer aqui é que a expressão que obtivemos para a equação de uma reta reflete algebricamente o fato, que conhecemos da geometria, de que dois pontos determinam uma reta.

De fato, aprendemos que, algebricamente, uma reta é caracterizada por dois números reais: pelo seu coeficiente angular a e pelo seu termo independente b. Por outro lado, vimos que a partir de dois pontos da reta, (x_1, y_1) e (x_2, y_2) com $x_1 \neq x_2$, podemos (calculando a razão dada acima) determinar 0 seu coeficiente angular a. Daí, sabendo que qualquer de seus pontos tem que satisfazer uma equação $y = ax + 6$ para algum número real b, podemos usar qualquer um dos dois pontos conhecidos para determinar *b;* ou seja, determinamos a reta.

Vamos agora relacionar propriedades algébricas com propriedades gráficas das funções afins.

(a) *Se o coeficiente angular* $a = 0$, *então* $f(x) = b$ *para qualquer valor de* x *e, portanto,* f *é uma função constante*.

Geometricamente isso se traduz pelo fato de que seu gráfico (isso já sabíamos) é uma reta horizontal que corta o eixo vertical no ponto que representa 0 número b.

(b) *Se* $a > 0$*, podemos ver que* f *é crescente*.

De fato, se $x_1 < x_2$, então (como $a > 0$)

$$ax_1 < ax_2,$$

donde

$$ax_1 + b < ax_2 + b,$$

ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$. Graficamente, isso nos diz que os pontos da reta $y = ax + b$ sobem à medida que x percorre o eixo horizontal da esquerda para a direita.

(c) *Se* $a < 0$*, então* f *é decrescente*.

Nesse caso se $x_1 < x_2$, como $a < 0$, temos que

$$ax_1 > ax_2$$

e, portanto,

$$ax_1 + b > ax_2 + b,$$

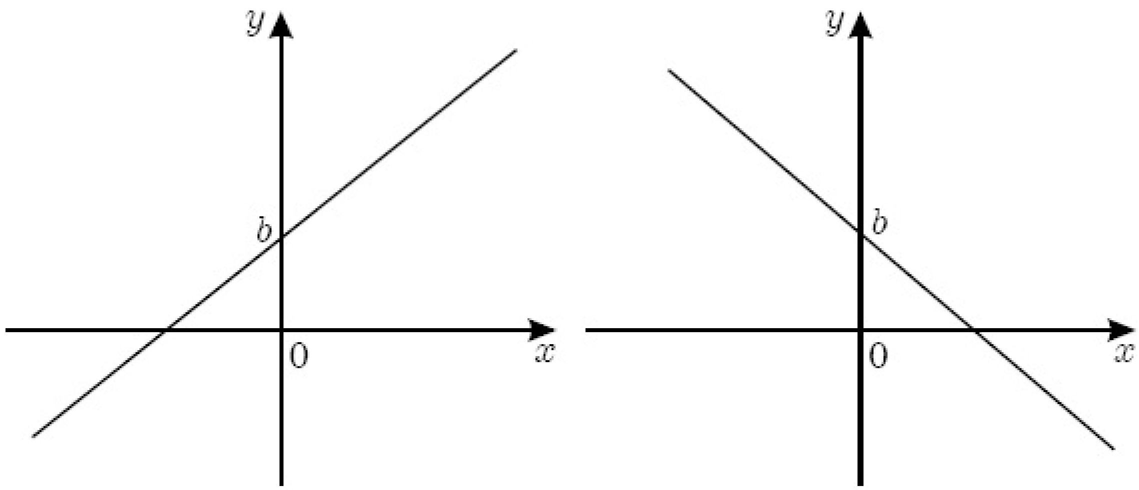
isto é,

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Graficamente temos que os pontos da reta $y = ax + b$ descem à medida que x percorre o eixo horizontal da esquerda para a direita.

(d) *Se $b = 0$, trata-se de uma reta que passa pela origem. Se $b < 0$ a reta intercepta o eixo vertical abaixo da origem e, se $b > 0$ essa interseção está acima do eixo horizontal.*

Como vimos, o número b corresponde à ordenada do ponto de interseção da reta $y = ax + b$ (ou do gráfico de f) com o eixo vertical.



(a) $a > 0$ e $b > 0$ (b) $a < 0$ e $b > 0$

Figura 1.2

(e) *Duas retas são paralelas exatamente quando possuem o mesmo coeficiente angular.*

De fato, sejam r_1 e r_2 duas retas com equações

$$y = ax + b \text{ e } y = \alpha x + \beta,$$

respectivamente. Temos, então, que r_1 é o gráfico de $f(x) = ax + b$ e r_2 é o gráfico de $g(x) = \alpha x + \beta$. Se $\alpha = a$, então $g(x)$ pode ser escrito como

$$g(x) = f(x) + \beta - b.$$

Logo, pelo que vimos anteriormente, seu gráfico é uma translação vertical do gráfico de f, isto é, r_2 é paralela a r_1.

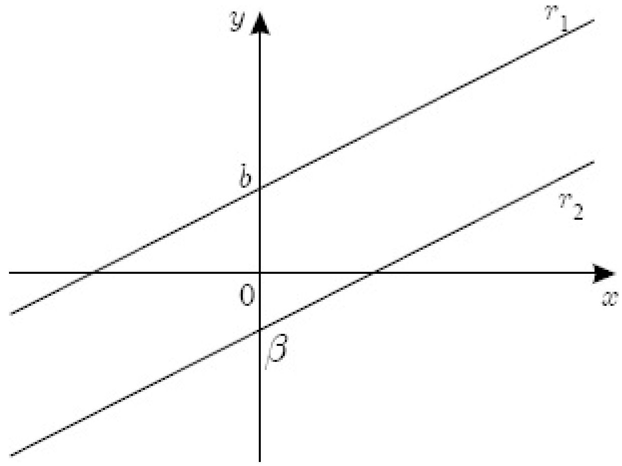


Figura 1.3

Por outro lado, se $\alpha \neq a$, podemos ver que a equação $f(x) = g(x)$ tem solução: de fato, se $\alpha x + \beta = ax + b$, então

$$(\alpha - a)x = b - \beta,$$

e, como $\alpha - a \neq 0$, podemos dividir ambos os membros da igualdade por $\alpha - a$, obtendo a (única) solução $x = \frac{b-\beta}{\alpha-a}$.
Isto nos diz que o gráfico de f (que é r_1) tem exatamente um ponto de interseção com o gráfico de g (que è r_2): o ponto de coordenadas $\left(\frac{b-\beta}{\alpha-a}, \frac{b\alpha-a\beta}{\alpha-a}\right)$, e, Portanto r_1 e r_2 não são retas paralelas.

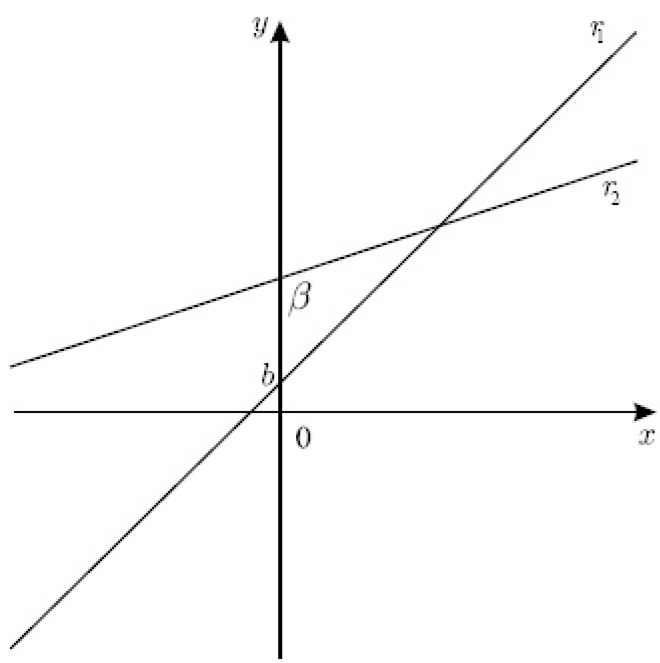


Figura 1.4

As funções afins aparecem como resultado da modelagem matemática de muitos problemas. Vejamos um exemplo clássico que vem da física.

O movimento de um corpo que se move ao longo de uma linha reta é dito *uniforme* se a distância percorrida é proporcional ao tempo de percurso. Esse é chamado um movimento *retilíneo uniforme*.

Matematicamente esse conceito se traduz da seguinte forma: o movimento de um corpo é retilíneo uniforme se existe um número real v (a constante de proporcionalidade), tal que se D é a distância percorrida num intervalo de tempo T, então $D = vT$.

Assim, se para cada t unidades de tempo após o início do movimento $d(t)$ é a distância do corpo a um ponto referencial, então a distância percorrida no intervalo de tempo t é $d(t){-}d_0$, onde d_0 é a distância do corpo ao ponto referencial no momento em que se iniciou o movimento.

Logo $d(t) - d_0 = vt$ e, portanto,

$$d(t) = vt + d_0$$

Se o movimento dura T_0 unidades de medida de tempo, então esse movimento é descrito pela função $d : [0, T_0] \to \mathbb{R}$, onde $d(t) = vt + d_0$, que é uma função afim.

O número v é chamado a *velocidade* do corpo (em unidades de comprimento por unidade de tempo) e o movimento retilíneo uniforme é caracterizado pela trajetória retilínea e pela velocidade constante.

Problema: *Numa das etapas de seu treinamento, um atleta deve correr numa pista reta de 200 metros mantendo a velocidade constante. Para que o atleta possa corrigir seu andamento, o treinador coloca, a cada 10 metros da pista, uma placa onde está marcado quantos segundos após o início da corrida o atleta deveria passar por aquele ponto. Sabendo que o treinador estabeleceu uma velocidade de 4 metros por segundo, qual deve ser a reação do atleta se na marca de 30 metros seu cronômetro estiver marcando seis segundos?*

> *Solução:* Como a velocidade deve ser constante e a pista é reta, o movimento do atleta deve ser retilíneo uniforme, ou seja, a distância, a cada t segundos após iniciada a corrida, será dada por $d(t) = 4t + d_0$ metros, para alguma distância inicial d_0. Usando o começo da pista (que é o ponto onde se inicia o movimento) como ponto de referência para medir as distâncias temos $d_0 = 0$.

Queremos então determinar em quantos segundos o atleta deveria chegar à marca de 30 metros e comparar com o tempo em que ele efetivamente alcançou esse ponto. Em outras palavras, para que valor de t tem-se $d(t) = 30$?

Como sabemos que $d(t) = 4t$, obtemos $t = 7,5 > 6$. Logo, o atleta chegou à marca dos 30 metros antes do tempo desejado e, portanto, deve diminuir um pouco sua velocidade.

O coeficiente angular

Para encerrarmos nosso estudo das funções afins e da representação algébrica de retas no plano, vamos buscar uma interpretação geométrica para o coeficiente angular de uma reta.

Para isso, primeiro precisamos lembrar que a representação gráfica de uma função depende da escolha da escala de cada eixo. Na figura a seguir apresentamos, em 1.5a, o gráfico

$$f(x) = 2x - 1$$

num sistema de coordenadas com a mesma escala nos dois eixos e, em 1.5b, é dado o gráfico da mesma função num outro sistema de coordenadas para o qual as escalas de cada eixo são diferentes.

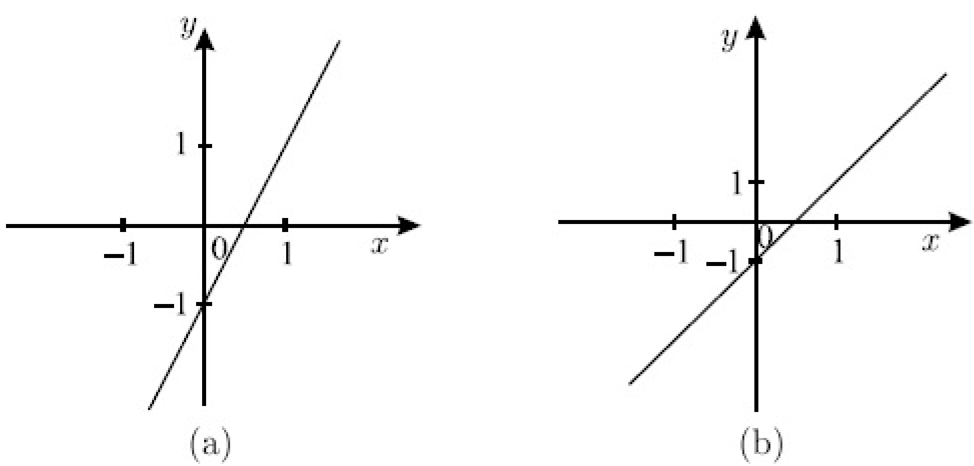


Figura 1.5

A escolha de escalas diferentes pode ser apenas conveniente ou, em certos casos, inevitável, como ocorre quando as ordens das grandezas que estão sendo representadas em cada eixo são muito diferentes (por exemplo, pense no gráfico da função afim que dá, em termos da distância a um ponto de referência, a posição de um carro que se move à velocidade constante de 80 kilômetros por hora, num período de cinco horas).

Para podermos entender com clareza a questão das escalas, comecemos considerando um problema de conversão de unidades de medida, que é um exemplo de relação descrita por uma função afim.

No Brasil é adotado oficialmente um único sistema de medidas, o sistema métrico. Isso não ocorre nos Estados Unidos (herança inglesa), e, portanto, ao consumirmos produtos americanos (ou produzidos para os americanos), podemos nos deparar com a necessidade de converter unidades de medida.

Um bom exemplo se refere a unidades de medidas de comprimento. Nos Estados Unidos é muito frequente o uso da polegada como unidade de medida de comprimentos (quem trabalha com ferramentas importadas certamente sabe disso).

Consideremos então, no Plano Cartesiano, o sistema de coordenadas tal que a unidade no eixo horizontal (eixo-x;) é a polegada e no eixo vertical (eixo-y) a unidade é o centímetro.

Nesse plano, seja r_+ a semirreta que passa pela origem e faz um ângulo de 45 graus com a semirreta positiva do eixo-x, como na Figura 1.6.

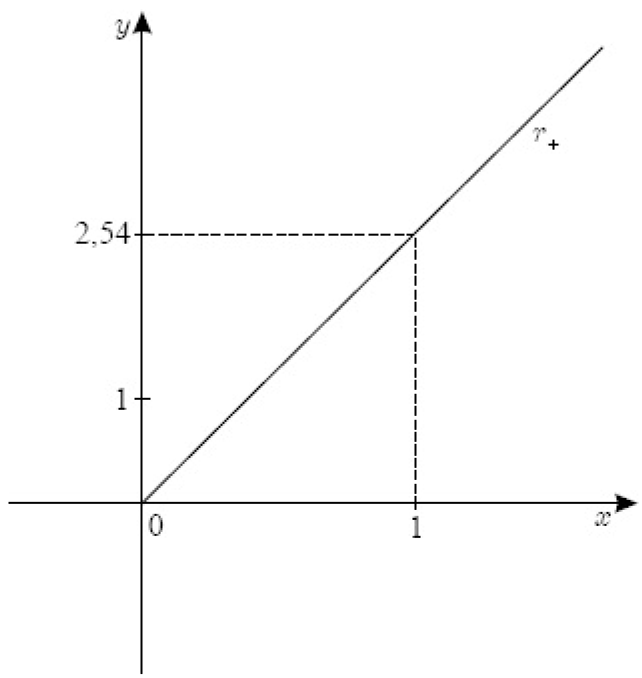


Figura 1.6

A geometria plana nos diz que se P é um ponto qualquer de r_+, então o segmento de reta PA e o segmento PB (veja Figura 1.6) têm o mesmo tamanho, ou seja, se (x, y) dá as coordenadas de P, então x *é a* medida em polegadas de um segmento de reta e y é a medida em centímetros do mesmo segmento.

Pelo que aprendemos, basta conhecermos as coordenadas de dois pontos de r_+ para determinarmos sua equação. Já temos um ponto, que é a origem (0, 0), o outro obtemos pela informação de que

$$1 \text{ polegada} = 2,54 \text{ centímetros},$$

isto é, (1; 2, 54) é um ponto de r_+.

A equação que queremos é, então,

$$y = 2,54x$$

para $x \geq 0$, e, portanto, a conversão de medidas em polegadas para medidas em centímetros é dada pela função afim, $f(x) = 2,54x$, para $x \geq 0$.

Na verdade escolhemos esse problema por se tratar de um caso particular da situação geral.

Mais claramente, vamos agora abstrair do fato que estávamos falando de centímetros e polegadas e nos fixarmos na ideia de que estamos tratando de um sistema de coordenadas dado pela escolha de escalas possivelmente diferentes para cada eixo.

O que devemos fazer é, no que foi dito acima, substituir "polegada" por "unidade de medida do eixo-x", "centímetro" por "unidade de medida do eixo-y" e 2, 54 por um número positivo m, para concluir que se um segmento de reta mede x unidades de medida do eixo-x, então o mesmo segmento, quando medido com a "régua" do eixo-y, tem mx unidades de medida do eixo-y.

Em outras palavras, a conversão de escalas de unidades do eixo-x para unidades do eixo-y é dada pela função afim $f(x) = mx$.

Podemos agora voltar à questão de interpretar geometricamente o coeficiente angular de uma reta.

Dado então um sistema de coordenadas (x, y), sejam r_a a reta cuja equação é $y = ax$ e r_1 a reta $y = x$. Suponhamos que $a > 0$ e sejam α e θ os ângulos que as retas fazem com o eixo-x, como na Figura 1.7.

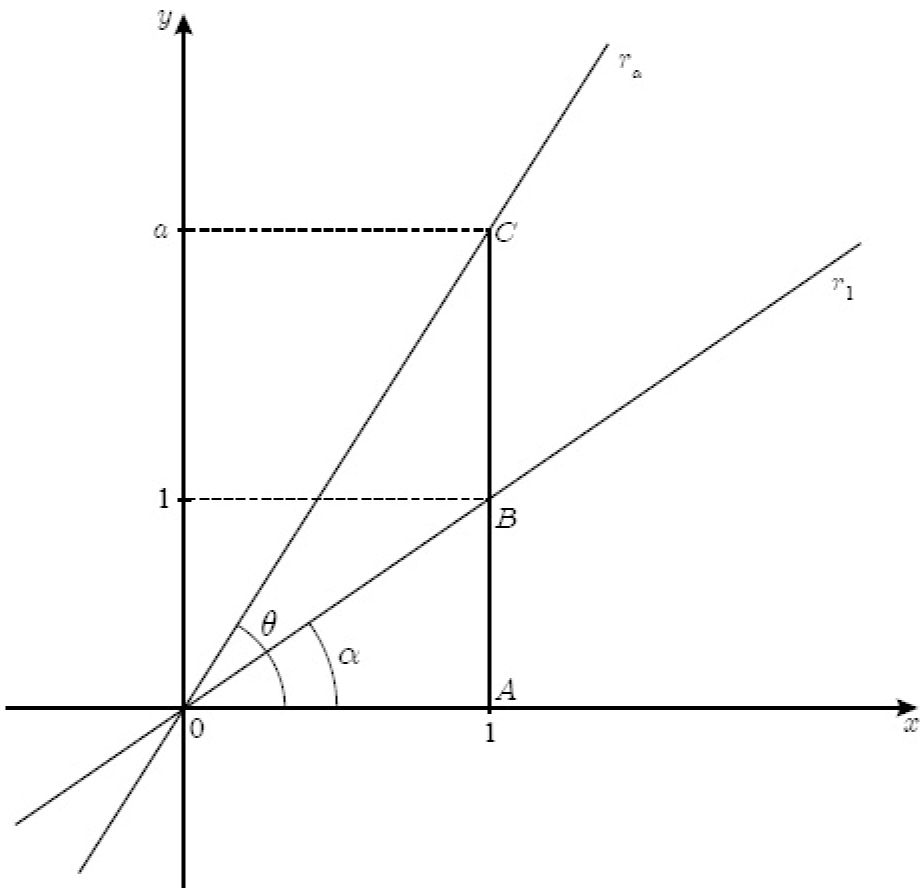


Figura 1.7

Da geometria plana sabemos que se l é o comprimento do segmento AB e d é o comprimento do segmento OA **quando medidos com uma mesma régua** (qualquer que seja), então a razão $\frac{l}{d}$ é a tangente do ângulo α.

Usemos então a régua do eixo-y para medir esses comprimentos. Nessa unidade, a medida de AB, que pode ser lida diretamente no eixo-y, é 1.

Para acharmos a medida de OA (que é igual a 1 unidade de medida do eixo-x) devemos usar a função de conversão de escalas, $f(x) = mx$ para $x = 1$, obtendo $d = m$ unidades de medida do eixo-y. Obtivemos então que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{m}.$$

Repetindo agora o processo para o ângulo θ, obtemos que o segmento AC mede a unidades de comprimento do eixo-y e, portanto, tg $\theta = \frac{a}{m}$, ou seja,

$$a = m \cdot \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Observe que obtivemos a seguinte informação:

o coeficiente angular de uma reta é a tangente do ângulo que a reta faz com o eixo-x exatamente quando os dois eixos têm a mesma escala.

De fato, $\alpha = \text{tg}\ \theta$ se e somente se $m = 1$, ou seja, a função de conversão de escalas é a função identidade, o que quer dizer que os dois eixos têm a mesma escala.

Geometricamente, $\alpha = \text{tg}\ \theta$ se e somente se $\text{tg}\ \alpha = 1$, que nos diz que α é o ângulo de 45 graus. Ou seja, a reta $y = x$ faz um ângulo de 45 graus com o eixo-x o que também nos diz que os dois eixos têm a mesma escala.

Finalmente observamos que se a é um número negativo, os mesmos resultados valem, se consideramos ângulos orientados, isto é, θ é negativo e $\text{tg}\ \theta$ é a tangente trigonométrica.

Esse resultado chama nossa atenção para o fato de que não é correto dizermos que o coeficiente angular é a tangente do ângulo θ que a reta faz com o eixo-x.

Isso se torna muito relevante dada a facilidade cada vez maior de uso de calculadoras gráficas e computadores, pois o uso desses recursos sem a devida atenção para o problema das escalas pode levar a situações aparentemente contraditórias.

Por exemplo, costumamos ensinar que o coeficiente angular de uma reta perpendicular à reta $y = ax + b$ é $-\frac{1}{a}$, mas isso só é verdade se os dois eixos têm a mesma escala. Assim, se usarmos um computador para traçar os gráficos de $y = 2x + 1$ e $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ com escalas diferentes em cada eixo, obteremos duas retas que não são ortogonais.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Ache a equação da reta que passa pelos pontos $(-1, 1)$ e $(2, 1)$.
2. Ache a equação da reta que tem coeficiente angular $\frac{1}{3}$ e passa pelo ponto $(1, \frac{1}{2})$.
3. Ache a equação da reta com inclinação $0,25$ que passa por (1,3).
4. Ache a equação da reta que é paralela a $y = -3x + 1$ e passa pelo ponto $(-\frac{1}{2}, 1)$.

5. Ache a equação da reta que é paralela a $y = 2x - 1$ e passa pelo ponto $(1, 0)$.

6. Considere o sistema de equações

$$\alpha x + 2y = 3$$

$$2x + 3y = \beta.$$

Para quais pares de números α e β tem-se que:

(a) Esse sistema tem exatamente uma solução?

(b) Esse sistema não tem solução?

(c) Há outras possibilidades, isto é, diferentes de (a) e (b)? Quais? Interprete geometricamente as respostas.

7. Responda sem fazer contas: quantas soluções o sistema de equações abaixo tem?

$$x + y = 3$$

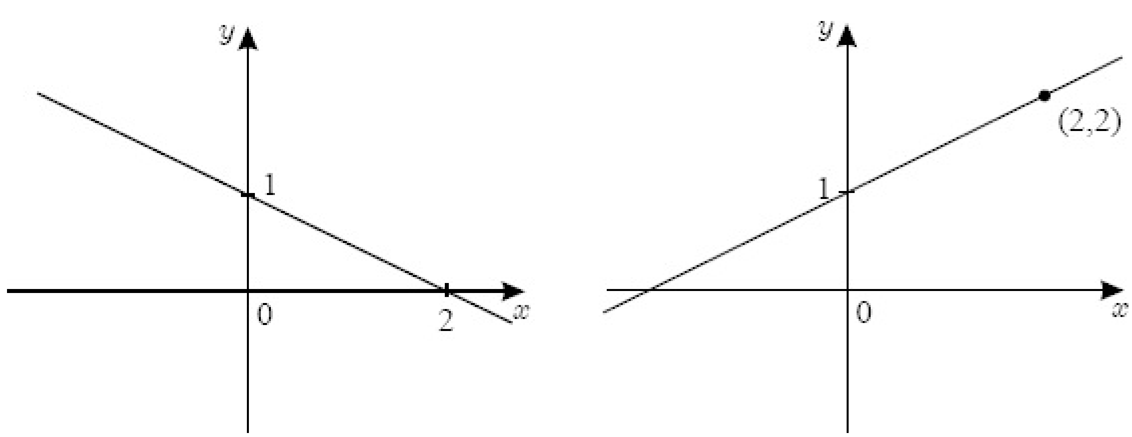
$$-x + y = 3$$

8. Mostre que se $\alpha \neq 0 \neq \beta$ e r é a reta que passa pelos pontos $(\alpha, 0)$ e $(0, \beta)$, então as coordenadas (x, y) dos pontos de r satisfazem $\frac{y}{\beta} + \frac{x}{\alpha} = 1$.

9. Considere as funções abaixo e diga para que valores de x se tem $f_1(x) < f_2(x)$.

$$f_1(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x < 5, \\ x - 2 & \text{se } x > 5, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < 7, \\ \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} & \text{se } x > 7. \end{cases}$$

10. Dê a equação de cada uma das retas cujos gráficos são dados abaixo.

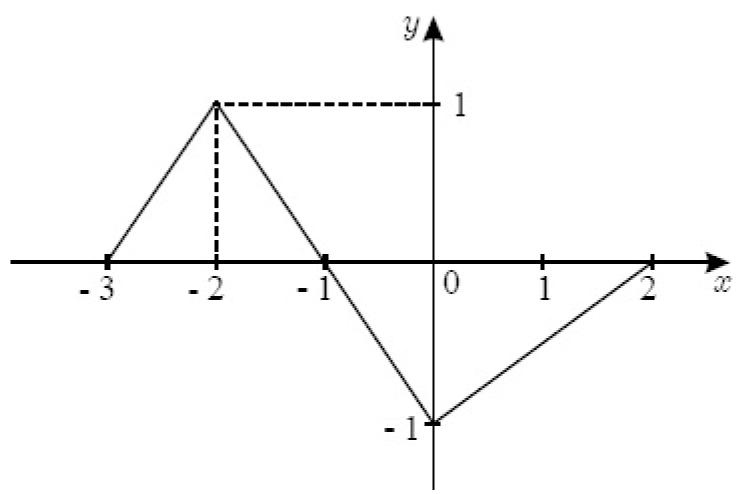


11. Determine a equação da reta que:
    (a) passa por $(2, -3)$ com coeficiente angular -4.
    (b) passa por $(-4, 2)$ e $(3, -1)$.
    (c) passa por $(-4, 2)$ e tem coeficiente angular igual ao recíproco negativo do coeficiente angular da reta do item acima.
    (d) passa por $(1, 6)$ e é paralela ao eixo y.
    (e) passa por $(4, -2)$ e é paralela à reta $y = -\frac{x}{3} + 7$

12. Determine os pontos de interseção das retas do exercício anterior com os eixos coordenados.

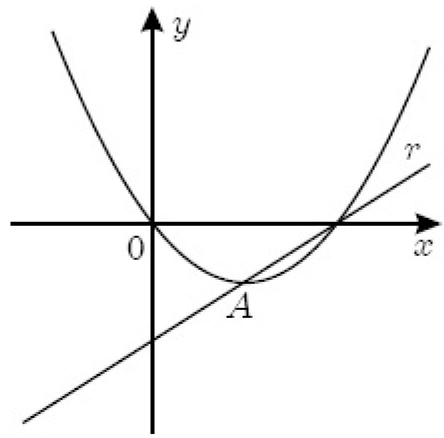
13. Num sistema de coordenadas com a mesma unidade nos dois eixos, considere o círculo de centro em $(1, 1)$ e raio 2. Determine a equação das retas tangentes a esse círculo (interceptam o círculo num único ponto) que são paralelas à reta $y = x$

14. Dê a expressão algébrica para a função cujo gráfico é dado abaixo.



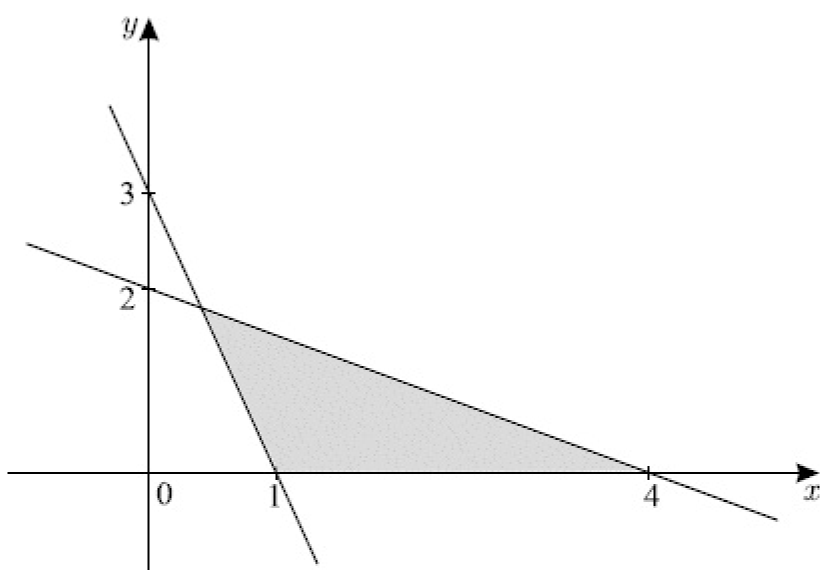
15. As retas $y = 2x + 1$ e $y = -x + 2$ se cortam? Se for o caso, determine o ponto de interseção.

16. Abaixo são dados os gráficos de $f(x) = x^2 - x$ e da reta r que tem inclinação $\frac{1}{2}$. Calcule as coordenadas do ponto A.

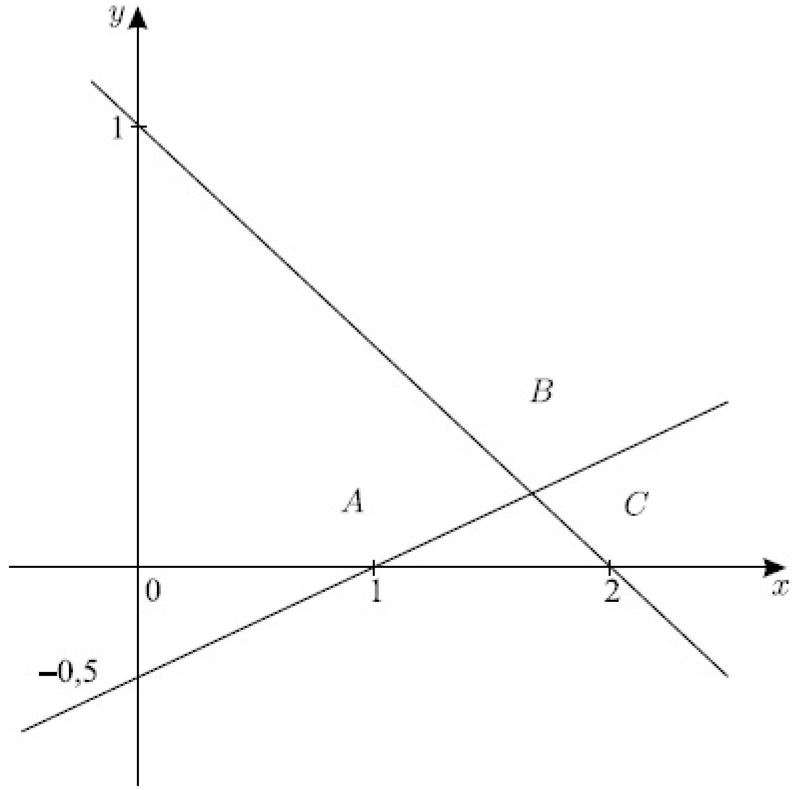


17. Seja r a reta $y = -\frac{3}{4}x + 3$. Dada uma reta passando por (0,0) considere o triângulo determinado pelas duas retas e o eixo horizontal. Expresse a área deste triângulo como função da inclinação da reta dada, explicitando o seu domínio?

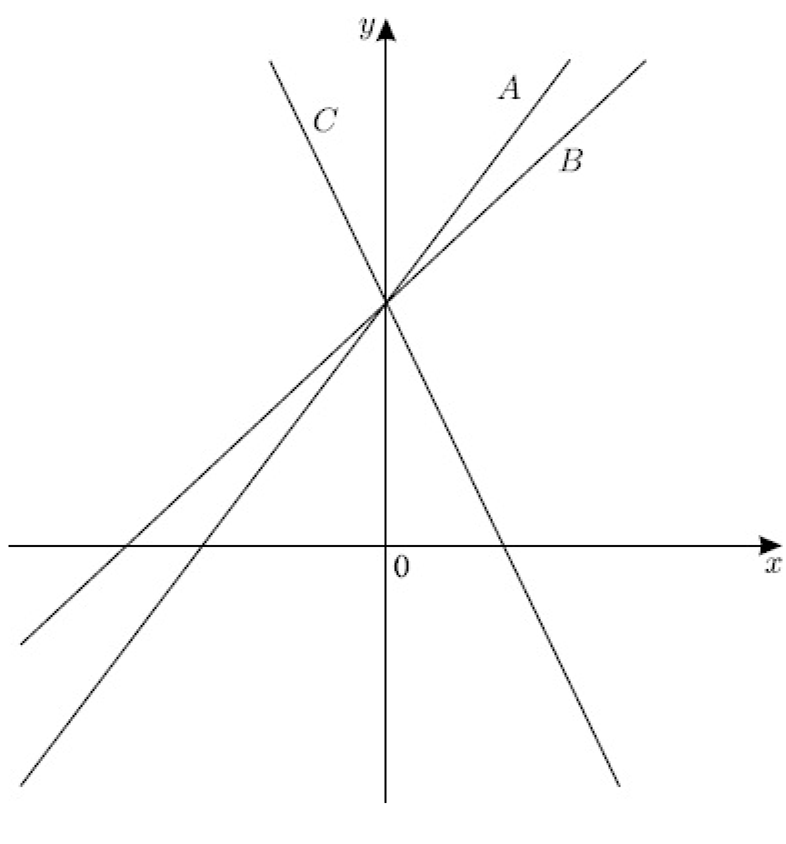
18. Considere as retas desenhadas na figura abaixo. Calcule a área da região destacada.



19. Calcule a área do triângulo ABC dado na figura abaixo.



20. Associe cada reta da figura abaixo à sua equação:

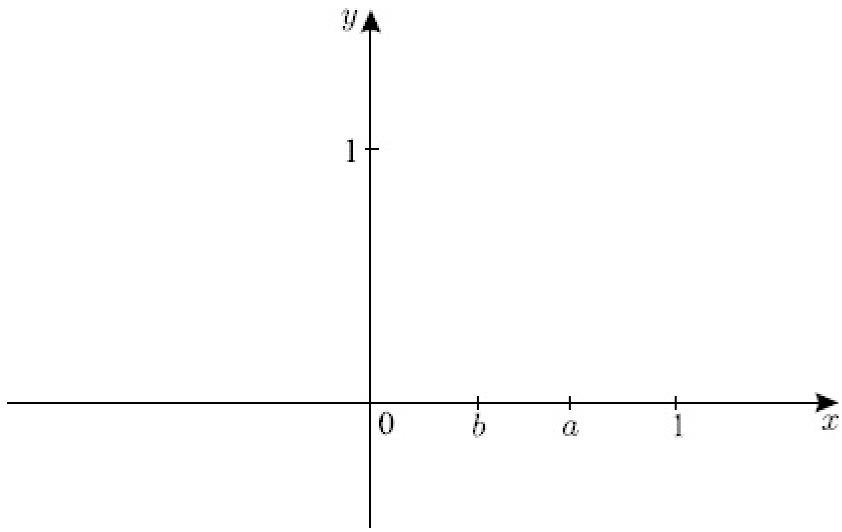


(a) $y = \sqrt{2}x + 3$.

(b) $y = -\pi x + 3$.

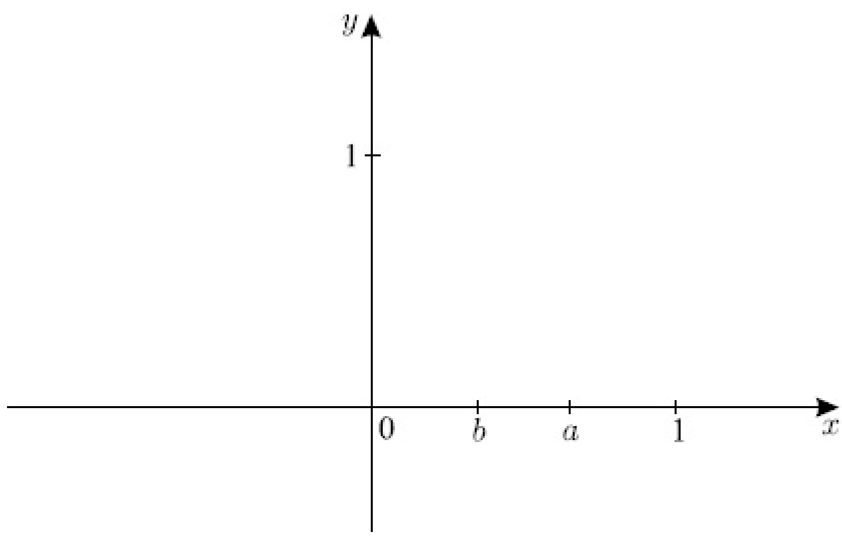
(c) $y = 2x + 3$.

21. Dado o sistema de eixos abaixo, faça o gráfico de $y = ax + b$.



22. Marque no eixo x os pontos que representam:

(a) $\alpha + b$ (b) $a - b$ (c) ab (d) $\frac{1}{a}$



23. Seja $g(x) = 2x - 1$. Faça o gráfico de $g(x)$ para $x \in [-1, 1]$ e o gráfico de uma função f tal que a equação $f(x) = g(x)$ tenha exatamente três soluções no intervalo $[-1, 1]$.

24. Em cada item abaixo considere a função f dada. Para cada $x \neq 1$, seja

$s(x)$ a inclinação da reta que passa pelos pontos $(1, f(1))$ e $(x, f(x))$. Ache uma expressão para $s(x)$:

(a) $f(x) = x$

(b) $f(x) = 3x + 1$

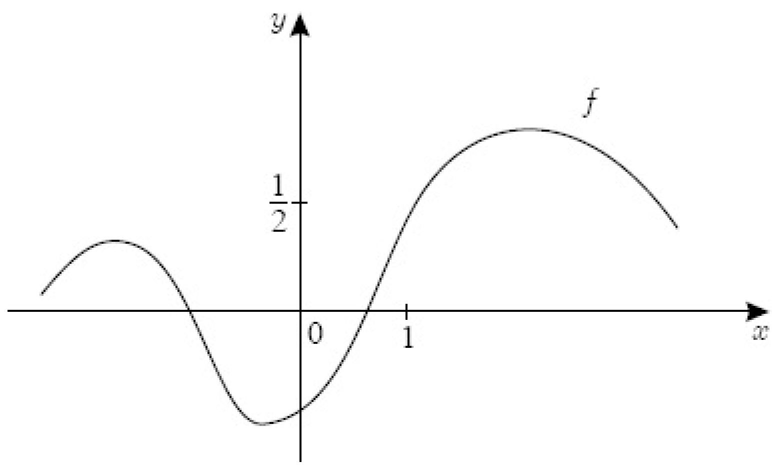
(c) $f(x) = x^2$

(d) $f(x) = 3x^2$

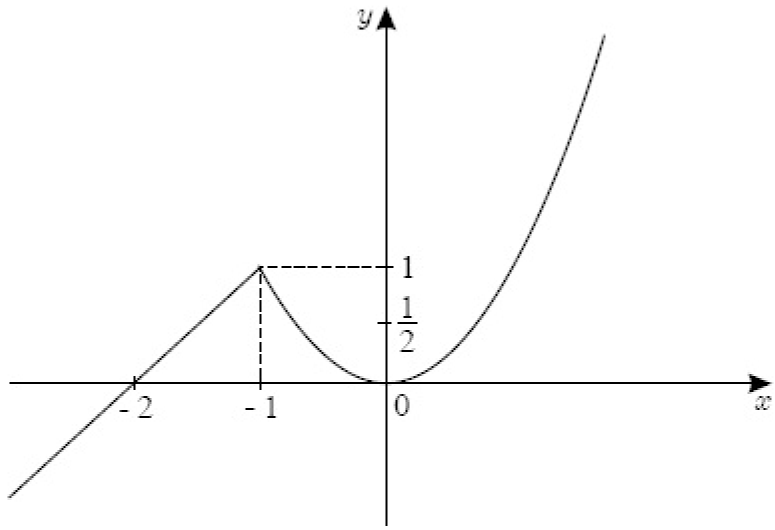
(e) $f(x) = 3x^2 + 1$

25. Para cada item do exercício anterior, calcule $\lim_{x \to 1} s(x)$ e ache a equação da reta que tem inclinação $\alpha = \lim_{x \to 1} s(x)$ e passa pelo ponto $(1, f(1))$.

26. Marque no eixo x as soluções da equação $f(x) = \frac{1}{2}x$.



27. Seja f a função cujo gráfico é dado abaixo. Sabendo que para $x \geq -1$, $f(x) = x^2$, ache as soluções da equação $f(x) = \frac{1}{2}$.



28. Seja $g(x) = \sqrt{x}$.

   (a) Se $x \geq 0$ e $x \neq 2$, seja $s(x)$ a inclinação da reta que passa pelos pontos $(2, g(2))$ e $(x, g(x))$. Ache uma expressão para $s(x)$.

   (b) Calcule $\lim_{x\to 2} s(x)$ e ache a equação da reta que tem inclinação $\alpha = \lim_{x\to 2} s(x)$ e passa pelo ponto $(2, g(2))$. (Obs.: $x - 2 = (\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})$, para $x \geq 0$).

   (c) Seja a > 0. Se $x \geq 0$ e $x \neq a$, seja $s_a(x)$ a inclinação da reta que passa pelos pontos $(a, g(\alpha))$ e $(x, g(x))$. Calcule $\lim_{x\to a} s_a(x)$ e ache a equação da reta que tem inclinação $T(a) = \lim_{x\to a} s_a(x)$ e passa pelo ponto $(a, g(a))$.

   (d) O que ocorre quando $a = 0$?

29. Seja $f(x) = |x|$.

   (a) Seja $a \neq 0$. Se $x \neq a$, calcule a inclinação, $s_a(x)$, da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$.

   (b) Calcule $\lim_{x\to a} s_a(x)$ e ache a equação da reta que tem inclinação $T(a) = \lim_{x\to a} s_a(x)$ e passa pelo ponto $(a, f(a))$.

   (c) O que ocorre se $a = 0$?

30. Repita o exercício anterior para $h(x) = |x^3|$

   (0bs.: $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$).

31. Seja $-1 \neq a \neq 1$ e $f(x) = |x^2 - 1|$.

   (a) Se $x \neq a$, calcule a inclinação, $s_a(x)$, da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$.

(b) Calcule $\lim_{x \to a} s_a(x)$ e ache a equação da reta que tem inclinação $T(a) = \lim_{x \to a} s_a(x)$ e passa pelo ponto $(a, f(a))$.

(c) O que ocorre se $a = -1$ ou $a = 1$?

32. (a) Ache a equação da reta não vertical que intercepta a parábola $y = x^2$ somente no ponto (1,1).

(b) Para cada número $x \neq 1$, seja $s(x)$ *o* coeficiente angular da reta secante à parábola $y = x^2$ que passa por (1,1) e (x, x^2). Encontre uma expressão para a função s.

(c) Calcule $\lim_{x \to 1} s(x)$.

(d) Seja a um número real fixo. Ache a equação da reta não vertical que intercepta a parábola $y = x^2$ somente no ponto (a, a^2).

(e) Para cada $x \neq a$, seja $s_a(x)$ *o* coeficiente angular da reta secante à parábola $y = x^2$ que passa por (a, a^2) e (x, x^2). Encontre uma expressão para a função s_a.

(f) Calcule $\lim_{x \to a} s_a(x)$.

33. Represente num mesmo sistema de coordenadas as retas $y = x - 1$ e $y = x + 2$. A partir dessa representação geométrica, resolva as desigualdades abaixo:

(a) $\dfrac{x-1}{x+2} < 0.$

(b) $\dfrac{x-1}{x+2} \leq 0.$

(c) $\dfrac{x-1}{x+2} > 0.$

(d) $\dfrac{x-1}{x+2} \geq 0.$

34. Resolva geometricamente (isto é, visualizando no eixo-a; as soluções das desigualdades dadas):

(a) determine números a e b para que o intervalo $(-3, 2]$ seja o conjunto solução da desigualdade $\frac{x+a}{x+b} \leq 0$.

(b) resolva as desigualdades $\frac{x+a}{x+b} \geq 0$ e $\frac{x+a}{x+b} > 0$, com a e b sendo os numeros determinados em (a).

(c) para quais pares de números a e b *o* intervalo $(-3, 2)$ é o conjunto solução da desigualdade $\frac{x+a}{x+b} < 0$?

(d) é possível encontrar números a e b tais que o intervalo $[-3, 2]$ seja o conjunto solução da desigualdade $\frac{x+a}{x+b} \leq 0$?

35. A partir das representações das retas $y = 2x - 1$ e $y = 3x+2$ num mesmo sistema de coordenadas, resolva (geometricamente) as desigualdades:

(a) $\dfrac{2x-1}{3x+2} \leq 0.$

(b) $\dfrac{2x-1}{3x+2} \geq 0.$

(c) $\dfrac{3x+2}{2x-1} \leq 0.$

(d) $\dfrac{3x+2}{2x-1} \leq 0.$

36. Resolva geometricamente:

(a) encontre, se possível, números *a e b* para que o intervalo (1, 3] seja o conjunto solução da desigualdade $\frac{2x+a}{3x+b} \leq 0$.

(b) encontre, se possível, números *a e b* para que o intervalo [1, 3) seja o conjunto solução da desigualdade $\frac{2x+a}{3x+b} \leq 0$.

(c) encontre, se possível, números *a e b* para que o intervalo (1, 3] seja o conjunto solução da desigualdade $\frac{2x+a}{3x+b} \geq 0$.

37. Repita o exercício anterior com as desigualdades $\frac{a-2x}{3x+b} \leq 0$ e $\frac{a-2x}{3x+b} \geq 0$.

38. Repita o exercício anterior com as desigualdades $\frac{ax+2}{bx+3} \leq 0$ e $\frac{ax+2}{bx+3} \geq 0$.

39. Repita o exercício anterior com as desigualdades $\frac{ax+2}{bx-3} \leq 0$ e $\frac{ax+2}{bx-3} \geq 0$.

40. Resolva geometricamente:

(a) encontre, se possível, números *a e b* para que o intervalo $(-1, 2]$ seja o conjunto solução da desigualdade $\frac{ax+2}{bx+3} \leq 0$.

(b) encontre, se possível, números *a e b* para que o intervalo $(-1, 2]$ seja o conjunto solução da desigualdade $\frac{ax+2}{bx+3} \geq 0$.

41. Repita o exercício anterior com as desigualdades $\frac{ax+2}{bx-3} \leq 0$ e $\frac{ax+2}{bx-3} \geq 0$.

42. A partir do gráfico de $f(x) = (x - 1)(x - 2)$? resolva cada desigualdade abaixo (isto é, encontre o conjunto solução a partir de sua visualização no eixo-x):

(a) $(x - 1)(x - 2) \leq 2x$.

(b) $(x - 1)(x - 2) \leq -\frac{1}{2}x + 1$.

(c) $(x - 1)(x - 2) \leq 3x - 4$.

43. Em cada item abaixo faça os gráficos das funções f e g num mesmo sistema de coordenadas dando as coordenadas dos pontos de intersecção (se houver):

(a) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ e $g(x) = 3x - 1$.

(b) $f(x) = x - x^2$ e $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

44. Use os gráficos obtidos no exercício anterior para resolver as desigualdade abaixo sem fazer cálculos:

(a) $2x^2 - 4x + 2 \leq 0$.

(b) $x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \leq 0$.

45. Use gráficos para responder cada pergunta abaixo sem resolver as desigualdades:

(a) a desigualdade $x^2 \leq 2x + 2$ tem solução?

(b) a desigualdade $x^2 \leq \sqrt{2}x + \frac{1}{2}$ tem solução?

(c) a desigualdade $1 - x^2 \leq \pi\, x$ tem solução?

(d) a desigualdade $\frac{1}{2} - x^2 \geq \pi\, x$ tem solução?

(e) o conjunto solução da desigualdade $x^2 - \frac{1}{2} \geq \pi\, x$ é um intervalo?

As funções x^n

Nesta seção estudaremos as funções $x \mapsto x^n$, onde n é um número inteiro positivo. Uma função desse tipo é chamada uma *função potência*. Nosso objetivo é obter um esboço do gráfico de cada uma dessas funções que descreva seu comportamento. Não pretendemos aqui dar um tratamento rigoroso a esse estudo, mas apenas destacar certas propriedades que tornam bastante aceitáveis os esboços que obteremos.

Além de propriedades algébricas que são bastante simples, usaremos também a continuidade dessas funções que, como vimos, decorre do Teorema 1.1 do Capítulo 5.

Para $n = 1$, já sabemos que $f_1(x) = x$ é denominada a função identidade e que seu gráfico é uma reta (crescente) que passa pela origem. Comecemos então estudando a função $f_2(x) = x^2$.

A ideia aqui é abstrairmos do fato de que já conhecemos bem essa função, pois os argumentos que usaremos para obter um esboço de seu gráfico podem ser usados para estudar as outras funções (isto é, com $n > 2$) para as quais não dispomos da construção geométrica da parábola, que é o gráfico de f_2.

A primeira observação que fazemos é que

$$f_2(-x) = f_2(x),$$

já que

$$(-x)^2 = x^2,$$

ou seja, f_2 é uma função par e, portanto, 0 gráfico de f_2 é simétrico em relação ao eixo vertical.

Assim, para entendermos a ação de uma função f_2 é suficiente estudarmos 0 seu comportamento para $x \geq 0$.

Para evitar termos que lembrar repetidamente que, no que se segue, estuda-remos a função f_2 apenas no intervalo $[0, \infty)$, denotemos por ϕ_2 a restrição da função f_2 ao intervalo $[0, \infty)$, isto é,

$$\phi_2 \colon [0, \infty) \to \mathbb{R} \text{ com } \phi_2(x) = x^2.$$

Utilizando propriedades algébricas e a continuidade da função ϕ_2, podemos destacar as seguintes propriedades:

(a) *ϕ_2 é crescente.*

(b) *o gráfico de ϕ_2 é uma curva contínua, isto é, uma curva que pode ser traçada sem que se tire 0 lápis do papel.*

Essa propriedade decorre do fato de que ϕ_2 é contínua e seu domínio é um intervalo (veja Teorema 1.2 (TVI) do Capítulo 5).

(c) *Se $\alpha > 0$, então a equação $\phi_2(x) = \alpha x$ tem duas soluções, $x_1 = 0$ e $x_2 = \alpha$. Mais ainda,*

$$\text{se } 0 < x < \alpha, \text{ então } \phi_2(x) < \alpha x,$$

e

$$\text{se } x > \alpha, \text{ então } \phi_2(x) > \alpha x.$$

De fato, se $x^2 = \alpha x$, então

$$x^2 - \alpha x = 0$$

donde

$$x(x - \alpha) = 0$$

e, portanto, $x = 0$ ou $x - \alpha = 0$. Isto é, as soluções são $x_1 =$

0 e $x_2 = \alpha$.
Por outro lado, se $0 < x < \alpha$, então

$$x - \alpha < 0,$$

e, como $x > 0$, obtemos

$$(x - \alpha)x < 0,$$

donde

$$x^2 < \alpha x,$$

ou seja, $0 < \phi_2(x) < \alpha x$ se $0 < x < \alpha$. Analogamente, se $x > \alpha$, então $x - \alpha > 0$, donde

$$(x - \alpha)x > 0$$

e, portanto,

$$x^2 > \alpha x,$$

isto é, $\phi_2(x) > \alpha x$ se $x > \alpha$.

Vamos agora interpretar graficamente as informações acima, para obtermos um esboço do gráfico de ϕ_2 num intervalo [0, a], sendo a um número positivo qualquer.

A propriedade **(a)** nos diz que os pontos $(x,\phi_2(x))$ do gráfico de ϕ_2 sobem à medida que x percorre o intervalo $[0, a]$ da esquerda para a direita.

A propriedade **(b)** nos diz que o gráfico de ϕ_2 no intervalo$[0, a]$ é uma curva ligando os pontos (0, 0) e (a, a^2), que é traçada sem que se tire o lápis do papel.

Por outro lado, **(c)** nos diz que, dado qualquer número $\alpha > 0$, os pontos do gráfico de ϕ_2 estão abaixo da reta $y = \alpha x$, para $0 < x < \alpha$, e estão acima desta reta para $x > \alpha$.

Em particular, podemos descartar para o gráfico de ϕ_2 os três comportamentos descritos na figura abaixo. Observe que os gráficos dessa figura possuem as propriedades **(a)** e **(b)**.

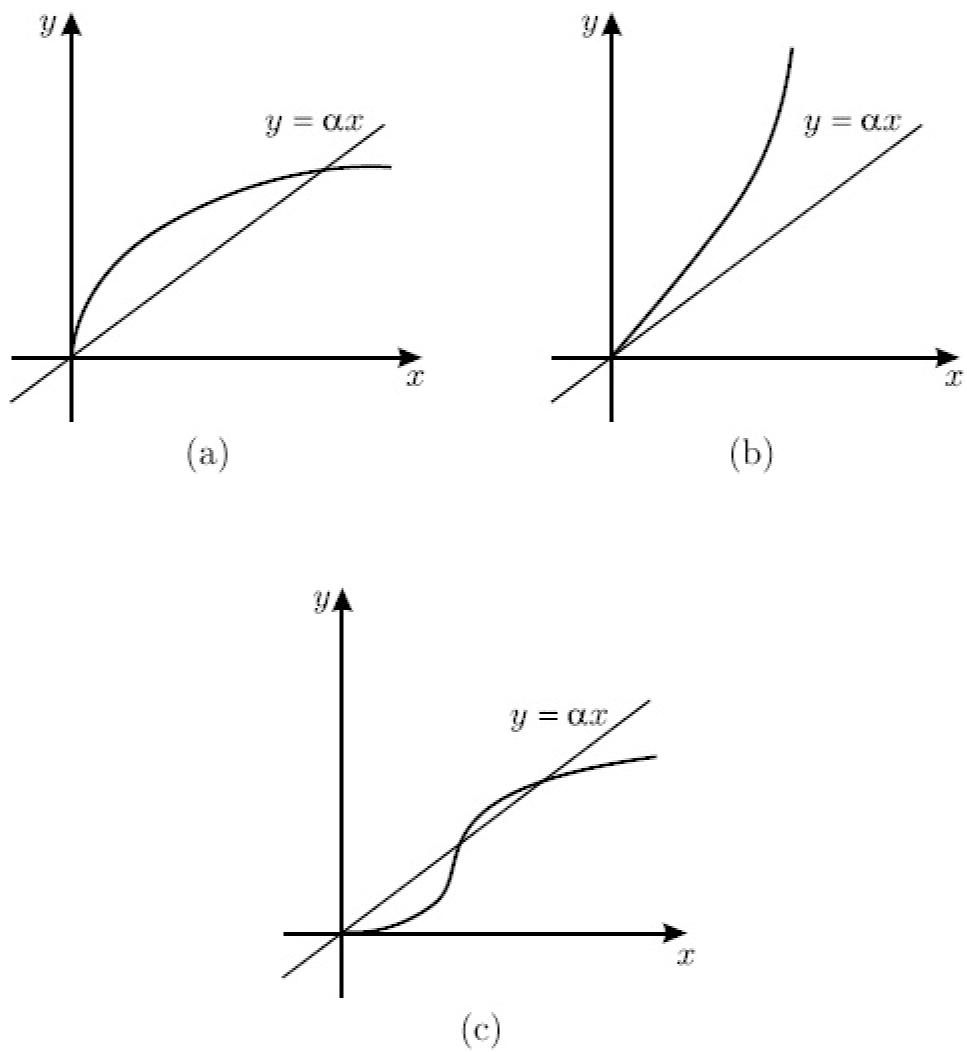


Figura 1.8

Nas Figuras 1.8a e 1.8b, vemos que a condição de que, para $0 < x < \alpha$ os pontos do gráfico devem estar abaixo da reta $y = \alpha x$, não é satisfeita para a reta desenhada. Por outro lado, na Figura 1.8c, a outra condição, de que para $x > \alpha$, os pontos do gráfico devem estar acima da reta é que não é satisfeita.

