GELSON IEZZI
SAMUEL HAZZAN

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Sequências
Matrizes
Determinantes
Sistemas

4

Atual Editora

NOVAS QUESTÕES DE VESTIBULARES

GELSON IEZZI
SAMUEL HAZZAN

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Sequências | Determinantes
Matrizes | Sistemas

4

COMPLEMENTO PARA O PROFESSOR

8ª edição | São Paulo – 2013

Atual Editora

Copyright desta edição:
SARAIVA S.A. Livreiros Editores, São Paulo, 2013.
Rua Henrique Schaumann, 270 — Pinheiros
05413-010 — São Paulo — SP
Fone: (0xx11) 3611-3308 — Fax vendas: (0xx11) 3611-3268
SAC: 0800-0117875
www.editorasaraiva.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Iezzi, Gelson, 1939-

Fundamentos de matemática elementar, 4 : sequências, matrizes, determinantes e sistemas / Gelson Iezzi, Samuel Hazzan. – 8. ed. – São Paulo : Atual, 2013.

ISBN 978-85-357-1748-8 (aluno)
ISBN 978-85-357-1749-5 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Matemática (Ensino médio) – Problemas e exercícios etc. 3. Matemática (Vestibular) – Testes I. Hazzan, Samuel, 1946-. II. Título. III. Título: Sequências, matrizes, determinantes e sistemas.

13-02580 CDD-510.7

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática: Ensino médio 510.7

Complemento para o Professor — Fundamentos de Matemática Elementar — vol. 4

Gerente editorial: Lauri Cericato
Editor: José Luiz Carvalho da Cruz
Editores-assistentes: Fernando Manenti Santos/Juracy Vespucci/Guilherme Reghin Gaspar/Livio A. D'Ottaviantonio
Auxiliares de serviços editoriais: Daniella Haidar Pacifico/Margarete Aparecida de Lima/Rafael Rabaçallo Ramos/Vanderlei Aparecido Orso
Digitação e cotejo de originais: Guilherme Reghin Gaspar/Elillyane Kaori Kamimura
Pesquisa iconográfica: Cristina Akisino (coord.)/Enio Rodrigo Lopes
Revisão: Pedro Cunha Jr. e Lilian Semenichin (coords.)/Renata Palermo/Rhennan Santos/Felipe Toledo/Eduardo Sigrist/Maura Loria/Aline Araújo/Elza Gasparotto/Luciana Azevedo/Patricia Cordeiro
Gerente de arte: Nair de Medeiros Barbosa
Supervisor de arte: Antonio Roberto Bressan
Projeto gráfico: Carlos Magno
Capa: Homem de Melo & Tróia Desing
Imagem de Capa: tiridifilm/Getty Images
Ilustrações: Conceitograf/Mario Yoshida
Diagramação: Ulhoa Cintra
Assessoria de arte: Maria Paula Santo Siqueira
Encarregada de produção e arte: Grace Alves
Coordenadora de editoração eletrônica: Silvia Regina E. Almeida
Impressão e acabamento: Ricargraf
Produção gráfica: Robson Cacau Alves

731.306.008.001

Apresentação

Este livro é o *Complemento para o Professor* do volume 4, Sequências/Matrizes/Determinantes/Sistemas, da coleção *Fundamentos de Matemática Elementar.*

Cada volume desta coleção tem um complemento para o professor, com o objetivo de apresentar a solução dos exercícios mais complicados do livro e sugerir sua passagem aos alunos.

É nossa intenção aperfeiçoar continuamente os *Complementos.* Estamos abertos a sugestões e críticas, que nos devem ser encaminhadas por meio da Editora.

Agradecemos à professora Irene Torrano Filisetti a colaboração na redação das soluções que são apresentadas neste *Complemento.*

Os Autores

Sumário

CAPÍTULO II — Progressão aritmética

8. $(x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 = (x-1+x+x+1)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow (-1, 0, 1) \\ \text{ou} \\ x = 1 \Rightarrow (0, 1, 2) \\ \text{ou} \\ x = 2 \Rightarrow (1, 2, 3) \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} x - r + x + x + r = 18 \Rightarrow x = 6 \quad (1) \\ \dfrac{1}{x-r} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+r} = \dfrac{23}{30} \Rightarrow \dfrac{3x^2 - r^2}{x\left(x^2 - r^2\right)} = \dfrac{23}{30} \quad (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$\frac{108 - r^2}{6\left(36 - r^2\right)} = \frac{23}{30} \Rightarrow r = \pm 4$$

Para $x = 6$ e $r = -4 \Rightarrow (10, 6, 2)$.
Para $x = 6$ e $r = 4 \Rightarrow (2, 6, 10)$.

10. $$\begin{cases} (x-r) \cdot x \cdot (x+r) = (x - r + x + x + r)^2 \\ x - r + x = x + r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - r^2 = 9x \\ x = 2r \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 - 6r = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0, 0) \\ \text{ou} \\ r = 6 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow (6, 12, 18) \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} x - r + x + x + r = 3 \\ (x-r)^2 + x^2 + (x+r)^2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \quad (1) \\ 3x^2 + 2r^2 = 11 \quad (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), vem $r = \pm 2$.
Para $x = 1$ e $r = -2$, temos $(3, 1, -1)$.
Para $x = 1$ e $r = 2$, temos $(-1, 1, 3)$.

13. $\begin{cases}(x-3y)+(x-y)+(x+y)+(x+3y)=-6\\(x-3y)(x+3y)=-54\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x=6\\x^2-9y^2=-54\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$ e $y = \pm\dfrac{5}{2} \Rightarrow$ termos: $-9, -4, 1, 6$.

14. $\begin{cases}(x-3y)(x+y)=45\\(x-y)(x+y)=77\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-9y^2=45\\x^2-y^2=77\end{cases} \Rightarrow y=\pm 2$ e $x=\pm 9$

$y = -2$ rejeitado porque a P.A. deve ser crescente.
Para $x = 9$ e $y = 2$, vem: $(3, 7, 11, 15)$.
Para $x = -9$ e $y = 2$, vem: $(-15, -11, -7, -3)$.

15. $\begin{cases}(x-3y)+(x-y)+(x+y)+(x+3y)=22\\(x-3y)^2+(x-y)^2+(x+y)^2+(x+3y)^2=166\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{11}{2}\\2x^2+10y^2=83\end{cases} \Rightarrow y=\pm\dfrac{3}{2}$

Para $x=\dfrac{11}{2}$ e $y=\dfrac{3}{2} \Rightarrow (1, 4, 7, 10)$.

Para $x=\dfrac{11}{2}$ e $y=-\dfrac{3}{2} \Rightarrow (10, 7, 4, 1)$.

20. Em toda P.A., cada termo, a partir do segundo, é média aritmética entre seu antecessor e seu sucessor.

Assim: P.A. $(a, b, c) \Rightarrow b=\dfrac{a+c}{2} \Rightarrow c = 2b - a$.

21. $3x = \dfrac{2x+x^2}{2} \Rightarrow x = 0$ ou $x = 4$.

Então, $(0, 0, 0)$ rejeitada porque os termos devem ser distintos.
Assim: $(8, 12, 16)$.

22. $2x = \dfrac{x+1+x^2-5}{2} \Rightarrow x = 4$ ou $x = -1$

$x = -1$ rejeitado porque $2x$ é lado de um triângulo.
Portanto, temos: $(5, 8, 11)$ e, então, perímetro igual a 24.

23. lado $= x$, diagonal $= \sqrt{2}\,x$, área $= x^2 \Rightarrow (x, \sqrt{2}\,x, x^2)$.

Então: $\sqrt{2}\,x = \dfrac{x+x^2}{2} \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2\sqrt{2} - 1$.

$x = 0$ rejeitado porque é lado do quadrado

Então: $x = 2\sqrt{2} - 1$.

25. Por hipótese, $\dfrac{1}{y+z} - \dfrac{1}{x+y} = r \Rightarrow x - z = r(x+y)(y+z)$

e $\dfrac{1}{z+x} - \dfrac{1}{y+z} = r \Rightarrow r = \dfrac{y-x}{(x+z)(y+z)}$

Então: $x^2 - z^2 = (x - z)(x + z) = r(x + y)(y + z)(x + z) =$

$= \dfrac{y-x}{(x+z)(y+z)} \cdot (x+y)(y+z)(x+z) = (y-x)(x+y) = y^2 - x^2$

26. Por hipótese, $b - a = c - b = r$.
Então: $b^2(a + c) - a^2(b + c) = ab^2 + b^2c - a^2b - a^2c =$
$= ab(b - a) + c(b^2 - a^2) = ab(b - a) + c(b - a)(b + a) =$
$= ab(c - b) + c(c - b)(b + a) =$
$= abc - ab^2 + c^2b + ac^2 - b^2c - abc =$
$= ac^2 + bc^2 - ab^2 - b^2c =$
$= c^2(a + b) - b^2(a + c)$

27. Por hipótese, $b - a = c - b$ (1) $\quad \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{c}$ (2).

De (2) vem $\dfrac{b-c}{bc} = \dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{c}$ (3).

Utilizando (1) em (3), vem:

$\dfrac{a-b}{bc} = \dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{c}$ e daí $\dfrac{a}{bc} - \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{c}$

então, $\dfrac{a}{bc} = \dfrac{1}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow ad = \dfrac{a+c}{2} \cdot c \Rightarrow 2ad = c(a+c)$

28. Fazendo $\alpha = x - 3y$, $\beta = x - y$, $\gamma = x + y$ e $\delta = x + 3y$, temos:

$(\delta + 3\beta)(\delta - 3\beta) + (\alpha + 3\gamma)(\alpha - 3\gamma) = 4x(6y - 2x) + 4x(-6y - 2x) =$
$= 4x(-4x) = -16x^2$

$2(\alpha\delta - 9\beta\gamma) = 2(x^2 - 9y^2 - 9x^2 - 9y^2) = -16x^2$

então: $(\delta + 3\beta)(\delta - 3\beta) + (\alpha + 3\gamma)(\alpha - 3\gamma) = 2(\alpha\delta - 9\beta\gamma)$.

34. $a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_1 + 2 = 24 \Rightarrow a_1 = 22$
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 60 = 22 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow n = 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ vigésimo termo ou a_{20}.

38. $\begin{cases} a_{12} + a_{21} = 302 \\ a_{23} + a_{46} = 446 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 31r = 302 \\ 2a_1 + 67r = 446 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 89 \text{ e } r = 4$

P.A.(89, 93, 97, ...).

39. $(14, \underset{\underset{a_1}{\uparrow}}{15}, ..., \underset{\underset{a_n}{\uparrow}}{191}, 192)$

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 191 = 15 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow n = 89$

40. $a_m + a_n = a_p + a_q \Rightarrow$
$\Rightarrow a_1 + (m - 1)r + a_1 + (n - 1)r = a_1 + (p - 1)r + a_1 + (q - 1)r \Rightarrow$
$\Rightarrow (m - 1)r + (n - 1)r = (p - 1)r + (q - 1)r \Rightarrow$
$\Rightarrow m - 1 + n - 1 = p - 1 + q - 1 \Rightarrow m + n = p + q$.

42. P.A.$_1$(5, 8, 11, ...)

$\left.\begin{matrix} n = 100 \\ r = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_{100} = 5 + 99 \cdot 3 = 302$

Então, P.A.$_1$(5, 8, 11, ..., 302).

P.A.$_2${3, 7, 11, ...)

$\left.\begin{matrix} n = 100 \\ r = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_{100} = 3 + 99 \cdot 4 = 399$

Então, P.A.$_2$(3, 7, 11, ..., 399).

Como queremos os termos comuns às duas progressões, então $a_n \leqslant 302$.

