Aula 04: Trigonometria.

Sumário

Chega então a hora de começarmos a utilizar e aprender a toda poderosa trigonometria! Mas antes de irmos ao ponto, a pergunta mais importante de todas: jovem, como você está? Como andam os estudos? Já conseguiu chegar àquela fase em que você tem a certeza de que estuda, estuda, estuda e nada acontece? Se sim, relaxa. Está passando por uma das fases da vida de um estudante. É uma das sequências lógicas de aprender. Estou com você, ok? Lembre-se sempre disso.

Quanto a trigonometria, nessa aula veremos tudo aquilo relacionado a trigonometria em triângulos. Começaremos antes de tudo falando sobre trigonometria em triângulos retângulos, que carregam todo o milenar conceito de seno, cosseno e tangente. Posteriormente a isso estudaremos a trigonometria de triângulos mais gerais, onde veremos as poderosíssimas leis dos senos e cossenos. mas não pule diretamente para lá. leia tudo, para que você venha a entender esses termos trigonométricos como nunca entendeu antes.

Então, vamos lá? Sigamos então com o início da trigonometria.


ESA
PARE

CRONOGRAMA DE AULAS

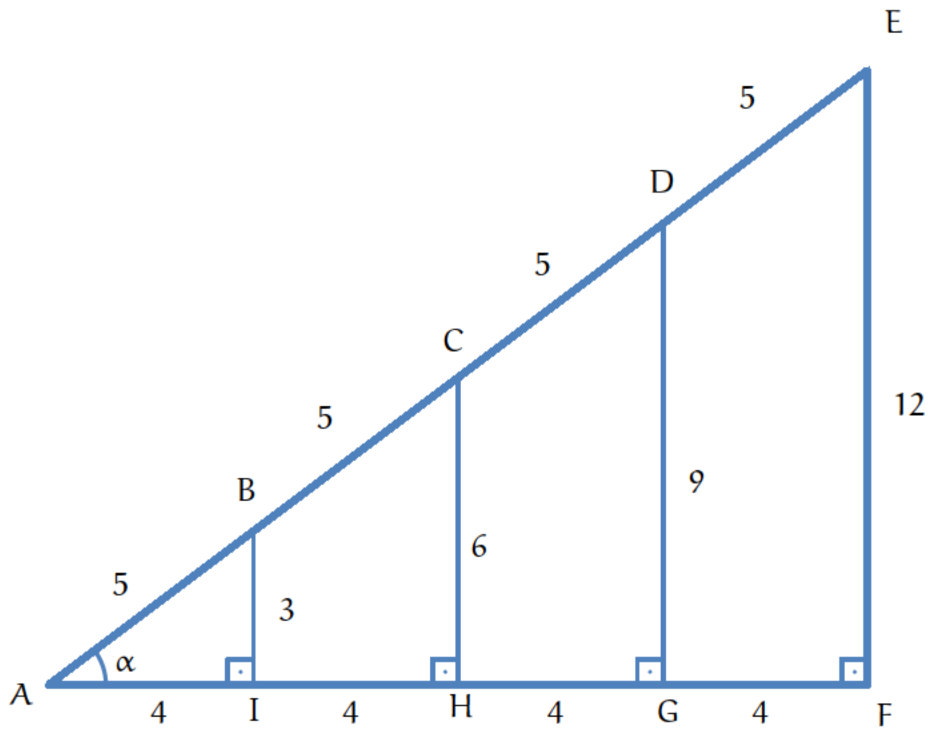
DISPONÍVEL	*CONTEÚDO*
Aula 00	*Fundamentos da Geometria Plana: elementos primitivos, axiomas e postulados. Ângulos: definição, elementos, notações, unidades de medida, classificação, ângulos consecutivos, ângulos adjacentes, bissetriz de um ângulo, ângulos opostos pelo vértice, retas paralelas cortadas por transversais. Triângulos: definição, elementos, relações angulares, condição de existência, classificação, cevianas, pontos notáveis, base média, congruência.*
Aula 01	*Teorema de Tales, semelhança de triângulos e teorema das bissetrizes. Relações métricas no triângulo retângulo. Polígonos: definição, elementos, nomenclatura, polígonos côncavos, polígonos convexos, classificação, relações angulares e número de diagonais.*
Aula 02	*Quadriláteros notáveis: definição, elementos, relações angulares, classificação, base média e mediana de Euler.*
Aula 03	*Polígonos regulares: Polígonos regulares inscritos e polígonos regulares circunscritos. Circunferência: definição de circunferência e de círculo, elementos, posições relativas, ângulos na circunferência, quadriláteros inscritíveis, teorema de Pitot,e potência de ponto.*
Aula 04	*Trigonometria: razões trigonométricas no triângulo retângulo, trigonometria num triângulo qualquer (Lei dos senos e dos cossenos)*
Aula 05	*Circunferência trigonométrica, operações com arcos (adição, subtração e arco duplo) e funções trigonométricas.*
Aula 06	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*
Aula 07	*Áreas de figuras planas.*
Aula 08	*Introdução à Geometria Espacial. Prismas: definição, elementos, classificação, planificação, áreas, volume e casos especiais: cubos e paralelepípedos. Cilindros: definição, elementos, classificação, planificação, áreas e volume.*
Aula 09	*Pirâmides: definição, elementos, classificação, relações métricas na pirâmide, áreas e volume. Cones: definição, elementos, classificação, relação métricas no cone, áreas e volume.*
Aula 10	*Esferas: definição, elementos, secção esférica, área da superfície esférica e volume. Troncos.*
Aula 11	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*

1.0– Trigonometria em triângulos

1.1– Definição e elementos básicos

Razões trigonométricas fundamentais

Vamos lá, então. Em primeiro lugar, observe a figura a seguir:

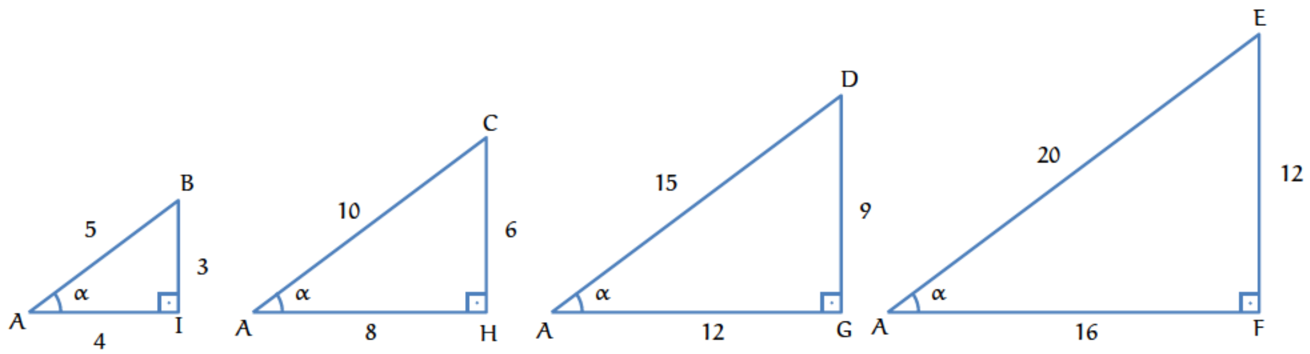


Não se assuste com a quantidade de informações,, vou explicar aos poucos o que quero demonstrar com essa figura. Em primeiro lugar, observe que conseguimos distinguir quatro triângulos nessa figura. Seriam os triângulos ABI, ACH, ADG e AEF.

Perceba também que esses triângulos são todos semelhantes (pois seus ângulos internos são todos correspondentemente iguais). Podemos checar isso também pelos seus lados serem todos proporcionais entre si. Essa é, afinal, como vimos, uma das condições para que dois triângulos sejam semelhantes.

Antes que eu os desenhe separadamente, você consegue ver essa semelhança? Consegue verificar que esses triângulos são, de fato, semelhantes?

Bom, observe os triângulos da figura anterior destacados e separados:



Cheque se os lados são, de fato, proporcionais. E aí? São mesmo? Vejamos se sim.

Por exemplo, façamos essa checagem entre os dois primeiros triângulos. Se eles forem de fato semelhantes, esquecendo-se o fato deles terem ângulos correspondentemente iguais, sabemos que os lados devem ser proporcionais.

Se, no primeiro triângulo, calcularmos $\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BA}}$, encontramos $\frac{3}{5}$, correto? E se fizéssemos o cálculo *correspondente* no segundo triângulo? Obteríamos: $\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CA}} \quad \frac{6}{10} \quad \frac{3}{5}$. Veja que obtivemos a mesma razão. E em geral, observe que em todos os quatro triângulos isso acontece:

- $\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BA}} \quad \frac{3}{5}$
- $\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CA}} \quad \frac{6}{10} \quad \frac{3}{5}$
- $\frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{DA}} \quad \frac{9}{15} \quad \frac{3}{5}$
- $\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{EA}} \quad \frac{12}{20} \quad \frac{3}{5}$.

De uma forma generalizada concluímos que:

$$\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BA}} \quad \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CA}} \quad \frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{DA}} \quad \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{EA}} \quad \frac{3}{5}.$$

Veja que nessa generalização que fizemos, o único elemento que se mantém fixo é o ângulo α. Veja também que BI, CH, DG e EF são, em cada um dos triângulos, os ***catetos opostos*** a α vê isso? Observe a figura anterior para que o que falei fique consistente.

Veja também que em cada um dos triângulos, os segmentos BA, CA, DA e EA são ***hipotenusas***. Então, nossa generalização anterior poderia ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{hipotenusa}} \quad \frac{3}{5}.$$

Com isso podemos dizer que sob uma abertura angular α, $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$ independerá das medidas desse triângulo. Importará apenas α.

Perceba que podemos fazer essas divisões entre quaisquer medidas desses quatro triângulos. Veja que, por mais um exemplo:

$$\frac{AI}{BA} \quad \frac{AH}{CA} \quad \frac{AG}{DA} \quad \frac{AF}{EA} \quad \frac{4}{5}.$$

Nesse caso específico, utilizamos o outro cateto de cada triângulo. Nesses casos, AI, AH, AG e AF não são mais catetos opostos a α, mas sim, ***adjacentes***. Poderíamos generalizar da seguinte forma então, para esses triângulos específicos:

$$\frac{\textit{cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}} \quad \frac{4}{5}.$$

Por fim, poderíamos relacionar os catetos, sem envolvimento da hipotenusa. Veja:

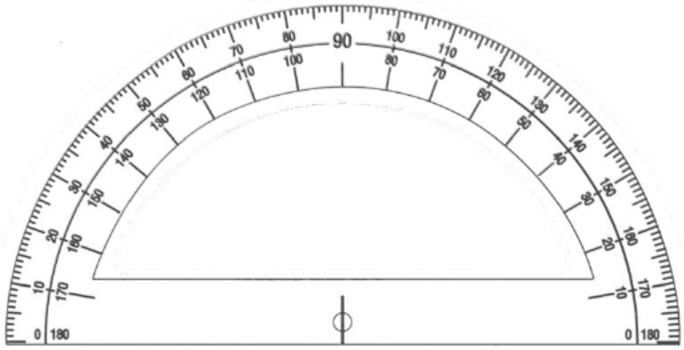
$$\frac{BI}{AI} \quad \frac{CH}{AH} \quad \frac{DG}{AG} \quad \frac{EF}{AF} \quad \frac{3}{4}.$$

Nos permite concluir que:

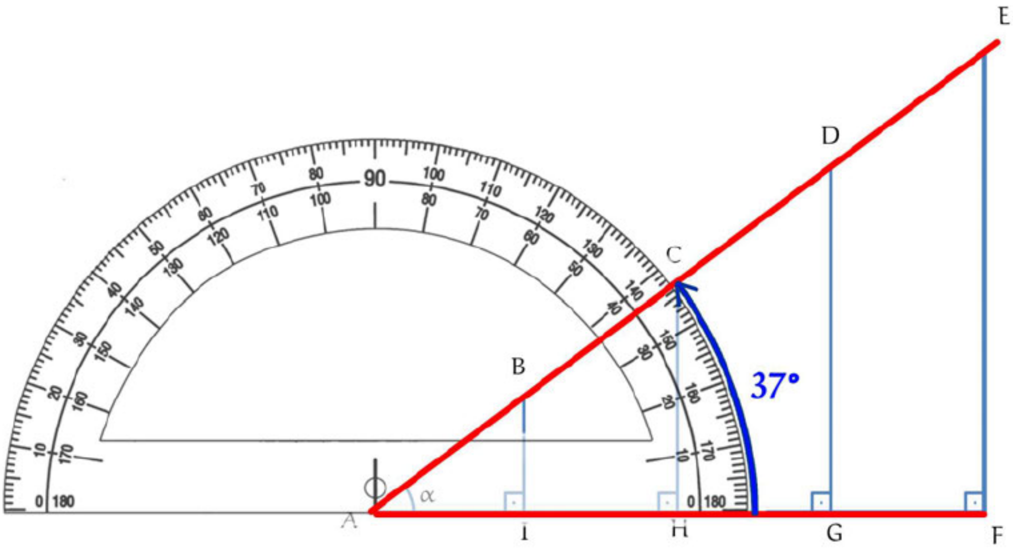
$$\frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{cateto adjacente}} \quad \frac{3}{4}.$$

Sim, sim, coruja. Mas é um exemplo que vai trazer uma generalização extremamente importante acerca dessas razões que acabamos de ver. Acabamos de ver três razões: $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$, $\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$ e $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$, e nenhuma delas mudou o seu resultado, independente do triângulo. Tudo porque essas razões foram tomadas em relação a um mesmo ângulo α. Isso nos trará à primeira noção do que seria a tão famigerada trigonometria. Prossigamos então?

