AULA 07 – Polinômios

Sumário

1 – INTRODUÇÃO

Olá, meu querido aluno!! A prova está bem perto, né?! Pois é. Agora é hora de ficar tranquilo...começar as revisões...e ficar bastante calmo! Você já é um vencedor!! Ahhh...não se esqueça de me chamar para o churrasco da aprovação, ok?? Vou cobar..rsrsr!!

Sem mais, vamos a nossa aula!

Nesta aula, veremos um tópico um pouco chato, ao menos na opnião da maioria dos alunos. É um tema com muito teorema, que, por vezes, nem tão óbvios. Mas, juntos, tenho certeza que passaremos com tranquilidade por ele.

Polinômios é uma parte da matemática que vem caindo com mais frequência na sua prova. Confesso que ainda não temos tantas questões, mas, a cada dia, torna-se mais presente em concursos militares.

Passarei a teoria necessária para uma boa prova. Na verdade, esta teoria está um pouco além do nível da sua prova, justamente, para que não seja surpreendidO, OK?

Feita essa introdução, vamos iniciar, de fato, a nossa teoria!!!

2 – POLINÔMIOS

2.1 – DEFINIÇÃO DE POLINÔMIO

Podemos dizer de forma geral, que polinômio é uma função na variável x da forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Tal que:

- $a_n; a_{n-1}; a_{n-2}; \ldots a_1$ e a_0 são chamados de coeficientes do polinômio $P(x)$.

- Os coeficientes de cada termo do polinômio é um número natural.

Sempre que os coeficientes (todos eles) forem iguais a zero, podemos dizer que estamos diante de um polinômio nulo.
Veja:

$$P(x) = 0.x^n + 0.x^{n-1} + 0.x^{n-2} + \ldots + 0x + 0$$

2.2 – VALOR NUMÉRICO DE UM POLINÔMIO

Imaginemos um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ e α um número real ou complexo. Chama-se valor numérico do polinômio $P(x)$ a imagem de α quando este número é inserido em $P(x)$.

Ou seja:

$$P(x) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \ldots + a_1\alpha + a_0$$

Observe:

$P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 10; x = 2$

$$\begin{aligned}
P(2) &= 3.(2)^3 - 5.(2)^2 + 2.(2) - 10 \\
P(2) &= 3.8 - 5.4 + 4 - 10 \\
P(2) &= 24 - 20 + 4 - 10 \\
P(2) &= -2
\end{aligned}$$

Assim, o valor numérico de $P(x)$, quando $x = 2$ é -2.

Sempre que o valor numérico de um polinômio for igual a zero, podemos dizer que o número α é raiz de $P(x)$.

O **termo independente** de x do polinômio $P(x)$ é o termo a_0, e é igual ao valor numérico do polinômio quando fazemos $x = 0$, ou seja, $a_0 = P(0)$.

2.3 – Grau de um Polinômio

O grau de um polinômio é definido sempre pelo maior expoente da variável x, cujo coeficiente seja não nulo.

Em outras palavras: considere o polinômio $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, dizemos que o grau de $P(x)$ é igual a "n" se $a_n \neq 0$.

Veja alguns exemplos do que acabamos de falar:

a) $P(x)=3x^4-4x^2+x-7 \Rightarrow$ possui grau 4

b) $P(x)=0.x^7-5x^5+3x-10 \Rightarrow$ possui grau 5

c) $P(x)=17 \Rightarrow$ possui grau 0

TOME NOTA!

Saiba que não se define grau de polinômio nulo.

2.4 – Polinômios Idênticos

Dois ou mais polinômios serão classificados como idênticos se, somente se, seus termos correspondentes (coeficientes das variáveis com mesmo expoente) forem iguais entre si.

Ou seja, os polinômios $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ e $Q(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1x+b_0$ serão ditos idênticos se:

$$a_n=b_n; a_{n-1}=b_{n-1}; a_{n-2}=b_{n-2}; ...; a_0=b_0$$

Caso os coeficientes correspondentes sejam, de fato, idênticos, podemos dizer que:

$$P(x) = Q(x)$$

Exemplo:

- Determine os valores de a, b **e** c **para os quais os polinômios** $P(x) = ax^2 + 3x + 9$ **e** $B(x) = (b+3)x^2 + (c-1)x + 3b$ **sejam idênticos.**

Comentário:

Igualando os coeficientes, temos:

$$\begin{cases} a = b + 3 \Rightarrow a = 3 + 3 \Rightarrow a = 6 \\ 3 = c - 1 \Rightarrow c = 4 \\ 9 = 3b \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

Logo:

$a = 6$

$b = 3$

$c = 4$

ESQUEMATIZANDO

Dois polinômios são ditos idênticos quando assumem sempre o mesmo valor, qualquer que seja o valor atribuído à variável.

Dois polinômios idênticos são sempre de **mesmo grau** e têm todos os **coeficientes iguais**.

Se dois polinômios de grau **n** assumem o mesmo valor para (**n+1**) valores distintos da variável, então esses polinômios são idênticos.

Polinômio identicamente nulo é aquele que é nulo para qualquer valor da variável. Um polinômio identicamente nulo tem todos os seus coeficientes iguais a zero.

Se um polinômio de grau **n** possuir mais de **n** raízes, então ele é identicamente nulo.

2.5 – Raiz ou Zero de um Polinômio

Eis um tema importante dentro de Polinômio.

Sempre que um determinado valor α levar um polinômio $P(x)$ a ZERO, podemos dizer que α é a raiz de $P(x)$. Assim:

$$P(x) = 0 \Rightarrow \alpha \text{ é raiz.}$$

Exemplo:

Imagine o polinômio $P(x) = 3x^3 - 7x^2 + 2x + 2$**. Observe o valor de** $\alpha = 1$, **temos que:**

$$P(1) = 3.(1)^3 - 7.(1)^2 + 2.(1) + 2$$
$$P(1) = 3 - 7 + 2 + 2$$
$$P(1) = 7 - 7$$
$$P(1) = 0$$

Logo: $\alpha = 1$ é raiz de $P(x)$

TOME NOTA!

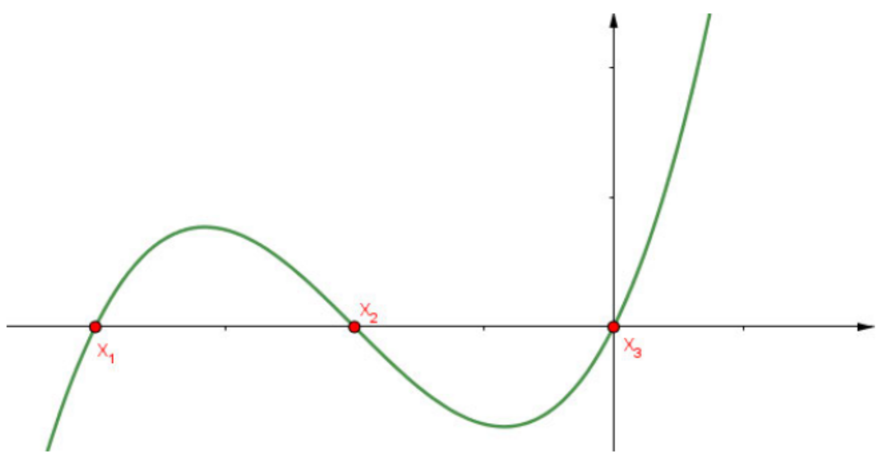
Raiz de um polinômio recebe outras denominações, a saber: **Raiz = zero de Polinômio = conjunto verdade**

INDO MAIS FUNDO!

Sempre que a soma dos coeficientes de um polinômio resultar zero, podemos afirmar que estamos diante de um polinômio com uma de suas raízes igual a unidade, ou seja, igual a 1.

O que acabamos de ver foi o conceito de raiz sob a ótica algébrica. Porém, existe a possibilidade de analisarmos as raízes de um polinômio do ponto de vista geométrico.

Dizemos que a raiz representa o ponto de interseção com a qual a curva, correspondente ao gráfico de $P(x)$, intercepta o eixo das abcissas no plano cartesiano ortogonal.



Assim: $x_1; x_2$ e x_3 são raízes de $P(x)$.

2.6 – Operações com Polinômios

A partir deste tópico o "caldo" começa a engrossar. Vamos nessa!

