Livro Eletrônico

Aula 03

Matemática III p/ Escola de Sargentos das Armas (EsSA) Com videoaulas - 2019

Italo Marinho Sá Barreto

Aula 03: Círculos.

Sumário

Olá meu jovem estudante meu jovem aprendiz. Um bom dia, uma boa tarde, uma boa noite para você, jovem estudante. Estamos aqui hoje para falar de círculos, dando andamento ao nosso conteúdo de geometria plana. O assunto de hoje é super abrangente, super recheado de informações, e por isso teremos uma grande quantidade de questões resolvidas (não só aqui como também em nossas videoaulas).

Meu conselho é o de sempre. Faça e refaça os exercícios. Resuma os conteúdos que estão aqui expostos. O conteúdo de círculos é o primeiro que eventualmente acabará reunindo doutrinas anteriores, de forma que as aulas anteriores acabarão se fazendo necessárias para que possamos dar andamento ao conteúdo propriamente dito.

Espero que você esteja finalmente aprendendo geometria. Não relute em ficar dizendo que “não, tiveram coisas que eu não peguei direito”, faz parte não pegarmos tudo. Faz parte, jovem, faz parte. Estou aqui com vocês agora para podermos, juntos, alcançar o entendimento não só desse conteúdo mas dos anteriores também. Acabaremos sempre revendo esses tópicos pretéritos dentro das questões, mas preciso que você esteja sempre revendo os nossos materiais. Assim você será exposto ao conteúdo de modo massivo, que acabará sendo gravado e acoplado às suas necessidades. Beleza? Então vamos lá, falar sobre círculos!

CRONOGRAMA DE AULAS

DISPONÍVEL	*CONTEÚDO*
Aula 00	*Fundamentos da Geometria Plana: elementos primitivos, axiomas e postulados. Ângulos: definição, elementos, notações, unidades de medida, classificação, ângulos consecutivos, ângulos adjacentes, bissetriz de um ângulo, ângulos opostos pelo vértice, retas paralelas cortadas por transversais. Triângulos: definição, elementos, relações angulares, condição de existência, classificação, cevianas, pontos notáveis, base média, congruência.*
Aula 01	*Teorema de Tales, semelhança de triângulos e teorema das bissetrizes. Relações métricas no triângulo retângulo. Polígonos: definição, elementos, nomenclatura, polígonos côncavos, polígonos convexos, classificação, relações angulares e número de diagonais.*
Aula 02	*Quadriláteros notáveis: definição, elementos, relações angulares, classificação, base média e mediana de Euler.*
Aula 03	*Polígonos regulares: Polígonos regulares inscritos e polígonos regulares circunscritos. Circunferência: definição de circunferência e de círculo, elementos, posições relativas, ângulos na circunferência, quadriláteros inscritíveis, teorema de Pitot,e potência de ponto.*
Aula 04	*Trigonometria: razões trigonométricas no triângulo retângulo, trigonometria num triângulo qualquer (Lei dos senos e dos cossenos)*
Aula 05	*Circunferência trigonométrica, operações com arcos (adição, subtração e arco duplo) e funções trigonométricas.*
Aula 06	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*
Aula 07	*Áreas de figuras planas.*
Aula 08	*Introdução à Geometria Espacial. Prismas: definição, elementos, classificação, planificação, áreas, volume e casos especiais: cubos e paralelepípedos. Cilindros: definição, elementos, classificação, planificação, áreas e volume.*
Aula 09	*Pirâmides: definição, elementos, classificação, relações métricas na pirâmide, áreas e volume. Cones: definição, elementos, classificação, relação métricas no cone, áreas e volume.*
Aula 10	*Esferas: definição, elementos, secção esférica, área da superfície esférica e volume. Troncos.*
Aula 11	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*

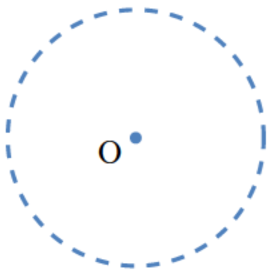
1.0– CÍRCULOS: FUNDAMENTOS

1.1– DEFINIÇÃO E ELEMENTOS BÁSICOS

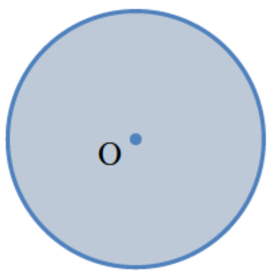
Definição

Vamos lá então, galera. O que vem a ser um círculo? Para respondermos de modo intuitivo a essa pergunta, imagine inicialmente um ponto em um plano qualquer. E eu peço que você, estudante, de fato procure imaginar o que estou falando, descrevendo.

Agora, eu quero que você imagine outros pontos ao redor desse primeiro que você imaginou. Pense neles da seguinte forma: esses pontos estão todos a uma mesma distância daquele primeiro ponto, isto é, esses pontos equidistam do primeiro. Nossa construção está mais ou menos assim no momento:



Agora imagine que você continue marcando esses mesmos pontos, isto é, que você continue marcando pontos que equidistem desse ponto "central". Eventualmente você acabará marcando tantos pontos que uma figura começará a aparecer, uma figura sem espaçamentos. Todos esses infinitos pontos acabarão por formar a seguinte figura: cm

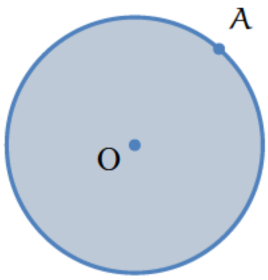


A essa figura, com exceção do ponto central, dá-se o nome de *círculo* ou *circunferência*[1].

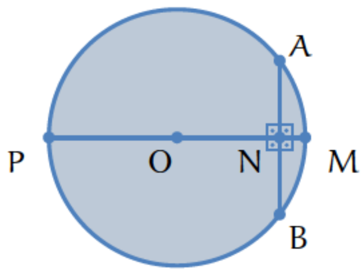
[1] Antigamente, as palavras "círculo" e "circunferência" significavam coisas diferentes. Circunferência era uma palavra exclusiva para a borda, enquanto que círculo era tudo, incluindo o preenchimento. Hoje em dia essa distinção não é mais feita.

Elementos fundamentais do círculo

Ao ponto central dá-se o nome de *centro do círculo*. Agora, eu te peço o seguinte: pegue um ponto qualquer desse círculo e crie o segmento que o una com o centro do círculo:



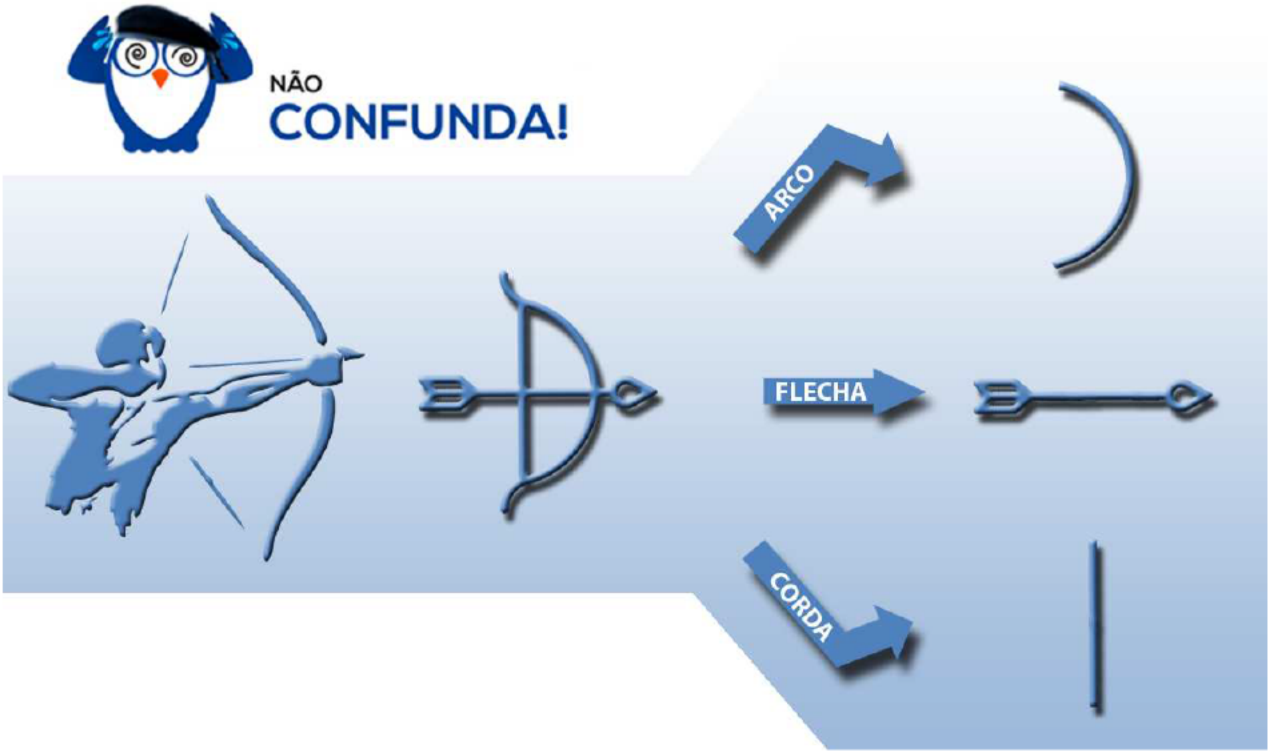
O segmento $\overline{OA}$ é chamado de *raio* do círculo. Observemos então o círculo geral abaixo, e comecemos a citar os seus elementos mais importantes e que são mais comuns em questões:



- $\overline{OM}$: *Raio*, segmento que une um ponto qualquer do círculo e o seu centro;
- $\overline{AB}$: *Corda*, segmento que une dois pontos quaisquer do círculo. Perceba que uma corda é um segmento que deve começar e terminar sobre o círculo.
- $\widehat{AB}$: *Arco*, trata-se da curva entre A e B, sobre a circunferência. Esse tema precisa ser melhor discutido, por isso, haverá uma seção exclusiva para discutirmos sobre arcos.
- $\overline{MN}$: *Flecha*, trata-se do segmento que une o ponto médio de uma corda e o ponto médio de um dos arcos determinados por essa corda.
- $\overline{PM}$: *Diâmetro*, trata-se da maior corda de um círculo. Ele passa pelo centro do círculo e mede exatamente o dobro do raio. Então se um um círculo tem diâmetro d e raio r, é sempre válido que:

$$\boxed{d \quad 2R.}$$

Antes de prosseguirmos, observe a figura abaixo:



E aí? Te significou alguma coisa? Pois é, o nome arco-e-flecha foi o grande motivo de haver se escolhido o termo arco e o termo flecha (assim como o termo corda) para os elementos do círculo.

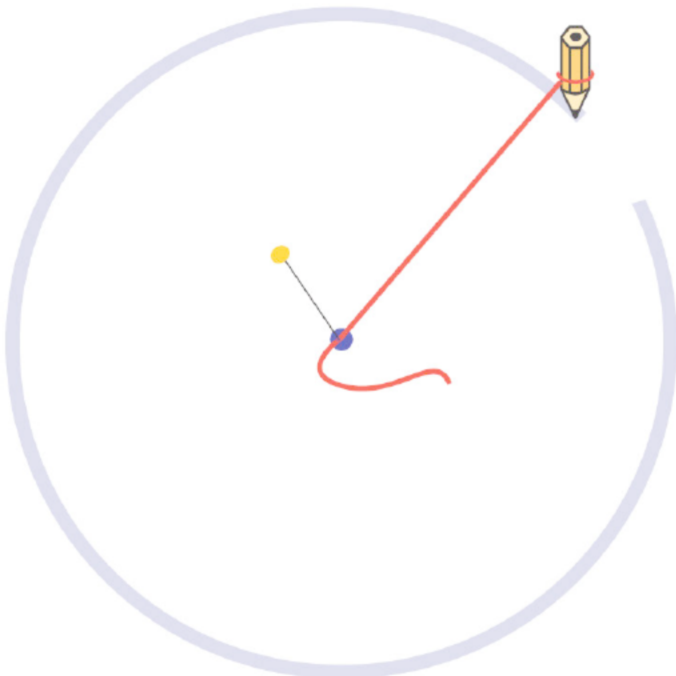
Bom, tudo bem até aqui? O que fizemos até agora foi simplesmente nomear os termos e os elementos de um círculo. Agora começaremos a falar um pouco mais do aspecto métrico da teoria. Vamos lá? Siga comigo que vai dar tudo certo, jovem. Estamos juntos!

1.2– Comprimento e o número π

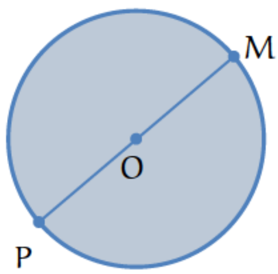
Comprimento da circunferência

Falaremos aqui sobre o comprimento de um círculo. Comprimento do círculo é como se fosse o perímetro do círculo, isto é, a extensão da sua borda.

Isso mesmo, coruja! O comprimento do barbante será numericamente igual ao comprimento do círculo, pois esse barbante agiu como a borda desse circulo. Perfeito! Agora veremos como calcular esse comprimento; mas, de qualquer forma, segue um exemplo explicativo para termos uma ideia visual de que seria um comprimento:



Bom, agora vamos lá. Quero que você imagine um círculo. Imaginou? Agora imagine o centro desse círculo, junto com um diâmetro qualquer desenhado. Vou te ajudar com a figura abaixo:



É possível demonstrarmos (e não faremos isso aqui, necessitaríamos de argumentos de uma disciplina chamada de *Cálculo* para uma justificativa ideal) que sempre que dividimos o comprimento de um círculo pelo seu diâmetro, encontraremos um número muito especial identificado como π (lê-se "pi"). Esse número pode ser calculado da seguinte forma;

$$\boxed{\pi \quad 3,1415926536...}$$

Trata-se de um número irracional, isto é, não tem expansão decimal periódica. Os números que vão aparecendo após a vírgula não seguem nenhum padrão específico. Os nossos exames, em geral, nos exigem o conhecimento de apenas duas casas decimais de π, isto é, $3,14$. Porém, não saia substituindo π por $3,14$ sempre que vê-lo. Aguarde instruções da questão para fazê-lo ou espere até o final de sua conta, caso as alternativas da questão estejam aproximadas. Beleza?