Observamos que o primeiro termo comum é $a_1 = 11$ e o segundo termo comum é $a_2 = 23 \Rightarrow r = 12$.
Então: $a_1 + (n-1)r \leqslant 302$
$11 + (n-1) \cdot 12 \leqslant 302 \Rightarrow n \leqslant 25{,}25 \Rightarrow n = 25$.

43. $a_p = a + (p-1)r \Rightarrow a = a_p - (p-1)r$
Como $0 \leqslant a \leqslant 10$ e $a_p = 35$, vem:
$0 \leqslant 35 - (p-1) \cdot 13 \leqslant 10 \Rightarrow 2{,}9 \leqslant p \leqslant 3{,}6 \Rightarrow p = 3$.
Então: $a_3 = a + 2r \Rightarrow 35 = a + 2 \cdot 13 \Rightarrow a = 9$.

44. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) = (1, 3, 5, ..., a_n)$
$\big(f(a_1), f(a_2), f(a_3)), ..., f(a_n)\big) = \big(f(1), f(3), f(5), ..., f(a_n)\big) = \big(4, 10, 16, ..., f(a_n)\big)$

Sendo $f(x) = ax + b$ $\begin{cases} f(1) = a + b = 4 \\ f(3) = 3a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow a = 3$ e $b = 1$

Portanto: $f(2) = a \cdot 2 + b \Rightarrow f(2) = 3 \cdot 2 + 1 \Rightarrow f(2) = 7$.

45. Por hipótese $a_p - a_{p-1} = r$ e $a_{p-1} - a_{p-2} = r$ para todo $\frac{p}{2}$ natural, $3 \leqslant p \leqslant n$.

Então:

$$a_p^2 - a_{p-1}^2 = (a_p - a_{p-1})(a_p + a_{p-1}) = r(a_p + a_{p-1})$$
$$a_{p-1}^2 - a_{p-2}^2 = (a_{p-1} - a_{p-2})(a_{p-1} + a_{p-2}) = r(a_{p-1} + a_{p-2})$$

e daí vem:

$$(a_p^2 - a_{p-1}^2) - (a_{p-1}^2 - a_{p-2}^2) = r(a_p - a_{p-2}) = r \cdot 2r = 2r^2 \text{ (constante)}.$$

46. Por hipótese:
$x = a_m = a_1 + (m-1)r$
$y = a_n = a_1 + (n-1)r$
$z = a_p = a_1 + (p-1)r$
então:
$(n-p)x + (p-m)y + (m-n)z =$
$= (n-p)[a_1 + (m-1)r] + (p-m)[a_1 + (n-1)r] + (m-n)[a_1 +$
$+ (p-1)r] =$
$= a_1(n-p+p-m+m-n) + r[(n-p)(m-1) + (p-m)(n-1) +$
$+ (m-n)(p-1)] = a_1 \cdot 0 + r \cdot 0 = 0$.

47. Demonstração pelo princípio da indução finita.
Para n = 3, temos:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{a_3+a_1}{a_1a_2a_3}=\frac{2a_2}{a_1a_2a_3}=\frac{2}{a_1a_3}=\frac{3-1}{a_1a_3}$$

Suponhamos a tese válida para *p* termos iniciais, p ⩾ 3, ou seja:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ ...\ +\frac{1}{a_{p-1}a_p}=\frac{p-1}{a_1a_p}$$

então, temos:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_{p-1}a_p}+\frac{1}{a_pa_{p+1}}=\frac{p-1}{a_1a_p}+\frac{1}{a_pa_{p+1}}=$$

$$=\frac{(p-1)a_{p+1}+a_1}{a_1a_pa_{p+1}}=\frac{(p-1)(a_p+r)+a_1}{a_1a_pa_{p+1}}=\frac{(p-1)a_p+a_1+(p-1)r}{a_1a_pa_{p+1}}=$$

$$=\frac{p\cdot a_p}{a_1a_pa_{p+1}}=\frac{p}{a_1a_{p+1}}=\frac{(p+1)-1}{a_1a_{p+1}}$$

e a tese está verificada para p + 1 termos iniciais.
Em consequência, a tese vale para todo *n* natural.

49. (12, __, __, ... , __, __, 34)

$$\left.\begin{array}{l} a_1=12 \\ a_n=34 \\ r=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 34=12+(n-1)\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow n=45 \quad \text{(incluindo os extremos)}$$

Então, devem ser interpolados 43 termos.

52. Múltiplos de 2 → (100, 102, ..., 1 000)

$$\left.\begin{array}{l} a_1=100 \\ a_n=1000 \\ r=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 1000=100+(n-1)\cdot 2\Rightarrow n=451$$

Múltiplos de 3 ⇒ (102, ..., 999)

$$\left.\begin{array}{l} a_1=102 \\ a_m=999 \\ r=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 999=102+(m-1)\cdot 2\Rightarrow n=300$$

Múltiplos de 2 e 3, isto é, múltiplos de 6 → (102, ..., 996)

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 102 \\ a_p = 996 \\ r = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow 996 = 102 + (p-1)\cdot 6 \Rightarrow n = 150$$

Assim, múltiplos de 2 ou 3 de 100 a 1000 são no total:
$n + m - p = 451 + 300 - 150 = 601$.

53. Números de dois ou três algarismos: (10, 11, 12, ..., 998, 999)
$n = 999 - 10 + 1 = 990$

Números de dois ou três algarismos, divisíveis por 7: (14, ..., 994)

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 14 \\ a_p = 994 \\ r = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow 994 = 14 + (p-1)r \Rightarrow p = 141$$

Então, não são divisíveis por 7: $n - p = 849$ números.

54. Total de inteiros de 1000 a 10000, $n = 9001$
Números divisíveis por 5: (1000, ..., 10000)

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1000 \\ a_m = 10000 \\ r = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow 10000 = 1000 + (m-1)\cdot 5 \Rightarrow m = 1801$$

Números divisíveis por 7: (1001, ..., 9996)

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1001 \\ a_p = 9996 \\ r = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow 9996 = 1001 + (p-1)\cdot 7 \Rightarrow p = 1286$$

Números divisíveis por 5 e 7: (1015, ..., 9975)

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1015 \\ a_q = 9975 \\ r = 35 \end{array}\right\} \Rightarrow 9975 = 1015 + (q-1)\cdot 35 \Rightarrow q = 257$$

Então, não são divisíveis nem por 5 nem por 7:
$n - [m + p - q] = 9001 - [1801 + 1286 - 257] = 6171$.

56. $\underbrace{\left(1, \_, \_, \ldots, \_, n^2\right)}_{n}$

A P.A. tem n + 2 termos.

$n^2 = 1 + (n + 2 - 1)r \Rightarrow \dfrac{n^2 - 1}{n + 1} = r \Rightarrow r = n - 1$

62. $\left.\begin{array}{l} a_1 = \dfrac{1-n}{n} \\ a_2 = \dfrac{2-n}{n} \end{array}\right\} \Rightarrow r = a_2 - a_1 = \dfrac{2 - n - (1 - n)}{n} \Rightarrow r = \dfrac{1}{n}$

Então: $a_n = \dfrac{1-n}{n} + (n-1) \cdot \dfrac{1}{n} \Rightarrow a_n = 0.$

Portanto, $S_n = \dfrac{\left(\dfrac{1-n}{n} + 0\right) \cdot n}{2} \Rightarrow S_n = \dfrac{1-n}{2}.$

67. $S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} \Rightarrow S_{20} = 10(a_1 + a_{20}) = -15 \Rightarrow a_1 + a_{20} = -\dfrac{3}{2}$

Como a_6 e a_{15} são termos equidistantes dos extremos, então:

$a_6 + a_{15} = a_1 + a_{20} \Rightarrow a_6 + a_{15} = -\dfrac{3}{2} = -1{,}5.$

68. $r = 0{,}08a_1$

$a_{11} = 36 \Rightarrow a_1 + 10 \cdot 0{,}08a_1 = 36 \Rightarrow a_1 = 20$

Portanto, $r = 1{,}6$ e $a_{26} = 60$.

Assim, $S_{26} = \dfrac{(20 + 60) \cdot 26}{2} \Rightarrow S_{26} = 1040.$

69. $S_{10} = \dfrac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 50 \Rightarrow a_1 + a_{10} = 10$

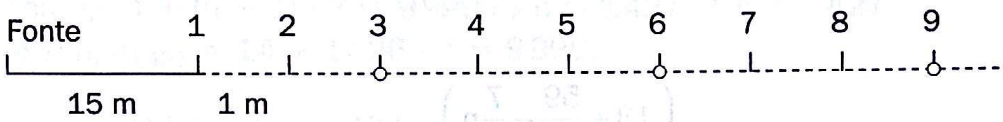
$S_{20} = \dfrac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = 50 \Rightarrow a_1 + a_{20} = 5$

$\begin{cases} a_1 + a_{10} = 10 \\ a_1 + a_{20} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 9r = 10 \\ 2a_1 + 19r = 5 \end{cases} \Rightarrow r = -\dfrac{1}{2} \text{ e } a_1 = \dfrac{29}{4}$

Então: $a_{30} = \dfrac{29}{4} + 29\left(-\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow a_{30} = -\dfrac{29}{4}$

Portanto, $S_{30} = \dfrac{\left(\dfrac{29}{4} - \dfrac{29}{4}\right) \cdot 30}{2} = 0.$

71.



1ª caminhada (ida e volta) = $2(15 + 1 + 1) = 2 \cdot 17 = 34$.

2ª caminhada (ida e volta) = $2(17 + 1 + 1 + 1) = 2 \cdot 20 = 40$.

Assim, à $P.A._1$ (3, 6, 9, ..., 60), que é o número de roseiras regadas a cada caminhada, corresponde a $P.A._2$ (34, 40, ...), que representa o percurso percorrido.

Considerando a $P.A._1$, vem: $\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_n = 60 \\ r = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 60 = 3 + (n-1) \cdot 3 \Rightarrow n = 20$

Considerando a $P.A._2$, vem: $\left.\begin{array}{l} a_1 = 34 \\ a_n = 20 \\ r = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow a_{20} = 34 + 19 \cdot 6 \Rightarrow a_{20} = 148$

Assim: $S_{20} = \dfrac{34 + 148}{2} \cdot 20 \Rightarrow S_{20} = 1820$ m.

73. $\left.\begin{array}{l} a_1 = -5 \\ r = 4 \\ a_n = -5 + (n-1) \cdot 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 1590 = \left(\dfrac{-5 - 5 + 4n - 4}{2}\right) \cdot n \Rightarrow$

$\Rightarrow 2n^2 - 7n - 1590 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} n = 30 \\ \text{ou} \\ n = -\dfrac{53}{2} \text{ (rejeitado)} \end{array}\right.$

Então, $S_n = 1590$ se $n = 30$.