Vemos então (isso não é uma demonstração) que levando em conta as três propriedades acima, é razoável acreditar que o gráfico dado na Figura 1.9 é um bom esboço para o gráfico de ϕ_2, em qualquer intervalo $[0, a]$, com a sendo um número positivo e $0 < \alpha < a$.

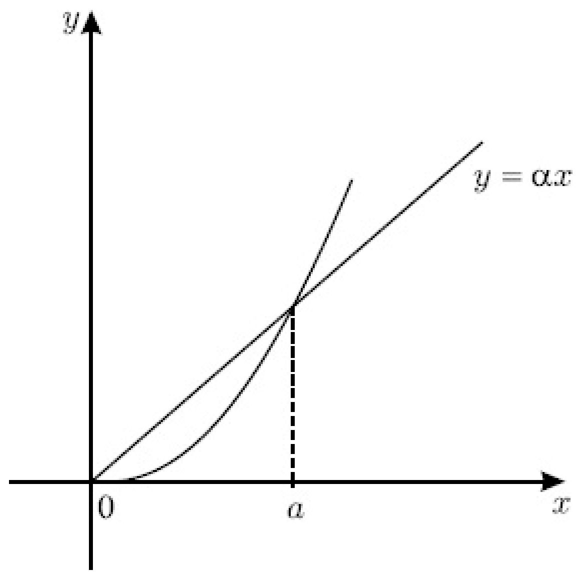


Figura 1.9

De fato, usando resultados do cálculo diferencial, podemos provar que isso é o que ocorre. Podemos também comparar com o gráfico obtido por um programa gráfico de computador.

Observemos agora, que decorre das propriedades **(a)** e **(b)** que, para qualquer $a > 0$, a imagem do intervalo $[0, a]$ pela função ϕ_2 é o intervalo $[0, a^2]$.

De fato, como ϕ_2 é crescente, temos que

$$\text{se } 0 \le x \le a, \text{ então } 0 \le \phi_2(x) \le a^2,$$

isto é, $\phi_2(x) \in [0, a^2]$. Por outro lado,

$$\text{se } b \in (0, a^2), \text{ então } \phi_2(0) < b < \phi_2(a)$$

e, como ϕ_2 é contínua, o Teorema do Valor Intermediário garante que $b = \phi_2(x_0)$ para algum número x_0 do intervalo $(0, a)$, isto é, b pertence à imagem do intervalo $[0, a]$ pela função ϕ_2.

Geometricamente, isso significa que a reta horizontal $y = b$ intercepta o gráfico de ϕ_2 restrita ao intervalo $[0, a]$, já que o ponto $(0,0)$ está abaixo dessa reta e o ponto (a, a^2) está acima da mesma reta; como vimos no Capítulo 4, isto significa que para algum valor de $x_0 \in [0, a]$ tem-se que $\phi_2(x_0) = b$ (veja Figura 1.10).

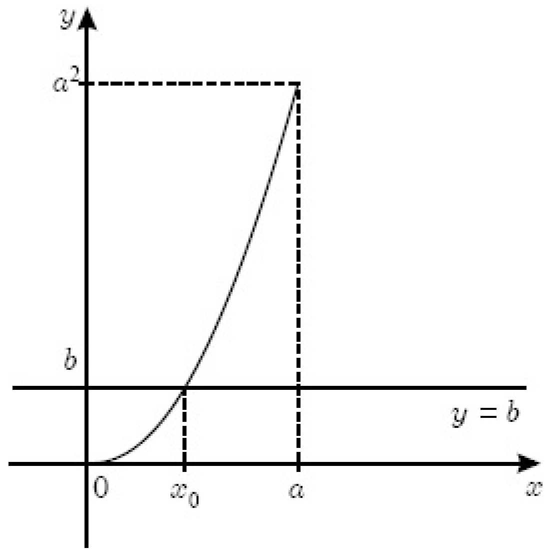


Figura 1.10

Uma consequência importante desse fato é que a imagem da função ϕ_2 é o intervalo $[0, \infty)$.

De fato, para qualquer inteiro positivo k, temos que $[0, k] \subset [0, k^2]$, ou seja, o intervalo $[0, k]$ está contido na imagem de ϕ_2, qualquer que seja o inteiro positivo k e, portanto, a união de todos esses intervalos, que é o intervalo $[0, \infty)$, também está contida na imagem de ϕ_2. Como já sabemos que a imagem está contida em $[0, \infty)$ (pois $\phi_2(x) \geq 0$), podemos concluir que $\text{Im}(\phi_2) = [0, \infty)$.

O fato de que a imagem de ϕ_2 é o intervalo $[0, \infty)$ é que garante que qualquer número real *não negativo* possui uma raiz quadrada, isto é, se $b \geq 0$, então

$$b = \phi_2(a) = a^2$$

para algum número real $a \geq 0$.

Mais ainda, como ϕ_2 é crescente, podemos concluir que $b = a^2$ exatamente para um *único* número $a \geq 0$. Esse único número, como já vimos no Capítulo 4, é chamado a *raiz quadrada de b* e é denotado por $\sqrt{b}$. Mais adiante falaremos da função raiz quadrada, que é a função inversa de ϕ_2.

Passemos agora a estudar a função $f_3(x) = x^3$, Nesse caso, vemos que

$$f_3(-(x)) = -f_3(x),$$

pois $(-x)^3 = -x^3$, ou seja, f_3 é uma função ímpar. Em particular, o gráfico de f_3 para $x \leq 0$ pode ser obtido do gráfico de f_3, para $x \geq 0$.

Assim, também nesse caso é suficiente estudarmos a função f_3 no intervalo $[0,\infty)$. Como fizemos anteriormente, denotemos por ϕ_3 a restrição de f_3 a esse intervalo. Isto é,

$$\phi_3\colon [0, \infty) \to \mathbb{R} \text{ e } \phi_3(x) = x^3.$$

Com argumentos análogos aos usados no caso da função ϕ_2, podemos verificar que ϕ_3 possui propriedades análogas a (a), (b) e (c) acima. Isto é,

(a) ϕ_3 é crescente.

De fato, se $0 < x < y$, já sabemos que $x^2 < y^2$. Multiplicando os membros da primeira desigualdade por x^2 e os da segunda por y, obtemos

$$0 < x^3 < yx^2 \qquad \text{e} \qquad yx^2 < y^3,$$

ou seja,

$$\phi_3(0) = 0 < x^3 = \phi_3(x) < yx^2 < y^3 = \phi_3(y).$$

Mostramos assim que, se $0 \leq x < y$, então $\phi_3(x) < \phi_3(y)$ e, portanto, ϕ_3 é uma função crescente.

(b) O gráfico de ϕ_3 é uma curva contínua.

Essa propriedade decorre do fato de que ϕ_3 é uma função contínua e seu domínio é um intervalo.

(c) se $\alpha > 0$, então a equação $\phi_3(x) = \alpha x$, $x \geq 0$, tem duas soluções, $x_1 = 0$ e $x_2 = \sqrt{\alpha}$. Mais ainda, se $0 < x < \sqrt{\alpha}$, então $\phi_3(x) < \alpha x$ e se $x > \sqrt{\alpha}$, então $\phi_3(x) > \alpha x$.

De fato, se $x^3 = \alpha x$, então

$$x^3 - \alpha x = 0,$$

donde

$$x(x^2 - \alpha) = 0,$$

e, portanto, $x = 0$ ou $x^2 - \alpha = 0$. Isto é, as soluções são $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\alpha}$ e $x_3 = -\sqrt{\alpha}$. Mas a solução x_3 é negativa e, portanto, não está no domínio de ϕ_3, logo não é solução de $\phi_3(x) = \alpha x$.

Por outro lado, se $0 < x < \sqrt{\alpha}$, então $x^2 < \alpha$, ou seja,

$$x^2 - \alpha < 0$$

e, como $x > 0$, obtemos

$$(x^2 - \alpha)x < 0,$$

donde

$$x^3 < \alpha x$$

ou seja, $0 < \phi_3(x) < \alpha x$, se $0 < x < \sqrt{\alpha}$. Analogamente, se $x > \sqrt{\alpha}$, então $x^2 - \alpha > 0$, donde

$$(x^2 - \alpha)x > 0$$

e, portanto,

$$x^3 > \alpha x,$$

isto é, $\phi_3(x) > \alpha x$ se $x > \sqrt{\alpha}$.

A partir daqui, vemos que podemos repetir os mesmos argumentos usados com a função ϕ_2 para concluir que podemos acreditar que a Figura 1.11 dá um bom esboço para o gráfico de ϕ_3 num intervalo $[0, a]$, para qualquer número real positivo a. Também nesse caso podemos provar, usando resultados do cálculo diferencial, que de fato esse é um bom esboço do gráfico de ϕ_3.

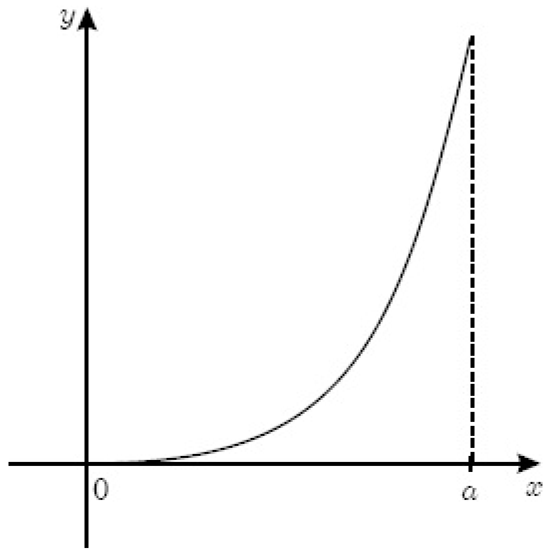


Figura 1.11

Isso nos leva a observar que os dois gráficos, quando feitos independentemente, sem alguma informação sobre as escalas, por exemplo, conhecendo as coordenadas de pelo menos um ponto (diferente de (0,0) e (1,1), que são os pontos de interseção dos dois gráficos), são indistinguíveis.

Concluímos assim que é conveniente fazermos os dois esboços num mesmo sistema de coordenadas. Para determinarmos a posição relativa das duas curvas podemos usar suas expressões algébricas, que são suficientemente simples, para ver que:

(i) para $0 < x < 1$, os pontos do gráfico de ϕ_2 devem estar acima dos pontos correspondentes do gráfico de ϕ_3.

(ii) para $x > 1$, a situação se inverte: os pontos do gráfico de ϕ_2 estão abaixo dos correspondentes pontos do gráfico de ϕ_3.

De fato, se

$$x^3 = x^2,$$

então

$$x^3 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x - 1) = 0$$

e, portanto, $x = 0$ ou $x = 1$. Se

$$0 < x < 1,$$

podemos multiplicar ambos os membros dessa desigualdade por x^2 (que é positivo), obtendo que

$$0 < x < 1 \Rightarrow x^3 < x^2.$$

Por outro lado, se $x > 1$, multiplicando novamente por x^2, obtemos que

$$x > 1 \Longrightarrow x^3 > x^2.$$

Na Figura 1.12 estão feitos os gráficos de x^2 e x^3 num intervalo $[0, a]$, com $a > 1$.

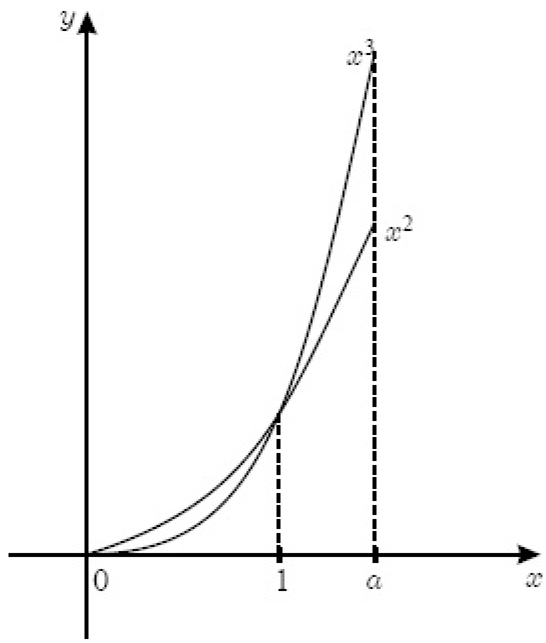


Figura 1.12

Para completarmos o estudo dessa família de funções, $x \mapsto x^n$, podemos ver que se denotamos por $\phi_n \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\phi_n(x) = x^n$, então para qualquer inteiro $n > 1$, tem-se que:

(1) ϕ_n possui propriedades análogas a (a), (b) e (c) acima.

(2) se $n \neq m$, então $\phi_n(x) = \phi_n(x)$ exatamente quando $x = 0$ ou $x = 1$.

(3) se $n < m$, então

$$0 < x < 1 \Longrightarrow \phi_n(x) > \phi_m(x) \qquad \text{e}$$

$$x > 1 \Longrightarrow \phi_n(x) < \phi_m(x)$$

(4) a imagem de ϕ_n é o intervalo $[0, \infty)$.

De (1) podemos concluir, como fizemos para ϕ_3, que o gráfico de ϕ_n também é *parecido* com o gráfico de ϕ_2.

De (2) e (3) segue-se que, para $n < m$, os gráficos de ϕ_n e ϕ_m têm exatamente dois pontos de interseção, os pontos de coordenadas (0, 0) e (1,1), e que o gráfico de ϕ_n no intervalo (0,1) está acima do gráfico de ϕ_m, enquanto que no intervalo $(1, \infty)$ o gráfico de ϕ_n está abaixo do gráfico de ϕ_m.

Na Figura 1.13 são dados num, mesmo sistema de coordenadas, os gráficos de ϕ_n e ϕ_m num intervalo $[0, a]$, onde $n < m$ e $a > 1$.

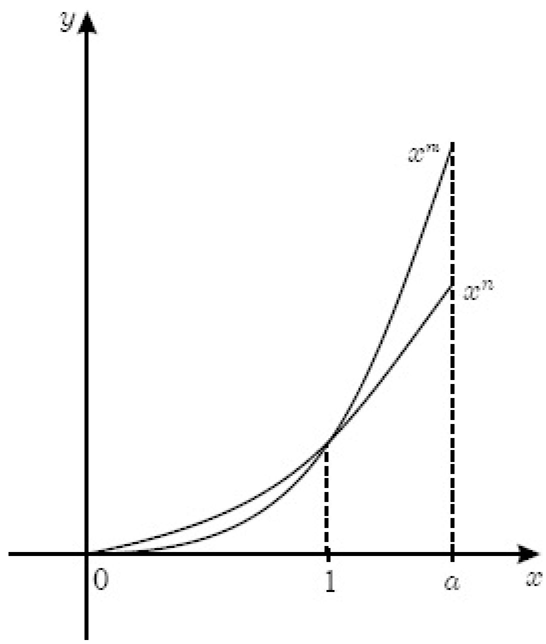


Figura 1.13

Agora, se denotamos por f_n a função $f_n(x) = x^n$, para $x \in \mathbb{R}$, temos que f_n é uma função par se n é par, e ímpar, se n é ímpar. Logo, podemos obter o gráfico de f_n a partir do gráfico de ϕ_n (que é o gráfico de f_n no intervalo $[0, \infty)$).

Na Figura 1.14a, são dados, num intervalo $[-a, a]$, $a > 1$, os gráficos de f_2, f_3 e f_4, e em 1.14b são dados os gráficos de f_3, f_4, e f_5.

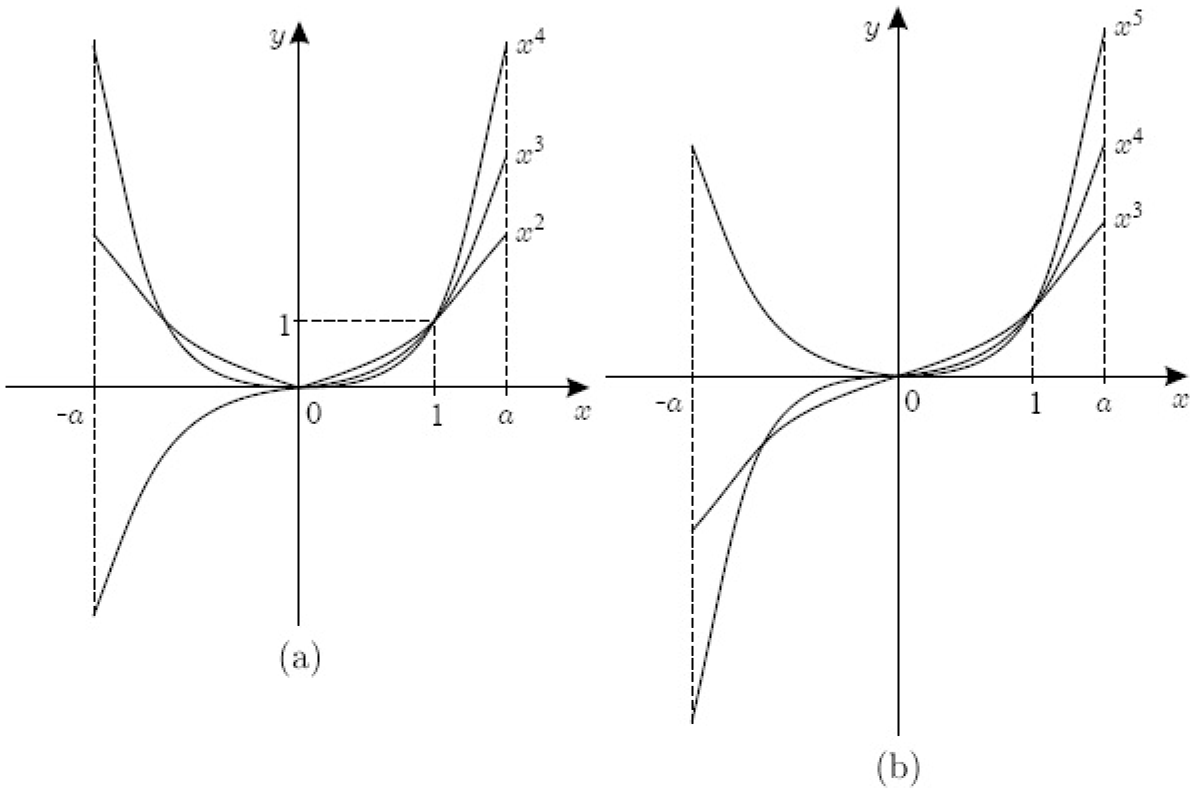


Figura 1.14

Finalmente, observamos que, para cada inteiro positivo *n,*

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty.$$

De fato, sabemos que

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty$$

e que

$$x > 1 \Longrightarrow x^n \geq x,$$

e, portanto, podemos usar o Teorema 4.2 (v) do Capítulo 5 para concluir que $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty.$

Por outro lado, como x^n é função par se n é par, e é função ímpar se n é ímpar, podemos usar o Teorema 4.8 (ii) na versão com $x \to -\infty$, para obter que

$$n \text{ par} \Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} x^n = \lim_{x \to -\infty} (-x)^n = \infty, \text{ e}$$

$$n \text{ ímpar} \Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} x^n = \lim_{x \to -\infty} -(-x)^n = -\infty.$$

Polinômios reais

Uma função polinomial ou polinômio (real) de grau $n \geq 1$ é uma função real dada por uma expressão do tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

onde n é um número inteiro e a_0, a_1, $a_2 \dots a_n$ são números reais com $a_n \neq 0$. Os números a_0, $a_1 \dots a_n$ são chamados os *coeficientes* do polinômio p. Uma função constante, $p(x) = a_0$, com $a_0 \neq 0$, é um polinômio de grau zero.

Uma função afim, $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ é um polinômio de grau 1 e uma função quadrática, $p(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ é um polinômio de grau 2. A função

$$p(x) = 3x^5 - x^3 + 2x^2 - 1$$

é um polinômio de grau 5, onde

$$a_5 = 3,\ a_4 = 0,\ a_3 = -1,\ a_2 = 2,\ a_1 = 0 \text{ e } a_0 = -1.$$

A importância dos polinômios vem da simplicidade de suas expressões, que só envolvem as operações soma e multiplicação de números reais. De fato, os polinômios são as funções obtidas pelas operações soma e multiplicação a partir das funções constantes e das funções elementares do tipo x^n, com n sendo um inteiro positivo (observe que x^r só é um polinômio quando o expoente, r, é um número inteiro positivo). Em particular, a soma e o produto de polinômios são também polinômios; mais precisamente, se p e q são polinômios, então a função soma, $p + q$, *e* a função produto, pq, definidas por

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x)$$
$$(pq)(x) = p(x)q(x),$$

respectivamente, são polinômios. O grau do produto de dois polinômios não nulos é a soma dos dois graus. Se p e q são polinômios de graus distintos, o grau da soma, $p + q$, é o maior dos dois graus (de p e q) e se p e q são polinômios de mesmo grau, n, e $p+q$ (ou $p-q$) não é nulo, então seu grau é menor ou igual a n.

Por exemplo, se

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 1$$

e

$$q(x) = 3x^7 - x^2 + x,$$

então

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x) = 3x^7 + x^3 - 3x^2 + x - 1,$$

cujo grau é o grau de q, que é 7, e

$$(pq)(x) = p(x)q(x) = 3x^{10} - 6x^9 - 3x^7 - x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x^2 - x,$$

cujo grau é $10 = grau(p) + grau(q)$.

Propriedades dos polinômios

Uma das propriedades importantes de polinômios é a continuidade que decorre do Teorema 1.1 do Capítulo 5, uma vez que um polinômio é o resultado da soma e do produto de funções contínuas.

Uma outra propriedade se refere ao número de soluções da equação $p(x) = 0$ com $x \in \mathbb{R}$. Se um número real a é solução da equação

$$p(x) = 0,$$

isto é, se $p(\alpha) = 0$, dizemos que α é uma raiz do polinômio p.

Por exemplo, como a equação

$$x^2 = 0$$

tem um única solução ($x = 0$), o polinômio $p(x) = x^2$, que tem grau 2, tem uma única raiz. Já o polinômio

$$p(x) = x^4 + 1$$

não tem nenhuma raiz, pois

$$p(x) = x^4 + 1 \geq 1 > 0$$

qualquer que seja o número real x.

Por outro lado, já sabemos que uma equação do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

pode ter uma, duas ou nenhuma solução, isto é, se o grau de um polinômio p é 2, então a equação $p(x) = 0$ tem no máximo duas soluções ou, equivalentemente, p tem no máximo duas raízes. Essa é uma propriedade válida em geral, isto é:

> *se p é um polinômio de grau n, então a equação $p(x) = 0$ tem no máximo n soluções.*

Ou, em outra palavras,

Se p é um polinômio de grau n, então p tem no máximo n raízes.

Para chegarmos a esse resultado, primeiramente observamos que *se a é* um número real qualquer e $k > 1$ é um inteiro, então a diferença $x^k - \alpha^k$ pode ser escrita na forma

$$x^k - \alpha^k = (x - \alpha)(x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + ... + \alpha^{k-2}x + \alpha^{k-1}).$$

Denotando por q_k o polinômio

$$q_k(x) = (x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + ... + \alpha^{k-2}x + \alpha^{k-1}),$$

temos que

$$x^k - \alpha^k = (x - \alpha)qk(x),$$

onde qk *é* um polinômio de grau $k - 1$.

Agora, se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, então

$$p(x) - p(\alpha) = a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \ldots + a_1(x - \alpha),$$

ou seja,

$$p(x) - p(\alpha) = a_n(x - \alpha)q_n(x) + a_{n-1}(x - \alpha)q_{n-1} + \ldots + a_1(x - \alpha).$$

Como cada parcela tem o fator $(x - \alpha)$, podemos colocá-lo em evidência, obtendo

$$p(x) - p(\alpha) = (x - \alpha)(a_n q_n(x) + a_{n-1}q_{n-1}(x) + \ldots + a_1).$$

Como cada um dos polinômios q_k tem grau $k - 1$, o polinômio

$$q(x) = a_n q_n(x) + a_{n-1}q_{n-1}(x) + \ldots + a_1$$

tem grau $n - 1$. Isto é, concluímos que se p é um polinômio de grau n e α é um número real qualquer, então para qualquer x temos que

$$p(x) = (x - \alpha)q(x) + p(\alpha),$$

onde q é um polinômio de grau $n - 1$. Em particular,

> *se α é uma raiz de um polinômio p de grau n, então $p(x) = (x - \alpha)q(x)$, com q sendo um polinômio de grau $n - 1$.*

Descrevemos essa propriedade dizendo que se $p(\alpha) = 0$, então o polinômio *p pode ser dividido pelo polinômio $x - \alpha$,* ou ainda que *p pode ser fatorado no produto $p(x) = (x - \alpha)q(x)$*. Essa forma de expressar p é chamada uma *fatoração de p*.

Dessa igualdade vemos que se β é uma outra raiz de p, então

$$p(\beta) = (\beta - \alpha)q(\beta) = 0 \text{ e,}$$

como $\beta - \alpha \neq 0$, temos que $q(\beta) = 0$. Isto é, β é também raiz de q e, portanto, q pode ser dividido por $(x - \beta)$, isto é,

$$q(x) = (x - \beta)r(x),$$

donde

$$p(x) = (x - \alpha)(x - \beta)r(x),$$

onde r é um polinômio de grau $n - 2$.

Por outro lado, se α é também uma raiz do polinômio q, usando a mesma propriedade, agora para q, obtemos que

$$q(x) = (x - \alpha)r(x),$$

com r sendo um polinômio de grau $n - 2$ (já que o grau de q é $n - 1$). Daí, temos que

$$p(x) = (x - \alpha)^2 r(x).$$

Repetindo sucessivamente esses argumentos, podemos provar o seguinte teorema:

Teorema 1.1: *Se p é um polinômio de grau n, e $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são as raízes de p (isto é, p tem k raízes), então p pode ser fatorado na forma*

$$p(x) = (x - \alpha_1)^{n1}(x - \alpha_2)^{n2} \ldots (x - \alpha_k)^{nk} g(x)$$

onde $n_1, n_2, \ldots, n_k$ são inteiros positivos e g é um polinômio sem raízes.

Como cada polinômio $(x - \alpha_i)^{ni}$ tem grau $n_i \geq 1$, o polinômio

$$u(x) = (x - \alpha_1)^{n1}(x - \alpha_2)^{n2} \ldots (x - \alpha_k)^{nk}$$

tem grau $n_1 + \ldots + n_k \geq k$ e, portanto,

$$\text{grau }(g) = \text{grau }(p) - \text{grau }(u) = n - (n_1 + \ldots + n_k).$$

Em particular, $n - (n_1 + \ldots + n_k)$ não pode ser negativo (é o grau de um polinômio), donde

$$k \leq n_1 + \ldots + n_k \leq n.$$

Como k é o número de raízes de p e $k \leq n$, concluímos que p tem no máximo n raízes. Cada inteiro positivo n_i, na fatoração dada pelo teorema acima, é chamado a multiplicidade da raiz α_i.

Observamos agora que o processo de fatoração que descrevemos acima nos diz que se conhecemos algumas raízes de um polinômio p, então o problema de achar as outras raízes se reduz ao problema de encontrar as raízes de um outro polinômio q, cujo grau é menor que o grau de p.

Essa informação é relevante porque podemos calcular os coeficientes do polinômio q a partir dos coeficientes de p e das raízes conhecidas. Consideremos, por exemplo, o polinômio

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2,$$

para o qual $x = 1$ e $x = -2$ são raízes. Então podemos fatorar p,

$$p(x) = (x - 1)(x + 2)q(x).$$

Como o grau de p é 4, temos que o grau de q é 2 e, portanto,

$$q(x) = ax^2 + bx + \mathrm{c}.$$

Para determinarmos os coeficientes a, b e c de q, efetuamos a multiplicação $(x - 1)(x + 2)$, obtendo

$$x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = (x^2 + x - 2)(ax^2 + bx + c),$$

donde

$$x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = ax^2(x^2 + x - 2) + bx(x^2 + x - 2) + c(x^2 + x - 2).$$

Observamos agora que os polinômios $bx(x^2 + x - 2)$ e $c(x^2 + x - 2)$ não possuem o termo x^4 e, portanto, o coeficiente do termo x^4 da expressão da direita é dado pelo polinômio $ax^2(x^2 + x - 2)$, isto é, a. Pela expressão à esquerda o coeficiente deve ser 1, ou seja, $a = 1$.

Substituindo então a por 1 na igualdade acima, obtemos

$$x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = x^4 + x^3 - 2x^2 + bx(x^2 + x - 2) + c(x^2 + x - 2),$$

donde

$$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = bx(x^2 + x - 2) + c(x^2 + x - 2).$$

Repetindo o argumento, vemos que o polinômio $c(x^2 + x - 2)$ não possui o termo x^3, o que nos permite concluir que $b = 2$, ou seja,

$$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 2x^3 + 2x^2 - 4x + c(x^2 + x - 2).$$

e, portanto,

$$x^2 + x - 2 = c(x^2 + x - 2).$$

que nos dá $c = 1$. Obtivemos então que

$$q(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2,$$

que só tem uma raiz, $x = -1$. Podemos assim concluir que o polinômio

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$$

tem exatamente três raízes: $x_0 = 1$, $x_1 = -2$ e $x_3 = -1$, sendo que a fatoração completa de p é

$$p(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 1)^2.$$

Esse resultado é muito útil quando conhecemos $n - 2$ raízes de um polinômio de grau n, já que, nesse caso, podemos fatorar o polinômio na forma

$$p(x) = g(x)q(x),$$

onde g é um polinômio de grau $n-2$, cujas raízes são as raízes de p que conhecemos e q é um polinômio de grau 2, cujas raízes (caso existam) sabemos calcular, como fizemos no exemplo acima.

Mas não é somente nesse caso que podemos usar esse resultado proveitosa-mente. Uma outra situação, por exemplo, é quando, ao determinarmos o polinômio q da fatoração obtida a partir de raízes conhecidas, nos deparamos com um polinômio que claramente não possui raízes, como no caso de $q(x) = x^4 + x^2 + 1$, que sabemos só assumir valores positivos.

Mas, de uma maneira geral, é de se esperar que qualquer que seja o método que usemos para calcular (exata ou aproximadamente) as raízes de um polinômio, o esforço aumente com o grau do polinômio.

Na verdade, existem fórmulas que fornecem as raízes de polinômios de graus 3 e 4 em função de seus coeficientes. No entanto, essas fórmulas são suficientemente complicadas para não terem valor prático. Por outro lado, já foi provado que uma tal fórmula não existe para polinômios de grau maior que 4.

Assim, o problema de cálculo de raízes de polinômios se torna um problema numérico, isto é, a busca de aproximações dessas raízes que sejam tão boas quanto se necessite. Como vimos no Capítulo 5, um dos métodos para se calcular aproximações de raízes de um polinômio é o método da bisseção.

Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$. Nosso objetivo agora é estudar o comportamento de p para valores de x tais que $|x|$ é um número suficientemente grande.

Se $x \neq 0$, podemos escrever $p(x)$ na forma

$$p(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right).$$

Dessa expressão vemos que

$$\lim_{x\to\infty} a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} = a_n = \lim_{x\to -\infty} a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}$$

e, portanto,

(i) se n é par e $a_n > 0$, então $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} p(x) = \infty$;

(ii) se n é par e $a_n < 0$, então $\lim_{x\to\infty} p(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$;

(iii) se n é ímpar e $a_n > 0$, então $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$;

(iv) se n é ímpar e $a_n < 0$, então $\lim_{x\to\infty} p(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} p(x) = \infty$.

Mas podemos usar a expressão acima para obter informações mais precisas a respeito do comportamento de $p(x)$ para $|x|$ muito grande.

Se $|x|$ é suficientemente grande, então a soma $\left(\frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)$ é um número muito pequeno. De fato, usando a desigualdade triangular, vemos que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{|x|} + .. + \frac{|a_1|}{|x^{n-1}|} + \frac{|a_0|}{|x^n|}.$$

Como queremos considerar apenas valores de x com $|x|$ sendo um número grande, podemos assumir que $|x| > 1$ e, portanto, $|x^k| = |x|^k > |x|$, ou seja,

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x}+...+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right| \leq \frac{1}{|x|}\left(|a_{n-1}|+...+|a_1|+|a_0|\right).$$

Podemos ver então que, por menor que seja um número positivo ε, se

$$|x| > b = \frac{1}{\varepsilon}(|a_{n-1}|+...+|a_1|+|a_0|),$$

então

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x}+...+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right| < \varepsilon,$$

isto é, podemos dizer que se $|x|$ é suficientemente grande, então

$$(\frac{a_{n-1}}{x}+...+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}) \cong 0$$

e, portanto,

$$(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+...+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}) \cong a_n.$$

Podemos assim dizer que se $|x|$ é suficientemente grande, então

$$p(x) \cong a_n x^n.$$

Descrevemos essa propriedade dizendo que para $|x|$ suficientemente grande, $p(x)$ *se comporta como* $a_n x^n$. Isso nos diz, em particular, que existe um número positivo b, tal que:

(i) se $a_n > 0$ e n é par, então p é decrescente no intervalo $(-\infty, -b)$, e crescente em (b, ∞).
(ii) se $a_n > 0$ e n é par, então p é crescente no intervalo $(-\infty, -b)$, e decrescente em (b, ∞).
(iii) se $a_n > 0$ e n é ímpar, então p é crescente nos intervalos $(-\infty, -b)$ e (b, ∞).
(iv) se $a_n > 0$ e n é ímpar, então p é decrescente nos intervalos $(-\infty, -b)$ e (b, ∞).

A continuidade dos polinômios e as informações que obtivemos garantem que se p é um polinômio de grau n ímpar, então p tem pelo menos uma raiz:

de fato, vimos que se $|x|$ é suficientemente grande, então $p(x) \simeq a_n x^n$. Em particular, se x_0 é suficientemente grande, então $p(-x_0)$ e $p(x_0)$ têm sinais opostos (já que $a_n(-x_0)^n$ e $a_n(x_0)^n$ têm sinais opostos) e, portanto, 0 Teorema do Valor Intermediário (Teorema 1.2 do Capítulo 5) garante que existe uma raiz entre $-x_0$ e x_0.

Agora é interessante observar que estimativas semelhantes às que acabamos de fazer mostram que para x suficientemente pequeno, isto é, próximo de 0, $p(x)$ se comporta como seu termo de menor grau. Por exemplo, se $p(x) = 3x^5 + x^4 - x^2 + 1$, podemos saber que 0 gráfico de p num intervalo suficientemente pequeno contendo o 0 é parecido com 0 gráfico de $-x^2 + 1$ perto de $x = 0$. Já 0 gráfico de $3x^5 + x^4 + 2x^3 - 1$ perto da origem é parecido com 0 gráfico de $2x^3 - 1$.

Em geral, se $a_{k0}x_{ko}$ é 0 termo de menor grau de um polinômio p, isto é, $k_0 \geq 1$ e $a_k = 0$ para $1 \leq k < k_0$, temos que:

(a) se k_0 é ímpar, então p é crescente (respectivamente, decrescente) num inter-valo contendo 0, dependendo se a_{k_0} é positivo (respectivamente, negativo).

(b) se k_0 é par, então num intervalo contendo 0, p é crescente à esquerda do 0 e decrescente à direita (respectivamente, p é decrescente à esquerda do 0 e crescente à direita) dependendo se a_{k0} é negativo (respectivamente positivo).

Uma consequência interessante desse resultado é que, na verdade, podemos ter uma ideia do comportamento de um polinômio perto de qualquer número x_0. Vejamos um exemplo: $p(x) = 3x^5 + x^4 - x^2 + 1$ e $x_0 = 1$.

Do que vimos no Capítulo 4, se definirmos $q(x) = p(x + 1)$, então 0 gráfico de q é a translação horizontal do gráfico de p de uma unidade para a esquerda, ou seja, 0 gráfico de q reproduz num intervalo contendo o 0 o comportamento do gráfico de p num intervalo contendo 0 1. Agora é suficiente efetuarmos as contas indicadas para obter $q(x) = g(x) + 17x + 4$, onde o termo de menor grau do polinômio g tem grau maior que 1 e $g(0) = 0$. Vemos assim que q é crescente num pequeno intervalo contendo 0 e, portanto, p é crescente num pequeno intervalo contendo $x_0 = 1$.

Em relação ao gráfico de um polinômio, a propriedade de que se 0 grau de $p(x)$ é n, então p tem no máximo n raízes nos diz, em particular, que a interseção de uma reta com 0 gráfico de p tem no máximo n pontos.

De fato, sabemos que se $y = ax + b$ é a equação de uma reta, então as abscissas dos pontos de interseção da reta com o gráfico de p são as soluções da equação $p(x) = ax + b$. Logo, se q é o polinômio definido por

$$q(x) = p(x) - (ax + b),$$

então as soluções da equação $p(x) = ax + b$ são as raízes de $q(x)$. Mas q tem o mesmo grau que p, já que o grau de $ax + b$ é 1. Ou seja, q tem no máximo n raízes.

Esse resultado nos dá um critério simples para decidirmos, por exemplo, se um dado gráfico pode ser o gráfico de um polinômio de determinado grau.

Como vimos no Capítulo 4, o gráfico de qualquer polinômio de grau 2 pode ser obtido do gráfico de $f(x) = x^2$. Essa propriedade, no entanto, não se generaliza para polinômios de grau maior que 2.

Por exemplo, na figura abaixo são dados os gráficos de $p(x) = x^3$, $q(x) = x^3 - x$ e $g(x) = x^3 + x$.

Por outro lado, usando as propriedades que já conhecemos, pode-se mostrar que o gráfico de qualquer polinômio de grau 3 é *parecido* com um desses três gráficos ou com suas reflexões em relação ao eixo-x;, dependendo do sinal do coeficiente do termo x^3.

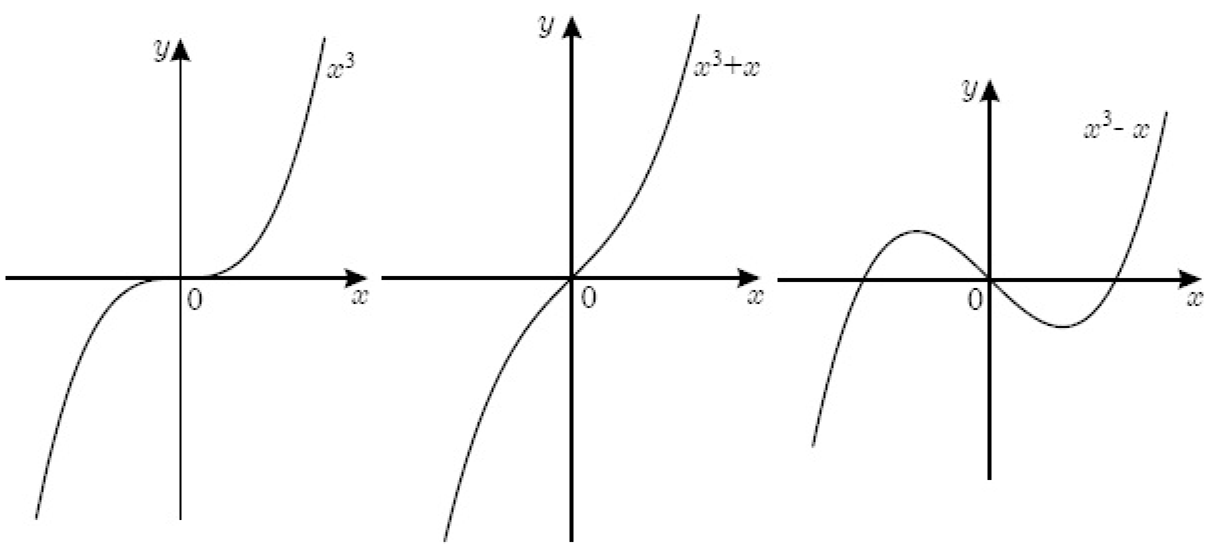


Figura 1.15

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Quantos pontos pode ter a interseção do gráfico de um polinômio de grau 4 com uma reta?
2. Decida se a proposição abaixo é falsa ou verdadeira:

Se p é um polinômio de grau 3 e r é uma reta, então o gráfico de p tem pelo menos um ponto de interseção com r.

3. O que você pode dizer a respeito da interseção do gráfico de x^2 com o gráfico de $p(x) = x^3 - 1000$?
4. Dê um exemplo de um polinômio p de grau 4 tal que o gráfico de p intercepta a reta $y = 2x + 1$ exatamente em quatro pontos.
5. Dê um exemplo de um polinômio p de grau 4 tal que o gráfico de p intercepta a reta $y = 2x + 1$ exatamente em dois pontos.
6. Sabendo que o gráfico de $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ é uma translação do gráfico de $g(x) = x^3 - x$, resolva a equação $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$.
7. Sejam p um polinômio de grau 5 e $q(x) = x^4 + x - 1$:

   (a) Qual é o número mínimo de pontos de interseção dos gráficos de p e q?

   (b) Qual é o número máximo possível de pontos de interseção dos gráficos de p e q?
8. Calcule os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} 90x^2 - x^4$.

   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 - 5x^4 - 2x^5$.

   (c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^6 + 3x^4 + 8}{2x^2 - 1}$.

   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 - 9}{1 - 2x^5}$.

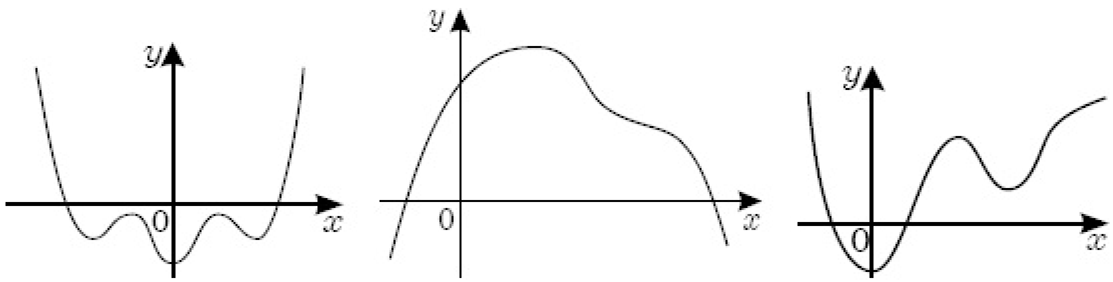
   (e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^8 - 9x^4 + 14}{x - 2x^8}$.
9. Se p e q são dois polinômios, quais são as possibilidades para $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{p(x)}{q(x)}$? E para $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{p(x)}{q(x)}$?
10. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

    (i) Se p é um polinômio de grau ímpar, então
    $$\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty.$$

    (ii) Se p é um polinômio de grau par, então
    $$\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} p(x) = \infty.$$

11. Dê uma equação do 3º grau que tenha três soluções distintas dentre as quais as soluções da equação $x^2 - 3x + 1 = 0$.

12. Um dos gráficos abaixo é o gráfico de um polinômio de grau 4. Qual deles?



(a) (b) (c)

13. Seja $f(x) = |x^4 - 1| - \frac{1}{2}$.

    (a) Faça um esboço do gráfico de f.

    (b) Quantas soluções tem a equação $f(x) = x$?

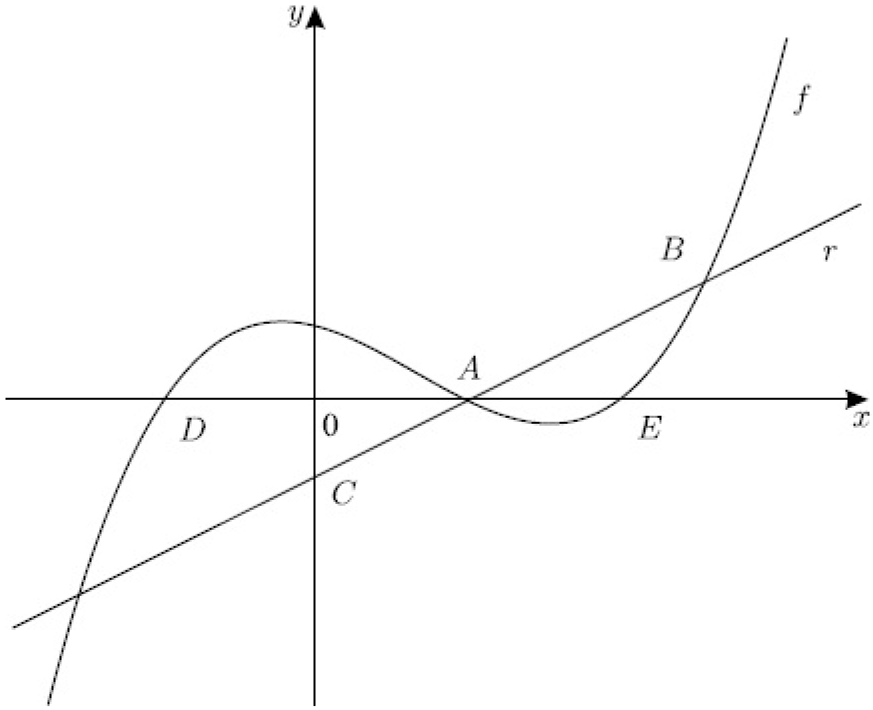
14. Faça um esboço do gráfico de um polinômio $p(x)$ de grau 4 que satisfaça simultaneamente as seguintes condições:

    (a) $\lim\limits_{x \to \infty} p(x) = -\infty$.

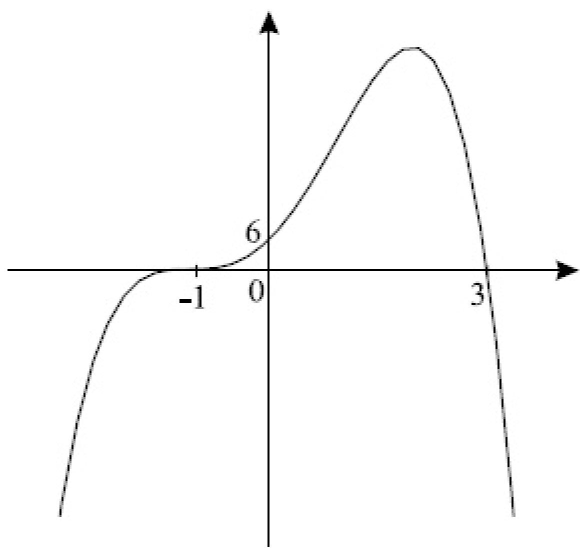
    (b) $p(-1) = p(0) = p(2) = 0$.

    (c) $p(x) \leq 0$ para $x > 0$.

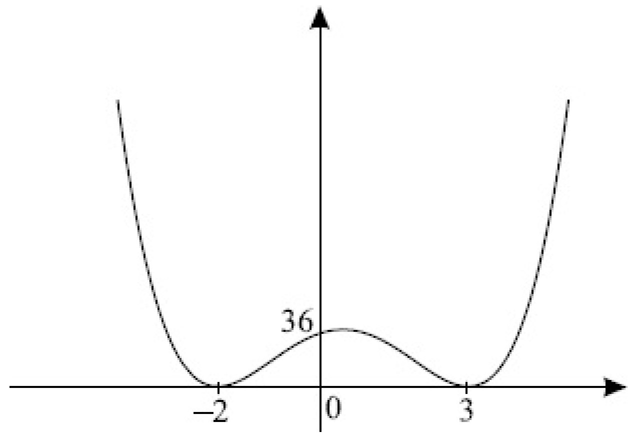
15. Na figura abaixo são dados o gráfico de $f(x) = x^3 - x^2 - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$ e a reta r que tem inclinação $\frac{1}{2}$. Sabendo que $f(1) = 0$, determine as coordenadas dos pontos A, B, C, D e E.



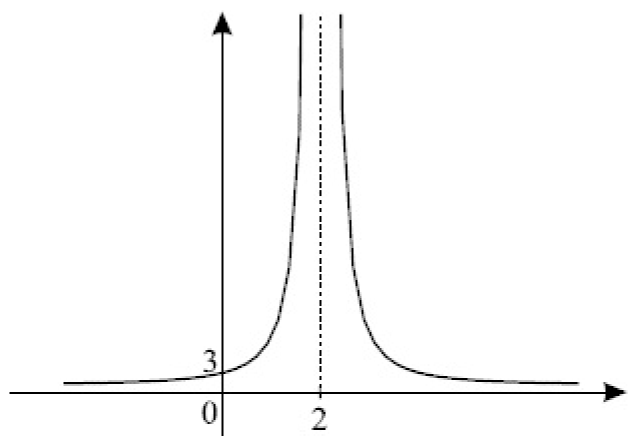
16. Encontre um polinômio cujo gráfico coincide com o gráfico abaixo:



17. Encontre dois polinômios cujos gráficos sejam parecidos com o gráfico abaixo:



18. Encontre um polinômio p tal que o gráfico de $\frac{1}{p(x)}$ coincida com o gráfico abaixo:



As funções $x^{\frac{1}{n}}$

Como vimos na seção das funções x^n, se n é um inteiro positivo, então a função que denotamos por ϕ_n é crescente e, portanto, é uma função inversível, isto é, tem uma função inversa que convencionamos denotar por ϕ_n^{-1}.

Lembremos que o domínio de ϕ_n^{-1} é o conjunto imagem de ϕ_n e que sua imagem é o domínio de ϕ_n. Como, por definição, o domínio de ϕ_n é o intervalo $[0, \infty)$, que verificamos anteriormente ser também seu conjunto imagem, temos que tanto ϕ_n quanto sua função inversa ϕ_n^{-1} têm como domínio e conjunto imagem o mesmo intervalo $[0, \infty)$.

Como vimos no Capítulo 4, podemos obter o gráfico de ϕ_n^{-1} pela reflexão ortogonal, em relação à reta $y = x$, do gráfico de ϕ_n, desde que usemos um sistema de coordenadas com a mesma escala nos dois eixos. Dado que ϕ_n é contínua, o Teorema 1.1 do Capítulo 5 garante que ϕ_n^{-1} também é uma função contínua.

Examinemos agora, do ponto de vista algébrico, a relação entre ϕ_n e sua inversa. Comecemos com $n = 2$, isto é, estamos falando da função $\phi_2(x) = x^2$ para $x \geq 0$.

Como vimos no Capítulo 4, temos, por definição, que se $x \geq 0$ e $\phi_2^{-1}(x) = a$, então $\phi_2(a) = x$. Como o domínio de ϕ_2 é o intervalo $[0, \infty)$ e $\phi_2(a) = a^2$, vemos que

*se $x > 0$, então $\phi_2^{-1}(x)$ é o único número **positivo** que quando elevado ao quadrado resulta no próprio número x.*

Tradicionalmente, convencionou-se representar a ação da função ϕ_2^{-1} pela expressão $\phi_2^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Assim, quando falamos de $\sqrt{x}$ (*a raiz quadrada de x)* estamos falando da inversa da função que aqui chamamos de ϕ_2 e, portanto, sabemos que $x \geq 0$ e, nesse caso, $\sqrt{x} \geq 0$. Ou seja,

$$\textit{se } x > 0 \text{ e } \sqrt{x} = a, \textit{ então } a \geq 0 \text{ e } a^2 = x$$

Uma outra expressão que usamos para representar a função ϕ_2^{-1} adota a notação com expoente,

$$\sqrt{x} = x^{1/2}.$$

Como veremos mais adiante, essa notação não só é mais conveniente no sentido de facilitar manipulações algébricas, como também relaciona a operação *extrair a raiz quadrada* com o número real $\frac{1}{2}$ de uma maneira análoga à qual o número real 2 está relacionado com a operação *elevar ao quadrado*.

Como o domínio da função $\sqrt{x} = x^{1/2}$ é o intervalo $[0, \infty)$, para completar o estudo dessa função devemos analisar seu comportamento assintótico, isto é, responder à pergunta

$$\textit{qual é o comportamento de } \sqrt{x} \textit{ quando } x \to \infty?$$

Para respondermos a essa pergunta devemos tomar uma sequência de números positivos, x_k, tal que $x_k \to \infty$, quando $k \to \infty$, e analisarmos o comportamento da sequência imagem, $y_k = \sqrt{x_k}$. Para isso, observe que se b

> 0 é um número grande, então $\sqrt{b^2} = b$ e, como $\sqrt{x}$ é uma função crescente,

$$x > b^2 \Longrightarrow \sqrt{x} > b,$$

isto é, se x é suficientemente grande, então $\sqrt{x}$ também é um número grande. Isso nos sugere que $\lim_{k\to\infty} \sqrt{x_k} = \infty$. De fato, isso é o que ocorre, como provamos no apêndice, e podemos concluir que

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty.$$

Em geral, se n é um inteiro positivo e $\phi_n(x) = x^n$ para $x \geq 0$, sua função inversa, $\phi_n^{-1}(x)$ é chamada a *raiz n-ésima* de x e denotada por $\phi_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$, ou, usando a notação com expoente,

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

($x^{\frac{1}{3}}$ é também chamada a *raiz cúbica de* x).

Pela definição de função inversa, temos que se $x \geq 0$, então $b = \phi_n^{-1}(x)$ exatamente quando $\phi_n(b) = x$, ou seja, para $x \geq 0$, tem-se que

$$b = x^{\frac{1}{n}} \textit{ exatamente quando } b^n = x,$$

Usualmente descrevemos a ação da função ϕ_n e de sua inversa ϕ_n^{-1} dizendo que

x^n é a operação *elevar o número x à potência n* e que
$x^{\frac{1}{n}}$ é a operação *extrair a raiz n-ésima do número não negativo x*.

Como o domínio de ϕ_n^{-1} é o intervalo $[0, \infty)$, temos que a expressão $x^{\frac{1}{n}}$ tem sentido para qualquer número não negativo x ou, em outras palavras,

qualquer número não negativo x tem uma raiz n-ésima.

Como ocorre com as funções ϕ_n e ϕ_m, $n \neq m$, os gráficos de suas inversas, ϕ_n^{-1} e ϕ_m^{-1}, não se distinguem facilmente quando feitos isoladamente.

Por outro lado, como a partir dos gráficos de ϕ_n e ϕ_m feitos num mesmo sistema de coordenadas (com a mesma escala nos dois eixos), podemos obter, pela reflexão ortogonal em relação à reta $y = x$, os gráficos de ϕ_n^{-1} e ϕ_m^{-1}, vemos que são válidas as seguintes relações:

(1) $x^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{m}}$ exatamente quando $x = 0$ ou $x = 1$.

(2) se $n < m$, então

$$0 < x < 1 \Longrightarrow x^{\frac{1}{n}} < x^{\frac{1}{m}}, \quad \text{e}$$
$$x > 1 \Longrightarrow x^{\frac{1}{n}} > x^{\frac{1}{m}}.$$

Na Figura 1.16, são dados esboços dos gráficos de $x^{\frac{1}{n}}$ e $x^{\frac{1}{m}}$, com $n < m$, num intervalo $[0, a]$ com $a > 1$.

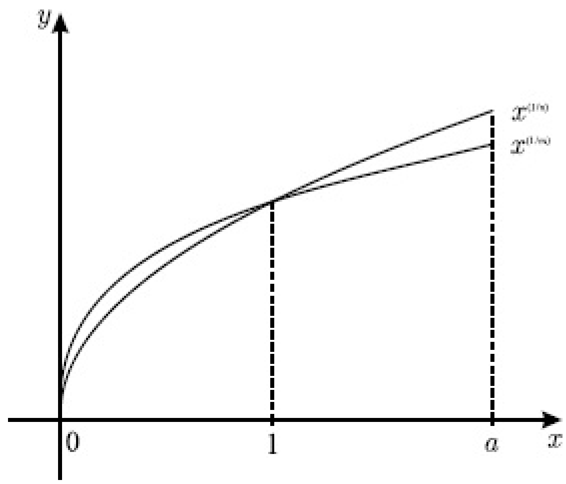


Figura 1.16

Para completarmos nosso estudo das funções $x^{\frac{1}{n}}$, vamos lembrar uma propriedade algébrica da operação *elevar à potência n:*

se x e y são números reais, então $(xy)^n = x^n y^n$.

Mostremos que essa propriedade também é válida para a operação $x^{\frac{1}{n}}$, ou seja,

se x e y sao numeros nao negativos, entao $(xy)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}$.

De fato, se $x^{\frac{1}{n}} = a$ e $y^{\frac{1}{n}} = b$, então

$$x = a^n \ ? \ y = b^n$$

e, portanto,

$$xy = a^n b^n = (ab)^n,$$

donde, pela definição, $(xy)^{\frac{1}{n}} = ab = x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}$.

Em termos de comportamento assintótico, como o domínio de $x^{\frac{1}{n}}$ é o intervalo $[0, \infty)$, devemos nos perguntar como se comporta $x^{\frac{1}{n}}$ quando x tende a infinito. Para respondermos a essa pergunta, podemos usar os mesmos argumentos que já usamos para a função $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ e concluir que

$$\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{n}} = \infty.$$

Finalmente é importante observarmos que se f_3. é a função $f_3(x) = x^3$ para $x \in \mathbb{R}$, então f_3 é crescente em $\mathbb{R}$ e, portanto, é inversível, o que não ocorre com $f_2(x) = x^2$ para $x \in \mathbb{R}$.

Daí decorre o fato de que a operação $x^{\frac{1}{3}}$ está definida para qualquer número x, enquanto que a operação $x^{\frac{1}{2}}$ só está definida para $x \geq 0$. Em outras palavras, qualquer número real possui uma *raiz cúbica,* mas somente números **não** negativos possuem raiz quadrada.