Então, o que acabamos de dizer foi que sempre que dividimos C por d encontramos π. Isso pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{C}{d} \quad \pi.$$

Mas lembremo-nos de que $d \quad 2R$. Daí nossa expressão por ser reorganizada na seguinte forma:

$$\boxed{C \quad 2\pi R.}$$

Também poderíamos escrevê-la em função do diâmetro:

$$\boxed{C \quad \pi d}$$

Essa é uma expressão bastante famosa para o cálculo do comprimento de um círculo. Perceba que, de fato, só precisamos do raio desse círculo a fim de calcularmos o seu comprimento, certo? De posse da informação do raio, basta substituir e encontramos o comprimento sem problemas.

QUESTÃO 1

Calcule o comprimento de um círculo de diâmetro $20\,\text{cm}$.

(a) $10\,\text{cm}$
(b) $10\pi\,\text{cm}$
(c) $20\pi\,\text{cm}$
(d) $40\pi\,\text{cm}$

R: Questão super simples, apenas aqui para treinarmos o uso da expressão que acabamos de aprender. Veja que ele nos informa o diâmetro, logo, podemos utilizar o fato de que:

$$\begin{aligned} C &\quad \pi \cdot d \\ &\quad \pi \cdot 20 \\ &\quad 20\pi\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Gabarito: C

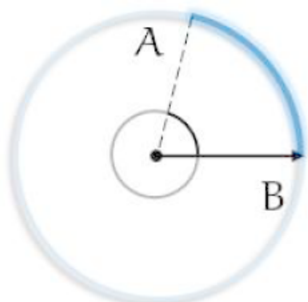
Tranquilo demais não é, jovem?

Mas a gente não começa aprendendo a andar de skate já fazendo manobras. Começamos aprendendo a simplesmente andar para frente. Tudo deve começar do básico para que, então, possamos aprofundar. Beleza? Então vamos lá, coruja, agora falaremos sobre como achar o comprimento de um arco. Para isso, entendamos melhor o que vem a ser um arco.

1.3– Arcos

Definição

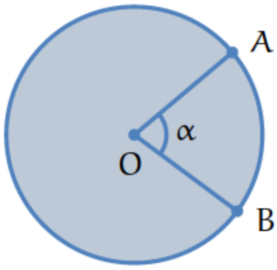
Talvez você tenha de prestar uma atenção maior agora que estamos falando desse específico tema. Arcos são as partes em curva de uma circunferência delimitadas por dois pontos. Veja abaixo um exemplo:



Aqueles dois pontos sobre a circunferência acabou criando *dois arcos*: o azul e o cinza. Veja que o arco azul é o menor e o arco cinza é o maior. Ambos são representados por $\widehat{AB}$. Por isso que dizemos que essa representação é ambígua, pois não sabemos de que arco o texto está se referindo: o azul ou o cinza. Por isso que costuma-se dizer: maior arco $\widehat{AB}$ ou menor arco $\widehat{AB}$; assim, perde-se a ambiguidade em relação a que arco estamos nos referindo. Beleza?

Ângulo central

Na teoria de arcos, medida é uma palavra bastante diferente de comprimento. Já já falaremos de comprimento de arco, mas falemos agora sobre a sua medida. Novamente, considere o menor arco $\widehat{AB}$ do círculo abaixo:



Agora, como foi feito acima, conecte os pontos A e B (extremidades do arco) ao centro do círculo, isto é, ao ponto O. Percebe que um ângulo α foi formado? Esse ângulo recebe o nome de *ângulo central*. Um ângulo central sempre terá, então, vértice localizado no centro do círculo.

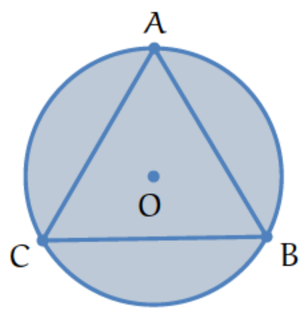
Pois bem, a definição da medida de um arco é a seguinte: um arco medirá exatamente o valor de seu ângulo central. No caso acima, então, podemos dizer que o arco $\widehat{AB}$ mede exatamente α. Veja então que medir um arco não tem nada a ver, de fato, como o seu comprimento. Vejamos um exemplo:

QUESTÃO 2

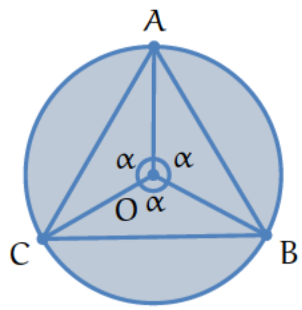
Inscreve-se um triângulo equilátero ABC num círculo específico. Calcule a medida do menor arco $\widehat{AB}$.

(a) $30°$
(b) $60°$
(c) $90°$
(d) $120°$

R: Observe a figura proposta:



Veja que, nessa figura, temos um ângulo central como o abaixo:



Como os ângulos α fecham um ângulo de $360°$, temos:

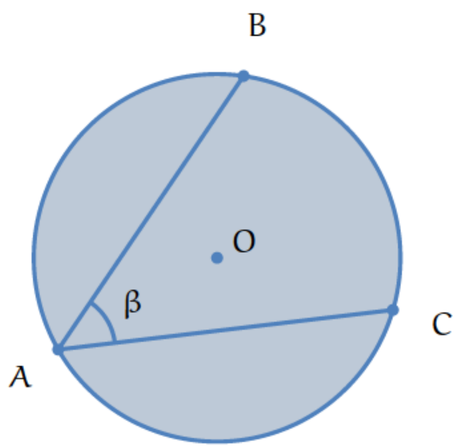
$$\alpha + \alpha + \alpha \quad 360°$$
$$3\alpha \quad 360°$$
$$\alpha \quad 120°.$$

Veja então que, como o ângulo centro do menor arco $\widehat{AB}$ mede $120°$, o arco também medirá $120°$.

Gabarito: D

Ângulo inscrito

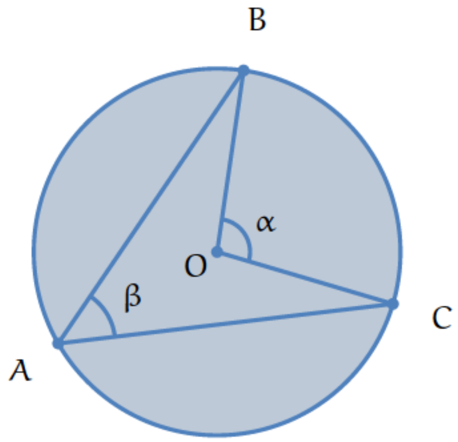
Um ângulo relacionado a um círculo será dito *inscrito* quando seu vértice estiver exatamente sobre o círculo. Veja abaixo um exemplo de ângulo inscrito:



Veja que o vértice A está sobre o círculo, isto é, sobre a borda. Nesse caso, dizemos que o ângulo $\angle BAC$ é um ângulo inscrito[2]. O ângulo inscrito tem uma propriedade bastante especial, e essa merece pelo menos uma justificativa. Vamos lá. Considere um arco $\widehat{BC}$ qualquer de um círculo de

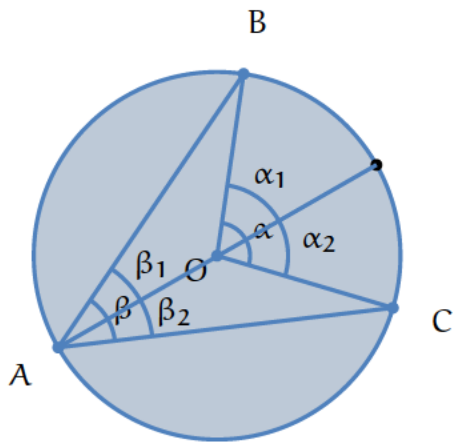
[2] Aliás, a palavra *inscrito* em geometria, salvo raras exceções, quase sempre significarão uma determinada figura cujos vértices estão sobre outra figura. Um quadrado estará inscrito num círculo, por exemplo, quando todos os seus vértices pertencerem ao círculo.

centro O. Faça $\angle BOC$ α, ou seja, o arco $\widehat{BC}$ mede α. Agora, Pegue um ponto A como o abaixo, dentro dessa figura que descrevemos:

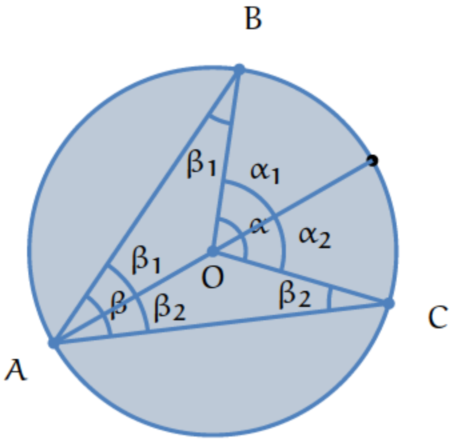


Nessa figura, como já dizemos, α é a medida do arco $\widehat{BC}$ (pois é a medida de seu ângulo central) e β é a medida de um ângulo inscrito de extremidades B e C. Nosso objetivo agora é encontrar alguma relação entre α e β. Vamos lá então?

Trace o diâmetro $\overline{AO}$. Isso dividirá o ângulo α em duas partes (chamarei essas partes de α_1 e α_2) e o ângulo β em, também, duas partes: β_1 e β_2:



Veja que o triângulo BOA é isósceles (pois BO AO) assim como COA também o é. Assim, podemos transferir β_1 e β_2 da seguinte forma:



Mas veja que, no triângulo BOA, α_1 é um ângulo externo e, portanto, é igual à soma dos seus internos não adjacentes, ou seja:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\quad \beta_1 + \beta_1 \\ &\quad 2\beta_1. \end{aligned}$$

Seguindo um raciocínio análogo, podemos concluir, para $\triangle COA$:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &\quad \beta_2 + \beta_2 \\ &\quad 2\beta_2. \end{aligned}$$

Mas lembremo-nos de que $\beta \quad \beta_1 + \beta_2$ e $\alpha \quad \alpha_1 + \alpha_2$. Logo:

$$\begin{aligned} \alpha &\quad \alpha_1 + \alpha_2 \\ &\quad 2\beta_1 + 2\beta_2 \\ &\quad 2(\beta_1 + \beta_2) \\ &\quad 2\underbrace{(\beta_1 + \beta_2)}_{\beta} \\ &\quad 2\beta. \end{aligned}$$

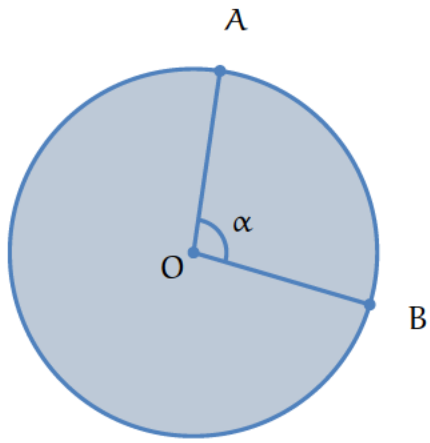
Com isso concluímos o incrível fato de que:

$$\boxed{\alpha \quad 2\beta.}$$

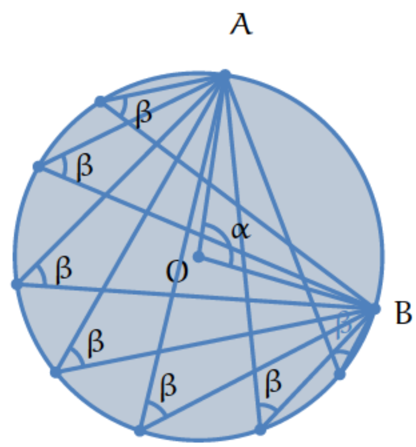
Podemos escrever também da seguinte forma:

> O ângulo inscrito sempre medirá a metade da medida do seu arco.

Observemos uma consequência importantíssima disso. Observe a figura abaixo, com o arco $\widehat{AB}$ demarcado:



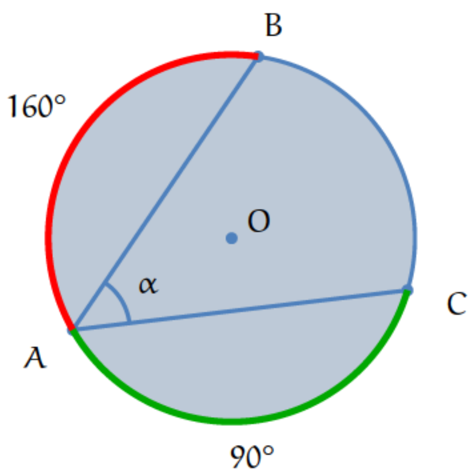
Perceba que se trata de um arco com ângulo central α e, por isso, esse arco mede α. Agora, vou inscrever seis ângulos nesse círculo, todos delimitando o arco $\widehat{AB}$:



É fato que todos esses ângulos são iguais a β e que $\alpha \quad 2\beta$. Percebem a força desse fato? Observe os problemas que ele pode vir a resolver:

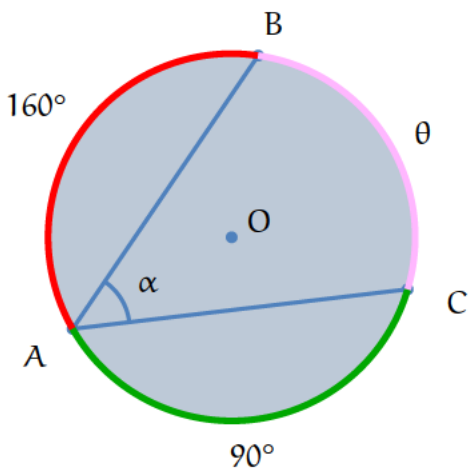
QUESTÃO 3

Calcule α na figura abaixo:



(a) 90°
(b) 160°
(c) 110°
(d) 55°

R: Chamarei de θ o arco que está incógnito:



Veja então que:

$$\begin{aligned} 160^\circ + 90^\circ + \theta &\quad 360^\circ \\ \theta &\quad 360^\circ - 250^\circ \\ \theta &\quad 110^\circ \end{aligned}$$

Como o ângulo inscrito mede a metade do arco, ou seja, a metade do ângulo central, temos:

$$\alpha \quad \frac{\theta}{2}$$
$$\alpha \quad \frac{110^\circ}{2}$$
$$\alpha \quad 55^\circ.$$

Gabarito: D

Bom, finalizada essa história, vamos ao nosso próximo tópico de discussão.

Radianos

Sabemos que a medida mais utilizada para medir ângulos é o grau. Porém, existe uma outra unidade de medida muito importante para a matemática; trata-se do *radiano*. Vamos falar um pouco dele?

Radianos são unidades de medias angulares que pertencem ao conjunto dos números reais. Essa é a grande característica desses valores. Veja que 30° não é um número real, pois pertence a um conjunto de ângulos graduados e comparados com divisões de um círculo. Mas não é o caso de discutirmos isso aqui.

