Resolução – Treinamento ENEM
S17.L1 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Item 01 ==

Para sabermos a quantidade de desenvolvedoras de jogos formalizadas na Região Norte em 2018, primeiro vamos a partir dos dados do infográfico montarmos uma equação onde o total de empresas formalizadas em 2018 tem que ser igual à soma dos valores de cada região em 2018, obtendo:

$$total\ em\ 2018 = sudeste + sul + nordeste + centro\ oeste + norte$$

Resolvendo a equação temos que essa quantidade é;

$$\begin{aligned}
&total\ em\ 2018 = sudeste + sul + nordeste + centrooeste + norte\\
&276 = 146 + 60 + 40 + 21 + norte\\
&276 = 167 + 100 + norte \rightarrow norte = 276 - 267\\
&norte = 9\ desenvolvedores\ de\ jogos
\end{aligned}$$

Resposta: Letra C.

Item 02 ==

Primeiro vamos considerar que a moda é maior que 20, para isso temos que a quantidade de pessoas atendidas na sexta feira e no sábado são iguais e maiores do que 20, pois a quantidade de pessoas atendidas nos outros dias é menor ou igual a 20 e não se repete nenhuma vez.

Assim, como sabemos que a média é de 21 dias e que a quantidade de pessoas atendidas no sábado e no domingo são iguais, obtemos a quantidade máxima de pessoas atendidas é:

$$\begin{aligned}
&média = \frac{valores\ 4\ primeiros\ dias + sexta + sábado}{6}\\
&21 = \frac{20 + 17 + 16 + 19 + x + x}{6}\\
&21\cdot(5+1) = 37 + 35 + 2x \rightarrow 105 + 21 = 72 + 2x\\
&126 - 72 = 2x \rightarrow 2x = 54 \rightarrow x = \frac{54}{2}\\
&x = 27\ pessoas
\end{aligned}$$

Resposta: Letra C.

Item 03 ==

Resolvendo de forma clássica para o valor da tarifa não sofra acréscimos ou decréscimos, temos que essa deve ser de 50 após as 5 primeiras meias hora. Dessa forma, obtemos que x vale:

$$\begin{aligned}
&média = \frac{1^{a}\frac{1}{2}hora + 2^{a}\frac{1}{2}hora + 3^{a}\frac{1}{2}hora + 4^{a}\frac{1}{2}hora + x}{5}\\
&50 = \frac{52 + 47 + 58 + 50 + x}{5} \rightarrow 5\cdot 50 = 110 + 97 + x\\
&x + 207 = 250 \rightarrow x = 250 - 207\\
&x = 43
\end{aligned}$$

Resposta: Letra D.

Resolvendo de outra forma:

Resolvendo como uma das formas que o Fredão e o Lobo trabalham bastante ao longo do curso que é chutando uma média pra facilitar os cálculos e nesse caso será a média alvo para que a tarifa não aumente, 50 carros, obtemos que na quinta meia hora a quantidade de carros (x) deve ser:

$$\begin{aligned}
&x = chute + \left(chute - 1^{a}\frac{1}{2}hora\right) + \left(chute - 2^{a}\frac{1}{2}hora\right) +\\
&\left(chute - 4^{a}\frac{1}{2}hora\right) + \left(chute - 4^{a}\frac{1}{2}hora\right)\\
&x = 50 + (50 - 52) + (50 - 47) + (50 - 58) + (50 - 50)\\
&x = 50 - 2 + 3 - 8 + 0 \rightarrow x = 50 - 7\\
&x = 43\ carros
\end{aligned}$$

Resposta: Letra D.

Item 04 ==

Para resolvermos essa questão vamos calcular a média ponderada atribuindo os respectivos pesos para cada unidade, obtendo que a média ponderada anual é:

$$\begin{aligned}
&média\ ponderada\ anual = \frac{9,5\cdot 1 + 8\cdot 2 + 6,5\cdot 3 + 4,5\cdot 4}{soma\ dos\ pesos}\\
&média\ ponderada\ anual = \frac{9,5 + 16 + (6 + 0,5)\cdot 3 + (4 + 0,5)\cdot 4}{1 + 2 + 3 + 4}\\
&média\ ponderada\ anual = \frac{9,5 + 16 + 18 + 1,5 + 16 + 2}{10}\\
&média\ ponderada\ anual = \frac{11 + 20 + 32}{10}\\
&média\ ponderada\ anual = \frac{63}{10} \rightarrow média\ ponderada\ anual = 6,3
\end{aligned}$$

Resposta: Letra B.