Em geral, vemos que se n é ímpar, então a função $f_n(x) = x^n$ para $x \in \mathbb{R}$ inversível, o que não ocorre se n é par. Assim a expressão $x^{\frac{1}{n}}$ está definida para qualquer número x se n for ímpar, enquanto que se n for par essa expressão só está definida para $x \geq 0$. Em outras palavras, qualquer número real tem uma *raiz n-ésima* se n é ímpar, mas apenas os números **não negativos** possuem uma raiz n-ésima se n é um inteiro par.

As funções $\frac{1}{x^n}$

Consideremos agora a família de funções

$$f_{-n}(x) = x^{-n},$$

onde n é um inteiro positivo. Como $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, expressão que só está definida para $x \neq 0$, temos que o domínio de cada uma dessas funções é $\mathbb{R} - \{0\}$. Mais ainda, como as funções x^n são contínuas, o Teorema 1.1 do Capítulo 5 garante a continuidade de f_{-n} para cada inteiro positivo n.

Vemos também que a paridade das funções x^n gera a mesma paridade para x^{-n}: se n é par, então x^{-n} é uma função par e, se n é ímpar, então x^{-n} é uma função ímpar. Em particular, como já fizemos quando estudamos as funções x^n, é suficiente estudarmos o comportamento de f_{-n} no intervalo $(0, \infty)$.

Já sabemos que para cada inteiro positivo a função x^n é crescente no intervalo $(0, \infty)$, isto é,

$$0 < x < y \Rightarrow x^n < y^n$$

e, portanto,

$$0 < x < y \Longrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0,$$

o que nos diz que para cada $n \geq 1$, $f_{-n}(x) = \frac{1}{x^n}$ é decrescente no intervalo $(0, \infty)$.

Por outro lado, sabemos também que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0,$$

o que, junto com o fato de que o gráfico de f_{-n} no intervalo $(0, \infty)$ é uma curva contínua (pois f_{-n} é contínua e $(0, \infty)$ é um intervalo), nos leva a concluir que a Figura 1.17 nos dá um bom esboço do gráfico de f_{-n} nesse intervalo.

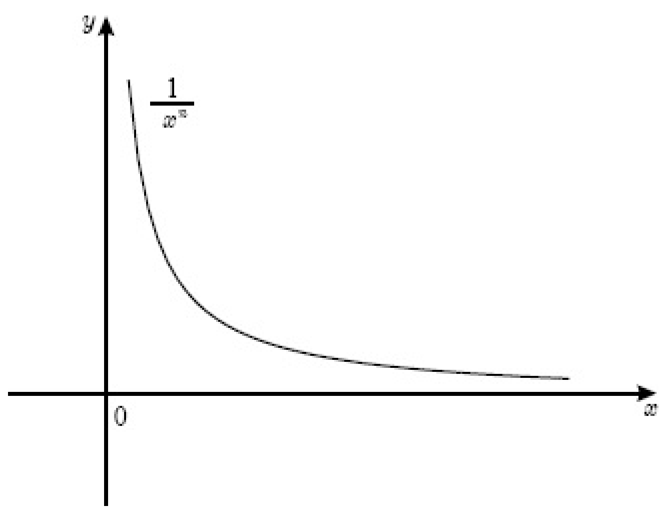


Figura 1.17

Como fizemos com as funções x^n, para podermos distinguir os gráficos de duas funções da família x^{-n} devemos fazer os dois esboços num mesmo sistema de coordenadas. Façamos isso para $n = 1$ e $n = 2$.

Para determinarmos a posição relativa das duas curvas, apelamos para as propriedades algébricas, isto é, vemos que

$$0 < x < 1 \Rightarrow x > x^2,$$

e, portanto,

$$0 < x < 1 \Longrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{x^2},$$

ou seja, no intervalo (0,1) o gráfico de $\frac{1}{x}$ está por baixo do gráfico de $\frac{1}{x^2}$. Por outro lado,

$$x > 1 \Rightarrow x < x^2,$$

donde

$$x > 1 \Longrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{x^2},$$

o que nos diz que no intervalo $(1, \infty)$ o gráfico de $\frac{1}{x}$ está por cima do gráfico de $\frac{1}{x^2}$.

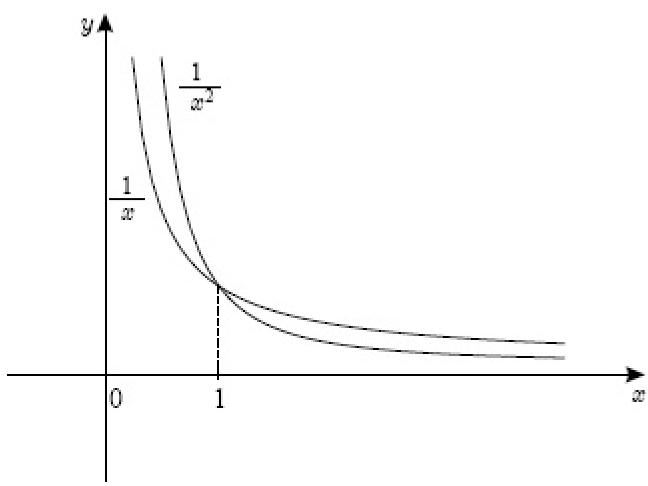


Figura 1.18

Em geral, vemos que se $1 \leq n < m$, então

$$0 < x < 1 \Longrightarrow x^n > x^m \Longrightarrow \frac{1}{x^n} < \frac{1}{x^m},$$
$$x > 1 \Longrightarrow x^n < x^m \Longrightarrow \frac{1}{x^n} > \frac{1}{x^m},$$

e, portanto, no intervalo (0,1) o gráfico de $\frac{1}{x^n}$ está por baixo do gráfico de $\frac{1}{x^m}$, enquanto que no intervalo $(1, \infty)$ o gráfico de $\frac{1}{x^n}$ está por cima do gráfico de $\frac{1}{x^m}$.

Usando agora a informação sobre a paridade das funções, isto é, 1byx^n é uma função ímpar se n é ímpar e é uma função par se *n* é par, vemos que a Figura 1.19 dá um bom esboço dos gráficos de $\frac{1}{x^n}$, com *n* ímpar, e de $\frac{1}{x^m}$, com *m* par.

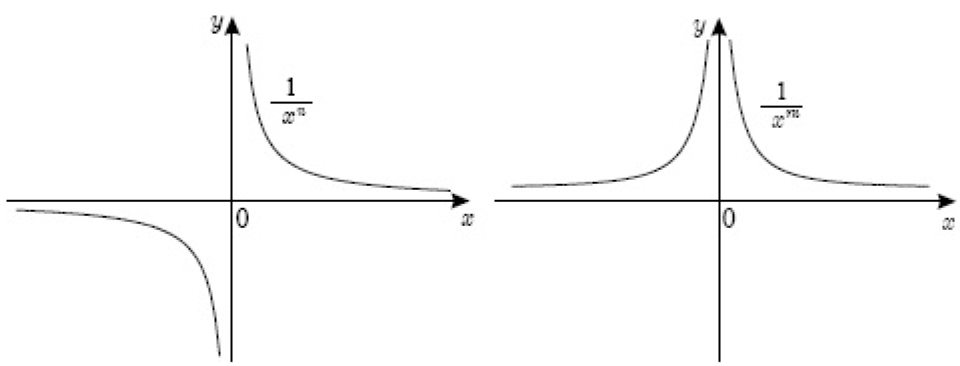


Figura 1.19

As funções $x^{\frac{p}{q}}$

A expressão $x^{\frac{p}{q}}$

Nesta seção pretendemos dar um significado claro a expressões do tipo $x^{\frac{p}{q}}$, onde *p e q* são inteiros positivos. As demonstrações que apresentamos no apêndice ao capítulo têm por objetivo principal auxiliar no desenvolvimento da habilidade de efetuar operações que envolvam expressões desse tipo.

Da álgebra elementar dos números reais sabemos que se *p e q* são inteiros positivos *e x é* um número real, então

$$(x^p)^q = x^{pq}.$$

Podemos dizer que essa propriedade decorre da álgebra elementar porque só envolve as propriedades das operações soma e produto de números reais.

Observamos agora que, se $x \geq 0$, podemos olhar a operação $(x^p)^q$ do ponto de vista das funções que estudamos, isto é, podemos ver que, para $x \geq 0$, essa operação corresponde a avaliar a função composta, $\phi_q \circ \phi_p$, no número x. Por exemplo, se $p = 3$, $q = 5$ e $x \geq 0$, como (de acordo com a notação que usamos)

$$\phi_3(x) = x^3 \quad \text{e} \quad \phi_5(x) = x^5,$$

temos que

$$(\phi_5 \circ \phi_3)(x) = \phi_5(x^3) = (x^3)^5.$$

E, em geral, se p e q são inteiros positivos e $x \geq 0$, então

$$(\phi_q \circ \phi_p)(x) = \phi_q(x^p) = (x^p)^q = x^{pq}.$$

Em particular, essa igualdade nos diz que se $n = pq$, podemos obter x^n compondo as funções ϕ_q e ϕ_p.

Olhar essas operações (elevar números reais a potências inteiras) como resultado da ação de funções parece artificial e complicado e, de fato, isso é verdade se pretendemos nos restringir a tratar de potências com expoentes inteiros. Por outro lado, usar a terminologia de funções é a forma mais simples de tratarmos com clareza operações que envolvem potências com expoentes que não são números inteiros. Por exemplo, na seção anterior, demos sentido à expressão $x^{\frac{1}{q}}$ para $x \geq 0$ e q inteiro positivo, ou seja, demos sentido a uma potência cujo expoente é um número racional do tipo $\frac{1}{q}$, usando para isso a função ϕ_q^{-1} que é a inversa da função $\phi_q(x) = x^q$, para $x \geq 0$. Em outras palavras, usamos a função ϕ_q^{-1} para definir uma nova operação: elevar um número não negativo à potência fracionária $\frac{1}{q}$.

A observação que fizemos no início da seção, isto é, que se $n = pq$, então podemos obter x^n compondo ϕ_q e ϕ_p e o fato de que $\frac{p}{q} = p \cdot \frac{1}{q}$ sugerem que usemos as funções ϕ_q^{-1} e ϕ_p para definir uma nova operação potenciação, a potência $x^{\frac{p}{q}}$:

se p e q são inteiros positivos e $x \geq 0$? definimos

$$x^{\frac{p}{q}} = (\phi_q^{-1} \circ \phi_p)(x) = (x^p)^{\frac{1}{q}}.$$

Ou seja, a função composta $\phi_q^{-1} \circ \phi_p$ define a operação *elevar um número* *não negativo à potência p e em seguida extrair a raiz q-ésima do resultado,* que convencionamos denotar por $x^{\frac{p}{q}}$, para $x \geq 0$.

Por exemplo, para $p = 3$ e $q = 5$, temos que, para $x \geq 0$,

$$(\phi_5^{-1} \circ \phi_3)(x) = \phi_5^{-1}(\phi_3(x)) = \phi_5^{-1}(x^3) = (x^3)^{\frac{1}{5}}.$$

É importante observamos que até agora $x^{\frac{p}{q}}$ é apenas uma forma de expressarmos a operação descrita acima, isto é, não podemos ainda pensar em $x^{\frac{p}{q}}$ como sendo *o número x elevado ao número racional* $r = \frac{p}{q}$. Essa limitação decorre do fato de que, dado um número racional, existe mais de um de par (na verdade um número infinito de pares) de números inteiros cuja razão é o racional dado.

Por exemplo, temos que

$$0,6 = \frac{3}{5} = \frac{6}{10},$$

e, portanto, se quisermos definir a operação *elevar um número não negativo à potência racional* 0,6 a partir das operações que já temos, é necessário que

$$(x^3)^{\frac{1}{5}} = (x^6)^{\frac{1}{10}}, \text{ para } x \geq 0.$$

De fato, se usarmos os inteiros 3 e 5, obteremos

$$x^{0,6} = x^{\frac{3}{5}} = (x^3)^{\frac{1}{5}}$$

e se usarmos 6 e 10, chegaremos a

$$x^{0,6} = x^{\frac{6}{10}} = (x^6)^{\frac{1}{10}}$$

e, portanto, para que a definição seja consistente, a igualdade acima deve ser satisfeita.

O lema que enunciamos a seguir garante que essa propriedade é válida em geral:

Teorema 1.2*: *Sejam p, q, n e m inteiros positivos. Se* $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$ e $x \geq 0$, *então*

$$(x^p)^{\frac{1}{q}} = (x^n)^{\frac{1}{m}}.$$

Observação: Salientamos que é importante estarmos atentos para o fato de que a condição $x \geq 0$ no lema acima não pode ser esquecida: por exemplo, temos que $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, mas, apesar da operação $(x^2)^{\frac{1}{4}}$ estar definida para qualquer número real, a igualdade $(x^2)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{2}}$ só é válida para $x \geq 0$, uma vez que a operação $x^{\frac{1}{2}}$ (extrair a raiz quadrada do número x) só está definida para número não negativos.

Em outras palavras, se f é a função definida pela expressão

$$f(x) = (x^2)^{\frac{1}{4}},$$

então seu domínio é todo o conjunto de números reais, já que $x^2 \geq 0$ qualquer que seja o número real x e qualquer número não negativo possui um raiz quarta. No entanto, apesar de $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, não podemos dizer que f é a função $x^{\frac{1}{2}}$, pois o domínio *de* $x^{\frac{1}{2}}$ só contém números não negativos.

A interpretação que devemos dar ao Teorema 1.2 é que, se p e q são inteiros positivos e $x \geq 0$, *o resultado da operação* $(x^p)^{\frac{1}{q}}$ *não depende de p e de q, mas sim da razão entre p e q, isto é, do número racional* $r = \frac{p}{q}$.

Assim, podemos definir, sem ambiguidade, a operação *elevar um número não negativo a um expoente racional positivo:* se r é um número racional positivo, tomamos qualquer par de inteiros positivos, p *e* q, tais que $r = \frac{p}{q}$ e definimos

$$x^r = (x^p)^{\frac{1}{q}}.$$

Por exemplo, como $r = 1,25$ é um número racional positivo, a definição acima nos diz que, se $x \geq 0$, podemos calcular o número x^{125}. Para tanto, escrevemos $r = 1{,}2$ como a razão entre dois inteiros positivos, por exemplo 5e 4, já que $1,25 = \frac{5}{4}$, e usando a definição acima obtemos que

$$x^{1,25} = (x^5)^{\frac{1}{4}}.$$

Assim, para cada número racional positivo, r, podemos definir uma nova função potência $\phi_r : [0, \infty) \Rightarrow \mathbb{R}$, por

$$\phi_r(x) = x^r.$$

Em termos das funções que estudamos, temos que

$$\phi_r = \phi_q^{-1} \circ \phi_p,$$

onde p e q são quaisquer inteiros positivos com a propriedade de que $r = \frac{p}{q}$. Em particular, como as duas funções, ϕ_q^{-1} e ϕ_p, têm como domínio e imagem o intervalo $[0, \infty)$, podemos concluir que a imagem de ϕ_r também é o intervalo $[0,\infty)$.

Podemos também caracterizar x^r em termos de p e q*:* mais precisamente se $b = x^r$, então $b \geq 0$ e

$$b = \phi_q^{-1}(\phi_p(x)),$$

donde

$$\phi_q(b) = \phi_p(x),$$

isto é,

$$b^q = x^p.$$

Em outras palavras, se r é um número racional positivo e os inteiros positivos p e q são tais que $r = \frac{p}{q}$, então para cada $x > 0$, temos que

x^r *é* o *único número não negativo, b, tal que* $b^q = x^p$.

O **gráfico** *de* $x^{\frac{p}{q}}$

Para podermos obter um esboço do gráfico das funções ϕ_r precisamos conhecer algumas propriedades dessas funções. O fato de que ϕ_r é uma composição de funções que já estudamos facilita nosso trabalho.

Teorema 1.3: *Se r é um número racional positivo* e $\phi_r(x) = x^r$ *para* $x \geq 0$, *então*

(i) ϕ_r *é uma função contínua;*

(ii) *a imagem de* ϕ_r *é o intervalo* $[0, \infty)$;

(iii) ϕ_r *é crescente e, portanto, é inversível. Mais ainda, sua inversa é a função* $\phi_{\frac{1}{r}}$, *isto é,* $\phi_r^{-1}(x) = x^{\frac{1}{r}}$ *para* $x \geq 0$

Demonstração: Sejam p *e* q inteiros positivos tais que $r = \frac{p}{q}$ e, portanto,

$$\phi_r = \phi_q^{-1} \circ \phi_p.$$

(i) Como ϕ_q^{-1} e ϕ_p são contínuas, a continuidade de ϕ_r decorre do fato de que a composição de funções contínuas é uma função contínua (veja Teorema 1.1 do Capítulo 5);

(ii) decorre do fato de que as funções ϕ_q^{-1} ϕ_p têm como domínio e imagem o mesmo intervalo $[0, \infty)$;

(iii) o fato de ϕ_r ser crescente é decorrência do resultado geral de que a composição de funções crescentes é uma função crescente, já que, como vimos, ϕ_q^{-1} e ϕ_p são crescentes. Como qualquer função crescente é inversível podemos concluir que ϕ_r é inversível.

Como já sabemos que ϕ_q^{-1} e $\phi_{\frac{1}{r}}$ *i* têm o mesmo domínio (o intervalo [0, ∞)), para concluirmos que a inversa de ϕ_r é a função $\phi_{\frac{1}{r}}$ devemos mostrar que $\phi_r^{-1}(x) = x^{\frac{1}{r}}$. Para isso, vemos que se $x \geq 0$ e $\phi_r^{-1}(x) = d$ então, pela definição da inversa, temos que $\phi_r(d) = x$, isto é,

$$d^{\frac{p}{q}} = (d^p)^{\frac{1}{q}} = x$$

e, portanto,

$$d^p = x^q$$

donde

$$d = (x^q)^{\frac{1}{p}} = x^{\frac{q}{p}},$$

ou seja, $\phi_r^{-1}(x) = d = x^{\frac{q}{p}}$. Como $r = \frac{p}{q}$, temos que $\frac{1}{r} = \frac{p}{q}$ e, portanto, mostramos que $\phi_q^{-1} = \phi_{\frac{1}{r}}$

Como consequência do fato, que $\phi_r^{-1} = \phi_{\frac{1}{r}}$, temos que o gráfico de $x^{\frac{1}{r}}$ pode ser obtido a partir do gráfico de x^r. Em particular, é suficiente estudarmos o gráfico de x^r para $r > 1$, pois se $0 < s < 1$, então $r = \frac{1}{s}$ 1, e, portanto, o gráfico de $x^s = x^{\frac{1}{r}}$ é a reflexão ortogonal, em relação à reta $y = x$, do gráfico de x^r feito num sistema de coordenadas com a mesma escala nos dois eixos.

Por exemplo, se $r = \frac{3}{5}$, então o gráfico de $\phi_{\frac{3}{5}}(x) = x^{\frac{3}{5}}$ é a reflexão ortogonal em relação à reta $y = x$ do gráfico de $\phi_{\frac{3}{5}}(x) = x^{\frac{3}{5}}$.

Consideremos então os números racionais maiores que 1. Comecemos com um exemplo, $r = \frac{5}{2}$. Como $\phi_{\frac{5}{2}}$ é contínua e seu domínio é um intervalo, sabemos que seu gráfico é uma curva contínua. Vamos mostrar agora que o gráfico de $\phi_{\frac{5}{2}}$ está entre o gráfico de x^2 *e* x^3, para $x \geq 0$.

Para isso, observamos que $2 < \frac{5}{2} < 3$ e que $2 = \frac{4}{2}$ e $3 = \frac{6}{2}$. Então, se $x \geq 0$, podemos escrever

$$x^2 = (x^{\frac{1}{2}})^4 \quad \text{e} \quad x^3 = (x^{\frac{1}{2}})^6.$$

Para simplificar a notação façamos $b = x^{\frac{1}{2}}$.

Se $0 < x < 1$, temos que $0 < b < 1$ e, portanto, já sabemos que

$$b^4 > b^5 > b^6,$$

donde, substituído b por $x^{\frac{1}{2}}$, temos que

$$x^2 = (x^{\frac{1}{2}})^4 > (x^{\frac{1}{2}})^5 > x^3 = (x^{\frac{1}{2}})^6,$$

isto é, se $0 < x < 1$, então $x^2 > x^{\frac{5}{2}} > x^3$.

Por outro lado, se $x > 1$, então $b > 1$, donde

$$b^4 < b^5 < b^6,$$

e, portanto,

$$x^2 = (x^{\frac{1}{2}})^4 < (x^{\frac{1}{2}})^5 < x^3 = (x^{\frac{1}{2}})^6,$$

ou seja, se $x > 1$, então $x^2 < x^{\frac{5}{2}} < x^3$.

Como $\phi_{\frac{5}{2}}(0) = 0$ e $\phi_{\frac{5}{2}}(1) = 1$, podemos resumir:

(1) $x^2 = x^{\frac{5}{2}}$ se e somente se a $x = 0$ ou $x = 1$.

(2) $x^{\frac{5}{2}} = x^3$ se e somente se $x = 0$ ou $x = 1$.

(3) se $0 < x < 1$ então $x^2 > x^{\frac{5}{2}} > x^3$.

(4) se $x > 1$ então $x^2 < x^{\frac{5}{2}} < x^3$.

Na Figura 1.20 são dados os gráficos de x^2, $x^{\frac{5}{2}}$ e x^3 num intervalo [0,a] com a > 1.

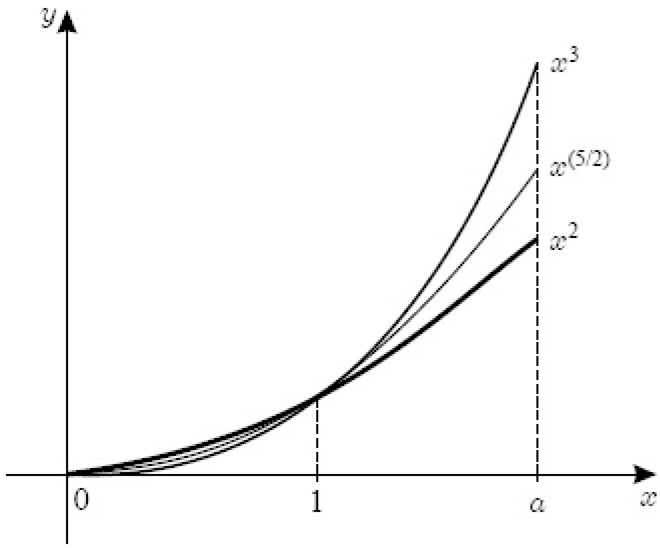


Figura 1.20

Em geral, se r e s são números racionais positivos com $r < s$, então:

(1) as soluções da equação $x^r = x^s$ são $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$.

(2) se < $x < 1$ então $x^r < x^s$.

(3) se $x > 1$ então $x^r < x^s$.

Graficamente essas informações se traduzem em:

(1) os gráficos de x^r e x^s se interceptam exatamente nos pontos de coordenadas (0,0) e (1,1).

(2) o gráfico de x^r está acima do gráfico de x^s no intervalo (0,1).

(3) o gráfico de x^r está abaixo do gráfico de x^s no intervalo $(1, \infty)$.

Na Figura 1.21 são dados os gráficos de x^n, x^r, x^s, e x^{n+l}, onde $1 < n < r < s < n+l$.

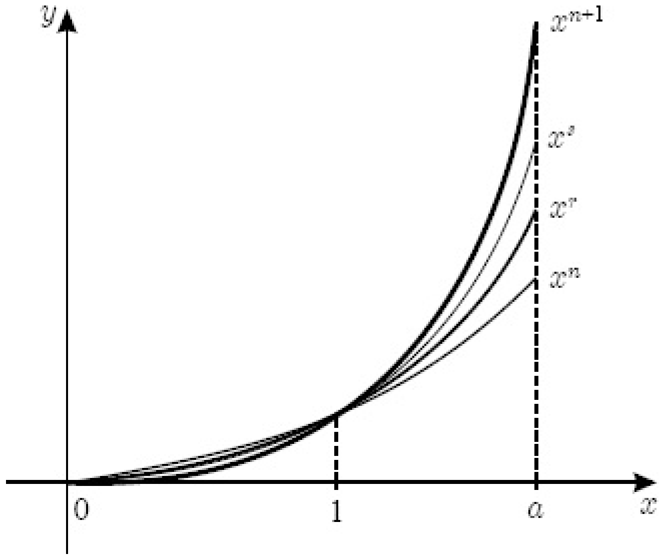


Figura 1.21

Podemos assim ver que, se $r > 1$, o gráfico de x^r é *parecido* com o gráfico de x^n, para $x \geq 0$ e $n > 1$. Por outro lado, se $0 < r < 1$, como o gráfico de x^r é uma reflexão, em relação à reta $y = x$, do gráfico de $x^{\frac{1}{r}}$ e, nesse caso, $\frac{1}{r} > 1$, vemos que o gráfico de x^r é *parecido* com o gráfico de $x^{\frac{1}{n}}$, para $x \geq 0$ e n > 1.

A propriedade (3) nos diz também qual é o comportamento assintótico de x^r: se $r > 1$ e $x > 1$, então $x^r > x$ e, portanto, como já sabemos que $\lim_{x\to\infty} x = \infty$, podemos concluir que $\lim_{x\to\infty} x^r = \infty$.

Por outro lado, se $0 < r < 1$, podemos tomar um inteiro positivo n tal que $\frac{1}{n}$ < r e usar a propriedade (3) acima para obter que $x^r > x^{\frac{1}{n}}$ para $x > 1$. Daí decorre que $\lim_{x\to\infty} x = \infty$, já que $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = \infty$, como vimos na seção anterior.

As propriedades algêbricas

Veremos agora que as operações envolvendo potências com expoentes racionais possuem, as propriedades que já conhecemos para potências com expoentes inteiros.

Teorema 1.4*: *Se x ≥0, y ≥0 e r e s são números racionais positivos, então:*

(i) $(x^r)^s = x^{rs}$;

(ii) $x^r x^s = x^{r+s}$;

(iii) $(xy)^r = x^r y^r$;

(iv) $(\frac{1}{r})^r = \frac{1}{r}$ *para* $x > 0$.

Lembremos que se $a \neq 0$ e n é um inteiro positivo, usamos a notação a^{-n} para representar o recíproco de a^n, *isto é,* $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Podemos agora fazer o mesmo, se $x > 0$ e r é um racional positivo: definimos $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$, para $x > 0$. Observe que, como $x^r > 0$ se $x > 0$, temos que $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$ também é positivo.

Dessa definição segue-se que se r é um número racional positivo e $x > 0$, então

$$x^r x^{-r} = \frac{x^r}{x^r} = 1.$$

Como r + (−r) = 0, a igualdade acima nos diz que é conveniente (e também que podemos) definir $x^0 = 1$ para $x > 0$.

Com essa definição, podemos provar que se $x > 0$, então as propriedades (i) a (iv) do Teorema 1.4 são válidas para quaisquer números racionais *r* e *s*. Em particular, como já sabemos que se $x > 0$ e $r \neq 0$, então $x^r > 0$ e definimos $x^0 = 1$, temos que $x^r > 0$, quaisquer que sejam o racional r e $x > 0$.

Resumindo, vemos que se $a > 0$ e r é qualquer número racional, podemos definir a operação *elevar o número positivo a a uma potência racional r*, operação essa que denotamos por a^r.

Aqui devemos salientar que essa operação não está definida para números negativos. Para vermos a importância de estarmos atentos a esse fato, consideremos as equações

$$(x^2)^{\frac{1}{4}} = 1 \quad \text{e} \quad x^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Facilmente verificamos que −1 e 1 são soluções da primeira equação, enquanto que apenas o 1 é solução da segunda. Ou seja, apesar de $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, podemos concluir que as equações $(x^2)^{\frac{1}{4}} = 1$ e $x^{\frac{2}{4}} = 1$ **não** são equivalentes (já que possuem soluções diferentes).

O que ocorre é que, como $x^2 \geq 0$, qualquer que seja o número real x, a expressão $(x^2)^{\frac{1}{4}}$ define uma função f cujo domínio é o conjunto de todos os números reais, enquanto que a expressão $x^{\frac{1}{2}}$ define a função raiz quadrada, que denotamos acima por $\phi_{\frac{1}{2}}$, cujo domínio é composto apenas dos números não negativos. Em outras palavras, a operação $(x^2)^{\frac{1}{4}}$ está também definida para números negativos, mas $x^{\frac{2}{4}} = x^{\frac{1}{2}}$ só está definida para números não negativos.

Assim, a primeira equação é a equação $f(x) = 1$, que pode ter solução negativa, já que o domínio de f contém números negativos. Por outro lado, $x^{\frac{1}{2}} = 1$ é a equação $\phi_{\frac{1}{2}}(x) = 1$, que só admite soluções não negativas, pois o domínio de $\phi_{\frac{1}{2}}$ não possui números negativos.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. As funções x^2 e x^4 para $x \leq 0$ são decrescentes e, portanto, inversíveis. Ache uma expressão para suas inversas e esboce seus gráficos.
2. Faça um esboço dos gráficos de $g(x) = \sqrt{|x|}$ e de $f(x) = \sqrt{|x-1|}$..
3. Em cada item abaixo, encontre valores para A, B e C de maneira que a função dada possa ser escrita na forma $f(x) = A(x - B) + C$ e faça um esboço de seu gráfico:

   (a) $f(x) = x^2 + 2x$.

   (b) $f(x) = -x^2 + x - 1$.
4. Faça um esboço do gráfico de $h(x) = (2x + 1)^3$ no intervalo $[-1, 0]$.
5. Quantas soluções tem a equação $(1 - 2x)^3 = x$? (Sugestão: faça um esboço do gráfico de $f(x) = (1 - 2x)^3$).
6. Quantas soluções tem a equação $x^4 - 1 = x^2$? E a equação $(x - 1)^4 = x^3$?
7. Em cada item abaixo faça um esboço do gráfico da função dada:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$.

(d) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

(e) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^3}$.

(f) $f(x) = \dfrac{1}{|x+1|^3}$.

(g) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

(h) $f(x) = \sqrt[3]{|x+1|}$.

(i) $f(x) = \sqrt{(x+1)^3}$.

(j) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$.

8. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

   (a) Se x *e* y são números reais tais que $|x| = |y|$, então $x = y$ ou $x = -y$.

   (b) Se x e y são números reais tais que $y^4 = x^4$, então $x = y$.

   (c) Se x *e* y são números reais tais que $y^4 = x^4$, então $|x| = |y|$.

   (d) Se $x \in \mathbb{R}$ e $(x^3)^2 = x^4$, então $x = 1$ ou $x = 0$.

   (e) Se $x \in \mathbb{R}$ e $(x^2)^{\frac{1}{8}} = 2$, então $x = 8$.

9. Resolva as equações abaixo, isto é, encontre todas as soluções reais de cada equação:

   (a) $(x^4)^2 = x^2$.

   (b) $(x^3)^2 = x^4$.

   (c) $(x^3 + 3x^2 + x)^6 = x^6$.

   (d) $(x^3 + 4x^2 + 2x)^2 = x^4$.

(e) $(x^2 + 3x + 1)^5 = 1$.

10. Associe a cada função abaixo o seu gráfico.

(a) $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$.

(b) $f(x) = x^{-\frac{2}{5}}$.

(c) $f(x) = x^{\frac{2}{9}}$.

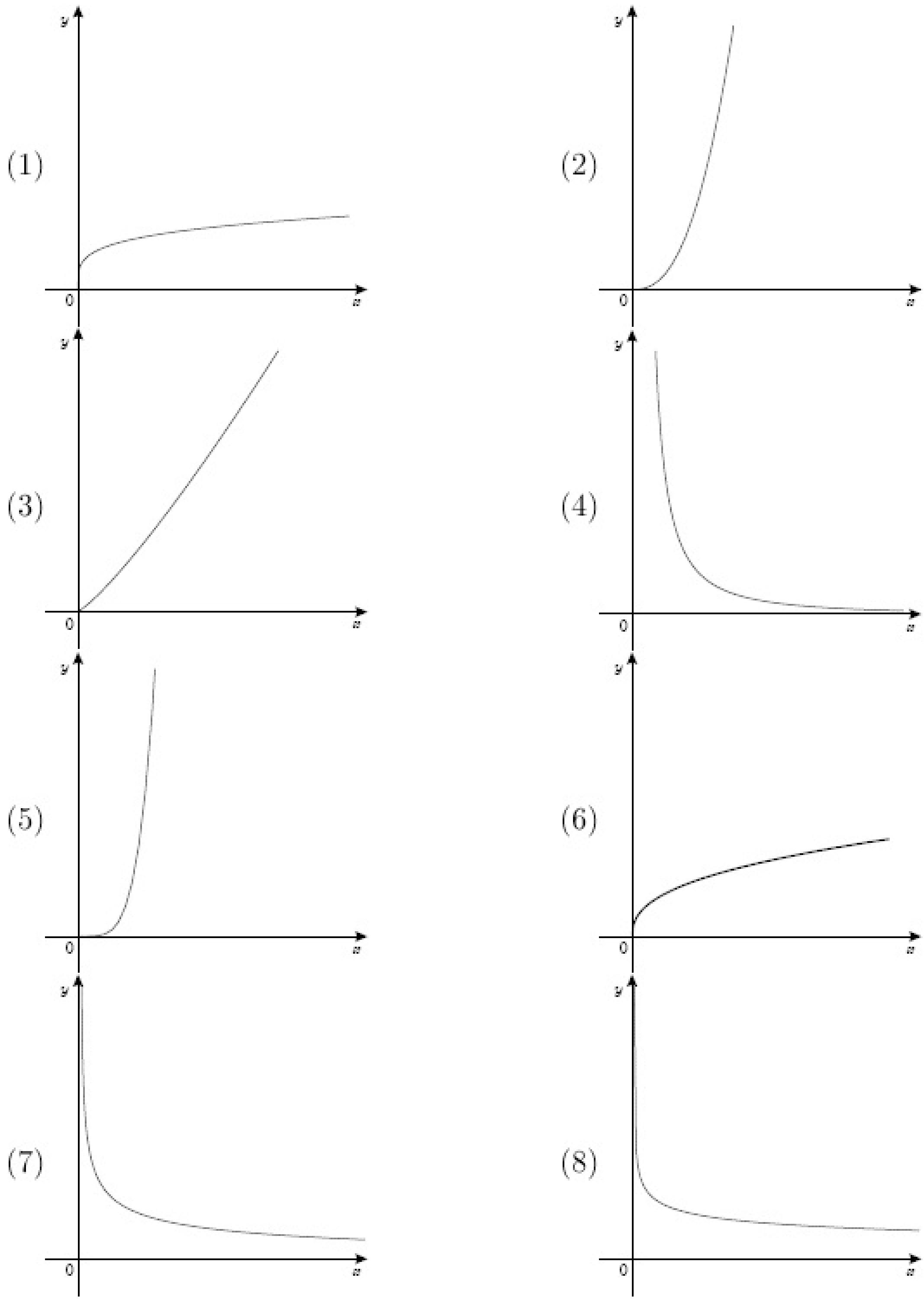
(d) $f(x) = x^{-\frac{2}{9}}$.

(e) $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$.

(f) $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$.

(g) $f(x) = x^{\frac{9}{2}}$.

(h) $f(x) = x^{\frac{6}{5}}$.



2. As funções a^x e $log_a x$

Nosso objetivo nesta seção é definir as funções exponenciais e suas inversas, as funções logarítmicas. As demonstrações que apresentamos aqui também têm o objetivo principal de ajudar o desenvolvimento da habilidade no manejo de operações algébricas envolvendo as exponenciais.

As funções exponenciais

Comecemos com um caso particular, definindo a função $x \mapsto 2^x$, para $x \in \mathbb{R}$, que é chamada a *função exponencial na base* 2.

A primeira observação que fazemos é que já temos definida a operação 2^r para qualquer número racional r, mas não sabemos ainda o que é 2^x se x não é racional.

A segunda observação é que queremos definir uma função que seja contínua, já que as funções contínuas são aquelas que podem ser avaliadas por aproximações. Em outras palavras, queremos definir uma função $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja contínua e tal que se r é um número racional, então $\beta(r) = 2^r$.

Essas duas propriedades que queremos para a função β nos dizem como devemos definir *â(x)* para x sendo um número irracional: se (r_n) é a sequência dos truncamentos da expansão decimal de x, como sabemos que $r_n \to x$, a continuidade que exigimos para β nos obriga a definir

$$\beta(x) = \lim_{n\to\infty} \beta(r_n).$$

Mais ainda, como, para cada n, o número r_n é racional, queremos

$$B(r_n) = 2^{rn}$$

ou seja, devemos definir $\beta(x)$ por

$$\beta(x) = \lim_{n\to\infty} 2^{r_n}.$$

Mas para isso é preciso que a sequência $y_n = 2^{r_n}$ seja convergente, isto é, tenha um limite. Mostremos então que isso é o que ocorre para qualquer número real x.

Comecemos com $x = c > 0$: já sabemos, da seção anterior, que se r e s são números racionais com $r \leq s$, então

$$2^r \leq 2^S.$$

Sabemos também que se s_n é a sequência de truncamentos do número c, então

s_n é monótona crescente, isto é,

$$Sn \le Sn{+}1$$

para cada n, e, portanto,

$$2^{S_n} \le 2^{S_{n+1}},$$

para $n \ge 1$. Em outras palavras, a sequência $y_n = 2^{S_n}$ é também uma sequência monótona crescente.

Por outro lado, podemos ver também que y_n é limitada: *se p é a* parte inteira da expansão decimal de c, então c $< p + 1$, donde, para cada $n \ge 1$, tem-se que

$$0 \le s_n \le x < p + 1,$$

e, portanto,

$$1 \le 2^{S_n} \le 2^{p+1}.$$

Resumindo, como c é qualquer número positivo, mostramos que

> *se $x > 0$ e (r_n) é a sequência de truncamentos da expansão decimal de x, então a sequência $y_n = 2^{r_n}$, para $n \ge 1$, é monótona e limitada.*

O Teorema 3.3 do Capítulo 3 garante então que (y_n) é uma sequência convergente, $y_n \to y$. Mais ainda, como $y_n \ge 1$, sabemos que seu limite, y, também é um número maior ou igual a 1 e portanto $y \neq 0$.

Agora, se $x > 0$, então c $= -x > 0$, e, se r_n é a sequência dos truncamentos da expansão decimal de x, temos que $s_n = -r_n$ é a sequência dos truncamentos do número c $= -x$.

Como c > 0 podemos usar a informação que obtivemos acima, isto é, a sequência $y_n = 2^{S_n}$ é convergente com

$$\lim_{n\to\infty} 2^{s_n} = y \neq 0.$$

Agora, basta usarmos a propriedade

$$2^{r_n} = \frac{1}{2^{-r_n}} = \frac{1}{2^{s_n}}$$

para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} 2^{r_n} = \frac{1}{y}.$$

Isto é, se $x > 0$ e r_n é a sequência de truncamentos de x, então a sequência 2^{rn}, $n \geq 1$, também é convergente.

Podemos então defínir a função β que queremos:

Se $x = r$ é racional, definimos

$$\beta(x) = 2^r,$$

e, se x é um número irracional, definimos

$$\beta(x) = \lim_{n\to\infty} 2^{r_n},$$

onde r_n *é a* sequência dos truncamentos da expansão decimal de x.

Podemos provar, embora não o façamos aqui, que a função β assim definida é contínua. Como para r racional temos, por definição, que $\beta(r) = 2^r$, convencionou-se denotar por 2^x o número $\beta(x)$ qualquer que seja número real x.

A construção que acabamos de fazer tem por objetivo não o rigor matemático, mas sim desvendar um pouco o mistério das exponenciais: vimos que se x é um número racional, então 2^x é o número obtido pela operação que nos parece familiar, *elevar o número* 2 (que é positivo) *a uma potência racional* e, se x é irracional, 2^x é um número real que pode ser tão bem aproximado quanto se necessite por números da forma (familiar) 2^r, desde que r seja uma aproximação racional suficientemente boa de x.

Antes de passarmos às outras exponenciais, chamamos atenção para o fato de que a construção da exponencial 2^x se baseou na propriedade de que 2 é um número positivo e, portanto, já tínhamos definidas as operações 2^r para números racionais r.

Isso nos diz que uma construção análoga com o objetivo de obter outras exponenciais impõe a condição de que a base, a, deve ser um número positivo, já que a operação *elevar um número a uma potência racional qualquer* só está definida para números positivos.

Por outro lado, sabemos que se r é racional, então $1^r = 1$, e isso nos diz que, se quisermos definir 1^x para qualquer número real x de forma a obter uma função contínua, a única opção é definir $1^x = 1$ para $x \in \mathbb{R}$, ou seja, 1^x é a função constante igual a 1 que tem características muito diferentes das funções exponenciais. Assim, chamamos de função exponencial na base a a função definida, de maneira análoga à 2^x, a partir de um número real a positivo e diferente de 1.

Consideremos primeiro $a > 1$. Como ocorre com o número 2, já temos as potências racionais de a, denotadas por a^r, $r \in \mathbf{Q}$; essas potências também satisfazem a relação $a^r < a^s$, se r e s são números racionais com $r < s$, já que $a > 1$.

Como no caso da base 2, queremos definir uma função $\beta_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja contínua e tal que se r é um número racional, então $\beta_a(r) = a^r$.

Para obtermos essa função repetimos exatamente o mesmo procedimento: mostramos que se (r_n) é a sequência de truncamentos de um número x, então a sequência (a^{r_n}), para $n \geq 1$, é convergente e definimos $\beta_a(x) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$.

Também, como no caso da base 2, podemos mostrar que essa função é contínua e estabelecemos a convenção $\beta_a(x) = a^x$.

Agora, para definir as exponenciais com base a, sendo $0 < a < 1$, poderíamos adotar um procedimento análogo, mas isso não é necessário. Podemos usar as funções já definidas para obter essas exponenciais.

Para vermos isso, consideremos o exemplo $a = \frac{1}{2} = 0,5$. Sabemos, da seção anterior, que para qualquer racional r tem-se que

$$(0,5)^r = (\frac{1}{2})^r = \frac{1}{2^r},$$

e, portanto, se $r_n \to x$, a continuidade da exponencial na base 2 e o fato de que $2^x \neq 0$ garante que

$$(0,5)^{r_n} = \frac{1}{2^{r_n}} \to \frac{1}{2^x}.$$

Ou seja, podemos definir a *exponencial na base* 0, 5 por $(0,5)^x = \frac{1}{2^x}$.

Em geral, se $0 < a < 1$, então

$$b = \frac{1}{a} > 1,$$

e, portanto, já temos definida a exponencial na base b. Definimos, então, a exponencial na base a por

$$a^x = \frac{1}{b^x}.$$

Em resumo, se $a > 0$ e $a \neq 1$, temos definida a função a^x, cujo domínio é o conjunto de todos os números reais e que é chamada a função exponencial na base a.

Propriedades de a^x

As propriedades algébricas dadas a seguir decorrem das propriedades (i) a (iv) do Teorema 1.4 da seção anterior.

Teorema 2.1: *Se $a > 0$ e x e y são números reais, então*

(i) $(a^x)^y = a^{xy}$, *em particular* $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$;

(ii) $a^x a^y = a^{x+y}$, *em particular* $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$;

(iii) $(ab)^x = a^x b^x$, *para* $b > 0$;

(iv) $(\frac{1}{a})^x = \frac{1}{a^x}$.

Usando esse teorema podemos mostrar que qualquer função exponencial é monótona. Mais precisamente:

se $a > 1$, então a^x, a função exponencial na base a, é crescente;
se $0 < a < 1$, então a^x, a função exponencial na base a, é decrescente.

Para provarmos essas propriedades, primeiro fixemos $a > 1$. Já sabemos, da seção anterior, que se r e s são números racionais tais que $r < s$, então $a^r < a^s$. Em particular, se $r < 0$, então $a^r < a^0 = 1$.

Agora, se $x < y$, então $c = x - y < 0$, e, portanto, sabemos que podemos tomar um número racional r tal que $c < r < 0$. Seja (r_n), $n \geq 1$, uma sequência de números racionais tal que $r_n \leq c$, para $n \geq 1$, e $r_n \to c$.

Da continuidade de a^x decorre que $a^{r_n} \to a^c$ e, como $r_n \leq c < r < 0$, sabemos que (já que $a > 1$)

$$a^{r_n} < a^r < a^0 = 1.$$

Apelamos então para o Teorema 4.3 do Capítulo 3 para concluir que $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} \leq a^r < 1$. Isto é, como $a^c = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$, mostramos que $a^c < 1$. Mas $c = x - y$ e, portanto, usando a propriedade (2) do Teorema 2.1, obtemos

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} < 1,$$

ou seja, $a^x < a^y$, já que $a^y > 0$.

Mostramos assim que se $a>1$ e $x< y$ são números reais, então $a^x < a^y$, isto é, a exponencial na base a é crescente se $a > 1$.

Para ver que uma exponencial na base a com $0 < a < 1$ é decrescente, usamos o resultado que acabamos de provar para o número $\frac{1}{a}$ que é maior do que 1: se $x < y$, como a exponencial na base $\frac{1}{a}$ é crescente, temos que

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x < \left(\frac{1}{a}\right)^y.$$

Mas, pela propriedade (iv) do Teorema 2.1, tem-se que $(\frac{1}{a})^x = \frac{1}{a^x}$ e $(\frac{1}{a})^y = \frac{1}{a^y}$,, ou seja,

$$\frac{1}{a^x} < \frac{1}{a^y},$$

donde $a^x > a^y$.

Usando as propriedades (iii) e (iv) desse teorema, podemos determinar qual a relação entre duas exponenciais do mesmo tipo (isto é, crescentes ou decrescentes). Mais precisamente, se a e b são números positivos diferentes de 1, então:

a) $a^x = b^x$ exatamente quando $x = 0$;

b) se $0 < a < b$ e $x > 0$, então $a^x > b^x$;

c) se $0 < a < b$ e $x > 0$, então $a^x < b^x$.

De fato, se $0 < a < b$, então $0 < \frac{a}{b} < 1$, e, portanto, a função exponencial na base $\frac{a}{b}$ é decrescente. Logo,

$$\begin{aligned} &\text{se } x < 0, \text{ então } \left(\frac{a}{b}\right)^x > \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1, \text{ e} \\ &\text{se } x > 0, \text{ então } \left(\frac{a}{b}\right)^x < \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1. \end{aligned}$$

Mas as propriedades (iii) e (iv) do Teorema 2.1 garantem que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = a^x\left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x},$$

ou seja, já que $b^x > 0$,

> se $x > 0$, então $\frac{a^x}{b^x}$ >1e, portanto, $a^x > b^x$; e
> se $x > 0$, então $\frac{a^x}{b^x} <$ 1e, portanto, $a^x < b^x$.

O item (a) segue de (b) e (c) e do fato de que $a^0 = 1 = b^0$.

Já vimos que uma função exponencial só assume valores positivos, isto é, $a^x > 0$, para qualquer número real x. Em outras palavras, a imagem de a^x está contida no intervalo $(0, \infty)$. Vamos agora mostrar que de fato a imagem de qualquer função exponencial é o intervalo $(0, \infty)$.

Para isso, devemos mostrar que se d é qualquer número positivo, então $d = a^{x_0}$ para algum número x_0, ou seja, devemos provar que a equação $a^x = d$ tem pelo menos uma solução.

Comecemos com $a > 1$ e suponhamos $d > 1$. Primeiro, lembremos que, como $a > 1$, a sequência das potências inteiras de a, (a^n), $n \geq 1$, não é limitada, pois $a^n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Isso nos garante que para algum índice n_0 tem-se que $a^{n_0} > d$. Como supusemos $d > 1$, temos que

$$a^0 = 1 < d < a^{n_0}.$$

Ou seja, d é um número que está entre o valor da exponencial a^x em $x = 0$ e o seu valor em $x = n_0$. Como a^x é contínua no intervalo $[0, n_0]$, o Teorema do Valor Intermediário (Teorema 1.2 do Capítulo 5) garante que $d = a^{x_0}$ para algum número x_0 do intervalo $[0, n_0]$, e isso quer dizer que todo número real $d > 1$ é um número na imagem de a^x.

Por outro lado, $a^0 = 1$ e, portanto, 1 é também um número da imagem de a^x. Resta então considerarmos $0 < d < 1$.

Para isso vemos que se $c = \frac{1}{d}$, então $c > 1$ e, portanto, pelo que já mostramos, c pertence à imagem de a^x. Seja então x_0 tal que $a^{x_0} = c$. Daí chegamos ao resultado que queremos usando a propriedade (1) do Teorema 2.1,

$$a^{x_0} = \frac{1}{b^{x_0}} = \frac{1}{c} = d.$$

Terminamos assim de mostrar que se $a > 1$, então a imagem de a^x é o intervalo $(0, \infty)$.

Agora, se $0 < a < 1$, seja $b = \frac{1}{a}$. Então $b > 1$ e, portanto, pelo resultado acima, se $d > 0$, como $c = \frac{1}{d} > 0$, temos que c pertence à imagem de b^x. Seja então x_0 tal que $b^{x_0} = c$. Como por definição $a^x = \frac{1}{b^x}$, temos que $a^{x_0} = a^{x_0} = \frac{1}{b^{x_0}} = \frac{1}{c} = d$. Ou seja, mostramos que qualquer número positivo também está na imagem de a^x, para $0 < a < 1$.

Estudemos agora o comportamento assintótico das exponenciais. Como o domínio de a^x é o conjunto de todos os números reais, devemos nos perguntar, por um lado, qual é o comportamento de a^x quando $x \to \infty$ e, por outro lado, qual é seu comportamento $x \to -\infty$.

Comecemos com $a > 1$. Como já sabemos que a imagem de a^x é o intervalo $(0, \infty)$, podemos usar o fato de que a^x é crescente (já que $a > 1$) para concluir que $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$. Mas provaremos isso usando um resultado que nos dará mais informações sobre o comportamento de a^x quando $x \to \infty$.

Mostraremos que se $a > 1$ e x é suficientemente grande, então $a^x > x$. Isso nos diz não só que $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, mas também que se $a > 1$, então a função exponencial a^x cresce mais do que a função identidade quando $x \to \infty$.

Primeiro mostraremos que se $x \geq 6$, então $2^x > x^2$. Para isso usaremos a propriedade $2^n \geq (n + 1)^2$, se n é um inteiro maior que 6.

Dado um número $x_0 \geq 6$, seja n_0 a parte inteira da expansão decimal de x_0 Temos então que

$$6 \leq n_0 \leq \mathrm{x} < n_0 + 1$$

e, como 2^x é uma função crescente, $2^{n_0} \leq 2^x$. Logo, usando a propriedade

$$2^{n_0} \geq (n_0 + 1)^2,$$

temos

$$x^2 < (n_0 + 1)^2 \leq 2^{n_0} \leq 2^x.$$

Agora observamos que se $a \geq 2$, então a propriedade (c) da página 351 garante que $a^x \geq 2^x$ para todo $x > 0$ *e*, portanto, pelo que acabamos de obter, podemos concluir que se $x > 6$, então $a^x > 2^x > x^2 > x$.

Por outro lado, se $1 < a < 2$, sabemos que existe um número positivo $c < 1$, tal que $2^C = a$ (lembremos que a imagem de 2^x é o intervalo $(0, \infty)$, ao qual o número a pertence).

Pela propriedade (i) do Teorema 2.1, temos que $a^x = (2^c)^x = 2^{cx}$. Logo, se $x > \frac{6}{c^2}$, então $cx > c^2x > 6$ e, portanto,

$$a^x = 2^{cx} > (cx)^2 = c^2x^2.$$

Mas $c^2x > 1$, logo $a^x > c^2x^2 > x$.

Resumindo, mostramos que se x é suficientemente grande, e $a > 1$, então $a^x > x$. Como $\lim_{x\to\infty} x = \infty$, podemos concluir que $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$.

Por outro lado, da propriedade (i) do Teorema 2.1 decorre que $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$, logo, como $\lim_{x\to-\infty} -x = \infty$, (isto é, $(-x)$ tende a ∞ quando x tende a $-\infty$), temos que

$$\lim_{x\to-\infty} a^{-x} = \infty,$$

e, portanto,

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{a^{-x}} = 0.$$

Na verdade, de uma maneira análoga à que provamos que para $a > 1$ tem-se que $a^x > x$, desde que x seja suficientemente grande, podemos também provar que se n é um inteiro maior que 1, então $a^x > x^n$ para x suficientemente grande.

Por exemplo, já mostramos acima que se $x > 6$, então $2^x > x^2$. Com argumentos análogos podemos provar que *se* $x > 10$, então $2^x > x^3$.

Essa é a propriedade que descrevemos dizendo que uma função exponencial a^x, com base $a > 1$, cresce mais rapidamente que qualquer função polinomial x^n quando $x \to \infty$.

Em relação ao gráfico, o comportamento assintótico de a^x que determinamos acima nos informa que se $a > 1$, então o gráfico de a^x (que é uma curva contínua) *sobe* arbitrariamente à medida que x percorre o eixo horizontal da esquerda para a direita, e que se x corresponde a um ponto muito à esquerda da origem, então o ponto do gráfico correspondente (x, a^x) está muito próximo do eixo horizontal.

Na Figura 2.1 é dado o gráfico de a^x com a > 1.

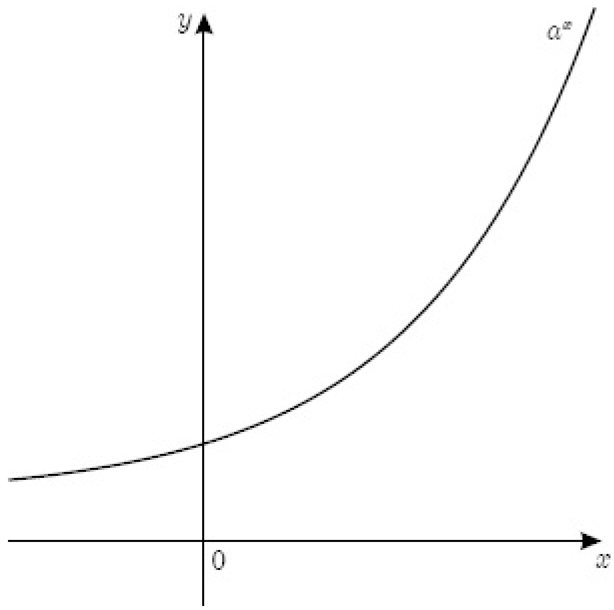


Figura 2.1

Como ocorre com as funções x^n, $n > 1$, para $x \geq 0$, os gráficos das exponenciais crescentes não se distinguem facilmente quando feitos isoladamente. Na Figura 2.2 damos os gráficos de a^x e b^x para $1 < a < b$.

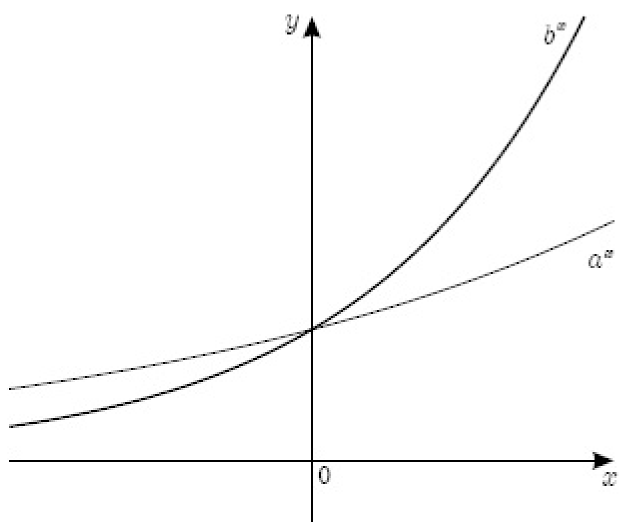


Figura 2.2

Para estudarmos o comportamento assintótico de a^x quando $0 < a < 1$, usamos o fato de que nesse caso $a^x = \frac{1}{(1/a)^x}$ e, portanto, como $\frac{1}{a}$ >1, podemos , a partir dos resultados acima, concluir que

$$se\ 0 < a < 1,\ então\ \lim_{x\to\infty} a^x = 0 \text{ e } \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty.$$

Finalmente, observamos que as propriedades (i) e (iv) do Teorema 2.1 nos dizem que o gráfico da exponencial a^x *é a* reflexão em relação ao eixo vertical do gráfico da exponencial $(\frac{1}{a})^x$: de fato, se denotamos por f a exponencial a^x e por g a exponencial $(\frac{1}{a})^x$, temos que

$$f(x) = a^x = \frac{1}{a^{-x}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = g(-x).$$

Na Figura 2.3 são dados os gráficos de a^x e b^x com $0 < b < a < 1$.