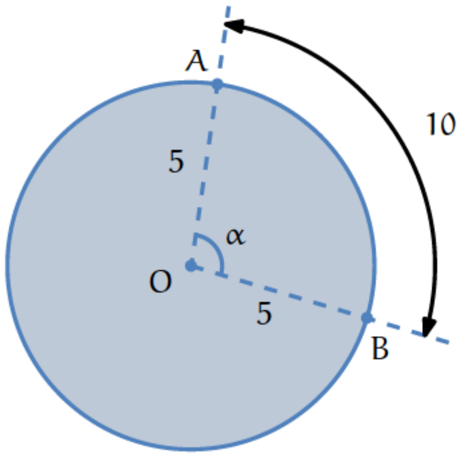
Um radiano é definido da seguinte forma: considere um arco $\widehat{AB}$ em um círculo de raio R. A quantidade de vezes que o raio R couber no arco $\widehat{AB}$ será a medida, em radianos, do arco $\widehat{AB}$. Vejamos um exemplo:

QUESTÃO 4

Em um círculo de raio $5\,\text{cm}$ e centro O são marcados dois pontos, A e B. Sabe-se que o menor arco determinado por A e B tem comprimento de $10\,\text{m}$. Calcule, em radianos, a medida do ângulo $\angle AOB$.

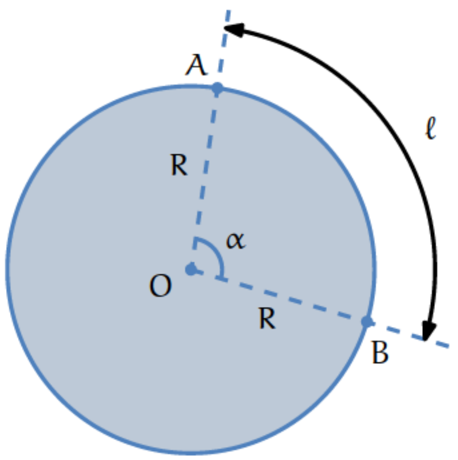
(a) $0,5\,\text{rad}$
(b) $1\,\text{rad}$
(c) $2\,\text{rad}$
(d) $4\,\text{rad}$

R: Veja que o raio do círculo, de $5\,\text{cm}$, cabe duas vezes dentro do comprimento do arco referido, que mede $10\,\text{cm}$. Então o arco referido mede $2\,\text{rad}$ e, portanto, como a medida do ângulo central sempre coincidirá com a medida do arco, teremos o ângulo $\angle AOB \quad 2\,\text{rad}$. Veja abaixo uma figura ilustrando a questão:



Gabarito: C

Temos, então, uma maneira muito prática de calcularmos um ângulo qualquer em radianos. Veja: Considere o círculo abaixo, com o arco determinado pelo ângulo central assinalado.



Para calcularmos o valor de α em radianos, precisamos descobrir quantas vezes R cabe em ℓ; para descobrirmos isso, basta efetuarmos a divisão de ℓ por R, isto é, calcular $\frac{\ell}{R}$. Isso nos dará α, ou seja, $\frac{\ell}{R} \quad \alpha$, podendo também ser escrito como:

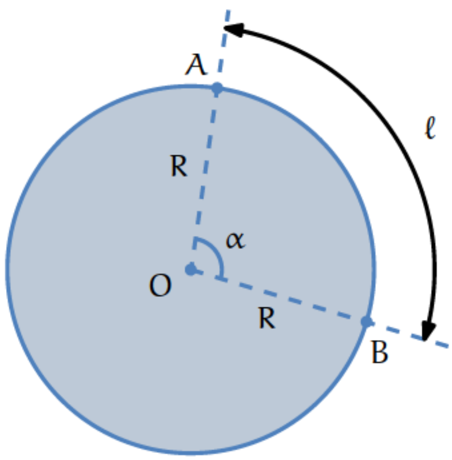
$$\boxed{\ell \quad \alpha R.}$$

Esta noção é deveras esquecida e muito importante.

Olha, coruja. Cada um tem o seu próprio método. Mas sinceramente, eu acho que não há método melhor que o da repetição, o método da mímica. Escreva e reescreva a mesma fórmula e os mesmos conceitos diversas vezes. Faça resumos. Faça resumos de que seja um ângulo central, um ângulo inscrito, um arco, radianos, enfim. Faça resumos e se teste com perguntas a si mesmo, para ver se consegue responder. Com tempo e dedicação, você eventualmente terá isso tudo memorizado a seu favor. Tudo bem, coruja? Sigamos então!

Comprimento de arco

Já falamos da medida de um arco, falemos agora do seu comprimento. É razoavelmente simples de se calcular e é bastante frequente o seu uso. Vamos lá, então. Considere a figura abaixo, onde é pedido que se calcule o comprimento do arco $\widehat{AB}$ assinalado:



Para efetuarmos esse cálculo, bastará o uso de uma regra de três simples, organizando os dados da seguinte forma:

Medida do arco	Comprimento do arco
$360°$	$2\pi R$
α	ℓ

Conseguiu compreender a regra de três que te propus? O que fiz com ela foi dizer que: caso o arco fosse o próprio círculo, isto é, medisse $360°$, teríamos um arco de comprimento igual ao comprimento do círculo, isto é, $2\pi R$. Porém, no nosso caso atual, estamos interessados em calcular o comprimento ℓ de um arco de medida α. Daí a montagem da regra de três. Montando a proporção dessa regra de três:

$$\frac{360^\circ}{\alpha} \quad \frac{2\pi R}{\ell}.$$

Agora, multipliquemos em cruz e resolvamos a equação resultante para ℓ:

$$\begin{aligned} 360^\circ \cdot \ell &\quad 2\pi R\alpha \\ \ell &\quad \frac{2\pi R\alpha}{360^\circ} \\ \ell &\quad \frac{\pi R\alpha}{180^\circ}. \end{aligned}$$

Para calcularmos, então, o comprimento ℓ de um arco de medida α (em graus) presente num círculo de raio R, utilizamos a expressão:

$$\boxed{\ell \quad \frac{\pi R\alpha}{180^\circ}.}$$

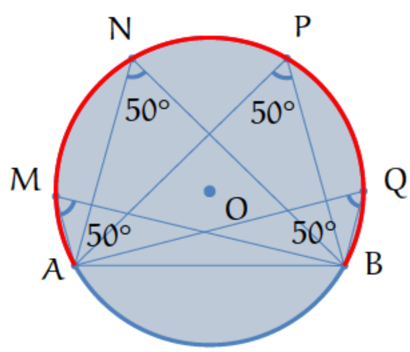
Caso α estivesse em radianos, recairíamos na definição dada anteriormente (verifique isso, substituindo 180° na expressão encontrada por π).

Arco capaz

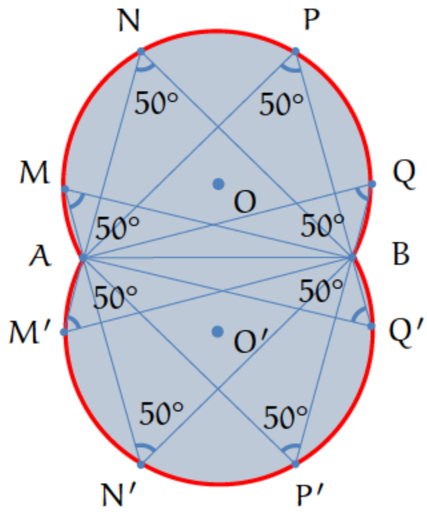
Vamos direto à definição de *arco capaz*, depois explicarei melhor o que tal definição significa:

> Arco capaz é o nome dado ao conjunto dos pontos do plano que "enxergam" um segmento de reta sob um ângulo específico.

Veja, por exemplo, a figura a seguir:

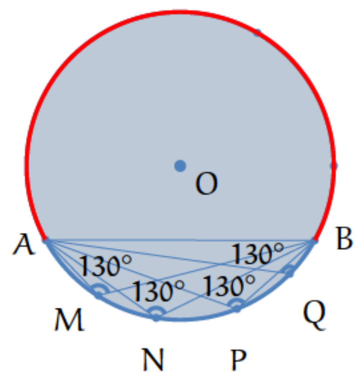


Observe o arco vermelho $\widehat{AB}$ (o maior arco determinado por A e B). Você vê que os pontos M, N, P e Q enxergam o segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo de 50°? Isso é verdade para todos os pontos do arco vermelho, daí, dizemos que o aro vermelho é o arco capaz de $50°$ em relação ao segmento $\overline{AB}$. Perceba que existe, abaixo de $\overline{AB}$, um outro arco capaz de $50°$:



Veja que os pontos M', N', P' e Q' no arco $\widehat{AB}$ de baixo de fato continuam enxergando o segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo de $50°$.

O arco azul, por sua vez, é um arco capaz de $130°$ em relação ao segmento $\overline{AB}$:



Então um segmento determina sempre arcos capazes com ângulos suplementares em relação ao segmento. Esse é um tema deveras mais avançado, concordo; mas por questão de completude, resolvi deixá-lo apontado aqui para evitarmos surpresa em seu exame.

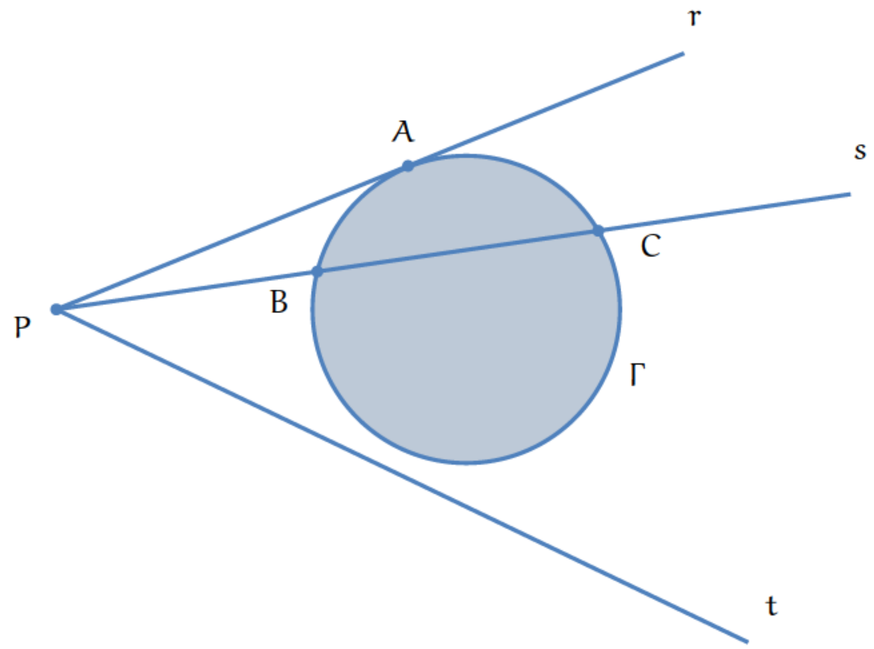
Show de bola, jovem estudante? Finalizamos aqui então nosso estudo quanto à medida e quanto ao comprimento de um arco.

2.0– Posições relativas entre reta e círculo

2.1– Tipos de posições

Vamos lá então, jovens! É o seguinte: a partir de agora, passaremos a envolver *retas* nessa história toda.

Retas e círculos podem vir a se envolver de algumas formas diferentes.



Acima vemos as três principais posições relativas entre reta e círculo. Veja que identifiquei o círculo pela letra grega Γ (lê-se "gama"). A reta r é chamada de *reta tangente*, pois ela intersecta Γ apenas uma vez (na figura seria o ponto A). Temos aí então uma definição inicial de tangência; sempre envolverá interseção única.

A reta s é chamada de *reta secante* ao círculo. Retas secantes são retas que intersectam alguma forma em mais de um ponto. Veja que de fato a reta s intersecta Γ em dois pontos: B e C.

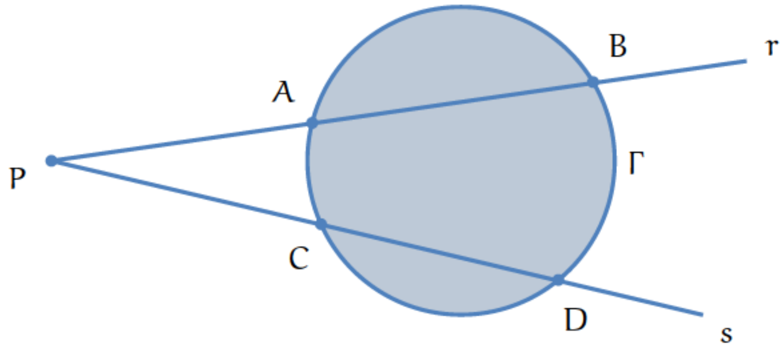
A reta t é uma reta exterior a Γ, visto que não a intersecta em nenhum ponto.

Para cada um desses tipos de retas há uma propriedade específica que precisaremos estudar aos poucos.

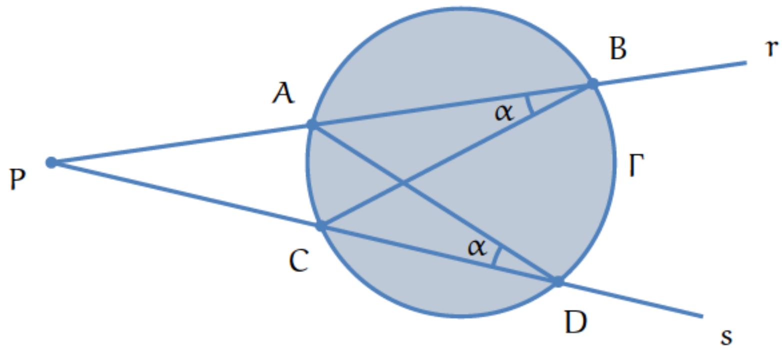
2.2– Potência de ponto

Ponto externo ao círculo

Observe a figura abaixo:

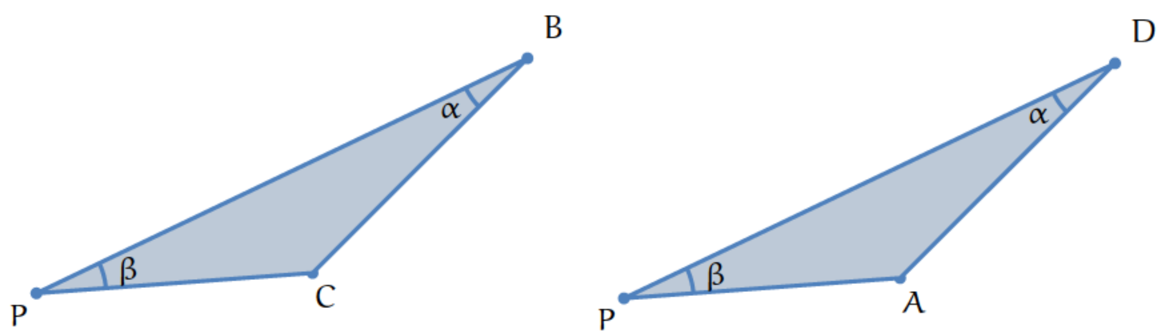


Agora, trace as cordas $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$:



Veja que os ângulos $\angle PBC$ e $\angle PDA$ são congruentes, pois são dois ângulos inscritos do mesmo arco $\widehat{AC}$. Se não conseguir entender isso, volte ao capítulo anterior e releia com atenção. Qualquer coisa, não deixe de utilizar os nossos fóruns de dúvidas. É de suma importância que você trate seu entendimento com valor.

