Capítulo 5
Função quadrática

Para pensar

A trajetória de uma bola de futebol chutada obliquamente para cima é parabólica.

Exercícios propostos

1. **a)** $A = (4 + x)(5 + x)$

$\therefore\ A = x^2 + 9x + 20$

b) Para $x = 3$, temos:

$A = 3^2 + 9 \cdot 3 + 20 = 56$

Logo, a área da superfície, em metro quadrado, para $x = 3$ é 56 m^2.

c) Para $A = 35{,}75$, temos:

$35{,}75 = x^2 + 9x + 20 \Rightarrow x^2 + 9x - 15{,}75 = 0$

$\therefore\ x = 1{,}5$ ou $x = -10{,}5$

Como x representa uma medida, em metro, concluímos que $x = 1{,}5$ m.

2. Temos:

$$V = \left(1{,}50 - \frac{x}{100}\right) \cdot (10.000 + 100x)$$

$\therefore\ V = (150 - x) \cdot (100 + x)$

$\therefore\ V = 15.000 + 50x - x^2$

Alternativa **d**.

3. **a)** $y = x^2 - 2x - 8$

- Fazendo $y = 0$, temos:

  $x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = -2$

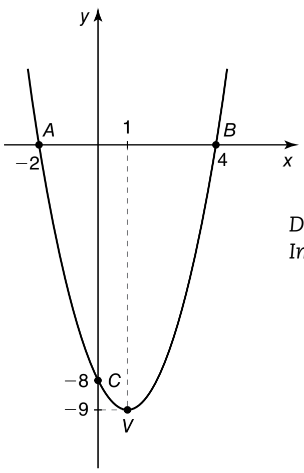
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $A(-2, 0)$ e $B(4, 0)$.
- Fazendo $x = 0$, temos:

  $y = -8$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $C(0, -8)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:

  $V\left(\frac{2}{2}, -\frac{36}{4}\right) = (1, -9)$

Então, esboçando o gráfico, temos:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -9\}$

b) $f(x) = x^2 + 2x + 6$

- Fazendo $y = 0$, temos:

  $x^2 + 2x + 6 = 0$

  $\Delta = -20 < 0$

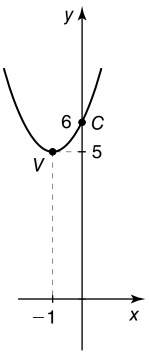
  Como $\Delta < 0$, a parábola não intercepta o eixo Ox.
- Fazendo $x = 0$, temos:

  $y = 6$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $C(0, 6)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:

  $V\left(-\frac{2}{2}, \frac{20}{4}\right) = (-1, 5)$

Então, esboçando o gráfico, temos:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 5\}$

c) $y = -x^2 + 3x + 10$

- Fazendo $y = 0$, temos:

  $-x^2 + 3x + 10 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 5$

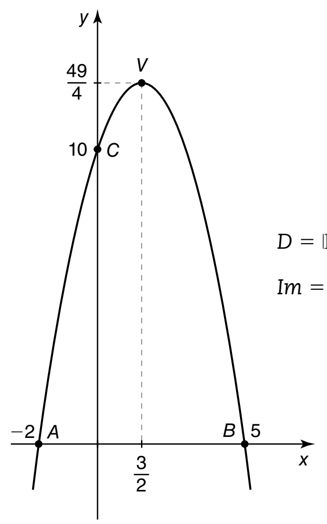
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $A(-2, 0)$ e $B(5, 0)$.
- Fazendo $x = 0$, temos:

  $y = 10$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $C(0, 10)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:

  $V\left(\frac{-3}{-2}, \frac{-49}{-4}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$

Então, esboçando o gráfico, temos:



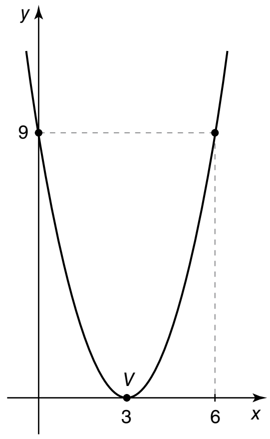
$D = \mathbb{R}$

$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{49}{4}\right\}$

d) $g(x) = x^2 - 6x + 9$

- Fazendo $y = 0$, temos:
  $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = 3$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox no ponto (3, 0).
- Fazendo $x = 0$, temos:
  $y = 9$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $C(0, 9)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(\frac{6}{2}, \frac{0}{4}\right) = (3, 0)$

Então, esboçando o gráfico, temos:

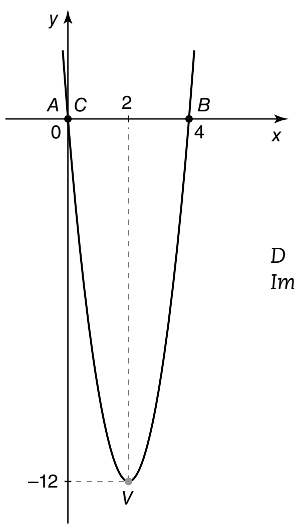


$D = \mathbb{R}$
$Im = \mathbb{R}_+$

e) $s(x) = 3x^2 - 12x$

- Fazendo $y = 0$, temos:
  $3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 4$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy nos pontos $A(0, 0)$ e $B(4, 0)$.
- Fazendo $x = 0$, temos:
  $y = 0$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox no ponto $C(0, 0)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(\frac{12}{6}, -\frac{144}{12}\right) = (2, -12)$

Então, esboçando o gráfico, temos:

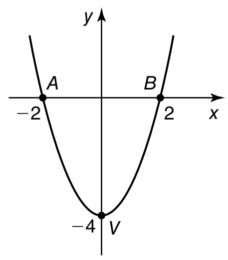


$D = \mathbb{R}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -12\}$

f) $y = x^2 - 4$

- Fazendo $y = 0$, temos:
  $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy nos pontos $A(-2, 0)$ e $B(2, 0)$.
- Fazendo $x = 0$, temos:
  $y = -4$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox no ponto $C(0, -4)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(0, -\frac{16}{4}\right) = (0, -4)$

Então, esboçando o gráfico, temos:



$D = \mathbb{R}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -4\}$

4. $x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 5$
Logo, $O(0, 0)$ e $A(5, 0)$.
Como o míssil não alterou sua trajetória pelo eixo Oy, temos que sua distância é a diferença das distâncias em Ox, assim:
$d_{OA} = 5 - 0 = 5$
Logo, a distância OA é 5 km.

5. Como a distância é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade, temos:
$d = k \cdot v^2$
Pelo gráfico, temos que o par (50, 32) pertence a essa função. Assim:
$32 = k \cdot 50^2 \Rightarrow k = \frac{32}{50^2}$
$\therefore\ d = \frac{32}{50^2}v^2$
Para $v = 100$, temos:
$d = \frac{32}{50^2}100^2 = 32 \cdot 2^2$
$\therefore\ d = 128$
Logo, a sua distância de frenagem é 128 metros.

6. Observando o gráfico de f, temos:
$(0,0) \in f \Rightarrow c = 0$
$(1, -6) \in f \Rightarrow a + b + c = -6$
$(5, 10) \in f \Rightarrow 25a + 5b + c = 10$
Assim, para determinar a, b e c, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} c = 0 \text{ (I)} \\ a + b + c = -6 \text{ (II)} \\ 25a + 5b + c = 10 \text{ (III)} \end{cases}$$

Substituindo c por 0 em (II) e (III):

$$\begin{cases} a + b = -6 \\ 25a + 5b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - b = 6 \\ 5a + b = 2 \end{cases}$$

$\therefore\ a = 2$ e $b = -8$
Logo, $a = 2$, $b = -8$ e $c = 0$.

7. $s = s_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$ (I) e $v = v_0 + at$ (II)

$v_0 = 60$ km/h
$v = 120$ km/h
$s = 360$ m $= 0{,}36$ km
$s_0 = 0$ m
Substituindo esses valores em (I) e (II):

$$\begin{cases} 0{,}36 = 60t + \frac{at^2}{2} \\ 120 = 60 + at \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}36 = 60t + \frac{at \cdot t}{2} \text{ (III)} \\ at = 60 \text{ (IV)} \end{cases}$$

Substituindo (IV) em (III):

$$0{,}36 = 60t + \frac{60t}{2} \Rightarrow 90t = 0{,}36$$

$\therefore\ t = 0{,}004$
Logo, durante o percurso de P ao radar transcorreu 0,004 hora, ou seja, 14,4 segundos.

8. Como uma parábola possui um eixo de simetria vertical, concluímos que outro par que pertence à função é o par $(-1, 8)$, que é simétrico ao par $(3, 8)$.
Assim, observando o gráfico de f, temos:
$(1,4) \in f \Rightarrow a + b + c = 4$
$(3,8) \in f \Rightarrow 9a + 3b + c = 8$
$(-1,8) \in f \Rightarrow a - b + c = 8$
Assim, para obter a função, precisamos determinar a, b e c, resolvendo o sistema:

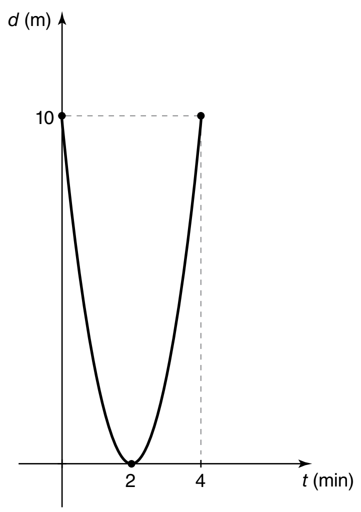
$$\begin{cases} a + b + c = 4 \text{ (I)} \\ 9a + 3b + c = 8 \text{ (II)} \\ a - b + c = 8 \text{ (III)} \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por (-1) e adicionando à equação (III):
$-2b = 4 \Rightarrow b = -2$
Substituindo b por -2 no sistema anterior:

$$\begin{cases} a + c = 6 \\ 9a + c = 14 \\ a + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 6 \\ 9a + c = 14 \end{cases}$$

$\therefore\ a = 1$ e $c = 5$
Logo, $a = 1$, $b = -2$ e $c = 5$.
$\therefore\ f(x) = x^2 - 2x + 5$

9.



Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$ a função do gráfico parabólico anterior, temos:
$(0, 10) \in f \Rightarrow 10 = c$
$(2, 0)1 \in f \Rightarrow 0 = 4a + 2b + c$
$(4, 10) \in f \Rightarrow 10 = 16a + 4b + c$

$$\therefore \begin{cases} c = 10 & \text{(I)} \\ 4a + 2b + c = 0 & \text{(II)} \\ 16a + 4b + c = 10 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo $c = 10$ em (II) e (III), temos:

$$\begin{cases} 4a + 2b = -10 \\ 16a + 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8a - 4b = 20 \\ 16a + 4b = 0 \end{cases}$$

Logo, obtemos $a = \frac{5}{2}$, $b = -10$ e $c = 10$.
$\therefore\ f(x) = \frac{5}{2}x^2 - 10x + 10$
A distância, em metro, três minutos após o início das medições de tempo é $f(3)$:

$$f(3) = \frac{45}{2} - 20 = \frac{5}{2} \Rightarrow f(3) = 2{,}5$$

Logo, a distância é 2,5 m.
Alternativa **d**.

10. Para que $f(x) = 4x^2 + kx + k + 5$ tenha um único ponto em comum com o eixo das abscissas, Δ deve ser zero.
Então, temos:
$k^2 - 4 \cdot 4 \cdot (k + 5) = 0 \Rightarrow k^2 - 16k - 80 = 0$
$\therefore\ k = -4$ ou $k = 20$
Como k deve ser uma constante real positiva, concluímos que $k = 20$.
Assim, $f(x) = 4x^2 + 20x + 25$. E para determinar as coordenadas do ponto em comum com o eixo das abscissas, devemos fazer $y = 0$:

$$4x^2 + 20x + 25 = 0 \Rightarrow x = -\frac{20}{8} = -\frac{5}{2}$$

Logo, as coordenadas desse ponto são $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$.

11. **I.** Na função $y = x^2 - 3x + 2$:
Fazemos $y = 0$. Assim, temos:
$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 1$
Logo, o gráfico da função $y = x^2 - 3x + 2$ intercepta o eixo Ox nos pontos $(2, 0)$ e $(1, 0)$.
Para $x = 0$, temos:
$y = 2$
Logo, o gráfico da função $y = x^2 - 3x + 2$ intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 2)$.
Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
$V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

II. Na função $y = -x + 5$, temos:
Para $y = 0 \Rightarrow x = 5$
Logo, o gráfico da função $y = -x + 5$ intercepta o eixo Ox no ponto $(5, 0)$.
Para $x = 0 \Rightarrow y = 5$
Logo, o gráfico da função $y = -x + 5$ intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 5)$.

III. Os pontos de intersecção dos gráficos são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = -x + 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = -x + 5$$

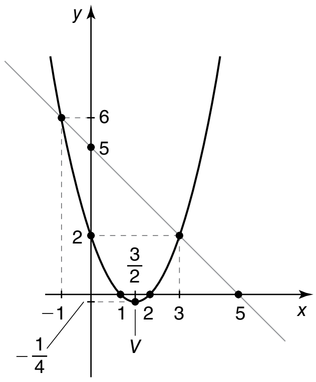
$\therefore\ x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -1$

Para $x = 3 \Rightarrow y = 2$.

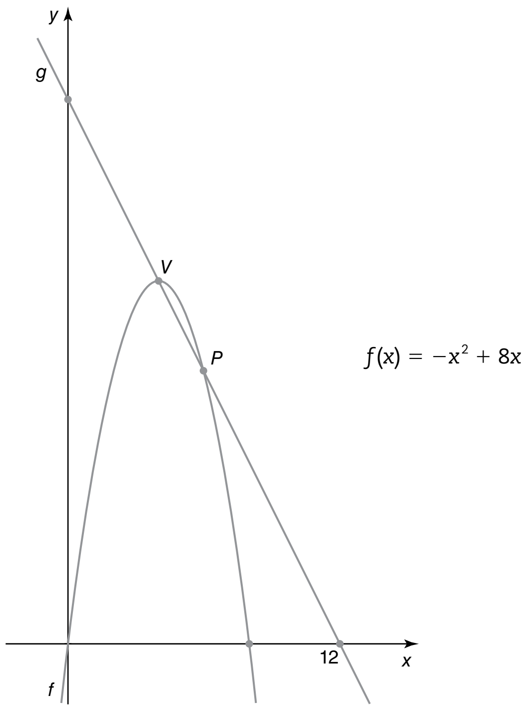
Para $x = -1 \Rightarrow y = 6$.

Logo, as funções se interceptam nos pontos $(-1, 6)$ e $(3, 2)$.

Assim, obtemos o gráfico:



12.



- Fazendo $y = 0$, temos:

  $-x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 8$

  Logo, a função f intercepta o eixo Ox nos pontos $(0, 0)$ e $(8, 0)$.

- Calculando as coordenadas do vértice V de f, temos:

  $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-8}{-2}, \frac{-64}{-4}\right) = (4, 16)$

- A reta representa a função $y = ax + b$ e passa pelos pontos $(4, 16)$ e $(12, 0)$. Então, temos o sistema:

  $\begin{cases} 16 = 4a + b \\ 0 = 12a + b \end{cases}$

  $16 = -8a \Rightarrow a = -2$ e $b = 24$

  Logo, $g(x) = -2x + 24$.

- Calculando a intersecção das funções $f(x)$ e $g(x)$, temos:

  $-x^2 + 8x = -2x + 24$

  $-x^2 + 10x - 24 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = 6$

  Logo, a abscissa de P é 6, pois 4 é a abscissa de V.

  Então, para $x = 6$ temos $y = 12$.

  $\therefore P(6, 12)$

Alternativa **a**.

13. a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 3x, \text{ se } x > 1 \end{cases}$

I. $-x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$

Logo, a parábola de equação $y = -x^2 + 4$ intercepta o eixo Ox nos pontos $(2, 0)$ e $(-2, 0)$.

Porém, neste caso, o ponto $(2, 0)$ não convém, pois $2 < 1$.

Para $x = 0$, temos:

$y = 4$

Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 4)$.

Calculando as coordenadas do vértice V da parábola, temos:

$V\left(0, \frac{-16}{-4}\right) \Rightarrow V(0, 4)$

Para $x = 1$, temos:

$y = 3$

Logo, a função f é da forma $f(x) = -x^2 + 4$, com $x \leqslant 1$, até o ponto $(1, 3)$.

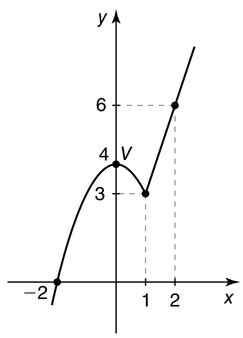
II. Sendo $y = 3x$ a equação de uma reta com $x > 1$, temos:

Para $x = 2 \Rightarrow y = 6$

Para $x = 1 \Rightarrow y = 3$

Note que o ponto $(1, 3)$ é um extremo aberto do gráfico.

Então, obtemos o gráfico:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \mathbb{R}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 2x - 1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$

I. Sendo $y = x^2 + 2x + 2$ a equação de uma parábola, temos:

$x^2 + 2x + 2 = 0$

$\Delta = -4 < 0$

Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox.

Fazendo $x = 0$, temos:

$y = 2$

Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 2)$.