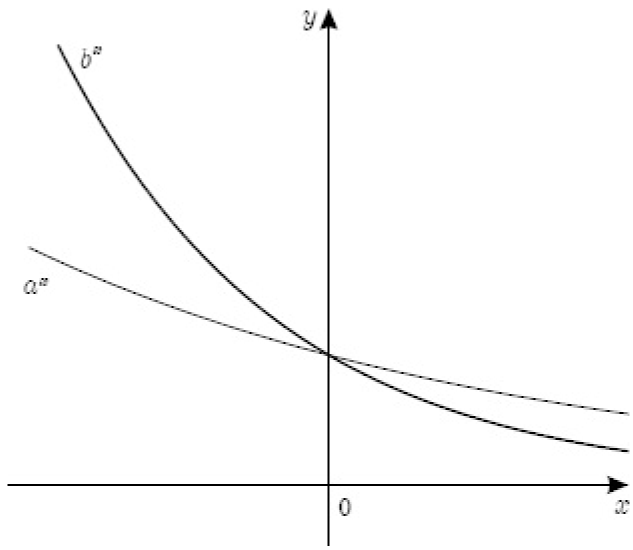


Figura 2.3

As funções logarítmicas

Como vimos, as funções exponenciais a^x têm a propriedade de serem crescentes (se $a > 1$) ou decrescentes (se $0 < a < 1$), e, portanto, são funções inversíveis.

Vimos também que o domínio de qualquer uma dessas funções é o conjunto de todos os números reais e que sua imagem é o intervalo $(0, \infty)$. Assim, a função inversa de uma função exponencial tem como domínio o intervalo $(0, \infty)$, isto é, o conjunto dos números positivos e, como imagem, o conjunto dos números reais. A inversa de uma função exponencial é chamada *função logarítmica*.

Mais precisamente, a inversa da exponencial na base a é chamada a *função logarítmica na base a* e denotada por $\log_a x$. Para cada número positivo x o número $\log_a x$ é chamado o *logaritmo de x na base a*.

Como vimos no Capítulo 5, (Teorema 1.1) a inversa de uma função contínua também é contínua. Mais ainda, sabemos também que a inversa de uma função crescente é crescente e que a inversa de uma função decrescente é decrescente. Assim,

Teorema 2.2: *Se $a > 0$ e $a \neq 1$, então $\log_a x$ é uma função contínua. Mais ainda, se $a > 1$, então $\log_a x$ é crescente, e se $0 < a < 1$, então $\log_a x$ é decrescente.*

Para vermos com clareza a relação entre essas expressões que estamos usando para designar as funções exponenciais e suas inversas, as funções logarítmicas, denotemos por f a função exponencial na base a, isto é, $f(x) = a^x$ para $x \in \mathbb{R}$ e, portanto, $f^{-1}(x) = \log_a x$, para $x > 0$.

Pela definição de função inversa, sabemos que $f^{-1}(x) = y$ quer dizer que $x = f(y)$, ou seja,

$\log_a x = y$ quer dizer que $x = a^y$,

ou seja,

$\log_a a^y = y$ para qualquer número real y e
$a^{\log_a x} = x$ para qualquer número **positivo** x.

Em particular, temos que $\log_a 1 = 0$ e $\log_a a = 1$, para qualquer base a, já que $a^0 = 1$ e $a^1 = a$.

Do Teorema 2.1 obtemos as propriedades algébricas das funções logarítmicas:

Teorema 2.3*: *Se $a > 0$, $a \neq 1$ e x e y são números positivos, então:*

(i) $\log_a x^d = d \log_a x$ *para qualquer número real d;*

(ii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;

(iii) $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$.

Uma consequência bastante interessante da propriedade (i) do teorema acima é que existe uma relação simples entre as exponenciais: se a e b são número positivos e diferentes de 1, então as exponenciais a^x e b^x estão relacionadas por

$$b^x = a^{x \log_a b}.$$

De fato, por (i) do Teorema 2.3, temos que $\log_a b^x = x \log_a b$, e, portanto,

$$a^{\log_a bx} = a^{x \log_a b}.$$

Mas $a^{\log_a bx} = b^x$, o que dá a relação acima.

Agora observamos que como b é um número fixo, isto é, a variável da igualdade está designada por x, temos que $\log_a b$ também é um número fixo. Assim, se fazemos á= $\log_a b$, $f(x) = a^x$ e $g(x) = b^x$, vemos que $g(x) = f(ax)$.

Isso nos diz, lembrando do que já estudamos no Capítulo 4, que o gráfico de b^x é uma contração (ou expansão) horizontal do gráfico de a^x, seguida ou não de uma reflexão em relação ao eixo vertical, dependendo de b ser menor que 1 (nesse caso $\alpha = \log_a b > 0$) ou maior que 1 (nesse caso $\alpha > 0$).

Da relação entre as exponenciais podemos obter a relação entre as funções logarítmicas: se $x > 0$ (o domínio das funções logarítmicas é o conjunto de números positivos), façamos $z = \log_b x$.

Então

$$x = b^z = a^{z \log_a b},$$

pela relação que obtivemos acima. Daí,

$$\log_a x = z \log_a b.$$

Mas fizemos $z = \log_6 x$, portanto

$$\log_a x = (\log_b x)(\log_a b).$$

Mostramos, assim, mantendo a notação anterior, que $f^{-1}(x) = \alpha g^{-1}(x)$, isto é, o gráfico de uma função logarítmica pode ser obtido do gráfico de qualquer outra função logarítmica por meio de uma contração (ou expansão) vertical, seguida ou não de uma reflexão em relação ao eixo horizontal.

Já sabemos que o gráfico de $\log_a x$ pode ser obtido do gráfico de a^x por uma reflexão em relação à reta $y = x$. Na Figura 2.4, são dados os gráficos de $\log_a x$ com $a > 1$ em 2.4a e $\log_a x$ com $0 < a < 1$ em 2.4b.

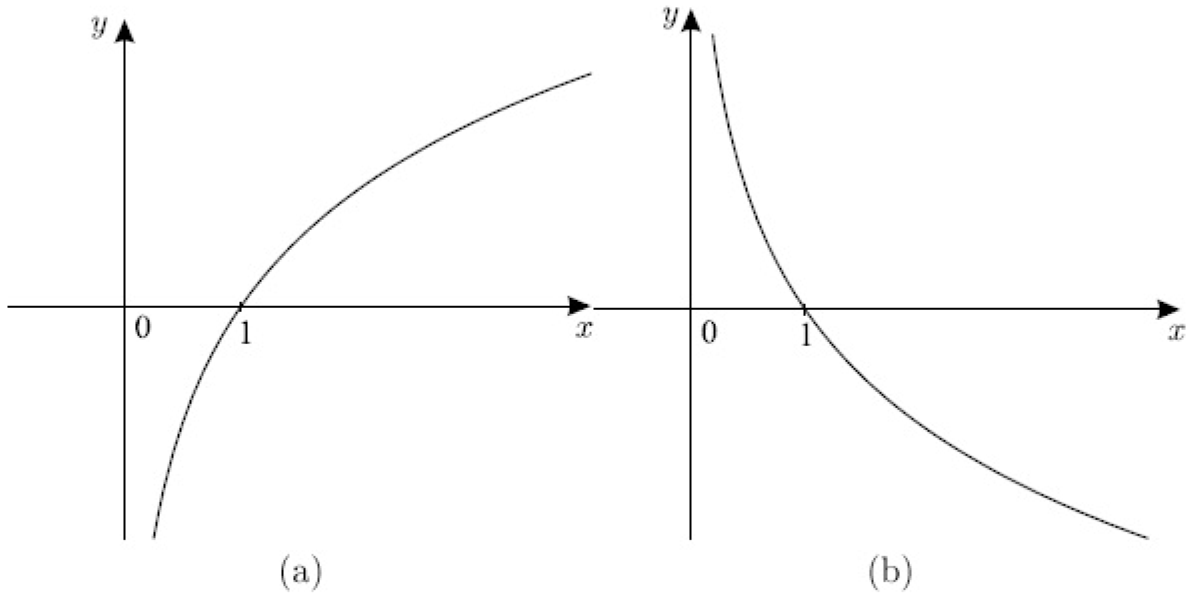


Figura 2.4

Em relação ao comportamento assintótico, no caso das funções logarítmicas devemos nos perguntar (já que seu domínio é o intervalo $(0, \infty)$), por um lado,

como se comporta uma função logarítmica para x muito próximo de 0?

E, por outro lado,

como se comporta uma função logarítmica quanto $x \to \infty$?

Para podermos responder a essas perguntas, devemos usar as informações que já obtivemos sobre as exponenciais.

Suponhamos que $a > 1$ e que x é um número positivo muito próximo de 0. Fazendo $y = \log_a x$ temos que $a^y = x$. Mas, do que vimos acima, sabemos que para x ser um número próximo de 0, y tem que ser negativo com $|y|$ muito grande, ou seja, podemos concluir que $y = \log_a x$ é negativo com valor absoluto arbitrariamente grande, desde que x seja suficientemente próximo de 0. Isto é, temos que

$$\lim_{x \to 0} \log_a x = -\infty.$$

Analogamente, podemos ver que se x é um número muito grande, então $y = \log_a x$ também tem que ser um número muito grande, já que $a^y = x$ e $a > 1$. Ou seja,

$$\lim_{x \to \infty} \log_a x = \infty.$$

Como antes, usando essas informações podemos concluir que se $0 < a < 1$, então

$$\lim_{x \to 0} \log_a x = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \infty} \log_a x = -\infty.$$

De fato, usando a relação que obtivemos acima, $\log_a x = (\log_b x;) (\log_a b)$ para $b = \frac{1}{a}$ obtemos

$$\log_a x = -\log_b x$$

já que $\log_a(\frac{1}{a}) = \log_a 1 - \log_a a = 0 - 1$. Logo, se $0 < a < 1$, então $b = \frac{1}{a} > 1$ e, portanto,

$$\lim_{x \to 0} (-\log_b x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \infty} (-\log_b x) = -\infty.$$

Finalmente observamos que entre as exponenciais existe uma que se destaca das demais por uma propriedade geométrica bastante simples: seu gráfico é *tangente* à reta $y = x + 1$ em $x = 0$. Mais precisamente, existe um único número real, que convencionamos denotar por e, tal que o gráfico de e^x só toca a reta $y = x + 1$ no ponto (0,1). Em particular, $e^x > x + 1$ para $x \neq 0$ (veja Figura 2.5a).

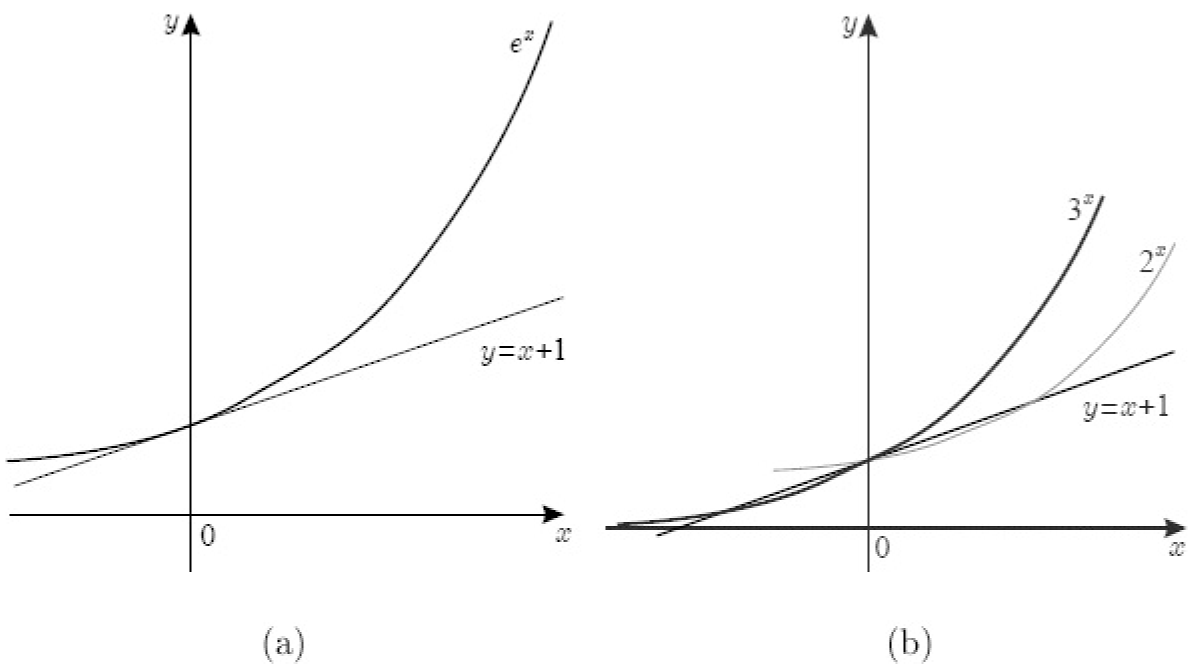


Figura 2.5

Na Figura 2.5b, são dados os gráficos de 2^xe 3^x. Esses dois gráficos descrevem os dois comportamentos típicos das exponenciais com base maior que 1. Mais precisamente, se $1 < a <$ e, então o gráfico de a^x se comporta, em relação à reta $y = x + 1$, como o gráfico de 2^x: o gráfico intercepta essa reta exatamente em dois pontos, (0,1) e (X_0, a^{x_0}), onde $x_0 > 0$. Se $a >$ e, então o comportamento em relação à reta $y = x + 1$ é semelhante ao do gráfico de 3^x: o gráfico intercepta essa reta exatamente nos pontos (x^1, a^{x1}) e (0,1), com $x_1 < 0$.

O número e é um número irracional que é o limite da sequência $(1+\frac{1}{n})^n$, que, como vimos no apêndice do Capítulo 3, é convergente. A expansão decimal de e até a sétima casa decimal é 2,7182818…. A função inversa de e^x é chamada a *função logarítmica natural* e é denotada por ln, isto é, $\ln x = \log_e x$;. E comum nos referirmos à exponencial na base e simplesmente como a *função exponencial*.

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

   (a) Se $x \in \mathbb{R}$, então $\ln(\frac{x}{x^3+1}) = \ln x - \ln(x^3+1)$.

   (b) Se $x \in \mathbb{R}$ e $e^{x^3-x} = 1$, então $x = 0$.

2. Faça um esboço do gráfico de $g(x) = |\ln|x||$. Quantas soluções tem a equação $|\ln |x|| = 1$? Quais são essas soluções?
3. Seja $g(x) = |\ln |x + 1||$:

   (a) Calcule $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

   (b) Resolva a equação $g(x) = 0$.

   (c) Faça um esboço do gráfico de g.

   (d) Quantas soluções tem a equação $|\ln |x + 1|| = 1$?
4. Resolva as equações abaixo:

(a) $e^{x^2-2x+1} = 1.$

(b) $\frac{(x^2-1)e^{x^3+2x}}{x^3+2} = 0.$

(c) $(x-1)\ln(x^3+1) = 0.$

(d) $\log_3 |2x+1| = 0.$

(e) $2\ln(x+1) = 0.$

(f) $\ln(x+1)^2 = 0.$

(g) $2^{3x} = e^{x^3}.$

5. Encontre o número real c e a função contínua, $y(x)$, tal que

$$y(1) = -2 \text{ e } \ln|y+1| = x^3 - 1 + c.$$

6. Calcule os limites abaixo:

(a) $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x}{x^2+1}}.$

(b) $\lim_{x\to 0} e^{\frac{x}{x^2+1}}.$

(c) $\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{x}{x^2+1}}.$

(d) $\lim_{x\to 0} \ln(x^2+1).$

(e) $\lim_{x\to\infty} \ln(x^2+1).$

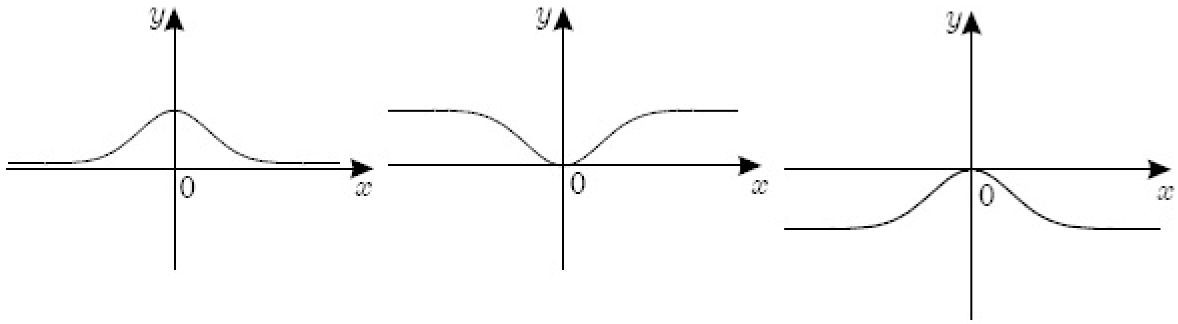
(f) $\lim_{x\to\infty} \ln(\frac{1}{x^2+1}).$

7. Resolva as equações abaixo:

(a) $(x-1)(x^2+3x+1)e^{(x^2-1)} = 0.$

(b) $(x-1)(x^2+3x+1)e^{\sqrt{x^2-1}} = 0.$

8. Um dos gráficos abaixo é o gráfico de $g(x) = a^{x^2} - 1$, onde $0 < a < 1$. Qual deles?



(a) (b) (c)

9. Determine o número real C e a função contínua $y = y(x)$ que satisfaz $y(1) = 1$ e $\ln |y| = x^3 + c$.

10. Nos itens abaixo, esboce o gráfico da função f e de sua inversa, f^{-1} :

(a) $f(x) = e^{-x}$.

(b) $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

11. Seja $f(t) = 2e^{kt} + 20$. Sabendo que $f(2) = 30$, calcule aproximadamente $f(3)$, usando a aproximação $\sqrt{5} \approx 2,236$.

12. Faça um esboço dos gráficos de:

(a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

(b) $h(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$.

(c) $g(x) = e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}$.

13. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

(a) Se $\ln (x + 1)^2 = 0$, então $x = 0$.

(b) Se $2x \ln (x + 1) = 4x [\ln (x + 1)]^2$, então $x = e^{\frac{1}{2}} - 1$.

14. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$.

(b) $\lim_{x\to 5} e^{-\frac{1}{x^2}}$.

(c) $\lim_{x\to 1} \ln \left|x^2 - 1\right|$.

15. Resolva as equações:

(a) $\ln x + \ln(x-1) = \ln(x(x-1))$.

(b) $\ln |x-1| = b$.

16. Seja $f(x) = e^{3x-1}$.

(a) Resolva a equação $e^{3x-1} = 2$.

(b) Ache uma expressão para a função inversa, f^{-1}.

17. Em cada item abaixo, faça um esboço do gráfico da função dada:

(a) $f(x) = e^{3x-1}$.

(b) $f(x) = e^{2-x}$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{e^{3x+1}}$.

(d) $f(x) = \ln(2x-1)$.

(e) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

18. Sejam f, g e h *as* funções

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x^2 \quad \text{se } x > 0, \\ g(x) &= \ln x^2 \quad \text{se } x < 0, \\ h(x) &= \ln x^2 \quad \text{se } x \neq 0. \end{aligned}$$

(a) Verifique que f e g são funções inversíveis e determine suas inversas, f^{-1} e g^{-1}.

(b) É correto afirmar que $f(x) = 21\text{n}\ x$?

(c) É correto afirmar que $g(x) = 2 \ln x$?

(d) É correto afirmar que $g(x) = 21\text{n}\ (-x)$?

(e) É correto afirmar que $h(x) = 2 \ln x$?

(f) Faça um esboço do gráfico de h.

19. Seja f a função definida pela expressão

$$f(x) = \frac{[\ln(x^2-1)]^2}{x^2-1}.$$

(a) Qual é o domínio de f?

(b) Resolva a equação $f(x) = 0$.

20. Resolva a equação

$$4x \ln(x^2 - 1) - 2x [\ln(x^2 - 1)]^2 = 0.$$

3. As funções trigonométricas

Em geometria, um ângulo é definido a partir de duas semirretas com a mesma origem. Essa origem é chamada de vértice e as duas semirretas, de lados do ângulo. Podemos dizer que um ângulo é um objeto matemático que está associado a uma das regiões planas que são separadas pelas duas semirretas. Na Figura 3.1, as regiões associadas aos ângulos indicados estão sombreadas.

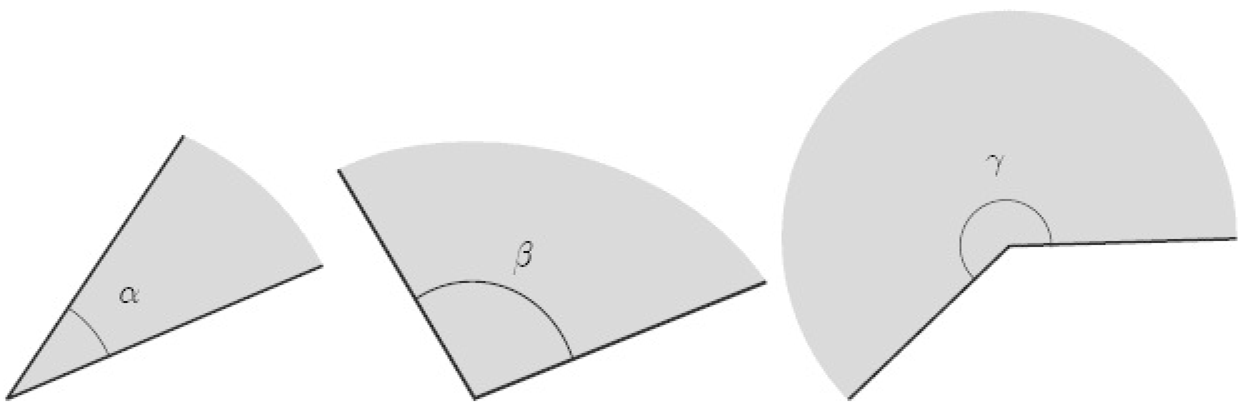


Figura 3.1

Em trigonometria elementar, que trata de resultados que envolvem ângulos e triângulos, os ângulos são tradicionalmente medidos em graus e os conceitos de seno e cosseno de um ângulo são introduzidos para ângulos que medem menos que 90°.

No contexto do cálculo, no entanto, estamos interessados em obter funções cujos domínios sejam o conjunto de todos os números reais e que, frente a uma interpretação de um número real como um ângulo (ou como uma outra medida de um ângulo), forneçam, para um ângulo cuja medida em graus é menor que 90°, os mesmos valores que o seno e o cosseno já definidos pela trigonometria elementar.

Comecemos por introduzir uma outra unidade de medida de ângulos, o *radiano*. Para isso, usamos uma propriedade fundamental já conhecida pelos gregos:

se C_1 e C_2 *são dois círculos de raios* r_1 *e* r_2, *ambos com centro no vértice de um ângulo* è, *e* l_1 *e* l_2 *são, respectivamente, os comprimentos dos arcos* (s_1 e S_2 na Figura 3.2) *dos círculos* C_1 *e* C_2 *determinados pelo ângulo* è, *então*

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2}.$$

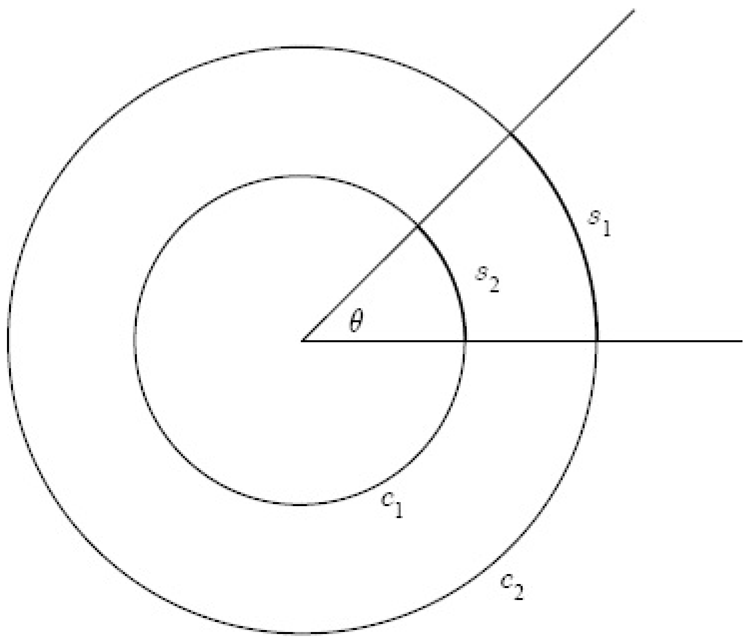


Figura 3.2

Em outras palavras, a razão entre 0 comprimento do arco determinado por um ângulo em um círculo, cujo centro é 0 vértice do ângulo, e 0 raio do círculo é um número real que só depende do ângulo, isto é, não depende do raio do círculo. Em particular, 0 número real ð é definido a partir dessa propriedade: ð é a razão entre 0 comprimento de um semicírculo e o raio do círculo.

Em geral, essa propriedade nos permite introduzir uma outra medida para ângulos:

Definição: A medida em *radianos* de um ângulo é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em um círculo cujo centro é o vértice do ângulo e o raio do círculo.

Por exemplo, como um semicírculo é o arco determinado por um ângulo de 180° cujo vértice é o centro do círculo, temos que o número π é a medida em radianos do ângulo de 180°. Portanto, 2π é a medida em radianos do ângulo de 360°, o que nos dá, em particular, que o comprimento de um círculo de raio r é 2πr. Em geral, se l é o comprimento do arco de um círculo (com centro no vértice do ângulo) determinado por um ângulo de t radianos, então, como por definição $t = \frac{l}{r}$, onde r é o raio do círculo, tem-se que $l = rt$.

Em particular, se o raio do círculo é 1, então a medida do ângulo em radianos é o comprimento do arco determinado pelo ângulo.

Como foi dito há pouco, queremos chegar a uma identificação entre ângulos e números reais.

Para isso, adotamos, no Plano Cartesiano, um sistema de coordenadas com a mesma unidade de medida nos dois eixos, e começamos por identificar ângulos com arcos do círculo de raio 1, que é chamado círculo unitário e será denotado por S^1.

Dado um ângulo θ, consideramos sua representação, que tem como vértice a origem do sistema de coordenadas, um dos lados é o semieixo horizontal positivo e o arco determinado por θ em S^1 é o arco que se obtém ao percorrer o círculo no sentido anti-horário (chamado também de *sentido positivo)* do ponto de coordenadas (1,0) até o ponto P, dado pela interseção do outro lado do ângulo com o círculo (veja Figura 3.3).

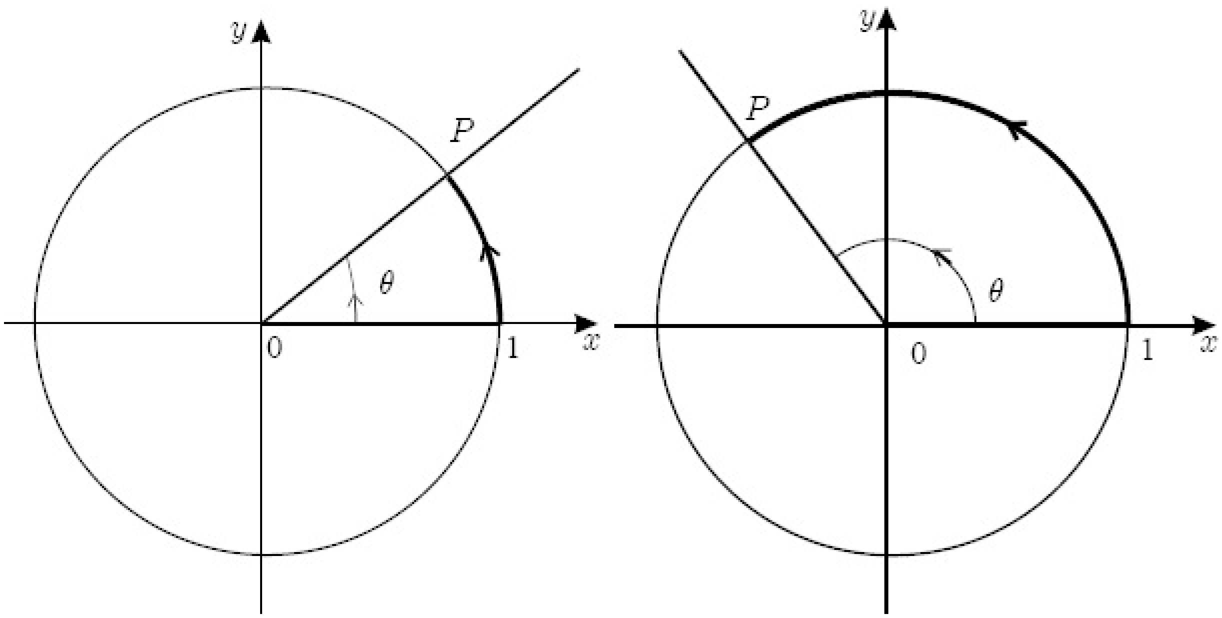


Figura 3.3

Então, a partir da representação de um ângulo, associamos ao ângulo o arco de S^1 determinado pelo ângulo.

Em particular, como S^1 é o círculo de raio 1, a medida em radianos de um ângulo é o comprimento do arco de círculo associado ao ângulo. Como o comprimento de um círculo de raio 1 é 2π, podemos identificar, de imediato, números reais do intervalo $[0, 2\pi]$ com arcos de S^1 e, consequentemente, com ângulos: de fato, dado um número $t \in [0, 2\pi]$ podemos identificá-lo com o ângulo que está associado ao arco de comprimento í, obtido percorrendo-se S^1 no sentido anti-horário a partir do ponto de coordenadas (1,0) (Figura 3.4).

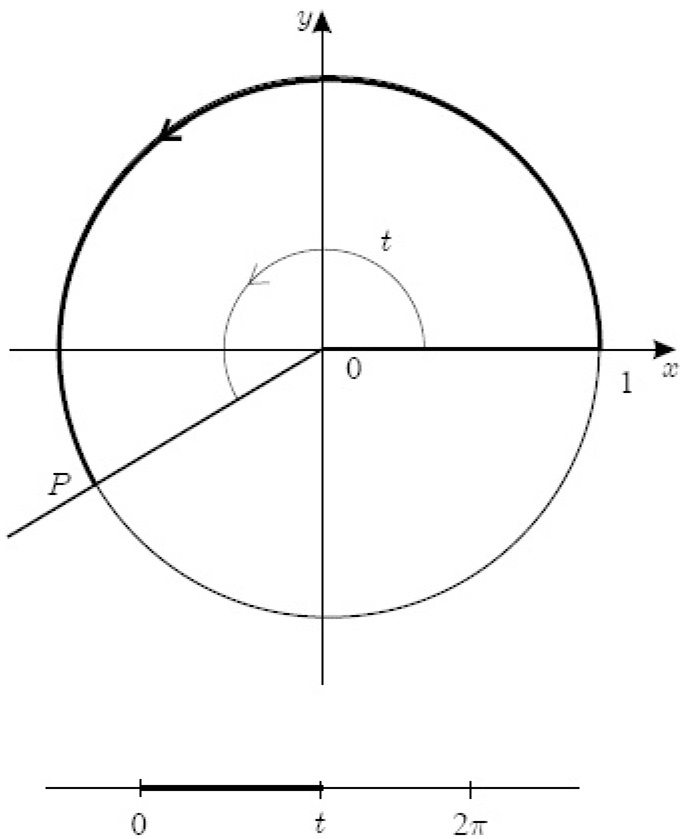


Figura 3.4

Utilizando o processo dessa identificação, podemos introduzir a interpretação de qualquer número real t como um ângulo (ou como o ângulo que mede t radianos):

Se $t \geq 0$ *dizemos que t é o ângulo que corresponde a percorrer em* S^1, *no sentido* ***anti-horário*** *a partir do ponto de coordenadas* (1,0), *um comprimento t.*

Se $t > 0$; *dizemos que t é o ângulo que corresponde a percorrer em* S^1, *no* ***sentido horário*** *(ou sentido negativo) a partir do ponto de coordenadas* (1,0), *um* *comprimento* $|t|$.

Por exemplo, $t = 4\pi$ corresponde a percorrer S^1 duas vezes no sentido anti-horário, enquanto que $t = \frac{17\pi}{4}$ corresponde a percorrer S^1 duas vezes no sentido anti-horário e mais o arco que corresponde ao ângulo $\frac{\pi}{4}$ (Figura 3.5).

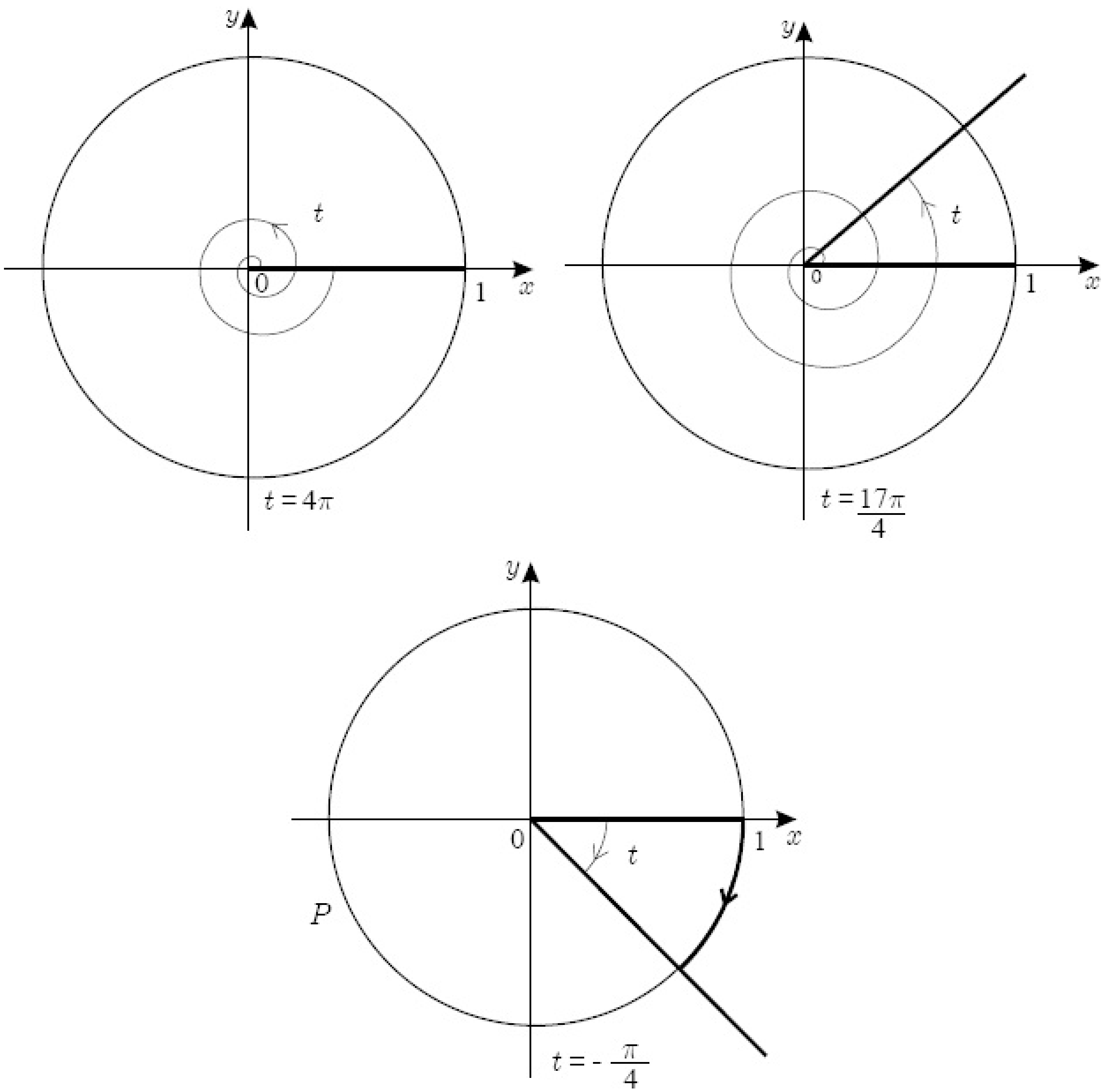


Figura 3.5

Observe que, com essa identificação, percorrer a reta real no sentido da ordem dos números reais, isto é, do menor para o maior, corresponde **sempre** a percorrer o círculo unitário no sentido positivo. Por exemplo, se t percorre a reta do ponto que corresponde ao número $-\frac{\pi}{2}$ ao ponto que corresponde ao 0, então $P(t)$ percorre o círculo unitário no sentido anti-horário do ponto $(0, -1)$ ao ponto $(0,0)$.

As funções seno e cosseno

O processo que usamos na seção anterior para interpretar qualquer número real como um ângulo nos fornece uma maneira natural de a cada número real t associar um ponto $P = P(t)$ do círculo S^1:

$P(t)$ é o ponto que atingimos ao percorrer um arco (no sentido positivo se $t > 0$ e no sentido negativo se $t < 0$) em S^1 de comprimento $|t|$.

Na Figura 3.6, estão representados os pontos de S^1 correspondentes aos ângulos $\frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{11\pi}{4}$.

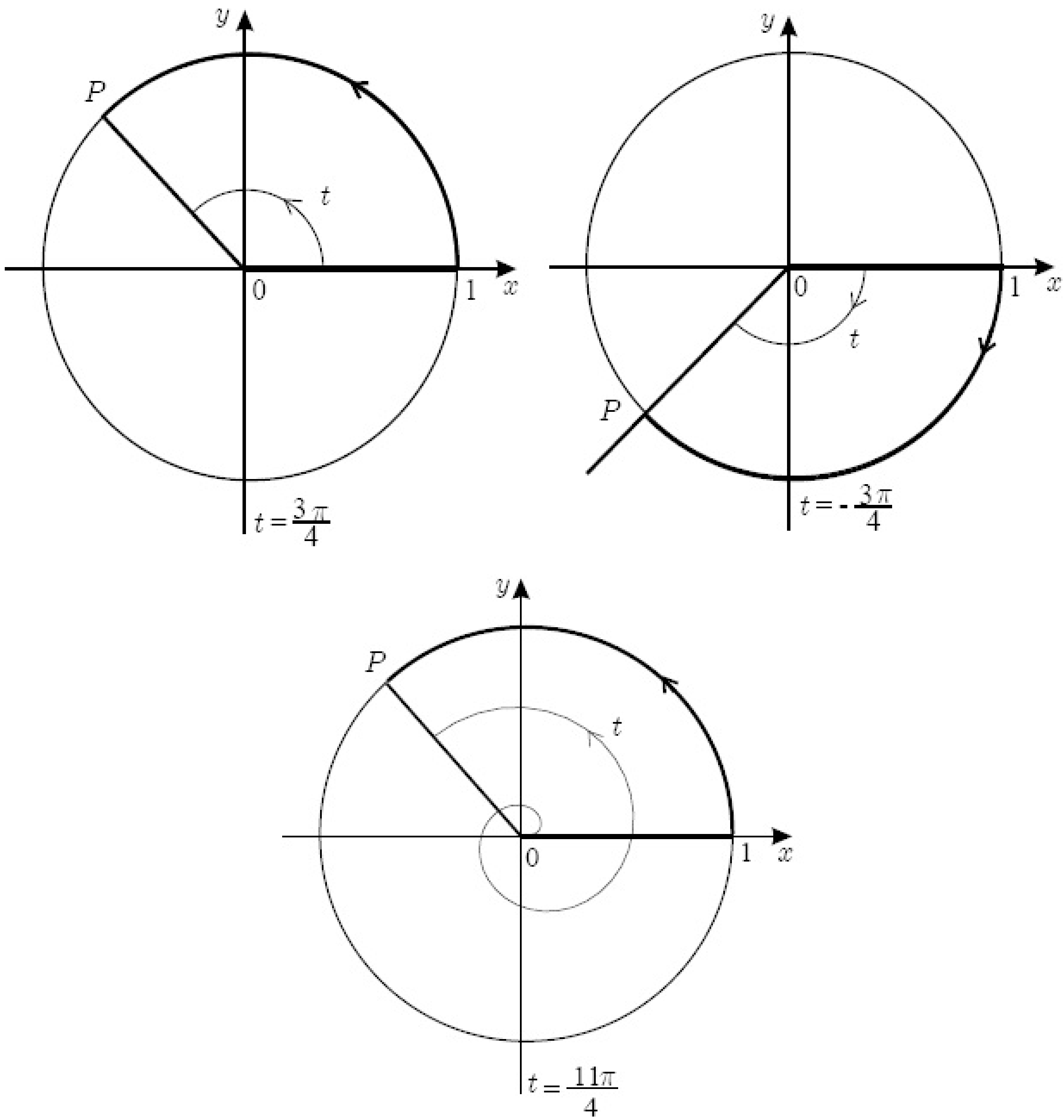


Figura 3.6

Observe que se dois números diferem de um múltiplo inteiro de 2π, digamos $2k\pi$, então esses números determinam o mesmo ponto do círculo S^1, já que um percurso de comprimento $2k\pi$ corresponde a k voltas completas (no sentido positivo, se $k > 0$, e no negativo, se $k > 0$) em S^1. Esse é o caso de $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{11\pi}{4}$, do exemplo da Figura 3.6, já que $\frac{11\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi$ (nesse caso $k = 1$).

Por outro lado, pelas identificações entre arcos e ângulos que fizemos há pouco, temos que qualquer ponto do círculo unitário é o ponto associado a algum número do intervalo [0, 2π]. Mais geralmente, essa propriedade é válida para qualquer intervalo fechado de comprimento 2π.

Para definirmos as funções seno e cosseno, comecemos por considerar ângulos entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, isto é, ângulos cujas medidas em graus variam ente 0° e 90° e para os quais já conhecemos as definições de seno e cosseno.

Para $0 < t < \frac{\pi}{2}$, o ponto associado, P, de coordenadas (x, y), é um ponto do primeiro quadrante do Plano Cartesiano. Traçando por P um segmento de reta perpendicular ao eixo-x, construímos o triângulo retângulo OPQ como na Figura 3.7.

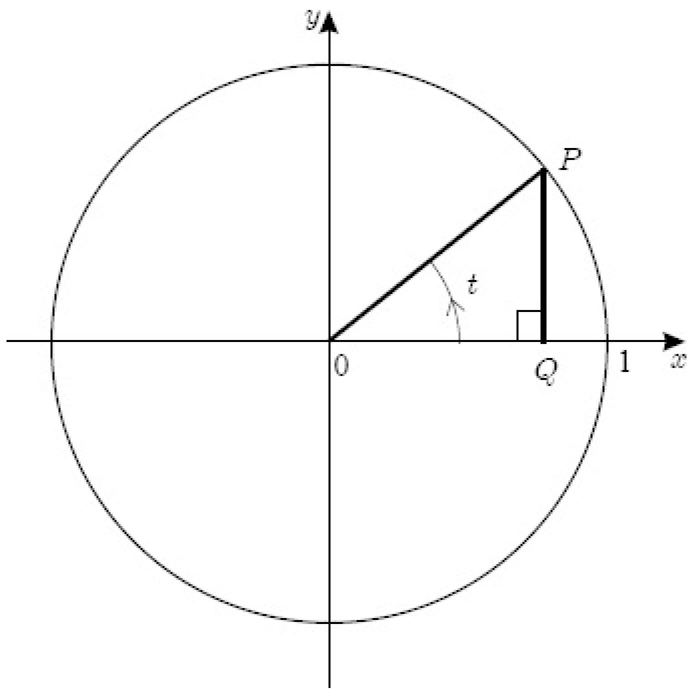


Figura 3.7

Da definição que já conhecemos de seno e cosseno, temos que

$$\operatorname{sen} t = \frac{|PQ|}{1} \qquad \text{e} \qquad \cos t = \frac{|OQ|}{1},$$

onde $|PQ|$ e $|OQ|$ são, respectivamente, os comprimento dos segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{OQ}$, já que a hipotenusa do triângulo coincide com um raio do círculo S^1 e, portanto, tem comprimento 1.

Mas temos que $\overline{OQ} = x$ e $\overline{PQ} = y$, já que x e y são as coordenadas de P, ou seja:

Se $0 < t < \frac{\pi}{2}$ *e* $P = P(t)$ *é o ponto do círculo unitário* S^1 associado a t, *então* cos t *e* sen t *são, respectivamente, a primeira coordenada e a segunda coordenadas do ponto* P.

Vamos usar essa caracterização para definirmos as funções seno e cosseno em qualquer número real t:

Definição: *Se t é um número real qualquer e* $P = (x, y)$ *é o ponto do círculo unitário que está associado a t, definimos*

$$\cos t = x \text{ e } \operatorname{sen} t = y.$$

Várias propriedades decorrem imediatamente dessa definição:

(a) *Seno e cosseno são funções periódicas de período* 2π, *isto é*,

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t \text{ e } \cos(t + 2\pi) = \cos t.$$

Como já vimos, se a diferença entre dois números é 2π (ou, mais geralmente, um múltiplo de 2π), então eles determinam o mesmo ponto no círculo unitário, isto é, $P(t + 27\pi) = P(t)$. Como as coordenadas de $P(t + 2\text{-}\pi)$ e de $P(t)$ são, respectivamente,

$$(\cos(t + 2\pi), \operatorname{sen}(t + 2\pi)) \text{ e } (\text{cós } t, \operatorname{sen} t),$$

obtemos as igualdades acima.

(b) *Qualquer que seja o número real t tem-se que*

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

(onde $\cos^2 t$ e $\operatorname{sen}^2 t$ significam, respectivamente, $(\cos t)^2$ e $(\text{sem } t)^2$. Essa equação é chamada uma *identidade trigonométrica*, já que envolve somente funções trigonométricas e é válida para qualquer número real).

De fato, sabemos que o círculo unitário é o conjunto de pontos do plano cujas coordenadas satisfazem a relação $x^2 + y^2 = 1$, logo a identidade acima decorre da propriedade de que qualquer que seja o número real t, o ponto $P = (\text{cós } t, \operatorname{sen} t)$ é, por definição, um ponto do círculo unitário.

(c) *Para qualquer número real t tem-se que*

$$-1 \leq \text{sen}\ t \leq 1 \text{ e } -1 \leq \cos t \leq 1.$$

Essas propriedades decorrem das definições das funções seno e cosseno e do fato de que as coordenadas de qualquer ponto do círculo unitário variam entre − 1 e 1.

Essas desigualdades nos dizem que os conjuntos imagem das funções seno e cosseno estão contidos no intervalo [−1, 1]. Por outro lado, dado qualquer número b, com $-1 \leq b \leq 1$, sabemos que existe um ponto do círculo unitário tal que b é a segunda coordenada desse ponto (de fato existem exatamente dois desses pontos, veja Figura 3.8).

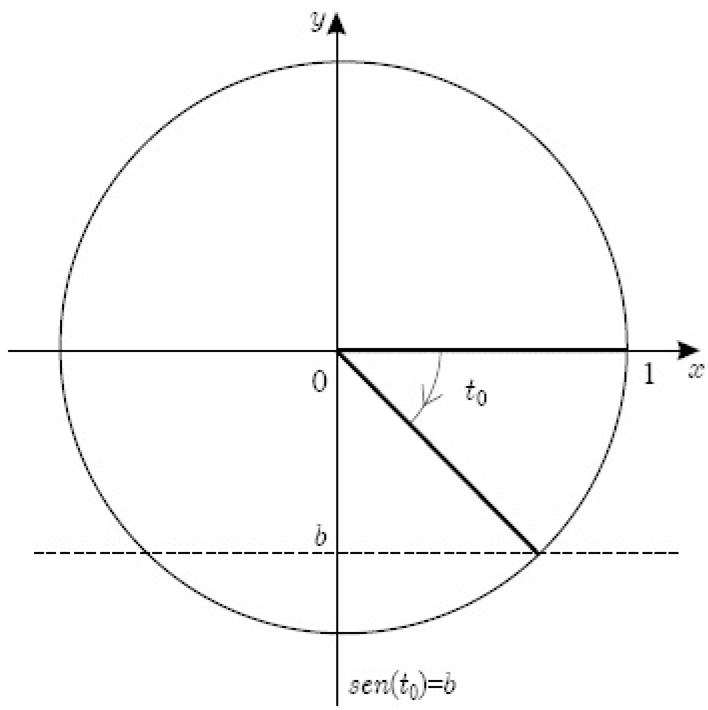


Figura 3.8

Como qualquer ponto do círculo unitário está associado a algum número t_0 do intervalo [0, 2π], podemos concluir que $b = \text{sen}\ t_0$, isto é, podemos concluir que

a imagem do intervalo [0, 2π] *pela função seno é o intervalo* [−1, 1].

Em particular, o conjunto imagem da função seno é o intervalo $[-1,1]$. Analogamente, podemos concluir que

a imagem do intervalo $[0, 2\pi]$ *pela função cosseno é o intervalo* $[-1, 1]$

e que o conjunto imagem da função cosseno também é o intervalo $[-1, 1]$

(d) *A função seno é ímpar e a função cosseno é par, isto é*,

$$\text{sen}(-t) = -\text{ sem } t \text{ e } \cos(-t) = \cos t$$

para qualquer número real t.

Para verificarmos a validade dessas igualdades basta observarmos que, por definição, os ângulos t e $-t$ determinam no círculo unitário arcos de mesmo comprimento, $|t|$. Daí decorre, como podemos ver na Figura 3.9, que se (x, y) são as coordenadas do ponto $P(t)$, então $(x, -y)$ são as coordenadas de $P(-t)$.

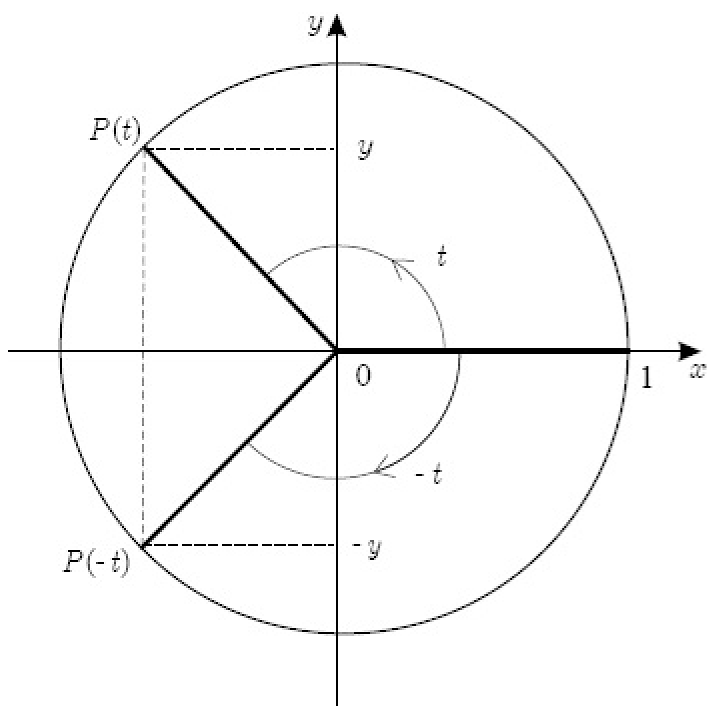


Figura 3.9

Isto é,

$$\text{se } P(t) = (x, y), \text{ então } P(-t) = (x, -y).$$

Mas, por definição de seno e cosseno, temos que

$$P(t) = (\cos t, \text{sen } t) \text{ e } P(-t) = (\cos(-t), \text{sen }(-t))$$

logo,

$$(x, y) = P(t) = (\cos t, \text{sen } t),$$

que nos dá que

$$x = \cos t, \; y = \text{sen } t$$

e

$$(x, -y) = P(-t) = (\cos(-t); \text{sen }(-t)),$$

donde,

$$x = \cos(-t), \; -y = \text{sen }(-t),$$

isto é, obtemos que

$$\cos(-t) = x = \cos t \text{ e sen }(-t) = -y = -\text{ sen } t.$$

(e) *Se a e b são números reais quaisquer, então*

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b$$

$$\text{sen }(a + b) = \text{sen a} \cos b + \cos \text{a sen } b.$$

Mostremos a igualdade que envolve $\cos(a + b)$. Para isso, primeiro observamos que o ponto $P(a + b)$ pode ser obtido percorrendo-se (no sentido positivo se $a > 0$ e negativo se $a > 0$) um arco de comprimento $|a|$ no círculo unitário a partir do ponto $P(b)$, como indicado na Figura 3.10.

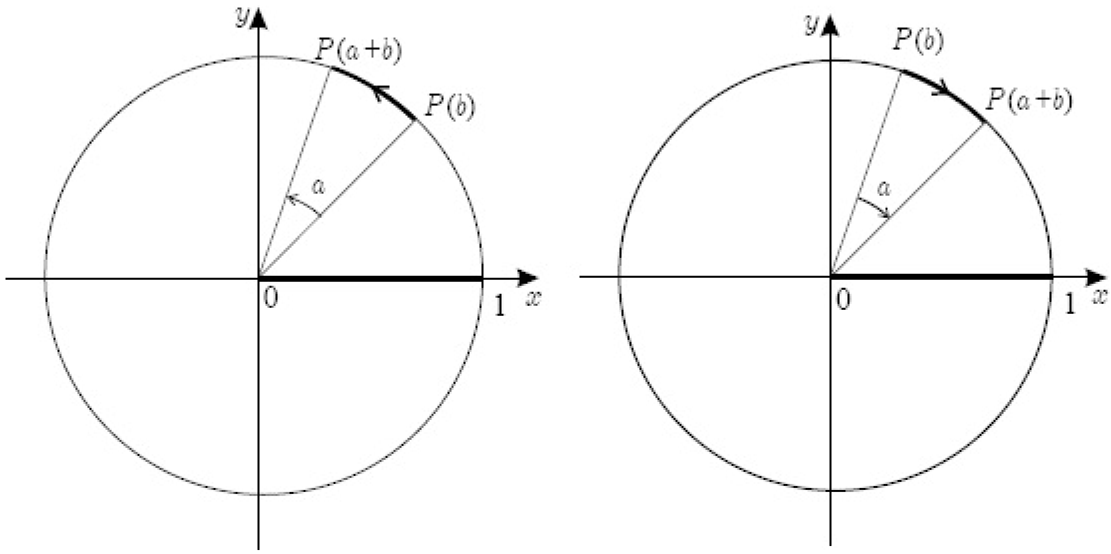


Figura 3.10

Assim, se deslizarmos o segmento de reta que une os pontos *P(a+b)* e Q = (1, 0) ao longo de um arco de comprimento $|a|$, mas agora no sentido oposto, isto é, no sentido negativo se $a > 0$ e positivo se $a > 0$, obteremos o segmento de reta que une os pontos *P(b)* e *P(−a)* (veja as Figuras 3.11a e 3.11b).

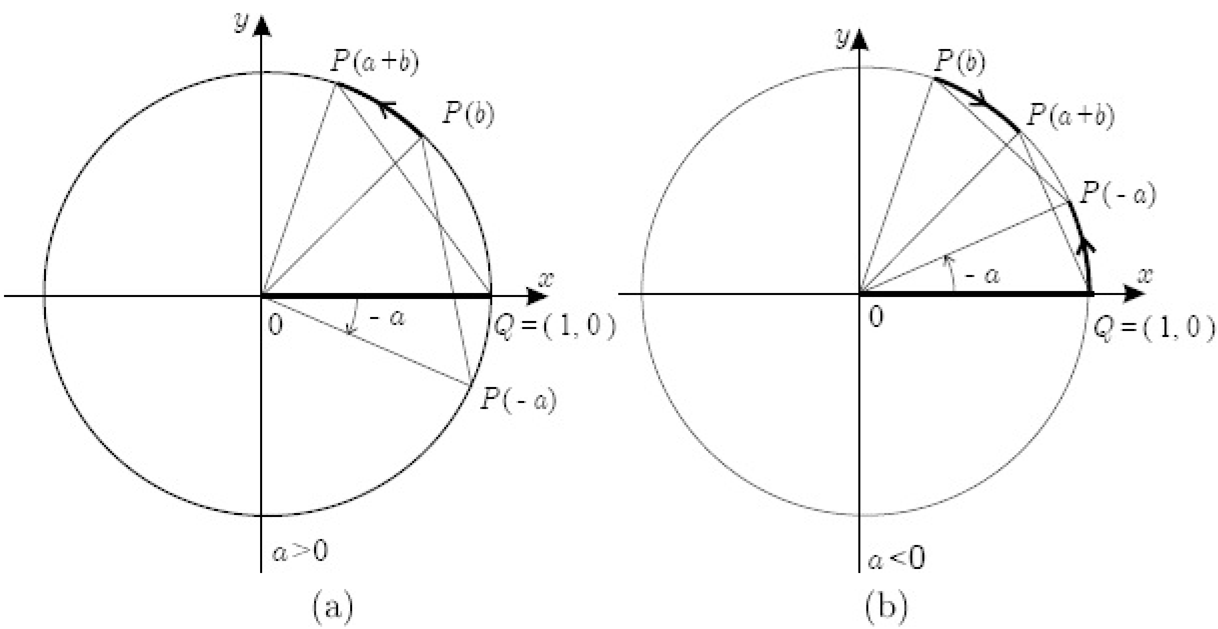


Figura 3.11

Em particular, podemos concluir que os dois segmentos têm o mesmo comprimento, isto é, se d_1 e d_2 são, respectivamente, a distância entre *P(a +*

b) e Q e a distância entre $P(b)$ e $P(-a)$, então $d_1 = d_2$. Para calcularmos d_1 e d_2, usamos as coordenadas dos pontos:

$$P(b) = (\cos b, \operatorname{sen} b)$$
$$P(a+b) = (\cos (a+b), \operatorname{sen} (a+b))$$
$$P(-a) = (\cos a, -\operatorname{sen} a)$$
$$Q = (1,0),$$

obtendo

$$d_1^2 = [\cos(a+b) - 1]^2 + \operatorname{sen}^2 (a+b)$$

$$d_2^2 = [\cos b - \cos a]^2 + [\operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a]^2,$$

donde, calculando os quadrados indicados obtemos

$$d_1^2 = \cos^2(a+b) - 2\cos(a+b) + 1 + \operatorname{sen}^2 (a+6)$$
$$d_2^2 = \cos^2 b - 2\cos b \cos a + \cos^2 a + \operatorname{sen}^2 b + 2\operatorname{sen} b \operatorname{sen} a + \operatorname{sen}^2 a.$$

Mas sabemos que $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, para qualquer número t, logo usando essa igualdade para $t = a$, $t = b$ e $t = a + b$, obtemos

$$d_1^2 = 2 - 2\cos (a+b)$$

$$d_2^2 = 2 - 2\cos b \cos a + 2\operatorname{sen} b \operatorname{sen} a.$$

Agora, como $d_1 = d_2$, temos que $d_1^2 = d_2^2$ e, portanto,

$$2 - 2\cos (a+b) = 2 - 2\cos b \cos a + 2\operatorname{sen} b \operatorname{sen} a,$$

donde,

$$-2\cos(a+b) = -2\cos 6 \cos a + 2\operatorname{sen} b \operatorname{sen} a.$$

Dividindo ambos os membros dessa igualdade por -2 obtemos a identidade trigonométrica

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Para chegarmos à outra identidade, primeiro observamos que, fazendo $a = \frac{\pi}{2}$ e $6 = -t$, obtemos que

$$\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \cos\frac{\pi}{2}\ \cos(-t) - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(-t)$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - t) = -\operatorname{sen}(-t),$$

já que $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ e $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$- Por outro lado, já sabemos que seno é uma função ímpar, isto é, sen $(-t) = -$ sen t, logo temos que

$$\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \operatorname{sen} t.$$

Usando agora essa identidade para $t = \frac{\pi}{2} - a$, obtemos

$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - a) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - a)) = \cos a.$$

Da primeira dessas duas últimas identidades, fazendo $t = a+b$, decorre que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a+b) &= \cos(\frac{\pi}{2} - (a+b))\\ &= \cos((\frac{\pi}{2} - a) - b)\\ &= \cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos(-b) - \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - a)\operatorname{sen}(-b)\\ &= \operatorname{sen} a\ \cos b + \cos a \operatorname{sen} b,\end{aligned}$$

já que

$$\cos(-b) = \cos b \text{ e } \operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen} b,$$

pois cosseno é uma função par e seno é ímpar, e

$$\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \operatorname{sen} a \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a,$$

como vimos imediatamente acima.