Bom, prosseguindo: observe os triângulos BPC e DPA. Percebe que são semelhantes? São semelhantes porque têm os seus ângulos correspondentemente iguais (verifique!). Desenhemos ambos um ao lado do outro:



Por serem semelhantes, podemos afirmar que:

$$\frac{PB}{PC} \quad \frac{PD}{PA}$$

Efetuando a multiplicação em cruz, obtemos:

$$\boxed{PA \cdot PB \quad PC \cdot PD.}$$

A cada um desses produtos ($PA \cdot PB$ e $PC \cdot PD$) damos o nome de *potência do ponto* P *em relação ao círculo* (identificamos esse número como $\text{Pot}_\Gamma P$).

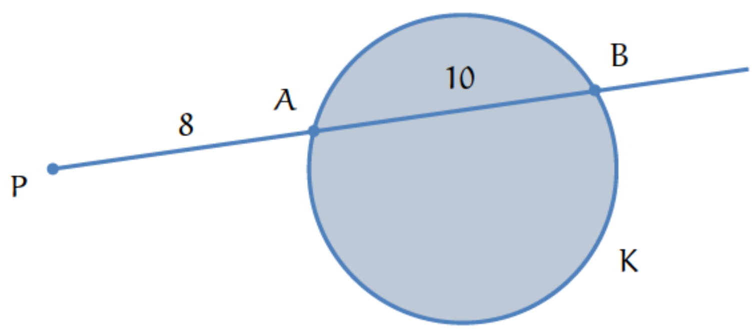
Vale então que:

$$\boxed{\text{Pot}_\Gamma P \quad PA \cdot PB.}$$

Vejamos alguns exemplos de aplicação.

QUESTÃO 5

Calcule a potência do ponto P em relação ao círculo K desenhado abaixo:



(a) 80
(b) 144
(c) 324
(d) 640

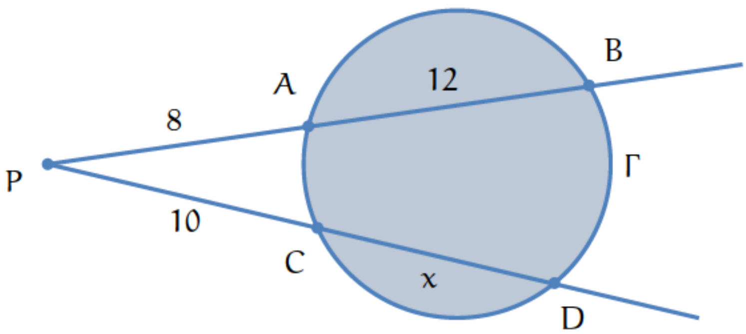
R: A potência de P pode ser calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathrm{Pot}_K P \quad & PA \cdot PB \\ & 8 \cdot (8+10) \\ & 8 \cdot 18 \\ & 144. \end{aligned}$$

Gabarito: B

QUESTÃO 6

Calcule x.



(a) 18
(b) 9,6
(c) 6
(d) 4

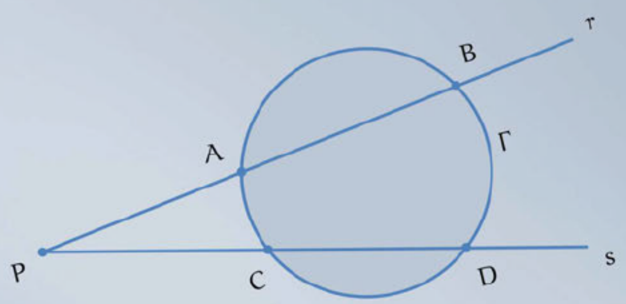
R: A potência do ponto P pode ser calculada sobre qualquer uma das retas. Podemos então fazer:

$$\begin{aligned} \mathrm{Pot}_\Gamma P \quad PC \cdot PD \quad & PA \cdot PB \\ 10 \cdot (10+x) \quad & 8 \cdot (8+12) \\ 100 + 10x \quad & 8 \cdot 20 \\ 100 + 10x \quad & 160 \\ 10x \quad & 60 \\ x \quad & 6. \end{aligned}$$

Gabarito: C

Relações métricas em círculos

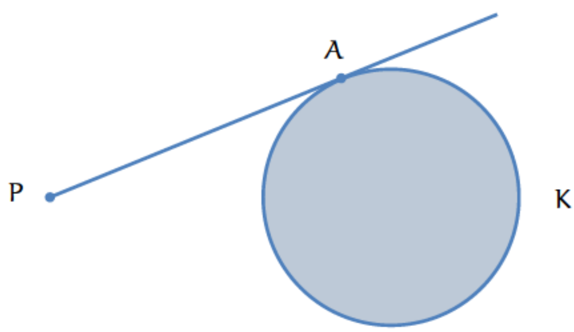
Retas secantes com P externo ao círculo:



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Acima vemos, então, o resumo dessa propriedade. Esta propriedade é bastante relevante e importante para você, estudante. Resolveremos bastante exercícios sobre isso, não se preocupe. Mas preciso que você tenha entendido a sua utilização. Não prossiga enquanto isso não estiver bem programado na sua cabeça. Beleza? Sigamos, então!

Existe um outro tipo de potência importante para calcularmos, que seria o caso em que a reta passa pelo ponto P, porém, tange o círculo, ao invés de secá-lo. Vejamos:



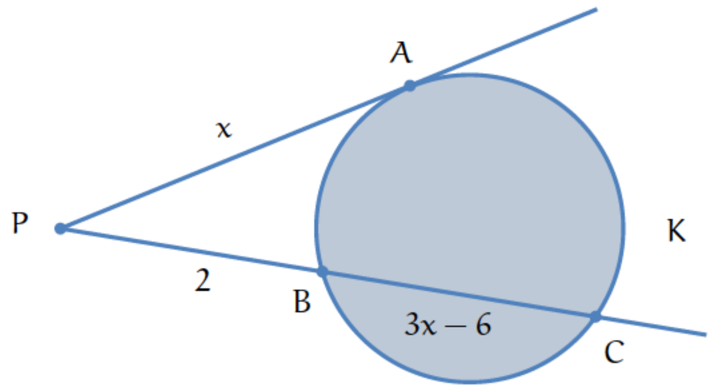
Nesse caso, calculamos a potência do ponto P em relação ao círculo é calculável pela seguinte expressão:

$$\boxed{\text{Pot}_K P \quad PA^2.}$$

Vejamos uma aplicação imediata dessa propriedade:

QUESTÃO 7

Calcule a soma dos valores de x que satisfazem as condições abaixo, considerando que PA e PC são tangentes e secantes respectivamente ao círculo K:



(a) 2
(b) 4
(c) 6
(d) 8

R: Calculemos a potência do ponto P em relação ao círculo:

$$\begin{aligned} \text{Pot}_K P \quad PA^2 &\quad PB \cdot PC \\ x^2 &\quad 2 \cdot (2 + 3x - 6) \\ x^2 &\quad 2 \cdot (3x - 4) \\ x^2 &\quad 6x - 8 \\ x^2 - 6x + 8 &\quad 0 \end{aligned}$$

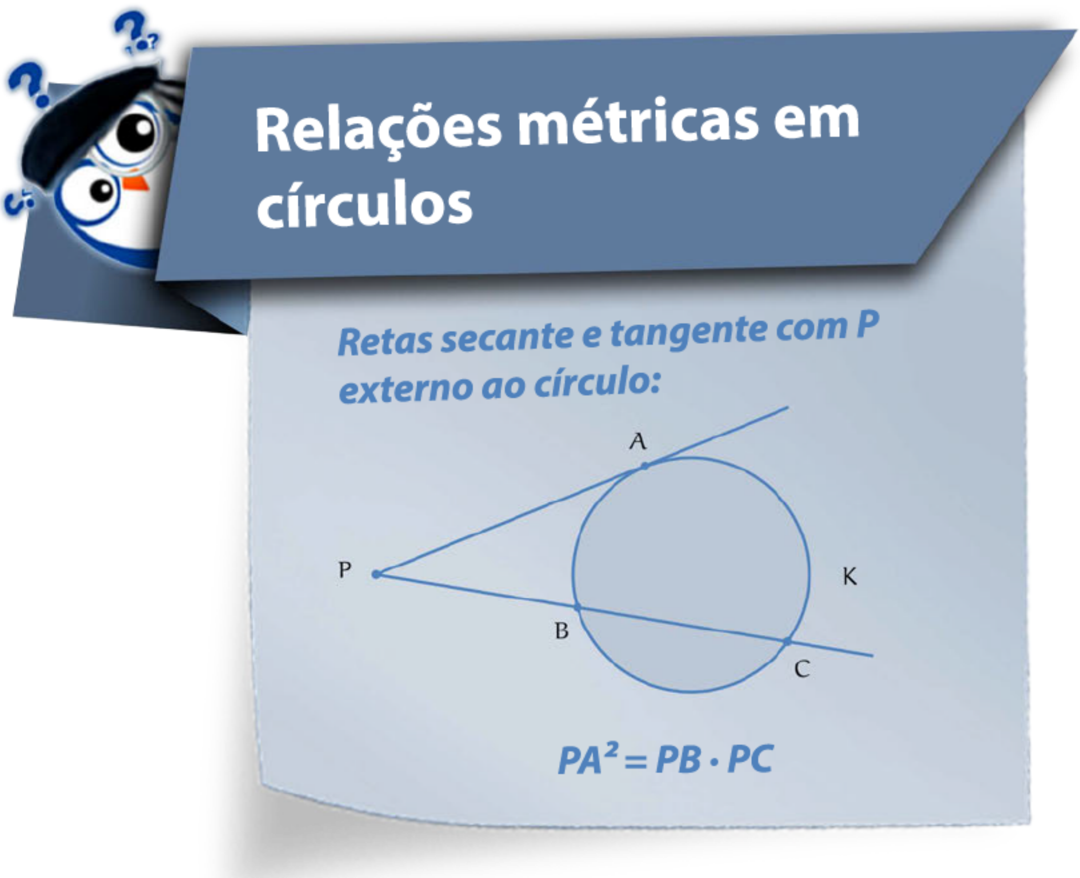
Por soma e produto encontramos as raízes 2 e 4.

Tome cuidado, porém, em dizer que $x \quad 2$ é uma possibilidade. Veja na figura que $BC \quad 3x - 6$; caso você substitua $x \quad 2$ nessa expressão:

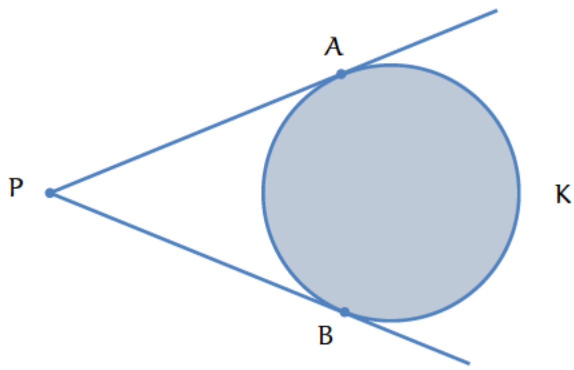
$$\begin{aligned} BC \quad & 3x - 6 \\ & 3 \cdot 2 - 6 \\ & 6 - 6 \\ & 0. \end{aligned}$$

Como o problema afirma que a reta PC é secante, não podemos ter $BC \quad 0$. Logo, há apenas uma solução: 4.

Gabarito: B

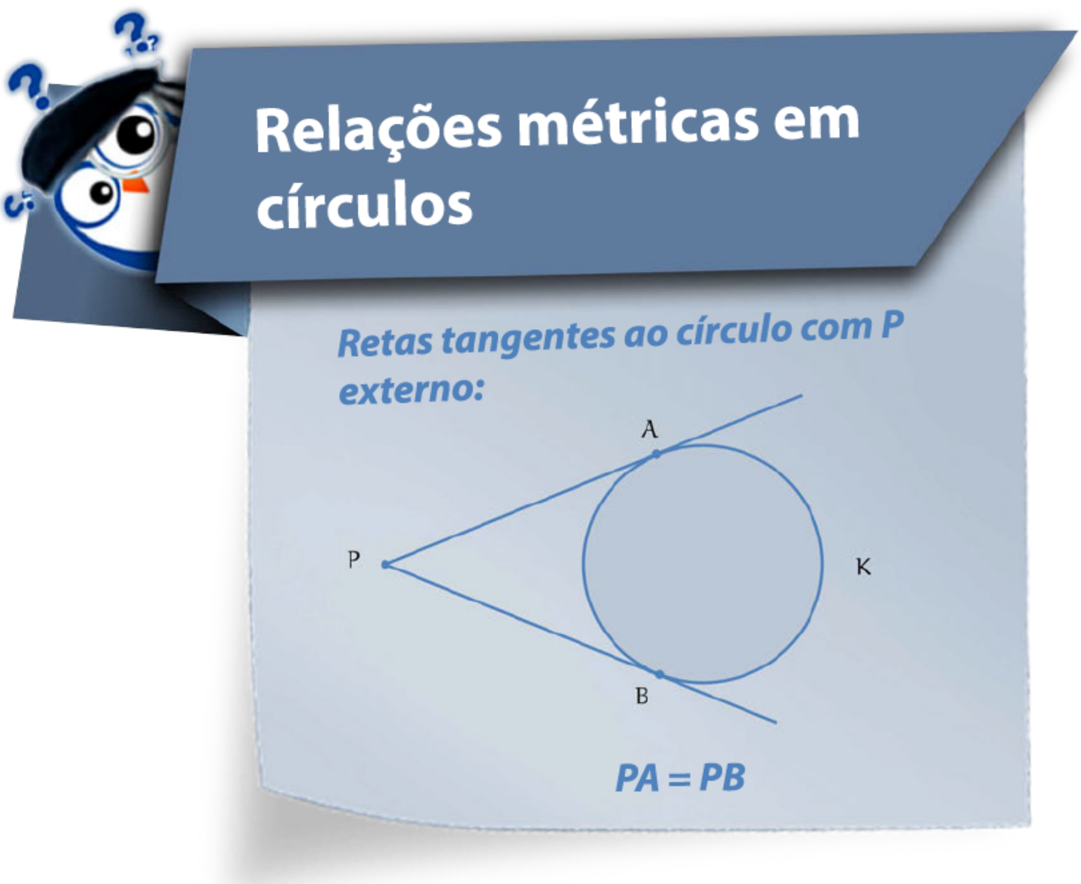


Já aprendemos então duas relações métricas relacionadas a potência de ponto. Vamos agora a mais uma conclusão métrica acerca de pontos externos. Observe a figura abaixo:



A potência do ponto P em relação ao círculo nos diz o seguinte:

$$\begin{aligned} Pot_K P \quad & PA^2 \quad PB^2 \\ & \sqrt{PA^2} \quad \sqrt{PB^2} \\ & PA \quad PB. \end{aligned}$$



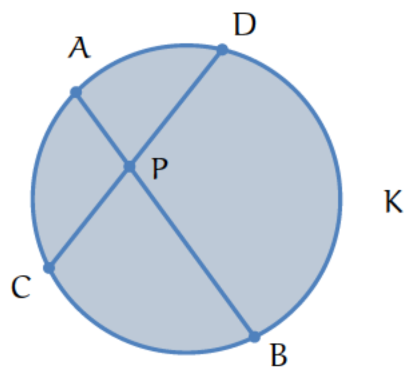
Essa é uma conclusão bastante importante.