Ainda continuarei falando um pouco do exemplo anterior. Antes disso, você conhece um instrumento chamado de *transferidor*? Transferidor é um objeto utilizado para medir ângulos planos, especialmente aqueles que estão a fácil acesso às dimensões rotineiras. Vou te explicar de uma forma melhor. Observe a figura abaixo:

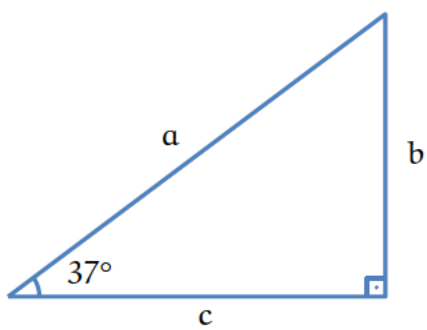


Esse objeto que podemos ver na figura é esse tal de transferidor. Vamos utilizá-lo para medir o valor de α, do triângulo anterior. Veja como isso é possível:



Colocando-o sobre o triângulo, percebemos que a abertura marcada está duas unidades à frente do ângulo de $35°$. Daí o ângulo α tem uma medida aproximada de $37°$.

Dessa forma, observe o triângulo a seguir:



Quanto você acha que valem $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$?

Veja que a abertura angular de $37°$ tem b como cateto oposto, c como cateto adjacente e a como hipotenusa, correto?

Então, para calcularmos $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ e $\frac{b}{c}$ precisaremos calcular, respectivamente:

$$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}, \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \text{ e } \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}.$$

Mas nós já vimos que, sob essa abertura, esses valores são de, respectivamente, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{4}$. Logo:

$$\frac{b}{a} \quad \frac{3}{5}, \frac{c}{a} \quad \frac{4}{5} \text{ e } \frac{b}{c} \quad \frac{3}{4}.$$

Essas razões que acabamos de calcular são tão importantes que os gregos resolveram dar nomes próprios a elas. Ao calcularmos a divisão da medida do cateto oposto a um ângulo α qualquer e a medida da hipotenusa chamamos essa razão de *seno de* α (denota-se sen α ou sin α). Dessa forma:

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha \quad \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}.}$$

Quando dividimos a medida do cateto adjacente a um ângulo α qualquer pela medida da hipotenusa, chamamos essa razão de *cosseno de* α (denota-se cos α). Dessa forma:

$$\boxed{\cos\alpha \quad \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}.}$$

Finalmente, quando dividimos a medida do cateto oposto a um ângulo α qualquer pela medida do cateto adjacente ao mesmo ângulo, chamamos essa razão de *tangente de* α (denota-se tg α ou tan α). Dessa forma:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \quad \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}.}$$

No exercício que iniciou esse livro eletrônico, por exemplo, poderíamos dizer que:

$$\operatorname{sen} 37^\circ \quad \frac{3}{5}, \cos 37^\circ \quad \frac{4}{5} \text{ e } \operatorname{tg} 37^\circ \quad \frac{3}{4}.$$

Cada ângulo entre 0° e 90° possui um seno, um cosseno e uma tangente. Vejamos a seguir uma tabela exaustiva desses valores.

Tabela trigonométrica para ângulos de 0° a 90°

x	sen(x)	cos(x)	tg(x)
0	0.000	1.000	0.000
1	0.017	1.000	0.017
2	0.035	0.999	0.035
3	0.052	0.999	0.052
4	0.070	0.998	0.070
5	0.087	0.996	0.087
6	0.105	0.995	0.105
7	0.122	0.993	0.123
8	0.139	0.990	0.141
9	0.156	0.988	0.158
10	0.174	0.985	0.176
11	0.191	0.982	0.194
12	0.208	0.978	0.213
13	0.225	0.974	0.231
14	0.242	0.970	0.249
15	0.259	0.966	0.268
16	0.276	0.961	0.287
17	0.292	0.956	0.306
18	0.309	0.951	0.325
19	0.326	0.946	0.344
20	0.342	0.940	0.364
21	0.358	0.934	0.384
22	0.375	0.927	0.404
23	0.391	0.921	0.424
24	0.407	0.914	0.445
25	0.423	0.906	0.466
26	0.438	0.899	0.488
27	0.454	0.891	0.510
28	0.469	0.883	0.532
29	0.485	0.875	0.554

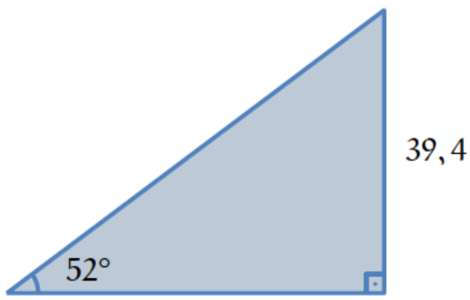
x	sen(x)	cos(x)	tg(x)
30	0.500	0.866	0.577
31	0.515	0.857	0.601
32	0.530	0.848	0.625
33	0.545	0.839	0.649
34	0.559	0.829	0.675
35	0.574	0.819	0.700
36	0.588	0.809	0.727
37	0.602	0.799	0.754
38	0.616	0.788	0.781
39	0.629	0.777	0.810
40	0.643	0.766	0.839
41	0.656	0.755	0.869
42	0.669	0.743	0.900
43	0.682	0.731	0.933
44	0.695	0.719	0.966
45	0.707	0.707	1.000
46	0.719	0.695	1.036
47	0.731	0.682	1.072
48	0.743	0.669	1.111
49	0.755	0.656	1.150
50	0.766	0.643	1.192
51	0.777	0.629	1.235
52	0.788	0.616	1.280
53	0.799	0.602	1.327
54	0.809	0.588	1.376
55	0.819	0.574	1.428
56	0.829	0.559	1.483
57	0.839	0.545	1.540
58	0.848	0.530	1.600
59	0.857	0.515	1.664

x	sen(x)	cos(x)	tg(x)
60	0.866	0.500	1.732
61	0.875	0.485	1.804
62	0.883	0.469	1.881
63	0.891	0.454	1.963
64	0.899	0.438	2.050
65	0.906	0.423	2.145
66	0.914	0.407	2.246
67	0.921	0.391	2.356
68	0.927	0.375	2.475
69	0.934	0.358	2.605
70	0.940	0.342	2.747
71	0.946	0.326	2.904
72	0.951	0.309	3.078
73	0.956	0.292	3.271
74	0.961	0.276	3.487
75	0.966	0.259	3.732
76	0.970	0.242	4.011
77	0.974	0.225	4.331
78	0.978	0.208	4.705
79	0.982	0.191	5.145
80	0.985	0.174	5.671
81	0.988	0.156	6.314
82	0.990	0.139	7.115
83	0.993	0.122	8.144
84	0.995	0.105	9.514
85	0.996	0.087	11.430
86	0.998	0.070	14.301
87	0.999	0.052	19.081
88	0.999	0.035	28.636
89	1.000	0.017	57.290
90	1.000	0.000	?

Corujinha, essa tabela não é para ser decorada! Essa tabela será utilizada em algumas questões no decorrer do livro eletrônico, mas a sua prova trará essas informações no texto da própria questão, não se preocupe. Ela não exigirá que você saiba essa tabela de cor. A coloquei aqui para podermos entender melhor os conceitos de seno, cosseno e tangente. Vamos lá, então? Vejamos o exemplo a seguir e vamos tentar resolver.

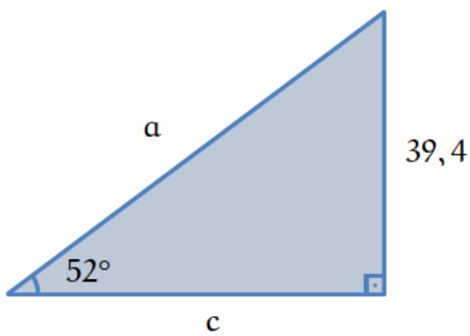
QUESTÃO 1

Calcule o perímetro aproximado do triângulo abaixo.



(a) $120,2$
(b) $110,1$
(c) $90,8$
(d) $85,1$

R: Comecemos atribuindo variáveis às medidas dos lados desse triângulo:



Podemos então utilizar o seno de 52°, que poderá ser calculado da seguinte forma:

$$\text{sen}\,52^\circ \quad \frac{\text{cateto oposto a } 52^\circ}{\text{hipotenusa}}.$$

Olhando na tabela, percebemos o seguinte:

52	0.788	0.616	1.280

Vemos que o seno de $52°$ vale $0,788$, isto é, $\text{sen}\,52° \quad 0,788$. Como o cateto oposto a $52°$ mede $39,4$ e a hipotenusa mede a, temos:

$$\begin{aligned} \text{sen}\,52° &\quad \frac{39,4}{a} \\ 0,788 &\quad \frac{39,4}{a} \\ a &\quad \frac{39,4}{0,788} \\ a &\quad 50. \end{aligned}$$

E pronto, achamos o valor da hipotenusa! Essa é a verdadeira essência da trigonometria, encontrarmos lados a partir de ângulos (e vice-versa) a partir de números tabelados fixos, como esse trio de números que separamos para o ângulo de $52°$.

Para encontrar o valor de c poderíamos utilizar o teorema de Pitágoras. Mas seria bastante trabalhoso, devido à sua forma quadrática de ser. O ideal aqui é continuarmos usando trigonometria. Veja.

O cateto de medida c, em relação ao ângulo de $52°$, é um *cateto adjacente* (pois é um dos lados desse ângulo). Então, precisamos escolher uma das três razões trigonométricas (seno, cosseno ou tangente) para nos auxiliar no cálculo, e temos de escolher uma que envolva o cateto adjacente. Há duas possibilidades: a tangente (que é a divisão do cateto oposto pelo cateto adjacente[1]) e o cosseno (que e a divisão do cateto adjacente pela hipotenusa). em ambos os casos, o cateto adjacente aparece. Façamos pelo cosseno.

Sabemos que:

$$\cos 52° \quad \frac{\text{cateto adjacente a } 52°}{\text{hipotenusa}}.$$

Como $\cos 52° \quad 0,616$, temos:

$$\begin{aligned} \cos 52° &\quad \frac{c}{50} \\ 0,616 &\quad \frac{c}{50} \end{aligned}$$

[1]A partir de agora, no decorrer di livro, não mencionarei mais que estamos mencionando a medida do cateto. Então, quando eu mencionar que um cateto está sendo dividido por outro, fica-se subentendido que estou mencionando a divisão entre as medidas desses catetos.

$$c \quad 50 \cdot 0,616$$
$$c \quad 30,8.$$

Assim, o perímetro desse triângulo é:

$$a + 39,4 + c \quad 50 + 39,4 + 30,8$$
$$120,2.$$

Gabarito: A

Segue um menmônico famoso para você gravar as configurações de cada razão trigonométrica.