(f) *Se t é um número real, então*

$$cos\ t = \text{sen}\ (t + \tfrac{\pi}{2}).$$

Essa identidade decorre da identidade para sen (a + *b)*, tomando a = *t* e $b = \frac{\pi}{2}$, e dos valores $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ e $sen\ \frac{\pi}{2} = 1$.

O interessante desta última identidade é que ela nos diz que a *função cosseno é uma translação horizontal da função seno* e, portanto, pelo que já vimos na seção 4 do Capítulo 4, basta estudarmos a função seno para conhecermos as propriedades das duas funções, seno e cosseno. Em particular, o gráfico do cosseno é uma translação horizontal (de $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda) do gráfico do seno.

Antes de começarmos a estudar mais detalhadamente a função seno, vejamos que podemos usar as funções seno e cosseno para representar qualquer ponto do plano.

Para isso, dotamos o Plano Cartesiano com um sistema de coordenadas *(x, y)*, com a mesma unidade nos dois eixos e, dado um ponto $Q = (x,y)$, consideramos a semirreta *R* com extremo na origem, que passa por *Q*.

Denotemos por θ o ângulo positivo que *R* faz com o eixo horizontal, como na Figura 3.12, e por *r* a distância do ponto *Q* à origem *O*. Em particular, *Q* é um ponto do círculo de centro na origem e raio *r*.

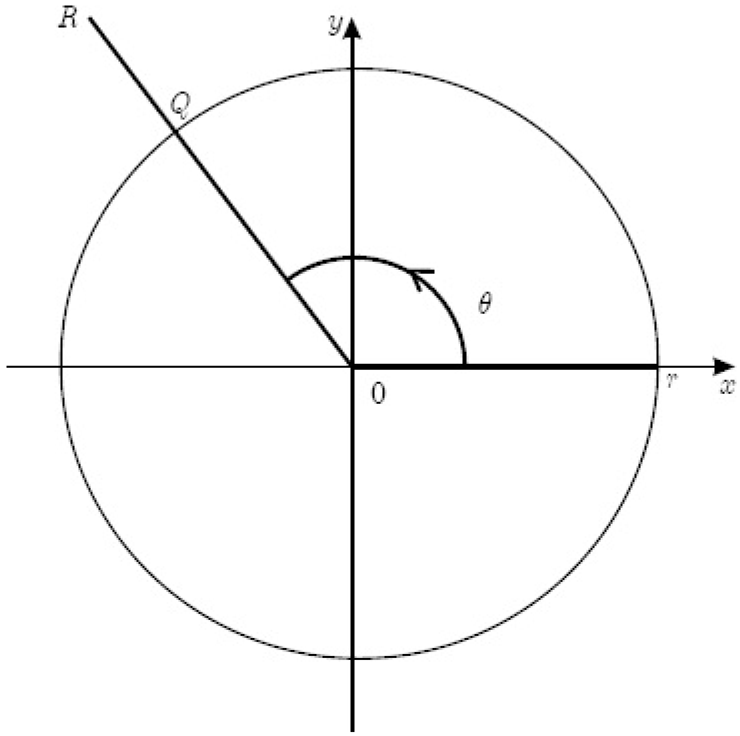


Figura 3.12

Agora, seja $P = (x_0, y_0)$ o ponto de interseção de R com o círculo unitário S^1. Se $x_0 = 0$ (isto é, P e Q estão num dos semi-eixos verticais), então,

$$x = 0, |y_0| = 1 \text{ e } r = |y|.$$

Como P e $Q = (x, y)$ estão numa mesma semirreta, y e y_0 têm o mesmo sinal, isto é, $y = ry_0$. Como $x = 0 = x_0$, podemos dizer que $x = rx_0$ e concluir que

$$Q = (rx_0, ry_0).$$

Agora, se $x_0 \neq 0$, seja $a = \frac{x}{x_0}$: vamos mostrar que $a = r$. Já sabemos que o fato de P e Q serem pontos de uma mesma reta garante que $\frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0}$, ou seja,

$$x = ax_0$$
$$y = \frac{y_0}{x_0}x = ay_0,$$

donde,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (ax_0)^2 + (ay_0)^2 \\ &= a^2(x_0^2 + y_0^2). \end{aligned}$$

Como $x_0^2 + y_0^2 = 1$, obtemos

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Ou seja, $Q = (x, y)$ é um ponto do círculo de raio $|a|$. Mas já sabemos que a é positivo (pois x e x_0 têm o mesmo sinal, uma vez que Q e P pertencem a uma mesma semirreta e $a = \frac{x}{x_0}$) e que, pela definição de r, Q pertence ao círculo de raio r, isto é, $a = r$ e, portanto,

$$Q = (r\, x_0, r\, y_0).$$

Por outro lado, lembremos que, como P é um ponto do círculo unitário e θ é o ângulo que a semirreta R faz com o eixo-x, temos que $x_0 = \cos\theta$ e $y_0 = \operatorname{sen}\theta$, ou seja, em resumo, mostramos que:

se $Q = (x, y)$ é um ponto qualquer do plano e $\theta \geq 0$ é o ângulo que a semirreta, com extremo na origem e que passa por Q, faz com o eixo-x, então

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta),$$

onde r é a distância do ponto Q à origem.

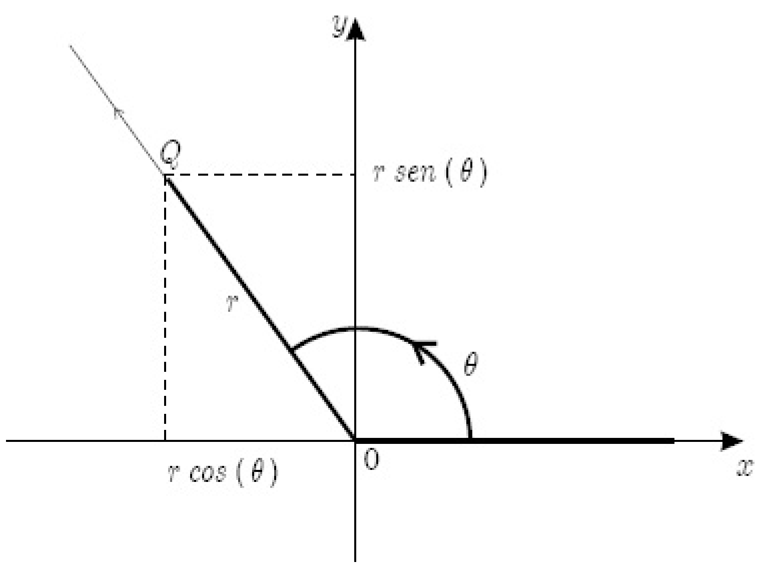


Figura 3.13

As coordenadas $(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ de um ponto do plano são chamadas *coordenadas polares*.

Continuidade e os limites fundamentais

Uma propriedade importante das funções seno e cosseno é a continuidade, pois essa propriedade nos garante que podemos calcular aproximações para o seno e o cosseno de qualquer número real com a precisão que desejarmos.

Para vermos que seno e cosseno são funções contínuas, primeiro lembramos que

$$\cos x = \text{ sen } (x + \frac{\pi}{2}),$$

isto é, cosseno é a composição da função seno com a função contínua $x \mapsto x + \frac{\pi}{2}$ e, portanto, é suficiente mostrarmos a continuidade de seno, já que o Teorema 1.1 do Capítulo 5 garante que a composição de funções contínuas resulta numa função contínua.

Mostremos, então, que a função seno é contínua. Para isso, usando a caracterização de continuidade por limites de função (Teorema 2.1 do Capítulo 5), devemos mostrar que dado um número real x_0 tem-se que

$$\lim_{x \to x_0} \text{ sen } x = \text{ sen } x_0.$$

Com o objetivo de simplificar a notação, introduzimos uma nova variável para esse limite, fazendo $x - x_0 = h$. Então, $x = x_0 + h$ e

$$h \to 0 \text{ é equivalente a } x \to x_0.$$

Com essa notação, a igualdade que queremos mostrar pode ser escrita como

$$\lim_{h \to 0} \text{sen } (x_0 + h) = \text{ sen } x_0.$$

Agora observamos que, como não usamos a letra x nessa expressão, não necessitamos mais usar a letra indexada, x_0, podendo substituí-la pela letra x simplesmente.

Ou seja, para obtermos a continuidade da função seno devemos mostrar que, para cada número real fixo, x, tem-se que

$$\lim_{h \to 0} \text{sen } (x + h) = \text{ sen } x.$$

Usando agora a identidade trigonométrica

$$\text{sen}\,(x+h) = \text{sen}\,x\cos h + \cos x\,\text{sen}\,h$$

vemos que:

se existem os limites de $\cos h$ *e* $\text{sen}\,h$*, quando* $h \to 0$*, então*,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\text{sen}\,(x+h) &= \lim_{h\to 0}(\text{sen}\;\,x\;\cos\;h + \cos x\,\text{sen}\;\,h)\\ &= \text{sen}\;x(\lim_{h\to 0}\cos\;h) + \cos x(\lim_{h\to 0}\text{sen}\;\,h),\end{aligned}$$

já que x está fixo (estamos tomando limite na variável h) e podemos usar as propriedades de limites de funções dadas no Teorema 2.1 do Capítulo 5. O lema que enunciamos a seguir, e cuja demonstração é dada no apêndice, garante a existência desses limites:

Lema 3.1: $\lim\limits_{h\to 0}\;\text{sen}\;h = 0$ e $\lim\limits_{h\to 0}\;\cos\;h = 1.$

Podemos agora provar que, dado um número real x, tem-se que

$$\lim_{h\to 0}\text{sen}\,(x+h) = \text{sen}\,x.$$

De fato, como $\lim\limits_{h\to 0}\text{sen}\,h = 0$ e $\lim\limits_{h\to 0}\cos h = 1,$ podemos afirmar que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\text{sen}\,(x+h) &= \text{sen}\,x(\lim_{h\to 0}\cos\;h) + \cos x(\lim_{h\to 0}\text{sen}\,h)\\ &= \text{sen}\,x\cdot 1 + \cos x\cdot 0\\ &= \text{sen}\,x,\end{aligned}$$

concluindo que a função seno é contínua em qualquer número real x sendo, portanto, uma função contínua.

Agora, como já dissemos, podemos também concluir que a função cosseno é contínua, já que é a composta da função seno com a função $x \mapsto x + \frac{\pi}{2}$, que também é uma função contínua, isto é, usamos a propriedade (**f**) da seção anterior que diz que $\cos x = \text{sen}\,(x + \frac{\pi}{2})$.

Em resumo, demonstramos o seguinte teorema:

Teorema 3.1: *As funções seno e cosseno são contínuas.*

O teorema seguinte nos dá o que chamamos *limites fundamentais*, a partir dos quais podemos provar que as funções seno e cosseno são funções deriváveis (Capítulo 7). No contexto deste capítulo, podemos vê-los como limites que não podem ser obtidos de alguma das propriedade gerais de limites de funções.

Teorema 3.2: $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$

Uma leitura que podemos fazer desses limites é que *se x é um número real suficientemente próximo de* 0, *então* sen $x \sim x$ e cos $x \sim 1$ (isto é, sen x é *aproximadamente* x e cos x é *aproximadamente* 1).

Os gráficos de seno e cosseno

A primeira propriedade que destacamos das funções seno e cosseno foi sua periodicidade, isto é, o fato de que essas funções são periódicas de período 2π. Como vimos no Capítulo 4, para obtermos o gráfico de uma função periódica, basta conhecermos seu gráfico num intervalo de comprimento igual ao seu período. Usaremos aqui o intervalo $[-\pi, \pi]$.

Pela identificação de números reais com pontos do círculo unitário, vemos que se fazemos t variar de 0 a π, o ponto $P = P(t)$ percorre o círculo no sentido anti-horário a partir do ponto de coordenadas (1,0) até o ponto (–1,0) (isto é, o semicírculo superior).

Em particular, temos que se t varia de 0 a $\frac{\pi}{2}$, então P percorre o arco de círculo do ponto (1,0) ao ponto (0, 1) e vemos que, à medida que se percorre esse arco, a segunda coordenada de P (t), que é o que definimos como sen t, cresce, de 0 = sen 0 até 1 = sen $\frac{\pi}{2}$. Isto é, podemos concluir que a função seno é crescente no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Analogamente, vemos que seno decresce, de 1 = sen $\frac{\pi}{2}$ a 0 = sen π, à medida que t varia de $\frac{\pi}{2}$ a π, e, portanto, seno é decrescente no intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Como já sabemos que seno é uma função contínua, vemos que a curva dada na Figura 3.14 é um esboço razoável para o gráfico de seno no intervalo $[0, \pi]$. De fato, com recursos do cálculo diferencial, podemos mostrar que esse é um esboço bastante fiel do gráfico de seno nesse intervalo.

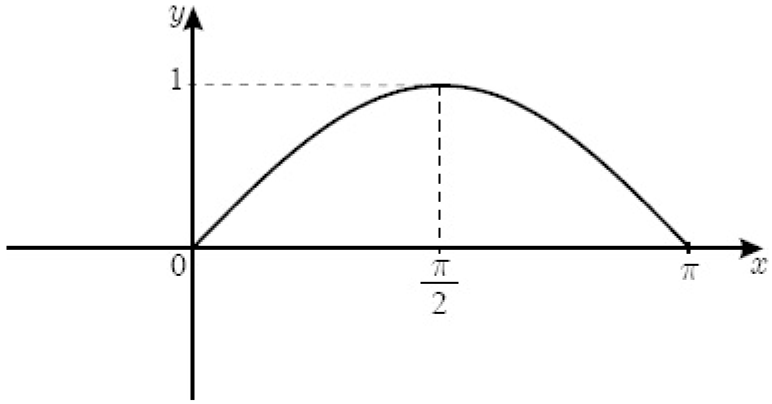


Figura 3.14

Agora, para obtermos o gráfico de seno no intervalo [–π, 0], basta lembrarmos que seno é uma função ímpar e, portanto, seu gráfico é simétrico em relação à origem (veja as Figuras 3.15a e b).

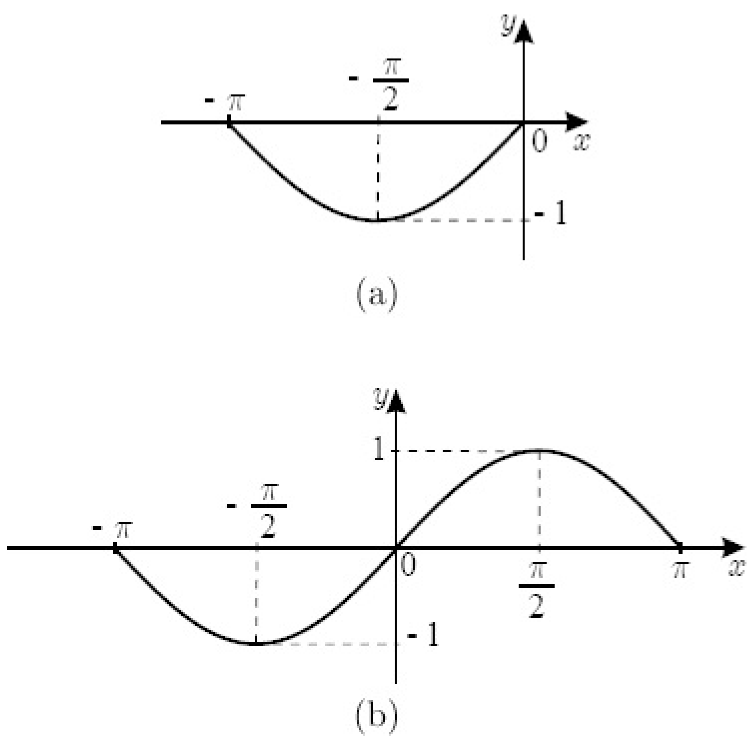


Figura 3.15

Como o período de seno é 2π e o intervalo [π, 3π] é uma translação de 2π do intervalo [–π, π], vemos que a Figura 3.15b dá o gráfico de seno no intervalo [–π, 3π]. Daí obtemos o gráfico de seno no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (Figura 3.16a), que transladado horizontalmente de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda nos dá o gráfico de cosseno no intervalo [–π, π] (Figura 3.16b), já que *cos t* = sen(t + $\frac{\pi}{2}$) (propriedade **(f)**).

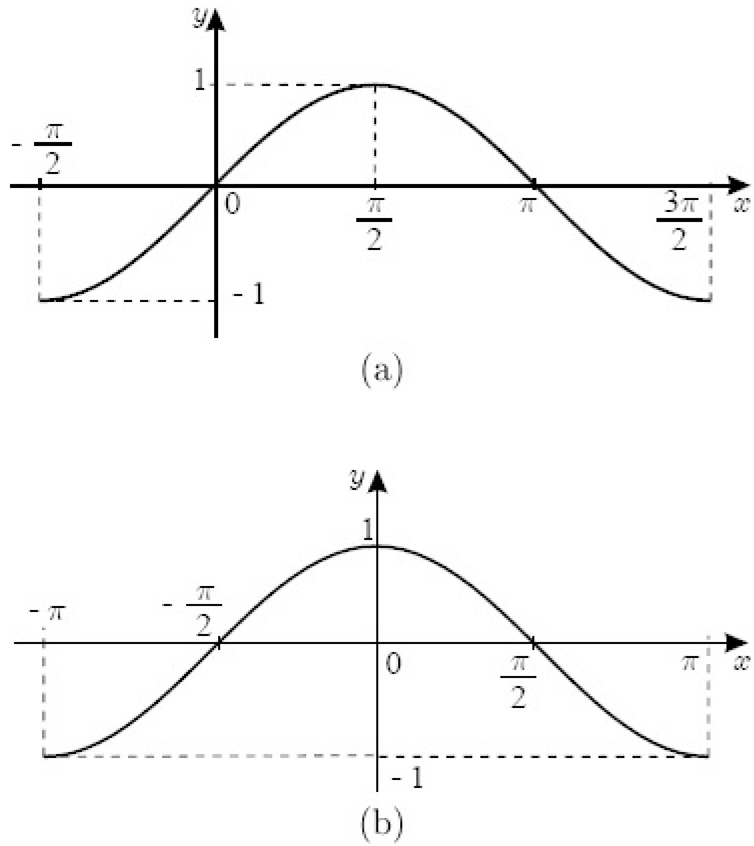


Figura 3.16

As funções tangente e secante

Dentre as funções que podem ser obtidas através do seno e do cosseno com o uso de operações elementares dos números reais, soma, produto e quociente, duas aparecem com muita frequência, justificando serem nomeadas: são as funções *tangente* e *secante*, que definimos a seguir.

Definição: As funções *tangente* e *secante* são definidas, respectivamente, por

$$\operatorname{tg}\, x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \text{e} \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

para os valores de x tais que $\cos x \neq 0$.

Como a função cosseno tem período 2π e no intervalo $[0, 2\pi]$ cosseno só se anula em $x = \frac{\pi}{2}$ ou em $x = \frac{3\pi}{2}$,, podemos concluir que se

$$\cos x = 0,$$

então

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi,$$

onde n é qualquer número inteiro. Mas

$$\frac{3\pi}{2} + 2n\pi = \frac{\pi}{2} + 2(n+1)\pi,$$

isto é, $\cos x = 0$ exatamente quando $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com k sendo qualquer número inteiro, já que os números da forma $2n\pi$ e $2(n + 1)\pi$ são todos os múltiplos inteiros de π. Assim, tangente e secante têm o mesmo domínio, que é o conjunto dos números reais menos os números da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com k sendo um inteiro qualquer.

Do Teorema 1.1 do Capítulo 5, segue-se que tangente e secante são funções contínuas, pois são quocientes de funções contínuas. Da definição e do fato de que seno é uma função ímpar e cosseno é par, segue-se diretamente que

tangente é uma função ímpar e secante é uma função par, isto é,

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \quad \text{e} \quad \sec(-x) = \sec x,$$

$$\text{pois} \quad \operatorname{tg}(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x \quad \text{e}$$
$$\sec(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

Quanto à periodicidade, claramente a secante tem o mesmo período que o cosseno, 2π. No entanto, o período da tangente é π, pois

$$\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x \text{ e } \cos(x + \pi) = -\cos x$$

e, portanto,

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Da identidade trigonométrica $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, obtemos a seguinte relação entre as funções tangente e secante:

Se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com k sendo um inteiro qualquer, então

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x.$$

De fato,

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Os gráficos de tangente e secante

Como o período da função tangente é π, sabemos que é suficiente conhecermos seu gráfico num intervalo de comprimento π, por exemplo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.. Por outro lado, como esse intervalo é simétrico em relação à origem e a tangente é ímpar, basta obtermos o gráfico de tangente no intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$.

Mostremos que tangente é crescente nesse intervalo: primeiro, usamos o fato de que em $[0, \frac{\pi}{2})$ seno é crescente e cosseno é positiva, para obter que se $0 \leq x < y < \frac{\pi}{2}$, então

$$\operatorname{sen} x < \operatorname{sen} y$$

e, portanto,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} < \frac{\operatorname{sen} y}{\cos x}. \qquad (*)$$

Por outro lado, no intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$, a função cosseno é decrescente (e positiva), logo, se $0 \leq x < y < \frac{\pi}{2}$, então

$$\cos x > \cos y > 0,$$

donde

$$\frac{1}{\cos x} < \frac{1}{\cos y},$$

e, portanto, multiplicando por sen y (que nesse caso é positivo já que $0 < y < \frac{\pi}{2}$), obtemos

$$\frac{\operatorname{sen} y}{\cos x} < \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}.$$

Usando agora a desigualdade (*) acima, temos que se $0 \leq x < y > \frac{\pi}{2}$, então

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} < \frac{\operatorname{sen} y}{\cos x} < \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = \operatorname{tg} y.$$

Ou seja, mostramos que a função tangente é crescente no intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$. Podemos usar o fato de que tangente é ímpar para concluir que ela é crescente no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$: de fato, se $-\frac{\pi}{2} < x < y < 0$, então $\frac{\pi}{2} > -x > -y > 0$ e, portanto,

$$\operatorname{tg}(-x) > \operatorname{tg}(-y),$$

donde,

$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x) < -\operatorname{tg}(-y) = \operatorname{tg} y.$$

Resta considerarmos o caso $-\frac{\pi}{2} < x < 0 < y < \frac{\pi}{2}$: para isso simplesmente observamos que, nesse caso, $\operatorname{tg} x < 0 < \operatorname{tg} y$, pois $x < 0$ e $y > 0$.

Para podermos fazer um esboço do gráfico de tangente, devemos estudar seu comportamento assintótico, isto é, buscar informações sobre o comportamento da função tangente quando $x \to -\frac{\pi}{2}^+$ (x tende a $-\frac{\pi}{2}$ pela direita) e quando $x \to \frac{\pi}{2}^-$ (x tende a $\frac{\pi}{2}$ pela esquerda).

Como $\cos x > 0$ para x no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e já sabemos que

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \cos x = 0 = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x,$$

temos que

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos x} = \infty.$$

Por outro lado, sabemos que $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = -1$ e $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = 1$, logo

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \infty.$$

Observe que esses dois limites e a continuidade da função tangente garantem que a imagem do intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ pela função tangente é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$: de fato, dado um número $b > 0$, como $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \infty$, sabemos que existe um número real $0 < a < \frac{\pi}{2}$, tal que $\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} > b$, isto é,

$$\operatorname{tg} a > b.$$

Como $6 > 0$ e $\operatorname{tg} 0 = 0$ temos que

$$\operatorname{tg} 0 = 0 < b < \operatorname{tg} a.$$

Ou seja, temos que o número b pertence ao $[\operatorname{tg} 0, \operatorname{tg} a]$. Mas, pelo Teorema 1.2* (segunda versão do TVI), como tangente é contínua no intervalo $[0, a]$, temos que o intervalo $[\operatorname{tg} 0, \operatorname{tg} a]$ está contido no conjunto imagem de tangente.

Ou seja, temos que $b = \operatorname{tg} x$ para algum número x do intervalo $[0, a] \subset [0, \frac{\pi}{2})$. Mas então $-x \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$ e

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x = -b,$$

logo, $-b$ pertence à imagem do intervalo $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ pela função tangente.

Em resumo, mostramos que, dado qualquer número $b > 0$, tanto b quanto $-b$ pertencem à imagem do intervalo $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ pela função tangente, o que garante que essa imagem é o conjunto de todos os números reais.

A partir de todas essas informações que obtivemos sobre a função tangente no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, podemos ver que o gráfico dado a seguir (Figura 3.17) descreve o comportamento da função tangente no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Como no caso das funções seno e cosseno, com recursos do cálculo diferencial podemos mostrar que esse é um bom esboço para o gráfico de tangente nesse intervalo.

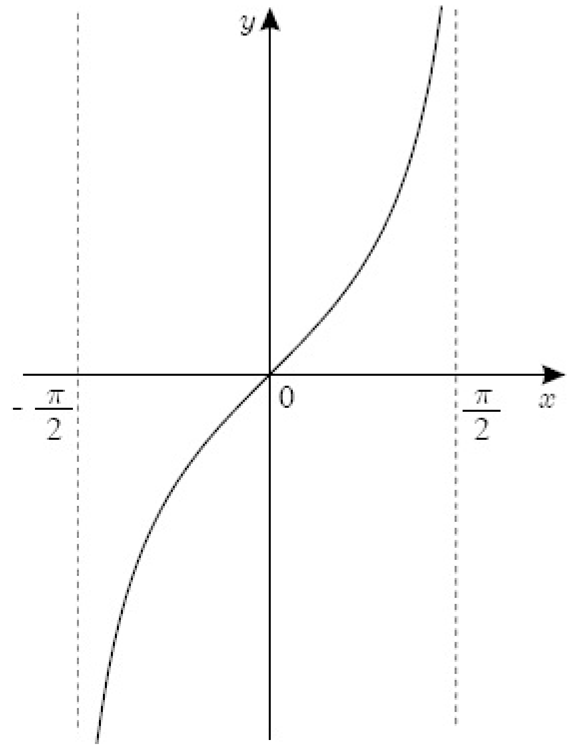


Figura 3.17

Podemos agora usar a informação de que tangente é periódica com período π para concluir que o gráfico de tangente num intervalo $(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \pi)$, onde k é um número inteiro, é uma translação horizontal do gráfico acima. Por exemplo, na Figura 3.18 abaixo, damos o gráfico de tangente nos intervalos do domínio de tangente contidos no intervalo $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

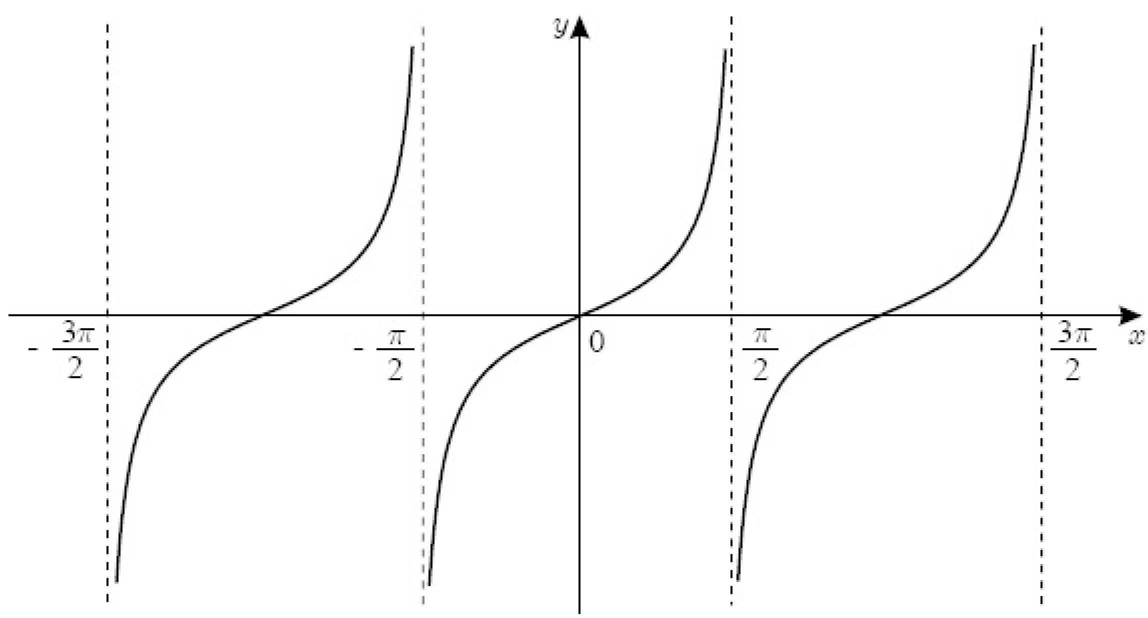


Figura 3.18

Passemos agora a estudar a função secante. Como o período de secante é 2π, basta conhecermos seu gráfico na interseção de seu domínio com um intervalo de comprimento 2π, como por exemplo o intervalo [–π, π]. Como esse intervalo é simétrico em relação à origem e secante é uma função par, basta conhecermos o seu gráfico na interseção do domínio com o intervalo [0,π], que é a união dos intervalos $[0, \frac{\pi}{2})$ e $(\frac{\pi}{2}, \pi]$, já que secante não está definida em $x = \frac{\pi}{2}$.

Primeiro observamos que a secante é crescente em cada um desses intervalos. De fato, já vimos que se $0 \leq x < y < \frac{\pi}{2}$, então

$$\frac{1}{\cos x} < \frac{1}{\cos y},$$

isto é,

$$\sec x < \sec y$$

e, portanto, secante é crescente no intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$.

Por outro lado, se $\frac{\pi}{2} < x < y \leq \pi$, então

$$\cos y < \cos x < 0,$$

que nos dá, novamente, que

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} < \frac{1}{\cos y} = \sec y,$$

ou seja, secante também é crescente no intervalo $(\frac{\pi}{2}, \pi]$. Observe que secante **não** é crescente na união $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$, já que $0 < \pi$, mas $\sec 0 = 1 > -1 = \sec \pi$.

Como no caso da função tangente, devemos estudar o comportamento assintótico da função secante, que, nesse caso que estamos considerando, significa estudar o comportamento de sec x para x próximo de $a = \frac{\pi}{2}$, uma vez que já sabemos que a secante é contínua na união $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Quando estudamos o comportamento assintótico da tangente vimos que

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos x} = \infty,$$

isto é,

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \sec x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos x} = \infty.$$

Por outro lado, se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, então cos $x < 0$, donde – cos $x > 0$ e, portanto,

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} -\frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{(-\cos x)} = \infty.$$

Usando agora o Teorema 2.7 (iii) concluímos que

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \sec x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = -\infty.$$

Em particular, podemos concluir que a *imagem do intervalo* $[0, \frac{\pi}{2})$ *pela função secante é o intervalo* $[1, \infty)$.

De fato, como sec 0 = 1 e secante é crescente no intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$, temos que sec $x \geq 1$ para $x \in [0, \frac{\pi}{2})$. Por outro lado, como $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \sec x = \infty$, podemos, da mesma maneira que fizemos com a tangente, mostrar que se $b \geq 1$, então b = sec x para algum número x do intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$ e, portanto, b pertence à imagem do intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$ pela função secante.

De maneira análoga, podemos mostrar que a *imagem do intervalo* $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ *pela função secante é o intervalo* $(-\infty, -1]$, já que secante é crescente em $(\frac{\pi}{2}, \pi]$,

$$\sec \pi = -1 \text{ e } \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \sec x = -\infty.$$

Com as informações que obtivemos e lembrando que a secante é uma função par (e, portanto, seu gráfico na interseção de seu domínio com o intervalo $[-\pi, \pi]$ é simétrico em relação ao eixo vertical), podemos ver que o gráfico abaixo (Figura 3.19) descreve o comportamento da função secante nesse intervalo.

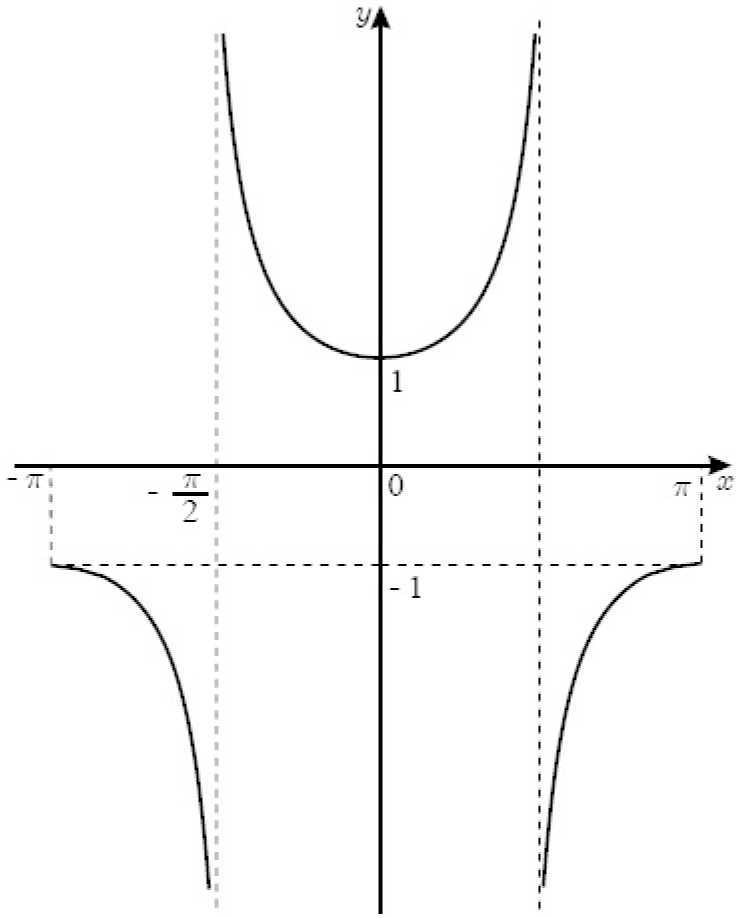


Figura 3.19

Como no caso das outras funções trigonométricas, usamos translações horizontais para obter o gráfico de secante em outros intervalos de seu domínio (veja Figura3.20).

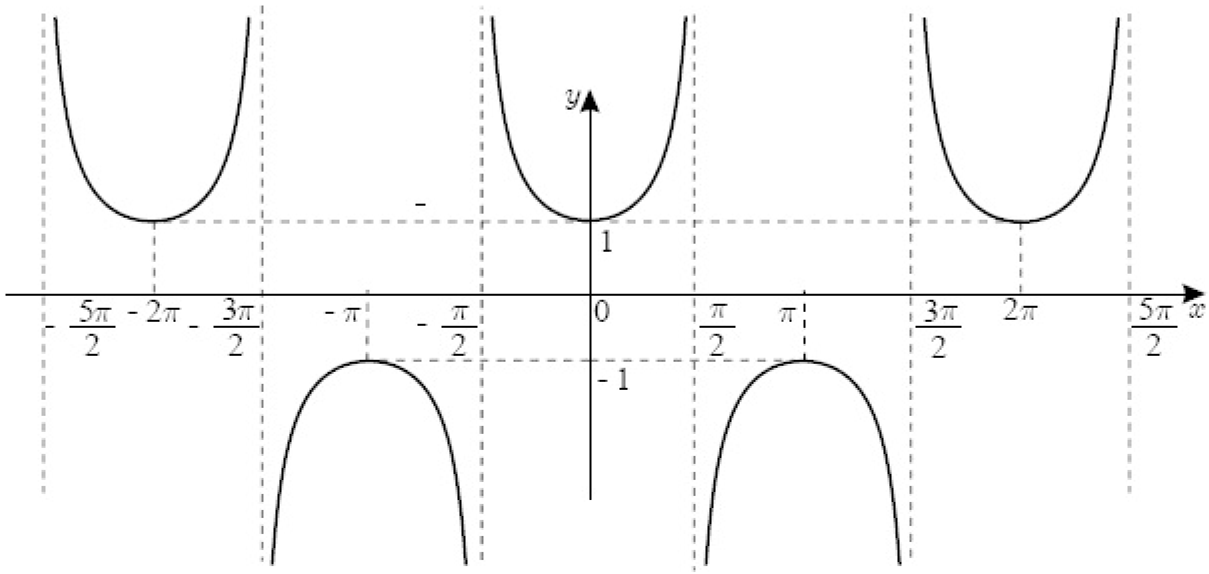


Figura 3.20

As funções trigonométricas inversas

Do que vimos nas seções anteriores, podemos concluir que nenhuma das funções trigonométricas é inversível já que retas horizontais interceptam seus gráficos em mais de um ponto (na verdade em uma infinidade de pontos devido à periodicidade dessas funções).

No entanto, vimos também que a função seno é crescente no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, logo a função definida por

$$\mathcal{S} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \mathcal{S}(x) = \operatorname{sen} x$$

é crescente e, portanto, inversível. Dizemos que ***S*** é a *restrição da função seno ao intervalo* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Sua função inversa, chamada de *arco seno* e denotada por

$$\boldsymbol{S}^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x,$$

é muitas vezes chamada a *função inversa de seno*, mas é muito importante termos em mente que essa frase se refere à restrição da função seno ao intervalo$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, já que seno (cujo domínio é o conjunto dos números reais) não é inversível.

Como o domínio de $\boldsymbol{S}(x)$ é $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e sua imagem é o intervalo $[-1, 1]$, temos que o domínio e a imagem de arco seno são, respectivamente, os intervalos $[-1,1]$ e $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (veja seção 6 do Capítulo 4). Em particular, temos que

$$\text{sen}\,(\text{arcsen}\, x) = x \qquad \text{para } x \in [-1, 1],$$

$$\text{arcsen}\,(\text{sen}\, x) = x \qquad \text{para } x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

Essas igualdades decorrem da propriedade geral sobre a composição de uma função inversível com sua função inversa (veja Capítulo 4, seção 6).

Observe que a restrição *para* $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ na igualdade $\text{arcsen}\,(\text{sen}\, x) = x$ é importante, pois, apesar da expressão $\text{arcsen}\,(\text{sen}\, x)$ poder ser avaliada em qualquer número real x, essa igualdade só é válida se $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Por exemplo, sabemos que $\text{sen}\, 2\pi = 0$ e que, por definição, $\text{arcsen}\,(0) = 0$, logo,

$$\text{arcsen}\,(\text{sen}\, 2\pi) = \text{arcsen}\,(0) = 0 \neq 2\pi.$$

Mostremos agora uma propriedade útil da função arco seno:

$$\textit{se } -1 \leq x \leq 1, \textit{ então } \cos(\text{arcsen}\, x) = \sqrt{1-x^2}.$$

De fato, da identidade trigonométrica $\cos^2 t + \text{sen}^2\, t = 1$ temos que

$$\cos^2 t = 1 - \text{sen}^2\, t,$$

que nos diz que para qualquer número real t tem-se que

$$|\cos t| = \sqrt{1 - \text{sen}^2\, t}.$$

Mas se $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, sabemos que $\cos t \geq 0$, logo

$$\text{se } -\tfrac{\pi}{2} \leq t \leq \tfrac{\pi}{2}, \text{ então } \cos t = \sqrt{1 - \text{sen}^2\, t}.$$

Por outro lado, se $-1 \leq x \leq 1$, então $-\frac{\pi}{2} \leq \text{arcsen}\, x \leq \frac{\pi}{2}$ e, portanto, fazendo $t = \text{arcsen}\, x$, obtemos

$$\cos(\text{arcsen}\, x) = \sqrt{1 - \text{sen}^2\,(\text{arcsen}\, x)},$$

donde

$$\cos(\text{arcsen}\, x) = \sqrt{1-x^2}.$$

pois

$$\text{sen}^2 (\text{arcsen } x) = (\text{sen } (\text{arcsen } x))^2 = x^2,$$

já que sen (arcsen x) = x para qualquer $x \in [-1, 1]$.

Da continuidade da função seno segue-se que $\boldsymbol{S}(x)$ é contínua e, como seu domínio é um intervalo, pelo Teorema 1.1 do Capítulo 5, sua função inversa, arco seno, também é contínua.

Por outro lado, como arco seno é a função inversa de $\boldsymbol{S}(x)$, temos que seu gráfico pode ser obtido, num sistema de coordenadas com a mesma unidade nos dois eixos, pela reflexão ortogonal do gráfico de $\boldsymbol{S}(x)$ em relação à reta $y = x$. Na Figura 3.21a é dado o gráfico de $\boldsymbol{S}(x)$ (que é o gráfico de seno no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) e na Figura 3.21b o gráfico da função arco seno.

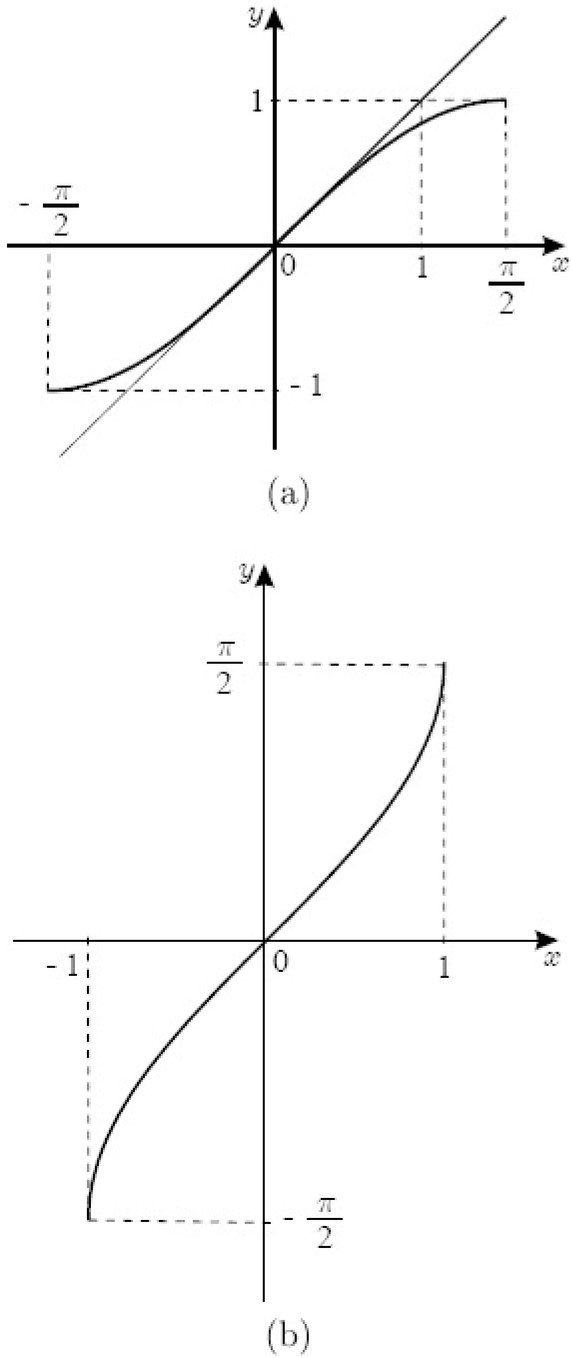


Figura 3.21

Analogamente, sabemos que a função tangente não é inversível, mas se definimos

$$T : (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$$

$$x \to T(x) = \text{tg } x$$

é crescente e, portanto, inversível. Como no caso de seno, dizemos que T é a *restrição da função tangente ao intervalo* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Em particular, pelo que vimos anteriormente, a imagem de T é $\mathbb{R}$.

Chamamos a função inversa de T de *arco tangente* e usamos a notação

$$T^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Como ocorre com a função arco seno, arco tangente é também chamada a *função inversa da tangente*, mas, novamente, devemos ter em mente que essa frase se refere à restrição da função tangente ao intervalo$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, já que a função tangente (cujo domínio é o conjunto dos números reais) também não é inversível.

Como o domínio de T é $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e sua imagem é o conjunto dos reais, $\mathbb{R}$, temos que o domínio e a imagem de arco tangente são, respectivamente, $\mathbb{R}$ e o intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Em particular, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) &= x \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) &= x \quad \text{para} \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Novamente devemos ter atenção para com a restrição dada na última igualdade, que também não é válida para qualquer número real no domínio da função tangente. Como exemplo podemos tomar $x = \pi$: sabemos que $\operatorname{tg}(\pi) = 0$ e que, pela definição, $\operatorname{arctg}(0) = 0$, logo

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \pi) = \operatorname{arctg}(0) = 0 \neq \pi.$$

A partir da relação $1+\operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t$, podemos obter uma expressão para $\sec(\operatorname{arctg} x)$: a igualdade nos diz que

$$|\sec t| = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}$$

e, portanto, como para $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ tem-se que $\sec t > 0$, obtemos que

$$\text{se} \ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, \ \text{então} \ \sec t = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}.$$

Mas a imagem da função arco tangente é o intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, isto é,

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$$

para qualquer número real x. Logo, podemos fazer $t = arc\text{tg}\ x$ na expressão acima para concluir que

$$\sec(\text{arctg}\, x) = \sqrt{1 + x^2},$$

qualquer que seja o número real x, já que $\text{tg}^2(\text{arctg}\ x) = (\text{tg}\ (\text{arctg}\ x))^2 = x^2$.

Da continuidade da função tangente segue-se que T é contínua e, como seu domínio é um intervalo, pelo Teorema 1.1 do Capítulo 5, sua função inversa, arco tangente, também é contínua. Os gráficos de T e de sua inversa, arco tangente, são dados na Figura 3.22 (a) e (b), respectivamente.

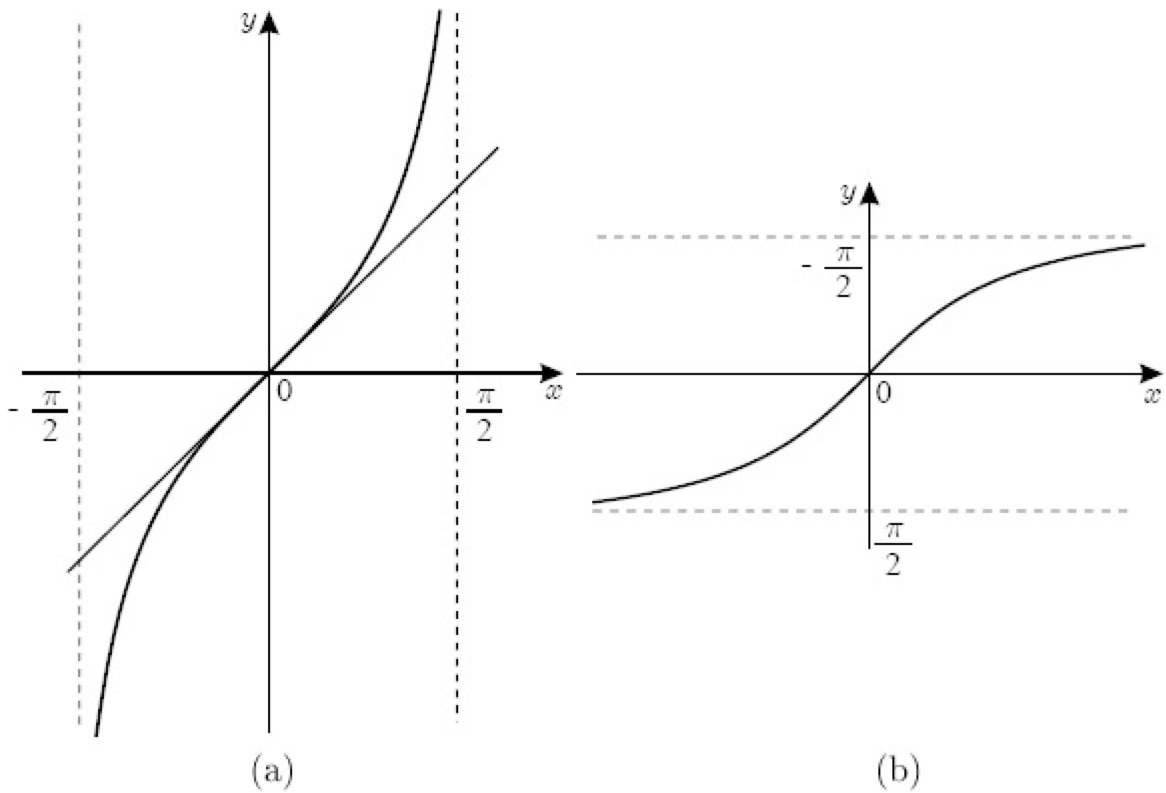


Figura 3.22

Em relação à função secante, procedemos de maneira semelhante para definirmos a função que denominamos *arco secante*.

Do gráfico dado na Figura 3.19, vemos que o gráfico da função secante na união de intervalos, $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$, tem a propriedade de interceptar retas horizontais no máximo em um ponto. Isso nos garante que a função

$$Sc : [0, \tfrac{\pi}{2}) \cup (\tfrac{\pi}{2}, \pi] \to \mathbb{R}$$

$$x \to Sc(x) = \sec x$$

é uma função inversível (observe que secante não é crescente na união desses dois intervalos, embora seja crescente em cada um deles).

Como nos casos anteriores, dizemos que *Sc* é a *restrição da função secante ao conjunto* $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Como vimos quando estudamos a função secante, a imagem da *Sc* é a união $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

À função inversa de *Sc* damos o nome de *arco secante* e usamos a notação

$$Sc^{-1}(x) = \text{arcsec}\, x.$$

Em particular, o domínio de arco secante é a união $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ e sua imagem é o conjunto $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Explicitamente,

$$\text{se } x \in (-\infty, -1], \text{ então arcsec } x \in (\tfrac{\pi}{2}, \pi]$$

e

$$\text{se } x \in [1, \infty), \text{ então arcsec } x \in [0, \tfrac{\pi}{2}).$$

Mais ainda, temos que

$$\begin{aligned} \sec(\text{arcsec}\, x) = x \quad &\text{para} \quad x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \\ \text{arcsec}(\sec x) = x \quad &\text{para} \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{aligned}$$

Da igualdade $1 + \text{tg}^2\, t = \sec^2 t$, obtemos que $\text{tg}^2\, t = \sec^2 t - 1$ e, fazendo $t = \text{arcsec}\, x$, obtemos que se $|x| \geq 1$, então

$$\text{tg}^2(\text{arcsec}\, x) = x^2 - 1.$$

Agora, como arcsec $x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ e, nessa união, a função tangente assume valores positivos e valores negativos, devemos considerar as duas possibilidades.

Se $x \leq -1$, então

$$\frac{\pi}{2} < \text{arcsec}\, x \leq \pi$$

e, portanto,

$$\text{tg}(\text{arcsec}\, x) \leq 0,$$

donde

$$\text{tg}(\text{arcsec}\, x) = -\sqrt{x^2 - 1}.$$

Por outro lado, se $x \geq 1$, então

$$0 \leq \operatorname{arcsec} x < \frac{\pi}{2}$$

e, portanto,

$$\operatorname{tg}\,(\operatorname{arcsec} x) \geq 0,$$

donde

$$\operatorname{tg}\,(\operatorname{arcsec} x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Em resumo, temos:

$$\text{se } x \leq -1, \text{ então } \operatorname{tg}\,(\operatorname{arcsec} x) = -\sqrt{x^2 - 1}$$

e

$$\text{se } x \geq 1, \text{ então } \operatorname{tg}\,(\operatorname{arcsec} x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Da continuidade da função tangente segue-se que Sc é contínua. Para obtermos a continuidade de arco secante, devemos aplicar 0 Teorema 1.1 do Capítulo 5 à restrição de Sc a cada um dos intervalos $[0, \frac{\pi}{2})$ e $(\frac{\pi}{2,\pi}]$. Os gráficos de Sc e de sua inversa, arco secante, são dados na Figura 3.23 (a) e (b), respectivamente.

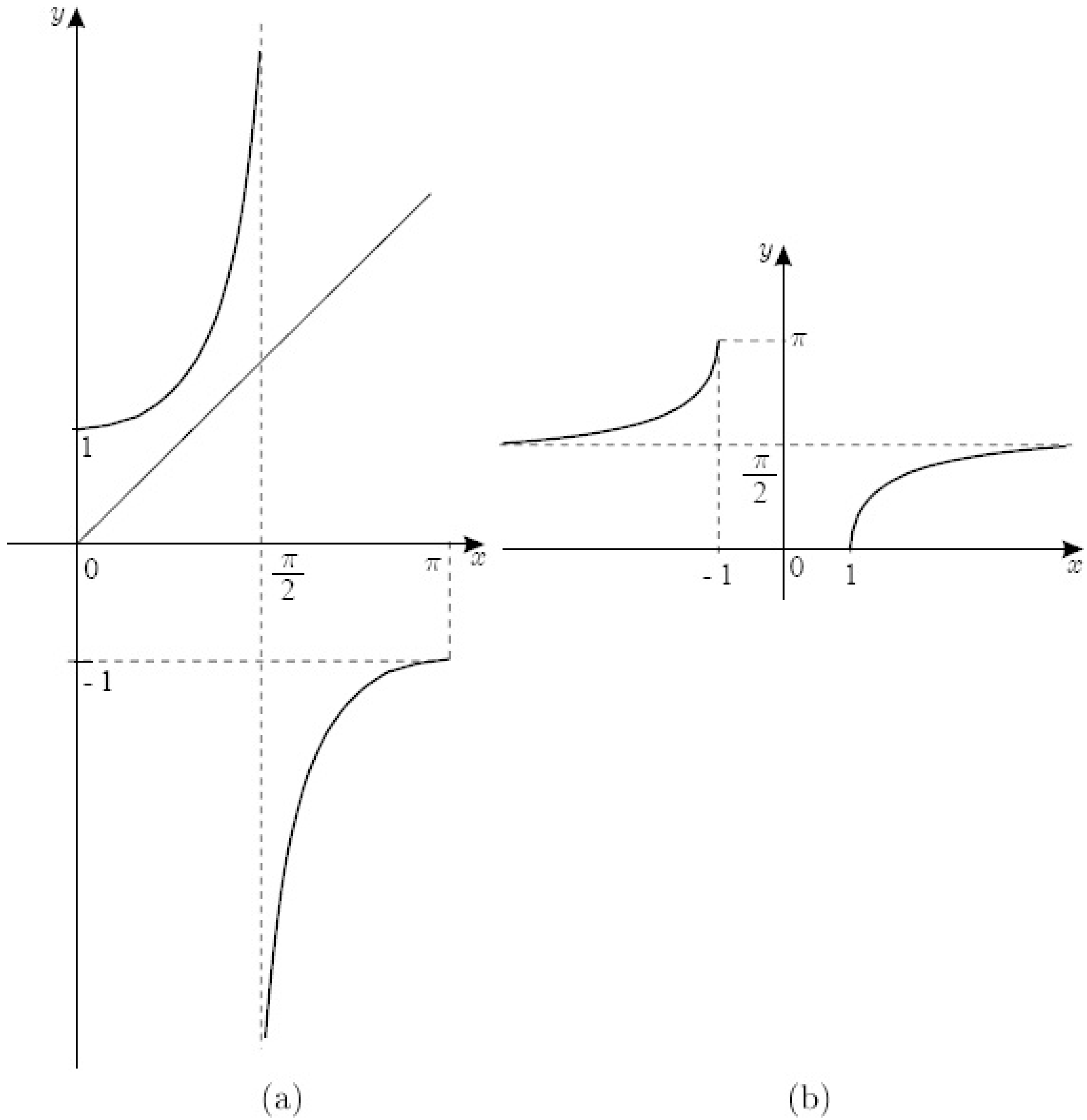


Figura 3.23

Exercícios

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Em cada item abaixo resolva a equação no intervalo dado:

   (a) sen $x = 0$ para $x \in [-20, 20]$.

