FB online

MATEMÁTICA

FRENTE: MATEMÁTICA I

PROFESSOR(A): FABRÍCIO MAIA

EAD – ITA/IME

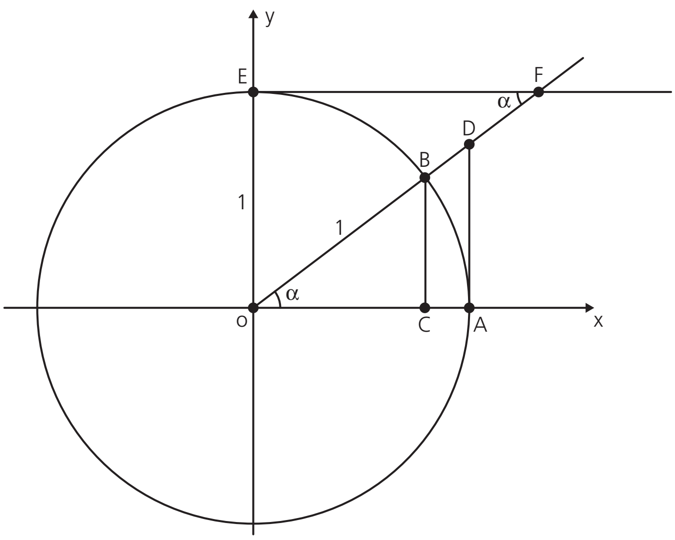
AULAS 06 E 07

ASSUNTO: CICLO TRIGONOMÉTRICO, RELAÇÃO FUNDAMENTAL E REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

Resumo Teórico

Ciclo Trigonométrico

A circunferência trigonométrica (circunferência com raio unitário cujo centro é origem de um sistema de coordenadas retangulares) nos permite a identificação das seis funções trigonométricas de um ângulo α, em que $\alpha \neq 0$, $\frac{\pi}{2}$, π e $\frac{3\pi}{2}$.



$$\text{Geometricamente} \rightarrow \begin{cases} \text{sen}\alpha = BC \rightarrow \text{cossec}\alpha = OF \\ \cos\alpha = OC \rightarrow \sec\alpha = OD \\ \text{tg}\alpha = AD \rightarrow \text{cotg}\alpha = EF \end{cases}$$

Identidades fundamentais

Como os três triângulos OBC, ODA e OFE da figura anterior são triângulos retângulos semelhantes (eles têm os mesmos ângulos), podemos escrever:

- $\Delta BCO \sim \Delta DAC \rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{OC}{OA} \rightarrow \frac{\text{sen}\alpha}{\text{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1} \rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$
- $\Delta BCO \sim \Delta DAC \rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OD} \Longrightarrow \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{1}{\sec\alpha} \rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$
- $\Delta BCO \sim \Delta OEF \rightarrow \frac{BC}{OE} = \frac{OB}{OF} \rightarrow \frac{\text{sen}\alpha}{1} = \frac{1}{\text{cossec}\alpha} \rightarrow \text{cossec}\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha}$
- $\Delta OEF \sim \Delta BCO \rightarrow \frac{EF}{OC} = \frac{OE}{BC} \rightarrow \frac{\text{cotg}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\text{sen}\alpha} \rightarrow \text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$
- $\Delta BCO \rightarrow \text{Pitágoras} \rightarrow OC^2 + BC^2 = OB^2 \rightarrow \cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$
- $\Delta DAO \rightarrow \text{Pitágoras} \rightarrow OA^2 + AD^2 = OD^2 \rightarrow 1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$
- $\Delta OEF \rightarrow \text{Pitágoras} \rightarrow OE^2 + EF^2 = OF^2 \rightarrow 1 + \text{cotg}^2\alpha = \text{cossec}^2\alpha$

Relações entre funções de arcos no 1º quadrante

	sen α = u	cos α = u	tg α = u	cotg α = u	sec α = u	cosec α = u
sen α	u	$\sqrt{1-u^2}$	$u/\sqrt{1+u^2}$	$1/\sqrt{1+u^2}$	$\sqrt{u^2-1}/u$	$1/u$
cos α	$\sqrt{1-u^2}$	u	$1/\sqrt{1+u^2}$	$u/\sqrt{1+u^2}$	$1/u$	$\sqrt{u^2-1}/u$
tg α	$u/\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{1-u^2}/u$	u	$1/u$	$\sqrt{u^2-1}$	$1/\sqrt{u^2-1}$
cotg α	$\sqrt{1-u^2}/u$	$u/\sqrt{1-u^2}$	$1/u$	u	$1/\sqrt{u^2-1}$	$\sqrt{u^2-1}$
sec α	$1/\sqrt{1-u^2}$	$1/u$	$\sqrt{1+u^2}$	$\sqrt{1+u^2}/u$	u	$u/\sqrt{u^2-1}$
cosec α	$1/u$	$1/\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{1+u^2}/u$	$\sqrt{1+u^2}$	$u/\sqrt{u^2-1}$	u

Funções trigonométricas de um ângulo qualquer em função de um ângulo α do 1º quadrante

	– α	90º ± α	180º ± α	270º ± α	k(360º) ± α k = inteiro
sen	– sen α	cos α	∓ sen α	– cos α	± sen α
cos	cos α	∓ sen α	– cos α	∓ sen α	cos α
tg	– tg α	∓ cotg α	± tg α	∓ cotg α	± tg α
cosec	– cosec α	sec α	∓ cosec α	– sec α	± cosec α
sec	sec α	∓ cosec α	– sec α	± cosec α	sec α
cotg	– cotg α	∓ tg α	± cotg α	∓ tg α	± cotg α