Calculando as coordenadas do vértice V da parábola, temos:

$V\left(-\frac{2}{2}, \frac{4}{4}\right) \Rightarrow V(-1, 1)$

Fazendo $x = 1$, temos:

$y = 5$

Logo, a função g é da forma

$f(x) = x^2 + 2x + 2$, com $x \leqslant 1$, até o ponto $(1, 5)$.

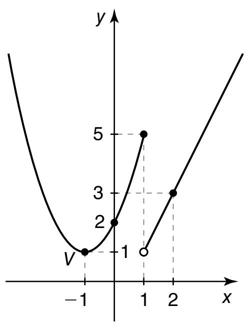
II. Sendo $y = 2x - 1$, com $x > 1$, temos:

Para $x = 1 \Rightarrow y = 1$

Para $x = 2 \Rightarrow y = 3$

Note que o ponto $(1, 1)$ é um extremo aberto do gráfico.

Portanto, obtemos o gráfico:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 1\}$

14. a) $y = 4x^2 + 2x - 2$

Como $y = 4x^2 + 2x - 2$ tem como gráfico uma parábola de concavidade para cima, calculando as coordenadas x_V e y_V do seu vértice V obtemos seu ponto mínimo:

- $y_V = -\frac{36}{16} = -\frac{9}{4}$

  Logo, o valor mínimo de $y = 4x^2 + 2x - 2$ é $y_V = -\frac{9}{4}$.

- $x_V = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$

  Logo, a abscissa do mínimo de $y = 4x^2 + 2x - 2$ é $x_V = -\frac{1}{4}$.

b) $y = -x^2 + 2x + 3$

Como $y = -x^2 + 2x + 3$ tem como gráfico uma parábola com a concavidade para baixo, calculando a ordenada y_V do seu vértice V obtemos seu valor máximo:

- $y_V = \frac{-16}{-4} = 4$

  Logo, o valor máximo de y é: $y_V = 4$

- $x_v = \frac{2}{2} = 1$

  Logo, a abscissa do mínimo de $y = -x^2 + 2x + 3$ é $x_v = 1$.

c) $y = 3x^2 - 12x$

Como $y = 3x^2 - 12x$ tem como gráfico uma parábola com a concavidade para cima, calculando as coordenadas x_V e y_V do seu vértice V obtemos seu ponto mínimo:

- $y_V = -\frac{144}{12} = -12$

  Logo, o valor mínimo de $y = 3x^2 - 12x$ é $y_V = -12$.

- $x_V = \frac{12}{6} = 2$

  Logo, a abscissa do mínimo de $y = 3x^2 - 12x$ é $x_V = 2$.

d) $y = -x^2 + x - \frac{1}{2}$

Como $y = -x^2 + x - \frac{1}{2}$ tem como gráfico uma parábola com a concavidade para baixo, calculando a ordenada y_V do seu vértice V obtemos seu valor máximo:

- $y_V = \frac{+1}{-4} = -\frac{1}{4}$

  Logo, o valor máximo de y é: $y_V = -\frac{1}{4}$

- $x_v = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

  Logo, a abscissa do mínimo de $y = -x^2 + x - \frac{1}{2}$ é $x_v = \frac{1}{2}$.

15. $f(x) = 2x^2 + x + m + 1$

Pelo enunciado, temos que o valor mínimo de f é $y_V = \frac{3}{4}$, que é a ordenada y do vértice V de f; por isso:

$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{-1 + 8m + 8}{8} = \frac{3}{4}$

$\therefore\ -1 + 8m + 8 = 6 \Rightarrow 8m = -1$

$\therefore\ m = -\frac{1}{8}$

Logo: $m = -\frac{1}{8}$

16. A função admite valor mínimo positivo se $k > 0$ e $\Delta < 0$, ou seja:

$\begin{cases} k > 0 \\ 4 - 20k < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k > \frac{1}{5} \end{cases}$

Logo: $k > \frac{1}{5}$

17. $v(r) = k(R^2 - r^2)$

a) $v(r) = 1.000[(0,2)^2 - r^2]$

$\therefore\ v(r) = 40 - 1.000r^2$

b) Para $r = 0,15$ na função obtida no item **a**:

$v(0,15) = 40 - 1.000(0,15)^2$

$\therefore\ v(15) = 17,5$

Logo, a velocidade do sangue para essa distância é de 17,5 centímetros por segundo.

c) $v(r) = -1.000r^2 + 40$

Como $v(r)$ tem como gráfico uma parábola com a concavidade para baixo, calculando a ordenada v_V do seu vértice V obtemos seu valor máximo:

$v_V = \frac{-16.000}{-4.000} = 40$

Logo, a velocidade máxima do sangue no interior da artéria é de 40 centímetros por segundo.

18. a) A parábola que contém a trajetória da bola é o gráfico de uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Como os pontos $(0, 0)$, $(12; 4,5)$ e $(36; 4,5)$ pertencem a esse gráfico, temos:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 4{,}5 = a \cdot 12^2 + b \cdot 12 + c \\ 4{,}5 = a \cdot 36^2 + b \cdot 6 + c \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{96}, b = \frac{1}{2} \text{ e } c = 0$$

Logo, $y = -\frac{x^2}{96} + \frac{x}{2}$.

b) A altura máxima, em metro, atingida pela bola é a ordenada y_v do vértice da parábola:

$$y_V = -\frac{\frac{1}{4}}{4 \cdot \left(-\frac{1}{96}\right)} \Rightarrow y_V = 6$$

Logo, a altura máxima atingida pela bola foi 6 m.

c) Calculando as raízes da função $y = -\frac{x^2}{96} + \frac{x}{2}$ obtemos $x = 0$ ou $x = 48$; logo, a distância d pedida, em metro, é dada por:

$d = 48 - 0 \Rightarrow d = 48$

19. Temos:

a) $R = (40 - x)(200 + 10x)$

$\therefore\ R = -10x^2 + 200x + 8.000$

b) A receita máxima é atingida no y_V, do vértice da parábola:

$$y_V = -\frac{360.000}{4 \cdot (-10)} \Rightarrow y_V = 9.000$$

Logo, a receita máxima mensal com a venda dessas camisetas é de R\$ 9.000,00.

20. Sendo x a medida dos lados do quadrado, y a largura do retângulo e 3y o comprimento do retângulo, temos:

$$4x + 8y = 140 \Rightarrow y = \frac{35 - x}{2} \qquad \text{(I)}$$

Considerando S(x) a soma das áreas dos currais, temos:

$S(x) = x^2 + 3y^2 \qquad$ (II)

Substituindo (I) em (II):

$$S(x) = x^2 + 3\left(\frac{35 - x}{2}\right)^2$$

$$S(x) = \frac{7x^2}{4} - \frac{210x}{4} + \frac{3.675}{4}$$

Como S(x) representa uma parábola de concavidade para cima, encontramos o valor do lado do quadrado calculando o valor da abscissa x_V do vértice V:

$$x_V = \frac{\frac{210}{4}}{2 \cdot \frac{7}{4}} = 15$$

Logo, o lado do quadrado mede 15 m.

Assim, pela equação (I) temos que y = 10 m.

Portanto, a área do curral quadrado é 225 m² e a área do curral retangular é 300 m².

21. Chamando de x e y as medidas, em metro, dos lados menor e maior do retângulo, e de A a sua área, temos o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 20 \\ A = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 20 - 2x \text{ (I)} \\ A = xy \text{ (II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II):

$A = x(20 - 2x)$

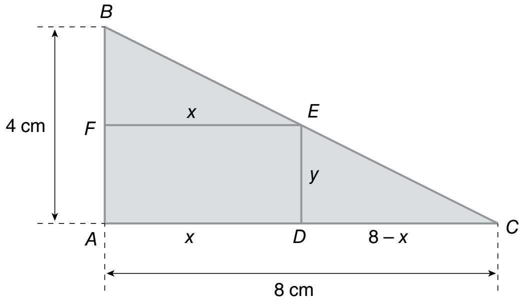
$\therefore\ A = -2x^2 + 20x$

A maior área é obtida no y_V do vértice da parábola:

$$y_V = -\frac{400}{4 \cdot (-2)} = 50$$

Logo, a maior área possível da região isolada é 50 m².

22. $\triangle ABC \sim \triangle DEC$



$$\therefore\ \frac{4}{y} = \frac{8}{8 - x}$$

$$\therefore\ y = \frac{8 - x}{2}$$

Indicando por S(x) a área do retângulo $ADEF$, temos:

$$S(x) = xy \Rightarrow S(x) = x\left(\frac{8 - x}{2}\right)$$

$$\therefore\ S(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x$$

O máximo valor possível de S(x) é:

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{(-2)} = 8$$

A área máxima que o retângulo pode ter é 8 cm².

23. a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

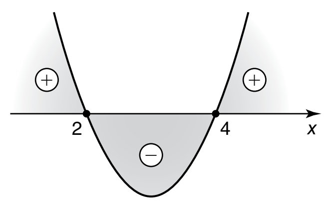
- Raízes de f:

  $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 4$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 2 e 4.

- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

  Esquematizando, temos:



Logo:

se $x = 2$ ou $x = 4$, então $f(x) = 0$;

se $2 < x < 4$, então $f(x) < 0$;

se $x < 2$ ou $x > 4$, então $f(x) > 0$.

b) $y = -x^2 - 2x + 3$

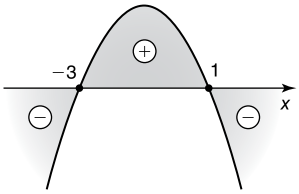
- Raízes de y:

  $-x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 1$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas −3 e 1.

- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo.

  Esquematizando, temos:



Logo:
se $x = -3$ ou $x = 1$, então $f(x) = 0$;
se $-3 < x < 1$, então $f(x) > 0$;
se $x < -3$ ou $x > 1$, então $f(x) < 0$.

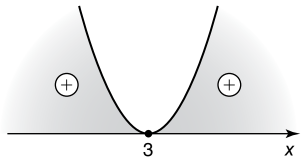
c) $g(x) = \dfrac{x^2}{3} - 2x + 3$

- Raízes de g:

  $\dfrac{x^2}{3} - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 3.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

  Esquematizando, temos:



Logo:
se $x = 3$, então $f(x) = 0$;
se $x \neq 3$, então $f(x) > 0$.

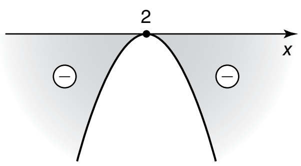
d) $h(x) = -\dfrac{x^2}{4} + x - 1$

- Raízes de h:

  $-\dfrac{x^2}{4} + x - 1 = 0 \Rightarrow x = 2$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 2.
- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo.

  Esquematizando, temos:



Logo:
se $x = 2$, então $f(x) = 0$;
se $x \neq 2$, então $f(x) < 0$.

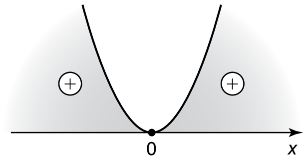
e) $y = 3x^2$

- Raízes de y:

  $3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 0.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

  Esquematizando, temos:



Logo:
se $x = 0$, então $f(x) = 0$;
se $x \neq 0$, então $f(x) > 0$.

24. a) $s(t) = t^2 - 5t + 4$

- Fazendo $s = 0$, temos:

  $t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = 1$ ou $t = 4$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $A(1,0)$ e $B(4,0)$.
- Fazendo $t = 0$, temos:

  $s = 4$

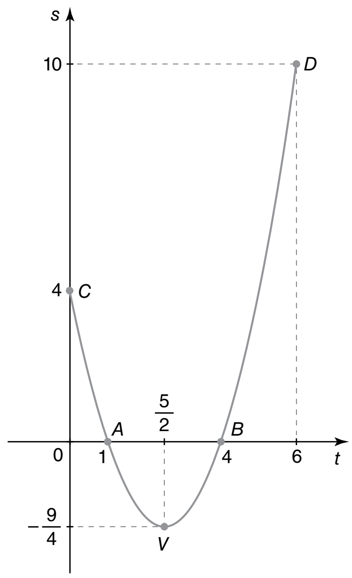
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $C(0,4)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:

  $V\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{9}{4}\right)$
- Fazendo $t = 6$, que é o extremo do intervalo dado, temos:

  $s = 10$

  Logo, a função tem o ponto $D(6, 10)$ como extremo fechado à direita. Note que o extremo fechado à esquerda é o ponto C.

Portanto, temos o gráfico:



b) $s(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 4 = 4$

Logo, no início da medição do tempo o espaço será de 4 m.

c) Conforme vimos no item **a**, temos que $s(t) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow t = 1$ ou $t = 4$; logo, o móvel esteve em pontos de espaço nulo nos instantes 1 s e 4 s.

d) Observando o gráfico do item **a**, temos que $s(t) > 0 \Rightarrow 0 \leqslant t < 1$ e $4 < t \leqslant 6$.

Logo o móvel esteve localizado em pontos de espaço positivo nos instantes t, em segundo, com $0 \leqslant t < 1$ e $4 < t \leqslant 6$.

e) Observando o gráfico do item **a**, temos que $s(t) < 0 \Rightarrow 1 < t < 4$.
Logo, o móvel esteve localizado em pontos de espaço negativo nos instantes t, em segundo, com $1 < t < 4$.

25. a) $x^2 + 3x - 10 > 0$

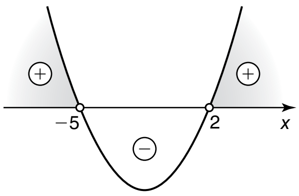
$f(x) = x^2 + 3x - 10$

- Raízes de f:

  $x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = -5$ ou $x = 2$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -5 e 2.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

  Esquematizando, temos:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 2\}$.

b) $-2x^2 + 7x - 3 \geqslant 0$

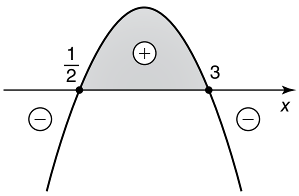
$f(x) = -2x^2 + 7x - 3$

- Raízes de f:

  $-2x^2 + 7x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = 3$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas $\frac{1}{2}$ e 3.
- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo.

  Esquematizando, temos:



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3\right\}$.

c) $4x^2 - 12x + 9 \leqslant 0$

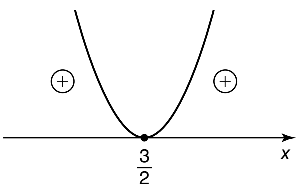
$f(x) = 4x^2 - 12x + 9$

- Raízes de f:

  $4x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

  Logo, a parábola tangencia o eixo Ox no ponto de abscissa $\frac{3}{2}$.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

  Esquematizando, temos:



Como $f(x)$ nunca é negativo, o conjunto solução é $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

d) $\frac{3x^2}{5} - \frac{3x}{2} \leqslant \frac{2x}{5} - 1 \Rightarrow 6x^2 - 15x \leqslant 4x - 10$

$\therefore\ 6x^2 - 19x + 10 \leqslant 0$

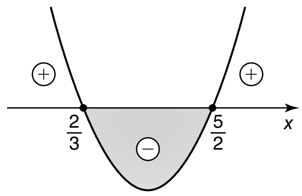
$f(x) = 6x^2 - 19x + 10$

- Raízes de f:

  $6x^2 - 19x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ ou $x = \frac{2}{3}$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas $\frac{5}{2}$ e $\frac{2}{3}$.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

  Esquematizando, temos:



Então: $f(x) \leqslant 0 \Rightarrow \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\right\}$.

e) $\frac{x^2}{3} + x > \frac{x^2}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{5}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 + 6x > 3x^2 + 4x + 5$

$\therefore\ -x^2 + 2x - 5 > 0$

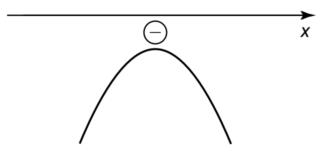
$f(x) = -x^2 + 2x - 5$

- Raízes de f:

  $-x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$

  Logo, a equação não tem raiz real e, portanto, a parábola não intercepta o eixo Ox.
- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo.

Esquematizando, temos:



Então, $f(x)$ é sempre negativa.

Logo: $S = \varnothing$

f) $(x^2 - 9)(x^2 - 7x + 10) < 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 - 9$ e

$g(x) = x^2 - 7x + 10$, temos:

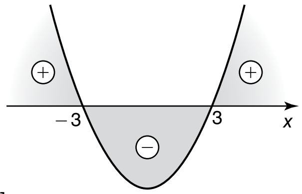
- Raízes de f:

  $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 3$

  Logo, o gráfico de f é uma parábola que intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -3 e 3.

- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

  Portanto, a variação de sinal de f é representada por:

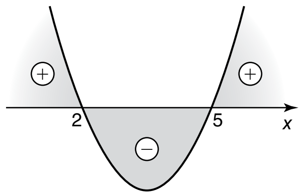


- Raízes de g:

  $x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 5$

  Logo, o gráfico de g é uma parábola que intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 2 e 5.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $f \cdot g$ em um quadro de sinais, temos:

	$x < -3$	$-3 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x < 5$	$x > 5$
f	+	−	−	+	+
g	+	+	−	−	+
$f \cdot g$	+	−	+	−	+

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o produto $f \cdot g$. Como nos interessa que o produto seja estritamente negativo, temos como conjunto solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 5\}$

g) $(x^2 - 1)(x^2 - x + 1) \leqslant 0$

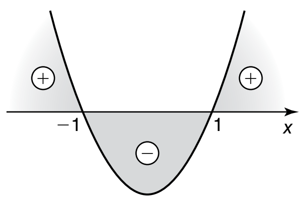
Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x^2 - x + 1$, temos:

- Raízes de f:

  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$

  Logo, o gráfico de f é uma parábola que intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa -1 e 1.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

  Portanto, a variação de sinal de f é representada por:

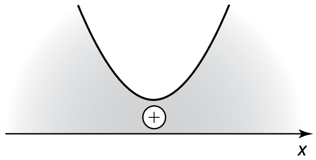


- Raízes de g:

  $x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$

  Logo, o gráfico de g é uma parábola que não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $f \cdot g$ em um quadro de sinais, temos:

	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
f	+	−	+
g	+	+	+
$f \cdot g$	+	−	+

Os sinais da última linha foram obtidos pela da regra de sinais para o produto $f \cdot g$. Como nos interessa que o produto seja negativo ou nulo, temos como conjunto solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

h) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 6x + 8} \leqslant 0$

Condição de existência:

$x^2 - 6x + 8 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$ e $x \neq 2$

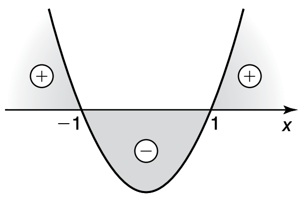
Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x^2 - 6x + 8$, temos:

- Raízes de f:

  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$

  Logo, o gráfico de f é uma parábola que intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa -1 e 1.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

  Portanto, a variação de sinal de f é representada por:

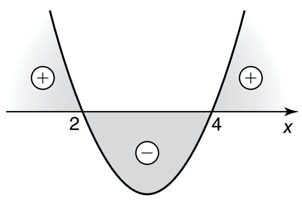


- Raízes de g:

  $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 4$

  Logo, o gráfico de g é uma parábola que intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 2 e 4.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:

	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 4$	$x > 4$
f	+	−	+	+	+
g	+	+	+	−	+
$\frac{f}{g}$	+	−	+	−	+

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o quociente $\frac{f}{g}$. Como queremos que esse quociente seja negativo ou nulo, e lembrando que a condição para que ele exista é $x \neq 4$ e $x \neq 2$, temos como conjunto solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

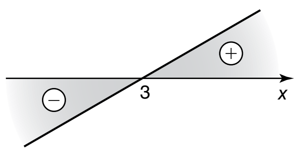
i) $\dfrac{(x-3)(x^2-9)}{x^2-2x-3} > 0$

Condição de existência:

$x^2 - 2x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \text{ e } x \neq 3$

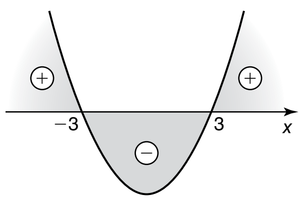
Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = (x - 3)$, $g(x) = x^2 - 9$ e $h(x) = x^2 - 2x - 3$, temos:

- Raízes de f:
  $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$
  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 3.
- f é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo.
  Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



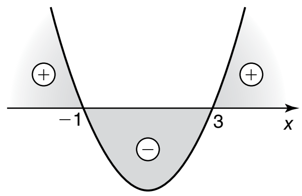
- Raízes de g:
  $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ ou } x = 3$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -3 e 3.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



- Raízes de h:
  $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -1 e 3.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Portanto, a variação de sinal de h é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g, h e $\frac{f \cdot g}{h}$ em um quadro de sinais, temos:

	$x < -3$	$-3 < x < -1$	$-1 < x < 3$	$x > 3$
f	−	−	−	+
g	+	−	−	+
h	+	+	−	+
$\frac{f \cdot g}{h}$	−	+	−	+

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o quociente e o produto $\frac{f \cdot g}{h}$.

Como queremos que $\dfrac{(x-3)(x^2-9)}{x^2-2x-3}$ seja estritamente positivo, e lembrando que a condição para que esse quociente exista é $x \neq -1$ e $x \neq 3$, temos como conjunto solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -1 \text{ ou } x > 3\}$

26. A inequação $\dfrac{x}{x-2} \geqslant \dfrac{x}{2}$ equivale a:

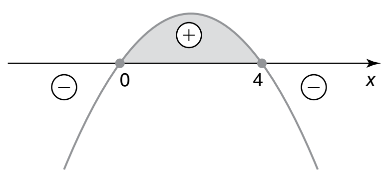
$\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{x}{2} \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{-x^2 + 4x}{2x - 4}$

Condição de existência:

$2x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = -x^2 + 4x$ e $g(x) = 2x - 4$, temos:

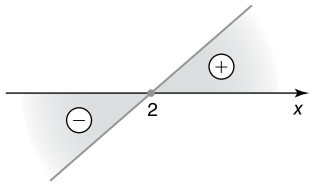
- Raízes de f:
  $-x^2 + 4x \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 0 e 4.
- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x é negativo.
  Portanto, a variação de f é representada por:



- Raízes de g:
  $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$
  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 2.

- g é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo.

Portanto, a variação de g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:

	$x<0$	$0<x<2$	$2<x<4$	$x>4$
f	−	+	+	−
g	−	−	+	+
$\frac{f}{g}$	+	−	+	−

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o quociente $\frac{f}{g}$.

Como queremos que esse quociente seja maior ou igual a zero, e lembrando que a condição para que ele exista é $x \neq 2$, temos como conjunto solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } 2 < x \leqslant 4\}$

Alternativa **e**.

27. a) $\begin{cases} x^2 - 36 > 0 \text{ (I)} \\ 2x + 20 \geqslant 0 \text{ (II)} \end{cases}$

Resolvendo a inequação (I):

$x^2 - 36 > 0$

Para resolver a inequação (I), devemos estudar a variação de sinais da função $f(x) = x^2 - 36$. Assim, temos:

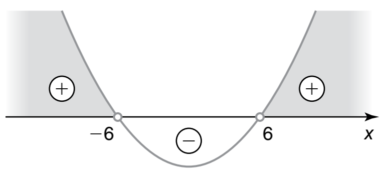
- Raízes de f:

  $x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x = 6 \text{ ou } x = -6$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas −6 e 6.

- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



Logo, a solução da inequação (I) é:

$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } x > 6\}$

Resolvendo a inequação (II):

$2x + 20 \geqslant 0$

Para resolver a inequação (II), devemos estudar a variação de sinais da função $g(x) = 2x + 20$.

Assim, temos:

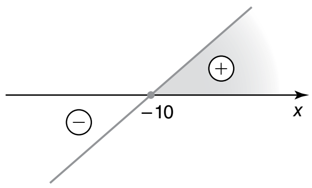
- Raízes de g:

  $2x + 20 = 0 \Rightarrow x = -10$

  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa −10.

- g é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo.

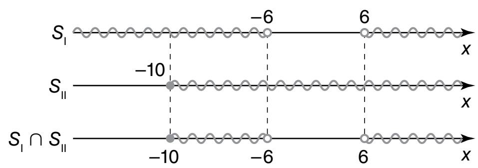
Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Logo, a solução da inequação (II) é:

$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -10\}$

Assim, pela intersecção das soluções S_I e S_{II}, temos a solução desse sistema, no quadro a seguir:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -10 \leqslant x < -6 \text{ ou } x > 6\}$.

b) $\begin{cases} -x^2 + 3x + 4 \leqslant 0 \text{ (I)} \\ x^2 - 9 < 0 \text{ (II)} \end{cases}$

Resolvendo a inequação (I):

$-x^2 + 3x + 4 \leqslant 0$

Para resolver a inequação (I), devemos estudar a variação de sinais da função $f(x) = -x^2 + 3x + 4$. Assim, temos:

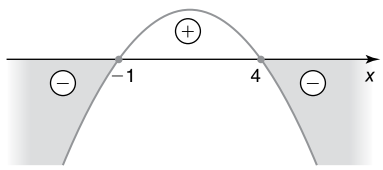
- Raízes de f:

  $-x^2 + 3x + 4 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 4$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas −1 e 4.

- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo.

Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



Logo, a solução da inequação (I) é:

$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 4\}$

Resolvendo a inequação (II):

$x^2 - 9 < 0$

Para resolver a inequação (II), devemos estudar a variação de sinais da função $g(x) = x^2 - 9$.

Assim, temos:

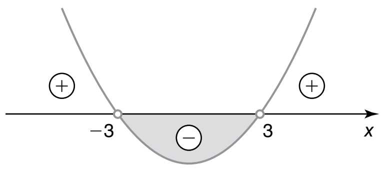
- Raízes de g:

  $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ ou } x = 3$

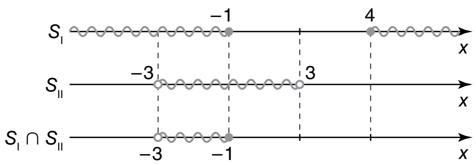
  Logo, a reta intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas −3 e 3.

- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Logo, a solução da inequação (II) é:
$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$
Assim, pela intersecção das soluções S_I e S_{II}, temos a solução desse sistema, no quadro abaixo:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leqslant -1\}$.

28. $E(t) = \frac{t^2}{8} + \frac{t}{4}$

$I(t) = 3t$

a) A balança comercial de um país está em déficit se a diferença entre as exportações e importações é negativa. Assim:

$E(t) - I(t) < 0 \Rightarrow \frac{t^2}{8} + \frac{t}{4} - 3t < 0$

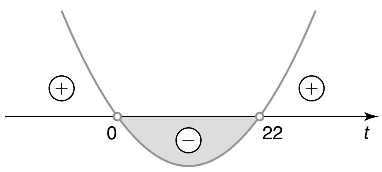
Para descobrir por quantos dias a balança esteve em déficit devemos resolver a inequação encontrada.

$\frac{t^2}{8} + \frac{t}{4} - 3t \Rightarrow t^2 - 22t < 0$

Para resolver a inequação, devemos estudar a variação de sinais da função $f(t) = t^2 - 22t$

- Raízes de f:
  $t^2 - 22t = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = 22$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ot nos pontos de abscissas 0 e 22.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de t^2 é positivo.

Esquematizando, temos:



Logo, $S = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 < t < 22\}$.
Assim, do 1º dia ao 21º dia a balança esteve em déficit um período de 21 dias.

b) A balança comercial em superávit acima de 13 milhões significa que a diferença entre as exportações e importações foi superior a 13 milhões, ou seja:

$$E(t) - I(t) > 13 \Rightarrow \frac{t^2}{8} + \frac{t}{4} - 3t > 13$$

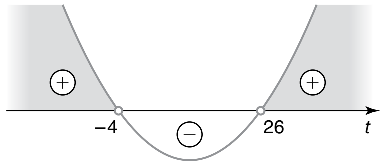
Para descobrir por quantos dias isso ocorreu devemos resolver a inequação encontrada.

$$\frac{t^2}{8} + \frac{t}{4} - 3t > 13 \Rightarrow t^2 - 22t - 104 > 0$$

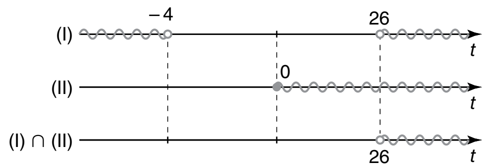
Para resolver a inequação, devemos estudar a variação de sinais da função $g(t) = t^2 - 22t - 104$.

- Raízes de g:
  $t^2 - 22t - 104 = 0 \Rightarrow t = -4$ ou $t = 26$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ot nos pontos de abscissas −4 e 26.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de t^2 é positivo.

Esquematizando, temos:



Logo, $S = \{t \in \mathbb{R} \mid t < -4$ ou $t > 26\}$ (I).
No entanto, devemos considerar que $t \geqslant 0$, uma vez que se trata do tempo em dias. Fazendo a interseção da solução (I) encontrada com $t \geqslant 0$ (II), temos:



Logo, a balança comercial desse país esteve em superávit acima de 13 milhões de dólares do 27º dia ao 30º dia, ou seja, por um período de 4 dias.

29. Consideremos um sistema cartesiano de origem A, cuja unidade nos eixos é o metro, o eixo Oy é vertical e orientado para cima e o eixo Ox passa por B e é orientado de A para B. Em relação a esse sistema, a equação que descreve a altura f da bola em função da distância x é $f(x) = ax^2 + bx + c$. Assim, temos:

$(0,0) \in f \Rightarrow c = 0$

$(6,3) \in f \Rightarrow 36a + 6b = 3$

$x_V = 6 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 6$

Assim, para encontrar o valor de a, b e c devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 36a + 6b = 3 \\ -\frac{b}{2a} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \text{ (I)} \\ 12 + 2b = 1 \text{ (II)} \\ b = -12a \text{ (III)} \end{cases}$$

Substituindo b por $-12a$ em (II), temos:

$12a + 2(-12a) = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{12}$

$\therefore b = 1$

Então, $a = -\frac{1}{12}$, $b = 1$ e $c = 0$. E a função é

$y = -\frac{x^2}{12} + x$.

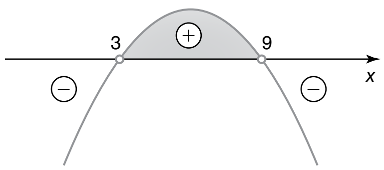
Como o jogador da posição C não conseguiu cabecear a bola, temos que $y > 2{,}25$. Resolvendo essa inequação, temos:

$-\frac{x^2}{12} + x > 2{,}25 \Rightarrow -x^2 + 12x - 27 > 0$

Para resolver a inequação, devemos estudar a variação de sinais da função $f(x) = -x^2 + 12x - 27$.

- Raízes de f:
  $-x^2 + 12x - 27 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = 9$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 3 e 9.
- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo.

Esquematizando, temos:



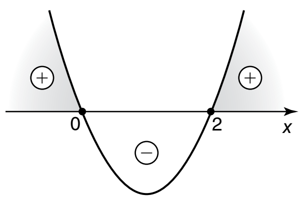
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 9\}$.
Alternativa **a**.

30. Para que o conjunto solução da inequação $2x^2 + 2x + m + 3 > 0$ seja o conjunto $\mathbb{R}$, o discriminante deve ser negativo. Assim, temos:
$4 - 4 \cdot 2(m + 3) < 0 \Rightarrow 4 - 8m - 24 < 0$
$\therefore -8m - 20 < 0 \Rightarrow -8m < 20$
$\therefore m > -\frac{20}{8} \Rightarrow m > -\frac{5}{2}$
Logo, $m > -\frac{5}{2}$.

31. a) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 4x}$
Para que $f(x)$ esteja definida, devemos ter:
$2x^2 - 4x \geqslant 0$
Assim, para encontrar o domínio de f, estudamos o sinal da função $h(x) = 2x^2 - 4x$; para isso, temos:

- Raízes de h:
  $2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$
  Logo, sendo h uma parábola, ela intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 0 e 2.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Esquematizando, temos:

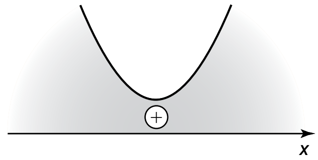


Então, $h(x) \geqslant 0$ para $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 2$.
Logo, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 2\}$.

b) $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$
Para que $g(x)$ esteja definida, devemos ter:
$x^2 + x + 2 \geqslant 0$
Assim, para encontrar o domínio de g estudamos o sinal da função $r(x) = x^2 + x + 2$; para isso, temos:

- Raízes de r:
  $x^2 + x + 2 = 0$
  $\Delta < 0$
  Logo, o gráfico de r não intercepta o eixo Ox, pois r não tem raízes reais.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

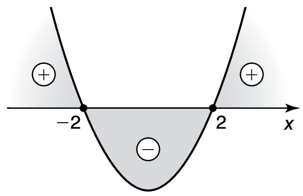
Esquematizando, temos:



Então, $r(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.
Logo, $D = \mathbb{R}$.

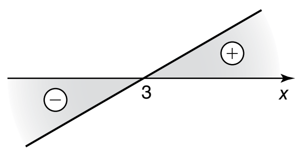
c) $h(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{4x - 12}}$
Para que $h(x)$ esteja definida, devemos ter:
$\frac{x^2 - 4}{4x - 12} \geqslant 0$
Condição de existência:
$4x - 12 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$
Estudando a variação de sinal das funções $g(x) = x^2 - 4$ e $t(x) = 4x - 12$, temos:

- Raízes de g:
  $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 2$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -2 e 2.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.
  Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



- Raízes de t:
  $4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$
  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 3.
- t é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo.

Portanto, a variação de sinal de h é representada por:



Representando a variação de sinal de g, t e $\frac{g}{t}$ em um quadro de sinais, temos:

	$x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < 3$	$x > 3$
g	+	−	+	+
t	−	−	−	+
$\frac{g}{t}$	−	+	−	+

Pelo quadro, podemos observar que
$\frac{x^2 - 4}{4x - 12} \geqslant 0$ para $-2 \leqslant x \leqslant 2$ ou $x > 3$.
$\therefore D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2 \text{ ou } x > 3\}$

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. **a)** $y = 8x^2 - 2x - 1$

- Fazendo $y = 0$, temos:

  $8x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{4}$

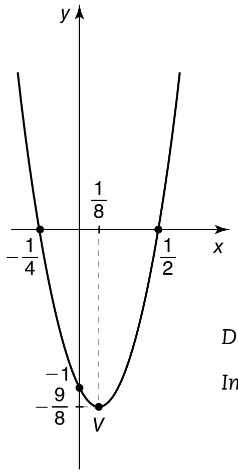
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(-\dfrac{1}{4}, 0\right)$.
- Fazendo $x = 0$, temos:

  $y = -1$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, -1)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:

  $V\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right) = \left(\dfrac{2}{16}, -\dfrac{36}{32}\right) = \left(\dfrac{1}{8}, -\dfrac{9}{8}\right)$

Esboçando o gráfico, concluímos:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\dfrac{9}{8}\right\}$

b) $h(x) = 2x^2 - 4x + 4$

- Fazendo $y = 0$, temos:

  $2x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$

  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox, pois a função h não possui raízes reais.
- Fazendo $x = 0$, temos:

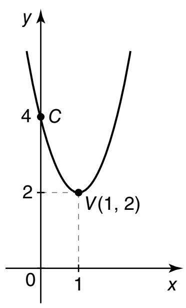
  $y = 4$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 4)$.