Quando falamos de operações, logo nos vem à mente as fundamentais: adição, subtração, multiplicação e divisão. Vamos estudar cada uma delas dentro do tema principal: Polinômios.

a) **Adição de Polinômios:** Adicionar dois ou mais polinômios nada mais é que juntar (unir) os termos semelhantes. Veja:

$$
\begin{aligned}
&A(x) = 2x^2 - 3x \\
&B(x) = x^3 - x^2 + 5x - 7 \\
&A(x) + B(x) = (2x^2 - 3x) + (x^3 - x^2 + 5x - 7) \\
&A(x) + B(x) = x^3 + 2x^2 - x^2 + 5x - 3x + 7 \\
&A(x) + B(x) = x^3 + x^2 + 2x + 7
\end{aligned}
$$

b) **Subtração de Polinômios:** A subtração, em outras palavras, é o mesmo que adicionarmos dois ou mais polinômios com o simétrico do outro. Assim:

$$
\begin{aligned}
&A(x) = 3x^3 + 2x^2 - 1 \\
&B(x) = x^3 - x^2 + x - 3 \\
&A(x) + [-B(x)] = (3x^3 + 2x^2 - 1) + [-x^3 + x^2 - x + 3] \\
&A(x) - B(x) = 3x^3 - x^3 + 2x^2 + x^2 - x + 3 - 1 \\
&A(x) - B(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2
\end{aligned}
$$

c) Multiplicação de Polinômios: O produto de polinômios pode ser encontrado através da multiplicação de cada termo do primeiro polinômio com cada termo do segundo polinômio, reduzindo, sempre, os termos semelhantes. Em outras palavras, basta aplicar a propriedade da distributiva. Assim:

$$
\begin{aligned}
&A(x) = x^2 + 2x - 1 \\
&B(x) = x + 1 \\
&A(x).B(x) = (x^2 + 2x - 1)(x + 1) \\
&A(x).B(x) = (x^2.x + x^2.1) + (2x.x + 2x.1) + (-1.x - 1.1) \\
&A(x).B(x) = x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x - x - 1 \\
&A(x).B(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1
\end{aligned}
$$

TOME NOTA!

> O grau do polinômio resultante do produto de outros dois será igual à soma dos graus de cada um deles.
> Perceba que $A(x)$ possui grau 2 e $B(x)$ grau 1, logo, $A(x).B(x)$ possuirá grau 3.

d) **Divisão de Polinômios**: Existem diversas formas de se fazer uma divisão de polinômios. Neste primeiro momento, trataremos do método mais conhecido como **Método das Chaves**. Veja:

$$\begin{array}{r|l} A(x) & B(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \\ & \end{array}$$

Da divisão de dois polinômios $A(x)$ e $B(x)$, não nulos, são obtidos os polinômios $Q(x)$ (quociente) e $R(x)$ (resto).

Logo:

$$\begin{cases} A(x) = B(x).Q(x) + R(x) \\ \text{gr } R(x) < \text{gr } B(x) \text{ ou } R(x) = 0 \end{cases}$$

Em que:

$A(x) \rightarrow$ **Dividendo**

$B(x) \rightarrow$ **Divisor ;** $\text{gr } B(x) \rightarrow$ **Grau do dividendo**

$Q(x) \rightarrow$ **Quociente**

$R(x) \rightarrow$ **Resto ;** $\text{gr } R(x) \rightarrow$ **Grau do resto**

Para que fique mais claro os conceitos acima, pagaremos uma divisão polinomial do polinômio $A(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 2$ pelo $B(x) = x^2 + 2x + 1$. Observe os passos abaixo!

1º passo: Inicialmente, devemos verificar se o grau do dividendo é maior ou igual ao grau do divisor. Caso contrário, não é possível efetuar a divisão. No problema, o grau do dividendo é igual a 3 e o grau do divisor é igual a 2. Portanto, podemos efetuar a divisão.

Escrevemos os polinômios no seguinte formato:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 2x^2 - x + 2 & x^2 + 2x + 1 \\ \cline{2-2} & \\ & \end{array}$$

Assim, dividimos o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor.

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 2x^2 - x + 2 & x^2 + 2x + 1 \\ \cline{2-2} & 3x \\ & \end{array}$$

2º passo: Em seguida, multiplicamos 3x por todos os termos do divisor, da direita para a esquerda. O resultado de cada multiplicação é colocado, com o sinal trocado, abaixo de cada termo correspondente, no dividendo. Em seguida, somamos esses termos.

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 2x^2 - x + 2 & x^2 + 2x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^3 - 7x^2 - 3x} & 3x \\ -5x^2 - 4x + 2 & \end{array}$$

Repetindo o processo, temos:

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3+2x^2-x+2 & x^2+2x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^3-7x^2-3x} & 3x-5 \\
-5x^2-4x+2 & \\
\underline{5x^2+10x+5} & \\
6x+7 &
\end{array}
$$

Observe que não podemos continuar a divisão, pois o grau do resto é menor que o grau do dividendo. Portanto:

$$
\begin{cases} Q(x)=3x-5 \\ R(x)=6x+7 \end{cases}
$$

CURIOSIDADE

A divisão de polinômios também pode ser efetuada pelo **método de Descartes ou método dos coeficientes a determinar**, que é uma aplicação da identidade de polinômios.

2.7 – RELAÇÕES DE GIRARD

Neste tópico, faremos uma analogia à relação entre coeficientes que estudamos lá em equação do 2º grau, lembra? Pois é! Aqui, em polinômio, também é possível achar relações entre as raízes por meio dos coeficientes. Veja:

Seja o polinômio $P(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+dx^{n-3}+ex^{n-4}+...+k$, sendo k o termo independente de $P(x)$, podemos dizer que:

- **Soma das raízes** $\Rightarrow -\dfrac{b}{a}$
- **Soma do produto duas a duas** $\Rightarrow \dfrac{c}{a}$
- **Soma do produto três a três** $\Rightarrow -\dfrac{d}{a}$
- **Produto das** "n" **raízes** $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k}{a}, \text{se n par} \\ -\dfrac{k}{a}, \text{se n ímpar} \end{cases}$

Entendo que na teoria parece ser difícil, vamos, então, a um exemplo:

a) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 7$

A partir deste polinômio $P(x)$, podemos concluir que se ele é do 4º grau, então possui 4 raízes. Assim:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{-b}{a} \Rightarrow -\frac{(-3)}{1} = 3$$

$$(x_1.x_2) + (x_1.x_3) + (x_1.x_4) + (x_2.x_3) + (x_2.x_4) + (x_3.x_4) = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$$

$$(x_1.x_2.x_3) + (x_1.x_2.x_4) + (x_1.x_3.x_4) + (x_2.x_3.x_4) = -\frac{d}{a} = -\frac{(-1)}{1} = 1$$

$$(x_1.x_2.x_3.x_4) = \frac{e}{a} = \frac{7}{1} = 7$$

Ficou mais fácil, né? Pois é! Guarde esta relação no coração. Isso cai muito em prova!

TOME NOTA!

É possível encontrar possíveis raízes inteiras e fracionárias a partir dos divisores do termo independente. Veja um exemplo:

$P(x) = x^2 - 5x + 6$

1º passo: achar os divisores inteiros de 6.

		1
6	2	2
3	3	3 - 6
1		

Logo:

$$D(6) = \{+1; -1; +2; -2; +3; -3; +6; -6\}$$

2º passo: dividir cada divisor inteiro pelo coeficiente do termo dominante, ou seja, pelo "a".

Como no exemplo, o $a = 1$, não fará diferença.

3º passo: testar os valores achados, após o 2º passo, no $P(x)$. Caso o resultado seja ZERO, este tal valor será raiz de $P(x)$.

Veja, por exemplo:

$$P(2) = (2)^2 - 5.(2) + 6$$
$$P(2) = 4 - 10 + 6$$
$$P(2) = 0$$

2 é raiz

Usando o 3 no lugar de x, temos:

$$P(3) = (3)^2 - 5.(3) + 6$$
$$P(3) = 9 - 15 + 6$$
$$P(3) = 15 - 15$$
$$P(3) = 0$$

3 é raiz

Viu? Olhe que bizu! Basta fazer esta técnica para encontrar possíveis raízes racionais.

2.8 – Teorema das Raízes Complexas

Agora, com muito cuidado! Guarde com todo carinho o que vou lhe dizer, ok? Vamos lá!

Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz o número complexo $Z = a + bi\ (b \neq 0)$, então também admite como raiz o seu conjugado $\overline{Z} = a - bi$. Ressalto ainda que, se uma equação polinomial admite como raiz de multiplicidade m o número complexo $Z = a + bi$ $(b \neq 0)$, então também admite como raiz de multiplicidade m o seu conjugado $\overline{Z} = a - bi\ \ (b \neq 0)$

TOME NOTA!

