MATEMÁTICA

FRENTE: MATEMÁTICA IV

PROFESSOR(A): ISAAC LUÍS

EAD – ITA/IME

AULAS 12 A 15

ASSUNTO: SOMAS E PRODUTOS TELESCÓPICOS

Resumo Teórico

Somatório – Definição e Propriedades

Seja $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais e **m** e **n** naturais, com $m \le n$. Usaremos o símbolo

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

para indicar a soma $a_m + \ldots + a_n$.

Se $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ e $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ são sequências de números reais e **c** é um número real qualquer, as seguintes propriedades são válidas:

Propriedade 1: $\sum_{i=m}^{n} c = (n - m + 1)c$.

Prova: Inicialmente, defina $a_i = c$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Considere **m** fixo. Faremos indução sobre **n**. Para $n = m$, temos

$$\sum_{i=m}^{m} a_i = \sum_{i=m}^{m} c = c = 1 \times c = (m - m + 1)\, c.$$

Suponha o resultado válido para algum $n \ge m$. Agora, note que

$$\sum_{i=m}^{n+1} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i + a_{n+1} = \sum_{i=m}^{n} c + c =$$

$$= (n - m + 1)c + c = [(n + 1) - m + 1]c,$$

o que encerra a prova.

As demonstrações (por indução) das próximas quatro propriedades são deixadas como exercício.

Propriedade 2: $\sum_{i=m}^{n} ca_i = c \sum_{i=m}^{n} a_i$.

Propriedade 3: $\sum_{i=m}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i \pm \sum_{i=m}^{n} b_i$.

Propriedade 4: $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{p} a_i + \sum_{i=p+1}^{n} a_i$, com $m \le p < n$.

Propriedade 5: $\sum_{i=m}^{n}\left(\sum_{j=m'}^{n'} a_i b_j\right) = \left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=m'}^{n'} b_j\right)$.

Somas Telescópicas – Definição e Exemplos

Definição: Uma soma telescópica é toda soma do tipo

$$\sum_{i=m}^{n} (a_{i+1} - a_i), \text{ com } m \le n.$$

Observe que, essencialmente, uma soma telescópica consiste de um somatório de diferenças sucessivas entre termos consecutivos de uma sequência dada.

Proposição:

$$\sum_{i=m}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_m.$$

Prova: Considere **m** fixo. Faremos indução sobre **n**. Se $n = m$, a conclusão é imediata. Suponha o resultado válido para algum $n \ge m$. Perceba que

$$\sum_{i=m}^{n+1} (a_{i+1} - a_i) = \sum_{i=m}^{n} (a_{i+1} - a_i) + (a_{n+2} - a_{n+1}) =$$

$$= (a_{n+1} - a_m) + (a_{n+2} - a_{n+1}) = a_{n+2} - a_m = a_{(n+1)+1} - a_m.$$

Exemplo 1: Denote por $S_n(m)$ a soma das **n** primeiras m-ésimas potências de naturais não nulos, isto é,

$$S_n(m) = \sum_{i=1}^{n} i^m.$$

Mostre que, para todo $k \ge 2$, tem-se que

$$\sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} S_n(l) = (n + 1)^k - 1 \; (*).$$

Solução: Pelo binômio de Newton, podemos escrever

$$(i + 1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} i^j = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} i^j + i^k \rightarrow$$

$$\rightarrow (i + 1)^k - i^k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} i^j.$$

Tomando somatórios em ambos os membros da igualdade anterior, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}i^{j}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[(i+1)^{k}-i^{k}\right]\to$$

$$\to\sum_{i=1}^{n}\left[\binom{k}{0}i^{0}+\binom{k}{1}i^{1}+\ldots+\binom{k}{k-1}i^{k-1}\right]=(n+1)^{k}-1,$$

em virtude da proposição que acabamos de demonstrar. Pela **Propriedade 3**, temos