  Calculando as coordenadas do vértice V, temos:

  $V\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right) = \left(\dfrac{4}{4}, \dfrac{16}{8}\right) = (1, 2)$

Esboçando o gráfico, concluímos:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$

c) $y = -x^2 - 10x - 25$

- Fazendo $y = 0$, temos:

  $x^2 + 10x + 25 = 0 \Rightarrow x = -5$

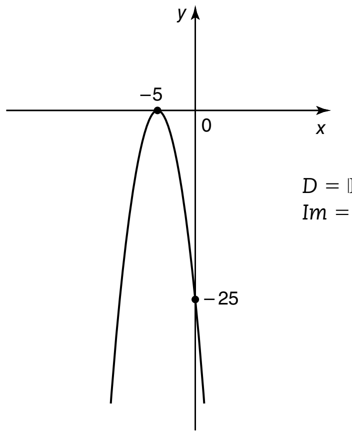
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox no ponto $(-5, 0)$.
- Fazendo $x = 0$, temos:

  $y = -25$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, -25)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:

  $V\left(\dfrac{10}{-2}, \dfrac{0}{2}\right) = (-5, 0)$

Esboçando o gráfico, concluímos:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \mathbb{R}_-$

d) $y = -2x^2 + x$

- Fazendo $y = 0$, temos:

  $-2x^2 + x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$

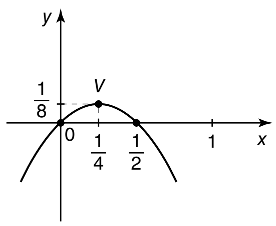
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $(0, 0)$ e $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$.
- Fazendo $x = 0$, temos:

  $y = 0$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 0)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:

  $V\left(\dfrac{-1}{-4}, \dfrac{-1}{-8}\right) = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}\right)$

Esboçando o gráfico, concluímos:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \dfrac{1}{8}\right\}$

e) $y = 2x^2 + 6x$

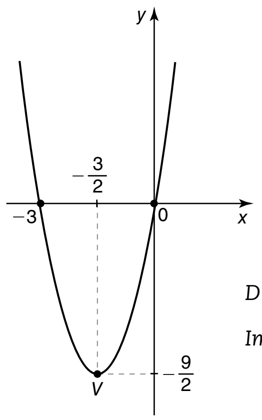
- Fazendo $y = 0$, temos:

  $2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -3$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $(0, 0)$ e $(-3, 0)$.

- Fazendo x = 0, temos:
  $y = 0$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0, 0).
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(-\frac{6}{4}, -\frac{36}{8}\right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

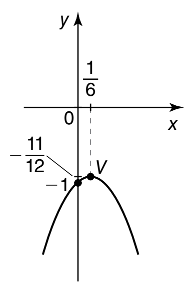
Esboçando o gráfico, concluímos:



$D = \mathbb{R}$
$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{9}{2}\right\}$

f) $t(x) = -3x^2 + x - 1$
- Fazendo y = 0, temos:
  $-3x^2 + x - 1 = 0$
  $\Delta < 0$
  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.
- Fazendo x = 0, temos:
  $y = -1$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0, −1).
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(\frac{-1}{-6}, \frac{11}{-12}\right) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{11}{12}\right)$

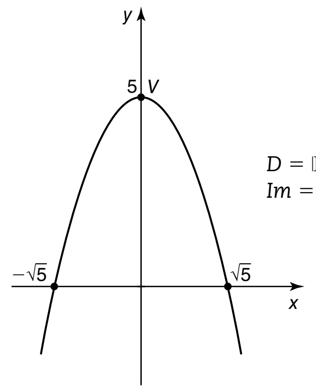
Esboçando o gráfico, concluímos:



$D = \mathbb{R}$
$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{11}{12}\right\}$

g) $y = -x^2 + 5$
- Fazendo y = 0, temos:
  $-x^2 + 5 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $\left(-\sqrt{5}, 0\right)$ e $\left(\sqrt{5}, 0\right)$.
- Fazendo x = 0, temos:
  $y = 5$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0, 5).
- Sendo V o vértice, temos:
  V(0, 5)

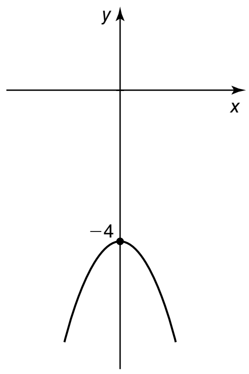
Esboçando o gráfico, concluímos:



$D = \mathbb{R}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 5\}$

h) $y = -x^2 - 4$
- Fazendo y = 0, temos:
  $-x^2 - 4 = 0$
  $\Delta < 0$
  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.
- Fazendo x = 0, temos:
  $y = -4$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0, −4).
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (0, -4)$

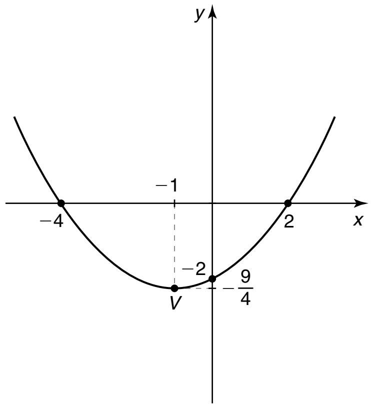
Esboçando o gráfico, concluímos:



$D = \mathbb{R}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -4\}$

i) $y = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - 2$
- Fazendo y = 0, temos:
  $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -4$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos (2, 0) e (−4, 0).
- Fazendo x = 0, temos:
  $y = -2$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0, −2).
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}, \frac{-\frac{9}{4}}{1}\right) = \left(-1, -\frac{9}{4}\right)$

Esboçando o gráfico, concluímos:



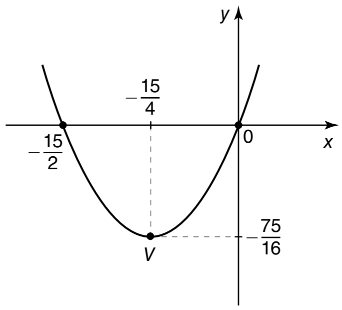
$D = \mathbb{R}$

$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{9}{4}\right\}$

j) $u(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{5x}{2}$

- Fazendo $y = 0$, temos:
  $\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{15}{2}$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $(0, 0)$ e $\left(-\frac{15}{2}, 0\right)$.
- Fazendo $x = 0$, temos:
  $y = 0$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 0)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(\frac{-\frac{5}{2}}{2 \cdot \frac{1}{3}}, \frac{-\frac{25}{4}}{4 \cdot \frac{1}{3}}\right) = \left(-\frac{15}{4}, -\frac{75}{16}\right)$

Esboçando o gráfico, concluímos:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{75}{16}\right\}$

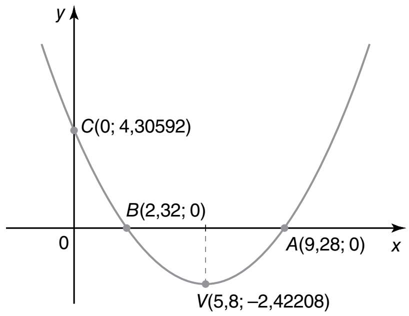
2. Para que $f(x)$ tenha dois pontos distintos em comum com o eixo Ox, devemos ter $\Delta > 0$.
Calculando o valor de p para $\Delta > 0$, temos:
$(-2)^2 - 4 \cdot p \cdot 5 > 0 \Rightarrow 4 - 20p > 0$
$\therefore\ -20p > -4 \Rightarrow p < \frac{1}{5}$
Logo, para que haja dois pontos de intersecção com o eixo Ox, devemos ter $p < \frac{1}{5}$.

3. Pelo gráfico da função $y = x^2 + mx + (8 - m)$ percebemos que essa função tem um único ponto em comum com o eixo das abscissas; logo, $\Delta = 0$. Assim:
$m^2 - 4(8 - m) = 0 \Rightarrow m^2 + 4m - 32 = 0$
$\therefore\ m = 4$ ou $m = -8$
Para $m = -8$, temos a função $y = x^2 - 8x$.
Para $m = 4$, temos a função $y = x^2 + 4x + 4$.
Considerando o gráfico, temos que, para $x = 0$, $y = p$, não nulo. Assim, concluímos que a única função que satisfaz essa condição é $y = x^2 + 4x + 4$. Portanto, $m = 4$ e $p = 4$.
Pelo gráfico observamos que k coincide com x_v. Logo:
$k = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$
Portanto, $m = 4$, $p = 4$ e $k = -2$. Logo, $k + p = 2$.
Alternativa **b**.

4. $y = 0{,}2x^2 - 2{,}32x + 4{,}30592$

- Fazendo $y = 0$, temos:
  $0{,}2x^2 - 2{,}32x + 4{,}30592 = 0 \Rightarrow x = 9{,}28$ ou $x = 2{,}32$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $A(9{,}28;\ 0)$ e $B(2{,}32;\ 0)$.
- Fazendo $x = 0$, temos:
  $y = 4{,}30592$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $C(0;\ 4{,}30592)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(\frac{2{,}32}{0{,}4}; \frac{-1{,}937664}{0{,}8}\right) = (5{,}8;\ -2{,}42208)$

Então, esboçando o gráfico, temos:



5. $y = x^2 - x - 6$
Pela figura, notamos que B tem coordenadas $(0,0)$, que C é uma das coordenadas encontradas quando fazemos $y = 0$ e que A é a coordenada quando fazemos $x = 0$. Assim:

- Fazendo $y = 0$, temos
  $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -2$
  Como o ponto C possui abscissa positiva, concluímos que $C(3,0)$.
- Fazendo $x = 0$, temos:
  $y = -6$
  Logo, $A(-6,0)$.

O triângulo ABC é um triângulo retângulo de altura $|x_A| = 6$, base $x_C = 3$. Calculando a área A:
$A = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$
Logo, o triângulo ABC tem área de 9 unidades de medida de área.
Alternativa **c**.

6. Calculando a área S_1, temos:
$S_1 = 1y(1) + 1y(2) + 1y(3) + 1y(4) = 1 + 4 + 9 + 16$
$\therefore S_1 = 30$
Calculando a área S_2, temos:
$S_2 = 1y(1) + 1y(2) + 1y(3) + 1y(4) + 1y(5) =$
$= 1 + 4 + 9 + 16 + 25$
$\therefore S_2 = 55$
Calculando a área S, temos:
$$S = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{85}{2} = 42{,}5$$
Logo, S vale aproximadamente 42,5 unidades de medida de área.

7.
- Sendo $f(x)$ uma função quadrática, temos $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.
- Como a abscissa do vértice é o ponto médio entre as raízes da equação quando fazemos $y = 0$, concluímos que o gráfico também intercepta o ponto $(3, 0)$.
- Dos pontos $(4, -1)$, $(5, 0)$ e $(3, 0)$, temos o seguinte sistema:
$$\begin{cases} 16a + 4b + c = -1 \text{ (I)} \\ 9a + 3b + c = 0 \text{ (II)} \\ 25a + 5b + c = 0 \text{ (III)} \end{cases}$$
Multiplicando a equação (II) por -1 e somando as equações (I) e (III), temos:
$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 0 \text{ (II)} \\ 7a + b = -1 \text{ (IV)} \\ 16a + 2b = 0 \text{ (V)} \end{cases}$$
De (IV) e (V), temos que $a = 1$ e $b = -8$. Substituindo a por 1 e b por -8 em (II) temos $c = 15$.
- Assim, a função quadrática é $f(x) = x^2 - 8x + 15$. Para $x = 0$, temos $y = 15$, ou seja, a parábola intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 15)$.
Alternativa **b**.

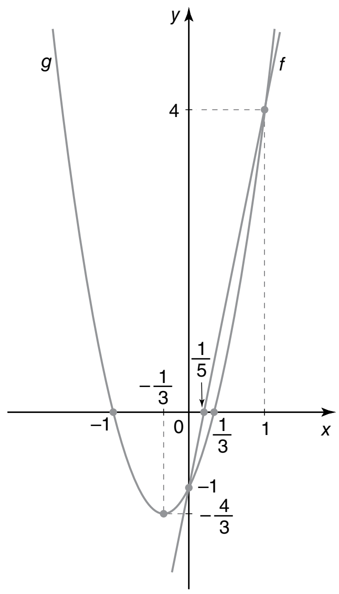
8. Sabemos que as raízes da equação quando fazemos $y = 0$ na função são $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Assim, temos que a distância d entre A e B é dada por:
$$d = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{-2\sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$
Note que já sabemos que $\Delta > 0$, pois a parábola apresenta dois pontos de intersecção com o eixo das abscissas.
Pela fórmula de altura do triângulo equilátero, $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, e notando pela figura que a altura do triângulo é a ordenada do vértice, temos:
$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$
No entanto, o lado do triângulo é a distância entre A e B, ou seja, $\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$. Assim:
$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{a} \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = \frac{\sqrt{3\Delta}}{2a}$$
$$\therefore -\frac{\Delta}{2} = \sqrt{3\Delta} \Rightarrow \frac{\Delta^2}{4} = 3\Delta$$
$$\therefore \Delta^2 - 12\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \text{ ou } \Delta = 12$$
Logo, $\Delta = 12$.

9. Para representar os gráficos de $f(x) = 5x - 1$ e $g(x) = 3x^2 + 2x - 1$, podemos encontrar os pontos de interseção com os eixos Ox e Oy e, no caso de $g(x)$, encontrar o vértice da parábola.

I. Em $f(x)$:
- Fazendo $f(x) = 0$, obtemos:
$$5x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$
Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$.
- Fazendo $x = 0$, obtemos $y = -1$.
Logo, a reta intercepta o eixo Oy no ponto $(0, -1)$.

II. Em $g(x)$:
- Fazendo $y = 0$, temos:
$$3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{3}$$
Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $(-1, 0)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.
- Fazendo $x = 0$, temos:
$y = -1$
Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0; -1)$.
- Calculando as coordenadas do vértice, temos:
$$\left(-\frac{2}{6}, \frac{-16}{12}\right) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

Esboçando f e g no mesmo plano cartesiano, concluímos:



Determinando as coordenadas dos pontos comuns às duas funções, temos:
$3x^2 + 2x - 1 = 5x - 1 \Rightarrow 3x^2 - 3x = 0$
$\therefore x = 0$ ou $x = 1$
Substituindo $x = 0$ ou $x = 1$ em $y = 5x - 1$, temos:
Para $x = 0 \Rightarrow y = -1$
Para $x = 1 \Rightarrow y = 4$
Logo, os pontos comuns às duas parábolas são $(0, -1)$ e $(1, 4)$.

10. Para a construção dos gráficos de $y = 2x^2 + x - 1$ e $y = x^2 - 5x + 6$, vamos encontrar os pontos de intersecção com os eixos Ox e Oy e o vértice dessas parábolas:

I. Na função $y = 2x^2 + x - 1$, temos:

- Fazendo $y = 0$, obtemos:

  $2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -1$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $(-1, 0)$ e $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

- Fazendo $x = 0$, obtemos $y = -1$.

  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, -1)$.

- Calculando as coordenadas do vértice V_1, obtemos:

  $V_1\left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{9}{8}\right)$

II. Na função $y = x^2 - 5x + 6$, temos:

- Fazendo $y = 0$, obtemos:

  $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $(2, 0)$ e $(3, 0)$.

- Fazendo $x = 0$, obtemos:

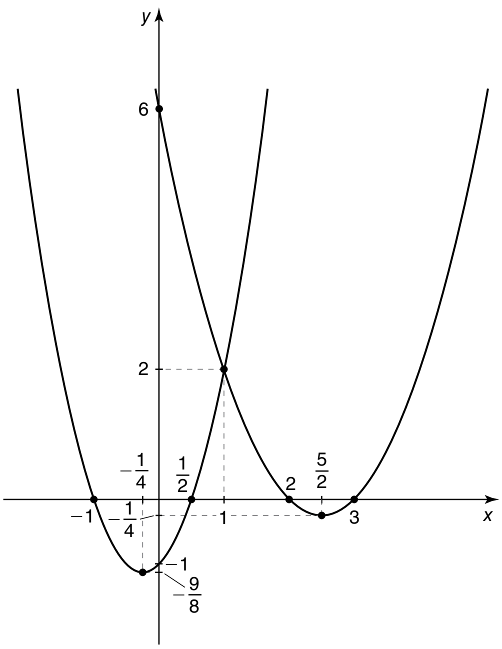
  $y = 6$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 6)$.