O número de raízes complexas (não reais) de qualquer polinômio é sempre par.

INDO MAIS FUNDO!

Todo polinômio de coeficientes reais e grau ímpar tem um número ímpar de raízes reais.
Além disso, todo polinômio de coeficientes reais e grau ímpar possui, pelo menos, uma raiz real.

TOME NOTA!

Quando se diz que uma raiz tem multiplicidade k, significa que esta raiz aparece k vezes no polinômio, ou seja, estamos diante de raízes iguais.

2.9 – MMC E MDC DE POLINÔMIOS

O máximo divisor comum (M.D.C.) entre polinômios é formado pelos fatores **comuns** a estes polinômios elevados aos seus menores expoentes, de forma que ele é a expressão de maior grau que divide todos aqueles.

O mínimo múltiplo comum (M.M.C.) entre polinômios é formado por todos os fatores que aparecem nestes polinômios, **comuns ou não**, elevados ao seu maior expoente, de forma que ele é a expressão de menor grau que é múltiplo de todos aqueles.

Exemplo:

$$P(x) = x \cdot (x-1)^2 \cdot (x-2)^2$$
$$Q(x) = x^3 \cdot (x-1) \cdot (x-3)^2$$
$$MDC(P,Q) = x \cdot (x-1)$$
$$MMC(P,Q) = x^3 \cdot (x-1)^2 \cdot (x-2)^2 \cdot (x-3)^2$$

2.10 - Teorema do Resto

Segue, abaixo, um dos teoremas mais importantes dentro de polinômios. Observe!

O resto da divisão de $P(x)$ por um binômio $ax+b$ é $P\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Podemos verificar esse fato facilmente. Temos:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & ax+b \\ \cline{2-2} R & Q(x) \end{array}$$

Podemos escrever na forma $P(x) = (ax+b).Q(x) + R$

Para $x = -\frac{b}{a}$, temos:

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = \left[a.\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right].Q\left(-\frac{b}{a}\right)+R \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P\left(-\frac{b}{a}\right) = (-b+b).Q\left(-\frac{b}{a}\right)+R \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0.Q\left(-\frac{b}{a}\right)+R \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P\left(-\frac{b}{a}\right) = R$$

Em outras palavras, para encontrarmos o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por um binômio do 1º grau, basta calcularmos a raiz do binômio do 1º grau e, em seguida, substituirmos no polinômio $P(x)$, ou seja, fazer o valor numérico desse polinômio.

Exemplo:

Calcular o resto da divisão do polinômio $P(x)=3x^3+4x^2-x+5$ **por** $B(x)=x-1$

Comentário:

Cálculo da raiz de $B(x)$:

$$\begin{aligned} x-1&=0 \\ x&=1 \end{aligned}$$

O resto R é dado por:

$$\begin{aligned} R&=P(1)=3.1^3+4.1^2-1+5 \\ R&=3+4-1+5=11 \end{aligned}$$

2.11 – Teorema de D'alembert

$P(x)$ é divisível por $ax+b$ se, e somente se, $P\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$

Observe que o Teorema de D'alembert é uma consequência imediata do Teorema do Resto. Eis a demonstração. Veja:

Na divisão de $P(x)$ por $ax+b$ o resto deve ter grau zero. Assim, podemos dizer que a divisão terá um quociente $Q(x)$ e resto $R(x)=R$ constante. Logo,

$$\begin{aligned} &P(x)=(ax+b)\cdot Q(x)+R \\ &\Rightarrow P\left(-\frac{b}{a}\right)=\underbrace{\left(a\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right)}_{0}\cdot Q\left(-\frac{b}{a}\right)+R \\ &\Leftrightarrow R=P\left(-\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

Exemplo: O resto de $P(x)=2x^3-x-1$ por $x+1$ é $P(-1)=2(-1)^3-(-1)-1=-2$.

O polinômio $P(x)$ é divisível por $ax+b$, com $a\neq 0$, se, e somente se, $P\left(-\frac{b}{a}\right)=0$.

Exemplo: $P(x)=2x^3-x-1$ é divisível por $(x-1)$, pois $P(1)=2\cdot 1^3-1-1=0$. Isso é fato, visto que $P(x)=2x^3-x-1=(2x^2+2x+1)(x-1)$.

2.12 – Dispositivo de Briot-Ruffini

É um dispositivo prático que permite determinar o quociente e o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por um binômio da forma $x-a$. Como exemplo, vamos efetuar a divisão do polinômio $P(x)=x^3+3x^2-x+4$ por $B(x)=x-2$.

Inicialmente, vamos posicionar os termos indicados, conforme o esquema a seguir:

Raiz do divisor	**Coeficientes do dividendo**	
	Coeficientes do quociente	**Resto**

Assim, temos:

2	**1**	**3**	**-1**	**4**

Repetimos o coeficiente do termo de maior grau.

2	**1**	**3**	**-1**	**4**
	1			

Multiplicamos essa raiz (2) pelo coeficiente que foi repetido (1) e, em seguida, somamos com o próximo coeficiente (3). O resultado é colocado à direita de 1.

Fazemos $2.1+3=5$

2	**1**	**3**	**-1**	**4**
	1	**5**	**9**	

Finalmente, repetimos para o termo 9. Assim, obteve o último termo, separado por uma linha tracejada. Esse número é o resto da divisão de $P(x)$ por $B(x)$

Fazemos $2.9+4=22$

2	**1**	**3**	**-1**	**4**
	1	**5**	**9**	**22**

Os números obtidos (1, 5 e 9) são os coeficientes do polinômio quociente. Como $P(x)$ é do 3º grau e $B(x)$ é do 1º grau, o dividendo deverá ser, necessariamente, do 2º grau. Por isso, costumamos dizer que o Dispositivo de Briot-Ruffini serve para abaixar o grau do polinômio $P(x)$. Mais à frente, veremos uma importante aplicação desse fato no cálculo de raízes de equações. Portanto, temos o quociente $Q(x) = x^2 + 5x + 9$ e o resto $R(x) = 22$

TOME NOTA!

> Podemos utilizar o Método de Briot-Ruffini também quando o divisor é um polinômio da forma $ax + b$. Nesse caso, devemos dividir os coeficientes do polinômio quociente por a.

Exemplo:

Efetuar a divisão de $P(x) = 5x^3 + x^2 - 2x + 1$ por $2x - 4$

Comentário:

A raiz do binômio do 1º grau é igual a 2. Assim, temos:

2	**5**	**1**	**-2**	**1**
	5	**11**	**20**	**41**

Para obtermos o polinômio quociente, devemos dividir cada termo obtido por 2. É importante observar que o resto não se altera. Assim, temos como quociente $Q(x) = \frac{5}{2}x^2 + \frac{11}{2}x + 10$ e resto $R(x) = 41$

TOME NOTA!

> Um polinômio $P(x)$ é divisível por $(x-a).(x-b)$ se , e somente se, $P(x)$ é divisível separadamente por $x-a$ e por $x-b$

Exemplo:

01. (FGV) Se o polinômio $x^3 - 2mx^2 + (-m+6)x + 2m + n$ é divisível por $x-1$ e por $x+1$, então $m+n$ é igual a:

a) 7

b) -7

c) 6

d) -6

e) 0

Comentário:

Pelo Teorema de D'Alembert, temos $P(1)=0$ e $P(-1)=0$. Assim:

$$P(-1) = (-1)^3 - 2m(-1)^2 + (-m+6)(-1) + 2m + n \Rightarrow$$
$$0 = -1 - 2m + m - 6 + 2m + n \Rightarrow m + n = 7$$

Observe que não foi necessário fazer $P(1)=0$, pois a pergunta envolvia $m+n$

02. (Mackenzie – SP)

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x-2 \\ \hline 4 & Q(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} Q(x) & x-6 \\ \hline 1 & Q_1(x) \end{array}$$

Considerando as divisões de polinômios dadas, podemos afirmar que o resto da divisão de $P(x)$ por $x^2 - 8x + 12$ é:

a) $2x+2$

b) $2x+1$

c) $x+2$

d) $3x-2$

e) $x+1$

Comentário:

Podemos escrever do seguinte modo:

$P(x) = (x-2).Q(x) + 4$ e

$Q(x) = (x-6).Q_1(x) + 1$

Substituindo a expressão para $Q(x)$ em $P(x)$, temos:

$$P(x) = (x-2)[(x-6).Q_1(x)+1]+4 \Rightarrow$$
$$P(x) = (x-2).(x-6).Q_1(x)+x-2+4 \Rightarrow$$
$$P(x) = (x^2-8x+12).Q_1(x)+x+2$$

Logo, o resto da divisão de $P(x)$ por $x^2-8x+12$ é igual a $(x+2)$.