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\binom{k}{0}i^{0}+\binom{k}{1}i^{1}+\ldots+\binom{k}{k-1}i^{k-1}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\binom{k}{0}i^{0}+\sum_{i=1}^{n}\binom{k}{1}i^{1}+\ldots+\sum_{i=1}^{n}\binom{k}{k-1}i^{k-1},$$

e agora, pela **Propriedade 2**, segue-se que

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{k}{0}i^{0}+\sum_{i=1}^{n}\binom{k}{1}i^{1}+\ldots+\sum_{i=1}^{n}\binom{k}{k-1}i^{k-1}=$$

$$=\binom{k}{0}\sum_{i=1}^{n}i^{0}+\binom{k}{1}\sum_{i=1}^{n}i^{1}+\ldots+\binom{k}{k-1}\sum_{i=1}^{n}i^{k-1}=$$

$$=\binom{k}{0}S_n(0)+\binom{k}{1}S_n(1)+\ldots+\binom{k}{k-1}S_n(k-1)=\boxed{\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k}{l}S_n(l)}.$$

A fórmula obtida acima tem consequências importantes. Essencialmente, (*) é uma **fórmula recursiva**, de maneira que, de posse de alguns valores iniciais, é possível determinarmos uma fórmula fechada (em função de **n**) para $S_n(m)$, qualquer que seja $m \geq 0$.

Perceba que $S_n(0) = n$ e $S_n(1) = t_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Tomando k = 3 em (*), por exemplo, obtemos

$$\sum_{l=0}^{2}\binom{3}{l}S_n(l)=(n+1)^{3}-1\to$$

$$\to\binom{3}{0}S_n(0)+\binom{3}{1}S_n(1)+\binom{3}{2}S_n(2)=$$

$$=S_n(0)+3S_n(1)+3S_n(2)=$$

$$=n+\frac{3n(n+1)}{2}+3S_n(2)=(n+1)^{3}-1=n^{3}+3n^{2}+3n\to$$

$$\to 3n^{2}+5n+6S_n(2)=2n^{3}+6n^{2}+6n\to$$
$$\to 6S_n(2)=2n^{3}+3n^{2}+n=n(n+1)(2n+1)\to$$

$$\to S_n(2)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

e encontramos uma fórmula fechada para o cálculo da soma dos **n** primeiros quadrados perfeitos não nulos!

No que segue, utilizamos o resultado obtido no exemplo 1 para demonstrarmos o Teorema de Aryabhata.

Exemplo 2: Teorema de Aryabhata: A soma dos **n** primeiros números triangulares é

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Prova: Temos

$$\sum_{i=1}^{n}t_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}i^{2}\right)=\frac{1}{2}\left[t_n+S_n(2)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]=\frac{1}{2}\times\frac{2n(n+1)(n+2)}{6}=$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$ como queríamos demonstrar.

Agora, vejamos a seguinte

Definição: Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência de números reais. Dizemos que $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se, para todo $N > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então $a_n > N$.

Lema: Seja **c** um número real. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, então

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{c}{a_n}=0.$$

Prova: Se c = 0, imediato. Suponha $c \neq 0$ e seja ε um número real positivo. Como $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, dado $N = \frac{|c|}{\varepsilon}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, temos

$$a_n > N = \frac{|c|}{\varepsilon}\to\frac{|a_n|}{|c|}>\frac{1}{\varepsilon}\to\frac{|c|}{|a_n|}=\left|\frac{c}{a_n}\right|<\varepsilon,$$

e a prova está encerrada.

Para o próximo exemplo, utilizaremos o lema demonstrado acima.

Exemplo 3: Seja t_k o k-ésimo número triangular. Calcule:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}.$$

Solução: Note que

$$\frac{1}{t_i}=\frac{2}{i(i+1)}=2\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=(-2)\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}\right),$$

de modo que

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}=(-2)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}\right)=2-\frac{2}{n+1}.$$

É fácil ver que $\lim_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$; logo, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n+1}\right)=0$, em virtude do lema acima. Assim,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}=\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{2}{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}2-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n+1}\right)=$$

$$=2-0=2.$$

É muito comum empregarmos somas telescópicas para a obtenção de fórmulas poderosas em trigonometria.