Item 05 ==

A partir do gráfico da questão temos que o candidato A teve 30% dos votos enquanto o candidato B teve 55% dos votos, como os votos em branco ou nulos não são considerados votos válidos, o novo total passa a ser a quantidade de votos recebidos pelo candidato A e B, totalizando assim 85%.

Assim, calculando quanto os 30% de votos inicialmente recebidos pelo candidato A representam em relação aos votos validos obtemos:

$$\frac{\%\,dos\ votos\ válidos}{100\%} = \frac{\%\,de\ votos\ candidato\ A\ inicialmente}{x}$$

$$\frac{85\%}{100\%} = \frac{30\%}{x} \rightarrow 85\% \cdot x = 30\% \cdot 100\%$$

$$x = 100\% \cdot \frac{30\%}{85\%} \rightarrow x = \frac{5 \cdot 6}{5 \cdot 17} \cdot 100\%$$

$$x = \frac{600}{17}\% \rightarrow x = \left(\frac{510}{17} + \frac{51}{17} + \frac{34}{17} + \frac{5}{17}\right)\%$$

$$x \cong (30 + 3 + 2 + 0{,}3)\%$$

$$x \cong 35{,}3\%$$

Resposta: Letra C.

Observação: Percebam que como nos votos validos temos apenas a porcentagem em relação aos candidatos A e B, basta calcularmos um dos dois candidatos e o que faltar para 100% será o que corresponde ao outro candidato que nesse caso é de 64,7% para o candidato B.

Item 06 ==

Para a avaliação A temos:

$$m = \frac{3+3+4+4+4+6}{6} \rightarrow m = 4$$

$$dp = \sqrt{\frac{(3-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (4-4)^2 + (4-4)^2 + (6-4)^2}{6}} = 1$$

Já para a avaliação B temos que a média é igual a 4 e como todos os termos são iguais a 4 conclui-se que o desvio padrão é zero. Então para calcularmos o número de alunos da turma do cursinho de inglês basta calcularmos o número de termos para um desvio padrão igual a $\frac{1}{2}$,sendo:

$$dp = \sqrt{\frac{(3-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + \cdots + (6-4)^2}{6}} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\sqrt{\frac{(3-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + \cdots + (6-4)^2}{6}} = \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{6}{n} = \frac{1}{4} \rightarrow 24 = n$$

Resposta: Letra A.

Item 07 ==

Essa é uma questão direta de extração de mediana a partir de uma sequência numérica de um gráfico. Deve-se sempre manter em mente que para extrair a mediana em um conjunto, usa-se o termo central da sequência quando ela está em ordem crescente, e não meramente na ordem que a questão apresenta. Por exemplo, no gráfico em questão são apresentados 10 valores, e caso nós escolhamos os dois números no meio dessa sequência achamos o 298.041 (mês de maio) e 212.952 (mês de junho), que não representam a mediana desse conjunto. Primeiro deve-se ordenar os termos, assim obtemos a sequência:

$$181.419 \rightarrow 181.796 \rightarrow 204.804 \rightarrow 209.425 \rightarrow 212.952 \rightarrow$$

$$\rightarrow 246.875 \rightarrow 255.415 \rightarrow 290.415 \rightarrow 298.041 \rightarrow 305.088$$

E como a sequência possui um número par de elementos, a mediana será a média aritmética dos dois termos centrais: 212.952 e 246.875.

Essa mediana é 229.913,5

Resposta: Letra B.

Item 08 ==

A primeira etapa para resolvermos essa questão é calcular a média ponderada anual de Geisa com base nas três primeiras provas, segundo os pesos que o enunciado informou (3, 3 e 4):

$$MA = \frac{2 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4}{3+3+4}$$

$$MA = \frac{6+18+36}{10}$$

$$MA = \frac{60}{10} = 6$$

Sabendo sua nota final, e sabendo que a Média ponderada final MF é encontrada a partir da nota da prova final de verificação (PFV) e da MA, usando os pesos 3 e 2, teremos:

$$MF = \frac{MA \cdot 3 + PFV \cdot 2}{3+2}$$

Sabemos que a Média final desejada é 5, e que a MA de Geisa foi de 6, logo:

$$5 = \frac{6 \cdot 3 + PFV \cdot 2}{3+2}$$

$$5 = \frac{18 + PFV \cdot 2}{5}$$

$$18 + PFV \cdot 2 = 25$$

$$PFV = \frac{25-18}{2} = 3{,}5$$

E ficamos com a **Letra B.**

Item 09 ==

Vamos primeiro escrever essa sequência de números como a, b, c e d, e vamos encontrando um de cada vez com as informações do enunciado.