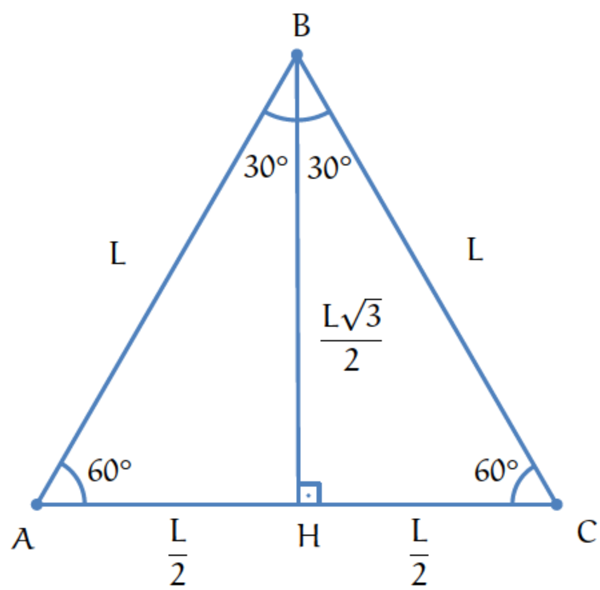
Na dúvida, lembre-se sempre do ***SOH CAH TOA***!

Ângulos notáveis

Há um grupo de três ângulos que surgem em maior quantidade nos nossos exercícios e nas nossas questões: são os ângulos de $30°$, $45°$ e $60°$. Para estes, a fim de facilitar o uso, devemos memorizar a tabela a seguir. Ela tem um forma super fácil de ser memorizada, que você poderá ver nas videoaulas. Por ora, olhemos para a tabela já toda preenchida.

	Ângulos notáveis		
	$30°$	$45°$	$60°$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Para verificarmos esses valores, podemos utilizar um triângulo equilátero e um quadrado qualquer. Vejamos inicialmente o triângulo equilátero. Primeiro, tracemos a sua altura:



Observe o triângulo BCH. Veja que ele é retângulo, então, podemos utilizar nossas relações trigonométricas. Já utilizei ali o fato já provado anteriormente de que a altura de um triângulo equilátero pode ser calculada a partir de seu lado, valendo esta $\frac{L\sqrt{3}}{2}$.

Utilizando $\text{sen}\,30°$ no triângulo retângulo BCH, vemos que o cateto oposto CH mede $\frac{L}{2}$ e a hipotenusa BC mede L. Dessa forma:

$$\text{sen}\,30^\circ \quad \frac{\frac{L}{2}}{L} \quad \frac{L}{2L} \quad \frac{1}{2}.$$

Provamos então que $\text{sen}\,30^\circ \quad \frac{1}{2}$. Veja que $\cos 60^\circ$ também vale o mesmo, pois o cateto adjacente a 60° também é $CH \quad \frac{L}{2}$, com hipotenusa $BC \quad L$.

$$\boxed{\text{sen}\,30^\circ \quad \cos 60^\circ \quad \frac{1}{2}.}$$

Agora, para o $\cos 30^\circ$. Veja que o cateto adjacente a 30° é o cateto BH, que mede $\frac{L\sqrt{3}}{2}$. Como a hipotenusa BC mede L, temos:

$$\cos 30^\circ \quad \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{L} \quad \frac{L\sqrt{3}}{2L} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dessa forma, provamos que $\cos 30^\circ \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$. Veja que $\text{sen}\,60^\circ$ terá igual valor, visto que o cateto oposto a 60° é BH, que mede $\frac{L\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{\text{sen}\,60^\circ \quad \cos 30^\circ \quad \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Quanto à tangente: observemos inicialmente $\text{tg}\,30^\circ$. O cateto oposto a 30° mede $\frac{L}{2}$, enquanto que o adjacente mede $\frac{L\sqrt{3}}{2}$. Então:

$$\text{tg}\,30^\circ \quad \frac{\frac{L}{2}}{\frac{L\sqrt{3}}{2}}$$

Repetindo a primeira fração e multiplicando pelo inverso da segunda:

$$\frac{L}{2} \cdot \frac{2}{L\sqrt{3}}$$
$$\frac{2L}{2L\sqrt{3}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Racionalizando:

$$\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vemos então que:

$$\boxed{\text{tg}\,30^\circ \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } \text{tg}\,30^\circ \quad \frac{1}{\sqrt{3}}.}$$

Para $\text{tg}\,60^\circ$: o cateto oposto a 60° é $BH \quad \frac{L\sqrt{3}}{2}$; já o adjacente mede $\frac{L}{2}$. Dessa forma:

$$\text{tg}\,60^\circ \quad \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{\frac{L}{2}}$$

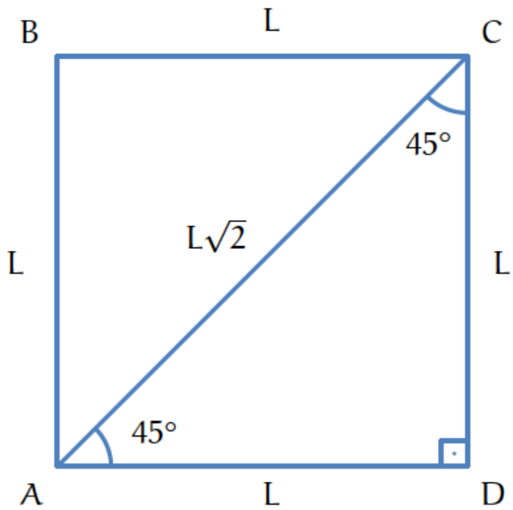
Repetindo a primeira fração e multiplicando pelo inverso da segunda:

$$\frac{L\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{L}$$
$$\frac{2L\sqrt{3}}{2L}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{1}$$
$$\sqrt{3}.$$

Dessa forma concluímos:

$$\boxed{\text{tg}\,60^\circ \quad \sqrt{3}.}$$

Agora que já justificamos essas razões, vamos para o ângulo de 45°. Para esse ângulo, consideremos um quadrado com uma de suas diagonais traçadas:



A diagonal de um quadrado também é bissetriz (pelo fato de também ser losango), daí o surgimento dos ângulos de $45°$. Já vimos que a diagonal de um quadrado de lado L medirá sempre $\mathrm{L}\sqrt{2}$ (podemos provar isso pelo teorema de Pitágoras). Daí, podemos calcular $\operatorname{sen} 45°$ para o triângulo retângulo ACD. Veja que o cateto oposto a $45°$ mede $CD \quad L$, enquanto que a hipotenusa mede $\mathrm{L}\sqrt{2}$. Daí:

$$\operatorname{sen} 45° \quad \frac{L}{L\sqrt{2}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Racionalizando a expressão:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Veja que $\cos 45°$ terá raciocínio análogo e mesmo valor, visto que o cateto adjacente ao ângulo de $45°$ também mede L. Daí, concluímos que:

$$\boxed{\operatorname{sen} 45° \quad \cos 45° \quad \frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

Finalmente, quanto a $\operatorname{tg} 45°$, veja que tanto o cateto oposto quanto o cateto adjacente a $45°$ medem L. Logo:

$$\operatorname{tg} 45° \quad \frac{L}{L}$$

$$1.$$

Daí concluímos que:

$$\boxed{tg45^\circ \quad 1.}$$

Corujinha, você já devia ter aprendido que as demonstrações trazem a verdadeira diferença entre aqueles que sabem e aqueles que acham que sabem. Entender a razão da trigonometria existir, que ela nasce do conceito poderosíssimo de semelhança de triângulos e entender de onde surgiram as razões dos ângulos de 30°, 45° e 60° fará toda a diferença nas resoluções. Toda. Isso já deve ter ficado claro para o estudante que não está pulando essas seções de demonstração e que tem humildade no coração a fim de aprender e entender que o método aqui só fará a diferença se entendido, não apenas aplicado.

1.2– Relações trigonométricas fundamentais

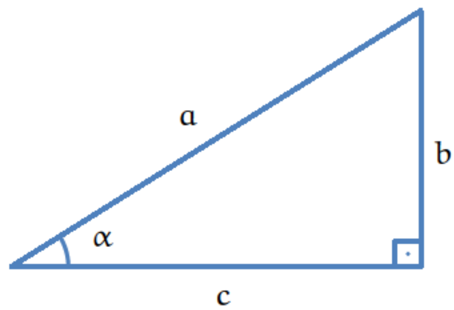
Equação fundamental da trigonometria

Veremos agora algumas relações entre o seno, o cosseno e a tangente. Em especial, nessa seção, analisaremos um fato interessante acerca do seno e do cosseno de um ângulo qualquer.

Inicialmente, segue a fórmula ***mais importante de toda a trigonometria***:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha \quad 1.}$$

Vejamos o porquê dela ser verdadeira. Observemos o triângulo a seguir:



Veja que $\operatorname{sen}\alpha \quad \frac{b}{a}$ e $\cos\alpha \quad \frac{c}{a}$. Façamos agora o cálculo da expressão $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$ (quando elevamos uma razão trigonométrica a uma determinada potência, colocamos o expoente no meio da expressão):

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha \quad & \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2\\ & \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}\\ & \frac{b^2+c^2}{a^2}.\end{aligned}$$

Acontece que, pelo teorema de Pitágoras, $a^2 \quad b^2 + c^2$, então:

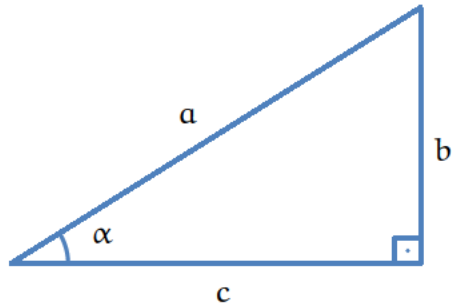
$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha \quad & \frac{a^2}{a^2}\\ & 1.\end{aligned}$$

As aplicações dessa fórmula serão vistas no decorrer das resoluções das questões, em vídeo. Posteriormente teremos as resoluções aqui no próprio livro eletrônico. Retiramos algumas das resoluções para que vocês possam ter uma sequência de questões limpas para impressão.

Equação da tangente

A tangente possui uma relação muito importante envolvendo o seno e o cosseno. Vejamos.

Observemos novamente o seguinte triângulo:



É sempre fato que:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \quad \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$$

Verifiquemos o porquê disso ser verdade.

Veja que $\operatorname{sen}\alpha \quad \frac{b}{a}$ e $\cos\alpha \quad \frac{c}{a}$. Então:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \quad \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}$$
$$\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c}$$
$$\frac{b}{c}$$
$$\operatorname{tg}\alpha.$$

Relações subtrigonométricas

Aqui aprenderemos sobre três outras razões, conhecidas como razões subtrigonométricas. São puras definições, basta que memorizemos suas definições. Vejamos.

A *secante* é definida como o inverso do cosseno. Portanto:

$$\boxed{\sec\alpha \quad \frac{1}{\cos\alpha}}$$

A *cossecante* é definida como o inverso do seno. Portanto:

$$\operatorname{cossec}\alpha \quad \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Finalmente, a *cotangente* é definida como o inverso da tangente. Portanto:

$$\operatorname{cotg}\alpha \quad \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Como $\operatorname{tg}\alpha \quad \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, podemos escrever $\operatorname{cotg}\alpha$ como:

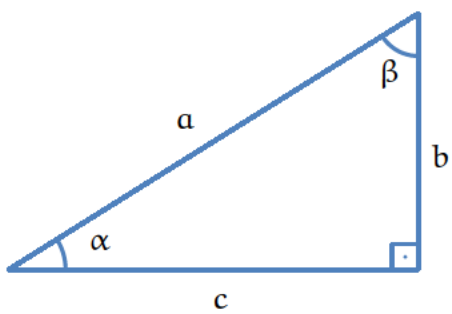
$$\operatorname{cotg}\alpha \quad \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Essa expressão funciona como uma alternativa para o cálculo da cotangente.

Relações trigonométricas em ângulos complementares

Aprendemos há alguns livros eletrônicos que o complemento de um ângulo α é $90° - \alpha$.