As tangentes traçadas a um círculo a partir de um ponto externo a ele são congruentes.

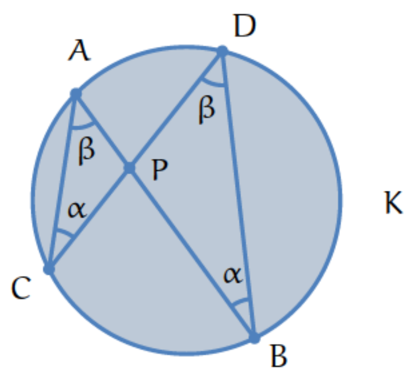
Isso mesmo, coruja. São essas três propriedades para quando o ponto é exterior. Existe mais uma para analisarmos, mas se trata da circunstância em que o ponto P é interno ao círculo. Essas propriedades métricas são largamente utilizadas nos mais diversos exercícios. Vamos lá, então? Vejamos então o que acontece quando duas cordas de um círculo se encontram em seu interior, do ponto de vista métrico. Sigamos!

Ponto interno ao círculo

Observe a figura abaixo:

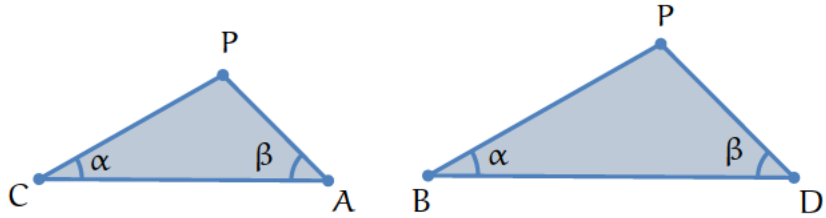


Temos nessa ilustração duas cordas concorrentes: AB e CD, ambas concorrendo em um ponto P. Trace agora as cordas AC e BD.



Temos que $\angle ACD \equiv \angle ABD$, visto que ambos os ângulos são ângulos inscritos do arco $\widehat{AD}$. Analogamente podemos concluir que $\angle CAB \equiv \angle CDB$ (inscritos do arco $\widehat{BC}$). Isso faz dos triângulos

ACP e DBP triângulos semelhantes, pois têm ângulos correspondentemente congruentes.



Como são semelhantes:

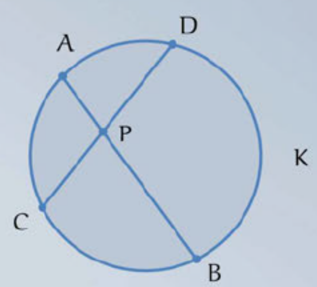
$$\frac{PA}{PC} \quad \frac{PD}{PB}$$

Multiplicando em cruz, obtemos:

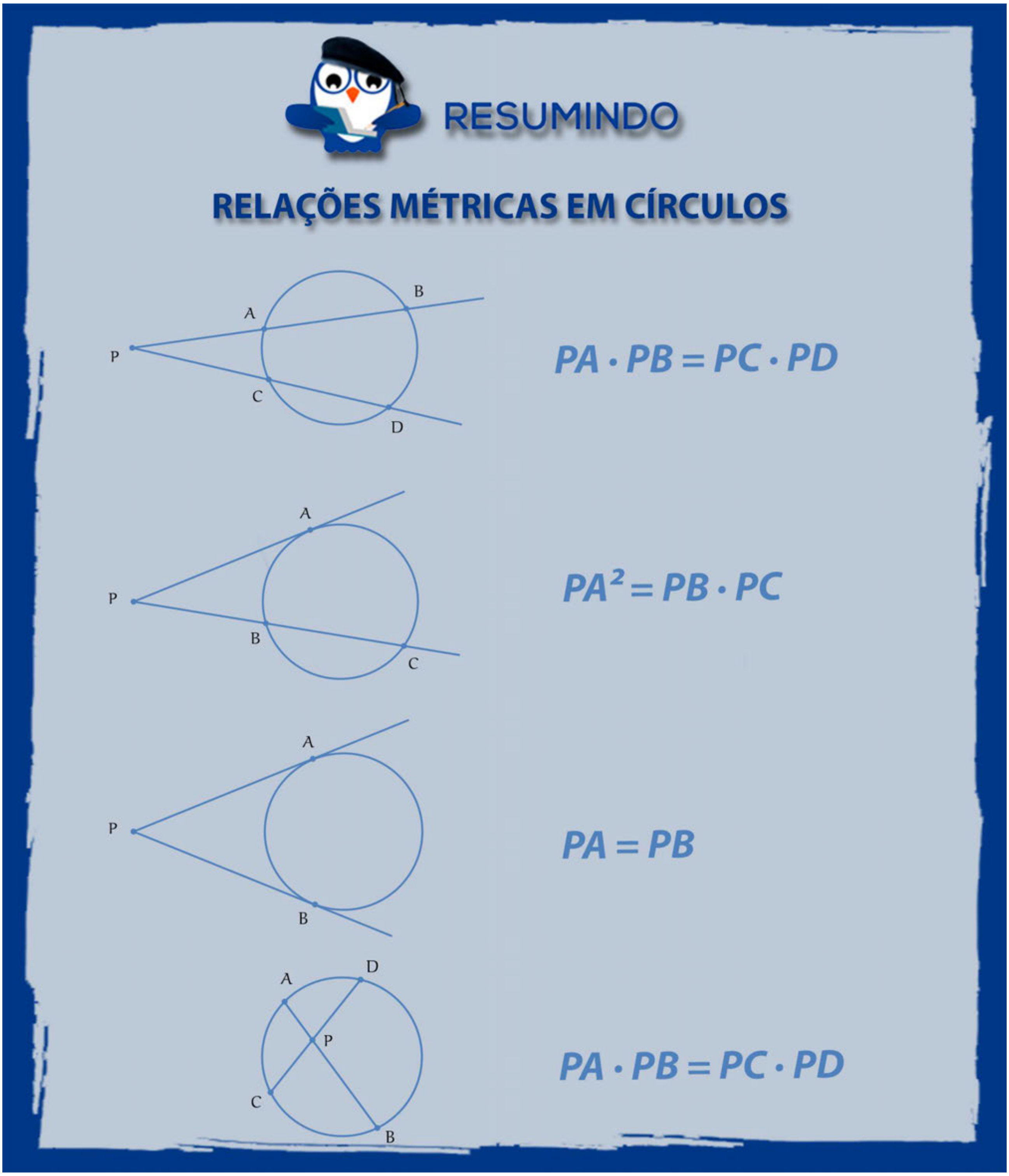
$$\boxed{PA \cdot PB \quad PC \cdot PD.}$$

Relações métricas em círculos

Cordas concorrentes (P interno):



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



Fiz o resumo acima para que você possa se organizar melhor quanto às propriedades métricas dos círculos, assunto que acabamos de finalizar.

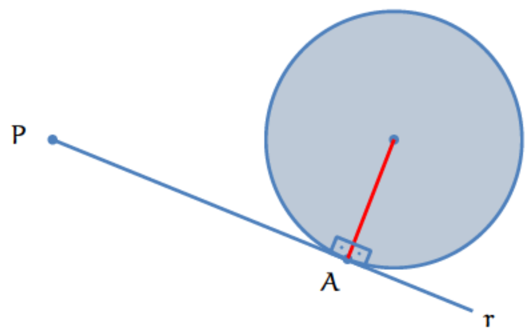
está vendo como o assunto é, de fato, extenso? Te aconselho a não ler esse tomo de conhecimento como se fosse um livro de histórias ou um romance. Exige-se que você vá fazendo seus próprios resumos à medida que formos avançando, e vá com calma. Não saia atropelando o conteúdo, acabará não se recordando do que acabou de ver. Só prossiga quando tiver a certeza de que o assunto está bem entendido, beleza? Sigamos!

2.3– Relações angulares

Você verá, agora, as mesmas figuras que se fizeram presentes na seção anterior. Só que agora, nosso interesse será discutir as medidas dos arcos, isto é, as grandezas angulares que essas figuras escondem. Demos uma olhada nessas propriedades.

Tangência

Considere uma reta r tangente a um círculo, como ilustra a figura:

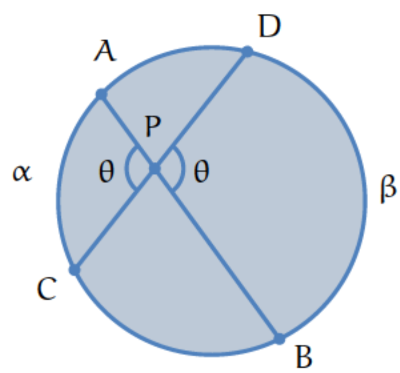


Quando traçamos um raio com extremidade no ponto de tangência, o raio será perpendicular à reta tangente.

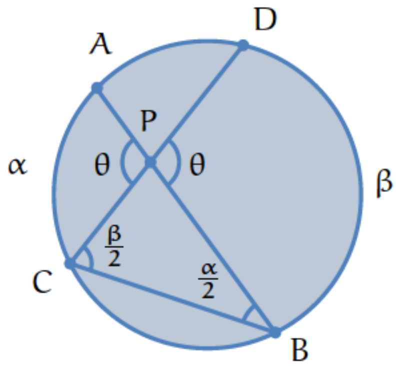
Vê que o raio vermelho é perpendicular à reta r? Pois é, isso sempre será verdadeiro (conseguimos provar isso utilizando congruência de triângulos).

Cordas concorrentes

Observe a figura abaixo, onde são conhecidas as medidas dos arcos $\widehat{AC}$ e $\widehat{BD}$.



Vamos lá fazer algumas conclusões acerca dessa figura. Primeiro, tracemos a corda $\overline{BC}$.



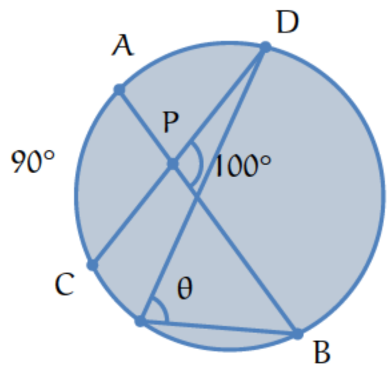
Veja que $\angle ABC$ é o ângulo inscrito do arco $\widehat{AC}$, assim como $\angle BCD$ é o inscrito de $\widehat{BD}$. Então medem respectivamente a metade desses arcos, isto é, $\frac{\alpha}{2}$ e $\frac{\beta}{2}$. Mas veja que θ é um ângulo externo do triângulo PBC. Como o ângulo externo mede exatamente a soma dos internos não-adjacentes (visto na nossa primeira aula, de fundamentos de geometria), temos que $\theta \quad \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$, ou seja:

$$\boxed{\theta \quad \frac{\alpha+\beta}{2}.}$$

Vejamos um exemplo de questão dessa específica propriedade.

QUESTÃO 8

Calcule a medida, em radianos, do ângulo θ.



(a) 50°
(b) 55°
(c) 110°
(d) 150°

R: Não sabemos a medida do arco $\widehat{BD}$, então, vamos calculá-lo:

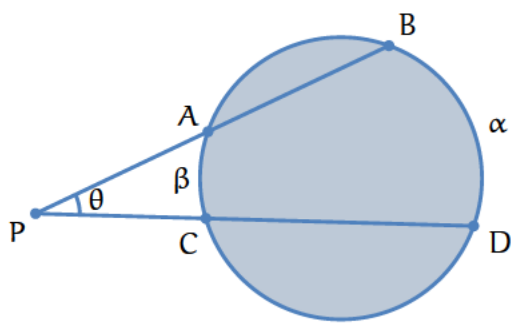
$$
\begin{aligned}
100^\circ &\quad \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{2} \\
100^\circ &\quad \frac{90^\circ + \overset{\frown}{BD}}{2} \\
200^\circ &\quad 90^\circ + \overset{\frown}{BD} \\
\overset{\frown}{BD} &\quad 200^\circ - 90^\circ \\
\overset{\frown}{BD} &\quad 110^\circ.
\end{aligned}
$$

Como θ é um ângulo inscrito do arco $\overset{\frown}{BD}$, temos que $\overset{\frown}{BD} \quad \frac{110^\circ}{2} \quad 55^\circ$.

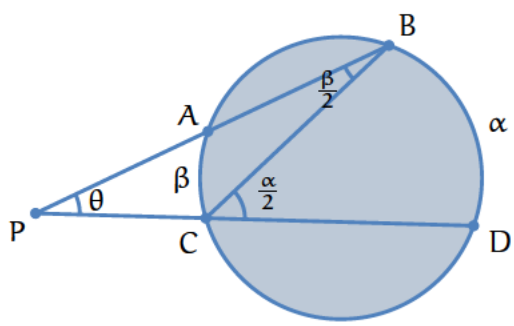
Gabarito: B

Retas secantes

Observemos o nosso próximo caso:



Queremos encontrar θ em função de α e β. Vamos lá então. Tracemos a corda $\overline{BC}$.