   (b) cos $x = 0$ para $x \in [-20, 20]$.

   (c) sen $3t = 0$ para $t \in [-15, 15]$.

(d) sen $(2x - 1) = 0$ para $x \in [-15, 15]$.
(e) sem $\theta = 1$ para $\theta \in [-20, 20]$.
(f) 1+sem $x = 0$ para $x \in [-20, 20]$.
(g) $\cos x = 1$ para $x \in [-20, 20]$.
(h) $1 + \cos x = 0$ para $x \in [-20, 20]$.
(i) sen $(2x - 1) = 1$ para $x \in [-15, 15]$.
(j) $\cos(2x - 1) = 0$ para $x \in [-15, 15]$.

2. Calcule:

(a) $\lim_{x\to\pi} \cos(x^2 - \pi x + \pi)$.

(b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\cos(2x+1)}{3x^2 - 1}$.

(c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{\cos(x-1)^2}$.

(d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{\text{sen}(x-1)^2}$.

(e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{\cos(x-1)^2}$.

(f) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x+3}{\cos(x+3)}$.

3. Resolva as equações abaixo:

(a) $(x^2 - 1)\ \text{sen}(2x) = 0$.

(b) $\dfrac{(x^2-1)\text{sen}(2x)}{x} = 0$.

4. Use as identidades trigonométricas para mostrar que:

(a) $\text{sen}\,(2t) = 2\,\text{sen}\,t \cos t$.

(b) $\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos(2t)}{2}$.

(c) $\text{sen}\ ^2 t = \dfrac{1 - \cos(2t)}{2}$.

(d) $\cos x = -\,\text{sen}\,(x - \frac{\pi}{2})$.

5. Use a identidade $\cos^2 t + \text{sen}^2\, t = 1$ para mostrar que sen $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

6. Calcule:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } 9x}{x}$.

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } 3x}{4x}$.

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } 5x}{\text{sen } 6x}$.

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{2\text{sen } x \cos x}{x}$.

(e) $\lim_{x\to -1} \frac{\text{sen}^2(x+1)}{x+1}$.

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x}$.

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{\cos 4x - 1}$.

7. Use as identidades trigonométricas para sen $(a + h)$ e cos(a + h) e os limites fundamentais para calcular os limites:

(a) $\lim_{h\to 0} \frac{\text{sen } (a+h) - \text{ sen } (a)}{h}$.

(b) $\lim_{h\to 0} \frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h}$

8. Encontre uma função real f tal que as soluções da equação $f(x) = 0$ sejam todos os números inteiros pares.

9. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^5 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + 1 & \text{se } x \neq 0, \\ c & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Determine o valor de c de forma que f seja contínua.

10. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos^2 x}{x} + 2 & \text{se } x \neq 0, \\ c & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Determine o valor de c de forma que f seja contínua.

11. Faça um esboço do gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x) = 3\cos(2x - 1)$.

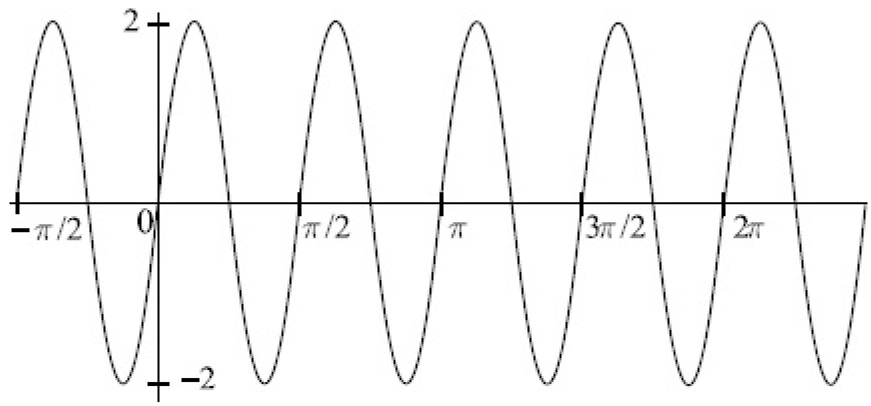
(b) $f(x) = 2\,\mathrm{sen}(\frac{x}{3} - \pi)$.

(c) $f(x) = -\mathrm{sen}|2 - 2x|$.

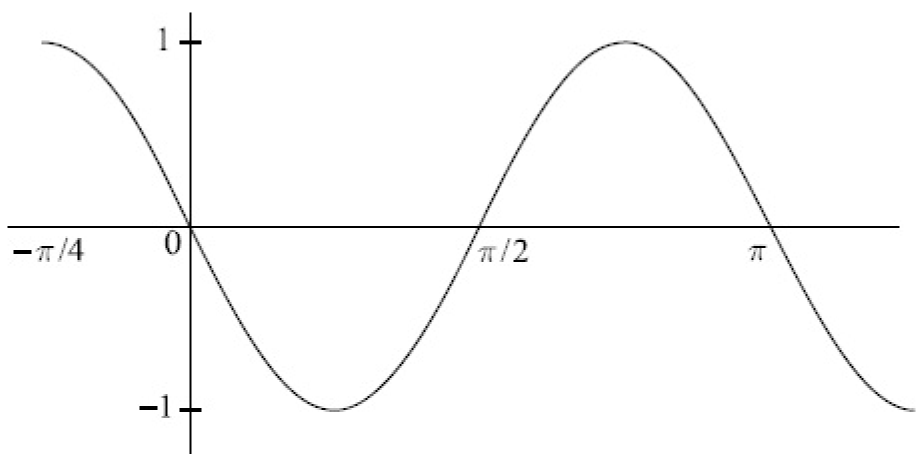
(d) $f(x) = \left|\cos(\frac{x-1}{2})\right|$.

12. Em cada item abaixo, encontre números *a, b* e *c* para que a curva dada seja o gráfico de *f*.

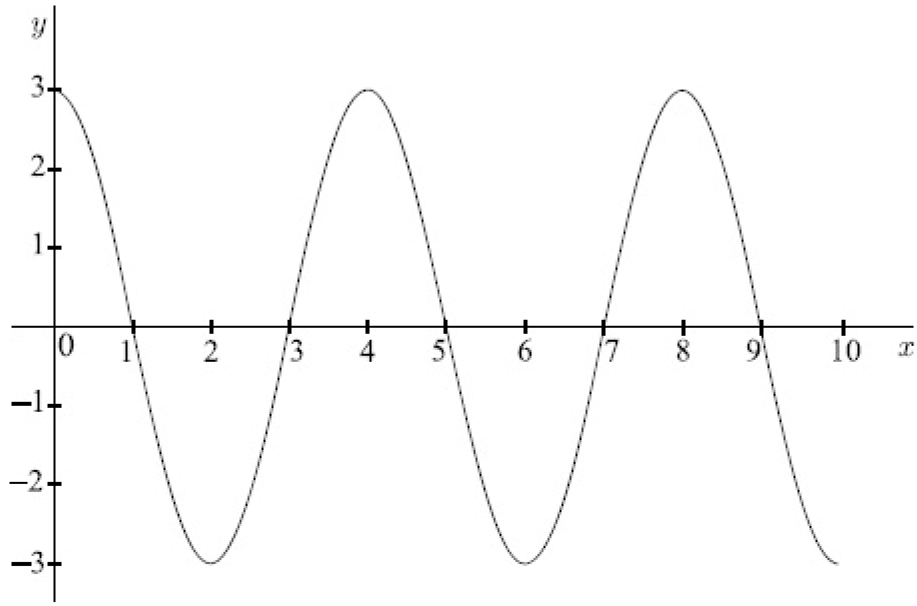
(a) $f(x) = a\cos(bx - c)$



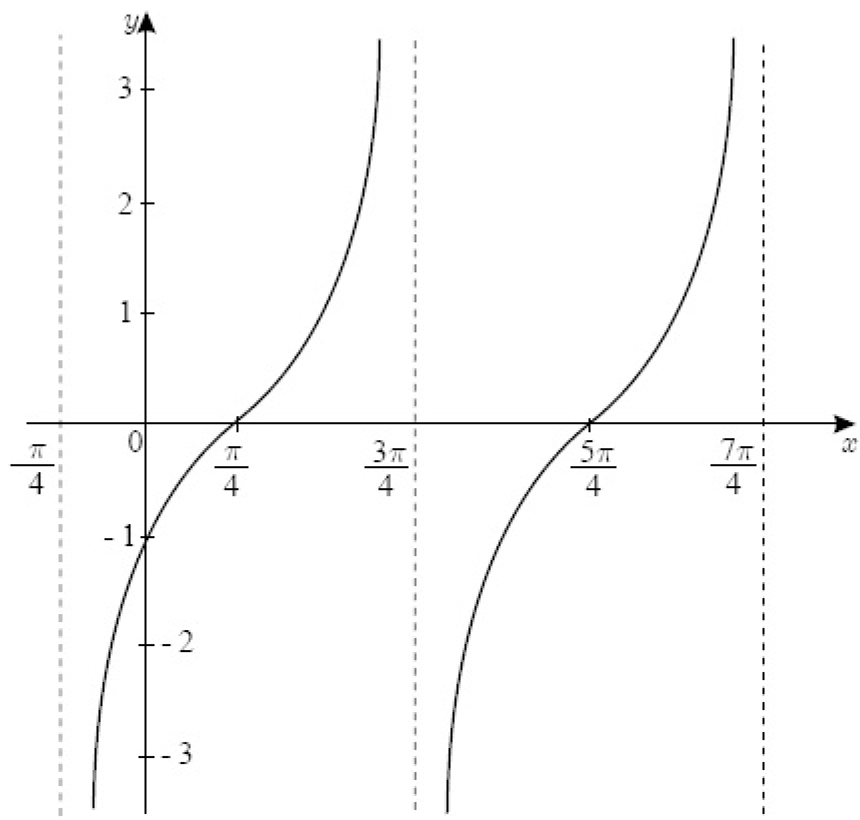
(b) $f(x) = a\,\mathrm{sen}(bx - c)$



(c) $f(x) = a\cos(bx - c)$



(d) $f(x) = \text{tg}\,(ax - b)$



13. Resolva a equação $\sec^2 x - 2 = 0$ no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

14. Qual é o período da função $g(x) = \text{tg}\,(2x)$? Faça um esboço de seu gráfico.

15. Use as identidades trigonométricas para mostrar que

$$\mathrm{tg}(a+b) = \frac{\mathrm{tg}\, a + \mathrm{tg}\, b}{1 - \mathrm{tg}\, a\ \mathrm{tg}\, b}.$$

16. $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sen}\, x}$ e $g(x) = \dfrac{\cos x}{\mathrm{sen}\, x}$. As funções f e g são chamadas, respectivamente, função cossecante e função cotangente e são denotadas por

$$f(x) = \mathrm{cosec}\, x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \mathrm{cotg}\, x.$$

Mostre que $1 + \mathrm{cotg}^2\, x = \mathrm{cosec}^2\, x$.

17. Seja $f(x) = a\, \mathrm{sen}\, x + b \cos x$, onde a e b são números reais:

(a) Encontre números reais c e d em termos de a e b, tais que a função f pode ser escrita na forma

$$f(x) = c \text{ sem } (x + \mathrm{d})$$

(Use identidades trigonométricas e a função arco seno).

(b) Faça um esboço do gráfico de $g(x) = \mathrm{sen}\, x + \cos x$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

18. A função $f(x) = \cos x$ para $x \in [0, \pi]$ é inversível e sua função inversa é chamada arco cosseno, sendo denotada por $f^{-1}(x) = \arccos x$. Mostre que $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arcsen}\, x$ (use a identidade $\cos x = -\,\mathrm{sen}\,(x - \frac{\pi}{2})$).

19. Mostre que $\mathrm{arcsec}\, x = \arccos\,(\frac{1}{x})$.

4. Exercícios suplementares

Para um melhor aproveitamento dos exercícios, você deve justificar suas respostas identificando as propriedades (ou teoremas) que foram utilizados na resolução dos exercícios.

1. Ache a equação da reta que passa pelos pontos $(-1, 0)$ e $(0, -1)$.
2. Ache a equação da reta que tem coeficiente angular $-\frac{2}{3}$ e passa pelo ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.
3. Ache a equação da reta com inclinação -1 que passa por $(-1, 2)$.

4. Ache a equação da reta que é paralela a $y = \frac{5}{2}x + 1$ e passa pelo ponto $(3, \frac{2}{7})$.

5. Considere o sistema de equações

$$y + \alpha x = -1$$

$$2y + \beta x = -2.$$

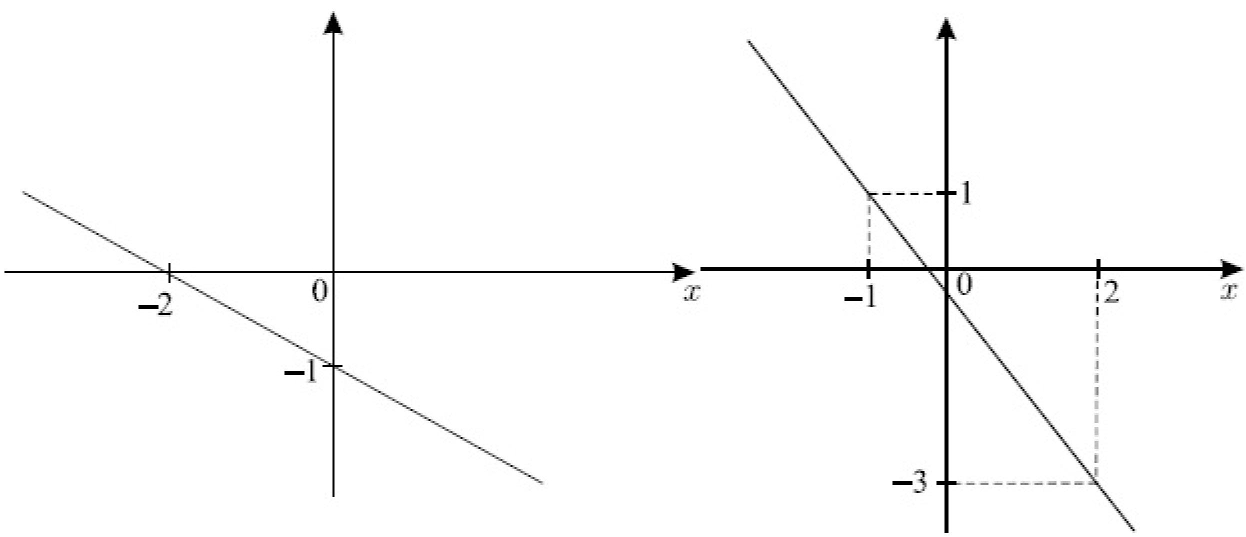
Para quais pares de números α e β tem-se que:

(a) esse sistema tem exatamente uma solução?

(b) esse sistema tem infinitas soluções?

(c) há outras possibilidades, isto é, diferentes de (a) e (b)? Quais? Interprete geometricamente as respostas.

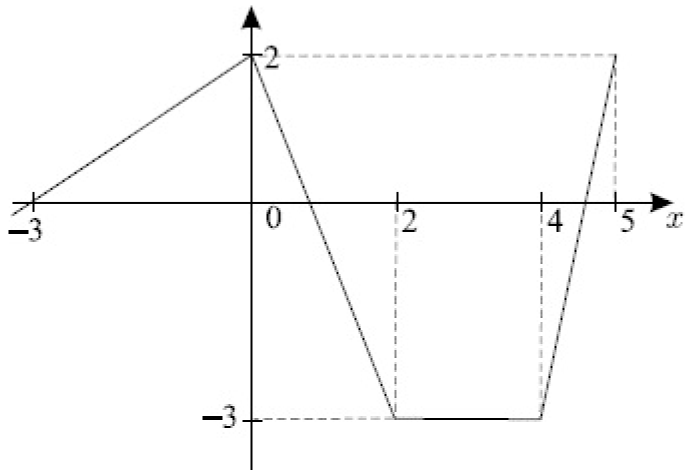
6. Ache a equação de cada uma das retas dadas abaixo.



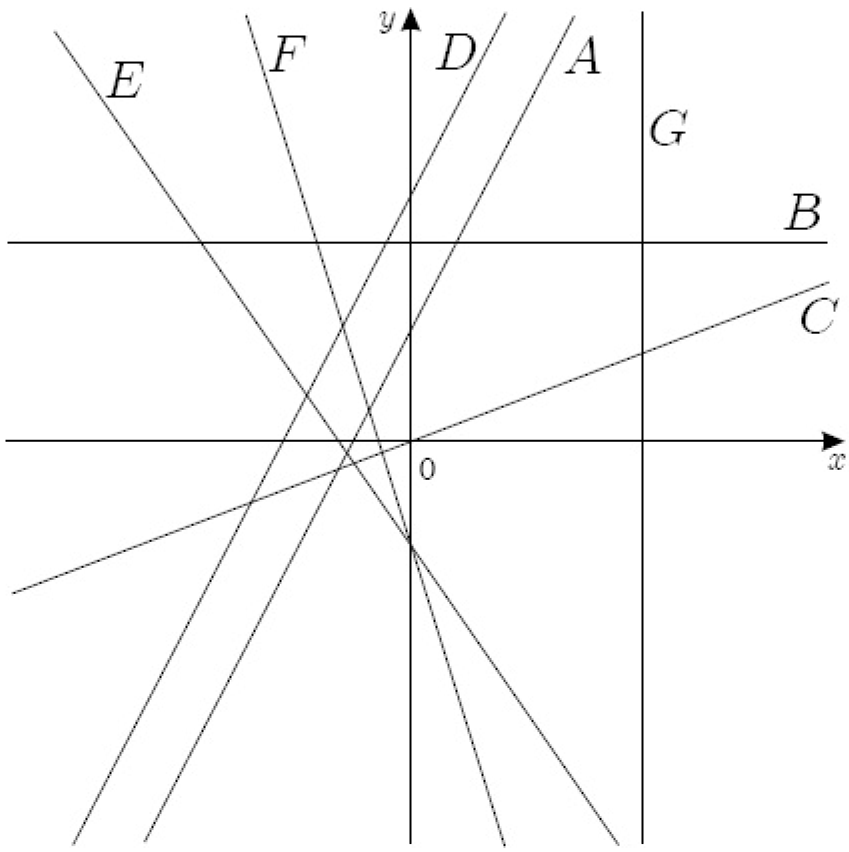
7. Considere as funções abaixo e diga para que valores de x se tem $f_1(x) < f_2(x)$.

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se} \quad x < 1, \\ 3 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2, \\ -x+5 & \text{se} \quad x \geq 2, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x-3 & \text{se} \quad x < 1, \\ -2x & \text{se} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

8. Dê a expressão algébrica para a função cujo gráfico é dado abaixo.



9. Associe cada reta da figura abaixo com sua equação:

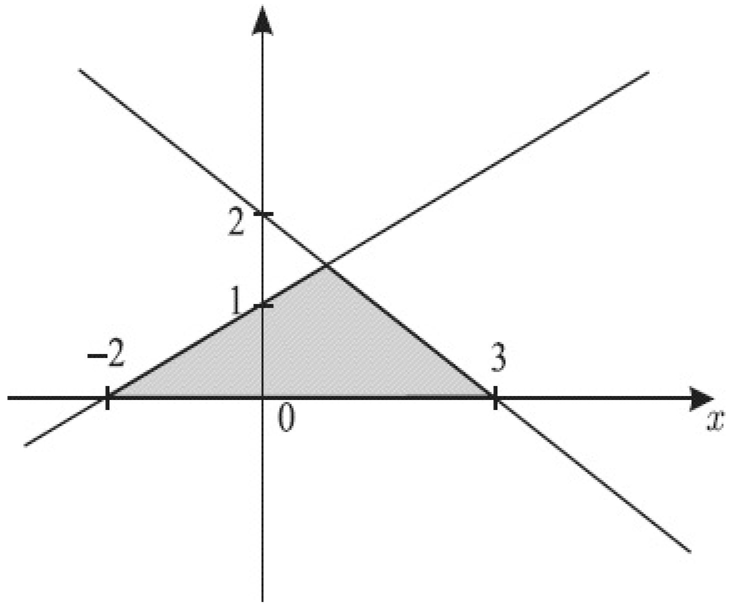


$y = 2x + 1$
$y = 2x + 2$
$y = 1,7$
$y = -\sqrt{2}x - 1$
$x = 1,8$
$y = -\pi x - 1$
$y = \frac{1}{2}x$

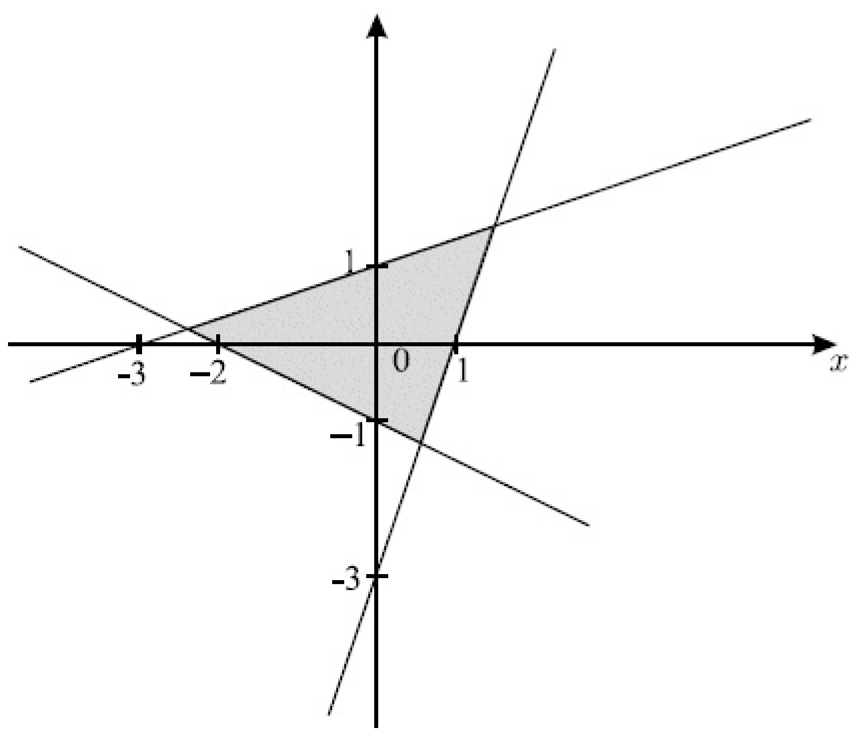
10. As retas determinadas pelas equações $2y - 4x + 4 = 0$ e $y - 2x - 1 = 0$ se cortam? Se for o caso, determine o ponto de interseção.

11. Qual é a equação da reta que passa por (1, 3) e é perpendicular à reta que passa pelos pontos (1, 1) e (–1, 3)? Determine o ponto de interseção das duas retas.

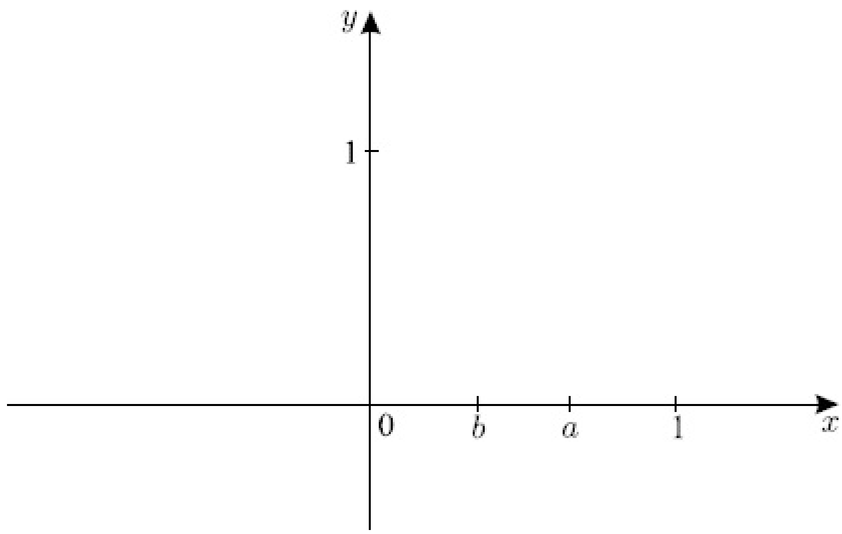
12. Considere as retas desenhadas na figura abaixo. Calcule a área da região destacada.



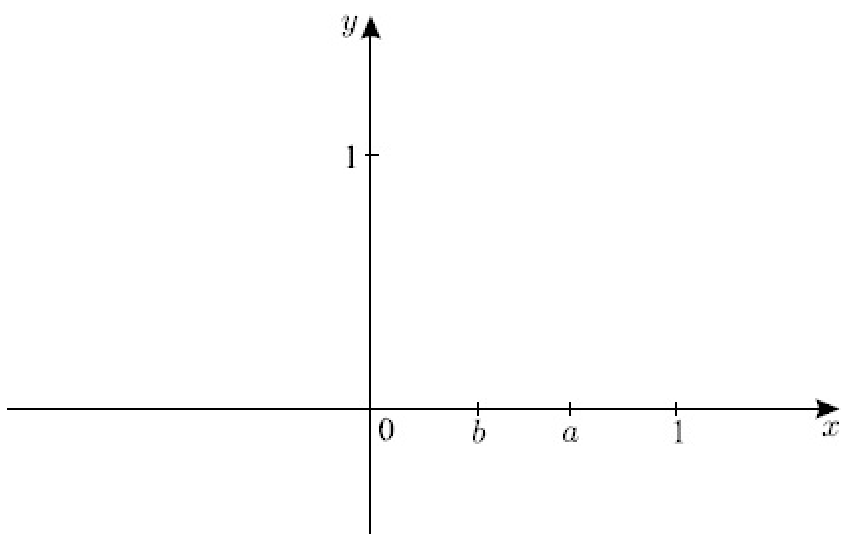
13. Considere as retas desenhadas na figura abaixo. Calcule a área da região destacada.



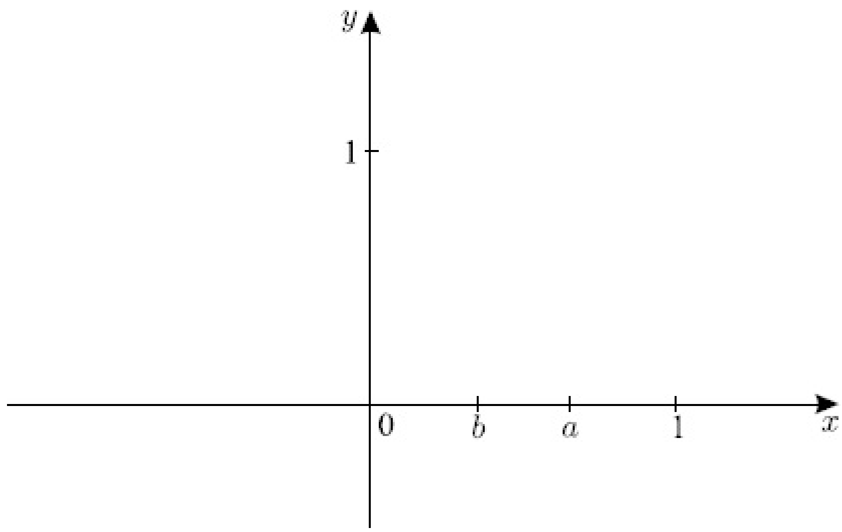
14. Dado o sistema de eixos abaixo, faça o gráfico de $y = -ax + b$.



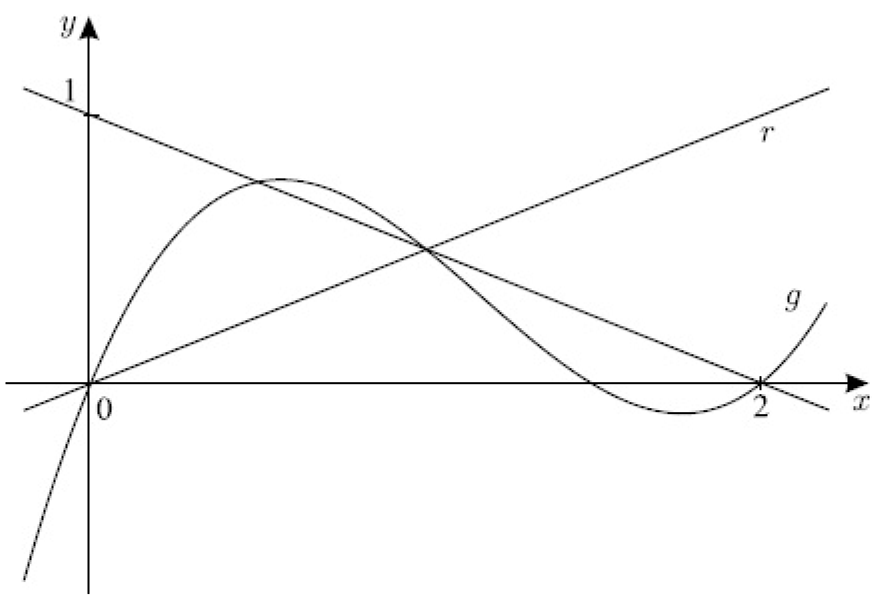
15. Dado o sistema de eixos abaixo, faça o gráfico de $y = \frac{x}{a} + \frac{1}{b}$.



16. Dado o sistema de eixos abaixo, faça o gráfico de $y = (a + b)x$.



17. Sabendo que o gráfico de $g(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x$ é dado abaixo, ache a equação da reta *r* dada na figura.



18. Em cada item abaixo considere a função *f* dada. Para cada $x \neq 2$, seja $s(x)$ a inclinação da reta que passa pelos pontos $(2, f(2))$ e $(x\ f(x))$. Ache uma expressão para $s(x)$:

    (a) $f(x) = 5x - 2$.

    (b) $f(x) = 4x^2 - 1$.

    (c) $f(x) = x^3 + 1$.

19. Para cada item do exercício anterior, calcule $\lim_{x \to 1} s(x)$ e ache a equação da reta que tem inclinação $\alpha = \lim_{x \to 1} s(x)$ e passa pelo ponto $(2, f(2))$.

20. Seja a $\neq \frac{1}{3}$ e $f(x) = |3x - 1|$.

    (a) Se $x \neq a$, calcule a inclinação, $s_a(x)$, da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e
    $(x, f(x))$.

    (b) Calcule $\lim_{x \to a} s_a(x)$ e ache a equação da reta que tem inclinação $T(a) = \lim_{x \to a} s_a(x)$
    e passa pelo ponto (a, $f(a)$).

    (c) O que ocorre se $a = \frac{1}{3}$?

21. Quantas soluções tem a equação $x^3 - 1 = x^2$? E a equação $(x - 1)^3 = x^2$?

22. Quantas soluções tem a equação $x^5 - 1 = x^3$? E a equação $(x - 1)^5 = x^3$?

23. Em cada item abaixo faça um esboço do gráfico da função dada:

    (a) $f(x) = \left|\dfrac{1}{x+6}\right|$.

    (b) $f(x) = \dfrac{1}{1-3x}$.

    (c) $f(x) = \sqrt{|x-1|^3}$.

    (d) $f(x) = \sqrt{(x-1)^3}$.

    (e) $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$.

    (f) $f(x) = \sqrt[3]{|1-x|}$.

24. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

    (a) Se $x \in \mathbb{R}$, então $\ln(x - 1)^2 = 2\ln(x - 1)$.

    (b) Se $x \in \mathbb{R}$, então $\ln[(2x - 1)(x^2 - x) = \ln(2x - 1) + \ln(x^2 - x)$.

    (c) Se $e^{|2x-1|} = e^2$, então $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

25. Resolva as equações abaixo:

(a) $\ln|2x+1| = -2$

(b) $(x^5-32)e^{2x^2-x} = 0$

(c) $5^{x^2-11x+28} = 5^4$

(d) $\frac{\log_7(x^2-7x-7)}{x+1} = 0$

26. Encontre o número real c e a função contínua $y(x)$tal que

$$y(1) = 4 \qquad \text{e} \qquad \ln|y-2| = e^{2x} + c$$

27. Calcule os limites abaixo:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x^5}}$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x^5}}$.

(d) $\lim\limits_{x\to\pi} e^{x^2-1}$.

(e) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}} \ln|3x+2|$.

28. Nos itens abaixo, esboce o gráfico da função f e de sua inversa, f^{-1}

(a) $f(x) = \frac{5}{e^{2x}} - 1$.

(b) $f(x) = \ln(x-2)$.

(c) $f(x) = 1 - 2\ln 3x$.

(d) $f(x) = \ln(2x+2)$.

29. Resolva as equações:

(a) $\ln(x-3) + \ln|x-5| = \ln((x-3)(x-5))$.

(b) $\ln|x-3| + \ln|x-5| = \ln((x-3)(x-5))$.

(c) $\ln|x-3| + \ln|x-5| = \ln|(x-3)(x-5)|$.

30. Em cada item abaixo, faça um esboço do gráfico da função dada:

(a) $f(x) = \ln|x-8|$.

(b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{|x+7|}\right)$.

(c) $f(x) = \ln|2x+1|$.

(d) $f(x) = e^{1-\ln(3-5x)}$.

31. Resolva a equação

$$(e^{2x+1})^3 + 2\,(e^{2x+1})^2 - 15e^{2x+1} = 0.$$

32. Quantos pontos pode ter a interseção do gráfico de um polinômio de grau 5 com uma reta?

33. Em cada item abaixo, decida se a proposição dada é falsa ou verdadeira:

    (a) Se p é um polinômio de grau ímpar maior que 1 e r é uma reta, então o gráfico de p tem pelo menos um ponto de interseção com r.

    (b) Se p é um polinômio de grau 4 e r é uma reta, então o gráfico de p tem pelo menos um ponto de interseção com r.

34. O que você pode dizer a respeito da interseção do gráfico de $(x - 1.000)^2$ com o gráfico de $p(x) = -x^3 - 1.000$?

35. Para cada item abaixo, dê um exemplo de um polinômio p de grau 5 tal que o gráfico de p intercepta a reta $y = -3x + 5$ em exatamente:

    (a) um ponto.

    (b) dois pontos.

    (c) três pontos.

    (d) quatro pontos.

    (e) cinco pontos.

36. Sejam $p(x)$ um polinômio de grau 5 e $q(x) = x^3$:

    (a) Qual é o número mínimo de pontos de interseção dos gráficos de p e q?

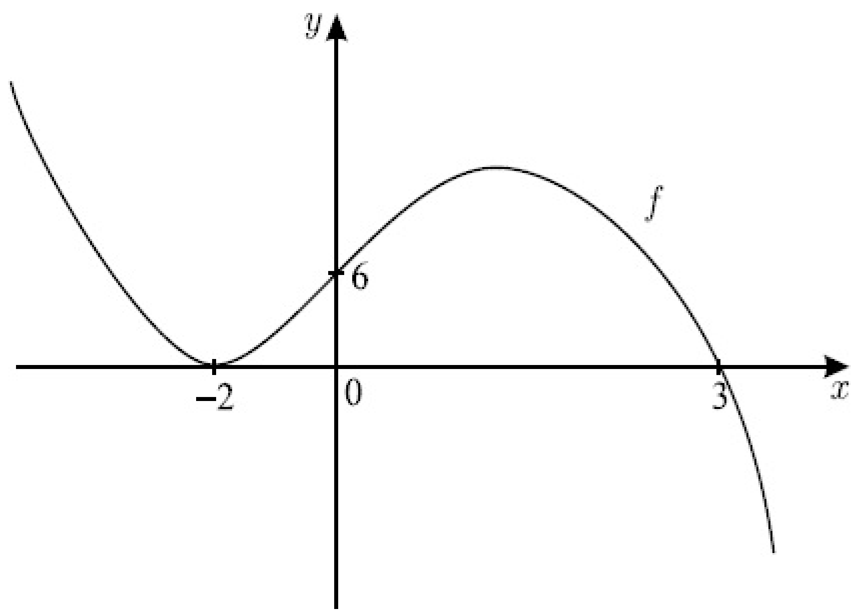
    (b) Qual é o número máximo possível de pontos de interseção dos gráficos de p e q?

37. Sejam $p(x)$ um polinômio de grau 4 e $q(x) = x^2$:

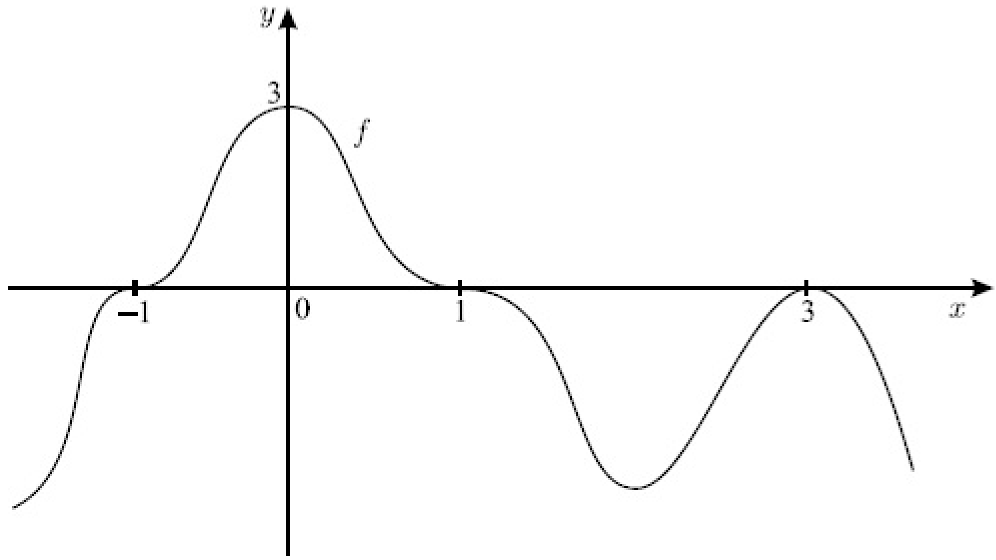
(a) Qual é o número mínimo de pontos de interseção dos gráficos de p e q?

(b) Qual é o número máximo possível de pontos de interseção dos gráficos de p e q?

38. Encontre dois polinômios distintos cujos gráficos sejam parecidos com o gráfico abaixo:



39. Encontre dois polinômios distintos cujos gráficos sejam parecidos com o gráfico abaixo:



40. Encontre dois polinômios distintos de grau 3 cujas raízes sejam $x = -1$, $x = 0$ e $x = 2$.

41. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to-\infty} 8 + 12x - x^4$.

(b) $\lim_{x\to\infty} (x-2)(5-x)(2x+10)$.

(c) $\lim_{x\to-\infty} (x^2-8)(5-x)$.

(d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{(-3x+5)(2-9x)}{90-x^3}$.

42. Calcule:

(a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\cos x}$

(b) $\lim_{x\to\pi} \frac{\cos x}{\left|\cos \frac{x}{2}\right|}$

43. Resolva as equações abaixo:

(a) $(x^3 - 4x^2 - 21x)\text{sen}\,(\ln x) = 0$.
(b) $\ln|\cos x| = 0$.
(c) $e^{5+\ln(\text{sen}\,2x)} = 0$.
(d) $\text{tg}\,x = \cos x$.
(e) $\text{tg}\,(\cos x) = 0$.

44. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \text{sen}\,x & \text{se } x < a, \\ \cos x & \text{se } x \geq a. \end{cases}$

Para quais valores de a a função acima é contínua?

45. Considere a função $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < a, \\ \operatorname{tg} x & \text{se } \quad a \leq x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Para quais valores de a a função acima é contínua?

46. Faça um esboço do gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x) = 2 - \operatorname{arctg}(3x)$.

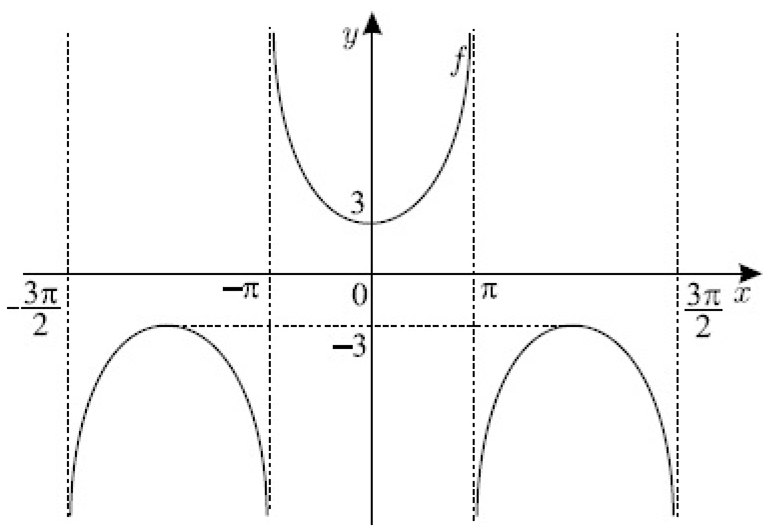
(b) $f(x) = \operatorname{arctg} |x|$.

(c) $f(x) = |\operatorname{arctg} x|$.

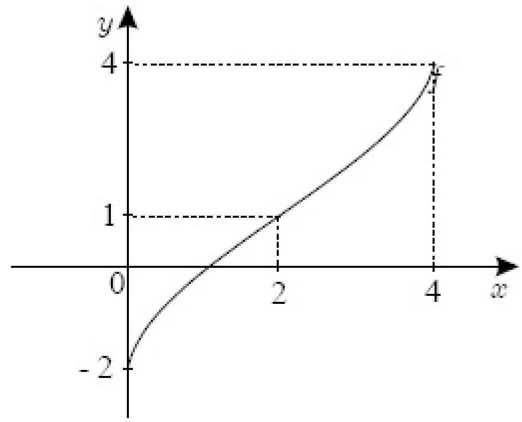
(d) $f(x) = |\operatorname{arcsen} 2x|$.

47. Em cada item abaixo, encontre números *a, b* e *c* para que a curva dada seja o gráfico de *f*.

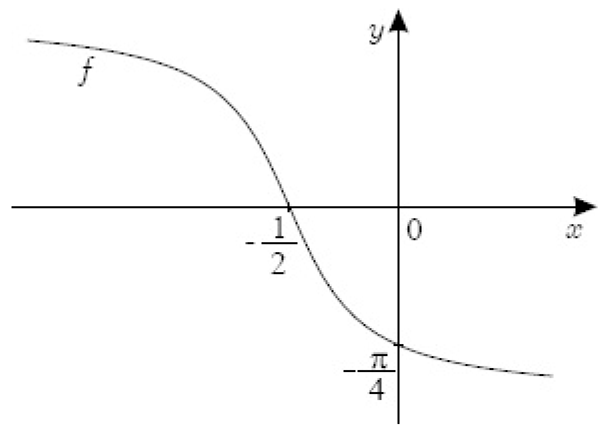
(a) $f(x) = a \sec(bx - c)$



(b) $f(x) = c + a \operatorname{arcsen}(bx - c)$



(c) $f(x) = –\text{arctg}\ (ax – b)$



48. Associe cada uma das funções aos seus gráficos:

(a) $f_1(x) = 1 – 2^{–x}$.

(b) $f_2(x) = \ln(x + 1)$.

(c) $f_3(x) = 2\cos(x)$.

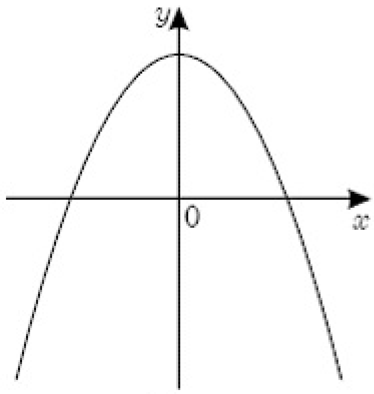
(d) $f_4(x) = 1 – x^2$.

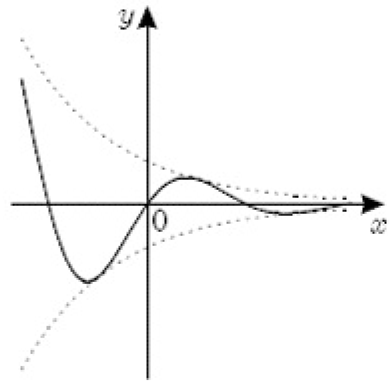
(e) $f_5(x) = x^3 – x^2 – x + 1$.

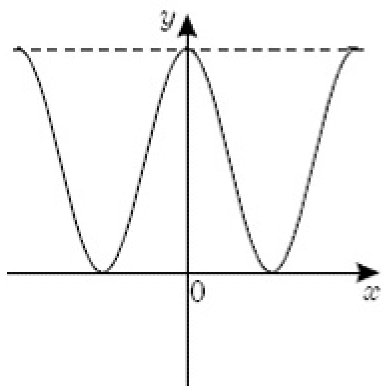
(f) $f_6(x) = \text{arctg}\ (x)$.

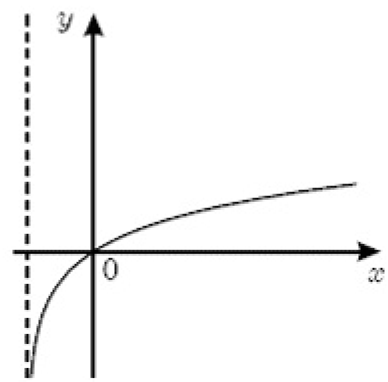
(g) $f_7(x) = 2^{–x}\text{sen}(x)$.

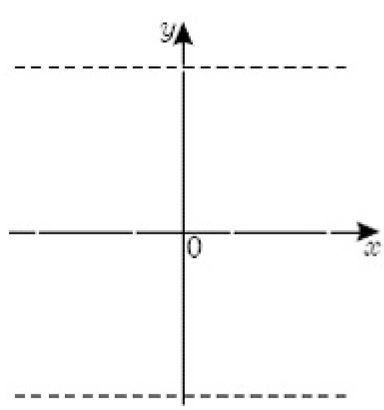
(h) $f_8(x) = 1 + \cos(x)$.

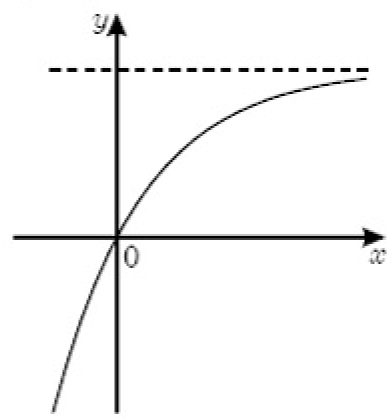

y
0
x

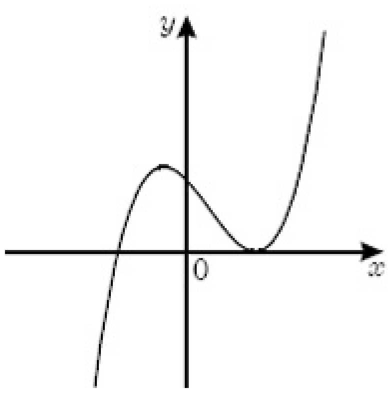

y
0
x

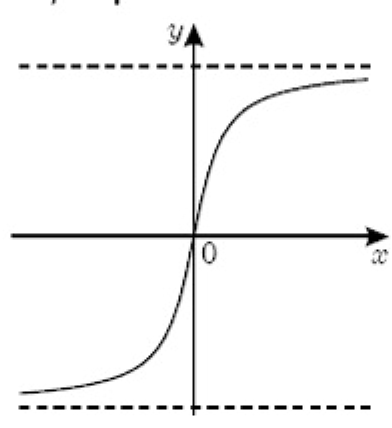

y
0
x


y
0
x


y
0
x


y
0
x


y
0
x


y
0
x

5. Apêndice

A seguir, damos algumas demonstrações de resultados enunciados neste capítulo.

Seção 1

Lema: *Se x_k é uma sequência de números positivos tal que $x_k \to \infty$, quando $k \to \infty$, então* $\sqrt{x_k} \to \infty$.

Demonstração: dado $b > 0$, seja k_0 um índice tal que

$$k > k_0 \Rightarrow x_k > b^2$$

(estamos usando a definição de que $x_k \to \infty$). Como $\sqrt{x}$ é uma função crescente e $b > 0$, temos que $\sqrt{b^2} = b$ e,

$$k > k_0 \Longrightarrow \sqrt{x_k} > b.$$

Ou seja, $\sqrt{x_k} \to \infty$.

□

Para demonstramos o Teorema 1.2, usaremos o seguinte resultado: **Lema:** *Se p e q são quaisquer inteiros positivos e $x \geq 0$, então*

$$(x^p)^{\frac{1}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$$

Demonstração: Denotemos por b o número $x^{\frac{1}{q}}$, isto é, $b = x^{\frac{1}{q}}$. Então,

$$b^q = x \qquad \text{e} \qquad b^p = (x^{\frac{1}{q}})^p.$$

Mas já sabemos que

$$(b^q)^p = (b^p)^q,$$

logo, substituído b^q por x, obtemos

$$x^p = (b^p)^q,$$

que nos diz que

$$(x^p)^{\frac{1}{q}} = b^p.$$

Mas já havíamos concluído acima que $b^p = (x^{\frac{1}{q}})^p$, ou seja,

$$(x^p)^{\frac{1}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p.$$

□

Teorema 1.2: *Sejam p, q, n e m inteiros positivos. Se* $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$ *e* $x \geq 0$*, então*

$$(x^p)^{\frac{1}{q}} = (x^n)^{\frac{1}{m}}.$$

Demonstração: Como $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$, temos que $pm = nq$, *e*, portanto $x^{pm} = x^{nq}$, ou seja,

$$(x^p)^m = (x^n)^q.$$

Fazendo $a = x^p$, $b = x^k$ e substituindo nessa igualdade, obtemos

$$a^m = b^q,$$

donde

$$a = (b^q)^{\frac{1}{m}}.$$

Mas o lema acima nos garante que $(b^q)^{\frac{1}{m}} = (b^{\frac{1}{m}})^q$, logo

$$a = (b^{\frac{1}{m}})^q,$$

donde

$$a^{\frac{1}{q}} = b^{\frac{1}{m}}.$$

Lembrando agora que fizemos $a = x^p$ *e* $b = x^n$, obtemos a igualdade

$$(x^p)^{\frac{1}{q}} = (x^n)^{\frac{1}{m}}. \qquad \square$$

Teorema 1.4*: *Se x ≥ 0 e r e s são números racionais*

positivos, então:

(i) $(x^r)^s = x^{rs}$.
(ii) $x^r x^s = x^{r+s}$.
(iii) $(xy)^r = x^r y^r$.
(iv) $(\frac{1}{x})^r = \frac{1}{x^r}$ $\quad$ *para* $x > 0$.

Demonstração: De fato, se $r = \frac{p}{q}$ e s $= \frac{k}{m}$, sejam $a = x^r$ *e* $b = (x^r)^s$, isto é, $a = x^{\frac{p}{q}}$ e $b = a^{\frac{k}{m}}$ Então

$$a^q = x^p \qquad e \qquad a^k = b^m,$$

donde, elevando ambos os membros da primeira igualdade à potência k e os da segunda igualdade à potência q, obtemos

$$a^{qk} = x^{pk} \qquad \text{e} \qquad a^{kq} = b^{mq},$$

ou seja,

$$b^{mq} = x^{pk},$$

e, portanto,

$$b = x^{\frac{pk}{qm}}.$$

Como $b = (x^r)^s$ e $\frac{pk}{qm} = r \cdot s$, provamos (1).

Para obtermos (2), fazemos $a = x^{\frac{p}{q}}$ e $b = x^{\frac{k}{m}}$. Então,

$$a^q = x^p \qquad e \qquad b^m = x^k,$$

donde, elevando à potência m os membros da primeira igualdade e à potência q os membros da segunda, obtemos

$$a^{qm} = x^{pm} \qquad \text{e} \qquad b^{mq} = x^{kq}$$

e, portanto,

$$a^{qm} b^{qm} = x^{pm} x^{kq},$$

Mas

$$a^{qm} b^{qm} = (ab)^{qm} \qquad \text{e} \qquad x^{pm} x^{kq} = x^{pm+kq},$$

logo

$$(ab)^{qm} = x^{pm+kq},$$

o que quer dizer que

$$ab = x^{\frac{pm+kq}{qm}}.$$

Como $ab = x^r x^s$ e $\frac{pm+kq}{qm} = r + s$, mostramos que $x^r x^s = x^{r+s}$.

Para mostrarmos a validade de (3) usaremos a igualdade $(xy)^{\frac{1}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})(y^{\frac{1}{q}})$, que já foi provada na seção 2: como $(xy)^r = ((xy)^{\frac{1}{q}})^p$ e a igualdade acima é válida, temos que

$$(xy)^r = ((x^{\frac{1}{q}})(y^{\frac{1}{q}}))^p.$$

Mas $(x^{\frac{1}{q}})^p = x^r$ e $(y^{\frac{1}{q}})^p = y^r$, ou seja, $(xy)^r = x^r y^r$.

Resta provarmos (4). Para isso vemos que se $x: > 0$ e $b = (\frac{1}{x})^r$, devemos mostrar que $b \cdot x^r = 1$. E, de fato, se $b = (\frac{1}{x})^{\frac{p}{q}}$, então

$$b^q = (\frac{1}{x})^p,$$

e, portanto,

$$b^q = \frac{1}{x^p},$$

já que $(\frac{1}{x})^p = \frac{1}{x^p}$. Daí, segue-se que

$$b^q x^p = 1$$

e, portanto,

$$(b^q x^p)^{\frac{1}{q}} = 1.$$

Mas por (3) temos que $(b^q x^p)^{\frac{1}{q}} = (b^q)^{\frac{1}{q}} (x^p)^{\frac{1}{q}}$, logo

$$(b^q)^{\frac{1}{q}} (x^p)^{\frac{1}{q}} = 1.$$

Como $(b^q)^{\frac{1}{q}} = b$ e $(x^p)^{\frac{1}{q}} = x^r$, temos que $b \cdot x^r = 1$, que é o que queríamos. $\square$

Seção 2

Teorema 2.3: *Se $a > 0$, $a \neq 1$ e x e y são números positivos, então:*

(i) $\log_a x^d = d \log_a x$ *para qualquer número real d.*

(ii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

(iii) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

Demonstração: Para provarmos (1), seja $z = \log_a x^d$. Se $d = 0$, então $x^d = 1$ e portanto os dois membros da igualdade (1) são nulos. Suponhamos $d \neq 0$. Então $a^z = x^d$ e, como a^z e x (e, portanto, x^d) são número positivos, podemos elevar esses números à potência $\frac{1}{d}$ (de fato estamos avaliando em $\frac{1}{d}$ as exponenciais de bases a^z e x^d), obtendo

$$(a^z)^{\frac{1}{d}} = (x^d)^{\frac{1}{d}},$$

ou seja,

$$a^{\frac{z}{d}} = x,$$

já que por (1) do Teorema 2.1, $(a^z)^{\frac{1}{d}} = a^{\frac{z}{d}}$ e $(x^d)^{\frac{1}{d}} = x^{\frac{d}{d}}$. Logo,

$$\log_a(a^{\frac{z}{d}}) = \log_a x.$$

Mas $\log_a(a^{\frac{z}{d}}) = \frac{z}{d}$, e, portanto, $\frac{z}{d} = \log_a x$, isto é, $z = d \log_a x$. Lembrando agora que fizemos $z = \log_a x^d$, obtemos $\log_a x^d = d \log_a x$.

Analogamente, para provarmos (2), fazemos $z = \log_a x$ e $t = \log_a y$. Então

$$a^z = x \quad \text{e} \quad a^t = y,$$

donde, por (2) do Teorema 2.1,

$$xy = a^z a^t = a^{z+t}.$$

Logo,

$$\log_a(xy) = \log_a (a^{z+t}) = z+t,$$

isto é,

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$$

já que fizemos $z = \log_a x$ e $t = \log_a y$.