Exemplo 4: (Identidades trigonométricas de Lagrange)

I. $$\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen}(ix)=\frac{1}{2}\cot g\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\cos\left[x\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)};$$

II. $$\sum_{i=1}^{n}\cos(ix)=\frac{\operatorname{sen}\left[x\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{2}.$$

com $x \neq 2k\pi$.

Prova: Daremos a demonstração de I (a prova de II), que é absolutamente análoga, deixada como exercício. Antes de começar, recordemos duas das fórmulas trigonométricas de prostaférese:

$$\begin{cases} \cos p - \cos q = -2\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \quad (*) \\[2ex] \mathrm{sen}\,p - \mathrm{sen}\,q = 2\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right) \quad (**) \end{cases}$$

Note que $x \neq 2k\pi \rightarrow \dfrac{x}{2} \neq k\pi$, e portanto, $\mathrm{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) \neq 0$. Daí,

$$\mathrm{sen}(ix) = \frac{2\,\mathrm{sen}(ix)\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \underbrace{=}_{(*)} \frac{\cos\left[x\left(i-\frac{1}{2}\right)\right] - \cos\left[x\left(i+\frac{1}{2}\right)\right]}{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Tomando somatórios em ambos os membros da igualdade acima, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{sen}(ix) = -\frac{1}{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \sum_{i=1}^{n} \left\{\cos\left[x\left(i+\frac{1}{2}\right)\right] - \cos\left[x\left(i-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}.$$

Agora, repare que

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left\{\cos\left[x\left(i+\frac{1}{2}\right)\right] - \cos\left[x\left(i-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$ é uma soma telescópica, de modo que

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{sen}(ix) = \frac{1}{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \times \left\{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left[x\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{\cos\left[x\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]}{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\mathrm{cotg}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\cos\left[x\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]}{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Produtório – Definição e Propriedades

Seja $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais e **m** e **n** naturais, com $m \leq n$. Usaremos o símbolo

$$\prod_{i=m}^{n} a_i$$

para indicar o produto $a_m \times \ldots \times a_n$.

Sejam $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ e $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sequências de números reais, $c \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{N}$. As seguintes propriedades são válidas:

Propriedade 1: $\prod_{i=m}^{n} c = c^{n-m+1}$.

Prova: Considere **m** fixo. Faremos indução sobre **n**. Para n = m, temos

$$\prod_{i=m}^{m} c = c = c^1 = c^{m-m+1}.$$

Suponha o resultado válido para algum $n \geq m$. Agora, note que

$\displaystyle\prod_{i=m}^{m} c = \left(\prod_{i=m}^{n} c\right) \times c = c^{n-m+1} \times c = c^{(n+1)-m+1}$, o que encerra a prova.

As demonstrações (por indução) das próximas quatro propriedades serão deixadas como exercício.

Propriedade 2: $\displaystyle\left(\prod_{i=m}^{n} a_i\right)^p = \prod_{i=m}^{n} a_i^p$.

Propriedade 3: $\displaystyle\prod_{i=m}^{n} a_i b_i = \left(\prod_{i=m}^{n} a_i\right)\left(\prod_{i=m}^{n} b_i\right)$.

Propriedade 4: $\displaystyle\prod_{i=m}^{n} \frac{a_i}{b_i} = \frac{\prod_{i=m}^{n} a_i}{\prod_{i=m}^{n} b_i}$, com $b_i \neq 0$, para todo i, $m \leq i \leq n$.

Propriedade 5: $\displaystyle\prod_{i=m}^{n} a_i = \left(\prod_{i=m}^{p} a_i\right)\left(\prod_{i=p+i}^{n} a_i\right)$, com $m \leq p < n$.