- Calculando as coordenadas do vértice V_2, obtemos:

  $V_2\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$

Assim, construindo as duas parábolas no mesmo plano cartesiano, temos:



Determinando as coordenadas dos pontos comuns às duas parábolas, temos:

$2x^2 + x - 1 = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow x^2 + 6x - 7 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 64 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1}$

$\therefore x = \dfrac{-6 \pm 8}{2} \Rightarrow x = 1$ ou $x = -7$

Substituindo $x = 1$ e $x = -7$ em $y = 2x^2 + x - 1$, temos:

para $x = 1 \Rightarrow y = 2$

para $x = -7 \Rightarrow y = 90$

Logo, os pontos comuns às duas parábolas são $(1, 2)$ e $(-7, 90)$.

11. Para esse exercício, precisamos lembrar da definição de sobrejetora: uma **função** é dita **sobrejetora** quando o contradomínio da função for igual ao conjunto imagem.

$f(x) = m^2x^2 + 4mx + 1$

- Percebemos que a função apresenta concavidade voltada para cima, uma vez que m^2 é sempre positivo.
- Assim, para a função ser sobrejetora, sabendo que seu contradomínio é $[a, \infty]$, sua imagem deve começar em a. Determinando primeiro o valor de Δ, temos:

  $\Delta = (4m)^2 - 4m^21 = 16m^2 - 4m^2$

  $\therefore \Delta = 12m^2$

  Assim:

  $-\dfrac{\Delta}{4m^2} = a \Rightarrow -\dfrac{12m^2}{4m^2} = a$

  $\therefore a = -3$

Alternativa **b**.

12 a) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ se } x \leqslant 2 & \text{(I)} \\ -x^2 + 6x - 8, \text{ se } x > 2 & \text{(II)} \end{cases}$

Para esboçar o gráfico dessa função, vamos estudá-la por partes.

(I) $h(x) = x^2 - 2x$, para $x \leqslant 2$

- Fazendo $x^2 - 2x = 0$, temos $x = 0$ ou $x = 2$.

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $(0, 0)$ e $(2, 0)$.

- Fazendo $x = 0$, temos $y = 0$.

  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 0)$.

- Calculando as coordenadas do vértice V_1, temos:

  $V_1\left(\dfrac{2}{2}, -\dfrac{4}{4}\right) = (1, -1)$

(II) $h(x) = -x^2 + 6x - 8$, para $x > 2$

- Fazendo $-x^2 + 6x - 8 = 0$, temos $x = 2$ ou $x = 4$.

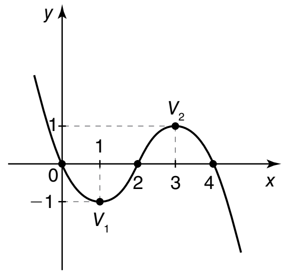
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox no ponto $(4, 0)$. O ponto $(2, 0)$ não convém, pois $-x^2 + 6x - 8$, se $x > 2$.

  Neste caso não precisamos encontrar a intersecção com o eixo Oy, pois só nos convêm os casos em que $x > 2$.

- Calculando as coordenadas do vértice V_2, temos:

  $V_2\left(\dfrac{-6}{-2}, \dfrac{-4}{-4}\right) = (3, 1)$

Logo, de (I) e (II), temos o gráfico:



b) $t(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ se } x \leqslant 2 & \text{(I)} \\ 3, \text{ se } 2 < x \leqslant 4 & \text{(II)} \\ x^2 - 8x + 19, \text{ se } x > 4 & \text{(III)} \end{cases}$

Para esboçar o gráfico de $t(x)$, vamos estudá-la por partes.

(I) $t(x) = x^2 - 1$, para $x \leqslant 2$

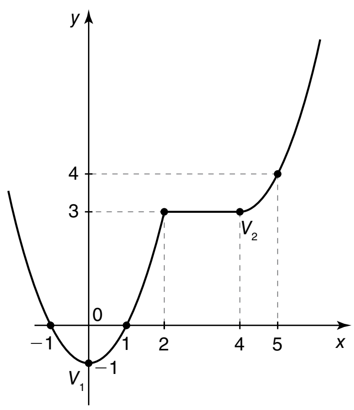
- Fazendo $x^2 - 1 = 0$, temos $x = 1$ ou $x = -1$.
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos (1, 0) e (−1, 0).
- Fazendo $x = 0$, temos $y = -1$.
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0, −1).
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V_1\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right) = (0, -1)$
- Fazendo $x = 2$, temos $y = 3$.
  Logo, a função $t(x)$ é do tipo $x^2 - 1$ até o ponto (2, 3).

(II) É uma função constante igual a 3, se $2 < x \leqslant 4$

(III) $t(x) = x^2 - 8x + 19$, para $x > 4$

- Fazendo $x^2 - 8x + 19 = 0$, encontramos $\Delta < 0$, então a parábola não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.
- Calculando as coordenadas do vértice, temos:
  $V\left(\dfrac{8}{2}, \dfrac{12}{3}\right) = (4,3)$
  Neste caso, o vértice V_2 desta parábola não pertence ao intervalo $x > 4$.
- Para $x = 5$, temos $y = 4$.

Logo, de (I), (II) e (III), temos o gráfico:



13. a) $y = -x^2 - 2x + 3$

Como $y = -x^2 - 2x + 3$ tem como gráfico uma parábola com a concavidade para baixo, calculando as coordenadas x_V e y_V do seu vértice V obtemos seu ponto máximo:

- $y_V = \dfrac{-16}{-4} = 4$
  Logo, o valor máximo de $y = -x^2 - 2x + 3$ é $y_V = 4$.
- $x_V = \dfrac{-(-2)}{-2} = -1$
  Logo, a abscissa do máximo de $y = -x^2 - 2x + 3$ é $x_V = -1$.

b) $s(x) = x^2 - 8x + 16$

Como $s(x)$ tem como gráfico uma parábola com a concavidade para cima, calculando as coordenadas x_V e y_V do seu vértice V obtemos seu ponto mínimo:

- $y_V = 0$
  Logo, o valor mínimo de $s(x)$ é $y_V = 0$.
- $x_V = \dfrac{8}{2} = 4$
  Logo, a abscissa do mínimo de $s(x)$ é $x_V = 4$.

c) $y = -4x^2 + 2x - \dfrac{1}{4}$

Como $y = -4x^2 + 2x - \dfrac{1}{4}$ tem como gráfico uma parábola com a concavidade para baixo, calculando as coordenadas x_V e y_V do seu vértice V obtemos seu ponto máximo:

- $y_V = 0$
  Logo, o valor máximo de $y = -4x^2 + 2x - \dfrac{1}{4}$ é $y_V = 0$.
- $x_V = \dfrac{-2}{-8} = \dfrac{1}{4}$
  Logo, a abscissa do máximo de $y = -4x^2 + 2x - \dfrac{1}{4}$ é $x_V = \dfrac{1}{4}$.

d) $y = 3x^2 - 1$

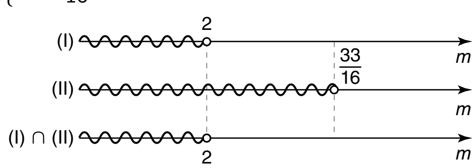
Como $y = 3x^2 - 1$ tem como gráfico uma parábola com a concavidade para cima, calculando as coordenadas x_V e y_V do seu vértice V obtemos seu ponto mínimo:

- $y_V = -\dfrac{12}{12} = -1$
  Logo, o valor mínimo de $y = 3x^2 - 1$ é $y_V = -1$.
- $x_V = 0$
  Logo, a abscissa do mínimo de $3x^2 - 1$ é $x_V = 0$.

14. A parábola da equação $y = (m - 2)x^2 + x + 4$ admite valor máximo positivo se, e somente se:

$$\begin{cases} m - 2 < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - 2 < 0 \\ 1 - 16(m - 2) > 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m < 2 & \text{(I)} \\ m < \dfrac{33}{16} & \text{(II)} \end{cases}$$



Logo, os valores de m para que a função admita máximo positivo são todos os reais com $m < 2$.

15. Como é uma função quadrática, é do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$. Substituindo o par ordenado (0, 0) na função, temos:

$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 0$

Logo, a função é do tipo $f(x) = ax^2 + bx$.

Substituindo o par ordenado (2, 1) na função, temos:

$1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 \Rightarrow 4a + 2b = 1$

Temos que $x_V = -\frac{1}{4}$; assim:

$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = 2b$

Substituindo a por $2b$ na equação $4a + 2b = 1$, temos:

$4(2b) + 2b = 1 \Rightarrow 8b + 2b = 1$

$\therefore b = \frac{1}{10}$

E, consequentemente, $a = \frac{1}{5}$.

Assim, temos a função $f(x) = \frac{x^2}{5} + \frac{x}{10}$. Calculando $f(1)$:

$f(1) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

Alternativa **c**.

16. a) Como o quadrado $ABCD$ tem área 1 cm², seu lado mede 1 cm. Como $AM = x$, $AQ = 1 - x$. Sabemos que o triângulo AMQ é retângulo. Assim, por Pitágoras, temos:

$(MQ)^2 = x^2 + (1 - x)^2 \Rightarrow MQ = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$

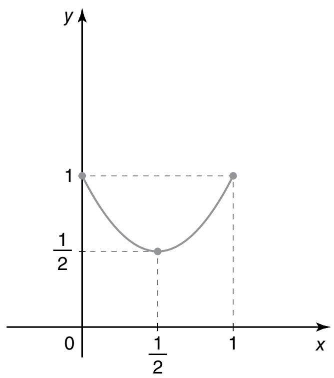
Calculando a área y do quadrado $MNPQ$, temos:

$y = (MQ)^2 = 2x^2 - 2x + 1$

Logo, a área do quadrado $MNPQ$ pode ser dada pela função $y = 2x^2 - 2x + 1$.

b) $y = 2x^2 - 2x + 1$.

- Fazendo $y = 0$, temos:
  $2x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$
  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox.
- Fazendo $x = 0$, temos:
  $y = 1$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0; 1).
- Calculando as coordenadas do vértice, temos:
  $\left(\frac{2}{4}, \frac{4}{8}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
  Esboçando f no plano cartesiano, temos:



c) A área mínima é a ordenada do ponto mínimo da parábola, ou seja, $\frac{1}{2}$ cm².

d) A medida do segmento $\overline{AM}$ para que a área do quadrado $MNPQ$ seja a menor possível é valor da abscissa do vértice, ou seja, $\frac{1}{2}$ cm.

17. a) Como r é uma reta, pode ser representada por uma função do 1º grau do tipo $y = ax + b$. Substituindo os pontos $(-4, -24)$ e $(2, 0)$ na função, temos:

$$\begin{cases} -24 = -4a + b \\ 0 = 2a + b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $a = 4$ e $b = -8$.

Logo, a equação da reta é $y = 4x - 8$.

b) Por ser uma parábola, pode ser representada por uma função do 2º grau do tipo $y = ax^2 + bx + c$. Notamos pelo gráfico que a parábola passa pelo ponto (0, 0). Substituindo os pontos $(-4, -24)$, $(2, 0)$ e $(0, 0)$, temos:

$$\begin{cases} -24 = 16a - 4b + c \\ 0 = 4a + 2b + c \\ 0 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - b = -6 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$$

$\therefore a = -1$ e $b = 2$.

Logo, temos $a = -1$, $b = 2$ e $c = 0$. E a equação da parábola $y = -x^2 + 2x$.

c) Temos que:

$f(x) = (-x^2 + 2x) - (4x - 8) = -x^2 - 2x + 8$

$\therefore f(x) = -x^2 - 2x + 8$

Como $f(x)$ é uma função com a concavidade voltada para baixo, o valor de x para que $f(x)$ seja maior possível é o valor da abscissa x_V do vértice V da parábola; assim:

$x_V = \frac{2}{-2} = -1$

Logo, o valor de x é -1.

18. Sendo $f(x) = 3x^2 + 2x + m - 1$ uma parábola com a concavidade voltada para cima, temos:

$f(x) > 0, \forall x$ se $\Delta < 0$

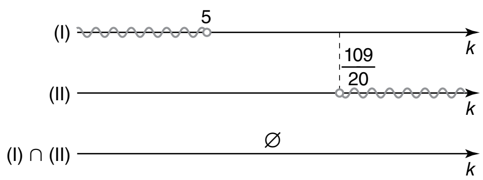
Calculando m para $\Delta < 0$:

$\Delta = 16 - 12m < 0 \Rightarrow m > \frac{4}{3}$

Logo, $f(x) > 0$ para qualquer valor real de x se $m > \frac{4}{3}$.

19. A parábola $f(x) = (k - 5)x^2 - 3x + 5$ é negativa para qualquer x, com $x \in \mathbb{R}$, se o coeficiente de x^2 for negativo e $\Delta < 0$. Assim:

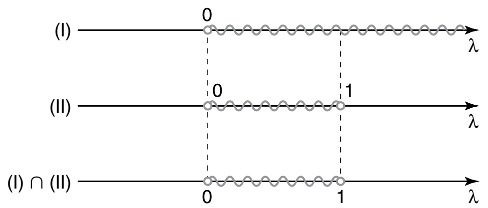
$$\begin{cases} k - 5 < 0 \\ 9 - 4 \cdot (k - 5) \cdot 5 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < 5 \text{ (I)} \\ k > \frac{109}{20} \text{ (II)} \end{cases}$$



Logo, não existe k tal que $f(x)$ seja negativa para qualquer x real.

20. A parábola definida por $f(x) = \lambda x^2 + 2\lambda x + 1$ só assumirá valores positivos se, e somente se, seu coeficiente de x^2 for positivo e $\Delta < 0$. Assim:

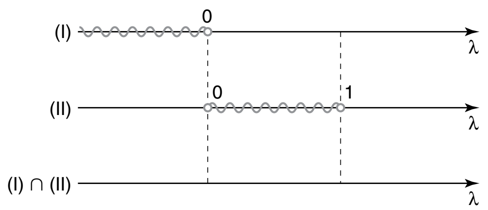
$$\begin{cases} \lambda > 0 \text{ (I)} \\ 4\lambda^2 - 4\lambda < 0 \text{ (II)} \end{cases} \Rightarrow 0 < \lambda < 1$$



Logo, os valores de λ para que a função seja positiva para qualquer valor de x, são todos os reais com $0 < \lambda < 1$.

A parábola assumirá somente valores negativos se, e somente se, o coeficiente de x^2 for negativo e $\Delta < 0$. Assim:

$$\begin{cases} \lambda < 0 \text{ (I)} \\ 4\lambda^2 - 4\lambda < 0 \text{ (II)} \end{cases} \Rightarrow 0 < \lambda < 1$$



Logo, não existem valores reais de λ para que a função seja negativa.

Concluímos que a função só assume valores positivos para $0 < \lambda < 1$.

Alternativa **d**.

21. Substituindo os pontos $(-1, 12)$, $(0, 6)$ e $(1, 2)$ na função, temos:

$$\begin{cases} 12 = a - b + c \\ 6 = c \\ 2 = a + b + c \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$.

E a função quadrática é $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

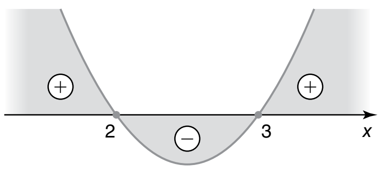
Estudando a variação de sinal da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$, temos:

- Raízes de f:

  $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 2 e 3.

- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo. Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



Concluímos que $f(x) > 0$ para valores reais de x tal que $x < 2$ ou $x > 3$.

22. Pela solução dada, temos:

$f(x) - g(x) > 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$

Pelo gráfico notamos que $f(x) > g(x)$ no intervalo entre -1 e 3, ou seja, $S =]-1{,}3[$.

Alternativa **a**.

23. **a)** $(x - 1)(x^2 - 2) > 0$

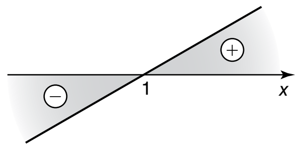
Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x - 1$ e $g(x) = x^2 - 2$, temos:

- Raízes de f:

  $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissas 1.

- f é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo. Portanto, a variação de sinal de f é representada por:

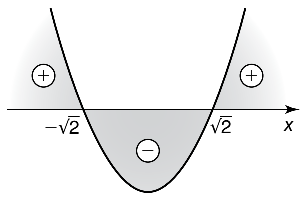


- Raízes de g:

  $x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.

- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente x^2 é positivo. Portanto, a variação de sinal g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $f \cdot g$ em um quadro de sinais, temos:

	$x < -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2} < x < 1$	$1 < x < \sqrt{2}$	$x > \sqrt{2}$
f	−	−	+	+
g	+	−	−	+
$f \cdot g$	−	+	−	+

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o produto $f \cdot g$. Como nos interessa que o produto seja estritamente positivo, temos como conjunto solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < 1 \text{ ou } x > \sqrt{2}\}$

b) $(x + 2)(x^2 - 4)(x^2 - x - 2) > 0$

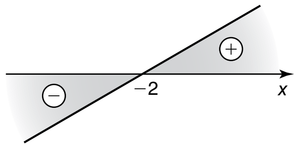
Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2 - 4$ e $h(x) = x^2 - x - 2$, temos:

- Raízes de f:

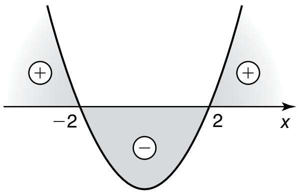
  $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa -2.