QUESTÕES COMENTADAS

1. (Udesc 2019) Seja $p(x)$ um polinômio de grau três tal que $p(0)=6, p(1)=1, p(2)=4$ e $p(3)=9$. É correto afirmar que $p(4)$ é igual a:

a) 0

b) 16

c) 10

d) 14

e) 8

Comentário:

Todo o polinômio de grau 3 pode ser escrito da seguinte forma:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

De acordo com o problema, temos:

$$\begin{aligned}
&p(0) = 6 \Rightarrow d = 6 \\
&p(1) = 1 \Rightarrow a+b+c+6 = 1 \Rightarrow a+b+c = -5 \qquad \text{(i)} \\
&p(2) = 4 \Rightarrow 8a+4b+2c+6 = 4 \Rightarrow 4a+2b+c = -1 \qquad \text{(ii)} \\
&p(3) = 9 \Rightarrow 27a+9b+3c+6 = 9 \Rightarrow 9a+3b+c = 1 \qquad \text{(iii)}
\end{aligned}$$

Fazendo $\text{(ii)} - \text{(i)}$ e $\text{(iii)} - \text{(i)}$ obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3a + b = 4 \\ 8a + 2b = 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos:

$a = -1, b = 7$ e $c = -11$

Portanto:

$p(x) = -x^3 + 7x^2 - 11x + 6$

e

$p(4) = -4^3 + 7 \cdot 4^2 - 11 \cdot 4 + 6 = 10$

Gabarito: C

---

2. (Uece 2019) Considerando o polinômio $P(x) = 4x^3 + 8x^2 + x + 1,$ é correto afirmar que o valor da soma $P(-1) + P\left(-\frac{1}{3}\right)$ é um número localizado entre

a) $5,0$ e $5,5.$

b) $4,0$ e $4,5.$

c) $4,5$ e $5,0.$

d) $5,5$ e $6,0.$

Comentário:

Tem-se que

$P(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 8 \cdot (-1)^2 - 1 + 1 = 4$

e

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{1}{3}\right) &= 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 8 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 1 \\ &= -\frac{4}{27} + \frac{8}{9} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{-4 + 24 + 18}{27} \\ &= 1 + \frac{11}{27}. \end{aligned}$$

Em consequência, vem

$$P(-1)+P\left(-\frac{1}{3}\right)=4+1+\frac{11}{27}$$
$$=5+\frac{11}{27}.$$

Portanto, como

$$5<5+\frac{11}{27}<5+\frac{13,5}{27}=5,5,$$

Gabarito: A

---

3. (Espcex 2018) Determine o valor numérico do polinômio $p(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+2017$ para $x=89$.

a) 53 213 009.

b) 57 138 236.

c) 61 342 008.

d) 65 612 016.

e) 67 302 100.

Comentário:

$$p(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+2017$$
$$p(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+1+2016$$
$$p(x)=\binom{4}{0}x^4\cdot 1^0+\binom{4}{1}x^3\cdot 1^1+\binom{4}{2}x^2\cdot 1^2+\binom{4}{3}x^1\cdot 1^3+\binom{4}{4}x^0\cdot 1^4+2016$$
$$p(x)=(x+1)^4+2016$$
$$p(89)=(89+1)^4+2016$$
$$p(89)=90^4+2016$$
$$p(89)=65610000+2016$$
$$p(89)=65612016$$

Gabarito: D

---

4. (Upf 2018) Considere o polinômio $P(x) = 4x^3 - x^2 - (5+m)x + 3.$

Sabendo que o resto da divisão de P pelo monômio $x+2$ é $7,$ determine o valor de $m.$

a) 0

b) 15

c) 2

d) 7

e) 21

Comentário:

Como o resto da divisão de P por $x+2$ é 7, $P(-2) = 7.$

Daí,

$$7 = 4\cdot(-2)^3 - (-2)^2 - (5+m)\cdot(-2) + 3$$
$$7 = -32 - 4 + 10 + 2m + 3$$
$$2m = 30$$
$$m = 15$$

Gabarito: B

---

5. (Ufrgs 2018) As raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 1$ são

a) $\{i; -i; 0\}.$

b) $\{1; -1; 0\}.$

c) $\{1; -1; i; -i\}.$

d) $\{i; -i; 1+i; 1-i\}.$

e) $\{i; -i; -1+i; -1-i\}.$

Comentário:

As raízes de $P(x) = x^4 - 1$ são dadas pela equação abaixo:

$$x^4 - 1 = 0$$
$$\left(x^2\right)^2 - 1^2 = 0$$
$$\left(x^2 + 1\right)\cdot\left(x^2 - 1\right) = 0$$
$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i$$

ou

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Assim, as raízes de $P(x) = x^4 - 1$ formam o conjunto $\{1; -1; i; -i\}$.

Gabarito: C

---

6. (Uefs 2018) O resto da divisão de um polinômio do terceiro grau $p(x)$ por $(x-3)$ é igual a $24.$ Sabendo que as raízes do polinômio $p(x)$ são $-3, 1$ e $2,$ o valor de $p(0)$ é

a) $12.$

b) $15.$

c) $18.$

d) $21.$

e) $24.$

Comentário:

Do enunciado, temos:

$$p(x) = a\cdot(x+3)\cdot(x-1)\cdot(x-2), a \neq 0$$
$$p(3) = 24,$$
$$24 = a\cdot(3+3)\cdot(3-1)\cdot(3-2)$$
$$24 = 12a$$
$$a = 2$$

Assim,

$$p(x) = 2\cdot(x+3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)$$
$$p(0) = 2\cdot(0+3)\cdot(0-1)\cdot(0-2)$$
$$p(0) = 12$$

Gabarito: A

---

7. (Famerp 2018) Sabendo-se que uma das raízes da equação algébrica $2x^3 - 3x^2 - 72x - 35 = 0$ é $-\frac{1}{2}$, a soma das outras duas raízes é igual a

a) -3.

b) 3.

c) -2.

d) 1.

e) 2.

Comentário:

Calculando:

$$2x^3 - 3x^2 - 72x - 35 = 0$$

$$\text{Relações de Girard} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{(-3)}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + x_2 + x_3 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 + x_3 = \frac{4}{2} = 2$$

Gabarito: E

---

8. (Pucrs 2017) Os polinômios $p(x), q(x), f(x), h(x)$ em [redacted] nessa ordem, estão com seus graus em progressão geométrica. Os graus de p(x) e h(x) são, respectivamente, 16 e 2. A soma do número de raízes de $q(x)$ com o número de raízes de $f(x)$ é

a) 24

b) 16

c) 12

d) 8

e) 4

Comentário:

Se q é a razão da progressão geométrica $(16, 16q, 16q^2, 2)$, então

$16q^3 = 2 \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}.$

Em consequência, os graus de q e de f são, respectivamente, iguais a 8 e 4. Portanto, a resposta é $8 + 4 = 12.$

Gabarito: C

---

9. (Eear 2017) Considere $P(x) = 2x^3 + bx^2 + cx$, tal que $P(1) = -2$ e $P(2) = 6$. Assim, os valores de b e c são, respectivamente,

a) 1 e 2

b) 1 e -2

c) -1 e 3

d) -1 e -3

Comentário:

Tem-se que

$P(1) = -2 \Leftrightarrow 2 \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 = -2 \Leftrightarrow b + c = -4$

e

$P(2) = 6 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 = 6 \Leftrightarrow 2b + c = -5.$

Portanto, resolvendo o sistema formado por essas equações, encontramos $b = -1$ e $c = -3.$

Gabarito: D

---

10. (Fac. Albert Einstein - Medicin 2017) O resto da divisão de um polinômio do segundo grau P pelo binômio $(x + 1)$ é igual a 3. Dado que $P(0) = 6$ e $P(1) = 5$, o valor de $P(3)$ é

a) -7

b) -9

c) 7

d) 9

Comentário:

Seja $P(x) = ax^2 + bx + c.$ Se o resto da divisão de P pelo binômio $x+1$ é igual a $3,$ então, pelo Teorema do Resto, segue que $a - b + c = 3.$

Ademais, sendo $P(0) = 6$ e $P(1) = 5,$ temos $c = 6$ e $a + b + c = 5.$ Daí, vem $a = b - 3$ e $2b = 2,$ implicando em $b = 1$ e $a = -2.$