Observe o triângulo abaixo, novamente:



Veja que $\operatorname{sen}\alpha \quad \frac{b}{a}$ e $\cos\alpha \quad \frac{c}{a}$. Veja também que α e β são ângulos complementares. Daí, uma relação muito curiosa e importante surge.

Veja que nesse mesmo triângulo, $\operatorname{sen}\beta \quad \frac{c}{a}$ e $\cos\beta \quad \frac{b}{a}$. Veja que tanto $\operatorname{sen}\alpha$ quanto $\cos\beta$ resultaram em $\frac{b}{a}$, assim como ambos $\operatorname{sen}\beta$ e $\cos\alpha$ resultaram em $\frac{c}{a}$. Visto que $\beta \quad 90° - \alpha$, concluímos que:

$$\operatorname{sen}\alpha \quad \cos(90° - \alpha)$$

E também:

$$\boxed{\cos\alpha \quad \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)}$$

Vejamos uma aplicação dessas expressões.

QUESTÃO 2

Calcule o valor de $\dfrac{\operatorname{sen} 28^\circ}{\cos 62^\circ}$.

(a) 0
(b) 1
(c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
(d) π

R: Veja que 28° e 62° são ângulos complementares. Daí $\operatorname{sen} 28^\circ \quad \cos 62^\circ$. Logo:

$$\frac{\operatorname{sen} 28^\circ}{\cos 62^\circ} \quad \frac{\cos 62^\circ}{\cos 62^\circ}$$
$$1.$$

Gabarito: B

Veja ainda que $\operatorname{tg}\alpha \quad \dfrac{b}{c}$ e $\operatorname{tg}\beta \quad \dfrac{c}{b}$. Então:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \quad \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}$$
$$1$$

Podemos concluir então que:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) \quad 1.}$$

Isso nos diz, por extenso, que:

> O inverso da tangente de um ângulo é a tangente do complemento desse ângulo.

Veremos nas resoluções em vídeo as aplicações mais diretas desses pontos. Por enquanto, estamos apenas colecionando essas expressões, certo, jovem? Continuemos então.

Expressões adicionais

existem duas expressões que podemos sobter a partir da equação fundamental da trigonometria, isto é, $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha \quad 1$. Veja.

Primeiro, vamos dividir essa expressão inteira por $\cos^2\alpha$:

$$\begin{aligned} \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha &\quad 1 \\ \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} &\quad \frac{1}{\cos^2\alpha} \\ \text{tg}^2\alpha + 1 &\quad \sec^2\alpha. \end{aligned}$$

Temos então a seguinte expressão:

$$\boxed{\text{tg}^2\alpha + 1 \quad \sec^2\alpha.}$$

uma outra expressão pode ser obtida se, ao invés de dividirmos a equação fundamental da trigonometria por $\text{sen}^2\alpha$, dividamos por $\cos^2\alpha$. Vejamos:

$$\begin{aligned} \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha &\quad 1 \\ \frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} &\quad \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} \\ 1 + \text{cotg}^2\alpha &\quad \text{cossec}^2\alpha. \end{aligned}$$

Temos então a seguinte expressão:

$$\boxed{\text{cotg}^2\alpha + 1 \quad \text{cossec}^2\alpha.}$$

Relações trigonométricas em ângulos suplementares

Não conseguiremos demonstrar isso agora, mas, quando aprendermos Trigonometria no Ciclo, concluíremos as seguintes fórmulas:

$$\boxed{\text{sen}\,(180^\circ - \alpha) \quad \text{sen}\,\alpha}$$

E ainda:

$$\boxed{\cos(180^\circ - \alpha) \quad -\cos\alpha}$$

Em resumo, o que essas expressões estão nos dizendo é o seguinte: quando tivermos de calcular o seno ou o cosseno de ângulos obtudos, basta trocarmos o ângulo pelo seu ***suplementar*** (e, caso estejamos calculando o cosseno, devemos sempre lembrar de que seu valor será negativo). Vejamos um exemplo.

QUESTÃO 3

Calcule o valor de N, sendo N $\quad \text{sen}\,30^\circ + \text{sen}\,150^\circ + \cos 30^\circ + \cos 150^\circ$.

(a) 0
(b) 1
(c) $1+\sqrt{3}$
(d) $2+2\sqrt{3}$

R: Vejamos. Sabemos que $sen 30^\circ \quad \frac{1}{2}$ e que $\cos 30^\circ \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$. Como 150° é o suplemento de 30°, podemos concluir que:

$$\text{sen}\,150^\circ \quad \text{sen}\,30^\circ \quad \frac{1}{2} \text{ e}$$

$$\cos 150^\circ \quad -\cos 30^\circ \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Daí, substituindo tudo na expressão que caracteriza N:

$$N \quad \text{sen}\,30^\circ + \text{sen}\,150^\circ + \cos 30^\circ + \cos 150^\circ$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$1.$$

Seguem alguns ângulos bastante importantes:

	Ângulos obtusos notáveis		
	120°	135°	150°
Seno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Cosseno	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tangente	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

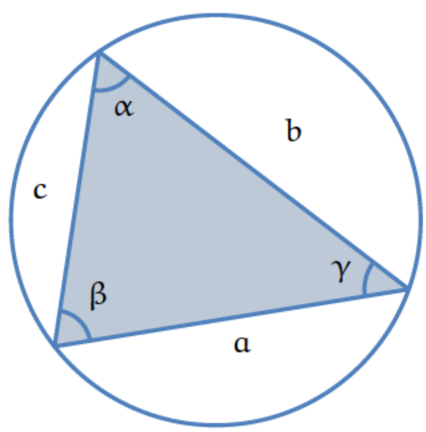
Gabarito: B

1.3– Lei dos senos e lei dos cossenos

Lei dos senos

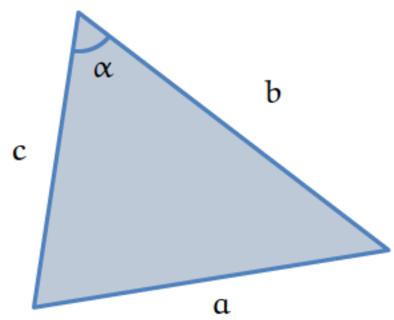
Fórmula bem direta e clássica em questões. Veremos bastante dessas questões nas resoluções.

Considere um triângulo como o abaixo, inscrito num círculo de raio R.



Então:

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}\quad\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}\quad\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\quad 2R.}$$



Lei dos cossenos

Outra bem direta e clássica. Observemos o triângulo abaixo:
Então:

$$\boxed{a^2 \quad b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha}$$

1.4– QUESTÕES (REMOVER DEPOIS)

QUESTÕES PARA MEMORIZAÇÃO

(EEAR-2000) QUESTÃO 4

Consideremos um triângulo retângulo que simultaneamente está circunscrito à circunferência C_1 e inscrito na circunferência C_2. Sabendo-se que a soma dos comprimentos dos catetos do triângulo é $k$cm, então, a soma dos comprimentos dessas duas circunferências, em cm, é

(a) $\frac{4k\pi}{3}$
(b) $\frac{2k\pi}{3}$
(c) $k\pi$
(d) $2k\pi$

(EEAR-2001) QUESTÃO 5

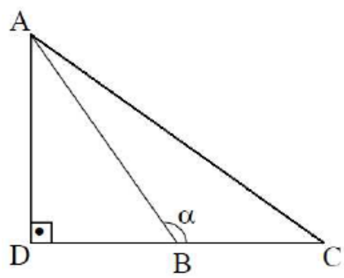
Em um triângulo retângulo a hipotenusa mede 5cm e o sen$\hat{B}$ $\quad \frac{1}{2}$sen$\hat{C}$. O maior cateto mede, em cm:

(a) $\sqrt{3}$
(b) $\sqrt{5}$
(c) $2\sqrt{3}$
(d) $2\sqrt{5}$

(EEAR-2001) QUESTÃO 6

Na figura, AD $\quad 2$cm e AB $\quad 4$cm. O valor de cos α no triângulo ABC é

(a) $\frac{1}{2}$



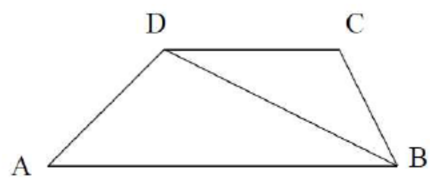
(b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(EEAR-2001) QUESTÃO 7

No trapézio escaleno abaixo, tem-se: $AD \quad 5\,\text{cm}$, $B\hat{D}C \quad 30^\circ$ e $B\hat{A}D \quad 45^\circ$. Nessas condições, a medida da diagonal $\overline{BD}$, em cm, é



(a) $5\sqrt{2}$

(b) $5\sqrt{3}$

(c) $5\sqrt{5}$

(d) 5

(EEAR-2001) QUESTÃO 8

Seja $ABCD$ um trapézio isósceles. Sabe-se que a medida de um de seus ângulos obtusos internos é o dobro da medida de um de seus ângulos agudos internos, e que a diagonal AC é perpendicular ao lado BC. Se a base maior mede $10\,\text{cm}$, então o perímetro desse trapézio, em cm, é

(a) 20

(b) 25

(c) 28

(d) 30

(EEAR-2001) QUESTÃO 9

Se em um triângulo retângulo um dos catetos mede $2\sqrt{5}$cm e a altura relativa à hipotenusa mede 2cm, então a área desse triângulo, em cm^2, é

(a) $\frac{10}{3}$
(b) $\frac{20}{3}$
(c) $\frac{10\sqrt{2}}{3}$
(d) $2\sqrt{10}$

(EEAR-2001) QUESTÃO 10

Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 8m e 12m e formam entre si um ângulo de $60°$. As medidas das diagonais desse paralelogramo são tais que o número que expressa

(a) o seu produto é racional.
(b) a sua razão é maior que 2.
(c) a sua soma é maior que 32.
(d) a sua diferença é irracional.

(EEAR-2002) QUESTÃO 11

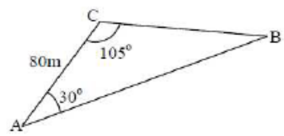
Num triângulo ABC retângulo em A, o cateto AC mede $1,5$cm e a altura traçada sobre a hipotenusa determina o segmento HB que mede $1,6$cm. O valor da secante do ângulo interno C é

(a) $\frac{4}{3}$
(b) $\frac{5}{4}$
(c) $\frac{4}{5}$
(d) $\frac{5}{3}$

(EEAR-2002) QUESTÃO 12

De acordo com os dados da figura, a distância aproximada, em metros, entre os pontos A e B é

(a) 100
(b) 102

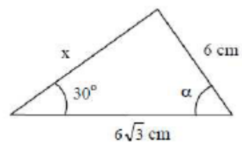


(c) 104

(d) 108

(EEAR-2002) QUESTÃO 13

Sendo α um ângulo agudo, o lado x do triângulo abaixo, em cm, mede



(a) 6

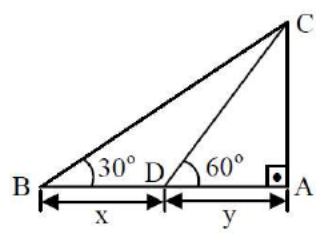
(b) 10

(c) 12

(d) 15

(EEAR-2003) QUESTÃO 14

De acordo com os dados nos triângulos retângulos CAB e CAD, é correto afirmar que



(a) $x \quad y$

(b) $x \quad 3y$

(c) $x \quad 2y$

(d) $x \quad \frac{3y}{2}$

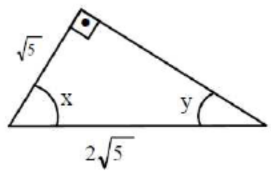
(EEAR-2003) QUESTÃO 15

As medidas dos lados de um triângulo são iguais a 4cm, 5cm e 6cm. O cosseno do menor ângulo desse triângulo é igual a

(a) $\frac{1}{8}$
(b) $\frac{9}{16}$
(c) $\frac{3}{4}$
(d) $\frac{2}{5}$

(EEAR-2003) QUESTÃO 16

Na figura, $x - y$ é igual a



(a) $15°$
(b) $20°$
(c) $30°$
(d) $35°$

(EEAR-2003) QUESTÃO 17

Em um triângulo ABC, o lado AB mede $6\sqrt{3}$cm e o ângulo $\hat{C}$, oposto ao lado AB, mede $60°$. O raio da circunferência que circunscreve o triângulo, em cm, mede

(a) 6
(b) 12
(c) $6\sqrt{3}$
(d) $3\sqrt{6}$

(EEAR-2003) QUESTÃO 18

Seja o triângulo ABC e D um ponto do lado $\overline{AC}$. Se $\overline{AD}$ 2cm, $\overline{AB}$ $\sqrt{3}$cm, $\overline{BD}$ $\overline{DC}$ e $B\hat{A}C$ $30°$, a medida, em cm, do lado $\overline{BC}$ é igual a

(a) $\sqrt{3}$
(b) $\sqrt{5}$
(c) $\sqrt{6}$

(d) $\sqrt{7}$

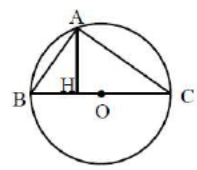
(EEAR-2003) QUESTÃO 19

Considere o trapézio retângulo $ABCD$, onde $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são retos, $\overline{AB} \quad \overline{AD}, \overline{CD} \quad 7\,\text{cm}$ e $\overline{BC} - \overline{AB}$ $1\,\text{cm}$. Assinale a afirmativa verdadeira.