- f é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo. Portanto, a variação de sinal de f é representada por:

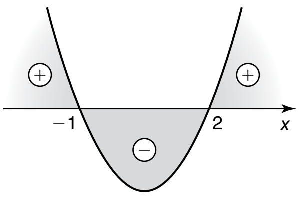


- Raízes de g:
  $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 2$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -2 e 2.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo. Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



- Raízes de h:
  $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -1$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -1 e 2.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Portanto, a variação de sinal de h é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g, h e $f \cdot g \cdot h$ em um quadro de sinais, temos:

	$x < -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < 2$	$x > 2$
f	−	+	+	+
g	+	−	−	+
h	+	+	−	+
$f \cdot g \cdot h$	−	−	+	+

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o produto $f \cdot g \cdot h$. Como nos interessa que o produto seja estritamente positivo, temos como conjunto solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1 \text{ e } x \neq 2\}$

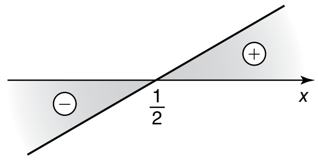
c) $(2x - 1)(3x - 1)(x^2 + x - 2) \leqslant 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 3x - 1$ e $h(x) = x^2 + x - 2$, temos:

- Raízes de f:

  $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa $x = \frac{1}{2}$.
- f é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo.
  Portanto, a variação de sinal de f é representada por:

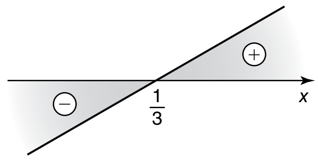


- Raízes de g:

  $3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

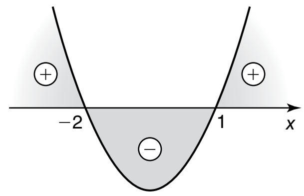
  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa $x = \frac{1}{3}$.
- g é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo.

Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



- Raízes de h:
  $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 1$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -2 e 1.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Portanto, a variação de sinal de h é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g, h e $f \cdot g \cdot h$ em um quadro de sinais, temos:

	$x < -2$	$-2 < x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 1$	$x > 1$
f	−	−	−	+	+
g	−	−	+	+	+
h	+	−	−	−	+
$f \cdot g \cdot h$	+	−	+	−	+

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o produto $f \cdot g \cdot h$. Como nos interessa que o produto seja negativo ou nulo, temos como conjunto solução:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \text{ ou } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right\}$

24. a) $\dfrac{(x^2 - 1)(2x - 1)}{-x^2 - 9} \geqslant 0$

Condição de existência:

$-x^2 - 9 \neq 0$

Essa desigualdade é satisfeita para qualquer x real.

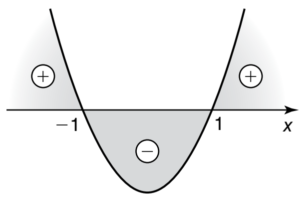
Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2x - 1$ e $h(x) = -x^2 - 9$, temos:

- Raízes de f:

  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -1 e 1.

- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo. Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



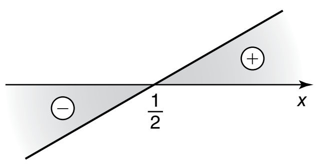
- Raízes de g:

  $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa $\dfrac{1}{2}$.

- g é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo.

Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



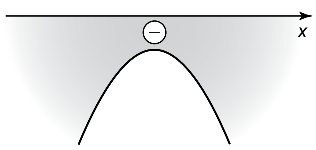
- Raízes de h:

  $-x^2 - 9 = 0$

  $\Delta < 0$

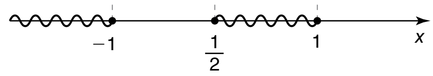
  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.

- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo. Portanto, a variação de sinal de h é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g, h e $\dfrac{f \cdot g}{h}$ em um quadro de sinais, temos:

	$x < -1$	$-1 < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 1$	$x > 1$
f	+	−	−	+
g	−	−	+	+
h	−	−	−	−
$\dfrac{f \cdot g}{h}$	+	−	+	−



Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o quociente e o produto $\dfrac{f \cdot g}{h}$.

Como queremos $\dfrac{f \cdot g}{h}$ seja positivo ou nulo, temos como conjunto solução:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right\}$

b) $\dfrac{x^2 - 2x + 2}{-x^2 - 2} < 0$

Condição de existência:

$-x^2 - 2 \neq 0$

Essa desigualdade é satisfeita para qualquer x real.

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 - 2x + 2$ e $g(x) = -x^2 - 2$, temos:

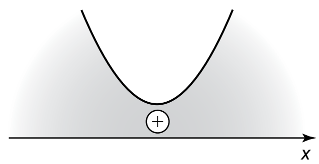
- Raízes de f:

  $x^2 - 2x + 2 = 0$

  $\Delta < 0$

  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.

- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo. Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



- Raízes de g:

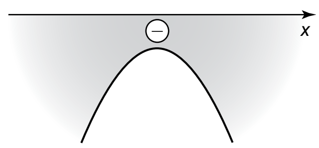
  $-x^2 - 2 = 0$

  $\Delta < 0$

  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.

- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo.

Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:

f	+	+	+	+	+	+
g	–	–	–	–	–	–
$\frac{f}{g}$	–	–	–	–	–	–

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o quociente $\frac{f}{g}$.

Como nos interessa que o quociente seja estritamente negativo, temos como conjunto solução:

$S = \mathbb{R}$

c) $\frac{x^2 + x + 1}{-x^2 + 2x - 2} > 0$

Condição de existência:

$-x^2 + 2x - 2 \neq 0$

$\Delta < 0$

Logo, essa desigualdade é satisfeita para qualquer x real. Portanto, $-x^2 + 2x - 2$ será sempre diferente de zero.

Seja $f(x) = x^2 + x + 1$ e $g(x) = -x^2 + 2x - 2$, vamos começar estudando a variação de sinais dessas funções.

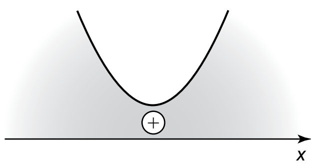
- Raízes de f:

  $x^2 + x + 1 = 0$

  $\Delta < 0$

  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



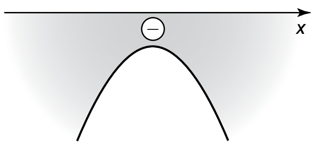
- Raízes de g:

  $-x^2 + 2x - 2 = 0$

  $\Delta < 0$

  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.
- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo.

Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:

f	+	+	+	+	+	+	+
g	–	–	–	–	–	–	–
$\frac{f}{g}$	–	–	–	–	–	–	–

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o quociente $\frac{f}{g}$. Como nos interessa que o quociente seja estritamente positivo, temos como conjunto solução:

$S = \varnothing$

d) $\frac{2x}{x^2 - 1} \geq \frac{1}{x - 1} \Rightarrow \frac{x - 1}{x^2 - 1} \geq 0$

Condição de existência:

$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ e $x \neq 1$

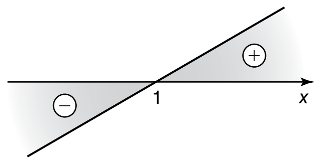
Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x - 1$ e $g(x) = x^2 - 1$, temos:

- Raízes de f:

  $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 1.
- f é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo.

Portanto, a variação de sinal de f é representada por.

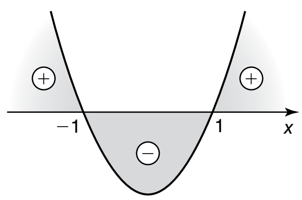


- Raízes de g:

  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -1 e 1.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:

	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
f	–	–	+
g	+	–	+
$\frac{f}{g}$	–	+	+

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o quociente $\frac{f}{g}$. Como nos interessa que o quociente seja nulo ou positivo, temos como conjunto solução:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1 \text{ e } x \neq 1\}$

e) $\frac{x}{x+1} > \frac{5}{3} - \frac{1}{x-1}$

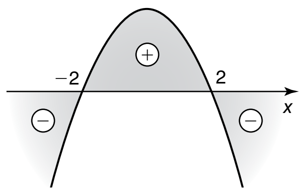
$\frac{3x(x-1) - 5(x^2-1) + 3(x+1)}{3(x^2-1)} > 0 \Rightarrow \frac{-2x^2+8}{3x^2-3} > 0$

Condição de existência:
$3x^2 - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \text{ e } x \neq -1$

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = -2x^2 + 8$ e $g(x) = 3x^2 - 3$, temos:

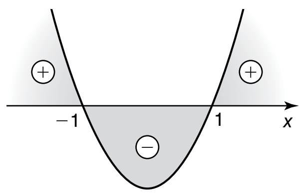
- Raízes de f:
  $-2x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -2 e 2.
- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo.

Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



- Raízes de g:
  $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -1 e 1.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:

	$x < -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 2$
f	−	+	+	+	−
g	+	+	−	+	+
$\frac{f}{g}$	−	**+**	−	**+**	−

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o quociente $\frac{f}{g}$. Como nos interessa que o quociente seja estritamente positivo, temos como conjunto solução:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \text{ ou } 1 < x < 2\}$

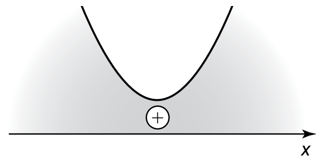
f) $\frac{1}{x-1} \geqslant \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x^2(x-1)} \geqslant 0$

Condição de existência:
$x^2(x-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \text{ e } x \neq 1$

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = x - 1$, temos:

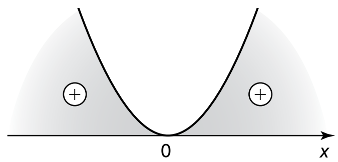
- Raízes de f:
  $x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \Delta < 0$
  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



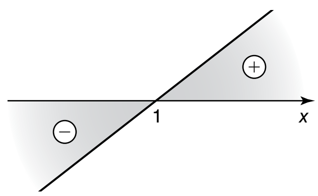
- Raízes de g:
  $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
  Logo, a parábola tangencia o eixo Ox no ponto de abscissa 0.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



- Raízes de h:
  $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 1.
- h é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo.

Portanto, a variação de sinal de h é representada por:



Representando a variação de sinal f, g, h, $\frac{f}{g \cdot h}$ em um quadro de sinais, temos:

	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
f	+	+	+
g	+	+	+
h	−	−	+
$\frac{f}{g \cdot h}$	−	−	**+**

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o produto e quociente $\dfrac{f}{g \cdot h}$.

Como nos interessa que $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2(x - 1)} \geqslant 0$, temos como conjunto solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

25. Consideramos o sistema:

$$\begin{cases} (x - 1)(x + 2)(4 - x) > 0 \text{ (I)} \\ \dfrac{2x - 1}{1 - x} \geqslant 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

Resolvendo a inequação (I):

$(x - 1)(x + 2)(4 - x) > 0$

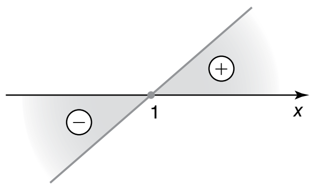
Para resolver a inequação, devemos estudar a variação de sinal das funções $f(x) = x - 1$, $g(x) = x + 2$ e $h(x) = 4 - x$. Assim, temos:

- Raízes de f:

  $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa $x = 1$.
- f é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo.

Portanto, a variação de sinal de f é representada por:

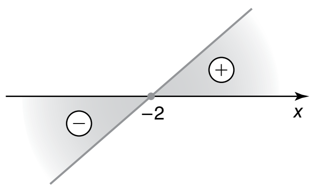


- Raízes de g:

  $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa $x = -2$.
- g é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo.

Portanto, a variação de sinal de g é representada por:

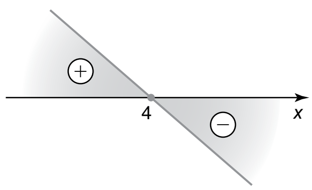


- Raízes de h:

  $4 - x = 0 \Rightarrow x = 4$

  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa $x = 4$.
- h é uma função decrescente, pois o coeficiente de x é negativo.

Portanto, a variação de sinal de h é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g, h e $f \cdot g \cdot h$ em um quadro de sinais, temos:

	$x < -2$	$-2 < x < 1$	$1 < x < 4$	$x > 4$
f	−	−	+	+
g	−	+	+	+
h	+	+	+	−
$f \cdot g \cdot h$	+	−	+	−

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais do produto $f \cdot g \cdot h$. Como nos interessa que o produto seja estritamente positivo, temos o conjunto solução de (I):

$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 1 < x < 4\}$

Resolvendo a inequação (II):

$\dfrac{2x - 1}{1 - x} \geqslant 0$

Condição de existência:

$1 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

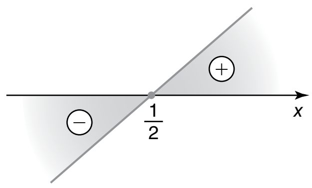
Para resolver a inequação, devemos estudar a variação de sinal das funções $i(x) = 2x - 1$ e $j(x) = 1 - x$. Assim, temos:

- Raízes de i:

  $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa $x = \dfrac{1}{2}$.
- i é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo.

Portanto, a variação de sinal de i é representada por:

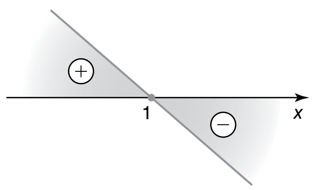


- Raízes de j:

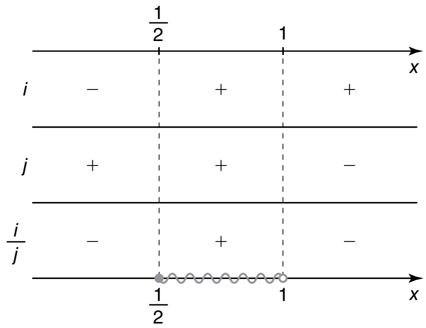
  $1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa $x = 1$.
- j é uma função decrescente, pois o coeficiente de x é negativo.

Portanto, a variação de sinal de j é representada por:



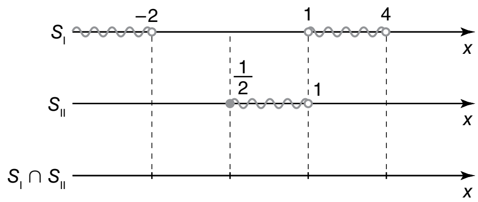
Representando a variação de sinal de i, j e $\frac{i}{j}$ em um quadro de sinais, temos:



Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais do quociente $\frac{i}{j}$. Como nos interessa que o quociente seja positivo ou nulo, temos o conjunto solução de (II):

$S_{II} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 1\right\}$

Assim, pela intersecção das soluções S_I e S_{II}, temos a solução desse sistema, no quadro abaixo:



Logo, $S = \varnothing$.

26. a) $g(x) = \sqrt{\dfrac{6 - 3x}{x^2 - 3x + 2}}$

A função g está definida para todo x real tal que:

$\dfrac{6 - 3x}{x^2 - 3x + 2} \geqslant 0$

Condição de existência:

$x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \text{ e } x \neq 2$

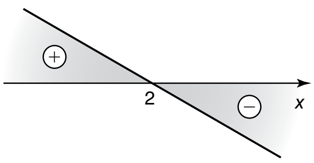
Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = 6 - 3x$ e $h(x) = x^2 - 3x + 2$, temos:

- Raízes de f:

  $6 - 3x = 0 \Rightarrow x = 2$

  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 2.
- f é uma função decrescente, pois o coeficiente de x é negativo.

Portanto, a variação de sinal de f é representada por:

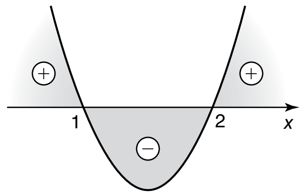


- Raízes de h:

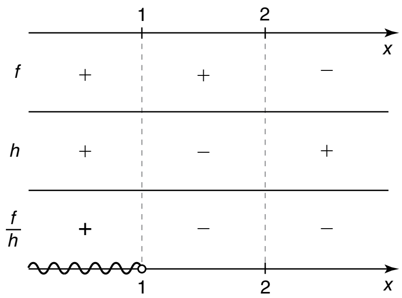
  $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ e } x = 2$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 1 e 2.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Portanto, a variação de sinal de h é representada por:



Representando a variação de sinal de f, h e $\frac{f}{h}$ em um quadro de sinais, temos:



Logo, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$.

b) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - 1}} + \sqrt{x^2 - 2}$

A função h está definida para todo x real tal que:

$2x^2 - 1 > 0 \text{ e } x^2 - 2 \geqslant 0$

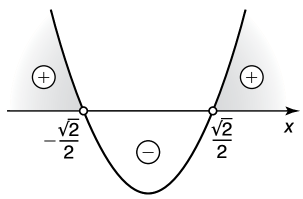
Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = 2x^2 - 1$ e $g(x) = x^2 - 2$, temos:

- Raízes de f:

  $2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



Então, para $2x^2 - 1 > 0$, temos:

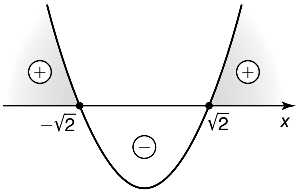
$x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (I)

- Raízes de g:

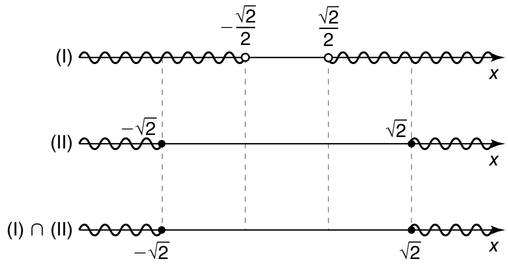
  $x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}$.

