EXPONENCIAIS I

Potência

Dado um número b podemos escrever esse número em forma de potência. Para isso, precisamos fazer a decomposição em fatores primos. Esse procedimento nos ajudará muito na resolução de algumas questões, principalmente em questões de funções exponenciais.

Exemplo:

$b^n = b \; x \; b \; x \; b \; x \; b \; x \; \ldots x \; b$

$3^5 = 3 \; x \; 3 \; x \; 3 \; x \; 3 \; x \; 3$

Propriedade 1:

A multiplicação de duas bases iguais com diferentes potências pode ser escrita conservando a base e somando as potências:

$b^a . b^c = b^{a+c}$

Exemplo:

$2^3 x \; 2^6 = 2^{3+6} = 2^9$

$5^3 x \; 5^7 = 5^{7+3} = 5^{10}$

Propriedade 2:

A divisão de duas bases iguais com diferentes expoentes pode ser escrita conservando a base e diminuindo as potências:

$\frac{b^a}{b^c} = b^{a-c}$

Exemplo:

$\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2$

Propriedade 3:

Uma potência em parênteses elevada a uma potência nós multiplicamos as potências e conservamos a base:

$(b^c)^a = b^{a.c}$

Exemplo:

$(2^3)^5 = 2^{15}$

Expoente negativo:

Quando encontramos expoente negativo resolvemos a equação normalmente com o sinal negativo. Se no final a resposta ainda possuir o expoente negativo, invertemos a fração.

$b^{-1} = \frac{1}{b}$

Exemplo:

$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$

$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 2^4$

Expoente fracionário:

Se o expoente der um número fracionário podemos escrever na forma de radiciação da seguinte forma:

$b^{\frac{a}{c}} = \sqrt[c]{b^a}$

Exemplo:

$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2]{2^6} = 2^3$

$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{16} = 4$

$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

Função Exponencial:

O assunto de funções exponenciais, no qual trabalharemos nesta seção é comumente usado para descrições de crescimento de colônia de bactérias, decaimento radioativo, cálculo de juros, entre outros. Comecemos então apresentando a forma da função exponencial:

$y = b^x$ (Equação que apresenta letra no expoente)

Você já deve ter ouvido a expressão "cresce exponencialmente" em jornais para determinar o aumento de juros ou mesmo inflação em determinado período. Então nesse caso existe uma função que representa esse aumento, e é dada pela forma apresentada.

O termo b é sempre maior que 0(zero) e o termo X pode ser qualquer número real.

Método da redução de ordem:

Consiste em fatorar as bases que não forem números primos e com uso das propriedades, igualar as bases, e partir daí poderemos ou não cortar as bases e resolver a equação nos expoentes. Veremos alguns exemplos abaixo.

Exemplo:

$3^x = 81$

Se decompusermos o 81 em fatores primos:

$3^x = 3^4$

Portanto x = 4

Exemplo 2:

$27^{3x-2} = 9$

Vamos decompor o 27 e o 9 em fatores primos:

$27 = 3x3x3$

$9 = 3x3$

Portanto:

$3^{3(3x-2)} = 3^2$

Podemos cortar as bases pois agora são iguais:

$3(3x-2)=2$

$9x-6=2$

$x=\frac{8}{9}$

Exemplo 3:

$\left(\sqrt{2}\right)^x=8$

A raiz de 2 pode ser escrita da forma em potência:

$2^{\frac{1}{2}^x}=8$

Decompondo 8 em fatores primos:

$2^{\frac{1}{2}^x}=2^3$

Podemos simplificar as bases:

$\frac{1}{2}.x=3$

$x=6$

Exemplo 4:

$\left(\sqrt[3]{2}\right)^x=8$

Decompondo 8 em fatores primos e colocando a raiz em forma de potência:

$2^{\frac{1x}{3}}=2^3$

Podemos simplificar as bases:

$\frac{x}{3}=3$

$x=9$

Exemplo 5:

$\left(\frac{1}{5}\right)^x=125$

Nesse caso passaremos o 5 para o numerador colocando o expoente negativo, e vamos decompor o 125 em fatores primos:

$125=5x5x5$

$5^{-x}=5^3$

Podemos simplificar as bases:

$-x = 3$

$x = -3$

Método da substituição de variável

Dependendo a equação exponencial que encontrarmos, para resolvê-las precisamos utilizar um artifício matemático devido a dificuldade de resolução. Na substituição de variável chamaremos um termo de X e resolveremos a equação, após voltaremos para encontrar a solução de fato. Um exemplo abaixo ficará melhor de visualizar.

Exemplo:

$4^x - 20.2^x + 64 = 0$

Nesse caso ficaria muito difícil resolver a equação da forma que está. Vamos começar decompondo os termos que possuem potência em fatores primos:

$2^{2^x} - 20.2^x + 64 = 0$

Não temos opções de encontrar o x dessa forma. Então chamaremos o termo 2^xde Y e substituímos na equação:

$y^2 - 20y + 64 = 0$

Transformamos a equação exponencial em segundo grau e resolveremos por Bháskara:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Em que os coeficientes a = 1 b = -20 c = 64

$x = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4.1.64}}{2.1}$

$x = \frac{20 \pm 12}{2}$

$x = 16$

$x = 4$

Porém agora precisamos voltar. Chamamos $y = 2^x$, agora vamos substituir os valores de Y para acharmos os valores de x:

Para x = 16:

$16 = 2^x$

Decompondo o 16 em fatores primos:

$2^4 = 2^x$

Simplificando os expoentes:

$x = 4$

Para x = 4

$4 = 2^x$

Decompondo 4 em fatores primos:

$2^2 = 2^x$

$x = 2$

Portanto x = 2 e x = 4