(a) $\text{sen}\,C \quad \frac{1}{3}$
(b) $\cos C \quad \frac{4}{5}$
(c) $\text{sen}\,C \quad \frac{3}{5}$
(d) $\text{tg}\,C \quad \frac{4}{3}$

(EEAR-2003) QUESTÃO 20

O triângulo ABC está inscrito numa circunferência de centro O e de raio $13\,\text{cm}$.

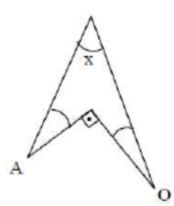


Sabendo que $\overline{AB} \quad 10\,\text{cm}$, a altura $\overline{AH}$ relativa ao lado $\overline{BC}$ mede, em cm, aproximadamente

(a) $7,6$
(b) $8,4$
(c) $9,23$
(d) $10,8$

(EEAR-2003) QUESTÃO 21

Na figura abaixo, os ângulos assinalados $\hat{A}$ e $\hat{O}$ medem, respectivamente, $10°$ e $50°$.



Assim sendo, o valor de $\text{tg}\,x$ é

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
(d) 1

(EEAR-2003) QUESTÃO 22

Se forem indicados por m, n, e p os três lados de um triângulo e por $\hat{M}$, $\hat{N}$ e $\hat{P}$, respectivamente, os ângulos opostos a esses lados, então sendo conhecidos os lados m e n e o ângulo $\hat{N}$, qual das fórmulas abaixo poderá ser utilizada para calcular o valor do lado p?

(a) $m^2 \quad n^2 + p^2 - 2np \cdot \cos \hat{M}$
(b) $n^2 \quad m^2 + p^2 + 2mp \cdot \cos(\hat{M} + \hat{P})$
(c) $p^2 \quad m^2 + n^2 - 2mn \cdot \cos \hat{P}$
(d) $p^2 \quad m^2 + n^2 - 2mn \cdot \cos(\hat{M} + \hat{N})$

(EEAR-2003) QUESTÃO 23

Numa circunferência de centro C e raio 20cm, considere a corda $\overline{AB}$, cujo ponto médio é M. Se $CM \quad 10$cm, então a medida de $\overline{AB}$ é, em cm,

(a) $15\sqrt{5}$
(b) $20\sqrt{3}$
(c) 15
(d) 20

(EEAR-2004) QUESTÃO 24

Num triângulo retângulo, o menor cateto mede $1,5$cm, e a medida da projeção do maior cateto sobre a hipotenusa é $1,6$cm. O valor da secante do maior ângulo agudo desse triângulo é

(a) $\frac{4}{3}$
(b) $\frac{5}{3}$
(c) $\frac{4}{5}$
(d) $\frac{7}{5}$

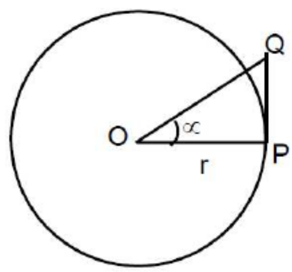
(EEAR-2004) QUESTÃO 25

Num triângulo retângulo, as projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa medem 6cm e 24cm. A área desse triângulo mede, em cm^2,

(a) 180.
(b) $37\sqrt{11}$.
(c) 72.
(d) $36\sqrt{17}$.

(EEAR-2004) QUESTÃO 26

O círculo da figura tem centro O e raio r.



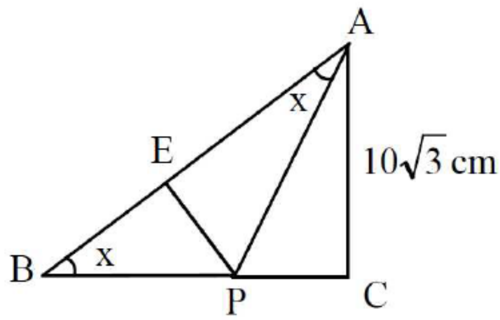
Sabendo-se que $\overline{PQ}$ equivale a $\frac{5r}{12}$ e é tangente ao círculo no ponto P, o valor de sen$\,\alpha$ é

(a) $\frac{5}{12}$.
(b) $\frac{5}{13}$.
(c) $\frac{12}{13}$.
(d) $0,48$.

(EEAR-2004) QUESTÃO 27

Na figura, são retângulos em E e em C, respectivamente, os triângulos AEP e ACB.
Se $x \quad 30^\circ$, então a medida de $\overline{PE}$, em cm, é

(a) 10.
(b) $5\sqrt{3}$.
(c) $10\sqrt{3}$.
(d) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$.



(EEAR-2004) QUESTÃO 28

O perímetro de um triângulo retângulo é 30cm. Se a soma das medidas dos catetos é 17cm, e a soma das medidas da hipotenusa e do cateto menor é 18cm, então a medida, em cm, do cateto maior é

(a) 8.
(b) 9.
(c) 12.
(d) 15.

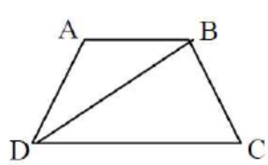
(EEAR-2005) QUESTÃO 29

Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual ao dobro do produto das medidas dos catetos. Um dos ângulos agudos desse triângulo mede

(a) $15°$.
(b) $30°$.
(c) $45°$.
(d) $60°$.

(EEAR-2005) QUESTÃO 30

O trapézio $ABCD$ é isósceles, e as medidas dos ângulos $D\hat{B}A$ e $D\hat{C}B$ são $30°$ e $45°$, respectivamente.



Se BC 12cm, então a medida de $\overline{BD}$, em cm, é

(a) $6\sqrt{2}$
(b) $8\sqrt{2}$
(c) $10\sqrt{2}$
(d) $12\sqrt{2}$

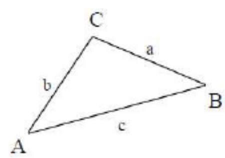
(EEAR-2006) QUESTÃO 31

Num triângulo ABC, a razão entre as medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é 2. Se $\hat{A} \quad 120^\circ$ e $\overline{AC} \quad 1\,\text{cm}$, então o lado $\overline{BC}$ mede, em cm,

(a) $\sqrt{7}$.
(b) $\sqrt{7}+1$.
(c) $\sqrt{13}$.
(d) $\sqrt{13}-1$.

(EEAR-2007) QUESTÃO 32

Considere o triângulo ABC. Assinale a alternativa FALSA.



(a) $\text{sen}\,\hat{B} \quad \frac{b}{a}$ e $\cos\hat{B} \quad \frac{c}{a}$
(b) $a^2 \quad b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$
(c) $\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} \quad \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} \quad \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$
(d) $b^2 \quad a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$

(EEAR-2008) QUESTÃO 33

Num triângulo ABC, são dados $\hat{A} \quad 45^\circ$, $\hat{B} \quad 30^\circ$ e $AC \quad 6\,\text{cm}$. Então BC ____ cm.

(a) $4\sqrt{3}$
(b) $6\sqrt{2}$
(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(EEAR-2008) QUESTÃO 34

Em um triângulo ABC, retângulo em A, a hipotenusa mede 5 dm e sen $\hat{B} \quad \frac{1}{2}$sen $\hat{C}$. Nessas condições, o maior cateto mede, em dm,

(a) 3
(b) 4
(c) $\sqrt{5}$
(d) $2\sqrt{5}$

(EEAR-2008) QUESTÃO 35

No triângulo, cujos lados medem 5 cm, 10 cm e 6 cm, o maior ângulo tem cosseno igual a

(a) $\frac{7}{10}$
(b) $\frac{9}{20}$
(c) $-\frac{13}{20}$
(d) $-\frac{8}{10}$

(EEAR-2009) QUESTÃO 36

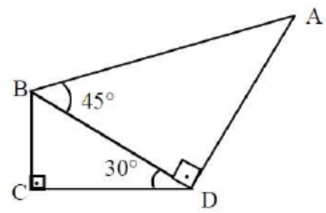
Dois lados de um triângulo medem 6 cm e 8 cm, e formam um ângulo de $60°$. A medida do terceiro lado desse triângulo, em cm, é

(a) $2\sqrt{13}$
(b) $3\sqrt{17}$
(c) $\sqrt{23}$
(d) $\sqrt{29}$

(EEAR-2009) QUESTÃO 37

Na figura, $BC \quad 2$ cm.
Assim, a medida de $\overline{AB}$, em cm, é

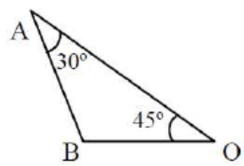
(a) $2\sqrt{3}$
(b) $4\sqrt{2}$
(c) $5\sqrt{2}$



(d) $3\sqrt{3}$

(EEAR-2010) QUESTÃO 38

No triângulo AOB, OB 5cm; então AB, em cm, é igual a



(a) 6
(b) 8
(c) $5\sqrt{2}$
(d) $6\sqrt{3}$

(EEAR-2011) QUESTÃO 39

Um triângulo, inscrito em uma circunferência, tem um ângulo de $30°$ oposto a um lado de 10cm. O diâmetro da circunferência, em cm, é

(a) 10.
(b) 15.
(c) 20.
(d) 25.

(EEAR-2011) QUESTÃO 40

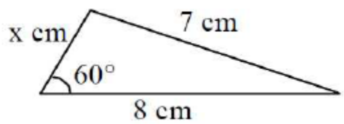
Em um triângulo retângulo, um dos catetos mede 4cm, e o ângulo que lhe é adjacente mede $60°$. A hipotenusa desse triângulo, em cm, mede

(a) 6.
(b) 7.

(c) 8.
(d) 9.

(EEAR-2011) QUESTÃO 41

No triângulo, o menor valor que x pode assumir é



(a) 4.
(b) 3.
(c) 2.
(d) 1.

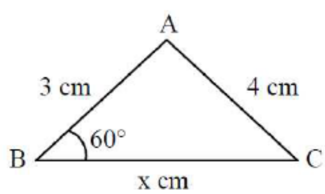
(EEAR-2012) QUESTÃO 42

O perímetro de um triângulo equilátero de altura h $\sqrt{3}$ m é ____ m.

(a) 3
(b) 4
(c) 5
(d) 6

(EEAR-2012) QUESTÃO 43

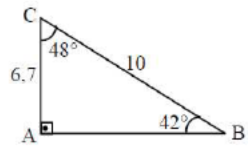
Considerando $\sqrt{37}$ 6, o valor de x na figura é



(a) $2,5$.
(b) $3,5$.
(c) $4,5$.
(d) $5,5$.

(EEAR-2012) QUESTÃO 44

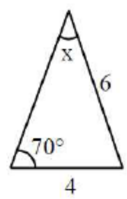
Considerando as medidas indicadas no triângulo, o valor de sen$42^\circ +$ sen48° é



(a) $1,41.$
(b) $1,67.$
(c) $1,74.$
(d) $1,85.$

(EEAR-2013) QUESTÃO 45

Considere as medidas indicadas na figura e que sen$70^\circ \quad 0,9$. Pela “Lei dos Senos”, obtém-se sen$x \quad$ ____.