Em consequência, a resposta é $P(3) = (-2) \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 6 = -9.$

Gabarito: B

---

11. (Uece 2017) O termo independente de x no desenvolvimento da expressão algébrica $(x^2 - 1)^3 \cdot (x^2 + x + 2)^2$ é

a) $4.$

b) $-4.$

c) $8.$

d) $-8.$

Comentário:

Para determinar o termo independente de um polinômio, devemos admitir $x = 0.$ Portanto, o termo independente de $(x^2 - 1)^3 \cdot (x^2 + x + 2)^2$ será dado por:

$(0^2 - 1)^3 \cdot (0^2 + 0 + 2)^2 = -1 \cdot 4 = -4$

Gabarito: B

---

12. (Uefs 2017) Considerando-se que o polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tem 1 como raiz dupla e 3 como raiz simples, é correto afirmar que o resto da divisão de $P(x)$ por $(x + 1)$ é

a) -20

b) -18

c) -16

d) -14

e) -2

Comentário:

As raízes são 3, 1 e 1, portanto o polinômio poderá ser escrito na forma fatorada por:

$$P(x) = 1 \cdot (x-1) \cdot (x-1) \cdot (x-3)$$

Portanto, o resto da divisão de $P(x)$ por $(x+1)$ será dado por $P(-1)$.

$$P(-1) = 1 \cdot (-1-1) \cdot (-1-1) \cdot (-1-3) = -16$$

Gabarito: C

---

13. (Uece 2016) O resto da divisão de $(x^2+x+1)^2$ por x^2-x+1 é

a) $4x$.

b) $4(x-1)$.

c) $4(x-2)$.

d) $4(x-3)$.

Comentário:

Sendo $(x^2+x+1)^2 = x^4+2x^3+3x^2+2x+1$, pelo método da chave, encontramos

$$\begin{array}{l|l}
x^4+2x^3+3x^2+2x+1 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^4+x^3-x^2} & x^2+3x+5 \\
3x^3+2x^2+2x+1 & \\
\underline{-3x^3+3x^2-3x} & \\
5x^2-x+1 & \\
\underline{-5x^2+5x-5} & \\
4x-4 &
\end{array}$$

Portanto, a resposta é $4x-4 = 4(x-1)$.

Gabarito: B

---

14. (Pucrs 2016) O polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx,$ em ■ é divisível por $(x-1).$ Podemos afirmar que $p(p(1))$ é

a) -1

b) 0

c) 1

d) $a+b+c$

e) $-a+b-c$

Comentário:

Se $p(x)$ é divisível por $(x-1),$ então, $p(1)=0.$

Logo,

$p(p(1)) = p(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 = 0.$

Gabarito: B

---

15. (Espm 2016) O quociente e o resto da divisão do polinômio $x^2 + x - 1$ pelo binômio $x+3$ são, respectivamente:

a) $x-2$ e 5

b) $x+2$ e 6

c) $x-3$ e 2

d) $x+1$ e 0

e) $x-1$ e -2

Comentário:

Desde que $x^2 + x - 1 = (x+3)(x-2)+5,$ segue o resultado.

Gabarito: A

---

16. (Eear 2016) Dado o polinômio: $ax^3 + (2a+b)x^2 + cx + d - 4 = 0,$ os valores de a e b para que ele seja um polinômio de 2º grau são

a) $a=0$ e $b=0$

b) $a = 1$ e $b \neq 0$

c) $a = 0$ e $b \neq 0$

d) $a = -1$ e $b = 0$

Comentário:

Para que o polinômio seja do segundo grau devemos garantir que o coeficiente de x^3 seja zero e o coeficiente de x^2 seja diferente de zero.

Portanto,

$a = 0$ e $2a + b \neq 0$

Então,

$a = 0$ e $b \neq 0$

Gabarito: C

---

17. (Fgv 2016) Um dos fatores do polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ é $(x + 3)$. Outro fator desse polinômio é

a) $(x + 8)$

b) $(x - 5)$

c) $(x + 4)$

d) $(x - 1)$

e) $(x + 1)$

Comentário:

Como um dos fatores de $P(x)$ é $x + 3$, $x = -3$ é uma raiz de $P(x)$.

Assim, usando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

-3	1	2	-5	-6
	1	-1	-2	0

Dessa forma,

$$P(x) = (x+3) \cdot \left(x^2 - x - 2\right)$$

Calculando as raízes de $x^2 - x - 2 = 0,$ obtemos

$x_2 = 2$ e $x_3 = -1,$

logo,

$$x^2 - x - 2 = (x-2) \cdot (x-(-1))$$
$$x^2 - x - 2 = (x-2) \cdot (x+1)$$

Voltando ao polinômio $P(x)$, obtemos:

$$P(x) = (x+3) \cdot (x-2) \cdot (x+1)$$

Dessa maneira, os fatores de $P(x)$ são $(x+3)$, $(x-2)$ e $(x+1)$.

Gabarito: E

---

18. (Ifsul 2015) Considere o polinômio $(a^2 - ab + b^2) \cdot (a - ab)$. Determine o valor numérico se $a = 2$ e $b = -1$.

a) 0

b) 11

c) 20

d) 28

Comentário:

Substituindo no polinômio os valores de a e b dados:

$$(a^2 - ab + b^2) \cdot (a - ab) \to (2^2 - (2) \cdot (-1) + (-1)^2) \cdot (2 - (2) \cdot (-1))$$
$$(4 + 2 + 1) \cdot (2 + 2) \to (7) \cdot (4) = 28$$

Gabarito: D

---

19. (Fgv 2015) Se $x^2 - x - 1$ é um dos fatores da fatoração de $mx^3 + nx^2 + 1$, com m e n inteiros, então, $n + m$ é igual a

a) -2.

b) -1.

c) 0.

d) 1.

e) 2.

Comentário:

Tem-se que

$$\begin{aligned} mx^3 + nx^2 + 1 &= (mx + b)(x^2 - x - 1) \\ &= mx^3 - mx^2 - mx + bx^2 - bx - b \\ &= mx^3 + (b - m)x^2 - (m + b)x - b. \end{aligned}$$

Daí vem $b - m = n$, $m + b = 0$ e $b = -1$, implicando em $m = 1$ e $n = -2$. Portanto, $n + m = -2 + 1 = -1$.

Gabarito: B

---

20. (Pucrs 2015) Se $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde a, b, c, d são números reais, e sabendo que $p(x)$ é divisível por $x + 1$, podemos afirmar que:

a) $a + c > b + d$

b) $a + c = b + d$

c) $a + c < b + d$

d) $a + b + c + d = 0$

e) $a + b + c + d = 1$

Comentário:

Sabendo que $p(x)$ é divisível por $x + 1$, e que $p(-1) = 0$, pode-se concluir que $a + c = b + d$.

Gabarito: B

21. (Uern 2015) - Divisor: $x^2 + x$;

- Resto: $1 - 7x$; e,

- Quociente: $8x^2 - 8x + 12$.

Logo, o dividendo dessa operação é

a) $8x^4 + 4x^2 + 5x + 1$.

b) $6x^4 + 4x^2 + 4x + 3$.

c) $8x^4 + 4x^2 + 4x + 1$.

d) $6x^4 + 8x^2 + 5x + 1$.

Comentário:

Sendo D o dividendo, d o divisor, Q o quociente e r o resto, pode-se escrever:

$$D = Q \cdot d + r$$
$$D = \left(8x^2 - 8x + 12\right) \cdot \left(x^2 + x\right) + (1 - 7x)$$
$$D = 8x^4 + 8x^3 - 8x^3 - 8x^2 + 12x^2 + 12x + 1 - 7x$$
$$D = 8x^4 + 4x^2 + 5x + 1$$

Gabarito: A

22. (Pucpr 2015) Se $(x-2)$ é um fator do polinômio $x^3 + kx^2 + 12x - 8$, então, o valor de k é igual a:

a) -3.

b) 2.

c) 3.

d) 6.

e) -6.

Comentário:

Se (x – 2) é fator do polinômio dado, então 2 é raiz desse polinômio.

Portanto:

$2^3 + k \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 8 = 0 \Rightarrow 4k = -24 \Rightarrow k = -6$

Gabarito: E

---

23. (Cefet MG 2015) Os polinômios $A(x) = x^2 - 3x + 2$ e $B(x) = x^4 - 2x^3 + kx^2 - 3x - 2$ tem uma única raiz em comum. Os valores possíveis para k são números

a) pares.

b) primos.

c) inversos.

d) ímpares.

e) simˈtricos.