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Então, para $x^2 - 2 \geqslant 0$, temos:
$x \leqslant -\sqrt{2}$ ou $x \geqslant \sqrt{2}$ (II)
O domínio de h é a intersecção dos conjuntos dos valores de x obtidos em (I) e (II):



Logo, $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\sqrt{2} \text{ ou } x \geqslant \sqrt{2}\}$.

Exercícios contextualizados

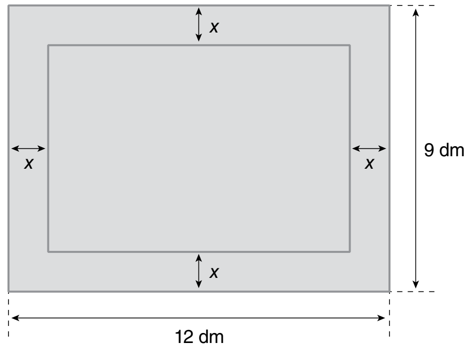
27. Para saber quando as ações terão valores iguais, devemos fazer:
$A(t) = B(t) \Rightarrow t + 10 = t^2 - 4t + 10$
$\therefore t^2 - 5t = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = 5$
Logo, as ações serão iguais no momento da compra das ações e após 5 meses.
Neste momento o seu valor será:
$A(5) = 15$
Então, após 5 meses as ações valerão R$ 15,00.
Alternativa **a**.

28. **a)** Temos que o comprimento do terreno será $2x + 4$. Assim:
$y = (2x + 4) \cdot x \Rightarrow y = 2x^2 + 4x$

b) Para $y = 70$, temos:
$2x^2 + 4x = 70 \Rightarrow x^2 + 2x - 35 = 0$
$\therefore x = -7$ ou $x = 5$
Como x representa a largura do terreno, ele não pode assumir valores negativos. Assim, a largura do terreno é de 5 m. Calculando o seu comprimento para $x = 5$:
$2x + 4 = 2 \cdot 5 + 4 = 14$
Logo, para a área de 70 m², o comprimento do canteiro é de 14 m.

29. De acordo com o enunciado, temos que a potência P é dada por $P = Ri^2$ e que a energia elétrica (E) é diretamente proporcional a essa potência. Logo, será proporcional também a Ri^2. Essa ideia pode ser descrita por uma função de constante k:
$E = kRi^2$
Como a resistência R é constante, temos que E e i podem ser relacionados por uma função de coeficiente positivo e que contém o par ordenado (0,0).
Alternativa **d**.

30. **a)** Fazendo um desenho para representar a situação, temos:



Daí, temos que o comprimento da mesa será $12 - 2x$, e a largura, $9 - 2x$. Assim:
$A(x) = (12 - 2x)(9 - 2x)$

b) Para $x = 3$, temos:
$A(3) = (12 - 2 \cdot 3)(9 - 2 \cdot 3) = 18$
Logo, a área da superfície da mesa será 18 dm².

c) Para $A = 70$, temos:
$(12 - 2x)(9 - 2x) = 70 \Rightarrow 2x^2 - 21x + 19 = 0$
$\therefore x = 9{,}5$ ou $x = 1$
No entanto, para $x = 9{,}5$, temos valores negativos, como as dimensões da mesa; logo, esse valor não convém.
Portanto, para que a área A da superfície da mesa seja 70 dm² devemos ter $x = 1$, ou seja, 1 dm.

31. **a)** $f(x) = 461{,}7 + 7{,}23x + 0{,}93x^2$
De acordo com o enunciado, temos que $x = -3$ para o ano de 2011, $x = -1$ para o ano de 2012, $x = 1$ para o ano de 2013 etc. Logo, para 2015, $x = 5$. Substituindo esse valor na função dada:
$f(5) = 461{,}7 + 7{,}23 \cdot 5 + 0{,}93 \cdot 5^2 = 521{,}1$
Logo, o valor do PIB no ano 2015 será em torno de 521,1 bilhões de dólares.

b) Para $f(x) = 506{,}5$, temos:
$461{,}7 + 7{,}23x + 0{,}93x^2 = 506{,}5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0{,}93x^2 + 7{,}23x - 44{,}8 = 0$
$\therefore x \approx -11{,}8$ ou $x \approx 4{,}1$
De acordo com o enunciado, temos que o PIB ao final de 2015 equivale ao valor referente a $x = 5$, logo no começo (ou final de 2014) equivale ao valor referente a $x = 3$.
Portanto, 12 meses equivalem a $5 - 3 = 2$
Assim, temos a seguinte regra de três:

$$\begin{array}{rcl} 2 & \text{——} & 12 \\ 1{,}1 & \text{——} & y \end{array}$$

$2y = 1{,}1 \cdot 12$
$2y = 13{,}2$
$y = \dfrac{13{,}2}{2}$
$y = 6{,}6$
Assim, concluímos que o mês é julho.

32. a) Queremos calcular o valor de $A(24)$. Para isso, temos que encontrar os valores dos coeficientes a, b e c da função $A(x)$. Sabemos que os pares (1, 470), (2, 920) e (3, 1.350) pertencem a essa função. Assim, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 470 \\ 4a + 2b + c = 920 \\ 9a + 3b + c = 1.350 \end{cases} \Rightarrow a = -10,\ b = 480 \text{ e } c = 0$$

Logo, temos a função $A(x) = -10x^2 + 480x$

Calculando $A(24)$:

$A(24) = -10 \cdot 24^2 + 480 \cdot 24 = 5.760$

Ou seja, o total arrecadado nesse posto nesse dia foi R$ 5.760,00.

b) Para $x = 10$, temos:

$A(10) = -10 \cdot 10^2 + 480 \cdot 10 = 3.800$

Logo, o total arrecadado nesse posto de pedágio até às 10 h desse dia foi de R$ 3.800,00.

c) Calculando primeiro o total arrecadado para $x = 11$:

$A(11) = -10 \cdot 11^2 + 480 \cdot 11 = 4.070$

Para obter o total de arrecadação n nesse posto de pedágio no intervalo das 10 h às 11 h desse dia, devemos calcular a diferença do total arrecadado até as 11 h e do total arrecadado até as 10 h. Assim:

$n = 4.070 - 3.800 = 270$

Logo, nesse intervalo de tempo foram arrecadados R$ 270,00.

33. Sendo $y = ax^2 + bx + c$ a função quadrática que corresponde ao gráfico, temos que os pontos (0, 55), (50, 0) e (30, 34) pertencem ao gráfico do enunciado e, portanto, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 55 = c \\ 0 = 2.500a + 50b + c \\ 34 = 900a + 30b + c \end{cases}$$

Os valores de a, b e c são obtidos por meio do sistema:

$$\begin{cases} c = 55 \\ 2.500a + 50b + c = 0 \quad \text{(I)} \\ 900a + 30b + c = 34 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo $c = 55$ em (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} 2.500a + 50b + 55 = 0 \\ 900a + 30b + 55 = 34 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 500a + 10b = -11 \quad \text{(I)} \\ -300a - 10b = 7 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Somando (I) e (II), temos:

$200a = -4 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{50}$

$\therefore b = -\dfrac{1}{10}$

Logo, $y = -\dfrac{x^2}{50} - \dfrac{x}{10} + 55$.

34. a) O gráfico que corresponde ao ciclista é parte de uma reta; logo, pode ser expresso por uma função do primeiro grau do tipo $y = ax + b$. Os pontos (0, 3) e (10, 5) pertencem ao gráfico. Desse modo, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3 = b \\ 5 = 10a + b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{5} \text{ e } b = 3$$

Portanto, a função que representa o gráfico do ciclista é $y = \dfrac{x}{5} + 3$.

Encontrando a ordenada da abscissa 5, temos $y = 4$.

Assim, para encontrar a distância percorrida pelo ciclista basta determinarmos a área da região sombreada no gráfico. Essa área representa um trapézio de base maior de valor 4, base menor de valor 3 e altura valendo 5. Assim, temos a área A_c, que representa a distância percorrida pelo ciclista:

$$A_c = \frac{(4 + 3) \cdot 5}{2} = 17{,}5$$

Portanto, o ciclista percorreu 17,5 metros.

b) Nas figuras abaixo, os retângulos sombreados têm um vértice na parábola da equação $y = x^2 + 3$.

Sejam S_1 e S_2 as somas das áreas dos retângulos sombreados nas figuras 1 e 2, respectivamente.

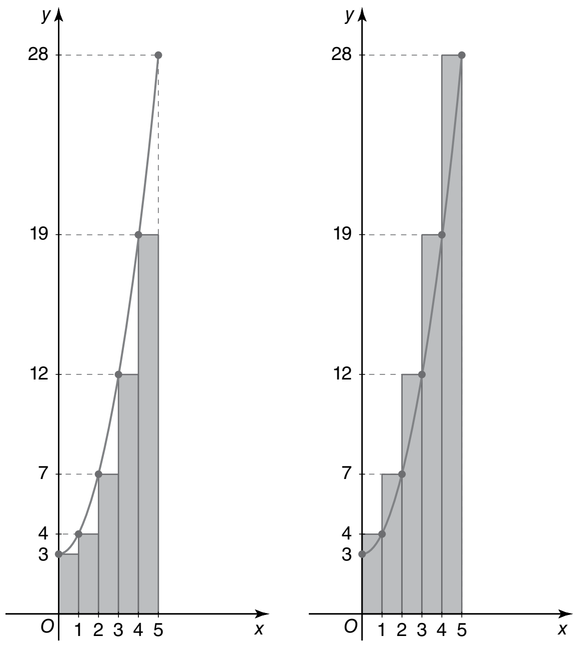


Figura 1 Figura 2

Conforme sugere o exercício técnico 6, a área S sob a parábola, para $0 \leqslant x \leqslant 5$, é, aproximadamente, a média aritmética entre S_1 e S_2. Calculando S_1 e S_2, temos:

$S_1 = 3 + 4 + 7 + 12 + 19 = 45$ e

$S_2 = 4 + 7 + 12 + 19 + 28 = 70$

Logo,

$$S = \frac{45 + 70}{2} = 57{,}5$$

Concluímos, então, que a motocicleta percorreu 57,5 m, aproximadamente.

35. a) Para $t = 3$, temos:

$R_A(3) = 3 \cdot 3 = 9$

Logo, até o final do mês 3 a loja A acumulou 9 mil reais.

b) Calculando a receita acumulada pela loja B até o final do mês 3:

$R_B(3) = 3$

Logo, até o final do mês 3 a loja B acumulou 3 mil reais.

Assim, a receita acumulada pelas duas lojas será o valor encontrado no item **a** juntamente com 3 mil reais, ou seja, 12 mil reais.

c) Para encontrarmos a lei de associação da função $R(t)$ que expressa a receita acumulada pelas duas lojas juntas, vamos primeiro expressar as leis levando em consideração intervalos iguais:

$$R_A(t) = \begin{cases} t^2 + t, \text{ se } 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ 3t, \text{ se } 2 < t \leqslant 4 \\ 3t, \text{ se } 4 < t \leqslant 12 \end{cases}$$

$$R_B(t) = \begin{cases} t, \text{ se } 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ t, \text{ se } 2 < t \leqslant 4 \\ 2t - 4, \text{ se } 4 < t < 12 \end{cases}$$

Note que não precisamos nos preocupar com os extremos dos intervalos pois para quaisquer das funções usadas nesses extremos o resultado será o mesmo.

Somando as funções intervalo a intervalo, temos:

$$R(t) = \begin{cases} t^2 + 2t, \text{ se } 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ 4t, \text{ se } 2 < t \leqslant 4 \\ 5t - 4, \text{ se } 4 < t \leqslant 12 \end{cases}$$

d) $R(t) = \begin{cases} t^2 + 2t, \text{ se } 0 \leqslant t \leqslant 2 \text{ (I)} \\ 4t, \text{ se } 2 < t \leqslant 4 \text{ (II)} \\ 5t - 4, \text{ se } 4 < t \leqslant 12 \text{ (III)} \end{cases}$

Para construir o gráfico de $R(t)$, vamos estudá-lo por partes.

(I) $R(t) = t^2 + 2t$ para $0 \leqslant t \leqslant 2$

- Fazendo $t^2 + 2t = 0$, temos:
  $t = 0$ ou $t = -2$
  Logo, o gráfico de R intercepta o eixo Ox somente no ponto (0, 0), pois o ponto (−2, 0) não pertence ao intervalo $0 \leqslant t \leqslant 2$. Logo, (0,0) é um extremo fechado do gráfico.
- Fazendo $t = 2$, temos $R = 8$.
- Calculando as coordenadas do vértice V:
  $V\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{\Delta}{4a}\right) = (-1, -1)$

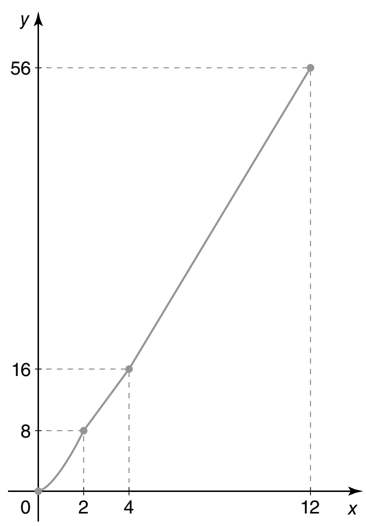
(II) $R(t) = 4t$ para $2 < t \leqslant 4$

- Fazendo $t = 2$, temos, $R = 8$
- Fazendo $t = 4$, temos, $R = 16$

(III) $R(t) = 5t - 4$ para $4 < t \leqslant 12$

- Fazendo $t = 4$, temos $R = 16$
- Fazendo $t = 12$, temos 56
  Note que (12, 56) é um extremo fechado do gráfico.

Então, obtemos o gráfico:



36. a) Para encontramos a lei de associação que expressa a altura h em função de x, vamos estudar o gráfico por partes.

- Para $0 \leqslant x \leqslant 6$:
  O gráfico é representado por uma reta, ou seja, por uma função do tipo $y = ax + b$. Notamos que os pontos (0, 0) e (6, 3) pertencem ao gráfico. Logo, temos o seguinte sistema:
  $\begin{cases} 0 = b \\ 3 = 6a + b \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$ e $b = 0$
  Logo, a lei de associação é $h = \dfrac{x}{2}$ para $0 \leqslant x \leqslant 6$.
- Para $6 \leqslant x \leqslant 10$:
  O gráfico é representado por uma parábola, ou seja, por uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$. Notamos que os pontos (6, 3) e (10, 19) pertencem ao gráfico e que $V(6, 3)$ é o seu vértice. Temos então o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 6 \\ 36a + 6b + c = 3 \\ 100a + 10b + c = 19 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -12a \text{ (I)} \\ -36a - 6b - c = -3 \text{ (II)} \\ 100a + 10b + c = 19 \text{ (III)} \end{cases}$$

  Somando (II) com (III), temos:

$$\begin{cases} b = -12a \text{ (I)} \\ 64a + 4b = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -12a \text{ (I)} \\ 16a + b = 4 \text{ (IV)} \end{cases}$$

  Substituindo (I) em (IV), temos:
  $16a - 12a = 4 \Rightarrow a = 1$
  E, portanto, $b = -12$ e $c = 39$.
  Logo, a lei de associação é $h = x^2 - 12x + 39$, para $6 \leqslant x \leqslant 10$.

Juntando as duas leis, temos a seguinte função:

$$h = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 6 \\ x^2 - 12x + 39, \text{ se } 6 < x \leqslant 10 \end{cases}$$

b) Para $x = 5$, temos:

$h = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

Logo, a altura h depois de 5 minutos de ser aberta a torneira é 2,5 centímetros.

c) Para $x = 8$, temos:

$h = 8^2 - 12 \cdot 8 + 39 = 7$

Logo, a altura h depois de 8 minutos de ser aberta a torneira é 7 metros.

37. a) Para obter a altura máxima atingida pelo jato de água desse chafariz, basta calcular o valor y_V da ordenada do vértice V da parábola de equação $f(t)$:

$$y_V = -\frac{100 - 4 \cdot \left(-\dfrac{5}{4}\right) \cdot 0}{4 \cdot \left(-\dfrac{5}{4}\right)} = 20$$

Logo, a altura máxima atingida é de 20 metros.

b) Para saber quantos segundos depois de ter sido lançado pelo esguicho, um jato de água atinge a superfície, basta calcular o valor das raízes da parábola de equação $f(t)$:

$f(t) = 0 \Rightarrow -\frac{5t^2}{4} + 10t = 0$

$\therefore\ t = 0$ ou $t = 8$

Como $t = 0$ é o instante em que o jato é lançado, concluímos que o jato atinge a superfície da água após 8 segundos.

