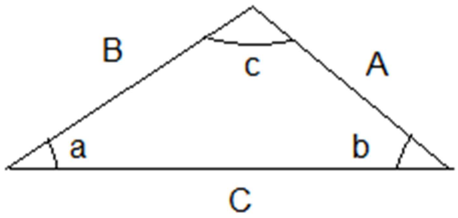
Lei dos Senos



Sejam A, B e C os valores dos lados desse triângulo e a, b e c os ângulos desse triângulo. Associando cada lado correspondente ao seu ângulo, temos a lei dos senos:

$$\frac{A}{sen\ a} = \frac{B}{sen\ b} = \frac{C}{sen\ c} = 2R$$

Onde R é o raio da circunferência cujo triângulo está inscrito.

* Alguns valores para seno:

Na forma de fração:

sen 30° = $\frac{1}{2}$

sen 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

sen 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

sen 120° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

sen 150° = $\frac{1}{2}$

Na forma decimal:

sen 30° = 0,5

sen 45° = 0,707

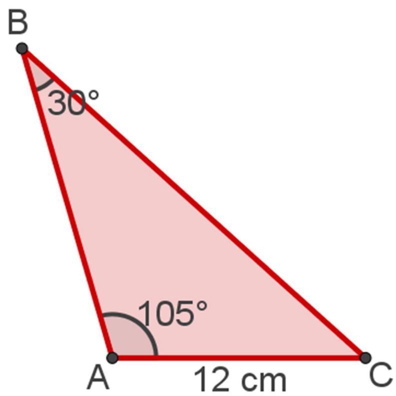
sen 60° = 0,866

sen 120° = 0,866

sen 150° = 0,5

Exercícios:

1. Três ilhas A, B e C aparecem num mapa em escala 1:10000, como na figura. Das alternativas, a que melhor se aproxima de distância entre as ilhas A e B é:



a) 2,3 km
b) 2,1 km
c) 1,9 km
d) 1,4 km
e) 1,7 km

Resolução:

Nosso primeiro passo será descobrir o ângulo (x) presente no vértice C, pois nele terá o seno referente ao lado AB que procuramos. Para isto, devemos ter em mente que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°

105 + 30 + x = 180°
135 + x = 180°
x = 180 – 135
x = 45º

Agora é só aplicar a lei dos senos para encontrar o lado AB que desejamos (usaremos c para indicar o ângulo referente ao vértice C e b para indicar o ângulo referente ao vértice B)

$\frac{sen\ c}{AB} = \frac{sen\ b}{AC}$

$\frac{Sen\ 45°}{AB} = \frac{Sen\ 30°}{AC}$

$\frac{0{,}707}{AB} = \frac{0{,}5}{12}$

0,5AB = 8,484

AB = $\frac{8{,}484}{0{,}5}$

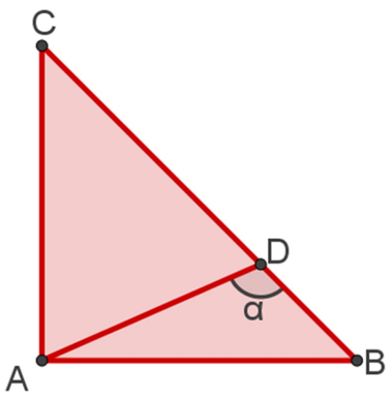
AB = 16,968

Porém a questão nos mostra que existe uma escala de 1:10000, ou seja, a cada 1 centímetro equivale a 10000 cm na distância real das ilhas

16,968 . 10000 = 169680 cm
169680 cm = 1,69 km

(Alternativa E)

2. Considere o triângulo retângulo a seguir.



Sabendo-se que α = 120°, AB = AC = 1 cm, então AD é igual a:

a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm

b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm
c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm
d) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

Resolução:

Antes de começarmos a fazer nossos cálculos, é importante que levemos em consideração alguns pontos
O triângulo é retângulo no vértice A, logo, mede 90°
Como os lados AB e AC são iguais, seus ângulos também serão iguais, e como sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° teremos (Usaremos X para os ângulos que ainda não possuímos):