Comentário:

Tem-se que as raízes de A são $x = 1$ e $x = 2$. Logo, se A e B têm uma única raiz em comum, então, para $x = 1$, o valor de k é

$0 = 1^4 - 2 \cdot 1^3 + k \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 \Leftrightarrow k = 6,$

enquanto que, para $x = 2$, o valor de k é

$0 = 2^4 - 2 \cdot 2^3 + k \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 2 \Leftrightarrow k = 2.$

Em consequência, podemos afirmar que os valores possíveis para k são números pares.

Gabarito: A

---

24. (Espcex 2015) O polinômio $f(x) = x^5 - x^3 + x^2 + 1$, quando dividido por $q(x) = x^3 - 3x + 2$ deixa resto $r(x)$.

Sabendo disso, o valor numérico de $r(-1)$ é

a) -10.

b) -4.

c) 0.

d) 4.

e) 10.

Comentário:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + 0x^4 - x^3 + x^2 + 0x + 1 & x^3 + 0x^2 - 3x + 2 \\ \cline{2-2}
-x^5 + 0x^4 + 3x^3 - 2x^2 & x^2 + 2 \\ \hline
\quad + 2x^3 - x^2 + 0x + 1 & \\
\quad - 2x^3 + 0x^2 + 6x - 4 & \\ \hline
\quad\quad - x^2 + 6x - 3 &
\end{array}
$$

Portanto, $r(x) = -x^2 + 6x - 3$ e $r(-1) = -(-1)^2 + 6(-1) - 3 = -10.$

Gabarito: A

---

25. (Espm 2014) O trinômio $x^2 + ax + b$ é divisível por $x + 2$ e por $x - 1$. O valor de $a - b$ é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Comentário:

Tem-se que

$$
\begin{aligned}
x^2 + ax + b &= (x + 2)(x - 1) \\
&= x^2 + x - 2.
\end{aligned}
$$

Daí segue que $a = 1$, $b = -2$ e, portanto, $a - b = 1 - (-2) = 3.$

Gabarito: D

---

26. (Unesp 2014) O polinômio $P(x) = a \cdot x^3 + 2 \cdot x + b$ é divisível por x – 2 e, quando divisível por x + 3, deixa resto –45. Nessas condições, os valores de a e b, respectivamente, são

a) 1 e 4.

b) 1 e 12.

c) –1 e 12.

d) 2 e 16.

e) 1 e –12.

Comentário:

De acordo com o Teorema do Resto e as informações do problema, temos que:

P(2) = 0 e P(–3) = – 45. Resolvendo o sistema abaixo, temos:

$$\begin{cases} 8a + 4 + b = 0 \\ -27a + 6 + b = -45 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por –1 e somando com a segunda temos:

–35a = –35, ou seja, a = 1.

Substituindo a = 1 na primeira equação, temos:

8 + 4 + b = 0, ou seja, b = –12.

Gabarito: E

---

27. (Pucrj 2014) Sabendo que 1 é raiz do polinômio $p(x) = 2x^3 - ax^2 - 2x$, podemos afirmar que $p(x)$ é igual a:

a) $2x^2(x-2)$

b) $2x(x-1)(x+1)$

c) $2x\left(x^2-2\right)$

d) $x(x-1)(x+1)$

e) $x\left(2x^2-2x-1\right)$

Comentário:

Se $p(1)=0$, então $2\cdot 1^3 - a\cdot 1^2 - 2\cdot 1 = 0$. Logo, $a=0$ e, portanto,

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^3 - 2x \\ &= 2x(x^2-1) \\ &= 2x(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

Gabarito: B

---

28. (Ufsj 2013) Considere os polinômios

$$p(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 12,\ r(x) = x+2 \ \text{ e } \ q(x) = \frac{p(x)}{r(x)}$$

Sobre as raízes da equação $q(x)=0$, é **CORRETO** afirmar que

a) a soma de todas as raízes é igual a -1.

b) duas das raízes são inteiras.

c) duas das raízes são números complexos, um localizado no 1º quadrante e outro localizado no 3º quadrante do plano de Argand-Gauss.

d) a soma das raízes inteiras é 2.

Comentário:

Determinando o polinômio q(x) = p(x) / r(x)

-2	1	3	-2	-2	12
	1	1	-4	6	0

x +

Portanto, $q(x) = x^3 + x^2 - 4x + 6$ e a soma de suas raízes serão dadas por $S = -\frac{1}{1} = -1.$

Gabarito: A

---

29. (Uern 2013) O produto entre o maior e o menor dos coeficientes do quociente da divisão de $P(x) = 6x^5 + 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ por $D(x) = 3x^3 - 2x$ é

a) 3.

b) 4.

c) – 2.

d) – 5.

Comentário:

Dividindo $P(x)$ por $D(x)$, obtemos

$$
\begin{array}{l|l}
6x^5 + 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 4x + 5 & 3x^3 - 2x \\ \cline{2-2}
\underline{-6x^5 + 4x^3} & 2x^2 + x + 3 \\
3x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x + 5 & \\
\underline{-3x^4 + 2x^2} & \\
9x^3 - 4x + 5 & \\
\underline{-9x^3 + 6x} & \\
2x + 5 &
\end{array}
$$

Portanto, o resultado pedido é $3 \cdot 1 = 3.$

Gabarito: A

---

30. (Espm 2013) O resto da divisão do polinômio $x^5 - 3x^2 + 1$ pelo polinômio $x^2 - 1$ é:

a) x – 1

b) x + 2

c) 2x – 1

d) x + 1

e) x – 2

Comentário:

Dividindo $x^5 - 3x^2 + 1$ por $x^2 - 1$, obtemos

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - 3x^2 + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^5 + x^3} & x^3 + x - 3 \\
x^3 - 3x^2 + 1 & \\
\underline{-x^3 + x} & \\
-3x^2 + x + 1 & \\
\underline{3x^2 - 3} & \\
x - 2 &
\end{array}
$$

Portanto, o resto é $x - 2$.

Gabarito: E

---

31. (Esc. Naval 2013) Sejam $F(x) = x^3 + ax + b$ e $G(x) = 2x^2 + 2x - 6$ dois polinômios na variável real x, com a e b números reais. Qual valor de $(a + b)$ para que a divisão $\frac{F(x)}{G(x)}$ seja exata?

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

Comentário:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 0 \cdot x^2 + a \cdot x + b & 2x^2 + 2 \cdot x - 6 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^3 + -x^2 + 3 \cdot x} & \frac{1}{2}x \;\; - \frac{1}{2} \\
0 + -x^2 + (a + 3) \cdot x + b & \\
\underline{x^2 + 1 \cdot x - 3} & \\
\underbrace{(a + 4) \cdot x + (b - 3)}_{\text{Polinômio nulo}} &
\end{array}
$$

De acordo com a divisão efetuada acima, temos:

$$a + 4 = 0 \Rightarrow a = -4$$
$$b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3$$

Logo, $a + b = -1$.

Gabarito: B

---

32. (Uepb 2012) Para que o resto da divisão de $2x^4 - 3x^3 + mx - 2$ por $x^3 + 1$ seja independente de x, devemos ter:

a) $m = -2$

b) $m = 2$

c) $m = 4$

d) $m = 0$

e) $m = 3$

Comentário:

Dividindo $2x^4 - 3x^3 + mx - 2$ por $x^3 + 1$, obtemos

$$\begin{array}{l|l} 2x^4 - 3x^3 + mx - 2 & x^3 + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^4 - 2x} & 2x - 3 \\ -3x^3 + (m-2)x - 2 & \\ \underline{3x^3 + 3} & \\ (m-2)x + 1 & \end{array}$$

Portanto, para que o resto $(m-2)x + 1$ independa de x, deve-se ter $m = 2$.

Gabarito: B

---

33. (Ifal 2012) Seja P(x) = $x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ um polinômio. O resto da divisão de P(x) pelo binômio $B(x) = x - \frac{1}{2}$ é

a) um número natural.

b) um número inteiro negativo.

c) um número racional positivo.

d) um número racional negativo.

e) um número irracional.

Comentário:

Utilizando o teorema do resto, temos:

Resto = $P(1/2) = (1/2)^3 - 2.(1/2)^2 + 3.(1/2) - 5 = -31/8$ (racional negativo).