74. $\left.\begin{array}{l} a_1 = 13 \\ a_2 = \dfrac{45}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = -\dfrac{7}{4}$

$$a_n = 13 + (n - 1)\left(-\frac{7}{4}\right) \Rightarrow a_n = \frac{59}{4} - \frac{7}{4}n$$

$$S_n = \left(\frac{13 + \frac{59}{4} - \frac{7}{4}n}{2}\right) \cdot n < 0 \Rightarrow -7n^2 + 111n < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7n^2 - 111n < 0 \Rightarrow \begin{cases} n < 0 \quad \text{(rejeitado)} \\ \text{ou} \\ n > \dfrac{111}{7} \Rightarrow n = 16 \quad \text{(valor mínimo)} \end{cases}$$

76. $\begin{cases} \dfrac{(a_1 + a_{59}) \cdot 59}{2} = 12 \\ \dfrac{(a_2 + a_{60}) \cdot 59}{2} = 130 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 58r = \dfrac{24}{59} \\ 2a_1 + 60r = \dfrac{260}{59} \end{cases} \Rightarrow r = 2 \text{ e } a_1 = -\dfrac{3\,410}{59}$

78. (4, 7, 10, 13, ..., 517)

$\left.\begin{array}{l} a_1 = 4 \\ r = 3 \\ a_n = 517 \end{array}\right\} \Rightarrow 517 = 4 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow n = 172$

Então, 517 é termo de ordem par e cada P.A. extraída dessa tem 86 termos:
$P.A._i$ (4, 10, 16, ..., 514) e $P.A._p$ (7, 13, ..., 517)

$$\left.\begin{array}{l} S_{86i} = \dfrac{(4+514)\cdot 86}{2} \\ S_{86p} = \dfrac{(7+517)\cdot 86}{2} \end{array}\right\} \dfrac{S_{86i}}{S_{86p}} = \dfrac{518}{524} = \dfrac{259}{262}$$

81. $(14, 21, 28, \ldots, a_n)$, em que $a_n \leqslant 9999$
Então, $14 + (n - 1) \cdot 7 \leqslant 9999 \Rightarrow n \leqslant 1427 \Rightarrow n = 1427$
Assim, $a_{1427} = 14 + 1426 \cdot 7 = 9996$.

$$S_{1427} = \frac{(14 + 9996)\cdot 1427}{2} \Rightarrow S_{1427} = 7142135$$

84.
$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 2\cdot 1 + 3 \Rightarrow f(1) = 5 \\ f(25) = 2\cdot 25 + 3 \Rightarrow f(25) = 53 \end{array}\right\} \Rightarrow S_{25} = \frac{(5+53)\cdot 25}{2} = 725$$
Portanto $f(1) + f(2) + \ldots + f(25) = 725$

85.
$$\sum_{x=5}^{n+5} 4(x-3) = An^2 + Bn + C$$

Para $n = 1$, vem:

$$\sum_{x=5}^{6} 4(x-3) = A + B + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4(5-3) + 4(6-3) = A + B + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A + B + C = 20 \quad (1)$$

Para $n = 2$, vem:

$$\sum_{x=5}^{7} 4(x-3) = 4A + 2B + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4(5-3) + 4(6-3) + 4(7-3) = 4A + 2B + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4A + 2B + C = 36 \quad (2)$$

Para $n = 3$, vem:

$$\sum_{x=5}^{8} 4(x-3) = 9A + 3B + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4(5-3) + 4(6-3) + 4(7-3) + 4(8-3) = 9A + 3B + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9A + 3B + C = 56 \quad (3)$$

$$\begin{cases} (1)\ A + B + C = 20 \\ (2)\ 4A + 2B + C = 36 \\ (3)\ 9A + 3B + C = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 20 \\ 2B + 3C = 44 \\ 6B + 8C = 124 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 20 \\ 2B + 3C = 44 \\ C = 8 \end{cases}$$

Então, $A + B = 20 - C \Rightarrow 20 - 8 = 12$.

86. $S_m = S_n \Rightarrow \dfrac{[2a_1 + (m-1)r]m}{2} = \dfrac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a_1m + (m - 1)rm = 2a_1n + (n - 1)rn \Rightarrow$
$\Rightarrow 2a_1(m - n) = [n(n - 1) - m(m - 1)]r \Rightarrow$
$\Rightarrow 2a_1(m - n) = (n - m)(n + m - 1)r \Rightarrow$
$\Rightarrow 2a_1 = -(n + m - 1)r$ (1)

Sendo $a_{m+n} = a_1 + (m + n - 1)r$, então:

$$S_{m+n} = \frac{[a_1 + a_1 + (m+n-1)r](m+n)}{2}$$

$$S_{m+n} = \frac{[2a_1 + (m+n-1)r](m+n)}{2} \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), vem:
$S_{m+n} = 0$.

87. $(a_1, a_2, ..., a_{n+1}, ..., a_{2n}, a_{2n+1})$ é uma P.A. com número ímpar de termos. Então, o termo médio é média aritmética entre os extremos e essa relação também é válida entre os índices desses termos.

Assim:

$$\frac{2_n + 1 + 1}{2} = \frac{2_n + 2}{2} = n + 1 \text{ (índice do termo médio).}$$

Temos, ainda:
$a_{2n+1} = a_1 + 2nr$ e $a_{2n} = a_1 + (2n - 1)r$.

$$S_i = \frac{(a_1 + a_1 + 2nr)(2n+1)}{2} = (a_1 + nr)(2n+1)$$

$$S_p = \frac{\left[a_1 + r + a_1 + (2n-1)r\right]2n}{2} = 2(a_1 + nr)\cdot n$$

$S_i - S_p = (a_1 + nr)(2n + 1) - 2(a_1 + nr)n =$
$= (a_1 + nr)(2n + 1 - 2n) = a_1 + nr = a_{n+1}$ (termo médio)

88. $(a_1, a_2, ..., a_p, ..., a_n, ...)$
$a_p + a_n = a_1 + (p - 1)r + a_1 + (n - 1)r =$
$= a_1 + [a_1 + (p + n - 2)r] \in$ P.A. $\Rightarrow a_1 = Kr, K \in \mathbb{Z}$

89. $$a_{\frac{n}{3}} = 4 \Rightarrow a_{\frac{n}{3}} = a_1 + \left(\frac{n}{3} - 1\right)\cdot 1 = 4 \Rightarrow a_1 + \left(\frac{n-3}{3}\right) = 4$$

Sabendo que $n = 3K$, então $a_1 + \dfrac{3(K-1)}{3} = 4 \Rightarrow a_1 = 5 - K$.

Então: $a_n = a_{3K} = 5 - K + 3K - 1 = 4 + 2K$.

Portanto, $S_{3K} = \dfrac{(5 - K + 4 + 2K)3K}{2} = 33 \Rightarrow$

$$\Rightarrow K^2 + 9K - 22 = 0 \Rightarrow \begin{cases} K = -11 \text{ (rejeitado)} \\ \text{ou} \\ K = 2 \Rightarrow a_1 = 3 \text{ e } n = 6 \end{cases}$$

Assim: P.A. (3, 4, 5, 6, 7, 8).

91. $$\frac{(a_1 + a_n)n}{2} = (n+1)\cdot\frac{a_n}{2}$$

$a_1 \cdot n + a_n \cdot n = n \cdot a_n + a_n \Rightarrow a_1 n = a_n \Rightarrow$
$\Rightarrow a_1 n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_1(n - 1) = (n - 1)r \Rightarrow a_1 = r$

CAPÍTULO III — Progressão geométrica

97. $(1 + x, 13 + x, 49 + x)$

$$\frac{13+x}{1+x} = \frac{49+x}{13+x} \Rightarrow (13+x)^2 = (49+x)(1+x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24x - 120 = 0 \Rightarrow x = 5$$

Portanto, $(6, 18, 54) \Rightarrow q = 3$.

99. $$\frac{\text{sen}(x+\pi)}{\text{sen } x} = q \Rightarrow q = \frac{-\text{sen } x}{\text{sen } x} = -1$$

$$\frac{\text{sen}(x+2\pi)}{\text{sen}(x+\pi)} = q \Rightarrow q = \frac{\text{sen } x}{-\text{sen } x} = -1$$

A progressão geométrica é alternante, com $q = -1$.

101. P.G.: $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$

$$\text{condições: } \begin{cases} \dfrac{x}{q} + x + xq = \dfrac{21}{8} & (1) \\ \dfrac{x^2}{q^2} + x^2 + x^2q^2 = \dfrac{189}{64} & (2) \end{cases}$$

Fazendo a diferença entre o quadrado de (1) e (2), temos:

$$\frac{2x^2}{q} + 2x^2q + 2x^2 = \left(\frac{21}{8}\right)^2 - \frac{189}{64} \Rightarrow 2x\left(\frac{x}{q} + x + xq\right) = \frac{63}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x \cdot \frac{21}{8} = \frac{63}{16} \Rightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Substituindo em (1), resulta:

$$\frac{3}{4q} + \frac{3}{4} + \frac{3q}{4} = \frac{21}{8} \Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{2} \text{ ou } q = 2$$

Os números procurados são: $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}$ e $\frac{3}{2}$.

102. $\begin{cases} a_1 + a_2 = 12 \\ a_3 + a_4 = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + xq = 12 \\ xq^2 + xq^3 = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1+q) = 12 & (1) \\ xq^2(1+q) = 300 & (2) \end{cases}$

Dividindo (2) por (1), membro a membro, vem:
$q^2 = 25 \Rightarrow q = \pm 5$
Para $q = 5 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 10, 50, 250)$.
Para $q = -5 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow (-3, 15, -75, 375)$.

103. $\begin{cases} \dfrac{x}{q^2} + \dfrac{x}{q} + x + xq + xq^2 = \dfrac{121}{3} & (1) \\ \dfrac{x}{q^2} \cdot \dfrac{x}{q} \cdot x \cdot xq \cdot xq^2 = 243 & (2) \end{cases}$

De (2) vem $x^5 = 243 \Rightarrow x = 3$.

Substituindo em (1), resulta: $\dfrac{1}{q^2} + \dfrac{1}{q} + 1 + q + q^2 = \dfrac{121}{9}$.

E daí:

$$\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) + \left(q + \frac{1}{q}\right) + 1 = \frac{121}{9}.$$

Fazendo $q + \dfrac{1}{q} = y$ e $q^2 + \dfrac{1}{q^2} - 2$, resulta:

$$(y^2 - 2) + y + 1 = \frac{121}{9} \Rightarrow y^2 + y - \frac{130}{9} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y = -\frac{13}{3} \text{ ou } y = \frac{10}{3}\right) \Rightarrow \left(q = \frac{-13 \pm \sqrt{133}}{6} \text{ ou } q = 3 \text{ ou } q = \frac{1}{3}\right).$$

Como q é racional, os números são: $\dfrac{1}{3}$, 1, 3, 9, 27.

104. $\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = 182 \\ a_2 + a_4 + a_6 = 546 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + xq^2 + xq^4 = 182 \\ xq + xq^3 + xq^5 = 546 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(1 + q^2 + q^4\right) = 182 \quad (1) \\ xq\left(1 + q^2 + q^4\right) = 546 \quad (2) \end{cases}$$

(2)

Dividindo (2) por (1), membro a membro, vem:

$$q = \frac{546}{182} = 3 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 6, 18, 54, 162, 486).$$

105. $\begin{cases} b^2 = ac \quad (1) \\ 2c = b + d \Rightarrow d = 2c - b \quad (2) \\ a + d = 32 \Rightarrow a = 32 - d \quad (3) \\ b + c = 24 \Rightarrow c = 24 - bv \quad (4) \end{cases}$

Substituindo (4) em (2), vem: $d = 48 - 3b$ (5).
Substituindo (5) em (3), vem: $a = -16 + 3b$ (6).
Substituindo (4) e (6) em 1, temos:
$b^2 = (-16 + 3b)(24 - b) \Rightarrow b^2 - 22b + 96 = 0 \Rightarrow b = 16$ ou $b = 6$

Para $b = 16$, vem: $a = 32$, $c = 8$ e $d = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{P.G.}(32, 16, 8) \\ \text{P.A.}(16, 8, 0) \end{cases}$

Para $b = 6$, vem: $a = 2$, $c = 18$ e $d = 30 \Rightarrow \begin{cases} \text{P.G.}(2, 6, 18) \\ \text{P.A.}(6, 18, 30) \end{cases}$

106. $x - r + x + x + r = 36 \Rightarrow x = 12$
P.A. $(12 - r, 12, 12 + r) \Rightarrow (12 - r, 12, 18 + r)$ é P.G.
Então: $12^2 = (12 - r)(18 + r) \Rightarrow r^2 + 6r - 72 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow r = 6$ ou $r = -12$ (rejeitado porque a P.A. é crescente)
Então, os números são 6, 12 e 18.