A + X + X = 180
90 + 2X = 180
2X = 180 – 90
2X = 90

X = $\frac{90}{2}$

X = 45°

Agora que sabemos que os ângulos referentes aos vértices B e C medem 45°, podemos descobrir o terceiro ângulo do triângulo menor, tendo em vista que a é igual a 120° e o presente no vértice B é de 45° (Usaremos Y para o ângulo que ainda não possuímos):

120° + 45° + Y = 180
165 + Y = 180
Y = 180 – 165
Y = 15°

Por fim, para obter o lado AD que é o que queremos descobrir, devemos aplicar a lei dos senos (usaremos b como ângulo referente ao vértice B)

$$\frac{sen\ a}{AB} = \frac{sen\ b}{AD}$$

$$\frac{sen\ 120}{AB} = \frac{sen\ 45}{AD}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{AD}$$

Para fazermos essa divisão de frações, devemos repetir a primeira e multiplicar pelo inverso da segunda

$$\frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{1}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{1}{AD}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2AD}$$

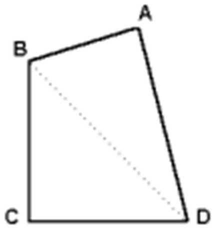
2AD $\sqrt{3}$ = 2 $\sqrt{2}$

AD = $\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

AD = $\sqrt{\frac{2}{3}}$

(Alternativa A)

3. Do quadrilátero ABCD da figura a seguir, sabe-se que: os ângulos internos de vértices A e C são retos; os ângulos CDB e ADB medem, respectivamente, 45° e 30°; o lado CD mede 2dm. Então, os lados AD e AB medem, respectivamente, em dm:



a) $\sqrt{6}$ e $\sqrt{3}$.
b) $\sqrt{5}$ e $\sqrt{3}$.
c) $\sqrt{6}$ e $\sqrt{2}$.
d) $\sqrt{6}$ e $\sqrt{5}$.
e) $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$.

Resolução:

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, teremos:
(usaremos b para indicar o ângulo CBD referente ao vértice B):

90 + 45 + b = 180°
135 + b = 180
b = 180 – 135
b = 45°

Como possuímos dois ângulos iguais, isso também significa que possuímos um triângulo isósceles, ou seja, com dois dos seus lados iguais

CD = BC = 2 dm

Sendo assim, para acharmos o lado BD, aplicaremos o Teorema de Pitágoras.

DB² = CD² + BC²
DB² = 2² + 2²
DB² = 8
DB = $\sqrt{8}$
DB = $\sqrt{2.2.2}$ = 2$\sqrt{2}$

Em seguida devemos calcular os ângulos do terceiro triângulo:
(usaremos b’ para o ângulo ABD presente no vértice B)

90 + 30 + b’ = 180
120 + b’ = 180
b’ = 180 – 120
b’ = 60°

Agora é só aplicar a lei dos senos para descobrir os lados que desejamos (usaremos a para o ângulo presente no vértice A e d para o ângulo presente no vértice D)

$$\frac{Sen\ d}{AB} = \frac{sen\ a}{DB}$$

$$\frac{sen\ 30}{AB} = \frac{sen\ 90}{DB}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{AB} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Para fazermos essa divisão de frações, devemos repetir a primeira e multiplicar pelo inverso da segunda

$$\frac{1}{2} . \frac{1}{AB} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{2AB} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

2AB = $2\sqrt{2}$

AB = $\frac{2\sqrt{2}}{2}$

AB = $\sqrt{2}$

Agora que achamos um lado, é só encontrar o outro utilizando os mesmos métodos

$$\frac{sen\ b'}{AD} = \frac{sena}{DB}$$

$$\frac{sen\ 60}{AD} = \frac{sen\ 90}{DB}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{AD} = \frac{1}{DB}$$

Para fazermos essa divisão de frações, devemos repetir a primeira e multiplicar pelo inverso da segunda

$$\frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{1}{AD} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2AD} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