Veja que $\frac{\alpha}{2}$ é um ângulo externo do triângulo PBC; logo, será igual à soma dos ângulos internos não-adjacentes, isto é:

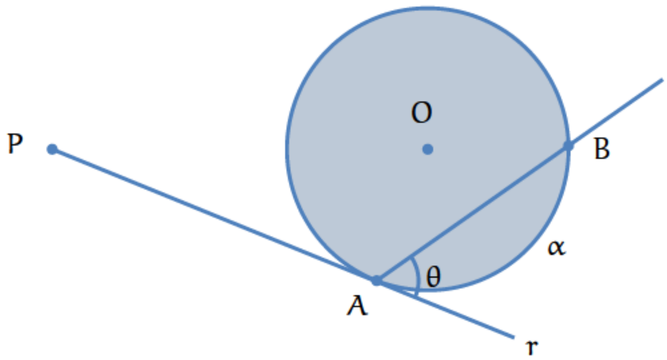
$$\theta + \frac{\beta}{2} \quad \frac{\alpha}{2}$$
$$\theta \quad \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

Isso nos diz então que:

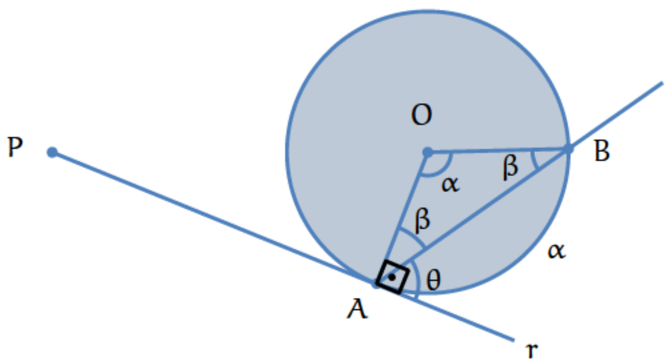
$$\boxed{\theta \quad \frac{\alpha - \beta}{2}.}$$

Ângulo semi-inscrito

Aprendemos no capítulo anterior sobre o que vem a ser um ângulo inscrito. Aprenderemos agora sobre o que vem a ser um ângulo semi-inscrito. Observe a figura a seguir:



Veja que a reta r tange o círculo. Logo, o ponto A pertence a esse círculo, então o ângulo θ estaria "inscrito" no círculo. Mas acontece que uma parte desse ângulo está para fora do círculo, logo, trata-se de um ângulo semi-inscrito. Dê uma olhada na resolução a seguir, onde tentamos relacionar α e θ:



Veja que:

$$\theta + \beta \quad 90^\circ$$
$$\beta \quad 90^\circ - \theta.$$

Como $2\beta + \alpha \quad 180^\circ$, temos:

$$\begin{aligned} 2\beta + \alpha &\quad 180^\circ \\ 2(90^\circ - \theta) + \alpha &\quad 180^\circ \\ 180^\circ - 2\theta + \alpha &\quad 180^\circ \\ \alpha &\quad 2\theta. \end{aligned}$$

Então, o arco mede exatamente o dobro do ângulo semi-inscrito, ou:

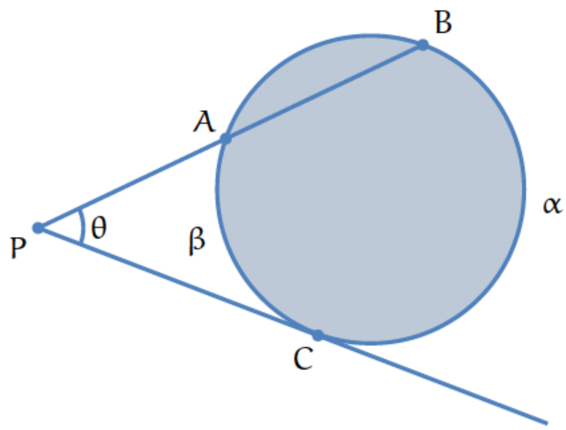
O ângulo semi-inscrito mede a metade do arco que compreende.

Poderíamos ainda, escrever algebricamente que:

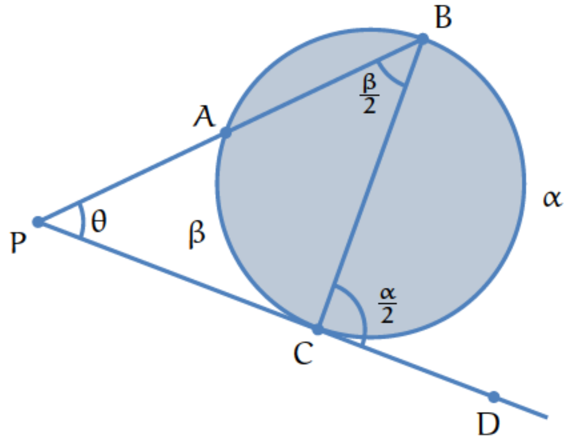
$$\boxed{\theta \quad \frac{\alpha}{2}.}$$

Reta secante e reta tangente

Vamos então para o próximo caso. Observemos a figura a seguir:



Tracemos a corda $\overline{BC}$:



Veja que $\angle PBC$ é ângulo inscrito do arco $\widehat{AC}$; já o ângulo $\angle BCD$ é um ângulo semi-inscrito do arco $\widehat{BC}$. Logo, medem a metade das medidas dos seus arcos. Daí, como $\frac{\alpha}{2}$ é um ângulo externo do triângulo BPC, podemos afirmar que ele é igual à soma dos ângulos internos não-adjacentes:

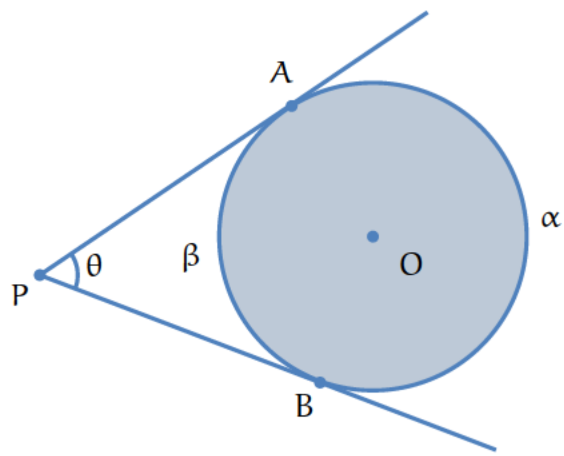
$$\theta + \frac{\beta}{2} \quad \frac{\alpha}{2}$$
$$\theta \quad \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

Isso nos diz então que:

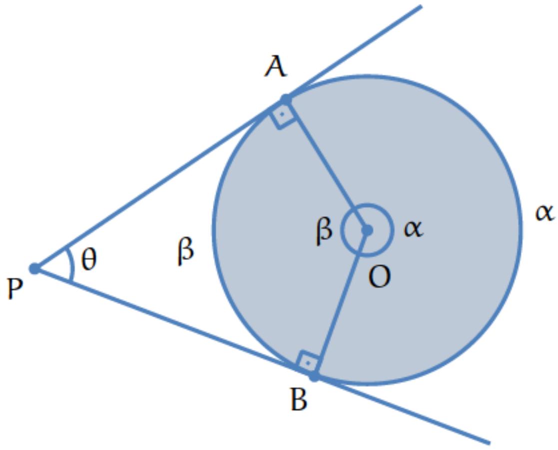
$$\boxed{\theta \quad \frac{\alpha - \beta}{2}.}$$

Retas tangentes

Vamos ao último caso, então.



Tracemos os dois raios que contêm os pontos de tangência:



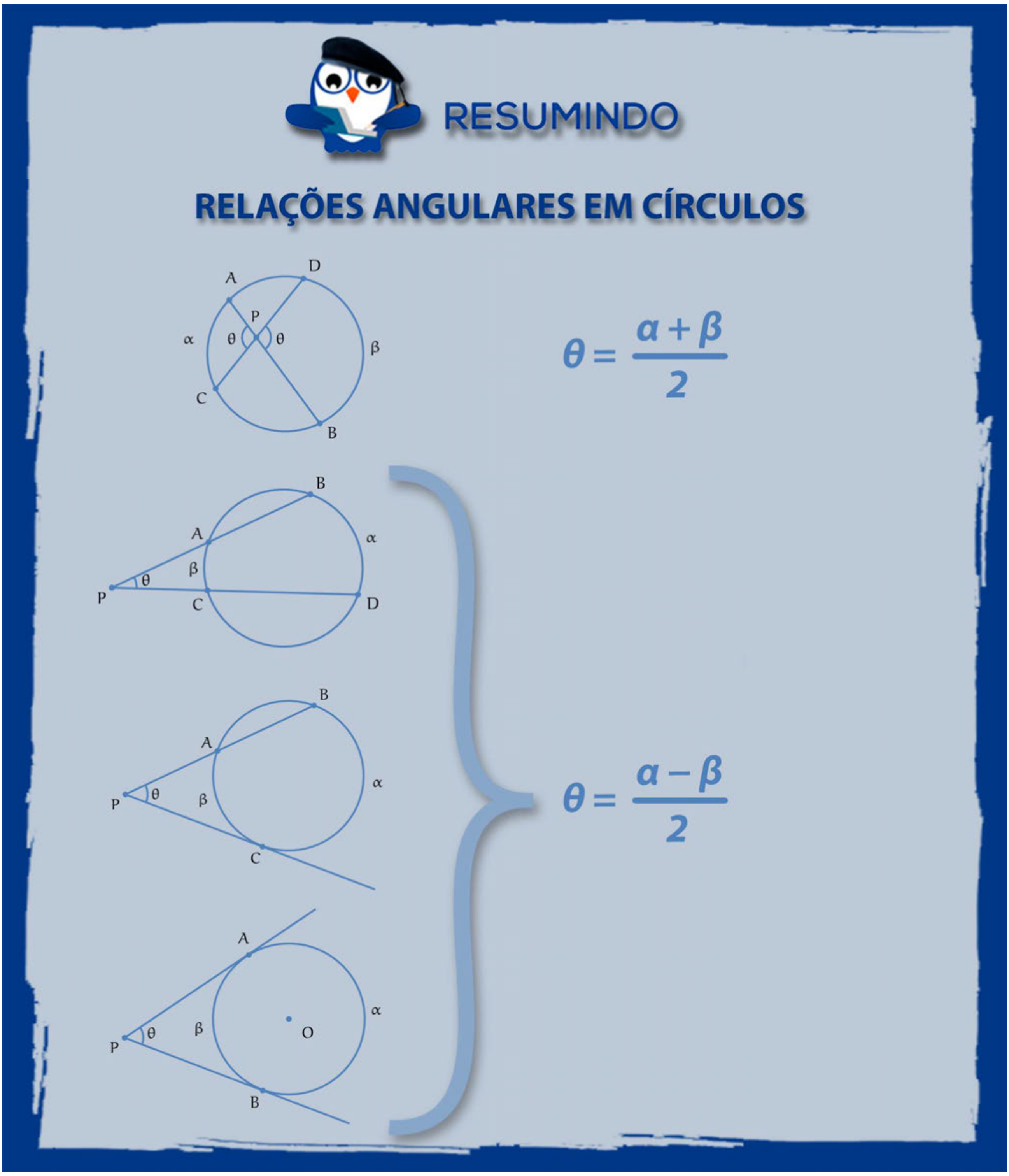
Veja que $\alpha + \beta \quad 360^\circ$. Veja também que $\theta + \beta \quad 180^\circ$, então:

$$
\begin{aligned}
\theta + \beta &\quad 180^\circ \\
2\theta + 2\beta &\quad 360^\circ \\
2\theta + 2\beta &\quad \alpha + \beta \\
2\theta &\quad \alpha + \beta - 2\beta \\
2\theta &\quad \alpha - \beta
\end{aligned}
$$

E daí, podemos concluir que:

$$\boxed{\theta \quad \frac{\alpha - \beta}{2}.}$$

Pois é, coruja. Fácil demais, não? Quando o ponto é interno ao círculo, a fórmula será $\frac{\alpha + \beta}{2}$. Quando o ponto é externo, teremos sempre $\frac{\alpha - \beta}{2}$, independente da circunstância. essas fórmulas, lembrando, relacionam as medidas de arcos, isto é, as medidas de ângulos centrais. Não se esqueça de voltar a esse conteúdo, caso se faça necessário, lá no início de nosso material. Beleza, jovem? Podemos prosseguir?



E segue, claro, mais um resumo (dessa vez quanto às relações angulares) para você poder se organizar nos seus estudos, jovem!

QUESTÕES PARA MEMORIZAÇÃO

Jovem, faremos dessa vez um teste aqui. Em uma semana, esse livro eletrônico estará com as suas questões resolvidas. No final desse livro, você encontrará o gabarito dessas questões. Tente fazê-las, primeiro, depois nos preocuparemos com a resolução. Bons estudos!

(EEAR-2001) QUESTÃO 9

De um ponto externo a uma circunferência, traçamos um segmento secante de 32 cm que determina uma corda de $27,5$ cm. O segmento tangente traçado do mesmo ponto externo mede, em cm:

(a) $4,5$
(b) 12
(c) $14,4$
(d) $2\sqrt{55}$

(EEAR-2001) QUESTÃO 10

Duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de uma circunferência cortam-se num ponto M. Sabendo que $AB \quad 21$ cm, $MB \quad 12$ cm e $CM \quad 3 \cdot DM$, então CD, em cm, mede:

(a) 23
(b) 24
(c) 25
(d) 26

(EEAR-2001) QUESTÃO 11

Num círculo de centro C e raio R, tomam-se dois pontos A e B sobre a circunferência do círculo. Sendo o ângulo $\alpha \quad A\hat{C}B$ e sabendo-se que o arco $\widehat{AB}$ tem comprimento R, então pode-se afirmar:

(a) $\alpha \quad 45^\circ$

(b) $\alpha \quad 90^\circ$
(c) $45^\circ < \alpha < 50^\circ$
(d) $55^\circ < \alpha < 60^\circ$

(EEAR-2001) QUESTÃO 12

Sejam P, Q e R pontos de uma circunferência de centro O, tais que P e Q estejam do mesmo lado em relação ao diâmetro que passa por R. Sabendo-se que $\text{med}(O\hat{R}P) \quad 10^\circ$ e $\text{med}(R\hat{O}Q) \quad 80^\circ$, tem-se que o ângulo $P\hat{Q}O$ mede:

(a) 20°
(b) 40°
(c) 50°
(d) 60°

(EEAR-2002) QUESTÃO 13

Sejam: $\overline{AB}$ o diâmetro de uma circunferência de centro O; $\overline{AR}$ uma corda, tal que $B\hat{A}R \quad 20^\circ$; t, paralela a $\overline{AR}$, uma reta tangente à circunferência, em T. Sabendo que T e R são pontos da mesma semicircunferência em relação a $\overline{AB}$, a medida, em graus, do ângulo agudo formado pela reta t e pela corda $\overline{AT}$ é igual a

(a) 25
(b) 35
(c) 50
(d) 70

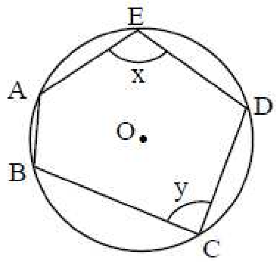
(EEAR-2002) QUESTÃO 14

Traçam-se duas cordas de uma mesma extremidade de um diâmetro de um círculo. Uma delas mede 9cm, e sua projeção sobre o diâmetro mede $5,4$cm. O comprimento da outra corda, cuja projeção no diâmetro é de $9,6$cm mede, em cm,

(a) 10
(b) 12
(c) 14
(d) 15

(EEAR-2002) QUESTÃO 15

Seja o pentágono $ABCDE$ da figura, inscrito numa circunferência de centro O.