107. Como *x*, *y* e *z* estão em P.G., nessa ordem, então $y^2 = xz$. Assim, vem:
$(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + 2xz - y^2 + z^2 = x^2 + 2y^2 - y^2 + z^2 =$
$= x^2 + y^2 + z^2$.

108. *a*, *b*, *c* e *d* estão em P.G. $\Rightarrow \begin{cases} b^2 = ac \\ c^2 = bd \\ ad = bc \end{cases}$

Assim, temos:
$(b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2 = ac - 2ad + bd.$

109. (a, b, c) é P.A. $\Rightarrow 2b = a + c$
(a, b, c) é P.G. $\Rightarrow b^2 = ac$
Então, vem:
$(2b)^2 = (a + c)^2 \Rightarrow 4b^2 = a^2 + 2ac + c^2 \Rightarrow 4ac = a^2 + 2ac + c^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 - 2ac + c^2 = 0 \Rightarrow (a - c)^2 = 0 \Rightarrow a = c.$
Como $2b = a + c$, então $2b = 2a \Rightarrow b = a$.

110. (a, b, c, d) é P.G. $\Rightarrow \begin{cases} b^2 = ac \\ c^2 = bd \\ bc = ad \end{cases}$

$(b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2 =$
$= b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 + d^2 - 2bd + b^2 =$
$= a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2 - 2ac - 2bc - 2bd =$
$= a^2 + 2ac + 2bd + d^2 - 2ac - 2bc - 2bd =$
$= (a - d)^2$

111. medidas dos lados: x, xq, xq^2
condição: $(xq^2)^2 = x^2 + (xq)^2$ (teorema de Pitágoras)
Então, temos:

$$x^2q^4 = x^2 + x^2q^2 \Rightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0 \Rightarrow q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

112. medidas dos lados: x, xq e xq^2
condições: (1) $q > 1$ (P.G. crescente)
(2) $xq^2 < x + xq$ (condição para existência do triângulo)

De (2) vem: $q^2 < 1 + q \Rightarrow q^2 - q - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Fazendo a interseção, temos:

$1 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

113. medidas dos lados: $\frac{x}{q}$, x, xq

condições: (1) $\frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 1\,728$

(2) $xq < x + \frac{x}{q}$

De (1) vem $x = 12$, que, substituído em (2), dá:
$q^2 - q - 12 < 0 \Rightarrow -3 < q < 4$.

Como *q* deve ser positivo e divisor de 12, então temos:
$q = 1 \Rightarrow$ lados medindo 12, 12 e 12
$q = 2 \Rightarrow$ lados medindo 6, 12 e 24
$q = 3 \Rightarrow$ lados medindo 4, 12 e 36
e, ainda, $q = 1{,}5 \Rightarrow$ lados medindo 8, 12, 18.

114. $\text{sen}^2 x = \frac{\text{sen } x}{2} \cdot \text{tg } x \Rightarrow 2\,\text{sen}^2 x = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\,\text{sen}^2 x \cos x - \text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{sen}^2 x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

118. $q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{-\frac{1}{6}}$

$a_4 = a_3 \cdot q = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{-\frac{1}{6}} = 1$

120. $a_8 = a_1 \cdot q^7 \Rightarrow \dfrac{1}{2} = a_1 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow a_1 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-6} = 64$

123. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$

$100 < 3^{n-1} < 1000 \Rightarrow 3^4 < 100 < 3^{n-1} < 1000 < 3^7 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 < n - 1 < 7 \Rightarrow 5 < n < 8 \Rightarrow n \in \{6, 7\}$

Então existem 2 termos: a_6 e a_7.

124. $a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 2 \cdot 3^9 \Rightarrow (a_{10})^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{1}{8}} \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1}{8}}$

A igualdade dada é falsa.

125. taxa de crescimento = 3% a.a. $\Rightarrow q = 1{,}03$

$a_4 = 120\,000 \cdot (1{,}03)^3 = 131\,127$

126. taxa de crescimento = 10% a.a. $\Rightarrow q = 1{,}1$

Ao final de 4 anos, temos: $a_5 = 100\,000 \cdot (1{,}1)^4 = 146\,410$.

127. Vamos representar por a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 o volume de álcool existente na mistura após cada uma das operações realizadas. Temos:

$a_1 = 12 - 3 = 9$

$a_2 = 9 - \dfrac{9}{12} \cdot 3 = \dfrac{27}{4}$, pois a quantidade de álcool nos 3 ℓ retirados

é de $\dfrac{9}{12}$ do total.)

$a_3 = \dfrac{27}{4} - \dfrac{27}{4} \cdot 3 = \dfrac{81}{16}$, pois a quantidade de álcool nos 3 ℓ

retirados é de $\dfrac{\frac{27}{4}}{12}$ do total.

Pode-se notar, então, que $a_1, \ldots, a_5$ é uma P.G. com $a_1 = 9$ e $q = \dfrac{3}{4}$.

Daí vem: $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 9 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^4 = \dfrac{729}{256} \cong 2{,}85\ \ell$.

129. $a_1q + a_1 q^3 + a_1q^5 = 10$ (1)

$a_1q^2 + a_1q^4 + a_1q^6 = 30$ (2)

Dividindo (2) por (1), temos:

$$\frac{q^2(a_1 + a_1q^2 + a_1q^4)}{q(a_1 + a_1q^2 + a_1q^4)} = 3 \Rightarrow q = 3.$$

Substituindo em (1), temos:

$$3a_1 + 27a_1 + 243a_1 = 10 \Rightarrow a_1 = \frac{10}{273}.$$

131. $a = a_p$

$b = a_q = a_p \cdot Q^{q-p}$

$c = a_r = a_p \cdot Q^{r-p}$

Então: $a^{q-r} \cdot b^{r-p} \cdot c^{p-q} = \dfrac{a^q}{a^r} \cdot \dfrac{b^r}{b^p} \cdot \dfrac{c^p}{c^q} =$

$$= \frac{a_p^q}{a_p^r} \cdot \frac{a_p^r \cdot Q^{(q-p)r}}{a_p^p \cdot Q^{(q-p)p}} \cdot \frac{a_p^p \cdot Q^{(r-p)p}}{a_p^q \cdot Q^{(r-p)q}} =$$

$$= Q^{(q-p)(r-p)} \cdot Q^{(r-p)(p-q)} = Q^{(r-p)(q-p+p-q)} = Q^0 = 1$$

132. $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \ldots = q$, então:

$$\frac{\frac{1}{a_2}}{\frac{1}{a_1}} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{q} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{1}{a_3}}{\frac{1}{a_2}} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{1}{q} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{a_{n-1}}} = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{q}$$

provando que $\left(\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \dfrac{1}{a_3}, \ldots\right)$ também é P.G.

133. $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \ldots = q$, então:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} = q^2, \frac{a_5}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} \cdot \frac{a_4}{a_3} = q^2\text{, etc.}$$

provando que $(a_1, a_3, a_5, \ldots)$ também é P.G.

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_2} = q^2, \frac{a_6}{a_4} = \frac{a_6}{a_5} \cdot \frac{a_5}{a_4} = q^2\text{, etc.}$$

provando que $(a_2, a_4, a_6, \ldots)$ também é P.G.

135. P.G.: (3, __, __, −24, __, __)

$$\left.\begin{array}{l} a_4 = -24 \\ a_1 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow -24 = 3 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = -8 \Rightarrow q = -2$$

$$a_6 = a_1 \cdot q^5 = 3 \cdot (-2)^5 = -96$$

136. $a_1 = 78\,125$, $a_n = 128$ e $q = \dfrac{2}{5}$, então:

$$128 = 78125 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = \frac{2^7}{5^7} \Rightarrow n - 1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

então devem ser interpolados 6 meios geométricos.

137. $a_1 = 1\,458$, $a_n = 2$ e $q < \dfrac{1}{3}$, então:

$$2 = 1458 \cdot q^{n-1} \Rightarrow q = \left(\frac{2}{1458}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{1}{3^6}\right)^{\frac{1}{n-1}} = 3^{-\frac{6}{n-1}}$$

$$q < \frac{1}{3} \Rightarrow 3^{-\frac{6}{n-1}} < 3^{-1} \Rightarrow \frac{6}{n-1} > 1 \Rightarrow n - 1 < 6 \Rightarrow n < 7$$

Como a P.G. deve ter no máximo 6 termos, então o número de meios a interpolar é no máximo 4.

138. P.G. (a, x, y, b) $\Rightarrow \begin{cases} xy = ab & (1) \\ x^2 = ay & (2) \\ y^2 = xb & (3) \end{cases}$

De (1), vem: $y = \dfrac{ab}{x}$, que substituído em (2) implica:

$$x^2 = a \cdot \frac{ab}{x} \Rightarrow x^3 = a^2b \Rightarrow x = a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}.$$

Analogamente, $x = \dfrac{ab}{y} \Rightarrow y^2 = \dfrac{ab}{y} \cdot b \Rightarrow y^3 = ab^2 \Rightarrow y = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}$.

140. a) $S = \log_2 a + \log_2 2a + \log_2 4a + \ldots + \log_2 2^n a =$
$= \log_2 [a \cdot 2a \cdot 4a \cdot \ldots \cdot 2^n a]$

O logaritmando é uma P.G., tal que $a_1 = a$, $q = 2$ e o número de termos é $n + 1$.

Para calcular esse produto, temos:

$$P = a^{n+1} \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

E, então, $S = \log_2 \left[a^{n+1} \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \right] = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1)\log_2 a$.

b) Sendo $S = n + 1$, então:

$$n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\log_2 a \Rightarrow 1 = \frac{n}{2} + \log_2 a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{n}{2} = \log_2 a \Rightarrow a = 2^{1-\frac{n}{2}}.$$

141. $\begin{cases} \log_a b = 4 & (1) \\ \log_q b = 2 & (2) \\ \log_c b = \dfrac{1}{100} & (3) \\ c = a^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} & (4) \end{cases}$

De (3), vem: $b = c^{\frac{1}{100}}$ (5)

Substituindo (4) em (5), temos: $b = a^{\frac{n}{100}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{200}}$ (6)

Substituindo (6) em (1), vem:

$$\log_a\left(a^{\frac{n}{100}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{200}}\right) = 4 \Rightarrow a^4 = a^{\frac{n}{100}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{200}} \Rightarrow a = q^{\frac{n(n-1)}{2(400-n)}} \quad (7)$$

Substituindo (6) em (2), vem:

$$\log_q\left(a^{\frac{n}{100}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{200}}\right) = 2 \Rightarrow q^2 = a^{\frac{n}{100}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{200}} \Rightarrow a = q^{\frac{400-n(n-1)}{2n}} \quad (8)$$

Comparando (7) e (8), temos:

$$q^{\frac{n(n-1)}{2(400-n)}} = q^{\frac{400-n(n-1)}{2n}} \Rightarrow \frac{n(n-1)}{400-n} = \frac{400-n(n-1)}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 400n^2 = 400^2 \Rightarrow n^2 = 400 \Rightarrow n = 20$$

143. $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2n-1} \cdot a_{2n} = (a_2 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2n}) \cdot (a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2n-1})$

$$a_{2n} = 2^n \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \rightarrow a_2 = 2^2 = 4 \\ n = 2 \rightarrow a_4 = 2^4 = 16 \\ n = 3 \rightarrow a_6 = 2^6 = 64 \end{cases}$$

Então, a sequência dos termos de ordem par é 4, 16, 64, ..., em que $a_2 = 4$ e $q = 4$.

$$a_{2n-1} = (-3)^{2n-1} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \rightarrow a_1 = (-3)^1 = -3 \\ n = 2 \rightarrow a_3 = (-3)^3 = -27 \\ n = 3 \rightarrow a_5 = (-3)^5 = -243 \end{cases}$$

Então, a sequência dos termos de ordem ímpar é $-3, -27, -243, \ldots$, em que $a_1 = -3$ e $q = 9$.
Entre os 55 termos iniciais há 28 termos ímpares e 27 termos pares.
Assim:

$$P_{28} = (-3)^{28} \cdot (9)^{\frac{28 \cdot 27}{2}} = (-3)^{28} \cdot (9)^{378} = 3^{784}$$

$P_{27} = 4^{27} \cdot 4^{\frac{27 \cdot 26}{2}} = 4^{27} \cdot 4^{351} = 4^{378} = 2^{756}$

Assim: $P_{55} = P_{28} \cdot P_{27} = 3^{784} \cdot 2^{756}$.