(a) $0,4$
(b) $0,5$
(c) $0,6$
(d) $0,7$

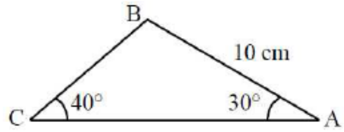
(EEAR-2013) QUESTÃO 46

Em um triângulo retângulo, a hipotenusa é o dobro de um cateto. O ângulo oposto a esse cateto mede

(a) 20°.
(b) 30°.
(c) 45°.
(d) 60°.

(EEAR-2013) QUESTÃO 47

Considerando $sen 40^\circ$ $0,6$, o lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC, mede, em cm, aproximadamente



(a) $6,11$
(b) $7,11$
(c) $8,33$
(d) $9,33$

(EEAR-2015) QUESTÃO 48

Em um triângulo ABC, retângulo em C, a razão $\dfrac{\text{sen}\,\hat{B}}{\cos\hat{A}}$ é igual a:

(a) $\dfrac{AC}{BC}$
(b) $\dfrac{AB}{AC}$
(c) 1
(d) 2

(EEAR-2016) QUESTÃO 49

Uma escada é apoiada em uma parede perpendicular ao solo, que por sua vez é plano. A base da escada, ou seja, seu contato com o chão, dista 10m da parede. O apoio dessa escada com a parede está a uma altura de $10\sqrt{3}$m do solo. Isto posto, o ângulo entre a escada e o solo é de

(a) 60°
(b) 45°
(c) 30°
(d) 15°

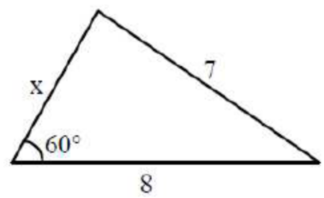
(EEAR-2016) QUESTÃO 50

Um triângulo acutângulo ABC tem a medida do ângulo $\hat{A}$ igual a 30°. Sabe-se que os lados adjacentes ao ângulo $\hat{A}$ medem 3cm e 4cm. A medida, em cm, do lado oposto ao referido ângulo é

(a) $\sqrt{3}$
(b) $\sqrt{7}$
(c) $5\sqrt{3}$
(d) $\sqrt{19-4\sqrt{3}}$

(EEAR-2017) QUESTÃO 51

Se o perímetro do triângulo abaixo é maior que 18, o valor de x é



(a) 4
(b) 5
(c) 6
(d) 7

(EEAR-2017) QUESTÃO 52

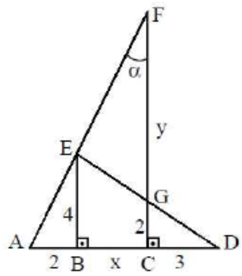
Seja um triângulo inscrito em uma circunferência de raio R. Se esse triângulo tem um ângulo medindo $30°$, seu lado oposto a esse ângulo mede

(a) $\frac{R}{2}$
(b) R
(c) $2R$
(d) $\frac{2R}{3}$

(EEAR-2018) QUESTÃO 53

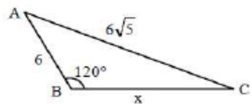
Os pontos A, B, C e D estão alinhados entre si, assim como os pontos A, E e F também estão. Considerando G o ponto de interseção de $\overline{FC}$ e $\overline{ED}$, o valor de $\text{tg}\,\alpha$ é

(a) $0,2$
(b) $0,5$
(c) 2
(d) 4



(EEAR-2018) QUESTÃO 54

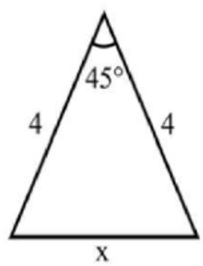
Pelo triângulo ABC, o valor de $x^2 + 6x$ é



(a) 76
(b) 88
(c) 102
(d) 144

(EEAR-2019) QUESTÃO 55

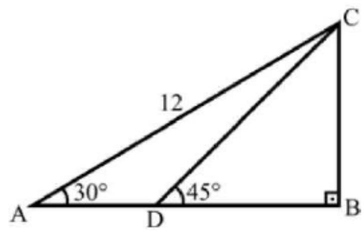
Analisando a figura, pode-se afirmar corretamente que o valor de x é



(a) $16 - 2\sqrt{2}$
(b) $6\sqrt{2} - 4$
(c) $6(2 - \sqrt{2})$
(d) $4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

(EEAR-2019) QUESTÃO 56

Seja ABC um triângulo retângulo em B, tal que AC 12cm.
Se D é um ponto de $\overline{AB}$, tal que $B\hat{D}C$ $45°$, então CD ____cm.



(a) 3
(b) 6
(c) $3\sqrt{2}$
(d) $6\sqrt{2}$

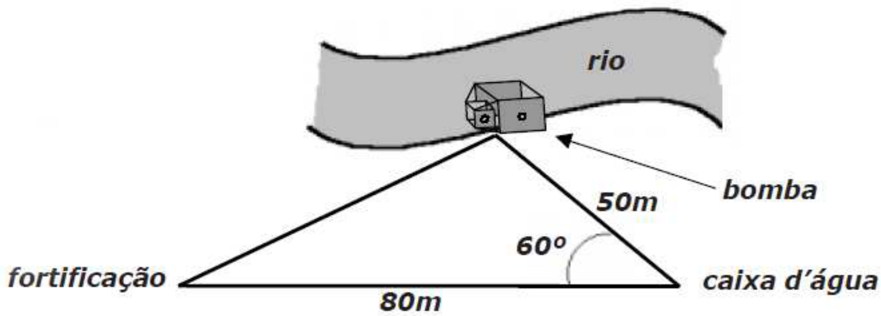
(ESPCEX-2004) QUESTÃO 57

Um soldado, sua sombra e a trajetória do Sol estão em um mesmo plano perpendicular ao solo onde o soldado se encontra. O soldado está de sentinela em um quartel quando os raios solares formam ângulos de 60° e 30° com o solo, respectivamente no início e no final de sua missão. Nestas condições, pode-se afirmar que a medida da sombra do soldado no final de sua missão é:

(a) a metade da medida de sua sombra no início da missão.
(b) o dobro da medida de sua sombra no início da missão.
(c) o triplo da medida de sua sombra no início da missão.
(d) o quádruplo da medida de sua sombra no início da missão.
(e) um terço da medida de sua sombra no início da missão.

(ESPCEX-2005) QUESTÃO 58

A água utilizada em uma fortificação é captada e bombeada do rio para uma caixa d'água localizada a 50m de distância da bomba. A fortificação está a 80m de distância da caixa d'água e o ângulo formado pelas direções bomba – caixa d'água e caixa d'água – fortificação é de 60°, conforme mostra a figura abaixo.

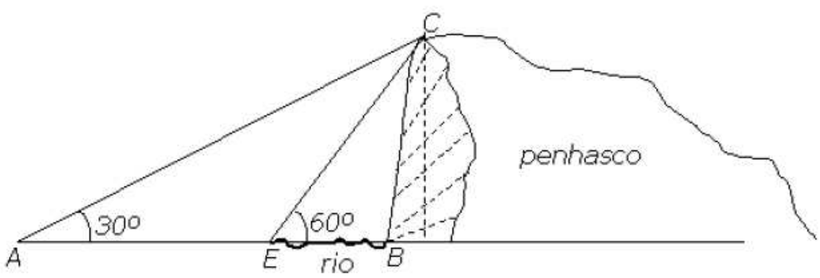


Para bombear água do mesmo ponto de captação, diretamente para a fortificação, quantos metros de tubulação são necessários?

(a) 54 metros.
(b) 55 metros.
(c) 65 metros.
(d) 70 metros.
(e) 75 metros.

(ESPCEX-2005) QUESTÃO 59

Um topógrafo, querendo conhecer a altura de um penhasco, mediu a distância do ponto A até a beira do rio (ponto E), obtendo 20 metros. A largura do rio (EB) é desconhecida. A figura abaixo mostra os ângulos $B\hat{A}C \quad 30^\circ$ e $B\hat{E}C \quad 60^\circ$.

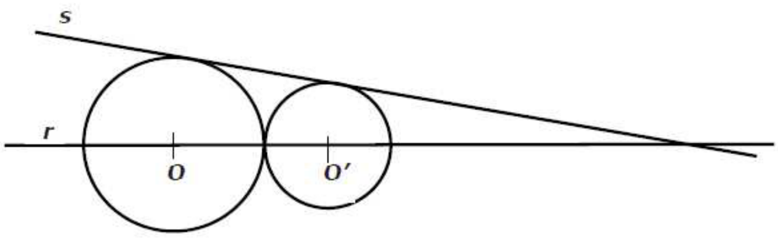


A altura do penhasco encontrada pelo topógrafo foi

(a) $15\sqrt{3}$m.
(b) $12\sqrt{3}$m.
(c) $10\sqrt{3}$m.
(d) $20\sqrt{3}$m.
(e) $40\sqrt{3}$m.

(ESPCEX-2005) QUESTÃO 60

Na figura, as circunferências são tangentes entre si e seus raios estão na razão $\frac{1}{3}$.



Se a reta r passa pelos centros O e O' das duas circunferências, e a reta s é tangente a ambas, então o menor ângulo formado por essas duas retas mede

(a) arcsen $\frac{1}{3}$
(b) arctg $\frac{1}{2}$
(c) $60°$
(d) $45°$
(e) $30°$

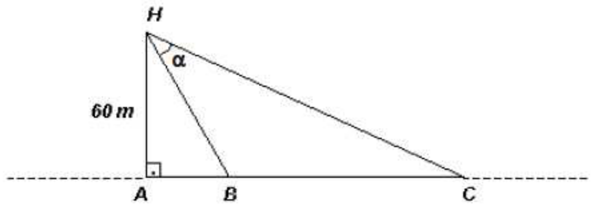
(ESPCEX-2006) QUESTÃO 61

Um triângulo tem o lado maior medindo $1\,m$ e dois de seus ângulos são $27°$ e $63°$. O valor aproximado para o perímetro desse triângulo, dados $\sqrt{2}$ $\quad 1,4$ e cos $18°$ $\quad 0,95$, é de

(a) $1,45\,m$
(b) $2,33\,m$
(c) $2,47\,m$
(d) $3,35\,m$
(e) $3,45\,m$

(ESPCEX-2006) QUESTÃO 62

Conforme a figura, a 60 metros do chão o helicóptero H avista, sob um ângulo α, dois alvos, B e C, que serão logo abatidos.

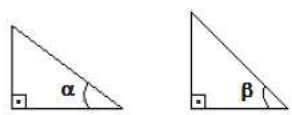


Se AB $40\,\text{m}$ e BC $260\,\text{m}$, então α mede

(a) $15°$
(b) $30°$
(c) $45°$
(d) $60°$
(e) $75°$

(ESPCEX-2006) QUESTÃO 63

Os ângulos agudos α e β pertencem aos triângulos retângulos abaixo.