Gabarito: D

---

34. (Uel 2011) Para que o polinômio $f(x) = x^3 - 6x^2 + mx + n$ seja um cubo perfeito, ou seja, tenha a forma $f(x) = (x+b)^3$, os valores de m e n devem ser, respectivamente:

a) 3 e −1

b) −6 e 8

c) −4 e 27

d) 12 e −8

e) 10 e −27

Comentário:

$$x^3 - 6x^2 + mx + n \equiv x^3 + 3bx^2 + 3b^2x + b^3$$
$$3b = -6 \Leftrightarrow b = -2$$
$$m = 3.b^2 = 3.(-2)^2 = 12$$
$$n = b^3 = (-2)^3 = -8$$

Gabarito: D

---

35. (Cftmg 2011) O valor numérico da expressão $2x^3 - x^2 + \frac{x}{2} - 1$ para $x = \sqrt{3}$ é

a) $\frac{10-\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{4+\sqrt{3}}{2}$

c) $4\left(\sqrt{3}-1\right)$

d) $\frac{13\sqrt{3}-8}{2}$

Comentário:

$$
\begin{aligned}
&2.\sqrt{3}^3-\sqrt{3}^2+\frac{\sqrt{3}}{2}-1=\\
&=6\sqrt{3}-3+\frac{\sqrt{3}}{2}-1=\\
&=\frac{12\sqrt{3}-6+\sqrt{3}-8}{2}=\\
&=\frac{13\sqrt{3}-8}{2}
\end{aligned}
$$

Gabarito: D

---

36. (Uftm 2011) Dividindo-se o polinômio $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + mx + 1$ por $(x - 1)$ ou por $(x + 1)$, os restos são iguais. Nesse caso, o valor de m é igual a

a) –2.

b) –1.

c) 1.

d) 2.

e) 3.

Comentário:

Pelo teorema do resto, temos:

P(1) = P(-1)

$3.1^4 - 2.1^3 + m.1 + 1 = 3.(-1)^4 - 2.(-1) =m.(-1) + 1$

$3 - 2+ m + 1 = 3 + 2 - m + 1$

2m = 4

m = 2

Gabarito: D

---

37. (Ifsc 2011) Dada a função polinominal $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, o valor de $f(-3) + f(0) + f(f(-1))$ é:

a) - 20.

b) -18.

c) - 16.

d) 20.

e) 16.

Comentário:

$$f(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 + (-3) + 1 = -20$$
$$f(0) = 0^3 + 0 + 2 = 0 + 1 = 0$$
$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 1 + 1 = 0$$
$$f(f(-1) = f(0)) = 1$$

Logo, $f(-3) + f(0) + f(f(-1)) = -20 + 1 + 1 = -18$.

Gabarito: B

---

38. (Uel 2011) O polinômio $p(x) = x^3 + x^2 - 3ax - 4a$ é divisível pelo polinômio $q(x) = x^2 - x - 4$. Qual o valor de a?

a) a = −2

b) a = −1

c) a = 0

d) a = 1

e) a = 2

Comentário:

Fazendo a divisão, temos:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + x^2 - 3ax - 4a & x^2 - x - 4 \\
\underline{-x^3 + x^2 + 4x} & \overline{x + 2} \\
\quad 2x^2 + (4 - 3a)x - 4a & \\
\quad \underline{-2x^2 + 2x + 8} & \\
\quad\quad (-3a + 6)x + (-4a + 8) &
\end{array}
$$

$-3 \cdot a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = 2$

$-4 \cdot a + 8 = 0 \Leftrightarrow a = 2$

Portanto, a = 2.

Gabarito: E

---

39. (Upe 2011) Para que o polinômio $6x^3 - 4x^2 + 2mx - (m+1)$ seja divisível por x – 3, o valor da raiz quadrada do módulo de m deve ser igual a

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 5

Comentário:

Se o polinômio é divisível por (x – 3), pelo teorema do resto, concluímos que:

$6 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 2 \cdot m \cdot 3 - (m+1) = 0 \Leftrightarrow 5m = 125 \Leftrightarrow m = -25$

Logo, $\sqrt{|-25|} = 5$.

Gabarito: E

---

40. (Ucpel 2011) Na divisão do polinômio P(x) = $4x^3 + mx^2 - 3x + 4$ por x – 2 o resto é 18. Nessas condições, o valor de *m* é

a) –6

b) 3

c) –3

d) 6

e) –5

Comentário:

Utilizando o teorema do resto, temos:

P(2) = 18

$4.2^3 + m.2^2 - 3.2 + 4 = 18$

32 + 4m – 6 + 4 = 18

4m = -12

m = - 3

Gabarito: C

---

3 – Lista de Questões

1. (Udesc 2019) Seja $p(x)$ um polinômio de grau três tal que $p(0) = 6, p(1) = 1, p(2) = 4$ e $p(3) = 9$. É correto afirmar que $p(4)$ é igual a:

a) 0

b) 16

c) 10

d) 14

e) 8

---

2. (Uece 2019) Considerando o polinômio $P(x) = 4x^3 + 8x^2 + x + 1$, é correto afirmar que o valor da soma $P(-1) + P\left(-\frac{1}{3}\right)$ é um número localizado entre

a) 5,0 e 5,5.

b) 4,0 e 4,5.

c) 4,5 e 5,0.

d) 5,5 e 6,0.

---

3. (Espcex 2018) Determine o valor numérico do polinômio $p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2017$ para $x = 89$.

a) 53 213 009.

b) 57 138 236.

c) 61 342 008.

d) 65 612 016.

e) 67 302 100.

---

4. (Upf 2018) Considere o polinômio $P(x) = 4x^3 - x^2 - (5 + m)x + 3$.

Sabendo que o resto da divisão de P pelo monômio $x + 2$ é 7, determine o valor de m.

a) 0

b) 15

c) 2

d) 7

e) 21

---

5. (Ufrgs 2018) As raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 1$ são

a) $\{i; -i; 0\}$.

b) $\{1; -1; 0\}$.

c) $\{1; -1; i; -i\}$.

d) $\{i; -i; 1+i; 1-i\}$.

e) $\{i; -i; -1+i; -1-i\}$.

---

6. (Uefs 2018) O resto da divisão de um polinômio do terceiro grau $p(x)$ por $(x-3)$ é igual a 24. Sabendo que as raízes do polinômio $p(x)$ são $-3, 1$ e 2, o valor de $p(0)$ é

a) 12.

b) 15.

c) 18.

d) 21.

e) 24.

---

7. (Famerp 2018) Sabendo-se que uma das raízes da equação algébrica $2x^3 - 3x^2 - 72x - 35 = 0$ é $-\frac{1}{2}$, a soma das outras duas raízes é igual a

a) -3.

b) 3.

c) -2.

d) 1.

e) 2.

---

8. (Pucrs 2017) Os polinômios $p(x), q(x), f(x), h(x)$ em [redacted] nessa ordem, estão com seus graus em progressão geométrica. Os graus de p(x) e h(x) são, respectivamente, 16 e 2. A soma do número de raízes de $q(x)$ com o número de raízes de $f(x)$ é

a) 24

b) 16

c) 12

d) 8

e) 4

---

9. (Eear 2017) Considere $P(x) = 2x^3 + bx^2 + cx$, tal que $P(1) = -2$ e $P(2) = 6$. Assim, os valores de b e c são, respectivamente,

a) 1 e 2

b) 1 e -2

c) -1 e 3

d) -1 e -3

---

10. (Fac. Albert Einstein - Medicin 2017) O resto da divisão de um polinômio do segundo grau P pelo binômio $(x+1)$ é igual a 3. Dado que $P(0)=6$ e $P(1)=5$, o valor de $P(3)$ é

a) -7

b) -9

c) 7

d) 9

---

11. (Uece 2017) O termo independente de x no desenvolvimento da expressão algébrica $(x^2-1)^3 \cdot (x^2+x+2)^2$ é

a) $4.$

b) $-4.$

c) $8.$

d) $-8.$

---

12. (Uefs 2017) Considerando-se que o polinômio $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tem 1 como raiz dupla e 3 como raiz simples, é correto afirmar que o resto da divisão de $P(x)$ por $(x+1)$ é

a) -20

b) -18

c) -16

d) -14

e) -2

---

13. (Uece 2016) O resto da divisão de $(x^2+x+1)^2$ por x^2-x+1 é

a) $4x.$

b) $4(x-1).$

c) $4(x-2).$

d) $4(x-3).$

---

14. (Pucrs 2016) O polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, em [redacted] é divisível por $(x-1)$. Podemos afirmar que $p(p(1))$ é

a) -1

b) 0

c) 1

d) $a+b+c$

e) $-a+b-c$

---

15. (Espm 2016) O quociente e o resto da divisão do polinômio $x^2 + x - 1$ pelo binômio $x+3$ são, respectivamente:

a) $x-2$ e 5

b) $x+2$ e 6

c) $x-3$ e 2

d) $x+1$ e 0

e) $x-1$ e -2

---

16. (Eear 2016) Dado o polinômio: $ax^3 + (2a+b)x^2 + cx + d - 4 = 0$, os valores de a e b para que ele seja um polinômio de 2º grau são

a) $a=0$ e $b=0$

b) $a=1$ e $b \neq 0$

c) $a=0$ e $b \neq 0$

d) $a=-1$ e $b=0$

---

17. (Fgv 2016) Um dos fatores do polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ é $(x+3)$. Outro fator desse polinômio é

a) $(x+8)$

b) $(x-5)$

c) $(x+4)$

d) $(x-1)$

e) $(x+1)$

---

18. (Ifsul 2015) Considere o polinômio $(a^2 - ab + b^2) \cdot (a - ab)$. Determine o valor numérico se $a = 2$ e $b = -1$.