146. $\begin{cases} a_2 + a_4 = 10 \\ a_1 + a_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1q + a_1q^3 = 10 \\ a_1 + a_1q^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1q\left(1+q^2\right) = 10 & (1) \\ a_1\left(1+q^2\right) = 5 & (2) \end{cases}$

Dividindo (1) por (2), membro a membro, vem:

$q = 2 \Rightarrow a_1 = 1$ e, portanto, $a_4 = 1 \cdot 2^3 \Rightarrow a_4 = 8$.

147. (base *b*, altura *h*, área *a*)

$$\begin{cases} \text{por hipótese}: \dfrac{h}{b} = 8 \Rightarrow h = 8b \quad (1) \\ \text{propriedade dos termos da P.G.}: h^2 = ba \quad (2) \\ \text{área do triângulo}: a = \dfrac{b \cdot h}{2} \quad (3) \end{cases}$$

Substituindo (3) em (2), temos: $h^2 = \dfrac{b^2h}{2} \Rightarrow h = \dfrac{b^2}{2}$.

Considerando (1), vem: $\dfrac{b^2}{2} = 8b \Rightarrow b = 16$.

148. $S_3 = \dfrac{3(q^3-1)}{q-1} = 21 \Rightarrow \dfrac{(q-1)(q^2+q+1)}{q-1} = 7 \Rightarrow q^2 + q - 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow q = -3$ ou $q = 2$

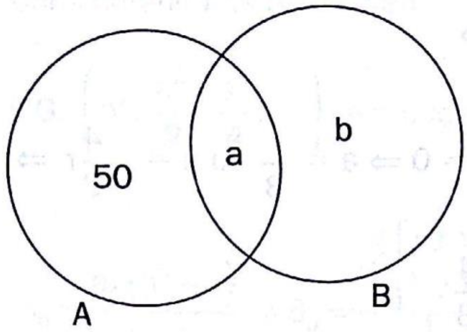
$S_4 = \dfrac{3\left(q^4-1\right)}{q-1} = 45 \Rightarrow \dfrac{\left(q^2+1\right)(q+1)(q-1)}{q-1} = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow (q^2 + 1)(q + 1) = 15$

Verifica-se que $q = -3$ não satisfaz esta última condição.
Então, $q = 2$.

Portanto: $S_5 = \dfrac{3\left(2^5-1\right)}{2-1} = 93$.

149.



$50 + a + b = 62 \Rightarrow a = 12 - b \quad (1)$

P.G. $(50, a, b) \Rightarrow a^2 = 50b \quad (2)$

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), temos:

$a = 12 - b \Rightarrow a^2 = 144 - 24b + b^2 = 50b$

$$b^2 - 74b + 144 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 72 \text{ (rejeitado porque é maior que } n(A \cup B)) \\ \text{ou} \\ b = 2 \Rightarrow a = 10 \end{cases}$$

Então: P.G. $(50, 10, 2)$ e $n(A \cap B) = 10$.

150. (x, y, z) é P.A. $\Rightarrow (x = y - r$ e $z = y + r)$

Por hipótese, $x + y + z = 15 \Rightarrow y - r + y + y + r = 15 \Rightarrow y = 5$

e daí $x = 5 - r$ e $z = 5 + r$.

$(x, y + 1, z + 5)$ é P.G. $\Rightarrow (5 - r, 6, 10 + r)$ é P.G.

Então: $6^2 = (5 - r)(10 + r) \Rightarrow r = 2$ ou $r = -7$.

Para $r = 2$, $x = 3$, $y = 5$ e $z = 7 \Rightarrow 3z = 21$.

Para $r = 7$, $x = 12$ (rejeitado porque $12 > 10$).

151. P.A. $(a, a + r, a + 2r, \ldots) \Rightarrow S_3 = 3(a + r)$

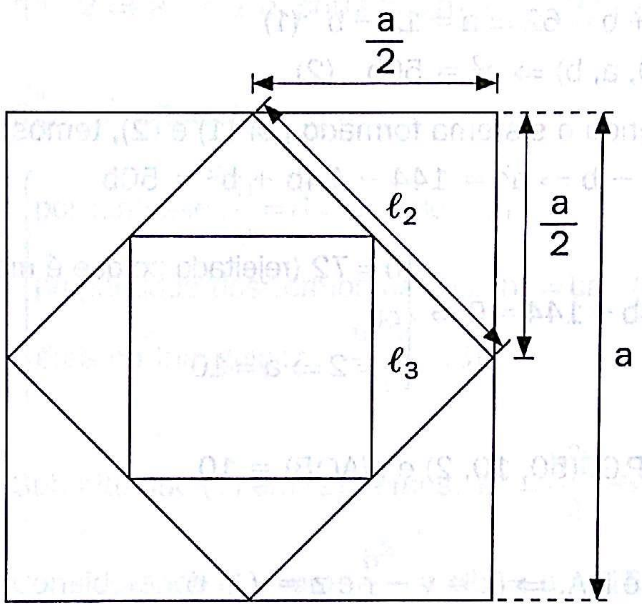
$$\text{P.G.} \left(a, \frac{2\sqrt{3}}{3}r, S_3, \ldots\right) \Rightarrow \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2 = a \cdot S_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4r^2}{3} = 3a(a+r) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9a^2 + 9ra - 4r^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{r}{3} \text{ ou } a = -\frac{4}{3}r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{r} = \frac{1}{3} \text{ ou } \frac{a}{r} = -\frac{4}{3}$$

153.



ℓ_2 é lado de Q_2

$$\ell_2^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

ℓ_3 é lado de Q_3

$$\ell_3^2 = \left(\frac{\ell_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell_2}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow \ell_3 = \frac{a}{2}$$

Então, considerando os lados, temos:

$$\text{P.G.} \left(a, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}, \ldots, a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right).$$

Considerando as áreas, vem:

P.G. $\left(a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \ldots\right)$, em que $a_1 = a^2$ e $q = \frac{1}{2}$.

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} \Rightarrow S_n = \frac{a^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow S_n = \frac{a^2(2^n - 1)}{2^{n-1}}$$

155. $\sum_{i=3}^{n} 2^i = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^n$ é a soma dos elementos de uma P.G. em que $a_1 = 2^3$, $q = 2$ e o último termo é 2^n. Essa P.G. tem $n - 2$ termos, então:

$$\sum_{i=3}^{n} 2^i = \frac{2^3(2^{n-2} - 1)}{2-1} = 2^{n+1} - 8 = 4088.$$

Daí resulta $2^{n+1} = 4096 = 2^{12}$ e $n = 11$.

157. $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$, $S_{2n} = \frac{a_1(q^{2n} - 1)}{q-1}$ e $S_{3n} = \frac{a_1(q^{3n} - 1)}{q-1}$

$$S_n^2 + S_{2n}^2 = \frac{a_1^2}{(q-1)^2} \cdot \left[(q^n - 1)^2 + (q^{2n} - 1)^2\right] =$$

$$= \frac{a_1^2}{(q-1)^2} \cdot (q^{4n} - q^{2n} - 2q^n + 2)$$

$$S_n(S_{2n} + S_{3n}) = \frac{a_1}{q-1}(q^n - 1) \cdot \left[\frac{a^1}{q-1} \cdot (q^{2n} - 1 + q^{3n} - 1)\right] =$$

$$= \frac{a_1^2}{(q-1)^2} \cdot (q^n - 1)(q^{3n} + q^{2n} - 2) = \frac{a_1^2}{(q-1)^2} \cdot (q^{4n} + q^{2n} - 2q^n + 2)$$

então: $S_n^2 + S_{2n}^2 = S_n(S_{2n} + S_{3n})$.

158. $$S_1 = \frac{a_{10}q - a_1}{q-1} = 3096 \quad (1)$$

$$S_2 = \frac{a_{11}q - a_2}{q-1} = 6138 \quad (2)$$

Dividindo (2) por (1), membro a membro, vem:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{a_{11}q - a_2}{a_{10}q - a_1} = \frac{6138}{3069} = 2 \Rightarrow \frac{a_1q^{11} - a_1q}{a_1q^{10} - a_1} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_1q\left(q^{10} - 1\right)}{a_1\left(q^{10} - 1\right)} = 2 \Rightarrow q = 2$$

Substituindo q = 2 em (1), vem a = 3 ⇒ P.G. (3, 6, 12, ..., 3072).

159. Seja P.G. $(a, aq, aq^2, ..., aq^{n-1})$ de razão q e seja

P.G. $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{aq}, \frac{1}{aq^2}, ..., \frac{1}{aq^{n-1}}\right)$ de razão $\frac{1}{q}$.

$$S = \frac{a\left(q^n - 1\right)}{q-1} \Rightarrow S^n = \frac{a^n\left(q^n - 1\right)^n}{(q-1)^n}$$

$$S' = \frac{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{q^n} - 1\right)}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{q^n - 1}{aq^{n-1}(q-1)} \Rightarrow (S')^n = \frac{(q^n - 1)^n}{a^nq^{n(n-1)}(q-1)^n}$$

$$\left(\frac{S}{S'}\right)^n = \frac{\dfrac{a^n(q^n-1)^n}{\left(q^n - 1\right)^n}}{\dfrac{(q^n-1)^n}{a^nq^{n(n-1)}(q-1)^n}} = \frac{a^n(q^n-1)^n}{(q-1)^n} \cdot \frac{a^nq^{n(n-1)}(q-1)^n}{(q^n-1)^n} =$$

$$= a^{2n}q^{n(n-1)} = P^2$$

161. $$S = 1 + 2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{9} + \frac{2}{25} + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{5}\right)^n + \ldots =$$

$$= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \ldots\right)}_{S_1} + \underbrace{\left(2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \ldots + 2\left(\frac{1}{5}\right)^n + \ldots\right)}_{S_2}$$

$$S_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$S_2 = 2\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \ldots + \left(\frac{1}{5}\right)^n + \ldots\right) = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{2}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$$

165. $$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$S_{1000} = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{1000} - 1\right]}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3\left(\frac{1 - 3^{1000}}{3^{1000}}\right)}{-2} = \frac{3(3^{1000} - 1)}{2 \cdot 3^{1000}} =$$

$$= \frac{3^{1000} - 1}{2 \cdot 3^{999}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{999}$$

Então, $S_{1000} = S - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{999}$, ou seja, $S = S_{1000} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{999}$, isto

é, comete-se um erro de $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{999}$ para mais.

166. $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\ldots$

Podemos decompor cada parcela, a partir da segunda, em uma soma de frações.

$1 = 1$

$\frac{2}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

$\frac{4}{8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$

$\frac{5}{16}=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}$

$\vdots$

Verificamos que cada coluna forma uma nova série infinita.

1ª coluna: $a_1 = 1$ e $q=\frac{1}{2} \Rightarrow S_1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

2ª coluna: $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q=\frac{1}{2} \Rightarrow S_2 = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

3ª coluna: $a_1 = \frac{1}{4}$ e $q=\frac{1}{2} \Rightarrow S_3 = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

4ª coluna: $a_1 = \frac{1}{8}$ e $q=\frac{1}{2} \Rightarrow S_4 = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$

e assim por diante.