Produtos Telescópicos – Definição e Exemplos

Definição: Um produto telescópico é todo produtório do tipo

$$\prod_{i=m}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i}, \text{ com } m \leq n \text{ e } a_i \neq 0, \text{ para todo i, } m \leq i \leq n.$$

Perceba que, essencialmente, um produto telescópico consiste de um produtório de quocientes sucessivos entre termos consecutivos de uma sequência dada.

Proposição:

$$\prod_{i=m}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_m}.$$

Prova: Considere **m** fixo. Faremos indução sobre **n**. Se n = m, a conclusão é imediata. Suponha o resultado válido para algum $n \geq m$. Note que

$$\prod_{i=m}^{n+1} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \left(\prod_{i=m}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i}\right) \times \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_m} \times \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{(n+1)+1}}{a_m}.$$

Exemplo 5: Ache uma fórmula fechada para o produtório

$$\prod_{i=2}^{n} \frac{i^2}{i^2-1}.$$

Solução: Temos

$$\prod_{i=2}^{n} \frac{i^2}{i^2-1} = \left(\prod_{i=2}^{n} \frac{i}{i+1}\right)\left(\prod_{i=2}^{n} \frac{i}{i-1}\right) =$$

$$= \left(\prod_{i=2}^{n} \frac{1}{\frac{i+1}{i}}\right)\left(\prod_{i=2}^{n} \frac{i}{i-1}\right) = \frac{\left(\prod_{i=2}^{n} 1\right)}{\left(\prod_{i=2}^{n} \frac{i+1}{i}\right)}\left(\prod_{i=2}^{n} \frac{i}{i-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\frac{n+1}{2}} \times \frac{n}{1} = \frac{2n}{n+1}.$$

Para encerrarmos, vejamos mais um exemplo.

Exemplo 6: (Professor Isaac Luís) Determine o valor de

$$2018\prod_{i=2}^{2017}\log_{i+1} i.$$

Solução: Inicialmente, provaremos o seguinte

Lema: Sejam **m** e **n** naturais não nulos, com $m \le n$, então

$$\prod_{i=m}^{n}\log_{i+1} i = \log_{n+1} m.$$

Prova: Note que, se m = 1, temos

$$\prod_{i=1}^{n}\log_{i+1} i = 0 = \log_{n+1} 1.$$

Suponha, portanto, $m \ge 2$. Seja **c** um número real tal que $0 < c \neq 1$. Pelo teorema da **mudança de base de logaritmos**, podemos escrever

$$\prod_{i=1}^{n}\log_{i+1} i = \prod_{i=m}^{n}\frac{\log_c i}{\log_c i+1} = \prod_{i=m}^{n}\frac{1}{\dfrac{\log_c i+1}{\log_c}} =$$

$$= \frac{\prod_{i=m}^{n} 1}{\prod_{i=m}^{n}\dfrac{\log_c i+1}{\log_c i}} = \frac{1}{\dfrac{\log_c n+1}{\log_c m}} = \frac{\log_c m}{\log_c n+1} = \log_{n+1} m.$$

Voltando ao problema, perceba que, pelo lema acima,

$$\prod_{i=2}^{2017}\log_{i+1} i = \log_{2018} 2.$$

Logo,

$$2018^{\prod_{i=2}^{2017}\log_{i+1} i} = 2018^{\log_{2018} 2} = 2.$$

Exercícios

01. O valor da soma

$$\sum_{n=1}^{6} \operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a}{3^n}\right),$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, é igual a:

A) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha\right]$

B) $\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{729}\right)\right]$

C) $\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)$

D) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)\right]$

E) $\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha$

02. A sequência $(y_n)_{n \ge 1}$ é tal que $y_n - y_{n-1} = 2n$, para $n \ge 2$. Sabendo-se que $y_1 = -1$, então, o termo y_{21} é igual a:

A) 41
B) 459
C) 359
D) 460

03. Calcule

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i+1)!}.$$

04. (Professor Isaac Luís) Mostre que a soma dos $n \ge 2$ primeiros repunits **não** é um repunit.