a) 0

b) 11

c) 20

d) 28

---

19. (Fgv 2015) Se $x^2 - x - 1$ é um dos fatores da fatoração de $mx^3 + nx^2 + 1$, com m e n inteiros, então, $n + m$ é igual a

a) -2.

b) -1.

c) 0.

d) 1.

e) 2.

---

20. (Pucrs 2015) Se $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde a, b, c, d são números reais, e sabendo que $p(x)$ é divisível por $x + 1$, podemos afirmar que:

a) $a + c > b + d$

b) $a + c = b + d$

c) $a + c < b + d$

d) $a + b + c + d = 0$

e) $a + b + c + d = 1$

---

21. (Uern 2015) - <u>Divisor</u>: $x^2 + x$;

- <u>Resto</u>: $1 - 7x$; e,

- <u>Quociente</u>: $8x^2 - 8x + 12$.

Logo, o dividendo dessa operação é

a) $8x^4 + 4x^2 + 5x + 1.$

b) $6x^4 + 4x^2 + 4x + 3.$

c) $8x^4 + 4x^2 + 4x + 1.$

d) $6x^4 + 8x^2 + 5x + 1.$

---

22. (Pucpr 2015) Se $(x-2)$ é um fator do polinômio $x^3 + kx^2 + 12x - 8,$ então, o valor de k é igual a:

a) $-3.$

b) $2.$

c) $3.$

d) $6.$

e) $-6.$

---

23. (Cefet MG 2015) Os polinômios $A(x) = x^2 - 3x + 2$ e $B(x) = x^4 - 2x^3 + kx^2 - 3x - 2$ tem uma única raiz em comum. Os valores possíveis para k são números

a) pares.

b) primos.

c) inversos.

d) ímpares.

e) sim'tricos.

---

24. (Espcex 2015) O polinômio $f(x) = x^5 - x^3 + x^2 + 1,$ quando dividido por $q(x) = x^3 - 3x + 2$ deixa resto $r(x).$

Sabendo disso, o valor numérico de $r(-1)$ é

a) $-10.$

b) $-4.$

c) $0.$

d) $4.$

e) $10.$

---

25. (Espm 2014) O trinômio $x^2 + ax + b$ é divisível por $x + 2$ e por $x - 1.$ O valor de $a - b$ é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

---

26. (Unesp 2014) O polinômio $P(x) = a \cdot x^3 + 2 \cdot x + b$ é divisível por x – 2 e, quando divisível por x + 3, deixa resto –45. Nessas condições, os valores de a e b, respectivamente, são

a) 1 e 4.

b) 1 e 12.

c) –1 e 12.

d) 2 e 16.

e) 1 e –12.

---

27. (Pucrj 2014) Sabendo que 1 é raiz do polinômio $p(x) = 2x^3 - ax^2 - 2x$, podemos afirmar que $p(x)$ é igual a:

a) $2x^2(x-2)$

b) $2x(x-1)(x+1)$

c) $2x\left(x^2-2\right)$

d) $x(x-1)(x+1)$

e) $x\left(2x^2-2x-1\right)$

---

28. (Ufsj 2013) Considere os polinômios

$$p(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 12,\ r(x) = x + 2 \ \text{e} \ q(x) = \frac{p(x)}{r(x)}$$

Sobre as raízes da equação $q(x) = 0$, é **CORRETO** afirmar que

a) a soma de todas as raízes é igual a -1.

b) duas das raízes são inteiras.

c) duas das raízes são números complexos, um localizado no 1º quadrante e outro localizado no 3º quadrante do plano de Argand-Gauss.

d) a soma das raízes inteiras é 2.

---

29. (Uern 2013) O produto entre o maior e o menor dos coeficientes do quociente da divisão de $P(x) = 6x^5 + 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ por $D(x) = 3x^3 - 2x$ é

a) 3.

b) 4.

c) – 2.

d) – 5.

---

30. (Espm 2013) O resto da divisão do polinômio $x^5 - 3x^2 + 1$ pelo polinômio $x^2 - 1$ é:

a) x – 1

b) x + 2

c) 2x – 1

d) x + 1

e) x – 2

---

31. (Esc. Naval 2013) Sejam $F(x) = x^3 + ax + b$ e $G(x) = 2x^2 + 2x - 6$ dois polinômios na variável real x, com a e b números reais. Qual valor de $(a+b)$ para que a divisão $\frac{F(x)}{G(x)}$ seja exata?

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

---

32. (Uepb 2012) Para que o resto da divisão de $2x^4 - 3x^3 + mx - 2$ por $x^3 + 1$ seja independente de x, devemos ter:

a) $m = -2$

b) $m = 2$

c) $m = 4$

d) $m = 0$

e) $m = 3$

---

33. (Ifal 2012) Seja $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ um polinômio. O resto da divisão de P(x) pelo binômio $B(x) = x - \frac{1}{2}$ é

a) um número natural.

b) um número inteiro negativo.

c) um número racional positivo.

d) um número racional negativo.

e) um número irracional.

---

34. (Uel 2011) Para que o polinômio $f(x) = x^3 - 6x^2 + mx + n$ seja um cubo perfeito, ou seja, tenha a forma $f(x) = (x + b)^3$, os valores de m e n devem ser, respectivamente:

a) 3 e −1

b) −6 e 8

c) −4 e 27

d) 12 e −8

e) 10 e −27

---

35. (Cftmg 2011) O valor numérico da expressão $2x^3 - x^2 + \frac{x}{2} - 1$ para $x = \sqrt{3}$ é

a) $\frac{10 - \sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{4 + \sqrt{3}}{2}$

c) $4\left(\sqrt{3} - 1\right)$

d) $\frac{13\sqrt{3} - 8}{2}$

---

36. (Uftm 2011) Dividindo-se o polinômio $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + mx + 1$ por $(x - 1)$ ou por $(x + 1)$, os restos são iguais. Nesse caso, o valor de m é igual a

a) –2.

b) –1.

c) 1.

d) 2.

e) 3.

---

37. (Ifsc 2011) Dada a função polinominal $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, o valor de $f(-3) + f(0) + f(f(-1))$ é:

a) - 20.

b) -18.

c) - 16.

d) 20.

e) 16.

---

38. (Uel 2011) O polinômio $p(x) = x^3 + x^2 - 3ax - 4a$ é divisível pelo polinômio $q(x) = x^2 - x - 4$. Qual o valor de a?

a) a = −2

b) a = −1

c) a = 0

d) a = 1

e) a = 2

---

39. (Upe 2011) Para que o polinômio $6x^3 - 4x^2 + 2mx - (m+1)$ seja divisível por x – 3, o valor da raiz quadrada do módulo de m deve ser igual a

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 5

---

40. (Ucpel 2011) Na divisão do polinômio $P(x) = 4x^3 + mx^2 - 3x + 4$ por $x - 2$ o resto é 18. Nessas condições, o valor de *m* é

a) –6

b) 3

c) –3

d) 6

e) –5

É isso, meu querido!!

Chegamos ao fim dessa nossa aula!!

Espero que tenha gostado. Agora, é só praticar!

Qualquer dúvida, só entrar em contato no fórum.

Vamos nessa! Foco total!!

4 - GABARITO

1. C
2. A
3. D
4. B
5. C
6. A
7. E
8. C
9. D
10. B
11. B
12. C
13. B
14. B
15. A
16. C
17. E
18. D
19. B
20. B
21. A
22. E
23. A
24. A
25. D

26. E
27. B
28. A
29. A
30. E
31. B
32. B
33. D
34. D
35. D
36. D
37. B
38. E
39. E
40. C