As somas S_1, S_2, S_3, S_4, ..., por sua vez, formam uma P.G. infinita de primeiro termo 2 e razão $\frac{1}{2}$, então:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \ldots = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4.$$

167. $$\left.\begin{array}{l} a_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow a_1 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} \\ a_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3} \Rightarrow a_2 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}}{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{2}$$

168. $$2 + \frac{4}{m} + \frac{8}{m^2} + \ldots = \frac{14}{5}$$

$$2\left(1 + \frac{2}{m} + \frac{4}{m^2} + \ldots\right) = \frac{14}{5}$$

Sendo $S = 1 + \frac{2}{m} + \frac{4}{m^2} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{2}{m}} = \frac{m}{m-2}$, temos:

$$2\left(\frac{m}{m-2}\right) = \frac{14}{5} \Rightarrow m = 7.$$

169. $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$

$xS = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$

então, $S - xS = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$

e daí vem:

$$(1 - x) \cdot S = \frac{1}{1-x} \Rightarrow S = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

171. $$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}+\ldots=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots}_{S_1}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}}+\ldots}_{S_2}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1 \\ S_2=\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow S_1+S_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

172. $$S=1+\frac{3}{4}+\frac{7}{16}+\frac{15}{64}+\ldots+\frac{2^n-1}{2^{2n-2}}+\ldots=$$

$$=(2-1)+\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{64}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{2^n}{2^{2n-2}}-\frac{1}{2^{2n-2}}\right)+\ldots=$$

$$=\left(2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{2^n}{2^{2n-2}}+\ldots\right)-$$

$$-\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{2^{2n-2}}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

173. a) $0{,}417417... = \dfrac{417}{1000} + \dfrac{417}{1000000} + ... =$

$$= \frac{\frac{417}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{\frac{1000}{999}}{\frac{999}{1000}} = \frac{417}{999} = \frac{139}{333}$$

b) $5{,}121212... = 5 + \dfrac{12}{100} + \dfrac{12}{10000} + ... =$

$$= 5 + \frac{\frac{12}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 5 + \frac{\frac{12}{100}}{\frac{99}{100}} = 5 + \frac{12}{99} = 5 + \frac{4}{33} = \frac{169}{33}$$

c) $0{,}17090909... = \dfrac{1}{100}(17{,}090909...) =$

$$= \frac{1}{100}\left[17 + \frac{9}{100} + \frac{9}{10000} + ...\right] = \frac{1}{100} = \left[17 + \frac{1}{11}\right] = \frac{47}{275}$$

d) $9{,}3858585... = \dfrac{1}{10}[93{,}858585...] =$

$$= \frac{1}{10}\left[93 + \frac{85}{100} + \frac{85}{10000} + ...\right] = \frac{1}{10}\left[93 + \frac{85}{99}\right] = \frac{4646}{495}$$

176. $a_1 + a_3 + a_5 + ... = 20$ (razão: q^2)

$a_2 + a_4 + a_6 + ... = 10$ (razão: q^2)

$S_i = \dfrac{a_1}{1 - q^2} = 20$ e $S_p = \dfrac{a_2}{1 - q^2} = 10$, de onde vem:

$\dfrac{S_p}{S_i} = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$, isto é, $q = \dfrac{1}{2}$.

Substituindo $q = \dfrac{1}{2}$ em S_i, vem: $a_1 = 15$.

178. a) $a_4 = a_1q^3 \Rightarrow \dfrac{2\left(a^2+1\right)^2}{5a} = \dfrac{25a^2}{4\left(a^2+1\right)} \cdot q^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow q^3 = \dfrac{8\left(a^2+1\right)^3}{125a^3} \Rightarrow q = \dfrac{2\left(a^2+1\right)}{5a}$

A P.G. é decrescente $\Rightarrow$ se $a > 0$, $0 < q < 1$

Então, $0 < \dfrac{2\left(a^2+1\right)}{5a} < 1 \Rightarrow \overbrace{0 < \underbrace{2\left(a^2+1\right)}^{(1)} < 5a}_{(2)}$

(1) $2(a^2 + 1) > 0, \forall a \in \mathbb{R}$.

(2) $2(a^2 + 1) < 5a \Rightarrow 2a^2 - 5a + 2 < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2} < a < 2$

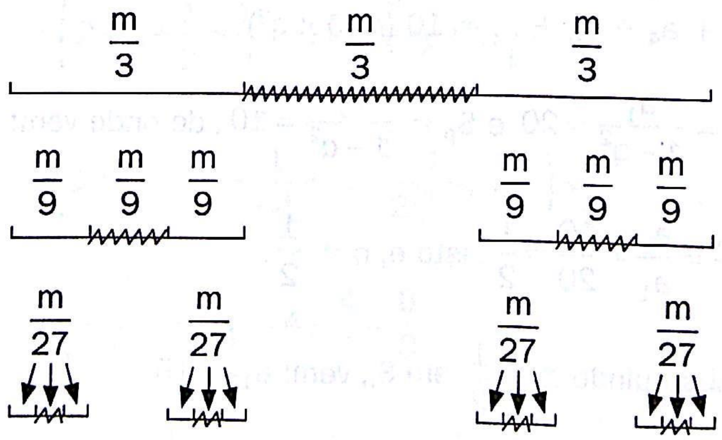
$(1) \cap (2) \Rightarrow \dfrac{1}{2} < a < 2$

b) $q = a - \dfrac{1}{5} = \dfrac{2\left(a^2+1\right)}{5a} \Rightarrow 3a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = \dfrac{-2}{3} \quad \text{(rejeitado)} \end{cases}$

Para $a = 1 \Rightarrow q = \dfrac{4}{5}$ e $a_1 = \dfrac{25}{8}$.

Então: $S = \dfrac{\frac{25}{8}}{1 - \frac{4}{5}} \Rightarrow S = \dfrac{125}{8}$.

179.



retirado $\dfrac{m}{3}$

retirado $2 \cdot \dfrac{m}{9}$

retirado $4 \cdot \dfrac{m}{27}$

$\left(\frac{m}{3}, \frac{2m}{9}, \frac{4m}{27}, \ldots\right)$ é P.G. em que $a_1 = \frac{m}{3}$ e $q = \frac{2}{3}$.

$S = \dfrac{\frac{m}{3}}{1-\frac{2}{3}}$ $S = m$.

180. $\ell_1 = 3 \Rightarrow p_1 = 9$

$\ell_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow p_2 = \frac{9}{2}$

$\ell_3 = \frac{3}{4} \Rightarrow p_3 = \frac{9}{4}$

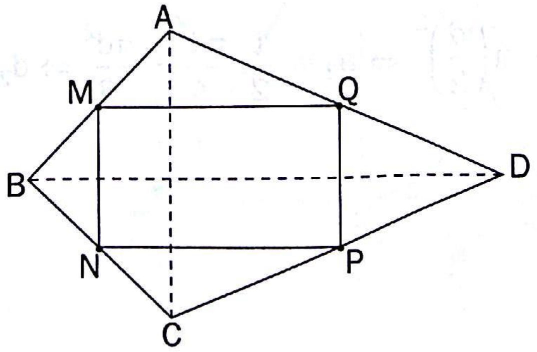
etc.

A sequência dos perímetros $\left(9, \frac{9}{2}, \frac{9}{4}, \ldots\right)$, é P.G. em que $a_1 = 9$ e $q = \frac{1}{2}$, então $S = \dfrac{9}{1-\frac{1}{2}} = 18$.

181. Os perímetros p, $\frac{p}{2}$, $\frac{p}{4}$, ... formam uma P.G. em que $a_1 = p$ e $q = \frac{1}{2}$,

então $S = \dfrac{p}{1-\frac{1}{2}} = 2p$.

182. Seja ABCD um quadrilátero qualquer e seja MNPQ o quadrilátero que tem vértices nos pontos médios dos lados de ABCD.



Temos:

$$A_{AMQ} + A_{CNP} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABD} + \frac{1}{4} \cdot A_{BCD} = \frac{1}{4} \cdot A$$

$$A_{BNM} + A_{DPQ} = \frac{1}{4} \cdot A_{ABC} + \frac{1}{4} \cdot A_{ACD} = \frac{1}{4} \cdot A$$

Então a soma das áreas dos triângulos AMQ, CNP, BMN e DPQ é $\frac{A}{2}$;

portanto, a área de MNPQ é $\frac{A}{2}$, em que A é a área de ABCD.

Concluímos, dessa forma, que as áreas dos quadriláteros construídos conforme descrição do enunciado formam a P.G.: $\left(A, \frac{A}{2}, \frac{A}{4}, \ldots\right)$, cuja soma é $S = \dfrac{A}{1 - \frac{1}{2}} = 2A$.

183. As áreas dos círculos formam a P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de razão $\frac{1}{2}$.

Determinemos a sequência $(d_1, d_2, d_3, \ldots)$ dos diâmetros dessas circunferências.

$$d_1 = d \Rightarrow a_1 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi d^2}{8} \Rightarrow {d_2}^2 = \frac{d^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_2 = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

$$d_2 = \frac{d}{\sqrt{2}} \Rightarrow a_2 = \pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{8} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{\pi d^2}{16} \Rightarrow {d_3}^2 = \frac{d^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_3 = \frac{d}{2}$$

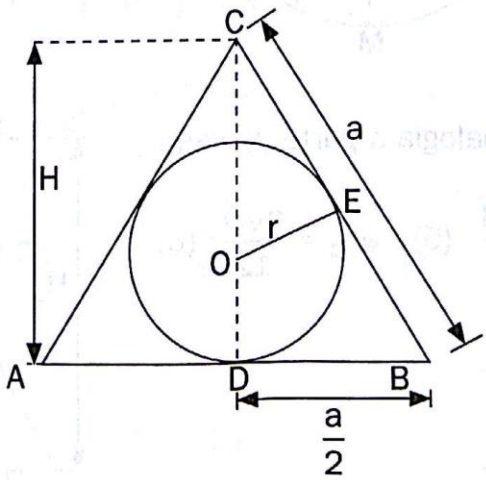
etc.

Os diâmetros formam a P.G.: $\left(d, \frac{d}{\sqrt{2}}, \frac{d}{2}, \ldots\right)$ cuja soma é A_0A_n,

então $A_0A_n = \dfrac{d}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = d\left(2+\sqrt{2}\right)$.