38. **a)** Para saber a altitude máxima atingida pelo foguete, basta calcular o valor y_V da ordenada do vértice V da parábola de equação $f(t)$:

$$y_V = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{32}\right) \cdot 1{,}5}{4 \cdot \left(-\frac{1}{32}\right)} = 3{,}5$$

Logo, a altitude máxima atingida é de 3,5 quilômetros.

b) Para saber quantos segundos depois de ter sido lançado o foguete atingiu a superfície do mar, basta calcular o valor das raízes da parábola de equação $f(t)$:

$$f(t) = 0 \Rightarrow -\frac{t^2}{32} + \frac{t}{2} + 1{,}5 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{32}\right) \cdot 1{,}5 = \frac{1}{4} + \left(\frac{6}{32}\right) =$$

$$= \frac{4}{16} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$$

$$t = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{7}{16}}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{32}\right)} = \frac{-\frac{2}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{1}{16}} =$$

$$= \left(-\frac{2}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}\right) \cdot \left(-\frac{16}{1}\right) = 8 \pm 4\sqrt{7}$$

Desconsideramos o valor de t negativo, pois t representa o tempo.

Considerando $\sqrt{7} \approx 2{,}65$, temos que o tempo gasto para o foguete atingir o nível do mar foi:

$8 + 4\sqrt{7} \approx 8 + 4 \cdot 2{,}65 = 8 + 10{,}6 = 18{,}6$

Portanto, o tempo gasto pelo foguete foi aproximadamente 19 segundos.

39. Como $d(v)$ representa uma parábola de concavidade para baixo, temos que a maior economia de combustível se dará na velocidade calculada na abscissa x_V do vértice V dessa parábola:

$$x_V = \frac{-\frac{16}{15}}{-\frac{2}{150}} = 80$$

Logo, a maior economia de combustível se dá à velocidade de 80 km/h.

Alternativa **e**.

40. **a)** Como pelo menos 30 dos 70 alunos vão participar da viagem de formatura, podemos considerar o intervalo de alunos $30 \leqslant x \leqslant 70$. De acordo com as informações:

Para $x = 30$: $y = 800 \cdot 30$

Para $x = 31$: $y = (800 - 5) \cdot 31$

Para $x = 32$: $y = (800 - 2 \cdot 5) \cdot 32$

Daí, concluímos que uma possível função que relaciona a receita y em função do número x é:

$y = [800 - (x - 30) \cdot 5] \cdot x \Rightarrow y = -5x^2 + 950x$

Logo, $y = -5x^2 + 950x$, para $30 \leqslant x \leqslant 70$.

b) Primeiro analisamos a função $y = -5x^2 + 950x$, para $30 \leqslant x \leqslant 70$:

- Encontrando o seu vértice V, temos:

$$V\left(-\frac{950}{-10}, \frac{-950^2}{-20}\right) = (95, 45.125)$$

Notamos que a abscissa do vértice não faz parte do domínio dessa função.

- Como a função tem como gráfico uma parábola com a concavidade voltada para baixo, concluímos que ela será estritamente crescente até o ponto do vértice V.

Logo, concluímos que a quantidade de formandos que devem viajar para a companhia obter a receita máxima é a maior quantidade de formandos possível dessa escola, ou seja, 70 formandos.

c) Para obter a receita máxima, basta encontrar o valor de y para $x = 70$:

$y = -5 \cdot 70^2 + 950 \cdot 70 = 42.000$

Logo, a receita máxima que a companhia pode obter é de R$ 42.000,00.

41. Sendo x o número de espectadores, a receita $R(x)$ é dada por:

$R(x) = (8 + 0{,}20x)(120 - 2x) \Rightarrow$

$\Rightarrow R(x) = -0{,}4x^2 + 8x + 960$

Para obter o preço do ingresso de modo que a receita arrecadada por sessão seja maximizada, basta obter o valor da abscissa x_V do vértice V da parábola de equação $R(x)$:

$$x_V = \frac{-8}{-0{,}8} = 10$$

Logo, o preço estabelecido para o ingresso, em real, foi $8 + 0{,}2 \cdot 10$, ou seja, R$ 10,00.

Alternativa **d**.

42. **a)** Primeiro temos que encontrar a função do 2º grau do tipo $y = ax^2 + bx + c$, que está representada neste gráfico. Notamos que os pontos (0, 0), (200, 12.000) e (500, 15.000) pertencem ao gráfico. Desse modo, temos o sistema:

$$\begin{cases} 0 = c \\ 12.000 = 40.000a + 200b + c \\ 15.000 = 250.000a + 500b + c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 200a + b = 60 \\ 500a + b = 30 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{10},\ b = 80 \text{ e } c = 0$$

Logo, a função que representa esse gráfico é $y = -\frac{x^2}{10} + 80x$.

Calculando a produtividade anual, em número de laranjas por hectare, de uma plantação com 300 pés de laranja por hectare:

$$y = -\frac{300^2}{10} + 80 \cdot 300 = 15.000$$

Portanto, com 300 pés de laranja obtém-se 15.000 unidades.

b) Para saber a quantidade de pés de laranja por hectare para se obter a produtividade máxima, basta calcular o valor x_V da abscissa do vértice V da parábola de equação y:

$$x_V = -\frac{80}{2 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)} = 400$$

Logo, com 400 pés de laranja por hectare obtém-se a produtividade máxima.

c) Para saber a produtividade máxima anual, basta calcular o valor y_V da ordenada do vértice V da parábola de equação y:

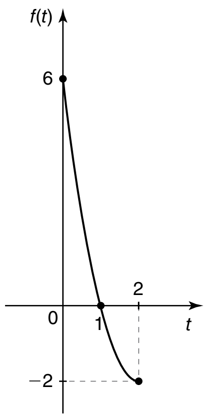
$$y_V = -\frac{400^2}{10} + 80 \cdot 400 = 16.000$$

Logo, a produtividade máxima de laranjas por 1 hectare é de 16.000 unidades.

43. **a)** O gráfico de f está contido em uma parábola $\mathcal{P}$.

- Fazendo $f(t) = 0$, temos:
  $2t^2 - 8t + 6 = 0 \Rightarrow t = 3$ ou $t = 1$
  Logo, a parábola $\mathcal{P}$ intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 1 e 3.
- Fazendo $t = 0$, temos:
  $f(t) = 6$
  Logo, a parábola $\mathcal{P}$ intercepta o eixo Oy no ponto de ordenada 6.
- Calculando as coordenadas do vértice V da parábola $\mathcal{P}$, temos:
  $V\left(\frac{8}{4}, -\frac{16}{8}\right) = (2, -2)$

O gráfico de f é o arco da parábola $\mathcal{P}$, para $0 \leqslant t \leqslant 2$:



b) De acordo com o gráfico do item **a**, podemos observar que a temperatura do recinto esteve positiva no intervalo $0 \leqslant t < 1$.
Logo, esteve positiva por 1 hora.

c) De acordo com o gráfico do item **a**, podemos observar que a temperatura do recinto esteve negativa no intervalo $1 < t \leqslant 2$.
Logo, esteve negativa por 1 hora.

d) Pelo gráfico do item **a**, podemos observar que a menor temperatura atingida no recinto é −2 °C.

e) Como a máquina fica ligada por 2 horas até ser desligada e fica desligada por 2 horas até ser ligada, concluímos que em 24 horas a máquina permanece ligada por 12 horas.

44. $p = -\frac{t^2}{3} + \frac{2t}{3} + 1$

a) O preço do dólar foi o mesmo da cotação de fechamento do dia anterior, quando a variação percentual p% for nula, ou seja, basta fazer $p = 0$:

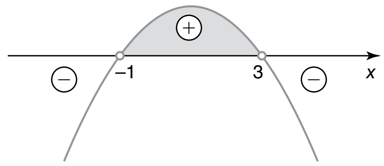
$$-\frac{t^2}{3} + \frac{2t}{3} + 1 = 0 \Rightarrow -t^2 + 2t + 3 = 0$$

$\therefore t = -1$ ou $t = 3$
Como t representa o tempo, $t = -1$ não convém. Concluímos que o preço do dólar foi o mesmo da cotação de fechamento do dia anterior no instante 3, ou seja, após 3 horas de análise.

b) O preço do dólar foi maior que o da cotação de fechamento do dia anterior quando a variação percentual p% foi positiva, ou seja, bastou fazer, $p > 0$:

$$-\frac{t^2}{3} + \frac{2t}{3} + 1 > 0 \Rightarrow -t^2 + 2t + 3 > 0$$

Pelo item **a**, temos que as raízes de $-t^2 + 2t + 3 = 0$ são $t = -1$ ou $t = 3$. Esquematizando, temos:



Como o tempo começou a ser corrido a partir de $t = 0$, concluímos que o preço do dólar foi maior que o da cotação de fechamento do dia anterior do instante inicial até o instante de 3 horas.

c) Utilizando o esquema do item **b**, concluímos que o preço do dólar foi menor que o da cotação de fechamento do dia anterior após o instante 3 até o instante final da análise, ou seja, $3 < t \leqslant 5$.

45. Sendo C_A o custo de produção de cada tonelada de arroz e C_S o custo de produção de cada tonelada de soja, temos:

$$C_S < C_A \Rightarrow 204 + \frac{40}{x} < 202 + \frac{120}{x + 10}$$

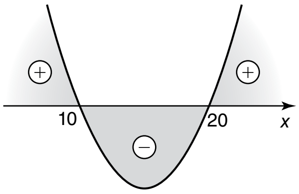
$$\therefore \frac{2x(x + 10) + 40(x + 10) - 120x}{x(x + 10)} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 60x + 400}{x^2 + 10x} < 0$$

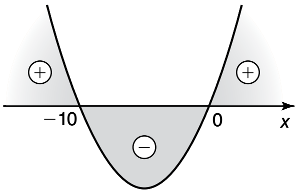
Vamos resolver essa inequação no universo $\mathbb{R}$ e só no final considerar que $x \geqslant 0$, pois x representa o número de toneladas produzidas.
Condição de existência:
$x^2 + 10x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ ou $x \neq -10$
Estudando a variação de sinal das funções:
$f(x) = 2x^2 - 60x + 400$ e $g(x) = x^2 + 10x$, temos:

- Raízes de f:
  $2x^2 - 60x + 400 = 0 \Rightarrow x = 10$ ou $x = 20$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 10 e 20.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



- Raízes de g:
  $x^2 + 10x = 0 \Rightarrow x = -10$ ou $x = 0$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 0 e -10.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.
  Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:

	$x < -10$	-10 a 0	0 a 10	10 a 20	$x > 20$
f	+	+	+	−	+
g	+	−	+	+	+
$\frac{f}{g}$	+	−	+	−	+

O intervalo $-10 < x < 0$ não convém, pois x se refere às toneladas de grãos que devem ser produzidas no sítio.

Portanto, de acordo com o quadro de sinais, a quantidade para que o custo da produção de soja seja menor que o custo da produção de arroz é qualquer valor entre 10 e 20 toneladas, ou seja, $10 < x < 20$.

46. $C(t) = \frac{t}{t^2 + 7}$

Para saber durante quantas horas, após o início da injeção, a concentração do medicamento na circulação sanguínea será de pelo menos 0,125 mg/L, basta resolver a inequação $C(t) \geqslant 0{,}125$:

$$C(t) \geqslant 0{,}125 \Rightarrow \frac{t}{t^2+7} \geqslant 0{,}125$$

$$\therefore \frac{t}{t^2+7} - \frac{125}{1.000} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{t}{t^2+7} - \frac{1}{8} \geqslant 0$$

$$\therefore \frac{-t^2 + 8t - 7}{8(t^2+7)} \geqslant 0$$

Vamos resolver essa inequação no universo $\mathbb{R}$ e só no final considerar $t \geqslant 0$, pois t representa o número de horas.

Condição de existência:

$8(t^2 + 7) \neq 0 \Rightarrow t^2 + 7 \neq 0$

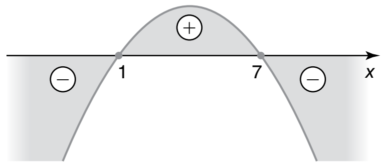
$\therefore t^2 \neq -7$

Logo, t pode assumir qualquer valor.

Estudando a variação de sinais das funções $f(t) = -t^2 + 8t - 7$ e $g(t) = 8(t^2 + 7)$, temos:

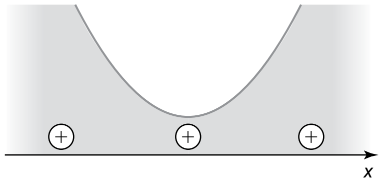
- Raízes de f:
  $-t^2 + 8t - 7 = 0 \Rightarrow t = 1$ ou $t = 7$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 1 e 7.
- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo.

Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



- Raízes de g:
  $8(t^2 + 7) = 0 \Rightarrow t^2 + 7 = 0$
  $\Delta < 0$
  Logo, a parábola não intercepta eixo Ox, pois não possui raízes reais.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:

	$x < 1$	1 a 7	$x > 7$
f	−	+	−
g	+	+	+
$\frac{f}{g}$	−	+	−

Portanto, de acordo com o quadro de sinais, a concentração do medicamento será de pelo menos 0,125 mg/L da primeira à sétima hora, ou seja, por um período de 6 horas.

Pré-requisitos para o capítulo 6

1. a) Verdadeiro, pois $-x$ é o oposto de x. Se $x = -3$ o seu oposto será 3, um valor positivo.

b) Verdadeiro, pois se $-x$ representa um número positivo, x representa o seu oposto, ou seja, um número negativo.

c) Falso, para $x = -2$, temos $-x = -(-2) = 2$, que é um valor positivo.

d) Falso, como x pode assumir qualquer valor real, x pode assumir um valor negativo.

e) Verdadeiro, pois x^2 será um valor positivo e tirando-lhe a raiz teremos x.

f) Falso, pois para qualquer valor de x, temos x^2 positivo e tirando-lhe a raiz encontraremos como resultado $|x|$. E para x negativo, $|x| = -x$.

2. Resposta pessoal.

3. **a)** V, pois apenas os pontos de abscissas -4 e 4 do eixo real distam 4 cm da origem O, e esses dois números pertencem a A.

b) F, conforme a explicação do item **a**.

c) F, pois, por exemplo, o ponto de abscissa -5, que pertence ao conjunto A, dista exatamente 5 cm da origem O.

d) V, pois o menor número de A é -5 e o maior é 5.

e) F, pois os únicos números do eixo real que distam 5 cm de O têm abscissas -5 e 5, que não pertencem a B.

f) V, pois os únicos pontos do eixo real que distam 6 cm de O têm abscissas -6 e 6, e esses dois números pertencem a C.

g) F, conforme explicação do item **f**.

h) V, pois o maior número negativo de C é -5 e o menor número positivo de C é 5.

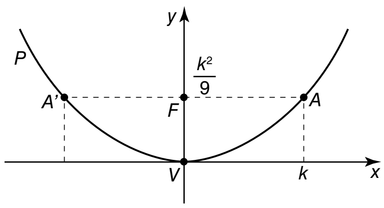
i) V, pois os pontos do eixo real que distam 5 cm ou menos de O têm abscissas tais que $-5 \leqslant x \leqslant 5$. Logo, os números de D não pertencem a esse intervalo.

j) F, pois os únicos pontos do eixo real que distam 5 cm de O têm abscissas -5 e 5, e esses números não pertencem a D.

Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. Indicando, respectivamente, por F e V o foco e o vértice da parábola P da equação $y = \dfrac{x^2}{9}$, sejam A e A' os pontos de intersecção de P com a reta que passa por F e é paralela ao eixo das abscissas.
Sendo A o ponto de abscissa positiva k, temos: $A\left(k, \dfrac{k^2}{9}\right)$



Observando que a ordenada de A é a distância FV e a abscissa é a distância FA, temos:

$$k = 2 \cdot \frac{k^2}{9} \Rightarrow k = 4{,}5$$

$$\therefore\ FV = \frac{(4{,}5)^2}{9} \Rightarrow FV = 2{,}25$$

Logo, o receptor da antena está localizada a 2,25 m do vértice da superfície parabólica.

2. Resposta pessoal.

Análise da resolução

COMENTÁRIO: O aluno não poderia ter considerado como valor máximo da função receita a ordenada do vértice, pois a sua abscissa não é um valor natural.

Resolução correta:

Cada um dos x passageiros que irão viajar vai pagar a quantia $20 + 4(40 - x)$, em reais. Logo, a receita $f(x)$, em reais, apurada pela empresa de turismo é expressa por:

$$f(x) = x[20 + 4(40 - x)]$$

ou seja,

$$f(x) = -4x^2 + 180x$$

Se a variável x pudesse assumir qualquer valor real, o gráfico dessa função seria uma parábola; porém, no contexto do problema, a variável x representa um número de pessoas menor ou igual a 40, portanto essa variável só pode assumir valores naturais menores ou iguais a 40.
As coordenadas do vértice $V(x_v, y_v)$ da parábola que contém o gráfico de f são dadas por:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{180}{2 \cdot (-4)} = 22{,}5 \text{ e}$$

$$y_v = -\frac{180^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 0}{4 \cdot (-4)} = 2.025$$

O valor máximo da função receita é obtido quando x assume o valor natural mais próximo de 22,5. Há, portanto, dois valores possíveis para x: 22 ou 23, pois esses dois valores estão igualmente próximos de 22,5. Assim, concluímos que o valor máximo da função receita é dado por $f(22)$ ou $f(23)$, ou seja:

$f(22) = -4 \cdot 22^2 + 180 \cdot 22 = 2.024$ ou

$f(23) = -4 \cdot 23^2 + 180 \cdot 23 = 2.024$

Logo, a receita máxima que pode ser apurada é de R$ 2.024,00.