Exercícios

01. Sabendo que $\sqrt{7}\cdot\cos\theta + 1 = \text{tg}^2\,\theta$, então o valor de $\text{tg}^6\,\theta - \text{tg}^4\,\theta - \text{tg}^2\,\theta$ é igual a

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

02. Se $\sqrt{\sec^2 x + \sqrt[3]{\sec^4 x\cdot \text{tg}^2 x}} + \sqrt{\text{tg}^2 x + \sqrt[3]{\sec^2 x\cdot \text{tg}^4 x}} = 8.$

O valor de $(\sec x)^{\frac{2}{3}} + (\text{tg}x)^{\frac{2}{3}}$ é igual a

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

03. Demonstrar que é isósceles o triângulo ABC cujos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ verificam a relação:

$$\text{sen}\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\cdot\cos^3\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)\cdot\cos^3\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)$$

04. A afirmação $y = 1 + \cos x + \cos^2 x$ é verdadeira se, e somente se, **y** é tal que

A) $\frac{1}{4} \le y \le 2$

B) $-\frac{3}{4} \le y \le 0$

C) $-\frac{3}{4} \le y \le 2$

D) $\frac{3}{5} \le y \le 2$

E) $\frac{3}{4} \le y \le 3$

05. Sabe-se que uma das raízes da equação $y^2 - 9y + 8 = 0$ pode ser representada pela expressão $e^{(\text{sen}^2 x + \text{sen}^4 x + \text{sen}^6 x + \ldots)\cdot \text{Ln}2}$.

Sendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, o valor da razão $\frac{\cos x}{\cos x + \text{sen}x}$ é

A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

B) $\sqrt{3} - 1$

C) $\sqrt{3}$

D) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

E) $\sqrt{3} + 1$

06. O número $2 + \sqrt{3}$ é raiz da equação $x^2 - (\text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha)x + 1 = 0$. Calcule o valor de $392\cdot\text{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$.

a) 95
b) 96
c) 97
d) 98
e) 99

07. Determine o valor de $\frac{S}{\pi}$, sabendo que S é a soma, em radianos, de todas as soluções da equação $\cos x + \cos^5 x + \cos(7x) = 3$, contidas no intervalo $[0,14\pi]$.

A) 54
B) 55
C) 56
D) 57
E) 58

08. Se $S = \text{sen}\frac{\pi}{3} + \text{sen}\frac{2\pi}{3} + \text{sen}\frac{3\pi}{3} + \ldots + \text{sen}\frac{2018\pi}{3}$, então o valor de $S\cdot\sqrt{3}$ é igual a

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

09. Prove que existe **x** que satisfaz à equação $\text{sen}x = \frac{2ab}{a^2+b^2}$ quaisquer que sejam **a** e **b** reais, sendo $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

10. Se $3\text{sen}x + 4\cos x = 5$, com $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, então o valor de $2\text{sen}x + \cos x + 4\text{tg}x$ é

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

11. Se $10\text{sen}^4\alpha + 15\cos^4\alpha = 6$, então o valor da expressão $27\text{cossec}^6\alpha + 8\sec^6\alpha$ é igual a

A) 125
B) 150
C) 175
D) 200
E) 250

12. A expressão trigonométrica $\frac{1}{(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)^2} - \frac{4\text{tg}^2 x}{(1-\text{tg}^2 x)^2}$ para $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $x \neq \frac{\pi}{4}$, é igual a

A) sen(2x)
B) cos(2x)
C) 1
D) 0
E) sec(x)

13. Sejam **a** e **b** constantes reais positivas. Considere $x = a^2 \cdot \text{tgt} + 1$ e $y^2 = b^2 \cdot \sec^2 t - b^2$ onde $0 \le t < \frac{\pi}{2}$. Então uma relação entre **x** e **y** é dada por

A) $y = \frac{b}{a} \cdot (x-1)^2,\ x \ge 1$

B) $y = \frac{b^2}{a^4} \cdot (x-1)^2,\ x \ge 1$

C) $y = \frac{b}{a^2} \cdot (x-1),\ \forall x \in R$

D) $y = \frac{-b}{a^2} \cdot (x-1),\ x \ge 1$

E) $y = \frac{a^2}{b^4} \cdot (x-1),\ x \le 1$

14. Se M é tal que $M = \frac{tg^4\ x + sen^4\ x - tg^4\ x \cdot sen^4\ x}{(tgx + senx)\cdot(tgx - senx)}$, então:

A) M = 0
B) M = 1
C) M = 2
D) M = 3
E) M = 4

15. O valor de $tg^{10}\ x - 5 \cdot tg^8\ x \cdot \sec^2 x + 10 \cdot tg^6\ x \cdot \sec^4 x - 10 \cdot tg^4\ x \cdot \sec^6 x + 5 \cdot tg^2\ x \cdot \sec^8 x - \sec^{10} x$ para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, é

A) 1

B) $\frac{-\sec^2 x}{1+sen^2 x}$

C) – secx + tgx

D) – 1

E) 0

Gabarito

01	02	03	04	05
D	D	–	E	A
06	07	08	09	10
D	C	D	–	E
11	12	13	14	15
E	E	D	C	D

– Demonstração.

Anotações

SUPERVISOR/DIRETOR: MARCELO PENA – AUTOR: FABRÍCIO MAIA – Dig.: REJANE – Rev.: SARAH