Se a moda da sequência é 8, necessariamente pelo menos dois números da sequência precisam ser 8. Além disso, a mediana da sequência também é 8, o que quer dizer que a média entre b e c deve ser 8.

Ora, se a diferença entre d e a é de 24, conforme o enunciado, é impossível que ambos sejam 8, logo é necessário que pelo menos b ou c sejam 8 para cumprir os requisitos da moda.

Entretanto, se a média entre b e c é 8, e um desses dois números com certeza também é igual a 8, necessariamente os dois precisam ser iguais a 8.

O enunciado nos disse que a média dos 4 números é 7 e que a diferença entre o maior e o menor é 24, logo, podemos escrever as seguintes relações:

$$\frac{a+b+c+d}{4}=7$$
$$d-a=24$$

Substituindo b e c por 8, teremos um sistema de duas equações:

$$\frac{a+8+8+d}{4}=7$$
$$d-a=24$$

Vamos trabalhar um pouco a primeira equação e depois resolver o sistema usando o método da adição:

$$\frac{a+8+8+d}{4}=7$$
$$\frac{d+a+16}{4}=7$$
$$d+a+16=28$$
$$d+a=12$$

$$d+a=12$$
$$+$$
$$d-a=24$$
$$=$$
$$2d=36$$
$$d=18$$
$$a=-6$$

Agora que sabemos a média do sistema (7) e todos os seus termos (-6, 8, 8 e 18), podemos achar a variância como a média dos desvios quadráticos:

$$V=\frac{(-6-7)^2+(8-7)^2+(8-7)^2+(18-7)^2}{4}$$
$$V=\frac{169+1+1+121}{4}$$
$$V=\frac{292}{4}=73$$

E o desvio padrão pode ser encontrado como a raiz quadrada da variância:

$$dp=\sqrt{73}$$

E ficamos com a **Letra E.**

Item 10 ==

O dado mais fácil de descobrir é a moda, já que é o valor que mais aparece. Vemos que a altura mais frequente é 10 cm, com 18 mudas. Sabendo disso, se olharmos para as alternativas, vemos que as únicas possibilidades de resposta são as letras b e c, e ambas apresentam o mesmo valor para a moda e a mediana.

Ou seja, para desempatar entre as duas e encontrarmos a resposta, precisamos encontrar a média. A média dessa série estatística será uma média ponderada, na qual a frequência de cada altura de muda é seu peso:

$$\text{Média}=\frac{10\cdot(18)+13\cdot(7)+8\cdot(9)+4{,}5\cdot(16)}{(18+7+9+16)}$$
$$\text{Média}=\frac{180+91+72+72}{50}$$
$$\text{Média}=\frac{271+144}{50}$$
$$\text{Média}=\frac{415}{50}=\frac{830}{100}=8{,}3$$

E ficamos com a **Letra B.**

Item 11 ==

Para que encontremos o número mínimo de consumidores necessários para aumentar essa média, podemos considerar que cada consumidor hipotético para esta conta deu nota 10 para o sabão em pó. Afinal, se a questão quer o número mínimo de novas entrevistas, menos pessoas precisarão ser entrevistadas se todas derem a maior nota possível.

Com isso, nós sabemos que a média das primeiras 600 pessoas foi 8,5. Ora, a média é encontrada como o somatório de todas as notas dadas (Σ_n) dividido pela quantidade de pessoas, logo nós sabemos que:

$$\text{Média}=\frac{\Sigma_n}{\text{n}^{\text{o}}\,\text{pessoas}}$$
$$8{,}5=\frac{\Sigma_n}{600}$$
$$\Sigma_n=5100$$

Mas para que nós queremos encontrar o somatório das 600 primeiras notas?