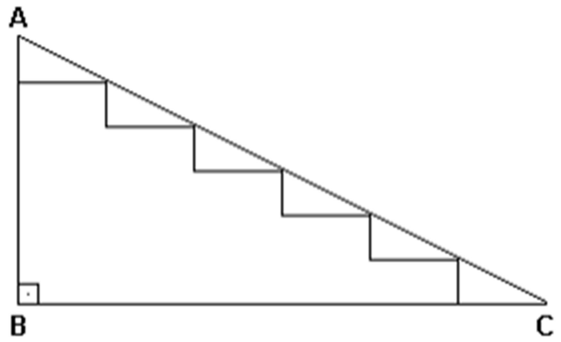
$2AD = 2\sqrt{6}$

$AD = \frac{2\sqrt{6}}{2}$

$AD = \sqrt{6}$

(Alternativa C)

4. A figura adiante representa o perfil de uma escada cujos degraus têm todos a mesma extensão, além de mesma altura. Se AB=2m e BCA mede 30°, então a medida da extensão de cada degrau é:



a) $(2\sqrt{3})/3$ m
b) $(\sqrt{2})/3$ m
c) $(\sqrt{3})/6$ m
d) $(\sqrt{3})/2$ m
e) $(\sqrt{3})/3$ m

Resolução:

Utilizando a lei dos senos teremos (usaremos c para o ângulo presente no vértice C e b para o ângulo presente no vértice B)

$$\frac{sen\ c}{AB} = \frac{sen\ b}{AC}$$

$$\frac{sen\ 30}{AB} = \frac{sen\ 90}{AC}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{AC}$$

Para fazermos essa divisão de frações, devemos repetir a primeira e multiplicar pelo inverso da segunda

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{AC}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{AC}$$

AC = 4 m

Agora para descobrirmos a extensão da escada, aplicaremos o teorema de Pitágoras

$AC^2 = AB^2 + BC^2$
$4^2 = 2^2 + BC^2$
$16 = 4 + BC^2$
$BC^2 = 16 - 4$
$BC^2 = 12$
$BC = \sqrt{12}$
$BC = \sqrt{4.3} = 2\sqrt{3}$

Como BC é a extensão total e questão nos pede a extensão apenas de um degrau, levando em consideração que existem 6 degraus na figura, teremos (usaremos E para indicar a extensão do degrau) :

$E = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(Alternativa E)

5. Uma escada de 2m de comprimento está apoiada no chão e em uma parede vertical. Se a escada faz 30° com a horizontal, a distância do topo da escada ao chão é de:

a) 0,5 m
b) 1 m
c) 1,5 m
d) 1,7 m
e) 2 m

Resolução:

Para que possamos resolver essa questão, é só aplicarmos a lei dos senos (usaremos x para representar a distância que a questão nos pede)

$$\frac{Sen\ 30}{x} = \frac{sen\ 90}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

Para fazermos essa divisão de frações, devemos repetir a primeira e multiplicar pelo inverso da segunda

$$\frac{1}{2}.\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$$

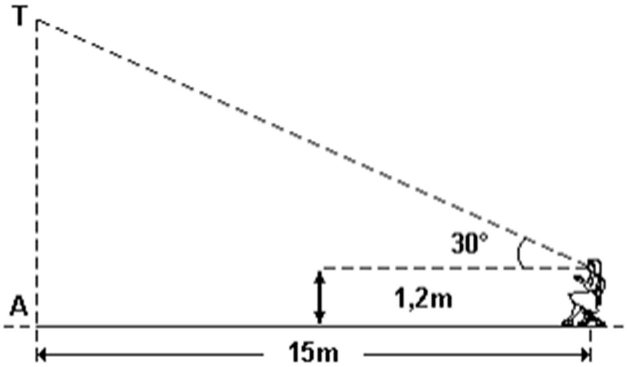
2x = 2

x = 1 m

(Alternativa B)

6. A seguir está representado um esquema de uma sala de cinema, com o piso horizontal. De quanto deve ser a medida de AT para que um espectador sentado a 15 metros da tela, com os olhos 1,2 metros acima do piso, veja o ponto mais alto da tela, que é T, a 30° da horizontal?
Dados:

sen 30° = 0,5
sen 60° = 0,866
cos 30° = 0,866
cos 60° = 0,5
$\sqrt{2}$ = 1,41
$\sqrt{3}$ = 1,73
tg 30° = 0,577
tg 60° = $\sqrt{3}$



a) 15,0 m
b) 8,66 m
c) 12,36 m
d) 9,86 m
e) 4,58 m

Resolução:

Primeiro devemos descobrir quanto vale o ângulo presente no vértice T (usaremos t para indicar este ângulo)
90 + 30 + t = 180
120 + t = 180
t = 180 - 120
t = 60°

Utilizando a lei dos senos com as informações da questão, teremos (utilizaremos x para indicar o campo de visão da pessoa sentada):

$$\frac{sen\ 30}{x} = \frac{sen\ 60}{15}$$

$$\frac{0{,}5}{x} = \frac{0{,}866}{15}$$

0,866x = 7,5

x = $\frac{7,5}{0,866}$

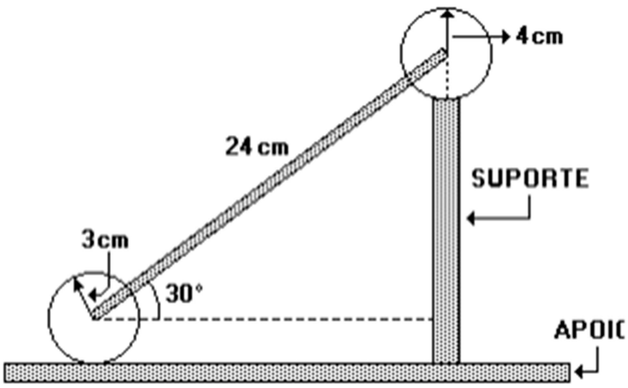
x = 8,66

Porém, esta é só a altura dos olhos do espectador até o topo da tela. Devemos adicionar a este calculo a altura de 1,2 metros para que possamos achar a altura até o chão que é o que procuramos

AT = 8,66 + 1,2
AT = 9,86 m

(Alternativa D)

7. A figura a seguir é um corte vertical de uma peça usada em certo tipo de máquina. No corte aparecem dois círculos, com raios de 3cm e 4cm, um suporte vertical e um apoio horizontal.



A partir das medidas indicadas na figura, conclui-se que a altura do suporte é

a) 7 cm
b) 11 cm
c) 12 cm
d) 14 cm
e) 16 cm

Resolução:

Aplicando a lei dos senos de acordo com as informações encontradas na questão, teremos (utilizaremos x para indicar a altura da linha pontilhada até o final do apoio):

$$\frac{sen\ 30}{x} = \frac{sen\ 90}{24}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{x} = \frac{1}{24}$$

Para fazermos essa divisão de frações, devemos repetir a primeira e multiplicar pelo inverso da segunda

$\frac{1}{2} . \frac{1}{x} = \frac{1}{24}$

$\frac{1}{2x} = \frac{1}{24}$

2x = 24

x = $\frac{24}{2}$

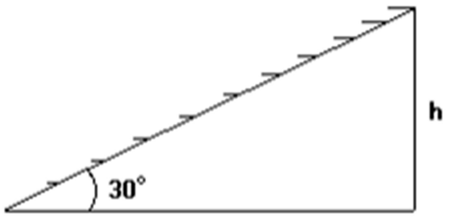
x = 12

Porém devemos adicionar os 3 cm a esta altura pois é a distância da linha pontilhada até o suporte, e devemos subtrair também 4 cm desta altura pois o suporte só vai até a metade da circulo que está sobre ele.

Altura do suporte = 12 + 3 – 4 = 11 cm

(Alternativa B)

8. Uma escada rolante de 10 m de comprimento liga dois andares de uma loja e tem inclinação de 30°. A altura h entre um andar e outro, em metros, é tal que:



a) 3 < h < 5
b) 4 < h < 6
c) 5 < h < 7
d) 6 < h < 8
e) 7 < h < 9

Resolução:

Aplicando a lei dos senos de acordo com as informações obtidas na questão, teremos:

$\frac{sen\ 30}{h} = \frac{sen\ 90}{10}$

$\frac{\frac{1}{2}}{h} = \frac{1}{10}$

Para fazermos essa divisão de frações, devemos repetir a primeira e multiplicar pelo inverso da segunda