184. I) $\triangle BDC \sim \triangle OEC \Rightarrow \dfrac{BD}{OE} = \dfrac{BC}{OC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a}{2}}{r} = \frac{a}{H-r} \quad (1)$$



Por Pitágoras, no $\triangle CDB$, vem:

$$H = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

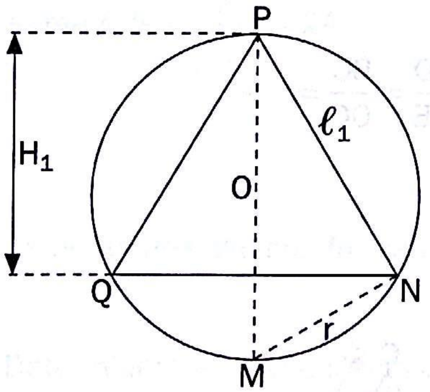
De (1) e (2), temos: $\dfrac{a}{2r} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2} - r} \Rightarrow$

$$\Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \quad (3)$$

II) Por Pitágoras, no $\triangle MNP$, vem:

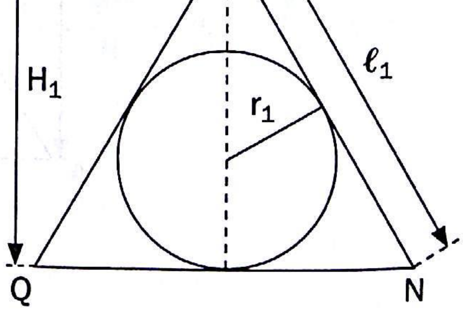
$(PM)^2 = (PN)^2 + (MN)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2r)^2 = \ell_1^2 + r^2 \Rightarrow \ell_1 = \dfrac{a}{2} \quad (4)$



III) Por analogia à parte (I), vem:

$$H_1 = \frac{a\sqrt{3}}{4} \quad (5) \quad \text{e} \quad r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{12} \quad (6)$$



IV) Lados dos triângulos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{por hipótese, } a_1 = a \\ \text{de (4), } a_2 = \dfrac{a}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{P.G.}\left(a, \frac{a}{2}, \ldots\right);\ q_{\Delta} = \frac{1}{2}$$

raios das circunferências:

$$\left.\begin{array}{l}\text{de (2), } r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \\ \text{de (6), } r_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{12}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{P.G.}\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a\sqrt{3}}{12}, \ldots\right);\ q_{\bigcirc} = \frac{1}{2}$$

áreas dos triângulos:

por hipótese e de (2): $A_1 = \dfrac{a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

de (4) e de (5): $A_2 = \dfrac{\dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{4}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$

Portanto: P.G. $\left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}, \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}, \ldots\right)$; $q_{\Delta} = \dfrac{1}{4}$

áreas dos círculos:

de (3): $\alpha_1 = \pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \dfrac{\pi a^2}{12}$

de (6): $\alpha_2 = \pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{12}\right)^2 = \dfrac{\pi a^2}{48}$

Portanto: P.G. $\left(\dfrac{\pi a^2}{12}, \dfrac{\pi a^2}{48}, \ldots\right)$; $q_{\bigcirc} = \dfrac{1}{4}$.

Assim:

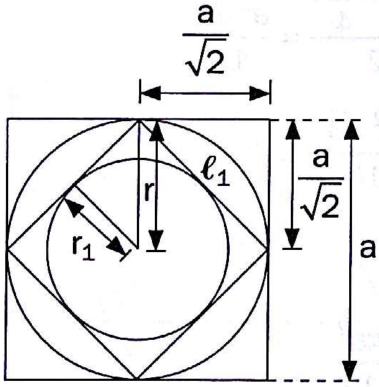
a) $S_{\Delta} = \dfrac{a}{1 - \dfrac{1}{2}} \Rightarrow S_{\Delta} = 2a$

b) $S_{\bigcirc} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{6}}{1-\dfrac{1}{2}} \Rightarrow S_{\bigcirc} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

c) $S_{\Delta} = \dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1-\dfrac{1}{4}} \Rightarrow S_{\Delta} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$

d) $S_{\bigcirc} = \dfrac{\dfrac{\pi a^2}{12}}{1-\dfrac{1}{4}} \Rightarrow S_{\bigcirc} = \dfrac{\pi a^2}{9}$

185. a) $\ell_1^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell_1 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$



1º quadrado: lado $= a \Rightarrow p_1 = 4a$

2º quadrado: lado $= \dfrac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow p_2 = \dfrac{4a}{\sqrt{2}}$

P.G. $\left(4a, \dfrac{4a}{\sqrt{2}}, \dots\right)$; $q_{\square} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$S_{\square} = \frac{4a}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2}a\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} = S_{\square} = 4a\left(2+\sqrt{2}\right)$$

b) 1º círculo: $r = \dfrac{a}{2} \Rightarrow C = 2\pi r \Rightarrow C = \pi a$

2º círculo: $r_1 = \dfrac{\ell_1}{2} = \dfrac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow C_1 = \dfrac{\pi a}{\sqrt{2}}$

P.G. $\left(\pi a, \dfrac{\pi a}{\sqrt{2}}, \ldots\right)$; $q_{\bigcirc} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$S_{\bigcirc} = \frac{\pi a}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi a\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} \Rightarrow S_{\bigcirc} = \pi a\left(2+\sqrt{2}\right)$$

c) 1º quadrado: lado $= a \Rightarrow$ área $= a^2$

2º quadrado: lado $= \dfrac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ área $= \dfrac{a^2}{2}$

P.G. $\left(a^2, \dfrac{a^2}{2}, \ldots\right)$; $q_{\square} = \dfrac{1}{2}$

$$S_{\square} = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_{\square} = 2a^2$$

d) 1º círculo: raio $= \dfrac{a}{2} \Rightarrow$ área $= \dfrac{\pi a^2}{4}$

2º círculo: raio $= \dfrac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$ área $= \dfrac{\pi a^2}{8}$

P.G. $\left(\dfrac{\pi a^2}{4}, \dfrac{\pi a^2}{8}, \ldots\right)$; $q_{\bigcirc} = \dfrac{1}{2}$

$$S_{\bigcirc} = \frac{\frac{\pi a^2}{4}}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_{\bigcirc} = \frac{\pi a^2}{2}$$

CAPÍTULO IV — Matrizes

189. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

1) $+/A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \\ 1 \end{bmatrix}_{p \times 1}$

2) $+\not/A = [1\ 1\ 1\ \dots\ 1]_{1 \times p}$

Assim: $+/(+\not/A) = +/[1\ 1\ 1\ \dots\ 1] = [p]$

191. $\left.\begin{array}{l} x^2 = x \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ 2x = x \Rightarrow x = 0 \end{array}\right\} x = 0$

$y = 3$
$z = 4$

$\left.\begin{array}{l} 5 = 5t \Rightarrow t = 1 \\ t^2 = t \Rightarrow t = 0 \text{ ou } t = 1 \end{array}\right\} t = 1$

195. $\left.\begin{array}{l} c_{21} = a_{21} + b_{21} = 3 + 9 = 12 \\ c_{22} = a_{22} + b_{22} = 4 + 10 = 14 \\ c_{23} = a_{23} + b_{23} = 5 + 11 = 16 \end{array}\right\} c_{21} + c_{22} + c_{23} = 12 + 14 + 16 = 42$

196. $\alpha + 2 = 3 \Rightarrow \alpha = 1$
$1 + \beta = 2 \Rightarrow \beta = 1$
$1 + 0 = \gamma \Rightarrow \gamma = 1$
$2 + (-1) = \delta \Rightarrow \delta = 1$

197.
$$\begin{cases} y^3 - y - 1 = 5 \quad (1) \\ y^2 + 2y + 2 = 10 \Rightarrow y^2 + 2y - 8 = 0 \Rightarrow (y = 2 \text{ ou } y = -4) \end{cases}$$

Substituindo $y = 2$ em (1): $8 - 2 - 6 = 0$. (V)
Substituindo $y = -4$ em (1): $-64 + 4 - 6 = 0$. (F)
Portanto, $y = 2$.

$$\begin{cases} 3x + x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + 3x = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ ou } x = -3) \\ 4x + x^2 + 2 = -1 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Substituindo $x = 0$ em (2): $0 + 0 + 3 = 0$. (F)
Substituindo $x = -3$ em (2): $9 - 12 + 3 = 0$. (V)
Portanto: $x = -3$.

201. $|a_{11} - b_{11}| = |1 - 5| = |-4| = 4$
$|a_{12} - b_{12}| = |2 - 7| = |-5| = 5$
$|a_{21} - b_{21}| = |3 - 6| = |-3| = 3$
$|a_{22} - b_{22}| = |4 - 8| = |-4| = 4$
$d(A; B) = 5$

204. a) $2X + A = 3B + C$
$2X = 3B + C - A$

$$X = \frac{1}{2}(3B + C - A) \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ 6 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

b) $X + A = \frac{1}{2}(B - C)$

$$X = \frac{1}{2}(B - C) - A \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{15}{2} \\ -1 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

c) $3X + A = B - X$

$3X + X = B - A$

$4X = B - A$

$$X = \frac{1}{4}(B - A) \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

d) $\frac{1}{2}(X - A - B) = \frac{1}{3}(X - C)$

$3(X - A - B) = 2(X - C)$

$3X - 3A - 3B = 2X - 2C$

$$X = 3A + 3B - 2C \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 14 & 27 \end{bmatrix}$$

205. $\frac{X-A}{2} = \frac{B+X}{3} + C \Rightarrow 3(X - A) = 2(B + X) + 6C \Rightarrow$

$\Rightarrow 3X - 2X = 3A + 2B + 6C \Rightarrow X = 3A + 2B + 6C$

então, $X = \begin{bmatrix} 28 & 1 \\ 23 & 3 \end{bmatrix}$

207. $\begin{cases} X+Y=A & (1) \\ X-Y=B & (2) \end{cases}$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2X = A + B = [3 \quad 5 \quad 12] \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 6 \end{bmatrix}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2Y = A - B = [-1 \quad 3 \quad 2] \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

208. $\begin{cases} 2X+3Y=A+B \\ 3X+4Y=A-B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6X+9Y=3A+3B & (1) \\ 6X+8Y=2A-2B & (2) \end{cases}$

$$(1) - (2) \Rightarrow Y = A + 5B = \begin{bmatrix} 11 \\ 28 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$(1)\ 6X = 3A + 3B - 9Y = \begin{bmatrix} -90 \\ -228 \\ -54 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -15 \\ -38 \\ -9 \end{bmatrix}$$

210. $c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} + a_{24} \cdot b_{43} + a_{25} \cdot b_{53} + a_{26} \cdot b_{63} + a_{27} \cdot b_{73} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + (-3) \cdot 5 + (-4) \cdot 6 + (-5) \cdot 7 = 1 + 0 - 3 - 8 - 15 - 24 - 35 = -84$

215. a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 34 \\ 56 \end{bmatrix}$

b) $\left.\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 14 & 2 \end{bmatrix}$$

219. Como $(AB)_{3 \times 3}$ e $A_{3 \times 3}$, então $B_{3 \times 3}$.

$$AB = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & y & 5 \\ 2 & 3 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ax & b & 2c \\ 3a & by & 5c \\ 2a & 3b & cz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{bmatrix}$$

Então, temos:

$$\left.\begin{array}{l} ax = 2 \\ 3a = 6 \Rightarrow a = 2 \\ 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} b = 3 \\ by = 12 \\ 3b = 9 \Rightarrow b = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} 2c = 10 \Rightarrow c = 5 \\ 5c = 25 \Rightarrow c = 5 \\ cz = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 4$$

221. $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 1+2y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x+y & 2x \end{bmatrix}$

Como AB = BA, então:

$$\begin{bmatrix} 2x & 1+2y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x+y & 2x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \\ x+y = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

225. A e B são comutáveis significa dizer que AB = BA.

a) $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 =$
$= A^2 + AB + AB + B^2 =$
$= A^2 + 2AB + B^2$

b) $(A - B)^2 = (A - B)(A - B) = A^2 - AB - BA + B^2 =$
$= A^2 - AB - AB + B^2 =$
$= A^2 - 2AB + B^2$

c) $(A + B)^3 = (A + B)^2(A + B) = (A^2 + 2AB + B^2)(A + B) =$
$= A^3 + A^2B + 2ABA + 2AB^2 + B^2A + B^3 =$
$= A^3 + A^2B + 2A^2B + 2AB^2 + AB^2 + B^3 =$
$= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

d) Analogamente.

e) Por indução:
I) Vale para k = 1: $(AB)^1 = A^1 \cdot B^1 = AB$
II) Suponhamos válido para n = k: $(AB)^k = A^k \cdot B^k$
III) Vamos provar que vale para n = k + 1:
$(AB)^{k+1} = (AB)^k(AB)^1 = A^kB^k \cdot AB = A^k \cdot A \cdot B^k \cdot B = A^{k+1}B^{k+1}$

226. a) $(A + B)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

b) $(A + B)(A - B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 19 \\ 5 & 85 \end{bmatrix}$

c) $A^2 - 2I_2A + I_2^2 = (A - I_2)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$

d) $A^3 - I_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^3 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 55 & 189 \\ 42 & 55 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 54 & 189 \\ 42 & 54 \end{bmatrix}$

228. Fazendo $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

Logo: $\begin{cases} a^2 + bc = 1 \quad (1) \\ bc + d^2 = 1 \quad (2) \\ ab + bd = 0 \quad (3) \\ ac + cd = 0 \quad (4) \end{cases}$

De (3) vem: $b(a + d) = 0$; então, temos:

1ª possibilidade: $a + d = 0$

Neste caso, $d = -a = \pm \sqrt{1 - bc}$, e para satisfazer (3) e (4) servem quaisquer *b* e *c*, $bc \leqslant 1$.