Ora, se nós precisamos de um número x a mais de entrevistas com nota 10 para subir a nota para 9, teremos a seguinte configuração para o cálculo da média após essas novas entrevistas:

Resolução – Treinamento ENEM
S17.L1 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

$$\text{Média} = \frac{\Sigma_n + x \cdot 10}{600 + x}$$

Já que as x notas 10 devem ser incluídas no somatório das notas, e as x pessoas a mais entrevistadas precisam ser incluídas no número de pessoas. Com isso, substituindo o valor original de Σ_n, e sabendo que a média nova deve ser 9, teremos:

$$9 = \frac{5100 + x \cdot 10}{600 + x}$$
$$5400 + 9x = 5100 + 10x$$
$$9x - 10x = 5100 - 5400$$
$$x = 300$$

E ficamos com a **Letra B.**

Item 12 ==

O primeiro passo para resolvermos essa questão é sabermos quais países fazem parte da América Latina (o que é um conhecimento estranho de ser cobrado numa questão de matemática), mas lembremos que a Índia fica na Ásia, que a África do Sul, fica na África e que Grécia e Espanha ficam na Europa.

Além disso, lembremos que os Estados Unidos ficam na América, mas não fazem parte da América Latina. Por fim, note que a questão pediu pra compararmos a média do Brasil com a média dos DEMAIS países da América Latina, logo o Brasil não deve ser considerado nessa conta. Com isso os países que iremos considerar nesta análise serão: Chile (21,9), México (20,9), Peru (19,8) e Costa Rica (18,6).

Encontrar a média desses países é somar o valor de cada um e dividir por 4:

$$\overline{M} = \frac{21,9 + 20,9 + 19,8 + 18,6}{4}$$
$$\overline{M} = \frac{42,8 + 38,4}{4}$$
$$\overline{M} = 10,7 + 9,6 = 20,3$$

Para encerrarmos a questão, basta encontrarmos a diferença entre a média do Brasil e a média desses países, que acabamos de encontrar:

$$37,5 - 20,3 = 17,2$$

E ficamos com a **Letra A.**

Item 13 ==

Para resolvermos a questão vamos precisar encontrar a média e a mediana do sistema. A fim de encontrar a mediana, vamos precisar ordenar as notas de forma crescente:

7,5 / 7,7 / 7,8 / 7,8 / 7,9 / 7,9 / 8,3 / 8,3 / 8,3 / 8,8

E como temos um número par de termos, a mediana será a média dos dois termos centrais, que são 7,9 e 7,9. Ora, a média entre esses dois números também é 7,9, então essa é a mediana do sistema.

Para calcularmos a média do sistema, vamos somar todas as notas e dividir por 10:

$$\overline{M} = \frac{7,5 + 7,7 + 7,8 + 7,8 + 7,9 + 7,9 + 8,3 + 8,3 + 8,3 + 8,8}{10}$$
$$\overline{M} = \frac{15,2 + 15,6 + 15,8 + 16,6 + 17,1}{10}$$
$$\overline{M} = \frac{30,8 + 32,4 + 17,1}{10} = \frac{80,3}{10} = 8,03$$

Dessa forma, apenas os candidatos com as 4 maiores notas (8,3; 8,3; 8,3 e 8,8) tiraram uma nota maior que média **e** maior ou igual à mediana, logo houve 4 aprovados nesse concurso, e ficamos com a **Letra C.**

Item 14 ==

Nesse gráfico temos informações gráficas e numéricas sobre o preço de certos produtos em algumas cidades do mundo, sendo que a fração colorida da imagem representa, também, seu custo. Além disso, o ranqueamento das cidades é feito com base na soma dos custos de todos os produtos, como se nota na tarja preta a direita de cada linha do gráfico. É muito importante compreender que, apesar de só haver 5 cidades na imagem, deve-se levar em conta que o ranking global possuía muito mais, e não se pode desprezar que alguns desses produtos talvez sejam mais caros em cidades não mencionadas.

Vamos agora analisar as afirmações dadas:

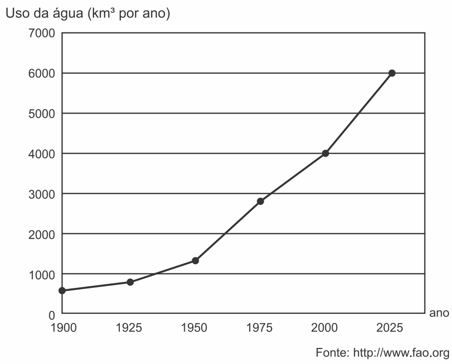
I. A afirmação é correta, uma vez que o enunciado nos orienta a interpretar também as informações coloridas no gráfico, e a imagem referente ao aluguel de Luanda está totalmente colorida, indicando que se refere ao preço máximo observado.
II. Muita atenção ao erro que esse item quer induzir no aluno. O cafezinho de Tóquio é o mais caro dentre as 5 cidades ilustradas na tabela, mas não é o mais caro do mundo, basta notar que a imagem referente ao café não está totalmente colorida, indicando que existem observações de cafezinhos mais caros em cidades que não foram ilustradas nessa imagem.
III. A afirmação está correta, por uma avaliação análoga ao item 1, uma vez que a imagem do jornal está completamente colorida.
IV. Mais uma vez, é a imagem completamente colorida que nos mostra que o valor mencionado é, de fato, o maior do mundo.
V. Por fim, temos a mesma análise para a gasolina de Tóquio, com a imagem do carro totalmente preenchida.