Finalmente, (3) decorre de (1) e (2). De fato, fazendo $d = -1$ em (1) e escrevendo $\frac{x}{y}$ na forma $x(y^{-1})$, podemos usar (2) para obter

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a (xy^{-1}) = \log_a x + \log_a (y^{-1}),$$

donde

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

□

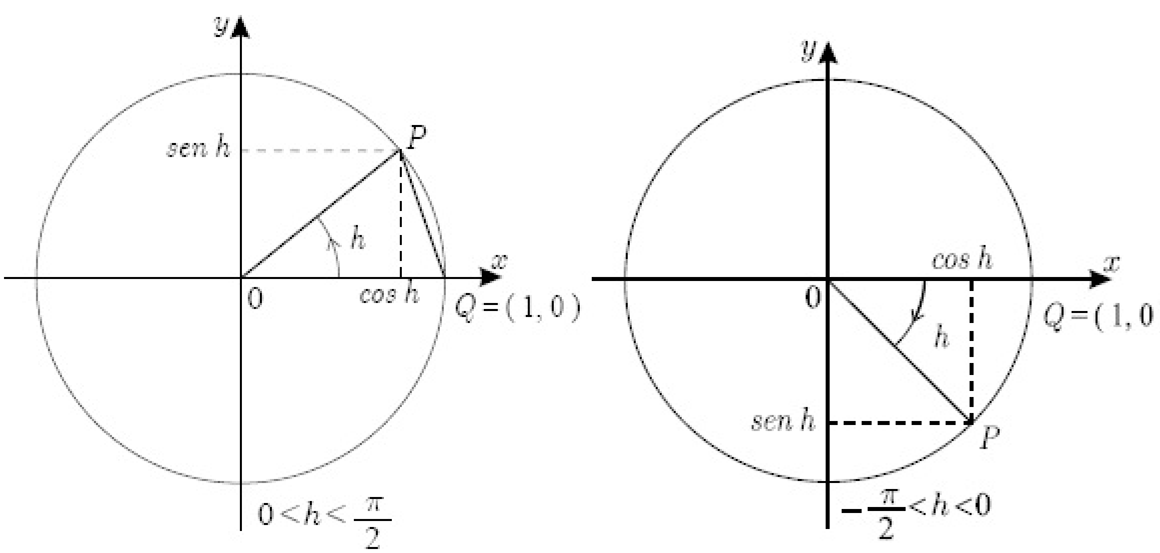
Seçao 3

Lema 3.1: $\lim_{h\to 0} \text{sen } h = 0$ e $\lim_{h\to 0} \cos h = 1$

Demonstração: Primeiro mostraremos que $\lim_{h\to 0} \text{sen } h = 0$. Pela propriedade (c) da seção anterior, temos que $-1 \leq \text{sen } h \leq 1$, isto é, $|\text{sen } h| \leq 1$. Logo, se $|h| \geq 1$, então

$$|\text{sen } h| \leq 1 \leq |h|.$$

Por outro lado, se $|h| < 1$, o ponto $P = (\cos h, \text{ sen } h)$, determinado pelo ângulo h no círculo unitário, está no semiplano à direita do eixo vertical, como na figura abaixo.



Denotando por Q o ponto de coordenadas (1,0) e tomando o segmento $\overline{OQ}$ (que tem comprimento 1) como base para o triângulo OPQ, vemos que a área desse triângulo é $\frac{|\text{sen}\,h|}{2}$.

Como o triângulo *OPQ* está contido no setor circular determinado pelo ângulo *h* (a região sombreada na figura), sua área é inferior ou igual (a igualdade só ocorre para $h = 0$) à área do setor circular que é $\frac{|h|}{2}$, isto é,

$$\frac{|\text{sen}\ h|}{2} \leq \frac{|h|}{2},$$

donde

$$|\text{sen}\ h| \leq |h|.$$

Mostramos então que

$$-h \leq \text{sen}\ h \leq h$$

qualquer que seja o número *h*. Com essas desigualdades, como

$$\lim_{h \to 0} h = 0 = \lim_{h \to 0} (-h),$$

podemos usar o Teorema 2.4 do Capítulo 5 para concluir que

$$\lim_{h \to 0}\ \text{sen}\ h = 0.$$

Mostremos agora que $\lim_{h \to 0} \cos h = 1$. Para isso, observamos que, como estamos querendo $h \to 0$, é suficiente considerarmos apenas valores de *h* próximos de 0. Em particular, podemos assumir que

$$-\frac{\pi}{2} < h < \frac{\pi}{2}.$$

Para valores de *h* nesse intervalo, sabemos que o ponto $P = (\cos h, \text{sen}\ h)$ está no semiplano à direita do eixo vertical e portanto sua primeira coordenada é um número positivo, isto é,

$$\cos h \geq 0,$$

donde, usando a identidade trigonométrica $\cos^2 h + \text{sen}^2\ h = 1$, obtemos que

$$\cos h = \sqrt{1 - \text{sen}^2 h},$$

para $-\frac{\pi}{2} < h < \frac{\pi}{2}$. Como a função $t \mapsto \sqrt{t}$ é contínua e

$$\lim_{h\to 0}(1 - \operatorname{sen}^2 h) = 1,$$

ja que

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen}^2 h = (\lim_{h\to 0} \operatorname{sen} h)^2 = 0,$$

temos que

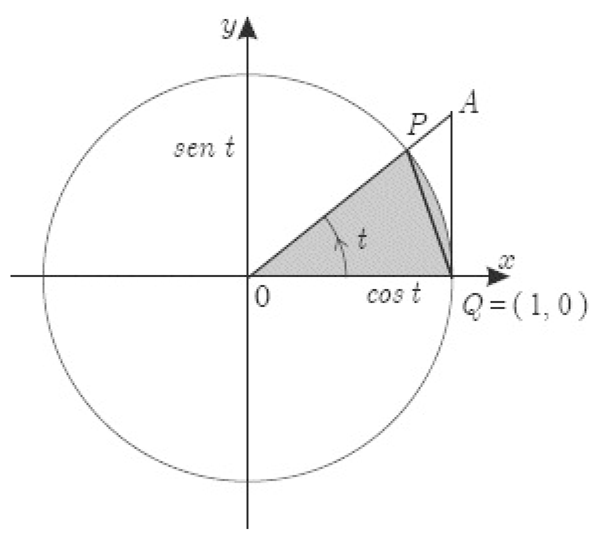
$$\lim_{h\to 0} \cos h = \lim_{h\to 0} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 h} = \sqrt{1} = 1. \qquad \square$$

Teorema 3.2: $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$ e $\lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{t} = 0.$

Para demonstrarmos esse teorema usaremos o seguinte resultado: **Lema:** *Se x é um número real tal que* $-0 < t > \frac{\pi}{2}$*, então*

$$\cos t \leq \frac{\operatorname{sen} t}{t} \leq 1.$$

Demonstração: Como $t > 0$, temos que o ponto $P = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, determinado pelo ângulo t em S^1 , é um ponto do primeiro quadrante como na figura a seguir.



Denotemos por A o ponto de interseção da semirreta que passa por P com a reta vertical que passa pelo ponto $Q = (1,0)$. Denotemos ainda por

a_1 e a_2 as áreas dos triângulos *OPQ* e *OAQ*, respectivamente, e por a_3 a área do setor circular determinado por t (a região sombreada na figura).

Observe que, por um lado, pelo que vimos no final da seção anterior, as coordenadas do ponto A são (r cos t, r sen t), onde r é o comprimento do segmento $\overline{OA}$, e, por outro lado, a primeira coordenada de A é 1, já que o segmento $\overline{AQ}$ é perpendicular ao eixo-x, isto é,

$$r \cos t = 1,$$

e, portanto,

$$r = \frac{1}{\cos t},$$

donde se segue que

$$r \operatorname{sen} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}.$$

Em particular, tomando o segmento $\overline{OQ}$ como base para os dois triângulos, temos que a altura do triângulo *OAQ* é o comprimento do segmento $\overline{AQ}$ que é r sen $t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$.

Como a altura do triângulo *OPQ* é sem t e o comprimento da base é 1, sabemos da geometria elementar que

$$a_1 = \frac{\operatorname{sen} t}{2}$$
$$a_2 = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$$
$$a_3 = \frac{t}{2}.$$

Na da figura, vemos que $a_1 \leq a_3$ e $a_3 \leq a_2$ isto é,

$$\frac{\operatorname{sen} t}{2} \leq \frac{t}{2}$$
$$\frac{t}{2} \leq \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}.$$

Da primeira desigualdade, multiplicando por 2, obtemos

$$\operatorname{sen} t \leq t,$$

e, da segunda, multiplicando por 2 cos t (que é um número positivo já que $0 < t \frac{\pi}{2}$), obtemos

$$t \cos t \leq \text{sen } t,$$

ou seja, mostramos que se $0 < t > \frac{\pi}{2}$, então

$$t \cos t \leq \text{sen } t \leq t,$$

e, portanto,

$$\cos t \leq \frac{\text{sen } t}{t} \leq 1$$

□

já que $t > 0$.

Podemos agora demonstrar o Teorema 3.2.

Mostraremos primeiro que $\lim_{t \to 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 1$

Sabemos que

$$\lim_{t \to 0^+} \cos t = \lim_{t \to 0} \cos t = 1 = \lim_{t \to 0^+} 1$$

e que se $0 < t < \frac{\pi}{2}$, então cos $t \leq \frac{\text{sen } t}{t} \leq 1$ (Lema, acima), logo podemos usar o Teorema 2.4 (na versão para limites laterais) do Capítulo 5, com $f(t) = \cos t$ e h sendo a função constante igual a 1, para concluir que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\text{sen } t}{t} = 1.$$

Por outro lado, temos que se $x = -t$, então $t \to 0^-$ (isto é, $t \to 0$ por números menores do que 0) é equivalente a $x \to 0^+$ (isto é, $x \to 0$ por números maiores do que 0), logo

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{\text{sen } (-t)}{(-t)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

Como seno é ímpar, temos que sen $(-t) = -$ sen t e, portanto,

$$\frac{\text{sen } (-t)}{(-t)} = \frac{-\text{sen } t}{(-t)} = \frac{\text{sen } t}{t}.$$

Ou seja, mostramos que

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1 = \lim_{t\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t}.$$

Assim, como os limites laterais coincidem, podemos usar o Teorema 2.10 do Capítulo 5, para concluir que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}\ t}{t} = 1.$$

Para provarmos o outro limite, observamos que

$$\cos^2 t - 1 = (\cos t - 1)\,(\cos t + 1),$$

e, portanto,

$$\cos t - 1 = \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t + 1}$$

Da identidade $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, obtemos que

$$\cos^2 t - 1 = -\operatorname{sen}^2 t,$$

donde, para $t \neq 0$, temos que

$$\frac{\cos t - 1}{t} = \frac{-\operatorname{sen}^2 t}{t\,(\cos t + 1)} = -(\frac{\operatorname{sen} t}{t})(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t + 1}).$$

Como $\lim\limits_{t\to 0} \operatorname{sen} t = 0$ e $\lim\limits_{t\to 0}(\cos t + 1) = 2$ e já provamos que $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$, podemos usar o Teorema 2.2 do Capítulo 5 para concluir que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{t} = -[\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}][\frac{\lim\limits_{t\to 0} \operatorname{sen} t}{\lim\limits_{t\to 0}(\cos t + 1)}] = -1 \cdot 0 = 0. \qquad \square$$

Respostas

Ao consultar as respostas lembre-se de que outras formas de respostas podem também estar corretas. Especificamente no caso de exemplos ou contraexemplos, as respostas fornecidas aqui são, em cada caso, apenas uma das possibilidades corretas. Observe ainda que a maioria das respostas dadas não contém justificativas.

Capítulo 1
Elementos da Linguagem e da Lógica Matemáticas

Seção 1

1. **(i)**e **(ii)**f.

2. **(a)** alguns exemplos: $x = 2$, $x = \frac{1}{5}$; alguns contraexemplos: $x = 3$, $x = 4$. **(c)** alguns exemplos: $x = -1$, $x = -\frac{2}{3}$; alguns contraexemplos: $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$. **(e)** alguns exemplos: $x = 0$, $x = \frac{2}{5}$, $x = 2,9$; alguns contraexemplos: $x = -\frac{1}{3}$, $x = -\frac{1}{7}$ **(g)** alguns exemplos: $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$. não existem contraexemplos.

3. **(i)** Não, justificativa: (c), **(ii)** Não, justificativa: (c),(e) **(iii)** Sim, justificativa: (c) **(iv)** Não, justificativa: (c) **(v)** Sim, justificativa: (f) **(vi)** Falsa, justificativa: (c).

4. **(a)** Sim **(b)** Sim **(c)** Não **(d)** Falsa **(e)** Se $x > 1$, então $x \in [-l, \infty)$.

5. **(a)** Sim **(b)** Não **(c)** Sim **(d)** Falsa **(e)** Se $-\frac{1}{2} < x < 3$, então $-2 < x \leq 3$.

6. **(a)** Não **(b)** Sim **(c)** Falsa **(d)** Se $x > 1$, então $\frac{2}{x+1} < 1$.

7. **(a)** Não **(b)** Não **(c)** Sim **(d)** Falsa **(e)** Se $x > 1$, então $|x| > 1$.

8. **(a)** Não **(b)** Sim **(c)** Falsa.

9. **(a)** Sim **(b)** Não **(c)** Sim **(d)** Falsa **(e)** Se $-1 < x < \frac{1}{2}$, então $\frac{x+17}{2x+6} < 3 - x$.

10. **(a)** Não, pois $x = -1$ não satisfaz a tese $(-1 = -1)$ **(b)** Sim, pois $x = 0$ satisfaz a hipótese $(0^3 + 0 - 1 = -1)$ e não satisfaz a tese $(0 > -1)$ **(c)** Não, pois $x = -1$ não satisfaz a hipótese $(l^3 + 1 - 1 > 0)$ **(d)** Não, pois $x = 1$ não satisfaz a hipótese **(e)** Falsa, pois admite contra-exemplo ($x = 0$ é um contra-exemplo) **(f)** Se $x > -1$ então $x^3 + x - 1 < 0$.

11. **(a)** Sim **(b)** Sim **(c)** Sim **(d)** Falsa **(e)** *Se* $x < -\frac{1}{2}$, então, $8x^7 - 4x^5 + x^4 - 2x + 1 < 5$.

Seção 2

1. V

2. F

3. V

4. V

5. V

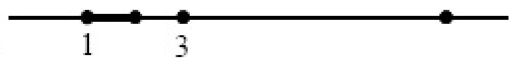
6. F

7. V
8. F
9. F
10. V
11. F
12. F
13. F
14. V
15. F
16. V
17. F
18. F
19. F
20. F
21. F
22. F
23. F
24. F
25. F
26. V

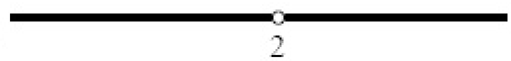
27. F
28. F
29. F
30. F
31. F
32. V
33. F
34. F
35. V
36. F
37. V
38. V
39. V
40. F

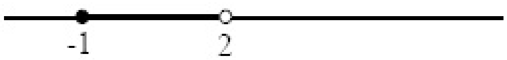
Capítulo 2
Os Números Reais

Seção 2

1. **(a)**  **(b)** 

(c) $\emptyset$ **(d)** 

2. **(a)**  **(b)** 

(c)  **(d)** 

(e)  **(f)** 

(g)  **(h)** $\emptyset$

3. **(a)** $\{x \in \mathbb{R} | -5 < x < 2\}$ **(b)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{2}\}$ **(c)** $\{x \in \mathbb{R} | 0 < x < \frac{7}{2}\}$ **(d)** $(x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1)$ **(e)** $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$ **(f)** $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0$ ou $x \geq 2\}$ **(g)** $\{x \in \mathbb{R} | x \leq 0$ ou $x = 1\}$ **(h)** $\{x \in \mathbb{R} | x < -4$ ou $-\sqrt{2} < x < 4$ **(i)** $< x \in \mathbb{R} | -\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{5}{2}$ ou $x \geq 4\}$ **(J)** $\{ -\sqrt{3}, 5\}$ **(k)** $\{x \in \mathbb{R} | x < -\frac{1}{2}$ ou $x > -\frac{1}{3}\}$ **(I)** $\{x \in \mathbb{R} | 2 < x \leq 5\}$ **(m)** $\{x \in \mathbb{R} |$ x ≤ 0 ou $x \geq 1\}$ **(n)** $\{x \in \mathbb{R} | x > -3\}$ **(o)** θ **(p)** $\{x \in \mathbb{R} | x > -7$ e $x \neq 4$ e $x \neq -2\}$ **(q)** $\sqrt{2}, \frac{1}{10}, -\sqrt{17}\}$**.**

4. **(a)** $(\frac{1}{2}\ 3)$ **(b)** $(-\infty, -2] \cup (1, \infty)$ **(c)** θ **(d)** $\{x \in \mathbb{R} | x \leq 1$ ou $\frac{3}{2} \leq x < 2\}$.

5. **(a)** F **(b)** F **(c)** F **(d)** V.

6. Para multiplicar os dois membros da desigualdade por $x + 1$, deve-se considerar as duas possibilidades: $x + 1 > 0$ ou $x + 1 < 0$.

7. **(a)** $2,8 \leq y \leq 2,9 \Rightarrow -2,8 \leq -y \geq -2,9 \Rightarrow -2,9 \leq -y \leq -2,8 \Rightarrow 1,3 - 2,9 \leq x - y \leq 1,4 - 2,8 \Rightarrow -1,6 \leq x - y \leq -1,4$.

9. **(a)** F, contra-exemplo $x = -1$ e $y = 1$ **(b)** V.

10. **(a)** F, um contra-exemplo é dado por $x = 0$; recíproca V **(b)** V; recíproca F, $x = 0$ é um contra-exemplo **(c)** V; recíproca F, $x = 6$ é

um contra-exemplo **(d)** F, $x = 0$ é um contra-exemplo; recíproca F, $x = -4$ é um contra-exemplo **(e)** F, $x = 3$ é um contra-exemplo; recíproca F, $x = 0$ é um contra-exemplo **(f)** F, $x = -3$ é um contra-exemplo; recíproca V **(g)** V; recíproca F, $x = 7$ é um contra-exemplo **(h)** V; recíproca F, $x = 2$ é um contra-exemplo **(i)** F, $x = -2$ é um contra-exemplo; recíproca F, $x = 5$ é um contra-exemplo **(j)** F, $x = 0$ é um contra-exemplo; recíproca F, $x = \frac{3}{2}$ é uma contra-exemplo.

11. $a = 1$.

12. $a = -8$.

13. $a = -2$.

14. **(i)** F **(ii)** e.

15. **(a)** F **(b)** V **(c)** V.

Seção 3

1. **(a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 5\}$ **(b)** $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1,97 \leq x \leq 2,03\}$ **(d)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -7 \text{ ou } x > 1\}$
(e) $x = 4$ ou $x = -\dfrac{6}{5}$ **(f)** $(-\infty, -\frac{7}{3}) \cup (1, \infty)$ **(g)** $x = \frac{7}{2}$
(h) $x = \frac{1}{2}$ **(i)** $x = -\frac{3}{2}$ **(j)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{1}{2}\}$
(k) Não tem solução **(l)** $x = -7$ ou $x = 5$.

3. **(a)** $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ **(b)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ **(c)** Não tem solução.

4. **(a)** $\left|x - \frac{15}{2}\right| < \frac{15}{2}$ **(b)** $|x - 3| < 6$ **(c)** $|x + 7| < 5$
(d) $\left|x - \frac{7}{2}\right| < \frac{11}{2}$ **(e)** $|x - 7| < 0,1$

5. **(a)** V. **(b)** F, $x = 0$ é um contra-exemplo **(c)** F, $x = -2$ é um contra-exemplo
(d) F, $x = -2$ é um contra-exemplo **(e)** V.

6. **(a)** V, já que pela desigualdade triangular
$|(x + y) - 8| = |(x - 2) + (y - 6)| \leq |x - 2| + |y - 6|$
(b) F, $x = -\frac{1}{2}$ **(c)** F, $x = -3$ **(d)** F, $a = 0, b = -1, c = 2$.

7. $r = 0{,}05$.

9. $a = -1$ e b = 2.

10. $a = 10$ e $b = 5$.

11. **(a)** V **(b)** V **(d)** V **(e)** V

14. **(a)** V **(b)** F **(c)** V **(d)** F **(e)** V

15. **(a)** [2,11] **(b)** (1,5) **(c)** $[\frac{5}{2}, 8)$ **(d)** $(-1, \infty)$.

Seção 4

1. **(a)** $\frac{23}{9}$; $\frac{17}{6}$; $3,6$

   (b) $1,732$; $\sqrt{3}$; $1,733$

   (c) $-\frac{11}{3}$; $-\frac{12}{4}$; $-\frac{5}{12}$

   (d) $\sqrt[3]{-8}$; $-\frac{3}{2}$; $\sqrt{4}$

   (e) $1,333$; $\frac{4}{3}$; $1,3334$; $1,4$; $1\frac{3}{5}$; $\frac{8}{5}$

3. **(a)** V **(b)** F **(c)** F **(d)** V

4. **(a)** V **(b)** F **(c)** V **(d)** V **(e)** F **(f)** V

5. 2,236

7. 2,645

9. **(a)** V **(b)** F **(c)** V

10. c, pois 2, 777 é o truncamento na terceira casa decimal de *x* e, portanto, $|x - 2,777| < 10^{-3}$.

12. (a) e (d).

13. (a), (b) e (d).

14. (c).

15. (b) e (c).

17. **(a)** 3,147 **(b)** 3,146.

19. F.

Capítulo 3

Sequências de Números Reais

Seção 1

3. (b), pois $\left|a_n - 1,\overline{2}\right| < 10^{-n}$, para $n \geq 1$ e $\frac{1}{10^n} \to 0$.

4. (c).

5. (c).

6. (a).

7. (a).

8. (c).

9. Não.

10. **(a)** F **(b)** F

11. **(a)** V **(b)** V **(c)** V **(d)** V **(e)** V **(f)** V **(g)** V **(h)** F

12. a_n é uma sequência constante.

13. $n = 4K$.

Seção 3

1. **(a)** N **(b)** N **(c)** N **(d)** S

2. $a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$ e $b_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$

3. $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = \cos n$.

4. $a_n = L + \frac{1}{n}$.

5. $a_n = L - \frac{1}{n}$.

6. $a_n = L + \frac{(-1)^n}{n}$.

7. $$\begin{aligned} a_1 &= -0,2304, \\ a_2 &= -0,23004, \\ a_3 &= -0,230004, \\ &\vdots \\ a_n &= -0,23\overbrace{0...0}^{n\ 0's}4, \\ &\vdots \end{aligned}$$

10. **(i)** F **(ii)** c

11. **(a)** F **(b)** F **(c)** V **(d)** F

12. **(a)** S **(b)** S **(c)** N **(d)** N **(e)** S

13. **(b)** 0,1234567.

14. **(a)** F **(b)** F **(c)** F **(d)** F

17. **(a)** 0 **(b)** 1 **(c)** 0 **(d)** não converge **(e)** 0 **(f)** não converge **(g)** não converge **(h)** não converge **(i)** 10

Seção 4

1. (b)

2. (c)

3. $a_n = n + 6$ e $b_n = -n$.

4. $a_n = 2n$ e $b_n = -n$.

5. $a_n = n$ e $b_n = -2n$.

6. $a_n = n^2$ e $b_n = -n$.

7. $a_n = n$ e $b_n = -n^2$.

8. $a_n = n$ e $b_n = a_n = n$ e $b_n = -\frac{n}{5,8}$.

9. **(a) V** **(b) F**

11. **(a) V** **(b) V** **(c) F** **(d) V** **(e) F** **(f) F** **(g) F** **(h) V** **(i) F** **(j) F** **(k) F** **(l) V** **(m) F** **(n) V**

13. **(a) F** **(b) F** **(c) F** **(d) F**

14. **(a)** 1 **(b)** ∞ **(c)** 0 **(d)** 1 (e) $\frac{1}{3}$ **(f)** ∞

Capítulo 4
Funções Reais

Seção 1

1. **(a)** $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq -3 \text{ e } x \neq 3\}$ **(b)** $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq -4 \text{ e } x \neq 1\}$
   (c) $[-3, 0] \cup [1, \infty)$ **(d)** $[2, 3) \cup [4, \infty)$ **(e)** $[-3, -2) \cup (-2, \infty)$

2. **(a)** $(f+g)(x) = x^2 + x$, $\text{dom}(f+g) = \mathbb{R}$ **(b)** $(fg)(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, $\text{dom}(fg) = \mathbb{R}$ **(c)** $(\frac{f}{g})(x) = x - 1$, $\text{dom}(\frac{f}{g}) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq -1\}$

3. **(a)** $(f+g)(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 4}$, $\text{dom}(f+g) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
   (b) $(fg)(x) = \sqrt{x^4 - 5x^2 + 4}$ $\text{dom}(fg) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
   (c) $(\frac{f}{g})(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-4}}$, $\text{dom}(\frac{f}{g}) = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

4. **(a)** $\text{dom}(f+g) = \mathbb{R}$ e $(f+g)(x) = \begin{cases} 5 & x \leq 0, \\ 7 - x & 0 < x < 2, \\ 5x - 5 & x \geq 2. \end{cases}$

   (b) $\text{dom}(fg) = \mathbb{R}$ e $(fg)(x) = \begin{cases} -9x^2 + 21x - 6 & x \leq 0, \\ -6x^2 + 9x + 6 & 0 < x < 2, \\ 6x^2 - 9x - 6 & x \geq 2. \end{cases}$

   (c) $\text{dom}(\frac{f}{g}) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 2\}$ e $(\frac{f}{g})(x) = \begin{cases} \frac{3x-1}{6-3x} & x \leq 0, \\ \frac{2x+1}{6-3x} & 0 < x < 2, \\ \frac{2x+1}{3x-6} & x > 2. \end{cases}$

5. (a).

6. **(a)** $\mathbb{R} - \{1\}$ **(b)** $f(0) = -1$, $f(-1) = -4$ e $f(2) = 3$
   (c) $\text{dom}(g) = \mathbb{R} - \{3\}$ e $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } x > 3, \\ 3x - 7 & \text{se } x < 3. \end{cases}$
   (d) $x = -1$ e $x = \frac{1}{3}$ **(e)** $\text{dom}(h) = \mathbb{R} - \{-1, \frac{1}{3}, 1\}$

7. $f(x-3) = x^2 - 9x + 19$, $f(t^2 + 1) = t^4 - t^2 - 1$.

8. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1, \\ 1 - x & \text{se } x < 1. \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 0, \\ -x - 1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \geq 0, \\ -x^3 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

12. $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{se } x \geq 0, \\ x^2 + 3x + 2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

13. **(a)** $x \in (\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$ **(b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{se } x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2, \\ -x^2 + 3x - 2 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$

14. $\mathrm{dom}(f) = (0, 18)$ e $f(l) = l(18 - l)$.

15. $\mathrm{dom}(f) = (0, 2)$ e $f(x) = (4 - 2x)(7 - 2x)x$.

16. $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$ e $d(x) = \sqrt{(x-2)^2 + x^4}$.

17. $\mathrm{dom}(f) = (0, 4)$ e $r(a) = \sqrt{4 - \dfrac{a^2}{4}}$.

18. (sem tampa) $\mathrm{dom}(f) = (0, \infty)$ e $f(h) = 2\sqrt{15\pi h} + \frac{15}{h}$,
    (com tampa) $\mathrm{dom}(f) = (0, \infty)$ e $f(h) = 2\sqrt{5\pi h} + \frac{30}{h}$.

19. $\mathrm{dom}(f) = (0, 6)$ e $l(c) = 2\sqrt{9 - \dfrac{c^2}{4}}$.

20. $\mathrm{dom}(f) = (0, 400)$ e $f(x) = \frac{800x - 2x^2}{\pi}$.

21. $\mathrm{dom}(f) = (0, 3)$ e $r(a) = 2 - \frac{2a}{3}$.

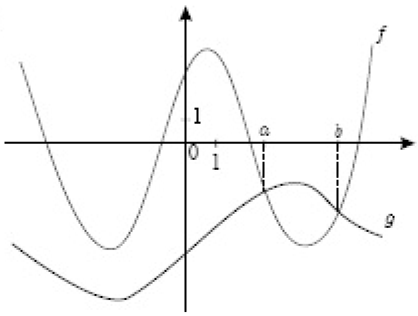
Seção 2

1. **(a)** $x = -4, x = -2, x = 1$ **(b)** $[-6,-4)\cup(-2,1)$ **(c)** $(-4,-2)\cup(1, 6]$ **(d)** $[-6,-5)$ **(e)** $5 \leq x \leq 6$ ou $x = 3$ **(f)** $|x| \geq 1$ **(g)** $[-6, 3) \cup (3, 5)$ **(h)** $(-5,-1)\cup(-1,3)\cup(3,5)$.

3. (a)

4. **(a)** $(-1,1) \cup (2, 3]$ **(b)** $[-2,-1) \cup (1,2]$ **(c)** $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$.

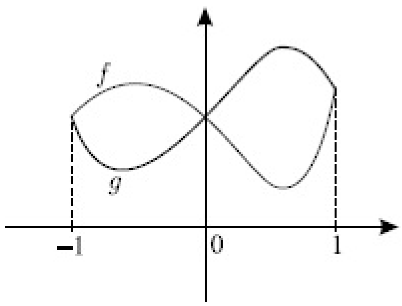
5. **(a)**



(b) $x \in (a,b)$ **(c)** $x \in \mathrm{dom}(f)$.

6. $\{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq -2$ ou $1 \leq x \leq 4\}$.

7.



8. (a).

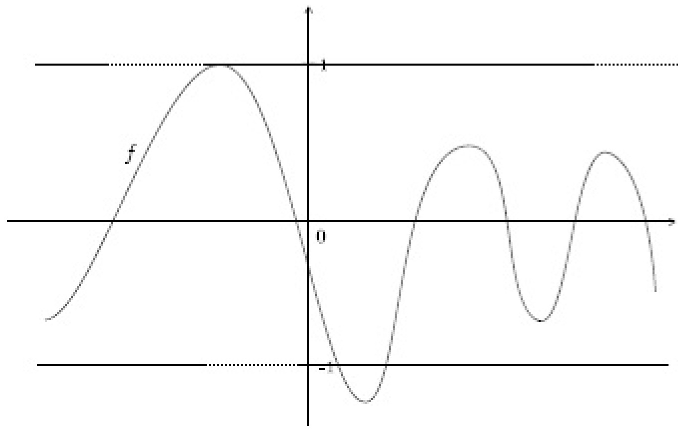
9. (a).

11. $c = 1$ e $(b-1)^2 - 4a \geq 0$.

12. $a = 1$ e $b = -1$.

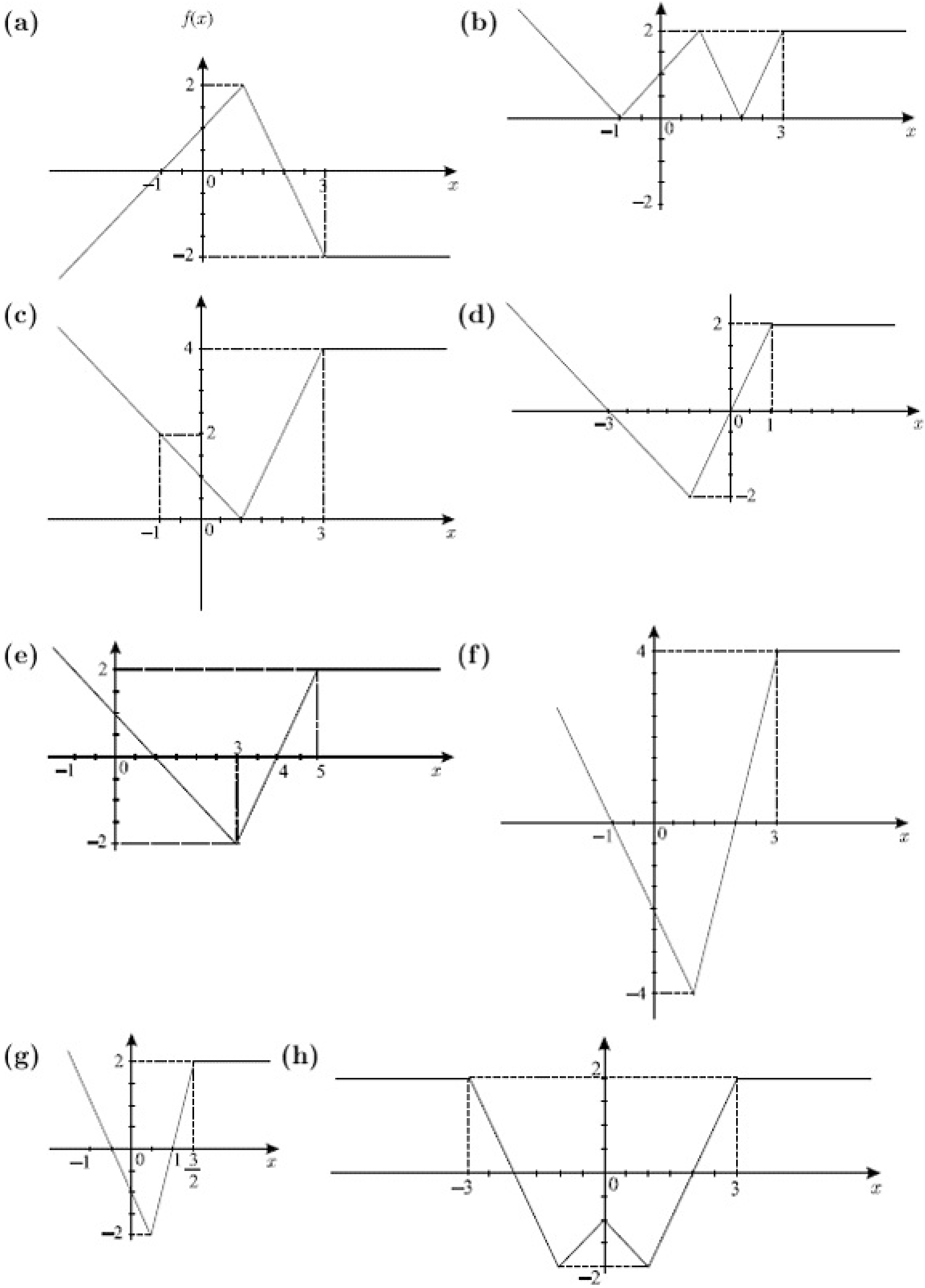
13. Item (c), pois o gráfico de f tem que ter três pontos de interseção com o gráfico de g *e* os gráficos de g *e* h têm que ter um só ponto de interseção.

14. O gráfico abaixo é uma das possíveis soluções.

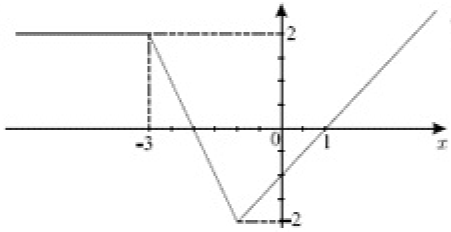


Seção 3

1.

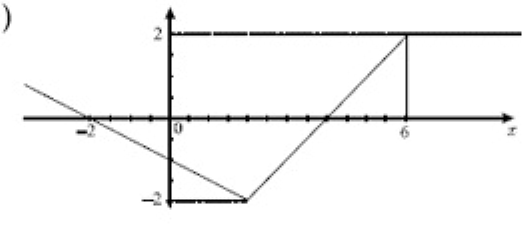

(a)
f(x)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)

(i)



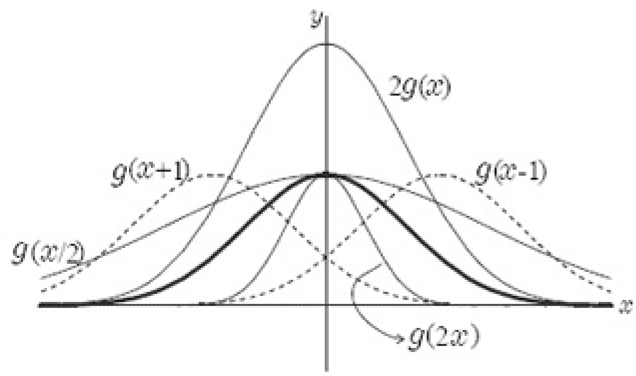
2
-3
0
1
x
-2

(j)



2
-2
0
6
x
-2

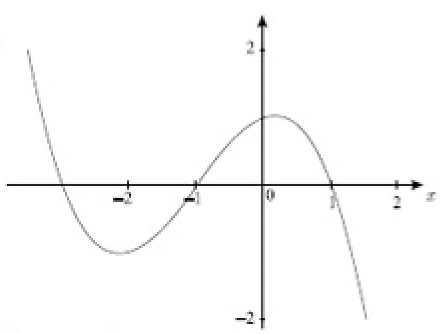
2.



y
2g(x)
g(x+1)
g(x-1)
g(x/2)
x
g(2x)

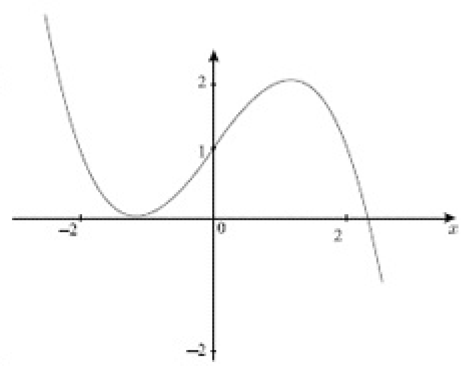
3.

(a)



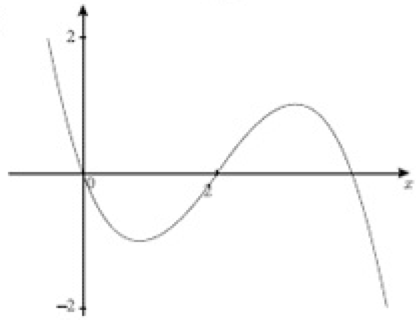
2
-2
-1
0
1
2
x
-2

(b)



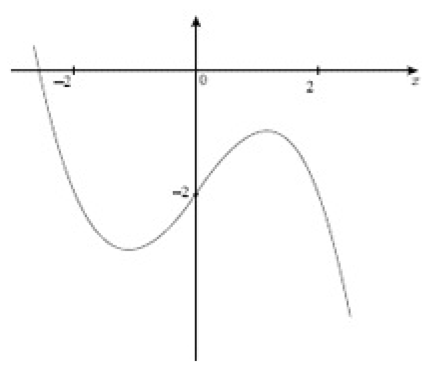
2
1
-2
0
2
x
-2

(c)



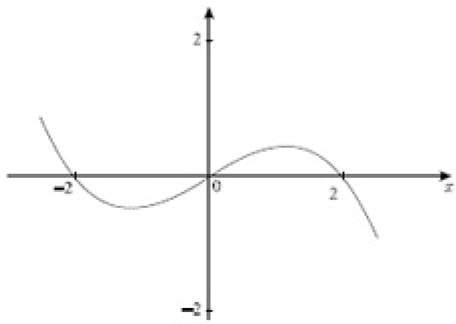
2
0
2
x
-2

(d)

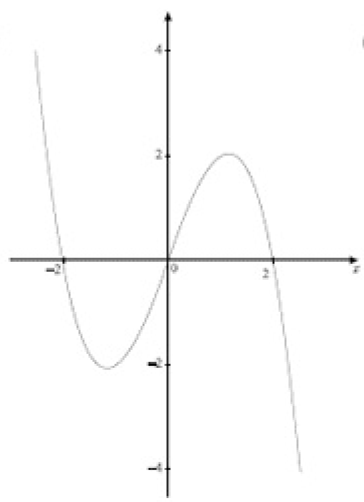


-2
0
2
x
-2

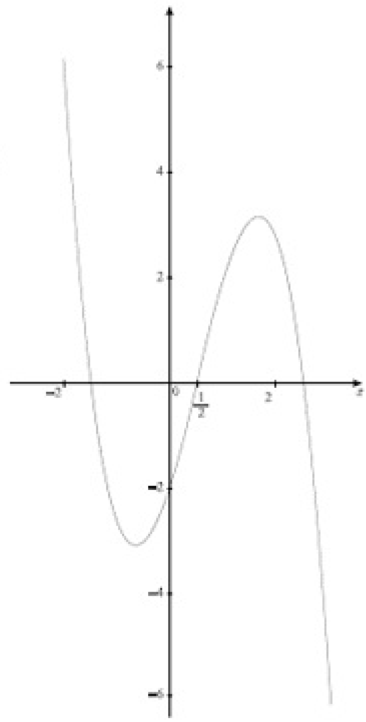
(e)



(f)

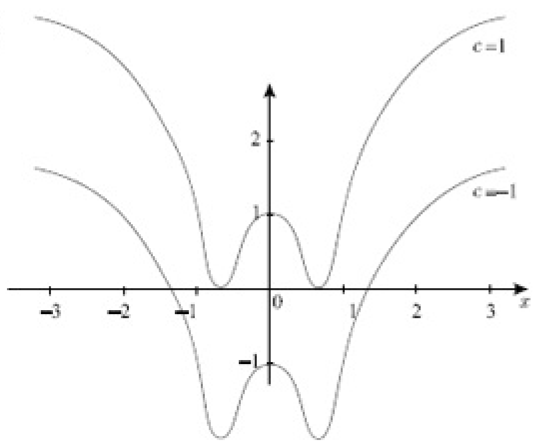


(g)

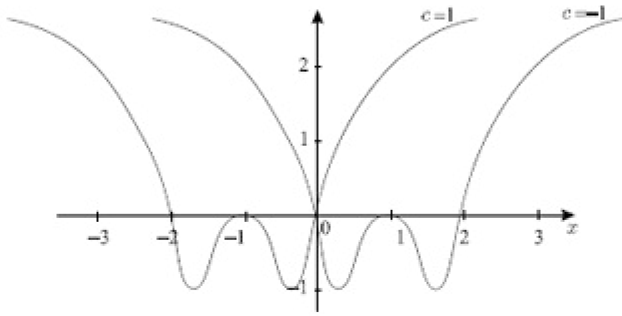


4.

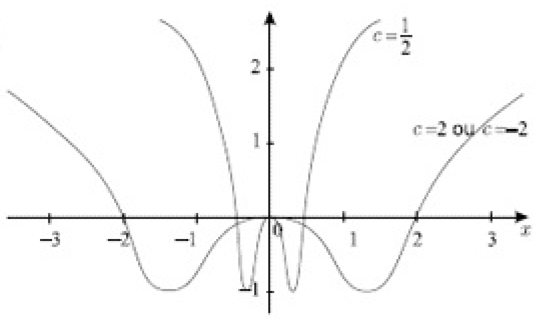
(a)



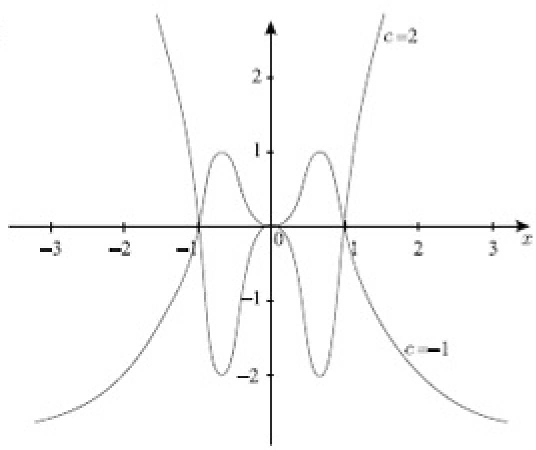
(b)



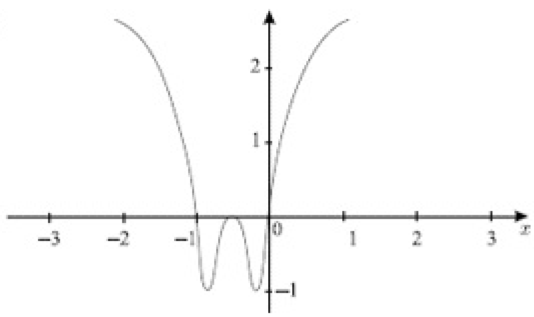
(c)



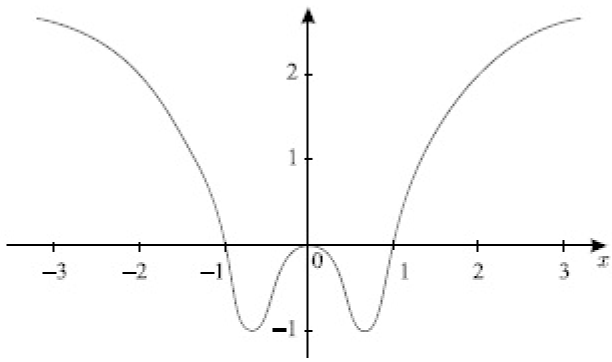
(d)



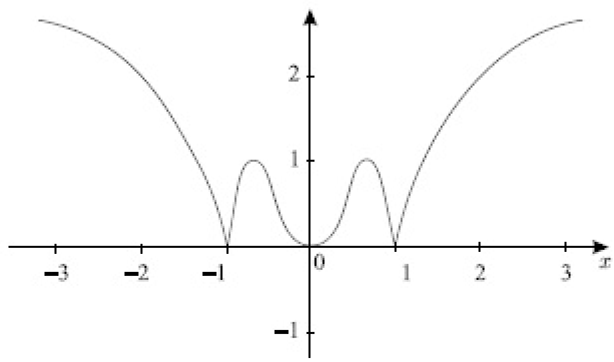
(e)



(f)



(g)



6. Pares: (a), (b), (c), (f), (g), (i), (j). Ímpares: (b), (d). Nem pares, nem ímpares: (e), (h), (k).

7. Pares: (b), (d), (e). Impares: (a), (f). Nem pares, nem ímpares: (c).

8. **(a) V** **(b) F** **(c) V** **(d) V** pois $f(-x) = -f(x) \Rightarrow g(-x) = |f(-x)| = |-f(x)| = |f(x)| = g(x)$.

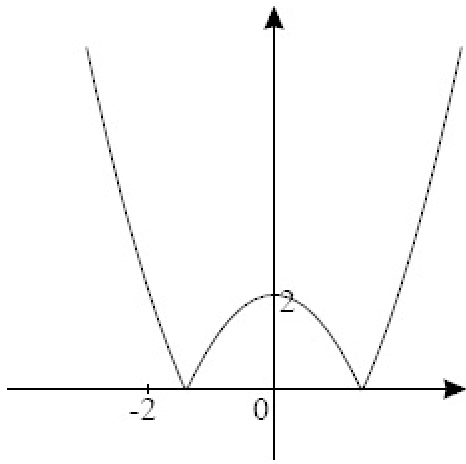
9. **(a)** $g(x) = ||-x-1|-1|$ **(b)** $g(x) = 1-|-x-1|$

10. **(i)** $g(x) = 1-2x$ **(ii)** $f(x) = 2|x|+1$

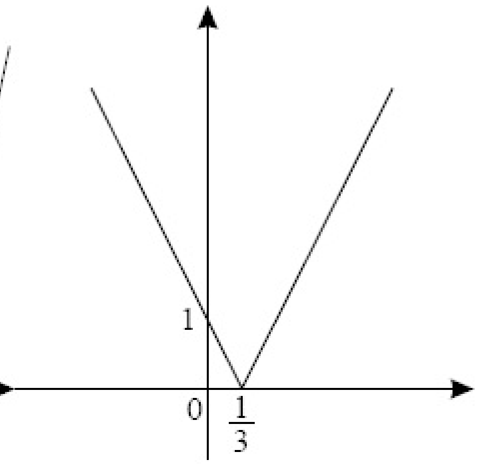
11. $\left.\begin{array}{ll} f \text{ é par} & \Rightarrow f(-x) = f(x) \\ f \text{ é ímpar} & \Rightarrow f(-x) = -f(x) \end{array}\right. \Rightarrow f(x) = -f(x) \Rightarrow 2f(x) = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0.$

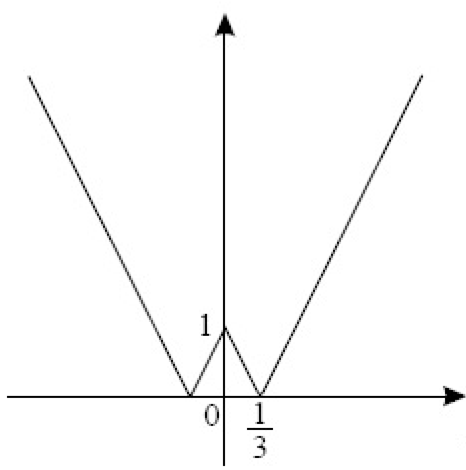
13.



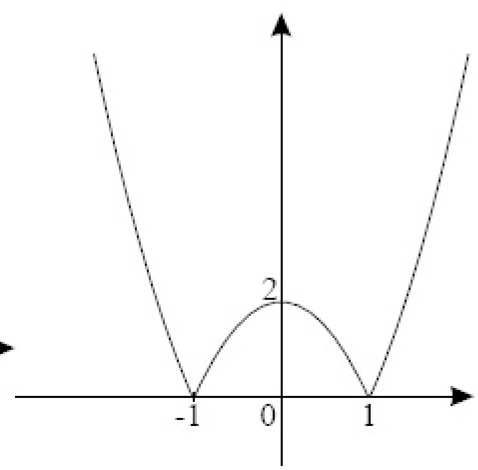
(a)



(b)



(c)



14. **(a)** $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{se } x \leq -2 \text{ ou } x \geq 1, \\ -x^2 - x + 2 & \text{se } -2 < x < 1. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{3}, \\ -3x + 1 & \text{se } x < \frac{1}{3}. \end{cases}$

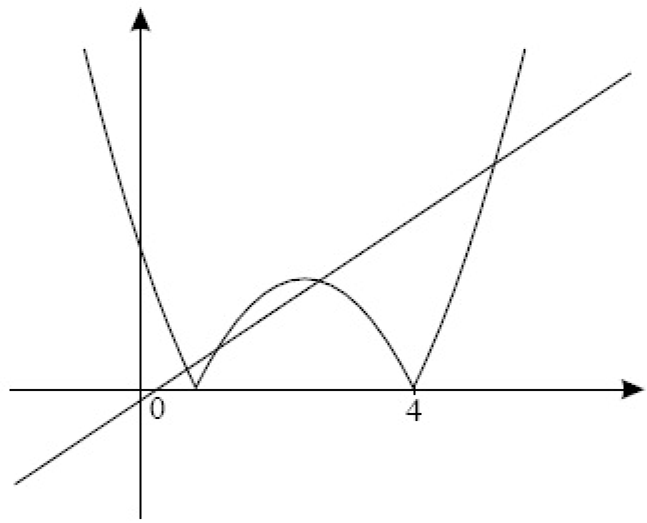
(c) $f(x) = \begin{cases} -3x - 1 & \text{se } x \leq -\frac{1}{3}, \\ 3x + 1 & \text{se } -\frac{1}{3} < x \leq 0, \\ -3x + 1 & \text{se } 0 < x \leq \frac{1}{3}, \\ 3x - 1 & \text{se } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{se } \ x \leq -1, \\ -x^2 + x + 2 & \text{se } -1 < x \leq 0, \\ -x^2 - x + 2 & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ x^2 + x - 2 & \text{se } \ x > 1. \end{cases}$

15. **(a)** 3,1,4 **(b)**0, –1, $\frac{1}{2}$ **(c)** 1, 2, $\frac{1}{2}$

16. **(a)** $x_1 = 3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, x_2 = 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}, x_3 = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, x_4 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

(b)



(c) $(3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}, 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 3 + \frac{3\sqrt{2}}{2})$.

Seção 4

1. **(a)** $(f \circ g)(x) = 2|x| - 1$, $dom(f \circ g) = \mathbb{R}$ e $(g \circ f)(x) = |2x - 1|$, $dom(g \circ f) = \mathbb{R}$.
   (b) $(f \circ g)(x) = \sqrt{|x|}$, $dom(f \circ g) = \mathbb{R}$ e $(g \circ f)(x) = |\sqrt{x}|$, $dom(g \circ f) = [0, \infty)$.
   (c) $(f \circ g)(x) = \sqrt{|x - 1|}$, $dom(f \circ g) = \mathbb{R}$ e $(g \circ f)(x) = |\sqrt{x} - 1|$, $dom(g \circ f) = [0, \infty)$.
   (d) $(f \circ g)(x) = \sqrt{2|x| - 1}$, $dom(f \circ g) = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ e $(g \circ f)(x) = \left|\sqrt{2x - 1}\right|$, $dom(g \circ f) = [\frac{1}{2}, \infty)$.
   (e) $(f \circ g)(x) = x - 1$, $dom(f \circ g) = [0, \infty)$ e $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $dom(g \circ f) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

2. As respostas dadas abaixo não são as únicas corretas.

(a) $f_1(x) = (g\ o\ h\ o\ r)(x)$ onde $g(x) = x + 8$, $h(x) = x^2$ e $r(x) = \text{sen}\ x$.

(b) $f_2(x) = (g\ o\ h\ o\ r)(x)$ onde $g(x) = x^2$, $h(x) = \cos x$ e $r(x) = 3x + 5$.

(c) $f_3(x) = (g \text{ o } h \text{ o } r)(x)$ onde $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x + 8$ e $r(x) = \text{sem}(x)$.

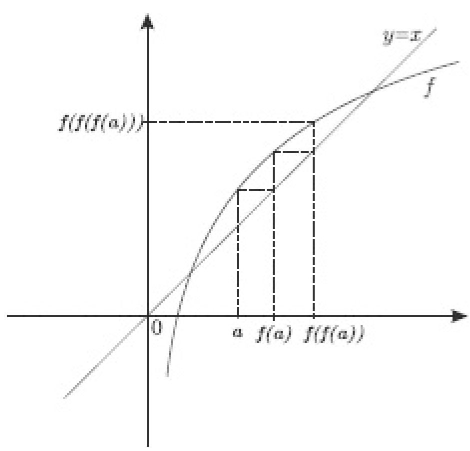
(d) $f_4(x) = (g \text{ o } h \text{ o } r)(x)$ onde $g(x:) = -\frac{1}{x}h(x) = \text{sen}\ x$, e $r(x) = x^A$.

3. **(a)** Não. **(b)** Sim, pois $g(0) = f(0^2 + 2.0 - 1) = f(-l)$. **(c)** Sim.

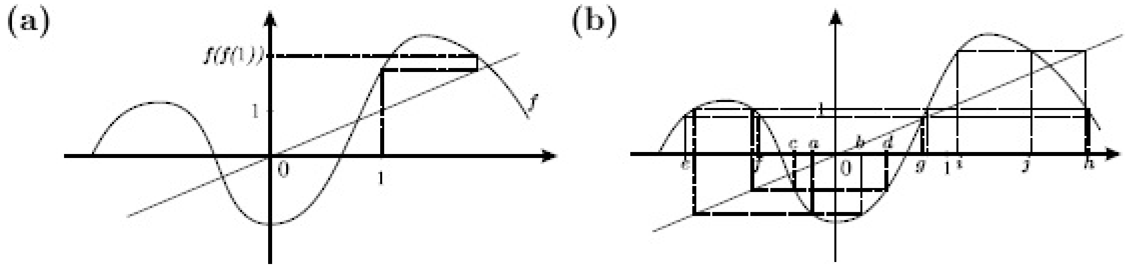
4. **(a) V** **(b) V** **(c) F**, $f(x) = x + 1$ é um contra-exemplo, pois f satisfaz a hipótese porque a equação $f(x) = 0$ tem solução ($x = -1$) mas a equação $g(x) = f(x^2 + 1) = 0$ ($x^2 + 2 = 0$) não possui solução, logo f não satisfaz a tese.

5. **(a)** $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 + 2x + 3$ **(b)** $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2 - 5x + 6$ **(c)** $f(x) = x^2 + 2x + 2$, $g(x) = |x|$ **(d)** $f(x) = x$, $g(x) = x^2$

6.

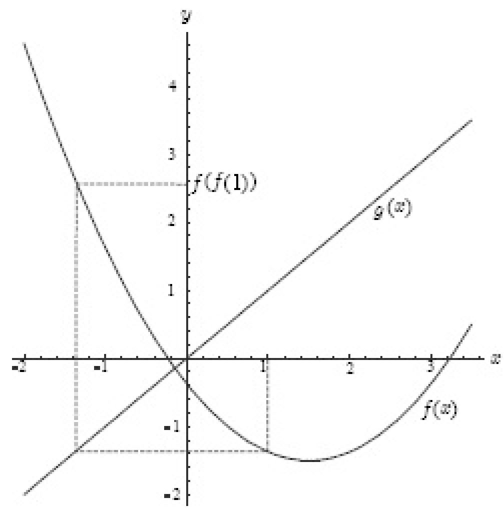


7.

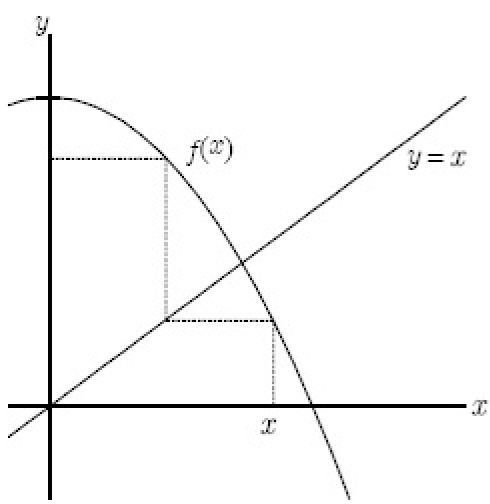


8. São três soluções: $x_1 = 0$; $x_2 = -1$ e $x_3 = \frac{1}{2}$.

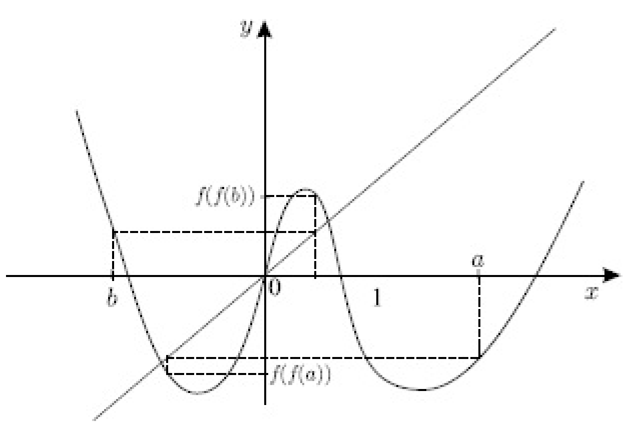
9.