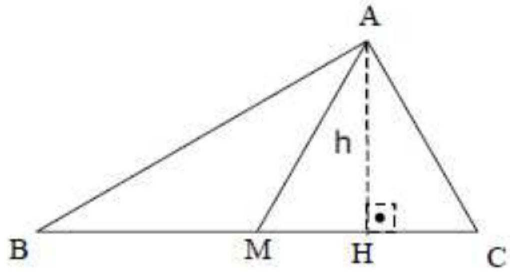


Se o seno de β é o dobro do seno de α, então o ângulo α pertence ao intervalo

(a) $]0°, 45°[$
(b) $[45°, 60°]$
(c) $]30°, 45°[$
(d) $]0°, 60°[$
(e) $]0°, 30°[$

(ESPCEX-2007) QUESTÃO 64

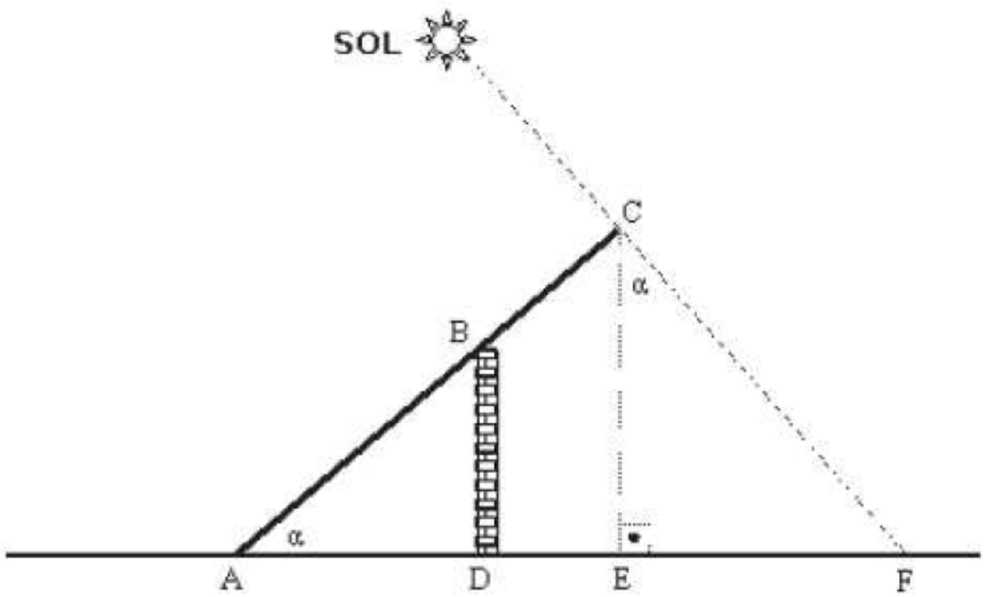
No triângulo ABC, a base $\overline{BC}$ mede $8\,\text{cm}$, o ângulo mede $30°$ e o segmento $\overline{AM}$ é congruente ao segmento $\overline{MC}$, sendo M o ponto médio de $\overline{BC}$. A medida, em centímetros, da altura h, relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC, é de



(a) $\sqrt{2}$cm
(b) $2\sqrt{2}$cm
(c) $\sqrt{3}$cm
(d) $2\sqrt{3}$cm
(e) $3\sqrt{3}$cm

(ESPCEX-2008) QUESTÃO 65

Na figura a seguir, está representado um muro (BD) de 6m de altura em que está apoiada uma escada representada por AC, que faz um ângulo α com a horizontal.



Desenho Fora de Escala

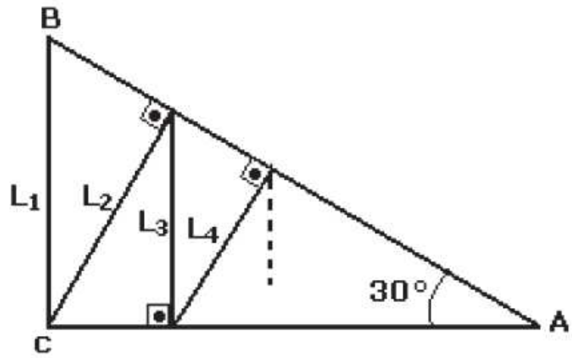
Sabe-se que a parte da escada indicada pelo segmento AB corresponde a $\frac{2}{3}$ do seu comprimento. Num determinado momento do dia, os raios de sol fazem com a vertical um ângulo também de valor α, projetando no ponto F a sombra da extremidade C da escada. (Dados: sen α $\frac{3}{5}$ e cos α $\frac{4}{5}$.)

Assim, considerando desprezível a espessura do muro, a medida do segmento DF, que corresponde à parte da sombra da escada que está além do muro, nesse instante, é igual a

(a) $6,75\,m$
(b) $10,75\,m$
(c) $14,75\,m$
(d) $18,75\,m$
(e) $22,75\,m$

(ESPCEX-2011) QUESTÃO 66

Considere o triângulo ABC abaixo, retângulo em C, em que $B\hat{A}C \quad 30^\circ$.



Nesse triângulo está representada uma sequência de segmentos cujas medidas estão indicadas por $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$, em que cada segmento é perpendicular a um dos lados do ângulo de vértice A. O valor

(a) $\frac{27\sqrt{3}}{128}$
(b) $\frac{1}{128}$
(c) $\frac{81}{256}$
(d) $\frac{27}{64}$
(e) $\frac{1}{256}$

(ESPCEX-2013) QUESTÃO 67

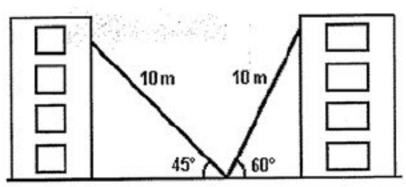
Um tenente do Exército está fazendo um levantamento topográfico da região onde será realizado um exercício de campo. Ele quer determinar a largura do rio que corta a região e por isso adotou os seguintes procedimentos: marcou dois pontos, A (uma árvore que ele observou na outra margem) e

B (uma estaca que ele fincou no chão na margem onde ele se encontra); marcou um ponto C distante 9 metros de B, fixou um aparelho de medir ângulo (teodolito) de tal modo que o ângulo no ponto B seja reto e obteve uma medida de $\frac{\pi}{3}$ rad para o ângulo $A\hat{C}B$. Qual foi a largura do rio que ele encontrou?

(a) $9\sqrt{3}$ metros
(b) $3\sqrt{3}$ metros
(c) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ metros
(d) $\sqrt{3}$ metros
(e) $4,5$ metros

(EAM-2005) QUESTÃO 68

Uma escada de 10 metros de comprimento forma um ângulo de $60°$ com a horizontal quando encostada ao edifício de um dos lados da rua, e ângulo de $45°$ se for encostada ao edifício do outro lado, apoiada no mesmo ponto do chão.



A largura da rua, em metros, vale aproximadamente:

(a) 15
(b) 14
(c) 13
(d) 12
(e) 11

(EAM-2012) QUESTÃO 69

Uma aeronave decola fazendo, com a pista plana e horizontal, um ângulo de elevação de $30°$. Após percorrer $1,2$ km, a aeronave se encontra, em relação ao solo, a uma altura igual a

(a) 900 m
(b) 600 m
(c) 500 m

(d) $400\,\text{m}$
(e) $300\,\text{m}$

(EAM-2014) QUESTÃO 70

Uma pipa ficou presa em um galho de uma árvore e seu fio ficou esticado formando um ângulo de $60°$ com o solo. Sabendo que o comprimento do fio é de $50\,\text{m}$, a que altura, aproximadamente, do solo encontrava-se a pipa? (considere $\sqrt{3} \quad 1,7$)

(a) $15,7\,\text{m}$
(b) $25\,\text{m}$
(c) $42,5\,\text{m}$
(d) $50,5\,\text{m}$
(e) $85\,\text{m}$

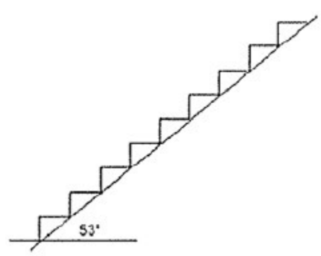
(EAM-2015) QUESTÃO 71

Um avião decola de um aeroporto e sobe segundo um ângulo constante de $15°$ com a horizontal. Na direção do percurso do avião, a $2\,\text{km}$ do aeroporto, um garoto observa o avião sobre ele. Qual é a altura do avião neste momento? (dados sen $15° \quad 0,26$; cos $15° \quad 0,96$; tg $15° \quad 0,27$)

(a) $960\,\text{m}$
(b) $540\,\text{m}$
(c) $260\,\text{m}$
(d) $96\,\text{m}$
(e) $26\,\text{m}$

(EAM-2016) QUESTÃO 72

Analise a figura abaixo.



Uma escada com 10 degraus, construída sobre uma rampa, conforme a figura acima, deve ligar dois pavimentos de uma casa. Sabendo que o comprimento de cada degrau é igual a $30\,\text{cm}$ e a inclinação da rampa com a horizontal é igual a $53°$, determine a altura de cada degrau, considerando que o seno de $53°$ é igual a $0,8$ e o cosseno de $53°$ é igual a $0,6$, assinalando, a seguir, a opção correta.

(a) $10\,\text{cm}$
(b) $20\,\text{cm}$
(c) $40\,\text{cm}$
(d) $50\,\text{cm}$
(e) $60\,\text{cm}$

(EAM-2017) QUESTÃO 73

Apoiado em dois pilares construídos sobre um terreno plano e distantes $3\,\text{m}$ um do outro, constrói-se um telhado, cuja inclinação é de $30°$ em relação ao piso. Se o pilar de menor altura mede 4 metros, qual é a altura do outro pilar? (dado: $\sqrt{3} \quad 1,7$)

(a) $5,5\,\text{m}$
(b) $5,7\,\text{m}$
(c) $6,0\,\text{m}$
(d) $6,5\,\text{m}$
(e) $6,9\,\text{m}$

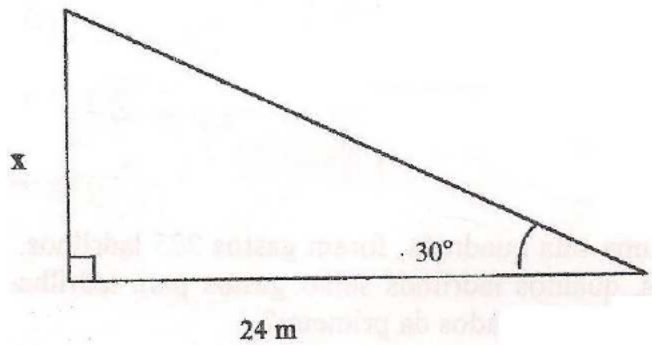
(FUZILEIRO NAVAL-2003) QUESTÃO 74

Um avião decola formando um ângulo de $30°$ com o solo. Após $90\,\text{km}$ e mantendo ainda a mesma inclinação, que altura o avião terá atingido?

(a) $45\,\text{km}$
(b) $50\,\text{km}$
(c) $75\,\text{km}$
(d) $90\,\text{km}$

(FUZILEIRO NAVAL-2003) QUESTÃO 75

Sabendo-se que $\text{tg}\,30° \quad \frac{\sqrt{3}}{3}$, o valor de x no triângulo da figura é:



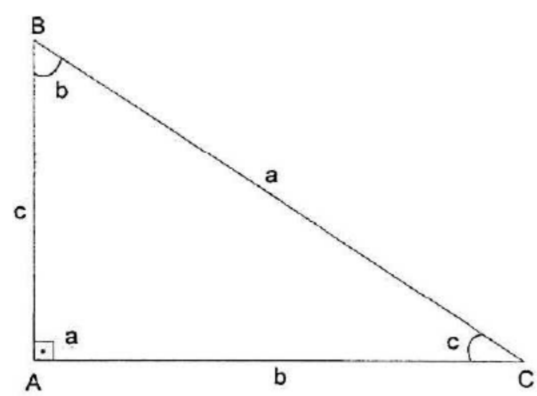
(a) $24\sqrt{3}\,m$
(b) $12\sqrt{3}\,m$
(c) $8\sqrt{3}\,m$
(d) $6\sqrt{3}\,m$

(FUZILEIRO NAVAL-2005) QUESTÃO 76

Em um triângulo retângulo, o seno de um de seus ângulos agudos é

(a) o inverso do cosseno desse ângulo.
(b) o quadrado do cosseno desse ângulo.
(c) a razão entre as medidas dos catetos do triângulo.
(d) a razão entre a medida da hipotenusa e a medida do lado adjacente a esse ângulo.
(e) a razão entre a medida do lado oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

(FUZILEIRO NAVAL-2008) QUESTÃO 77



Para o triângulo retângulo ABC acima, a razão trigonométrica correta é

(a) $\text{sen}\,\hat{b} \quad \frac{b}{a}$

(b) $\text{sen}\,\hat{b} \quad \frac{b}{c}$

(c) $\cos\hat{b} \quad \frac{b}{a}$

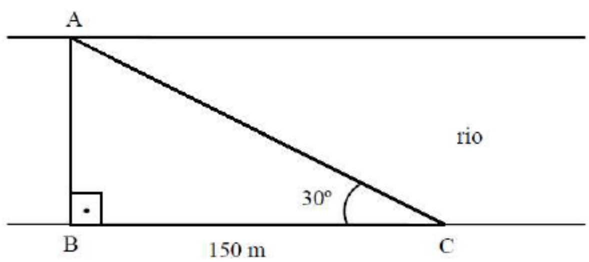
(d) $\text{tg}\,\hat{b} \quad \frac{c}{b}$

(e) $\text{tg}\,\hat{c} \quad \frac{b}{c}$

(FUZILEIRO NAVAL-2011) QUESTÃO 78

Uma pessoa está na margem de um rio, onde existem duas árvores (B e C, na figura). Na outra margem, em frente a B, existe outra árvore, A, vista de C segundo um ângulo de $30°$, com relação a B. Se a distância de B a C é $150\,\text{m}$, qual é a largura do rio, aproximadamente, sendo $\sqrt{2} \quad 1,41$ e $\sqrt{3} \quad 1,73$?