Se o ângulo $A\hat{O}B$ 50°, então $x + y$ vale, em graus

(a) 216
(b) 205
(c) 180
(d) 105

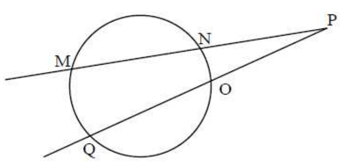
(EEAR-2002) QUESTÃO 16

Seja AB o diâmetro de uma circunferência. Por A traça-se uma tangente à circunferência, que encontra o prolongamento de uma corda MN paralela ao diâmetro, num ponto P. Sabendo que PM mede 9cm (M está mais próximo de P do que N) e que o raio do círculo vale $12,5$cm, então a distância do centro à corda MN, em cm, mede

(a) 8
(b) 10
(c) 12
(d) 15

(EEAR-2002) QUESTÃO 17

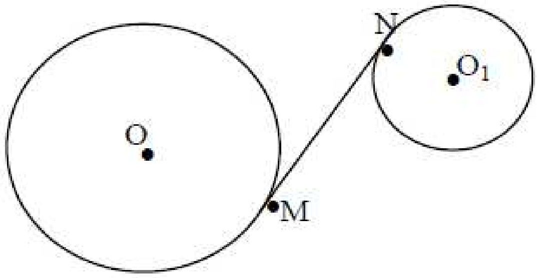
Na figura, sendo MN $x$cm, NP 10cm, PO 5cm e OQ $(4x + 1)$cm, então o valor do segmento de reta $\overline{PQ}$, em cm, é



(a) 29.
(b) 35.
(c) 12.
(d) 34.

(EEAR-2002) QUESTÃO 18

Na figura, M e N são pontos de tangência.



Sendo os raios, respectivamente, 14 cm e 7 cm e a distância dos centros OO_1 24 cm, então o segmento MN, em cm, mede

(a) $\sqrt{527}$
(b) $\sqrt{380}$
(c) $3\sqrt{15}$
(d) 12

(EEAR-2002) QUESTÃO 19

A razão entre os comprimentos das circunferências circunscrita a um quadrado e inscrita no mesmo quadrado é

(a) 2
(b) $\sqrt{2}$
(c) $3\sqrt{2}$
(d) $2\sqrt{2}$

(EEAR-2003) QUESTÃO 20

Se em uma circunferência uma corda mede $16\sqrt{2}$ cm e dista $6\sqrt{2}$ cm do centro, então a medida do raio dessa circunferência, em cm, é

(a) $12\sqrt{2}$
(b) $10\sqrt{2}$
(c) $8\sqrt{2}$
(d) $6\sqrt{2}$

(EEAR-2003) QUESTÃO 21

Em uma circunferência estão inscritos um triângulo eqüilátero e um hexágono regular. O apótema do triângulo somado com o apótema do hexágono dá $12(\sqrt{3}+1)$ cm. O lado do triângulo, em cm, mede

(a) $12\sqrt{3}$
(b) $16\sqrt{3}$
(c) $20\sqrt{3}$
(d) $24\sqrt{3}$

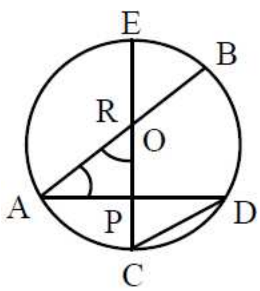
(EEAR-2003) QUESTÃO 22

Do ponto P, situado a 10 cm do centro O de uma circunferência de raio igual a 8 cm, traça-se uma secante PB passando por A tal que PA AB, sendo A e B pontos da circunferência. A medida de PB, em cm, é

(a) $3\sqrt{2}$
(b) $6\sqrt{2}$
(c) 8
(d) 6

(EEAR-2003) QUESTÃO 23

Na figura, as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelas.

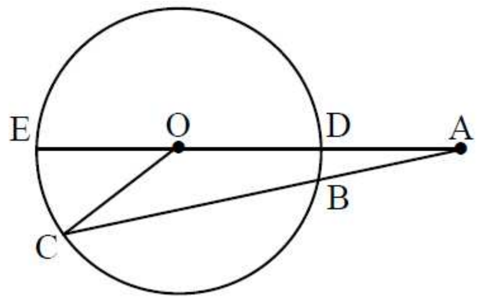


$\overline{EC}$ é um diâmetro e P é o ponto médio da corda $\overline{AD}$. As medidas, em graus, dos ângulos $A\hat{R}C$ e $P\hat{A}R$ são, respectivamente, $4x-14^\circ$ e $5x-13^\circ$. As medidas dos ângulos do triângulo PCD são

(a) $42^\circ, 57^\circ, 81^\circ$
(b) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$
(c) $46^\circ, 45^\circ, 90^\circ$
(d) $52^\circ, 38^\circ, 90^\circ$

(EEAR-2003) QUESTÃO 24

Na figura abaixo, $\overline{AB}\quad 8\,\text{cm}$, $\overline{BC}\quad 10\,\text{cm}$, $\overline{AD}\quad 4\,\text{cm}$ e o ponto O é o centro da circunferência.

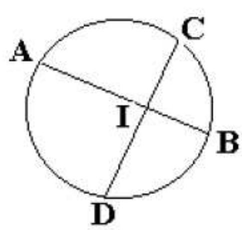


O perímetro do triângulo AOC é, em cm,

(a) 45
(b) 48
(c) 50
(d) 54

(EEAR-2003) QUESTÃO 25

Na figura, as cordas são dadas em cm.



Se $AI\quad 4x+1$, $IB\quad x$, $DI\quad x+1$ e $IC\quad 3x$, então a medida da corda $\overline{AB}$ é, em cm,

(a) 9
(b) 10
(c) 11
(d) 19

(EEAR-2003) QUESTÃO 26

Em um triângulo ABC, a bissetriz do ângulo A encontra em D, e a circunferência circunscrita, em E. Sendo AE 9 cm e DE 4 cm, então a medida $\overline{EB}$, em cm, é

(a) 6
(b) 5
(c) $2\sqrt{5}$
(d) $3\sqrt{2}$

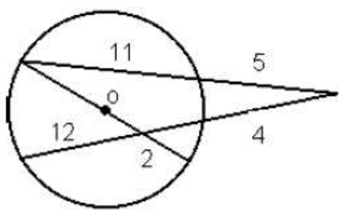
(EEAR-2003) QUESTÃO 27

Um arco mede $0,105$ rad. Sua medida em graus é, aproximadamente, igual a

(a) 5
(b) 6
(c) 50
(d) 60

(EEAR-2004) QUESTÃO 28

Observando-se a figura e considerando-se que as medidas são dadas em cm, pode-se afirmar que a medida, em cm, do raio da circunferência de centro O é



(a) 11.
(b) 12.
(c) 13.
(d) 14.

(EEAR-2004) QUESTÃO 29

A medida, em m, do apótema do hexágono regular inscrito numa circunferência cujo raio mede $4\sqrt{2}$ m é

(a) $4\sqrt{3}$.
(b) $2\sqrt{2}$.
(c) $4\sqrt{6}$.
(d) $2\sqrt{6}$.

(EEAR-2004) QUESTÃO 30

Sobre uma circunferência, num mesmo sentido de percurso, marcam-se os arcos $\overset{\frown}{MN} \quad 80^\circ$, $\overset{\frown}{NP} \quad 110^\circ$ e $\overset{\frown}{PQ} \quad 120^\circ$. O maior dos ângulos formados pelas diagonais do quadrilátero $MNPQ$ mede

(a) 10°.
(b) 105°.
(c) 100°.
(d) 80°.

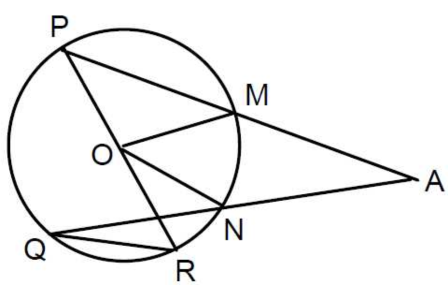
(EEAR-2004) QUESTÃO 31

Em um triângulo equilátero de $12\sqrt{3}$m de perímetro, a soma das medidas dos raios das circunferências inscrita e circunscrita a esse triângulo, em m, é

(a) 5.
(b) 6.
(c) 7.
(d) 8.

(EEAR-2004) QUESTÃO 32

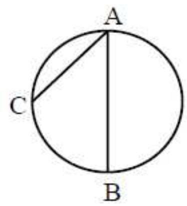
Na figura, O é o centro da circunferência, $M\hat{O}N \quad 62^\circ$, e $P\hat{R}Q \quad 65^\circ$.



O ângulo $M\hat{A}N$ mede

(a) $34°$.
(b) $36°$.
(c) $38°$.
(d) $40°$.

(EEAR-2005) QUESTÃO 33



Na figura, $\overline{AB}$ é diâmetro. Se o arco agudo AC mede $70°$, a medida do ângulo $C\hat{A}B$ é

(a) $50°$.
(b) $55°$.
(c) $60°$.
(d) $65°$.

(EEAR-2005) QUESTÃO 34

Por um ponto P, distante 18cm do centro de uma circunferência de raio 12cm, conduz-se um “segmento secante” que determina na circunferência uma corda de 8cm. A medida da parte exterior desse segmento, em cm, é

(a) 18.
(b) 10.
(c) 8.
(d) 6.

(EEAR-2005) QUESTÃO 35

Num triângulo ABC, $BC \quad 10$cm e $A\hat{B}C \quad 60°$. Se esse triângulo está inscrito numa semicircunferência e $\overline{BC}$ é seu menor lado, então o raio dessa semicircunferência mede, em cm,

(a) 5.
(b) 10.

(c) $10\sqrt{2}$.
(d) $10\sqrt{3}$.

(EEAR-2006) QUESTÃO 36

A razão entre as medidas dos apótemas do quadrado inscrito e do quadrado circunscrito numa circunferência de raio R é

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(c) 2
(d) $2\sqrt{3}$

(EEAR-2006) QUESTÃO 37

Um trapézio retângulo está circunscrito a uma circunferência. Se as bases desse trapézio medem 10cm e 15cm, e o lado oblíquo às bases mede 13cm, então o raio da circunferência, em cm, mede

(a) $4,5$.
(b) 5.
(c) $5,5$.
(d) 6.

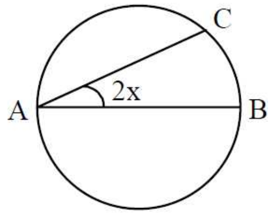
(EEAR-2006) QUESTÃO 38

Um hexágono regular $ABCDEF$, de $30\sqrt{3}$cm de perímetro, está inscrito em um círculo de raio R. A medida de sua diagonal $\overline{AC}$, em cm, é

(a) $5\sqrt{3}$
(b) 5
(c) $15\sqrt{3}$
(d) 15

(EEAR-2007) QUESTÃO 39

Na figura, $\overline{AB}$ é o diâmetro da circunferência e o arco AC mede $100°$.

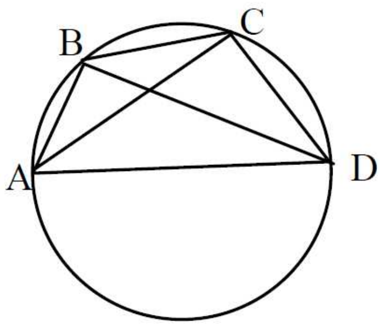


O valor de x é

(a) $20°$.
(b) $35°$.
(c) $45°$.
(d) $50°$.

(EEAR-2007) QUESTÃO 40

Na figura, $\overline{AD}$ é o diâmetro da circunferência, $C\hat{A}D$ mede $35°$ e $B\hat{D}C$, $25°$.

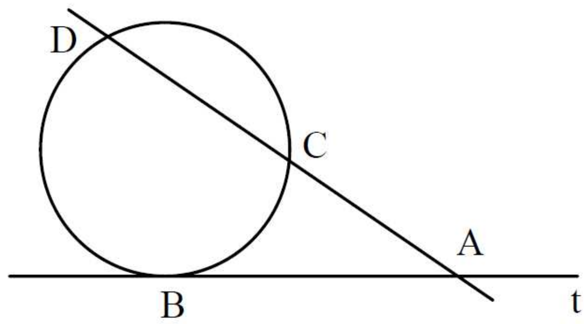


A medida de $A\hat{C}B$ é

(a) $30°$.
(b) $35°$.
(c) $40°$.
(d) $45°$.

(EEAR-2007) QUESTÃO 41

Na figura, t é tangente à circunferência em B.



Se AC 8cm e CD 12cm, então a medida de AB, em cm, é

(a) $4\sqrt{10}$.
(b) $2\sqrt{5}$.
(c) $\sqrt{10}$.
(d) $\sqrt{5}$.

(EEAR-2007) QUESTÃO 42

Um triângulo, inscrito numa circunferência de 10cm de raio, determina nesta três arcos, cujas medidas são $90°$, $120°$ e $150°$. A soma das medidas dos menores lados desse triângulo, em cm, é

(a) $10\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$
(b) $10\left(1+\sqrt{3}\right)$
(c) $5\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$
(d) $5\left(1+\sqrt{3}\right)$

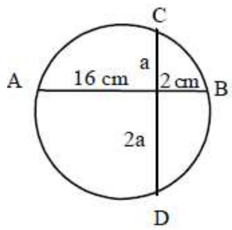
(EEAR-2008) QUESTÃO 43

Dada uma circunferência de diâmetro a, o comprimento de um arco, cujo ângulo central correspondente é $30°$, é

(a) $\frac{\pi a}{2}$
(b) $\frac{\pi a}{4}$
(c) $\frac{\pi a}{10}$
(d) $\frac{\pi a}{12}$

(EEAR-2008) QUESTÃO 44

Seja a circunferência e duas de suas cordas, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

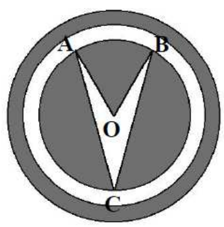


A medida de $\overline{CD}$, em cm, é

(a) 10.
(b) 12.
(c) 14.
(d) 16.