10.



11.



Seção 5

1. **(a)** V **(b)** Não é possível decidir. **(c)** F **(d)** F **(e)** V **(f)** Não é possível decidir.

2. **(a)** V **(b)** V **(c)** F **(d)** F **(e)** V **(f)** F **(g)** V.

3. $f^{-1}(x) = f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

4. **(a)** V, pois se f é crescente então $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ e, portanto, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Pelo teorema 5.1 f é inversível.

   (b) F, contra-exemplo $f(x) = \frac{1}{x}$

5. $g^{-1}(x) = -g^{-1}(x) = -\sqrt{x^2 - 1}$ e $dom(g^{-1}) = [1, \infty)$.

6. **(a) F** **(b) F** **(c) V** **(d) V** **(e) V** **(f) V**.

7. **(a)** V **(b)** V **(c)** V **(d) F**, $f(x) = x^2$ é um contra-exemplo.

9. **(a)** $g = f \text{ o } h$, onde $h(x) = x + 2$ é inversível e portanto g é inversível por ser a composição de funções inversíveis. Temos que: $g^{-1}(x) = b$

   $\Leftrightarrow x = g(b) = f(b + 2) \Rightarrow f^{-1}(x) = f^{-1}\,(f(b + 2)) = b + 2$

   $\Rightarrow b = f^{-1}(x) - 2$. Como $g^{-1}(x) = b$ obtemos $g^{-1}(x) = f^{-1}(x) - 2$.

   (b) h é inversível com $h^{-1}(x) = \frac{1}{a}((f^{-1}(x) - b)$.

   (c) ϕ é inversível com $\phi^{-1}(y) = f^{-1}(-y)$.

   (d) ψ é inversível com $\psi^{-1}(x) = f^{-1}(\frac{1}{x})$.

10. $(f \text{ o } g,)^{-1}(x) = b \Leftrightarrow x = f(g(b)) \Rightarrow f^{-1}(x) = f^{-1}(f(g(b))) = g(b)$

    $\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}(g(b)) = b \Rightarrow (g^{-1} \text{ o } f^{-1}(x) = b$. Como

    $(f\ o\ g)^{-1}(x) = b$ concluímos que $(f \text{ o } g)^{-1}(x) = (g^{-1}\ o\ f^{-1})(x)$.

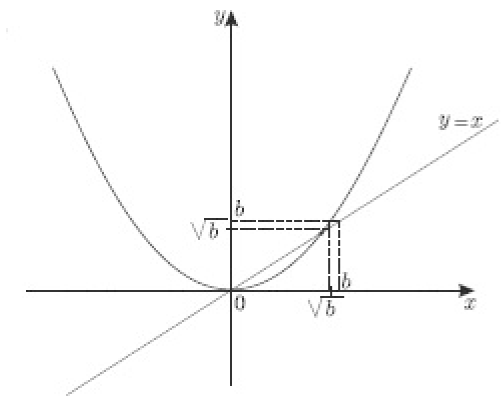
11. $h = u \circ v$ com $u(x) = \sqrt{x}$.e $v(x) = 2x - 1$, que são funções inversíveis; $h^{-1}(x) = \frac{x^2+1}{2}$, dom$(h^{-1}) = [0,\infty)$.

$g^{-1}(x) = -\frac{x^2+1}{2}, dom(g^{-1}) = [0,\infty).$

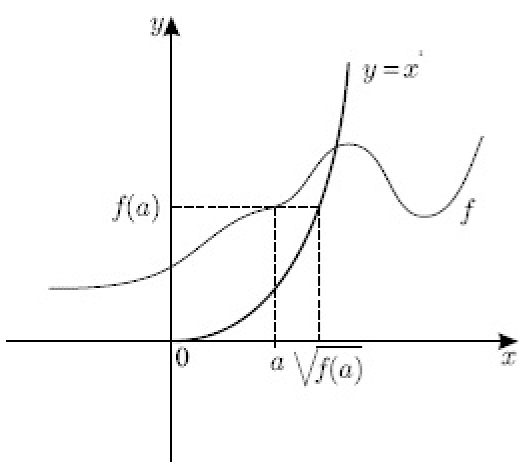
12. $g^{-1}(x) = f^{-1}(x^2 - 1)$ para $x \in \mathrm{Im}(g)$.

13. Sim, f é inversível, pois, para $b \in \mathbb{R}$, a equação $f(x) = b$ tem no máximo uma solução, já que retas horizontais cortam o gráfico de f no máximo em um ponto.

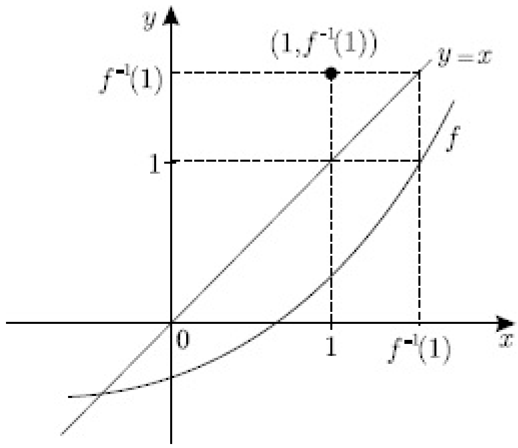
14.



15.



16.



17. $f^{-1}(x) = x$. Observe que $g(x) = [f(x)]^{-1} = \frac{1}{x}$. As funções f^{-1} e g são funções diferentes. $g^{-1}(x) = \frac{1}{x}$

Capítulo 5
Continuidade e Limites de Funções Reais

Seção 1 - páginas 246 a 248

1. Para mostrar que uma função f é contínua, devemos verificar que f é contínua em qualquer ponto $x = a$ de seu domínio, ou seja, devemos mostrar que *se* $a_n \to a$, *então* $f(a_n) \to f(a)$. Dados $a \in \mathbb{R}$ e $a_n \to a$, tem-se que $f(a_n) = c \to c = f(a)$.

3. **(a)** $f(1) = 2$ **(b)** $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(1 - \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1$

   (c) Não, pois $1 - \frac{1}{n} \to 1$ mas $f(1 - \frac{1}{n}) \to 1 \neq 2 = f(1)$.

4. **(a)** $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 17$ **(c)** Não, pois $f(3) = 7 \neq \lim_{n\to\infty} f(3 + \frac{(-1)^n}{n})$.

5. **(a)** F **(b)** V

6. F.

7. Falsa, um contra-exemplo é $f(x)$ = $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{se } x \neq 0 \\ 9 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

8. **(a)** Falsa **(b)** Não.

9. **(a)** Sim **(b)** Não **(c)** Sim **(d)** Sim.

10. **(a)** Sim **(b)** Sim.

11. **(a)** $1 + \sqrt{2}$ **(b)** $(1 - \sqrt{2})^3$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

12. $-\sqrt{2}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{x_n} - 2x_n^3 + 3}{\sqrt{x_n^2 + 3} + 2x_n} = \frac{1}{2}$. Justificativa: A função $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2x^3 + 3}{\sqrt{x^2+3} + 2x}$ é continua pois é o quociente de funções contínuas, (soma e composição de funções contínuas são contínuas, sendo que polinômios e $\sqrt{x}$ são funções contínuas). Como $1 \in dom(f)$ e $x_n = 1 + \dfrac{1}{n} \to 1$, devemos ter que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{x_n} - 2x_n^3 + 3}{\sqrt{x_n^2 + 3} + 2x_n} = f(1) = \frac{1}{2}$.

14. **(a)** Sim, pois $\frac{\pi}{2n} \to 0$, cos x é contínua em $x = 0$ e cos 0 = 1.

    (b) Sim, pois $f = h \circ g$ com $h(x) = \sqrt{x}$ e $g(x)$ = cos x que são funções contínuas.

Seção 1 - páginas 254 a 256

1. **(a)** Sim, pois podemos usar o Teorema do Valor Intermediário, já que cos x é contínua em $\mathbb{R}$ e cos $\frac{\pi}{2}$= 0 < 0, 9999999999 <.1 = cos 0 **(b)** Não, pois cos $x < 1 + 10^{-n}$ para qualquer númro x. e $n \geq 1$ (c) Sim, como a função $h(x) = x$ cos x é contínua no intervalo $[\frac{\pi}{2}, 2\pi]$ e $h(\frac{\pi}{2})$ =0 < 1 < $2\pi = h(2\pi)$, *o* TVI garante que $h(a) = 1$ para algum número $\frac{\pi}{2} < a < 2\pi$. Logo, a cos $a = 1 \Rightarrow (\frac{1}{a})-$ cos $a = 0$, já que $a \neq 0$.

2. Não, pois se $\frac{x^2+1}{x} = 1$, então $x^2 + 1 = x$, e essa equação que não tem solução.

3. O erro está no fato de que embora $f(x) = \frac{1}{x}$ seja uma função contínua, f não está definida em $x = 0$ e, portanto, f não é contínua no intervalo $[-1,1]$. Assim, não podemos aplicar o TVI para / nesse intervalo.

4. Novamente, nesse caso, o erro é que o TVI foi aplicado indevidamente, já que, embora a função esteja definida no intervalo [0, 2], ela não é contínua nesse intervalo, pois não é contínua em $x = 1$. De fato,

$$f(1+\frac{1}{n}) = (1+\frac{1}{n})^2 - 1 = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} \to 0.$$

Isto é, $1 + \frac{1}{n} \to 1$, mas $f(1+\frac{1}{n}) \to 0 \neq -2 = f(1)$.

5. **(a)** $x = 1,375$ **(b)** $x = \frac{1,375+1,5}{2} = 1,4375.$

6. $\frac{|0,1-0,4|}{2^n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{0,3}{2^n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow 300 < 2^n \Rightarrow n = 9.$

7. **(a)** Temos que $f(2) = -6 < 0 < 6 = f(4)$. Como f é contínua e $[2, 4] \subset dom(f)$ temos que f é contínua em $[2, 4]$ e, portanto, podemos usar o TVI para garantir que existe um $z \in (2,4)$ tal que $f(z) = 0$.

(b) $x_1 = 3$, $x_2 = 3,5$ $x_3 = 3,25$.

(c) $\frac{1}{4}$.
(d) $\frac{2}{2^n} < \frac{1}{10} \Rightarrow 10 < 2^{n-1} \Rightarrow n = 5.$

8. **(a)** Sim **(b)** $x_3 = 1,025$ **(c)** $\frac{0,2}{2^n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow 200 < 2^n \Rightarrow n = 8.$

9. $x_2 = 1,25$.

10. **(a)** três soluções **(b)** $x_5 = 2,125$.

11. **(a)** $x_4 = -0,4375$ **(b)** $n = 7$

Seção 2

1. (b).

2. a=1.

3. 1.

4. item (c), pois $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$

5. **(a)** 47 **(b)** $\frac{15}{4}$ **(c)** 0 **(d)** –4

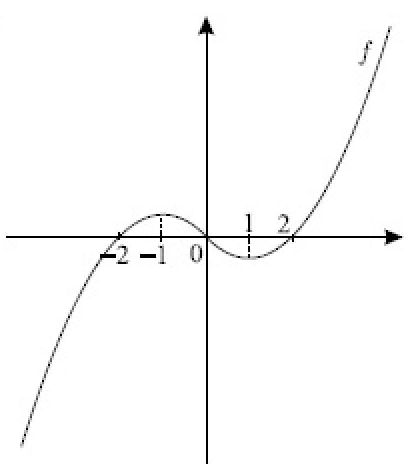
6. (b).

7. **(a)** sen$\frac{1}{2}$ **(b)** 4 sen$\frac{1}{2}$ **(c)** 0 **(d)** 0

8. $a_n = \frac{1}{n}$

Seção 3

1. **(a)** Sim **(b)**



2. **(a)** $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 7$ e $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 19$ **(b)** Não **(c)** Não

3. item (c).

4. **(a)** Para qualquer $a \in \mathbb{R}$. **(b)** $a = 2$ ou $a = -1$.

5. $a = 4$, $b = -2$.

6. $a = 0$, $b \in \mathbb{R}$, $c = 2$ ou $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c = 2$.

7. Não.

8. $a = -1$, $b = 0$.

9. $a = 2$.

10. Não.

Seção 4

1. **(a) V (b) V (c)F (d) V (e) F (f) F (g) F (h) V (i) F (j) F (k) F (l) V (m) F (n) V**

2. **(a)** ∞ **(b)** $-\infty$ **(c)** -1 **(d)** 0 **(e)** ∞ **(f)** $-\frac{7}{3}$ **(g)** 0 **(h)** ∞ **(i)** $-\infty$ **(j)** -1 **(k)** 1

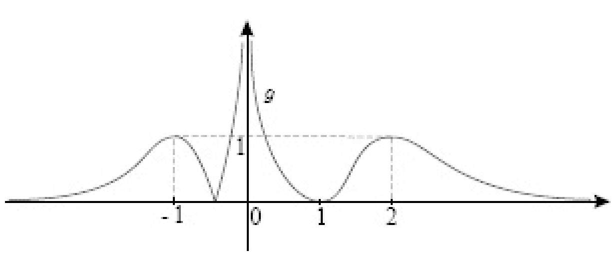
3. **(a)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{x-3} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{x-3} = 0$, $\lim\limits_{x\to3^+} \frac{4}{x-3} = \infty$, $\lim\limits_{x\to3^-} \frac{4}{x-3} = -\infty$.

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-2}{x^2-4x+4} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x^2-4x+4} = 0$, $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{x-2}{x^2-4x+4} = \infty$, $\lim\limits_{x\to2^-} \frac{x-2}{x^2-4x+4} = -\infty$.

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{|x-5|}{x-5} = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{|x-5|}{x-5} = -1$, $\lim\limits_{x\to5^+} \frac{|x-5|}{x-5} = 1$, $\lim\limits_{x\to5^-} \frac{|x-5|}{x-5} = -1$.

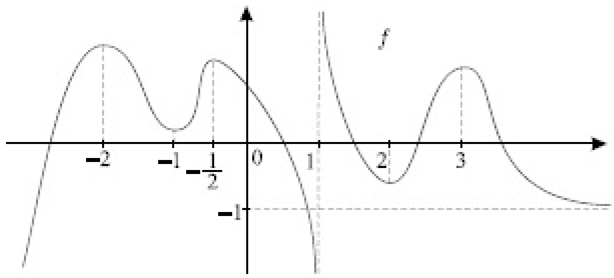
   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$, $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \infty$.

4. no mínimo três soluções.

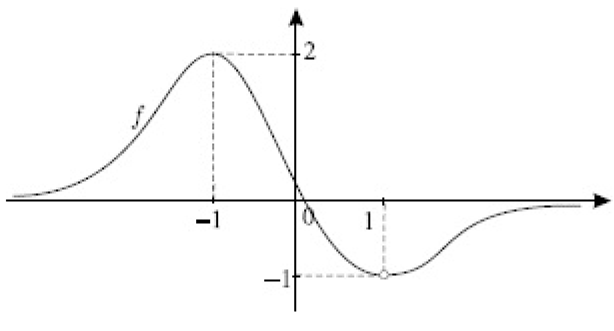
5. 

6. No mínimo duas soluções

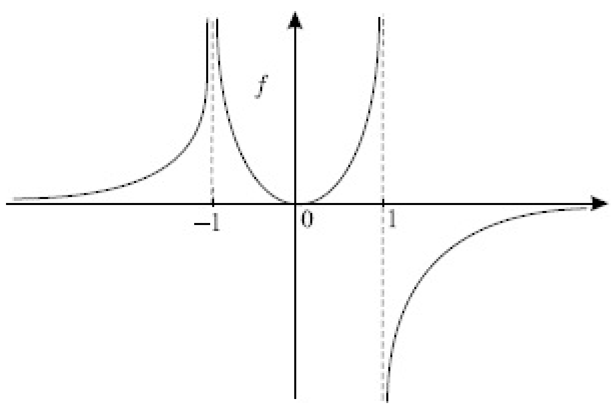
7.



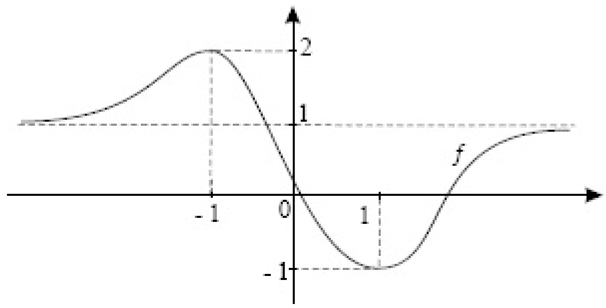
8.



9.



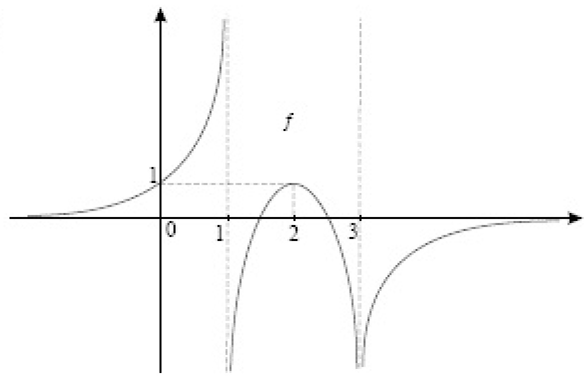
10.



11.

(a) $f(2) = 1$ **(b)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

(c)



12. Verdadeira, utilize o Teorema do Valor Intermediário.

13. **(a)** $k \in (3, \infty)$ ou $k \in (-\infty, -2)$ **(b)** $k \in (-\frac{2}{3}, 0]$ ou $k = -2$ ou $k = 3$ **(c)** $k \in (0,3)$ ou $k \in (-2, -\frac{2}{3}]$.

Capítulo 6
As Funções Elementares

Seção 1 - páginas 301 a 310

1. $y = 1$.
2. $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$.
3. $y = 0,25x + 2,75$.
4. $y = -3x - \frac{1}{2}$.
5. $y = 2x - 2$.
6. **(a)** $\alpha \neq \frac{4}{3}$, $\beta \in \mathbb{R}$ **(b)** $\alpha = \frac{4}{3}$, $\beta \neq \frac{9}{2}$ **(c)** $\alpha = \frac{4}{3}$, $\beta = \frac{9}{2}$.
7. 1 solução.
9. $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 13\}$.
10. $y = -\frac{1}{2}x + 1$ e $y = \frac{1}{2}x + 1$.
11. **(a)**$y = -4x + 5$ **(b)** $y = -\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}$ **(c)** $y = \frac{3}{7}x + \frac{26}{7}$ **(d)** $x = 1$
    (e) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$
12. **(a)** $(0,5), (\frac{5}{4}, 0)$ **(b)** $(0, \frac{2}{7}), (\frac{2}{3}, 0)$ **(c)** $(0, \frac{26}{7}), (-\frac{26}{3}, 0)$ **(d)** $(1,0)$
    (e) $(0, -\frac{2}{3}), (-2, 0)$
13. $y = x + 2\sqrt{2}$ e $y = x - 2\sqrt{2}$.
14. $y = \begin{cases} x+3 & \text{, se } -3 \leq x \leq -2, \\ -x-1 & \text{, se } -2 < x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{, se } \quad 0 < x \leq 2. \end{cases}$
15. $(\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$.
16. $A(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$.
17. $f(x) = \frac{24x}{4x+3}$, $dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{3}{4}\}$.
18. $\frac{27}{10}$.
19. $\frac{1}{6}$.
20. **(a)** B **(b)** C **(c)** A
24. **(a)** $s(x) = 1$ **(b)** $s(x) = 3$ **(c)** $s(x) = x + 1$ **(d)** $s(x) = 3x + 3$
    (e) $s(x) = 3x + 3$

25. **(a)** $\alpha = 1$, $y = x$ **(b)** $\alpha = 3$, $y = 3x + 1$ **(c)** $\alpha = 2$, $y = 2x - 1$
(d) $\alpha = 6$, $y = 6x - 3$ **(e)** $\alpha = 6, y = 6x - 2$

27. $x = -\frac{3}{2}, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

28. **(a)** $s(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$ **(b)** $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ **(c)** $s_a(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$, $\lim\limits_{x\to a} s_a(x) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$, $y = \frac{1}{2\sqrt{a}}x + \frac{\sqrt{a}}{a}$ **(d)** s_0 não tem limite em $x = 0$, pois $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$.

29. **(a)** $s_a(x) = \frac{|x|-|a|}{x-a}$
(b) $T(a) = \begin{cases} 1 & \text{, se } a > 0, \\ -1 & \text{, se } a < 0, \end{cases}$ $y = \begin{cases} x & \text{, se } a > 0, \\ -x & \text{, se } a < 0. \end{cases}$
(c) Não existe $\lim\limits_{x\to 0} s_0(x)$.

30. **(a)** $s_a(x) = \frac{|x^3|-|a^3|}{x-a}$
(b) $T(a) = \begin{cases} 3a^2 & \text{, se } a > 0, \\ -3a^2 & \text{, se } a < 0, \end{cases}$ $y = \begin{cases} 3a^2x - 2a^3 & \text{, se } a > 0, \\ -3a^2x + 2a^3 & \text{, se } a < 0. \end{cases}$
(c) $\lim\limits_{x\to 0} s_0(x) = 0$ e $y = 0$.

31. **(a)** $s_a(x) = \frac{|x^2-1|-|a^2-1|}{x-a}$
(b) $T(a) = \begin{cases} 2a & \text{, se } a < -1 \text{ ou } a > 1, \\ -2a & \text{, se } -1 < a < 1. \end{cases}$
$y = \begin{cases} 2ax - a^2 - 1 & \text{, se } a < -1 \text{ ou } a > 1 \\ -2ax + a^2 + 1 & \text{, se } -1 < a < 1 \end{cases}$
(c) Não existe $\lim\limits_{x\to 1} s_1(x)$ ou $\lim\limits_{x\to -1} s_{-1}(x)$.

32. **(a)** $y = 2x - 1$ **(b)** $s(x) = x + 1$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 1} s(x) = 2$ **(d)** $y = 2ax - a^2$
(e) $s_a(x) = x + a$ **(f)** $\lim\limits_{x\to a} s_a(x) = 2a$

33. **(a)** $(-2, 1)$ **(b)** $(-2, 1]$ **(c)** $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ **(d)** $(-\infty, -2) \cup [1, \infty)$

34. **(a)** $a = -2, b = 3$ **(b)** $(-\infty, -3) \cup [2, \infty)$ e $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$
(c) $a = -2$ e $b = 3$ ou $a = 3$ e $b = -2$ **(d)** Não

35. **(a)** $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$ **(b)** $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup [\frac{1}{2}, \infty)$ **(c)** $[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ **(d)** $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup (\frac{1}{2}, \infty)$

36. **(a)** $a = -6$ e $b = -3$ **(b)** $a = -2$ e $b = -9$ **(c)** Não é possivel.

37. **(a)** Não é possível **(b)** Não é possível **(c)** $a = 6$ e $b = -3$.

38. **(a)** $a = -\frac{2}{3}$ e $b = -3$. **(b)** $a = -2$ e $b = -1$. **(c)** Não é possível.

39. **(a)** Não é possível. **(b)** Não é possível. **(c)** $a = -\frac{2}{3}$ e $b = 3$.

40. **(a)** Não é possivel. **(b)** $a = -1$ e $b = 3$.

45. **(a)** Sim, **(b)** Sim, **(c)** Sim **(d)** Sim **(e)** Não.

Seção 1 - páginas 327 a 330

1. Quatro, três, duas, uma ou zero interseções.

2. Verdadeira.

3. Existe um ponto de interseção.

4. $p(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) + (2x+1)$.

5. $p(x) = (x-1)^2(x-2)^2 + (2x+1)$.

6. $x = -3$, $x = -2$ e $x = -1$.

7. **(a)** 1 **(b)** 5

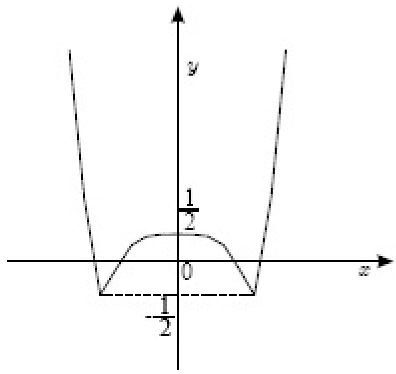
8. **(a)** $-\infty$ **(b)** ∞ (c) ∞ (d) 0 (e) $\frac{7}{2}$

10. **(a)** F **(b)** F

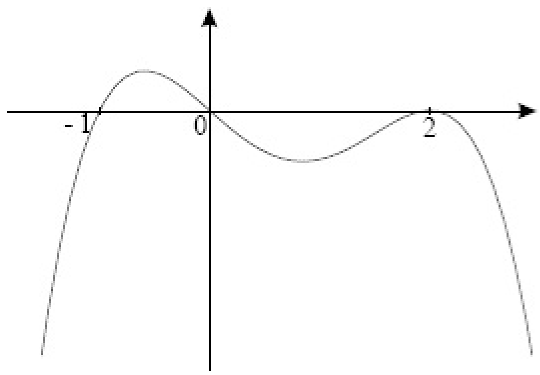
11. $x^3 - 3x^2 + x = 0$.

12. (c).

13. **(b)** **(b)** 2 soluções.



14.



15. $A(\frac{1}{2}, 0)$, $B(\frac{1+\sqrt{17}}{4}, \frac{\sqrt{17}-1}{8})$, $C(0, -\frac{1}{4})$, $D(-\frac{1}{2}, 0)$, $E(1, 0)$.

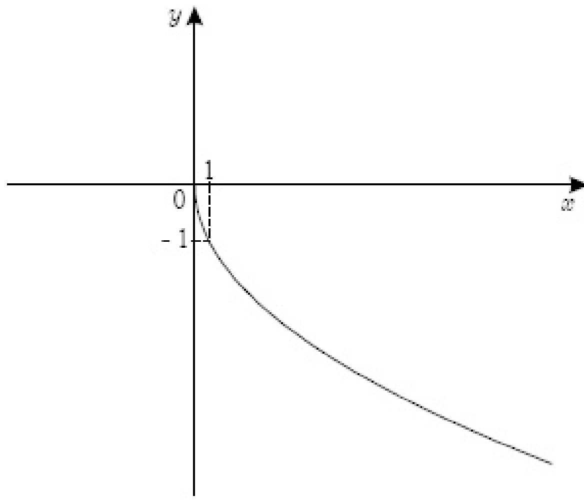
16. $p(x) = 2(x + 1)^3(3 - x)$.

17. $p_1(x) = (x+2)^2(x-3)^2$, $p_2(x) = \frac{(x+2)^4(x-3)^4}{36}$..

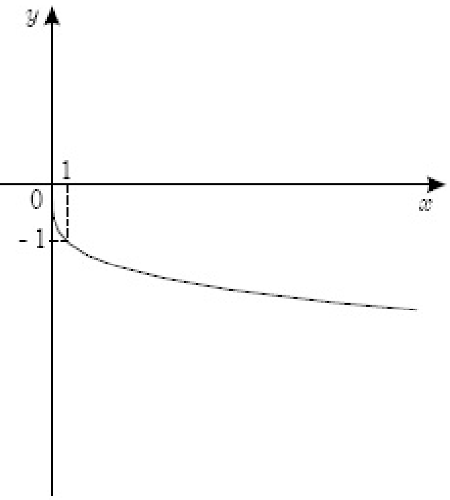
18. $p(x) =$ $p(x) = \frac{(x-2)^2}{12}$.

Seção 1 - páginas 344 a 346

1.

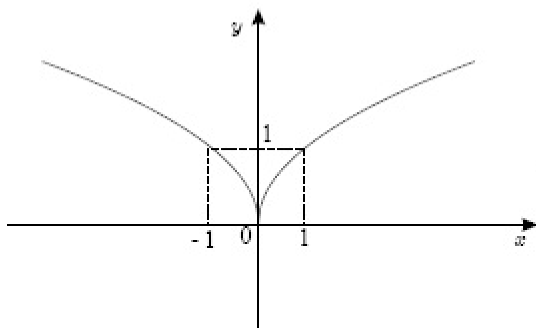


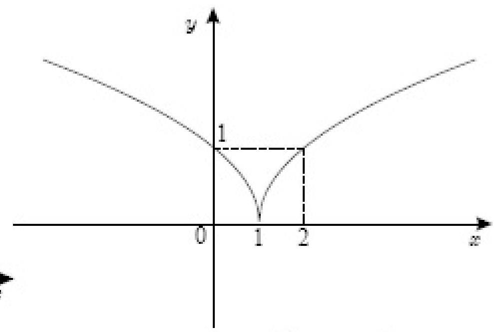
$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$



$f^{-1}(x) = -\sqrt[4]{x}$

2.

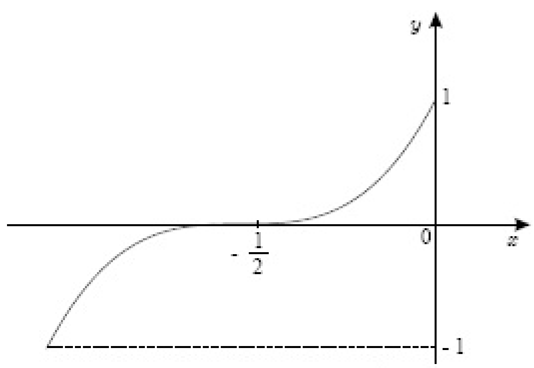




$f(x) = \sqrt{|x-1|}$

3. **(a)** $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$ **(b)** $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{3}{4}$

4.



$f(x) = (2x+1)^3$

5. uma solução.

6. duas soluções em ambos os casos.

8. **(a) V** **(b) F** **(c) V** **(d) F** **(e) F**

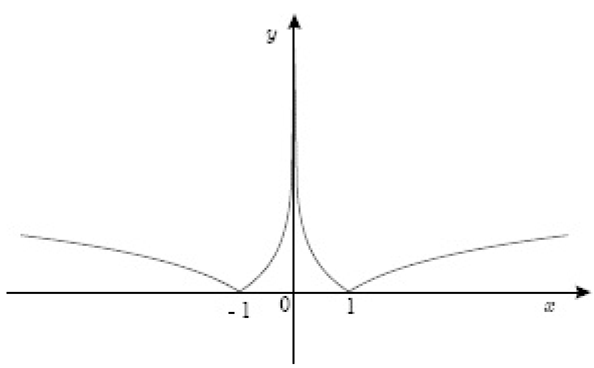
9. **(a)** $0,\ 1,\ -1$ **(b)** $0,\ 1,\ -1$ **(c)** $0,\ -1,\ -2,\ -3$ **(d)** $0,\ -1,\ -2,$
(a) $0,\ 1,\ -1$ **(b)** $0,\ 1,\ -1$ **(c)** $0,\ -1,\ -2,\ -3$
(e).0, -3
(d) $0,\ -1,\ -2,\ \frac{-5-\sqrt{17}}{2},\ \frac{-5+\sqrt{17}}{2}$ **(e)** .0, -3

10. **(a)** 6 **(b)** 7 **(c)** 1 **(d)** 8 **(e)** 2 **(f)** 4 **(g)** 5 **(h)**3

Seção 2

1. **(a)** F, contra-exemplo $x = -2$ **(b)** F, contra-exemplo $x = 1$

2. quatro soluções: $x = -e$, $x = e$, $x = -\frac{1}{e}$ e $x = \frac{1}{e}$.



3. **(a)** $\lim_{x\to -1} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ **(b)** $x = 0$ e $x = -2$ **(c)** g é uma translação horizontal, de 1 unidade para a esquerda, do gráfico do exercício anterior. **(d)** Quatro soluções.

4. **(a)** $x = 1$ **(b)** $x = 1$ ou $x = -1$ **(c)** $x = 1$ ou $x = 0$ **(d)** $x = -1$ ou $x = 0$ **(e)** $x = 0$ **(f)** $x = -2$ ou $x = 0$ **(g)** $x = 0$ ou $x = \sqrt{3\ln 2}$ ou $x = -\sqrt{3\ln 2}$

5. $y = -1 - e^{x3-1}$.

6. **(a)** 1 **(b)** 1 **(c)** 1 **(d)** 0 **(e)** ∞ **(f)** $-\infty$

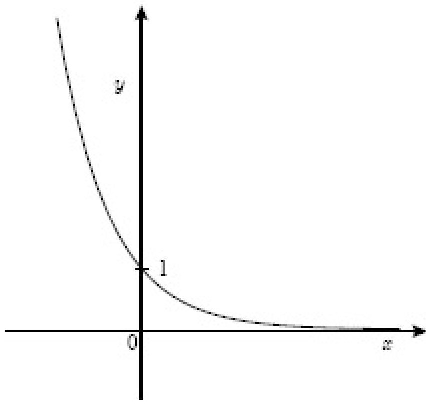
7. **(a)** $x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ ou $x = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ ou $x = 1$ **(b)** $x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ ou $x = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ ou $x = 1$

8. (c)

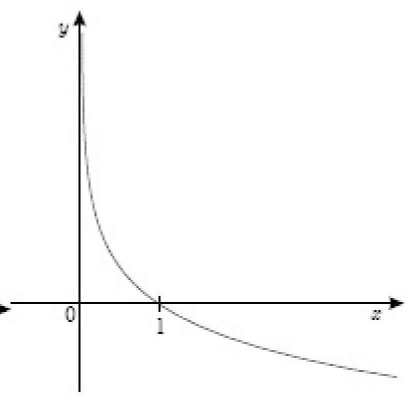
9. $y(x) = e^{x^3-1}$.

10.

(a)

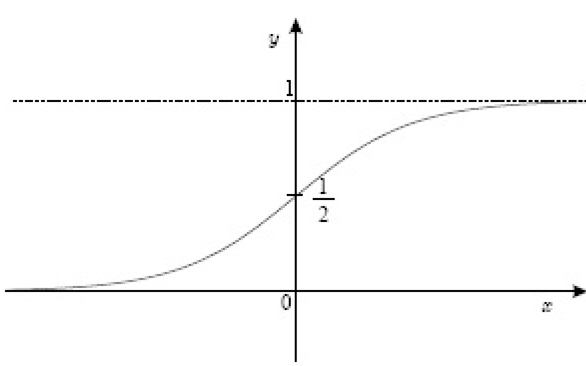


$f(x) = e^{-x}$

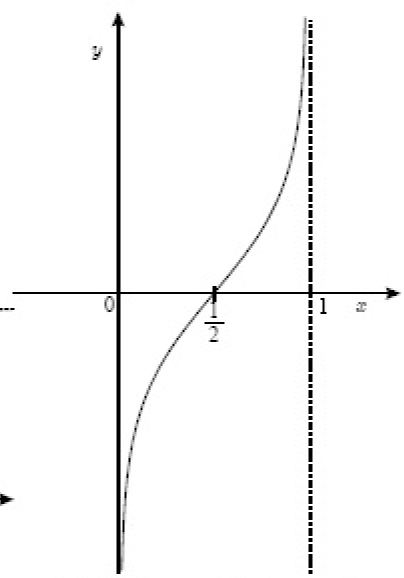


$f^{-1}(x) = -\ln x$

(b)



$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$



$f^{-1}(x) = -\ln(\frac{1}{x} - 1)$

11. 42.3586.

13. **(a) F (b) F**

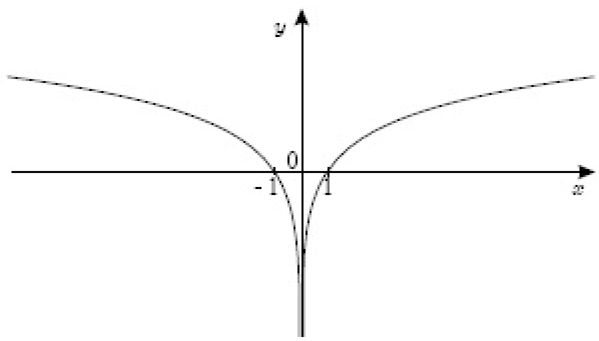
14. **(a)** 0 **(b)** **(a)** 0 **(b)** $e^{-\frac{1}{25}}$ **(c)** $-\infty$ **(c)** $-\infty$

15. **(a)** $\{x \in \mathbb{R} | \, x > 1\}$ **(b)** $1 + e^b$ ou $1 - e^b$

16. **(a)** $\frac{1+\ln 2}{3}$ **(b)** $f^{-1}(x) = \frac{1+\ln x}{3}$

18. **(a)** $f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}, g^{-1}(x) = -e^{\frac{x}{2}}$ **(b)** Sim **(c)** Não **(d)** Sim **(e)** Não

(f)



19. **(a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ ou } x < -1\}$ **(b)** $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

20. $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{1+e^2}$ ou $x = -\sqrt{1+e^2}$

Seção 3

1. **(a)** $x = k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $-6 < k < 6$

   (b) $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $-6 < k < 5$

   (c) $t = \frac{k\pi}{3}$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $-14 < k < 14$

   (d) $x = \frac{1+k\pi}{2}$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $-9 < k < 9$

   (e) $\theta = \frac{(4n+1)\pi}{2}$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $-3 < k <$

   (f) $x = \frac{(4n+1)\pi}{2}$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $-2 < k < 3$

   (g) $x = 2n\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $-3 < k < 3$

   (h) $x = (2n+1)\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $-3 < k < 2$

   (i) $x = \frac{1}{2} + \frac{(4n+1)\pi}{4}$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $-5 < k < 4$

   (j) $x = \frac{1}{2} + \frac{(2n+1)\pi}{4}$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $-9 < k < 8$.

2. **(a)** -1 **(b)** $\frac{\cos 5}{11}$ **(c)** 1 **(d)** ∞ **(e)** 1 **(f)** 0

3. **(a)** $-1, 1, \frac{k\pi}{2}$ onde $k \in \mathbb{Z}$. **(b)** $-1, 1, k\frac{\pi}{2}$ onde $k \in \mathbb{Z}$ e $k \neq 0$.

6. **(a)** 9 **(b)** $\frac{3}{4}$ **(c)** $\frac{5}{6}$ **(d)** 2 **(e)** 0 **(f)** 0 **(g)** $-\frac{9}{16}$

8. $\cos \frac{\pi(x-1)}{2}$.

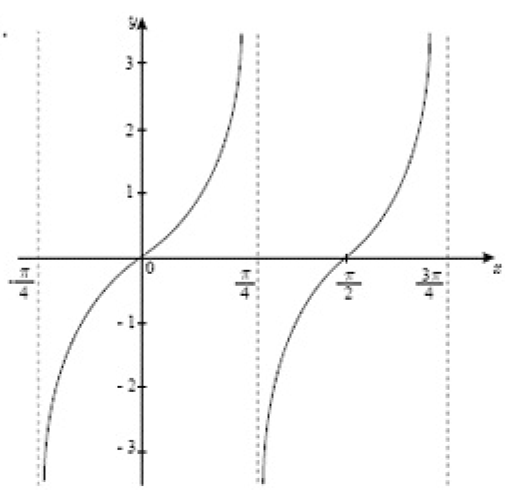
9. $c = 1$.

10. $c = 2$.

12. **(a)** $a = 2, b = 4, c = \dfrac{\pi}{2}$ **(b)** $a = -1, b = 2, c = 0$ **(c)** $a = 3, b = \frac{\pi}{2}, c = 0$ **(d)** $a = 1, b = \frac{\pi}{4}$

13. $x = \frac{\pi}{4}, x = -\frac{\pi}{4}$.

14. Período: $\frac{\pi}{2}$.

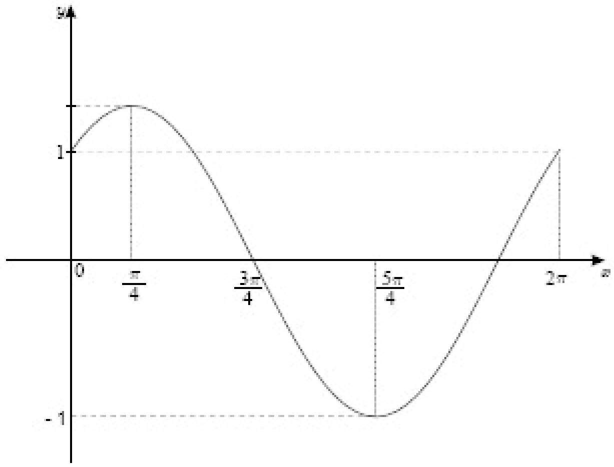


16. $1 + \operatorname{cotg}^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x$.

17.

(a) $c = \pm\sqrt{a^2+b^2}$ e $d = \text{arcsen}(\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$

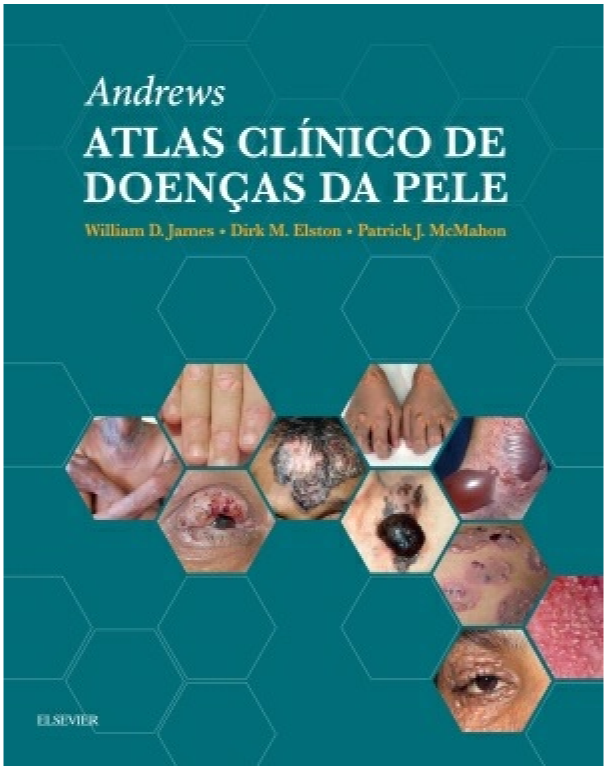
(b)



18. $x = \cos b$ e $0 \leq b \leq \pi$

$\Rightarrow x = \cos b = \cos(-b) = \text{ sen}\,(\frac{\pi}{2} - b)$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - b \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \text{arcsen}\, x = \frac{\pi}{2} - b \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \text{arcsen}\, \frac{\pi}{2} = b = \arccos x.$


Andrews
ATLAS CLÍNICO DE
DOENÇAS DA PELE
William D. James • Dirk M. Elston • Patrick J. McMahon
ELSEVIER

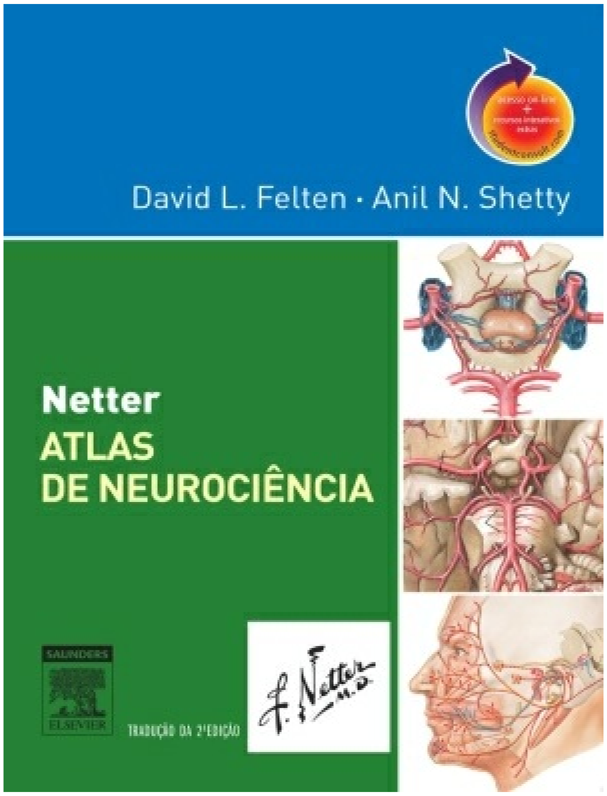
Andrews atlas clínico de doenças da pele

James, William D.

9788535290295
624 páginas

Compre agora e leia

Este livro apresenta uma coleção de mais de 3.000 imagens de alta qualidade, incluindo novas doenças e condições raras, além de cabelo, unha e descobertas na membrana mucosa para atender as necessidades dos dermatologistas no momento do diagnóstico. Apresenta ainda um texto introdutório conciso para cada capítulo com uma visão geral e compreensiva para auxiliar no diagnóstico.Veja mais de 3.000 fotografias coloridas de alta qualidade que retratam o aspecto completo de doenças da pele em todos os tipos de pele em adultos, crianças e recém-nascidos; Destaca uma grande variedade de subtipos de condições comuns, tais como lichen planus, granuloma annulare e psoríase; Novas descobertas de doenças em cabelo, unha e membrana mucosa são apresentados no livro; Inclui representações de importantes condições sistêmicas como sarcoidose, lúpus eritematoso e doenças infecciosas; Apresenta imagens nunca antes publicadas contribuídas por 54 líderes globais em dermatologia; Texto introdutório conciso em cada capítulo fornece aos leitores uma visão geral rápida e compreensiva da doença abordada.


David L. Felten · Anil N. Shetty
Netter
ATLAS
DE NEUROCIÊNCIA
SAUNDERS
ELSEVIER
TRADUÇÃO DA 2ªEDIÇÃO

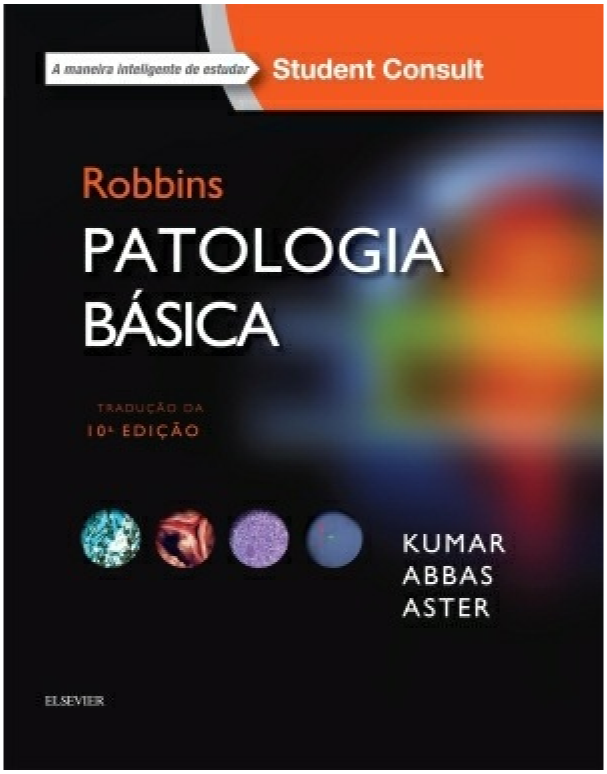
Netter atlas de neurociência

Felten, David L.

9788535246261

464 páginas

A nova edição do Netter Atlas de Neurociência oferece rica orientação visual, combinada a um texto conciso para ajudar você a dominar os princípios complexos, porém importantes, da neurociência.Uma cobertura de fácil entendimento dividida em três partes — uma visão geral do sistema nervoso, neurociência regional e neurociência sistêmica — permite o estudo das estruturas e sistemas neurais em múltiplos contextos. No conteúdo, você encontrará:• Informações atualizadas e novas figuras que refletem os atuais conhecimentos dos componentes neurais e de tecido conjuntivo, regiões e sistemas do cérebro, medula espinal e periferia para garantir que você conheça os avanços mais recentes.• Novas imagens coloridas em 3D de vias comissurais, de associação e de projeção do cérebro.• Quase 400 ilustrações com a excelência e o estilo Netter que destacam os conceitos-chave da neurociência e as correlações clínicas, proporcionando uma visão geral rápida e fácil de memorizar da anatomia, da função e da relevância clínica.• Imagens de alta qualidade — Imagens de Ressonância Magnética (RM) de alta resolução nos planos coronal e axial (horizontal), além de cortes transversais do tronco encefálico — bem como angiografia e venografia por RM e arteriografia clássica — o que oferece uma melhor perspectiva da complexidade do sistema nervoso.• Anatomia esquemática transversa do tronco encefálico e anatomia cerebral axial e coronal — com RM — para melhor ilustrar a correlação entre neuroanatomia e neurologia.• Uma organização regional do sistema nervoso periférico, da medula espinal, do tronco encefálico, cerebelo e prosencéfalo — e uma organização sistêmica dos sistemas sensitivos, sistemas motores (incluindo o cerebelo e os núcleos da base) e dos sistemas límbicos/hipotalâmicos/autonômicos — que torna as referências mais fáceis e mais eficientes.• Novos quadros de correlação clínica que enfatizam a aplicação clínica das neurociências fundamentais.A compra deste livro permite acesso gratuito ao site studentconsult.com, um site com ilustrações para download para uso pessoal, links para material de referência adicional e conteúdo original do livro em inglês.


A maneira inteligente de estudar
Student Consult
Robbins
PATOLOGIA
BÁSICA
TRADUÇÃO DA
10ª EDIÇÃO
KUMAR
ABBAS
ASTER
ELSEVIER

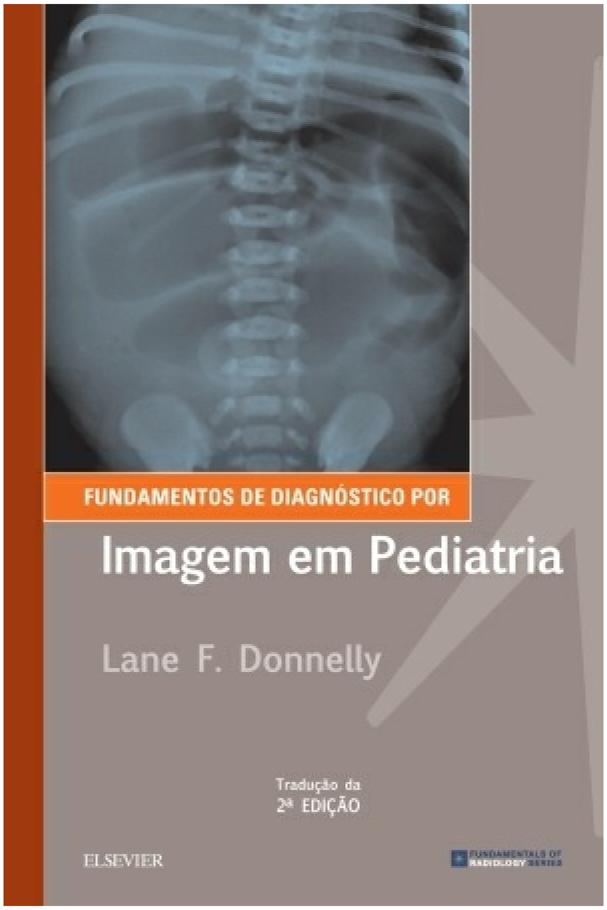
Robbins Patologia Básica

Kumar, Vinay
9788535288551
952 páginas

Compre agora e leia

Parte da confiável família Robbins e Cotran, Robbins Patologia Básica 10ª edição proporciona uma visão geral bem ilustrada, concisa e de leitura agradável dos princípios de patologia humana, ideal para os atarefados estudantes de hoje em dia. Esta edição cuidadosamente atualizada continua a ter forte ênfase na patogênese e nas características clínicas da doença, acrescentando novas ilustrações e diagramas mais esquemáticos para ajudar ainda mais no resumo dos principais processos patológicos e expandir o já impressionante programa de ilustrações.

Compre agora e leia

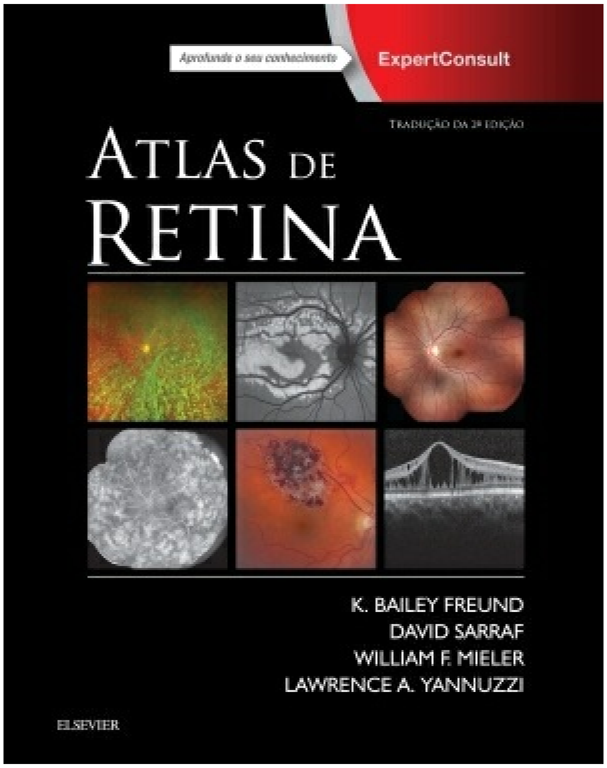

FUNDAMENTOS DE DIAGNÓSTICO POR
Imagem em Pediatria
Lane F. Donnelly
Tradução da
2ª EDIÇÃO
ELSEVIER
FUNDAMENTALS OF RADIOLOGY SERIES

Fundamentos de Diagnóstico por Imagem em Pediatria

Donnelly, Lane F.

9788535289121
376 páginas

Realize com segurança e interprete com precisão os estudos de imagem pediátrica com este recurso conciso e altamente ilustrado! Fundamentos de Diagnóstico por Imagem em Pediatria, 2ª edição, abrange os conceitos essenciais que residentes e profissionais precisam dominar, estabelecendo uma base sólida para a compreensão do básico e a realização de diagnósticos radiológicos precisos. Este título, fácil de usar na série Fundamentos de Radiologia, enfatiza técnicas avançadas de imagem, incluindo aplicações neurológicas, ao mesmo tempo em que destaca a anatomia básica necessária para entender essa complexa especialidade.• Novas informações revisadas sobre temas de qualidade e de segurança, neuroimagem, ultrassonografia em imagens pediátricas e muito mais. • Pela primeira vez especialistas adicionais fornecem atualizações em suas áreas: imagens neurológicas, musculoesqueléticas, cardíacas, torácicas e genitourinárias. • Cerca de 650 imagens digitais clinicamente relevantes e de alta qualidade demonstram, claramente, conceitos, técnicas e habilidades de interpretação essenciais. • Temas avançados de RM, como a enterografia por RM, a urografia por RM, a TC e a RM cardíacas, são discutidos minuciosamente. • Textos, tabelas e imagens acessíveis ao leitor facilitam e simplificam consultas a referências. • Editado por Lane F. Donnelly, MD, agraciado com o Prêmio 2009 Singleton-Taybi da Sociedade de Radiologia Pediátrica pela dedicação profissional à educação médica.


Aprofunde o seu conhecimento
ExpertConsult
TRADUÇÃO DA 2ª EDIÇÃO
ATLAS DE RETINA
K. BAILEY FREUND
DAVID SARRAF
WILLIAM F. MIELER
LAWRENCE A. YANNUZZI
ELSEVIER

Atlas de retina

Freund, K. Bailey
9788535289749
1200 páginas

[Compre agora e leia]

A oftalmologia é uma especialidade composta por várias subespecialidades, dentre as quais a Retina é a que concentra a maior parte das pesquisas com novas ferramentas diagnósticas e terapêuticas. A fim de termos em nosso catálogo a segunda edição do livro referência de Retina, que é utilizado como base de estudo para os residentes e retinólogos da especialidade. A obra é escrita pelos principais nomes em Otorrinolaringologia internacionalmente conhecidos. Essa segunda edição foi totalmente revista e possui 1200 páginas (250 páginas a mais) e mais de 5.000 imagens.•Guia visual completo para imagens avançadas da retina e diagnóstico de todo o espectro de doenças da retina, incluindo fases precoces e tardias da doença; •Os principais nomes da Oftalmologia internacional; •Expert Consult ™ eBook versão incluída com a compra. Esta experiência aprimorada do eBook permite pesquisar todo o texto, figuras e referências do livro em uma variedade de dispositivos; •Possui mais de 5000 imagens; •Melhora a compreensão apresentando modalidades de imagem de comparação, layouts compostos, vistas de alta potência, visuais panorâmicas de doenças e áreas ampliadas selecionadas para aprimorar os principais achados e padrões de doenças; •Possui codificação de cores para diferentes técnicas de imagem, bem como flechas simples, rótulos e imagens ampliadas que apontam para lesões e complexidades importantes.• Abrange todos os métodos atuais de imagem da retina, incluindo: tomografia de coerência óptica (OCT), angiografia verde de indocinina, angiografia fluoresceníca e autofluorescência de fundo.• Descreve e explica a expansão dos usos de OCT, incluindo o domínio espectral e o OCT em face, e as modalidades evolutivas de imagem retiniana, como a fotografia de fundo ultra-amplo, angiografia e autofluorescência.• Apresenta um time seleto de especialistas, todos são verdadeiros líderes internacionais nas imagens de retina, e contribuíram com um acervo diverso de casos comuns e raros.