	$30°$	$45°$	$60°$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



(a) $129,75$

(b) $105,75$

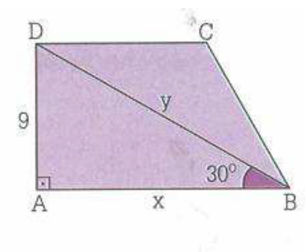
(c) $100,25$

(d) $95,50$

(e) $86,50$

(FUZILEIRO NAVAL-2013) QUESTÃO 79

Observe o trapézio retângulo da figura abaixo.



Determine, em cm, a medida x da base maior AB e a medida y da diagonal maior BD, respectivamente.

(a) $6\sqrt{2}, 18$
(b) $3\sqrt{3}, 3$
(c) $5\sqrt{2}, 9$
(d) $3\sqrt{2}, 9$
(e) $9\sqrt{3}, 18$

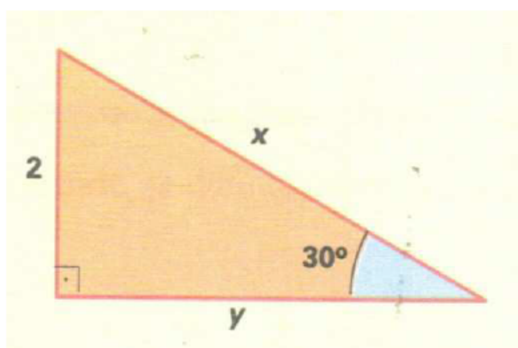
(FUZILEIRO NAVAL-2014) QUESTÃO 80

Um foguete é lançado de uma rampa situada no solo, sob um ângulo de $30°$. A que altura encontra-se esse foguete após percorrer $8\,\text{km}$? (Dados: $\text{tg}\,30° \quad 0,577$; $\cos 30° \quad 0,866$ e $\text{sen}\,30° \quad 0,500$.)

(a) $2,50\,\text{km}$
(b) $3,15\,\text{km}$
(c) $4,00\,\text{km}$
(d) $5,00\,\text{km}$
(e) $5,45\,\text{km}$

(FUZILEIRO NAVAL-2017) QUESTÃO 81

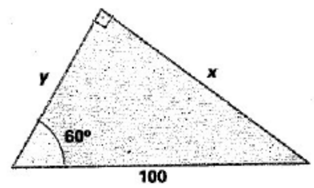
De acordo com a figura abaixo, determine os valores das incógnitas x e y respectivamente.



(a) 4 e $\frac{4}{3}$
(b) $2\sqrt{3}$ e 2
(c) $3\sqrt{2}$ e $\frac{4}{3}$
(d) $4\sqrt{3}$ e 2
(e) 4 e $2\sqrt{3}$

(FUZILEIRO NAVAL-2018) QUESTÃO 82

De acordo com a figura abaixo, determine os valores das incógnitas x e y respectivamente.



(a) $50\sqrt{3}$ e $50\sqrt{2}$
(b) $50\sqrt{2}$ e 50
(c) $50\sqrt{2}$ e $50\sqrt{3}$
(d) $50\sqrt{3}$ e 50
(e) 50 e 50

(FUZILEIRO NAVAL-2019) QUESTÃO 83

Uma aeronave decolou sob um ângulo de $30°$ em relação à pista. Após percorrer 100 metros de distância, no ar, nessa mesma angulação, qual a sua altura em relação à pista?

(a) 50 metros
(b) 100 metros
(c) 150 metros
(d) 200 metros
(e) 250 metros

(AFA-1998) QUESTÃO 84

Uma aeronave decola, iniciando seu vôo sob um ângulo de 30o, em relação ao solo, mantendo-se sob tal inclinação nos primeiros 500 metros. Em seguida, diminui em $15°$ o seu ângulo de inclinação, mantendo-se assim por 1 quilômetro. Logo após, nivela-se até iniciar a aterrissagem. Qual é, aproximadamente, a altura dessa aeronave, em metros, em relação ao solo, durante o seu vôo nivelado?

(a) 400
(b) 500
(c) 600
(d) 700

(AFA-1998) QUESTÃO 85

No triângulo retângulo ABC, os catetos AB e AC medem, respectivamente, $2+\sqrt{2}$ e 2. Seja D um ponto de AB, tal que $AD \quad AC$. Se α e β são, respectivamente, as medidas de $A\hat{D}C$ e $A\hat{B}C$, então $\text{tg}\,(\alpha+\beta)$ é

(a) $\sqrt{2}-1$
(b) $\sqrt{2}+2$
(c) $2\sqrt{2}-1$
(d) $2\sqrt{2}+1$

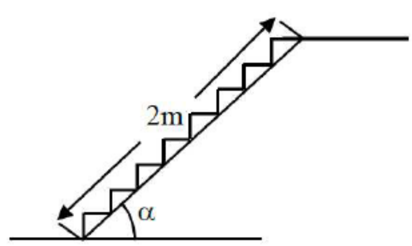
(AFA-2000) QUESTÃO 86

No quadrilátero $ABCD$, $AB \quad AD \quad 2BC \quad 2CD$ e $\hat{B} \approx \hat{D} \quad 90°$. O valor do ângulo interno é

(a) $\arccos \frac{1}{5}$
(b) $\arccos \frac{2}{5}$
(c) $\text{arcsen}\,\frac{3}{5}$
(d) $\text{arcsen}\,\frac{4}{5}$

(AFA-2001) QUESTÃO 87

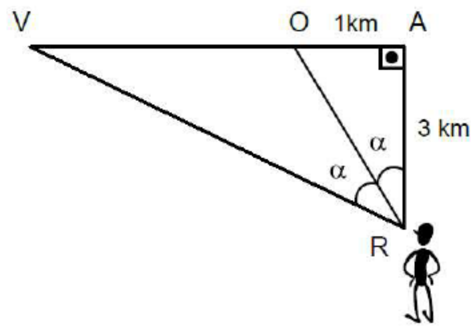
O acesso ao mezanino de uma construção deve ser feito por uma rampa plana, com 2m de comprimento. O ângulo α que essa rampa faz com o piso inferior (conforme figura) para que nela sejam construídos 8 degraus, cada um com $21,6$cm de altura, é, aproximadamente, igual a



(a) 15°
(b) 30°
(c) 45°
(d) 60°

(AFA-2002) QUESTÃO 88

Ao saltar do avião que sobrevoa o ponto A (veja figura), um paraquedista cai e toca o solo no ponto V.

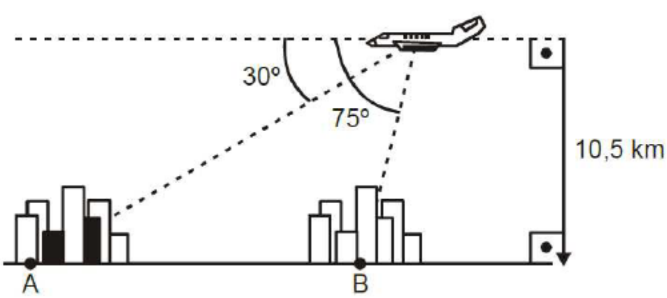


Um observador que está em R contacta a equipe de resgate localizada em O. A distância, em km, entre o ponto em que o paraquedista tocou o solo e a equipe de resgate é igual a

(a) $1,15$
(b) $1,25$
(c) $1,35$
(d) $1,75$

(AFA-2004) QUESTÃO 89

Um passageiro em um avião voando a $10,5$ km de altura avista duas cidades à esquerda da aeronave. Os ângulos de depressão em relação às cidades são 30° e 75° conforme a figura abaixo.

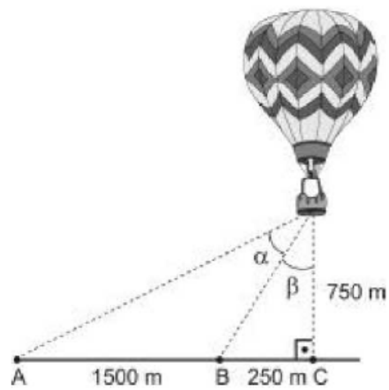


A distância, em km, entre os prédios A e B situados nessas cidades é igual a:

(a) $21(\sqrt{3}-1)$
(b) $\frac{21}{2}(\sqrt{3}-1)$
(c) $\frac{21}{2}\sqrt{3}$
(d) $\sqrt{3}-1$

(AFA-2006) QUESTÃO 90

Um balão sobrevoa certa cidade a uma altura de $750\,\text{m}$ em relação ao solo, na horizontal. Deste balão avistam-se pontos luminosos A, B e C, conforme a figura abaixo.

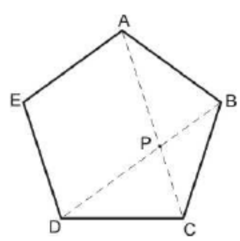


O valor da $\text{tg}\,\alpha$ é igual a

(a) $\frac{7}{3}$
(b) $\frac{9}{8}$
(c) $\frac{3}{2}$
(d) $\frac{1}{3}$

(AFA-2018) QUESTÃO 91

A figura a seguir é um pentágono regular de lado $2\,\text{cm}$.



Os triângulos DBC e BCP são semelhantes. A medida de $\overline{AC}$, uma das diagonais do pentágono regular, em cm, é igual a

(a) $1+\sqrt{5}$
(b) $-1+\sqrt{5}$
(c) $2+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
(d) $2\sqrt{5}-1$

1.5– GABARITO

Q. 1: A	**Q. 20**: C	**Q. 39**: C	**Q. 58**: D	**Q. 77**: A
Q. 2: B	**Q. 21**: C	**Q. 40**: C	**Q. 59**: C	**Q. 78**: E
Q. 3: B	**Q. 22**: B	**Q. 41**: B	**Q. 60**: E	**Q. 79**: E
Q. 4: C	**Q. 23**: B	**Q. 42**: D	**Q. 61**: B	**Q. 80**: C
Q. 5: D	**Q. 24**: B	**Q. 43**: D	**Q. 62**: C	**Q. 81**: E
Q. 6: D	**Q. 25**: A	**Q. 44**: A	**Q. 63**: E	**Q. 82**: D
Q. 7: A	**Q. 26**: B	**Q. 45**: C	**Q. 64**: D	**Q. 83**: A
Q. 8: B	**Q. 27**: A	**Q. 46**: B	**Q. 65**: B	**Q. 84**: B
Q. 9: A	**Q. 28**: C	**Q. 47**: C	**Q. 66**: C	**Q. 85**: D
Q. 10: D	**Q. 29**: C	**Q. 48**: C	**Q. 67**: A	**Q. 86**: D
Q. 11: D	**Q. 30**: D	**Q. 49**: A	**Q. 68**: D	**Q. 87**: D
Q. 12: D	**Q. 31**: A	**Q. 50**: B	**Q. 69**: B	**Q. 88**: B
Q. 13: A	**Q. 32**: A	**Q. 51**: B	**Q. 70**: C	**Q. 89**: A
Q. 14: C	**Q. 33**: B	**Q. 52**: B	**Q. 71**: B	**Q. 90**: B
Q. 15: C	**Q. 34**: D	**Q. 53**: B	**Q. 72**: C	**Q. 91**: A
Q. 16: C	**Q. 35**: C	**Q. 54**: D	**Q. 73**: B	
Q. 17: A	**Q. 36**: A	**Q. 55**: D	**Q. 74**: A	
Q. 18: A	**Q. 37**: B	**Q. 56**: D	**Q. 75**: A	
Q. 19: D	**Q. 38**: C	**Q. 57**: C	**Q. 76**: E	

1.5– Índice Remissivo