Logo, o único item falso é o II.

Resposta: Letra D.

Resolução – Treinamento ENEM
S17.L1 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Item 15 ==



Vamos analisar cada uma das alternativas:

a) de 1900 a 1925, o uso de água aumentou em 100% 100%.

Sabemos que em 1900 o uso de água pelo homem era de 600 km^3 e pelo gráfico acima vemos que o uso de água em 1925 era menor do que 1000 km^3. Fazendo o aumento percentual entre 1900 e 1925:

$$\frac{Uso_{1925} - Uso_{1900}}{Uso_{1900}} = \frac{Uso_{1925} - 600\,km^3}{600\,km^3}$$

Como sabemos que o uso em 1925 foi menor do que 1000 km^3 podemos escrever:

$$\frac{Uso_{1925} - 600\,km^3}{600\,km^3} < \frac{1000\,km^3 - 600\,km^3}{600\,km^3} = \frac{400\,km^3}{600\,km^3}$$

$$\frac{Uso_{1925} - 600\,km^3}{600\,km^3} < \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \cong 66,67\%$$

Logo, de 1900 a 1925 o uso de água aumentou menos que 100%, portanto, a letra A está errada.

b) de 1900 a 2000, o uso da água aumentou em mais de 600%.

Em 1900 o uso de água era de 600 km^3 e em 2000 o uso era de 4000 km^3, fazendo o aumento percentual entre 1900 e 2000:

$$\frac{Uso_{2000} - Uso_{1900}}{Uso_{1900}} =$$

$$\frac{4000\,km^3 - 600\,km^3}{600\,km^3} =$$

$$\frac{3400}{600} =$$

$$\frac{34}{6} = \frac{30}{6} + \frac{4}{6} = 5 + \frac{2}{3} \cong 5,67 = 567\%$$

Logo, de 1900 a 2000 o uso de água aumentou em 567% que é menor do que 600%, portanto, a letra B está errada.

c) de 2000 a 2025, mantida a expectativa de uso da água, o aumento será de 66,6%.

Olhando o gráfico, vemos que em 2000 o uso de água era de 4000 km^3 e em 2025 a estimativa do uso é de que seja de 6000 km^3, fazendo o aumento percentual entre 2000 e 2025:

$$\frac{Uso_{2025} - Uso_{2000}}{Uso_{2000}} =$$

$$\frac{6000\,km^3 - 4000\,km^3}{4000\,km^3} =$$

$$\frac{2000}{6000} =$$

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \cong 0,333 = 33,3\%$$

Logo, de 2000 a 2025, mantida a expectativa de uso de água, o aumento será de 33,3% que é diferente de 66,6%, portanto, a letra C está errada.

d) de 1900 a 2025, mantida a expectativa de uso da água, o aumento será de 900%.

De acordo com o enunciado, temos que em 1900 o uso de água era de 600 km^3 e em 2025 a estimativa do uso é de que seja de 6000 km^3, fazendo o aumento percentual entre 1900 e 2025:

$$\frac{Uso_{2025} - Uso_{1900}}{Uso_{1900}} =$$

$$\frac{6000\,km^3 - 600\,km^3}{600\,km^3} =$$

$$\frac{5400}{600} =$$

$$\frac{54}{6} = 9 = 900\%$$

Logo, de 1900 a 2025, mantida a expectativa de uso de água, o aumento será de 900%, **portanto, a letra D está correta**.

e) de 1900 a 2025, mantida a expectativa de uso da água, o aumento será de 1.000%.

Como fizemos os cálculos desse aumento na letra D anterior, vimo que o aumento foi de 900% e não de 1000%, portanto a letra E está errada.

Resposta: Letra D.