(EEAR-2009) QUESTÃO 45

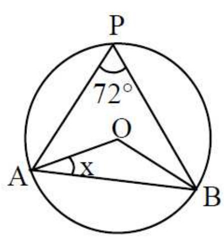
No logotipo, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ são raios da menor das três circunferências concêntricas. A região acinzentada desse logotipo é composta de



(a) dois setores circulares, duas coroas circulares e dois segmentos circulares.
(b) um setor circular, uma coroa circular e dois segmentos circulares.
(c) um setor circular, duas coroas circulares e um segmento circular.
(d) dois setores circulares, uma coroa circular e um segmento circular.

(EEAR-2009) QUESTÃO 46

Na figura, O é o centro da circunferência.



O valor de x é

(a) $18°$.
(b) $20°$.
(c) $22°$.
(d) $24°$.

(EEAR-2009) QUESTÃO 47

Sejam uma circunferência de centro O e um ponto A exterior a ela. Considere $\overline{AT}$ um segmento tangente à circunferência, em T. Se o raio da circunferência mede 4 cm e AT $\quad 8\sqrt{2}$cm, então a medida de $\overline{AO}$, em cm, é

(a) 10.
(b) 12.
(c) 13.
(d) 15.

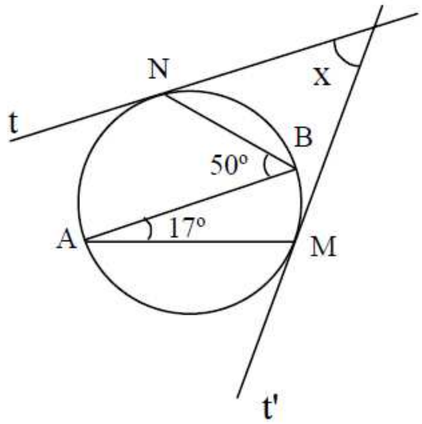
(EEAR-2010) QUESTÃO 48

Numa circunferência, a soma das medidas de dois arcos é $315°$. Se um desses arcos mede $\frac{11\pi}{12}$ rad, a medida do outro é

(a) $150°$.
(b) $125°$.
(c) $100°$.
(d) $75°$.

(EEAR-2010) QUESTÃO 49

Sejam $\overline{AB}$ o diâmetro da circunferência, e as retas t e t' tangentes a ela nos pontos N e M, respectivamente.

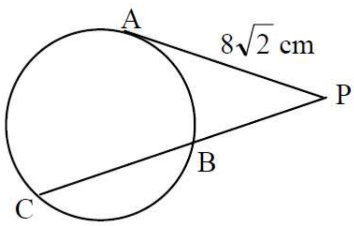


O valor de x é

(a) $66°$.
(b) $60°$.
(c) $55°$.
(d) $50°$.

(EEAR-2010) QUESTÃO 50

Na figura, $\overline{PA}$ é tangente à circunferência em A, e B é ponto médio de $\overline{PC}$.



A medida de $\overline{PC}$, em cm, é

(a) $12\sqrt{2}$.
(b) $14\sqrt{2}$.
(c) 16.
(d) 20.

(EEAR-2010) QUESTÃO 51

Um ângulo central α determina, em uma circunferência de raio r, um arco de comprimento ℓ $\frac{2\pi r}{3}$. A medida desse ângulo é:

(a) 150°
(b) 120°
(c) 100°
(d) 80°

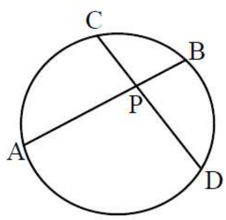
(EEAR-2011) QUESTÃO 52

Um quadrado e um triângulo equilátero estão inscritos em uma circunferência de raio R. A razão entre as medidas dos apótemas do quadrado e do triângulo é

(a) $\sqrt{2}$
(b) $\sqrt{3}$
(c) $2\sqrt{3}$
(d) $3\sqrt{2}$

(EEAR-2011) QUESTÃO 53

Na figura, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são cordas tais que $AP \quad 2PB$, $CD \quad 10\,cm$, e $\frac{CP}{2} \quad \frac{PD}{3}$.

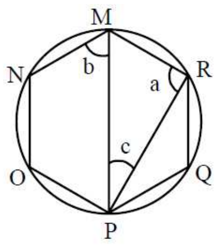


A medida de $\overline{AB}$, em cm, é

(a) $6\sqrt{3}$
(b) $7\sqrt{3}$
(c) $8\sqrt{2}$
(d) $9\sqrt{2}$

(EEAR-2011) QUESTÃO 54

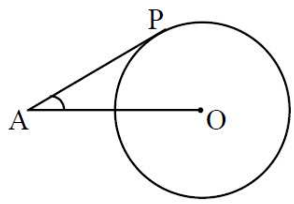
Se $MNOPQR$ é um hexágono regular inscrito na circunferência, então $a + b - c$ é igual a



(a) 150°.
(b) 120°.
(c) 100°.
(d) 90°.

(EEAR-2011) QUESTÃO 55

Na figura, O é o centro da circunferência e $\overline{PA}$ é tangente a ela, em P.



Se $P\hat{A}O \quad 30^\circ$ e $OA \quad 12\sqrt{3}$ cm, então a medida do raio da circunferência, em cm, é

(a) $8\sqrt{3}$
(b) $8\sqrt{2}$
(c) $6\sqrt{3}$
(d) $6\sqrt{2}$

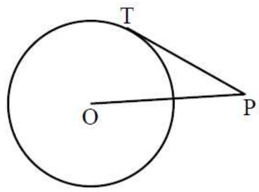
(EEAR-2011) QUESTÃO 56

Para dar 10 voltas completas em volta de um jardim circular, uma pessoa percorrerá 2198 m. Considerando $\pi \quad 3,14$, a medida, em metros, do diâmetro desse jardim é

(a) 70.
(b) 65.
(c) 58.
(d) 52.

(EEAR-2012) QUESTÃO 57

Na figura, $\overline{PT}$ é tangente, em T, à circunferência de centro O e raio 6m.

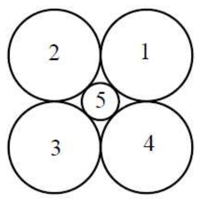


Sabendo que P está situado a 10m de O, então PT ____ m.

(a) 5
(b) 6
(c) 7
(d) 8

(EEAR-2012) QUESTÃO 58

Na figura, as circunferências 1, 2, 3 e 4 são congruentes entre si e cada uma delas tangencia duas das outras.

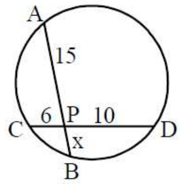


Se a circunferência 5 tem apenas um ponto em comum com cada uma das outras quatro, é correto afirmar que

(a) a circunferência 5 é secante às outras quatro circunferências.
(b) a circunferência 5 é tangente exterior às outras quatro circunferências.
(c) todas as circunferências são tangentes interiores entre si.
(d) todas as circunferências são tangentes exteriores entre si.

(EEAR-2013) QUESTÃO 59

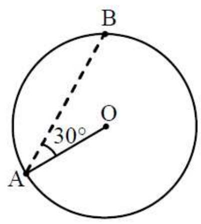
Utilizando a Potência do Ponto P em relação à circunferência dada, calcula-se que o valor de x é



(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4

(EEAR-2015) QUESTÃO 60

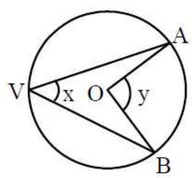
O ponto O é o centro da circunferência da figura, que tem 3m de raio e passa pelo ponto B. Se o segmento $\overline{AB}$ forma um ângulo de 30° com o raio $\overline{OA}$, então a medida de $\overline{AB}$, em m, é



(a) $6\sqrt{3}$
(b) $3\sqrt{3}$
(c) $6\sqrt{2}$
(d) $3\sqrt{2}$

(EEAR-2015) QUESTÃO 61

Na circunferência da figura, O é o seu centro e V, A e B são três de seus pontos.



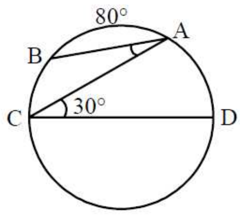
Se x e y são, respectivamente, as medidas dos ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{V}A$, então sempre é correto afirmar que

(a) $x \quad 2y$.

(b) $y \quad 2x$.
(c) $x + y \quad 90^\circ$.
(d) $x - y \quad 90^\circ$.

(EEAR-2015) QUESTÃO 62

Na figura, A e B são pontos da circunferência e $\overline{CD}$ é seu diâmetro.

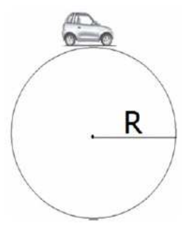


Assim, o ângulo $B\hat{A}C$ mede

(a) 20°.
(b) 30°.
(c) 50°.
(d) 60°.

(EEAR-2016) QUESTÃO 63

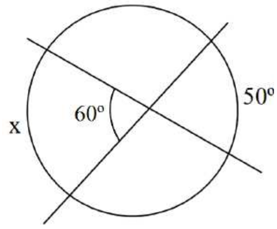
Um carrinho de brinquedo que corre em uma pista circular completa 8 voltas, percorrendo um total de $48\,\text{m}$.



Desprezando a largura da pista e considerando $\pi \quad 3$, o seu raio é, em metros, igual a

(a) $0,8$
(b) $1,0$
(c) $1,2$
(d) $2,0$

(EEAR-2016) QUESTÃO 64

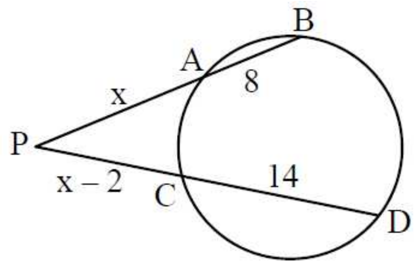


Duas cordas se cruzam num ponto distinto do centro da circunferência, conforme esboço. A partir do conceito de ângulo excêntrico interior, a medida do arco x é

(a) $40°$
(b) $70°$
(c) $110°$
(d) $120°$

(EEAR-2017) QUESTÃO 65

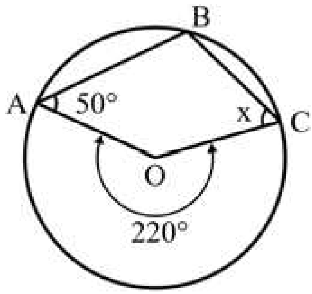
Se A, B, C e D são pontos da circunferência, o valor de x é múltiplo de



(a) 5
(b) 6
(c) 7
(d) 8

(EEAR-2018) QUESTÃO 66

Considere o quadrilátero $ABCO$, de vértices A, B e C na circunferência e vértice O no centro dela. Nessas condições x mede



(a) $30°$

(b) $45°$

(c) $55°$

(d) $60°$

(EEAR-2018) QUESTÃO 67

Considere uma roda de 20cm de raio que gira, completamente e sem interrupção, 20 vezes no solo. Assim, a distância que ela percorre é ____ πm.

(a) 100

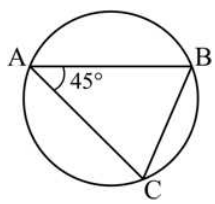
(b) 80

(c) 10

(d) 8

(EEAR-2018) QUESTÃO 68

O triângulo ABC está inscrito na circunferência.



Se BC 8, a medida do raio é

(a) $4\sqrt{2}$

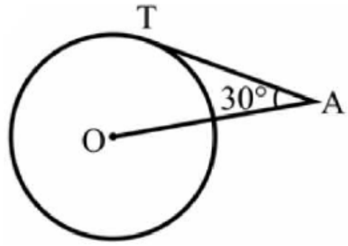
(b) $2\sqrt{2}$

(c) 4

(d) 2

(EEAR-2019) QUESTÃO 69

O segmento $\overline{AT}$ é tangente, em T, à circunferência de centro O e raio R 8cm. A potência de A em relação à circunferência é igual a ____ cm^2.



(a) 16
(b) 64
(c) 192
(d) 256

(EEAR-2019) QUESTÃO 70

Com um fio de arame, deseja-se cercar dois jardins: um circular, de raio 3m, e o outro triangular, cujo perímetro é igual ao comprimento da circunferência do primeiro. Considerando π $3,14$, para cercar totalmente esses jardins, arredondando para inteiros, serão necessários ____ metros de arame.

(a) 29
(b) 30
(c) 35
(d) 38

2.4– GABARITO

Q. 1: C	**Q. 8**: B	**Q. 15**: B	**Q. 22**: B	**Q. 29**: D
Q. 2: D	**Q. 9**: B	**Q. 16**: C	**Q. 23**: D	**Q. 30**: C
Q. 3: D	**Q. 10**: B	**Q. 17**: D	**Q. 24**: E	**Q. 31**: B
Q. 4: C	**Q. 11**: D	**Q. 18**: C	**Q. 25**: C	**Q. 32**: A
Q. 5: B	**Q. 12**: C	**Q. 19**: B	**Q. 26**: A	**Q. 33**: B
Q. 6: C	**Q. 13**: B	**Q. 20**: B	**Q. 27**: B	**Q. 34**: B
Q. 7: B	**Q. 14**: B	**Q. 21**: D	**Q. 28**: C	**Q. 35**: B

Q. 36: A	**Q. 43**: D	**Q. 50**: C	**Q. 57**: D	**Q. 64**: B
Q. 37: D	**Q. 44**: B	**Q. 51**: B	**Q. 58**: B	**Q. 65**: B
Q. 38: D	**Q. 45**: B	**Q. 52**: A	**Q. 59**: D	**Q. 66**: D
Q. 39: A	**Q. 46**: A	**Q. 53**: A	**Q. 60**: B	**Q. 67**: D
Q. 40: A	**Q. 47**: B	**Q. 54**: B	**Q. 61**: B	**Q. 68**: A
Q. 41: A	**Q. 48**: A	**Q. 55**: C	**Q. 62**: A	**Q. 69**: C
Q. 42: A	**Q. 49**: A	**Q. 56**: A	**Q. 63**: B	**Q. 70**: D

2.4– Índice Remissivo