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{h} = \frac{1}{10}$

$\frac{1}{2h} = \frac{1}{10}$

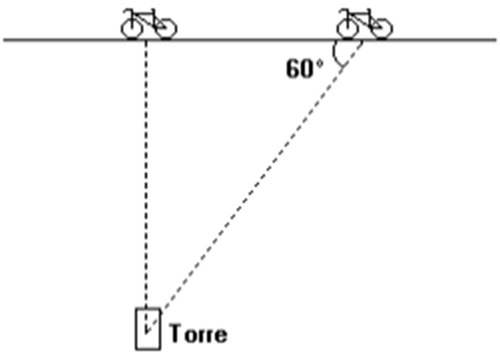
2h = 10

h = $\frac{10}{2}$

h = 5

(Alternativa B)

9. Trafegando num trecho plano e reto de uma estrada, um ciclista observa uma torre. No instante em que o ângulo entre a estrada e a linha de visão do ciclista é 60°, o marcador de quilometragem da bicicleta acusa 103,50 km. Quando o ângulo descrito passa a ser 90°, o marcador de quilometragem acusa 104,03 km



Qual é, aproximadamente, a distância da torre à estrada?
(Se necessitar use $\sqrt{2}$ = 1,41; $\sqrt{3}$ = 1,73; $\sqrt{6}$ = 2,45.)

a) 463,4 m
b) 535,8 m
c) 755,4 m
d) 916,9 m
e) 1071,6 m

Resolução:

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo deve ser igual a 180° então para descobrirmos o ângulo referente ao ponto em que se encontra a torre (t), teremos:

90 + 60 + t = 180
150 + t = 180
t = 180 – 150
t = 30°

Outra informação importante é saber qual a distância (d) percorrida pela bicicleta entre os dois pontos

d = 104,03 – 103,50
d = 0,53km = 530 metros

Agora é só aplicar a lei dos senos utilizando as informações obtidas na questão (utilizaremos x para indicar a distância entre a torre e a estrada)

$\frac{sen\ 30}{530} = \frac{sen\ 60}{x}$

$\frac{\frac{1}{2}}{530} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{x}$

Para fazermos essa divisão de frações, devemos repetir a primeira e multiplicar pelo inverso da segunda

$\frac{1}{2} . \frac{1}{530} = \frac{1,73}{2} . \frac{1}{x}$

$\frac{1}{1060} = \frac{1,73}{2x}$

2x = 1833,8

x = $\frac{1833,8}{2}$

x = 916,9m

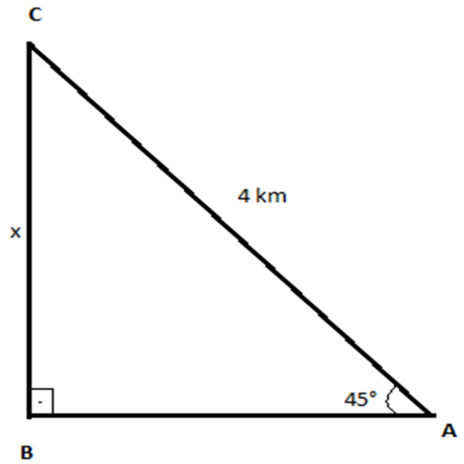
(Alternativa D)

10. Duas rodovias retilíneas A e B se cruzam formando um ângulo de 45°. Um posto de gasolina se encontra na rodovia A, a 4 km do cruzamento. Pelo posto passa uma rodovia retilínea C, perpendicular à rodovia B. A distância do posto de gasolina à rodovia B, indo através de C, em quilômetros, é

a) ($\sqrt{2}$)/8.
b) ($\sqrt{2}$)/4.
c) ($\sqrt{3}$)/2.
d) $\sqrt{2}$.
e) 2$\sqrt{2}$.

Resolução:

De acordo com as informações dadas pela questão teremos:



Agora é só aplicar a lei dos senos

$\frac{sen\ 90}{4} = \frac{sen\ 45}{x}$

$\frac{1}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{x}$

Para fazermos essa divisão de frações, devemos repetir a primeira e multiplicar pelo inverso da segunda

$\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{1}{x}$

$\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2x}$

2x = $4\sqrt{2}$

x = $\frac{4\sqrt{2}}{2}$

x = $2\sqrt{2}$

(Alternativa E)