05. Dado $z = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}i\right)$, então $\sum_{n=1}^{89} z^n$ é igual a:

Sugestão: aplique as identidades trigonométricas de Lagrange.

A) $-\frac{89}{2}\sqrt{3}i$

B) -1

C) 0

D) 1

E) $\frac{89}{6}\sqrt{3}i$

06. A soma $\sum_{k=0}^{n}\left[\cos(\alpha + k\pi)\right]$, para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$, vale:

A) $-\cos\alpha$, quando **n** é par.
B) $-\operatorname{sen}\alpha$, quando **n** é ímpar.
C) $\cos\alpha$, quando **n** é ímpar.
D) $\operatorname{sen}\alpha$, quando **n** é par.
E) 0, quando **n** é ímpar.

07. Deduza uma fórmula fechada para o produtório

$$\prod_{i=0}^{n}\cos\left(2^i x\right),$$

com $x \neq \frac{k\pi}{2^i}$ ($k \in \mathbb{Z}$), para todo **i**, $0 \le i \le n$.

08. Seja **c** um número real tal que $0 < c < 1$ e $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais em que $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Faça os seguintes itens:

A) Mostre que $\lim_{n\to+\infty} c^{a_n} = 0$

B) Calcule $\lim_{n\to+\infty}\prod_{i=0}^{n}\left(1+c^{2^i}\right)$.

09. Ache uma fórmula fechada para o somatório abaixo:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}}$$

10. A soma $\sum_{n=1}^{4}\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[n]{32}}{\log_{\frac{1}{2}} 8^{n+2}}$ é igual a:

A) $\frac{8}{9}$

B) $\frac{14}{15}$

C) $\frac{15}{16}$

D) $\frac{17}{18}$

E) 1

11. Considere as seguintes afirmações sobre números reais:

I. Se a expansão decimal de **x** é infinita e periódica, então **x** é um número racional;

II. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}$;

III. $\ln\sqrt[3]{e^2} + (\log_3 2)(\log_4 9)$ é um número racional.

É (são) verdadeira(s):

A) nenhuma.
B) apenas II.
C) apenas I e II.
D) apenas I e III.
E) I, II e III.

12. Considere a matriz $M = (m_{ij})_{2\times 2}$ tal que $m_{ij} = j - i + 1$, i, j = 1,2. Sabendo-se que

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n} M^k - n\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right) = 252,$$

então, o valor de **n** é igual a:

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

13. Encontre o conjunto solução $S \subset \mathbb{R}$ da inequação exponencial

$$3^{x-2} + \sum_{k=1}^{4} 3^{x+k} \le \frac{1081}{18}.$$

14. Faça os seguintes itens:

A) Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais tal que $\lim_{n\to+\infty} a_n = L > 0$. Mostre que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$.

B) Use o resultado do item anterior para calcular o seguinte limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i-\sqrt{i^2-1}}{\sqrt{i(i+1)}}.$$

15. Seja $f: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a função definida por $f(x) = \text{arcsen}(x)$. Então, a soma

$$\sum_{n=0}^{4} f\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3^n}\right)\right]$$

é igual a:

A) $\frac{253}{162}\pi$
B) $\frac{245}{162}\pi$
C) $-\frac{152}{81}\pi$
D) $-\frac{82}{81}\pi$
E) $-\frac{79}{162}\pi$

Gabarito

01	02	03	04	05
A	B	–	–	B
06	**07**	**08**	**09**	**10**
E	–	–	–	D
11	**12**	**13**	**14**	**15**
D	C	–	B) 1	B

– Demonstração.

Anotações

SUPERVISOR/DIRETOR: MARCELO PENA – AUTOR: ISAAC LUÍS
DIG.: NAILTON – REV.: CAMILLA