2ª possibilidade: $b = 0$ e $a + d \neq 0$
Neste caso, o sistema fica:
(1) $a^2 = 1$, (2) $d^2 = 1$, (4) $c(a + d) = 0$
cuja solução é ($a = d = 1$ e $c = 0$) ou ($a = d = -1$ e $c = 0$).
Assim:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ ou}$$

$$X = \begin{bmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{bmatrix} \text{ ou } X = \begin{bmatrix} -\sqrt{1-bc} & b \\ c & \sqrt{1-bc} \end{bmatrix}$$

229. Fazendo $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

$$\text{logo: } \begin{cases} a^2 + bc = a \ (1) \\ ab + bd = b \ (2) \\ ac + cd = c \ (3) \\ bc + d^2 = d \ (4) \end{cases}$$

De (2) vem: $b(a + d) = b$; então, temos:
1ª possibilidade: $a + d = 1$ e *b* qualquer
Neste caso, temos:

(1) $a^2 - a + bc = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4bc}}{2}$, com $bc \leqslant \dfrac{1}{4}$

(4) $d^2 - d + bc = 0 \Rightarrow d = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-bc}}{2}$

Como $a + d = 1$, os sinais tomados diante do radical $\sqrt{1-bc}$ devem ser opostos.
Note-se que para (3) o valor de *c* é qualquer.
2ª possibilidade: $b = 0$ e $a + d \neq 1$

Neste caso, o sistema fica:

(1) $a^2 = a$, (3) $c(a + d) = c$, (4) $d^2 = d$

cuja solução é ($a = c = d = 0$) ou ($a = 1 = d$ e $c = 0$).

Portanto:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{1-4bc}}{2} & b \\ c & \frac{1-\sqrt{1-4bc}}{2} \end{bmatrix} \text{ ou}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{1-4bc}}{2} & b \\ c & \frac{1+\sqrt{1-4bc}}{2} \end{bmatrix}$$

232. $$\begin{bmatrix} 1 & x & 5 \\ 2 & 7 & -4 \\ y & z & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & y \\ x & 7 & z \\ 5 & -4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow (x = 2, y = 5 \text{ e } z = -4)$$

233. $$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ x & 0 & 1-z \\ y & 2z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x & -y \\ 4 & 0 & -2z \\ -2 & z-1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (x = 4, y = -2 \text{ e } z = -1)$$

234. Para todo $i, j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ temos:

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = c_{ji}$.

237. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2+2x & -1+2y \\ 2+4x & -1+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 2+2x=1 \\ 2+4x=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}-1+2y=0\\-1+4y=1\end{array}\right\}\Rightarrow y=\frac{1}{2}\text{ e, então, } x+y=0.$$

238. $A + A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x & 3-x \end{bmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x & 3-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2-x & 1-x \\ x-x^2 & 2x-x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então:
$2 - x = 1 \Rightarrow x = 1$
$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$
$x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$
$2x - x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$
portanto, $x = 1$.

239. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A + A^{-1})^3 = (2A)^3 = 8A^3 =$

$$= 8A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

244. $B = PAP^{-1} \Rightarrow BP = PAP^{-1}P \Rightarrow BP = PA \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{13}\begin{bmatrix} a & 10 \\ 75 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{13} \cdot \begin{bmatrix} 2a+30 & -a+50 \\ 150+3b & -75+5b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 9 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} 2a+30=78 \\ -a+50=26 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 24 \\ \left.\begin{array}{l} 150+3b=117 \\ -75+5b=-130 \end{array}\right\} \Rightarrow b = -11 \end{cases}$$

246. a) $AX = B$

$A^{-1}AX = A^{-1}B$

$I_nX = A^{-1}B$

$X = A^{-1}B$

b) $AXB = I_n$

$A^{-1}AXB = A^{-1}I_n$

$I_nXB = A^{-1}$

$XBB^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

$XI_n = A^{-1}B^{-1}$

$X = A^{-1}B^{-1}$

c) $(AX)^{-1} = B$

$AX = B^{-1}$

$A^{-1}AX = A^{-1}B^{-1}$

$I_nX = A^{-1}B^{-1}$

$X = A^{-1}B^{-1}$

d) $BAX = A$

$B^{-1}BAX = B^{-1}A$

$I_nAX = B^{-1}A$

$AX = B^{-1}A$

$A^{-1}AX = A^{-1}B^{-1}A$

$I_nX = A^{-1}B^{-1}A$

$X = A^{-1}B^{-1}A$

e) $(AX)^t = B$

$[(AX)^t]^t = B^t$

$AX = B^t$

$A^{-1}AX = A^{-1}B^t$

$I_nX = A^{-1}B^t$

$X = A^{-1}B^t$

f) $(A + X)^t = B$

$[(A + X)^t]^t = B^t$

$A + X = B^t$

$X = B^t - A$

247. $(XA)^{-1} = B \Rightarrow XA = B^{-1} \Rightarrow XAA^{-1} = B^{-1}A^{-1} \Rightarrow X = B^{-1}A^{-1}$

Determinemos A^{-1}:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a + 4c = 1 \\ -2a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{11} \text{ e } c = \frac{2}{11}$$

$$\begin{cases} 3b + 4d = 0 \\ -2b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -\frac{4}{11} \text{ e } d = \frac{3}{11}$$

Então, $A^{-1} = \dfrac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Determinemos B^{-1}:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5e - 2g = 1 \\ \quad 3g = 0 \end{cases} \Rightarrow \ g = 0 \ \text{ e } \ e = \frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} 5f - 2h = 0 \\ \quad 3h = 1 \end{cases} \Rightarrow \ h = \frac{1}{3} \ \text{ e } \ f = \frac{2}{15}$$

Então, $B^{-1} = \dfrac{1}{15}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

$$X = \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{165}\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

250. Devemos provar que $D = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ é a matriz inversa de ABC, isto é, que $D(ABC) = (ABC)D = I_n$.

1º) $D(ABC) = (C^{-1}B^{-1}A^{-1})(ABC) = C^{-1}B^{-1}(A^{-1}A)BC = C^{-1}B^{-1}I_nBC =$
$= C^{-1}(B^{-1}B)C = C^{-1}I_nC = C^{-1}C = I_n$

2º) $(ABC)D = (ABC)(C^{-1}B^{-1}A^{-1}) = AB(CC^{-1})B^{-1}A^{-1} = ABI_nB^{-1}A^{-1} =$
$= A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$

251. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz inversível.

Determinemos A^{-1}:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \dfrac{d}{ad - bc} \ \text{ e } \ z = \dfrac{-c}{ad - bc} \\ \left.\begin{matrix} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = \dfrac{-b}{ad - bc} \ \text{ e } \ t = \dfrac{a}{ad - bc} \end{cases}$$

então: $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ e $(A^{-1})^t = \dfrac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Determinemos $(A^t)^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} ap+cr=1 \\ bp+dr=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow p=\dfrac{d}{ad-bc} \text{ e } r=\dfrac{-b}{ad-bc} \\ \left.\begin{matrix} aq+cs=0 \\ bq+ds=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q=\dfrac{-c}{ad-bc} \text{ e } s=\dfrac{a}{ad-bc} \end{cases}$$

então: $(A^t)^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

e daí $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

CAPÍTULO V — Determinantes

253. a) $\begin{vmatrix} \text{sen } x & -\cos x \\ \text{sen } y & \cos y \end{vmatrix} = \text{sen } x \cos y + \text{sen } y \cos x = \text{sen } (x+y)$

b) $\begin{vmatrix} \text{sen } x & -\cos x \\ \cos x & \text{sen } x \end{vmatrix} = \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

c) $\begin{vmatrix} 2 \text{ sen } x & 3 \cos x \\ 1-2\cos x & 3 \text{ sen } x+2 \end{vmatrix} =$

$= 2 \text{ sen } x(3 \text{ sen } x + 2) - 3 \cos x(1 - 2 \cos x) =$
$= 6 \text{ sen}^2 x + 4 \text{ sen } x - 3 \cos x + 6 \cos^2 x =$
$= 6 + 4 \text{ sen } x - 3 \cos x$

254. a) $\begin{vmatrix} \log a & \log b \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\log a - \frac{1}{2}\log b = \log \sqrt[4]{a} - \log \sqrt{b} =$

$= \log \dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}} = \log \sqrt[4]{\dfrac{a}{b^2}}$

b) $\begin{vmatrix} 2m^2 & 2m^4 - m \\ m & m^3 - 1 \end{vmatrix} = 2m^2(m^3 - 1) - m(2m^4 - m) =$

$= 2m^5 - 2m^2 - 2m^5 + m^2 = - m^2$

255. $a_{ij} = j - i^2 \Rightarrow a_{11} = 0, a_{12} = 1, a_{21} = -3, a_{22} = -2$

e, então, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 3$

256. a) $\begin{vmatrix} 2x & 3x+2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow \left(x = 2 \text{ ou } x = -\dfrac{1}{2}\right)$

b) $\begin{vmatrix} 2x & x-2 \\ 4x+5 & 3x-1 \end{vmatrix} = 11 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \left(x = \dfrac{1}{2} \text{ ou } x = -1\right)$

257. $\begin{vmatrix} x^2 & -1 \\ -1 & x^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ (duas raízes reais distintas)

258.
$$\left.\begin{aligned} x = \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &\Rightarrow x = ad - bc \\ y = \det\begin{bmatrix} -2a & 2c \\ -3b & 3d \end{bmatrix} &\Rightarrow y = -6(ad - bc) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{y}{x} = -6$$

261. $D = \begin{vmatrix} 2 & \log_5 5 & \log_5 5 \\ 5 & \log_5 125 & \log_5 25 \\ 8 & \log_3 27 & \log_3 243 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 8 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

262. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = m - 1$

$D' = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 5 & 5 & m+4 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow D' = 5(m-1) \Rightarrow D' = 5D$

264. $D_1 = \begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 \\ 3x & x+1 & 2x \end{vmatrix} = -8x - 1$

$D_2 = \begin{vmatrix} 3x & 2x \\ 4 & -x \end{vmatrix} = -3x^2 - 8x$

$D_1 = D_2 \Rightarrow -8x - 1 = -3x^2 - 8x \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}} \Rightarrow x = \dfrac{\pm\sqrt{3}}{3}$

265. $\begin{vmatrix} 0 & 3^x & 1 \\ 0 & 3^x & 2 \\ 4 & 3^x & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3^x = 0 \Rightarrow S = \varnothing$

266. $\begin{vmatrix} -\text{sen } x & -8 & -5 \\ 0 & -\text{sen } x & \text{cotg } x \\ 0 & 0 & \cos x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{sen}^2 x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}^2 x = 0 & (1) \\ \text{ou} \\ \cos x = 0 & (2) \end{cases}$

(1) $\text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow x = \pi$

(2) $\cos x = 0 \Rightarrow \left(x = \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } x = \dfrac{3\pi}{2} \right)$

Então, o menor valor x tal que $0 < x < 2\pi$ é $x = \dfrac{\pi}{2}$.

267. $\det A = \begin{vmatrix} \text{sen}^2 x & \text{sen}^2 x & 0 \\ \cos^2 x & \cos^2 y & \text{sen}^2 y \\ r^2 & 0 & r^2 \end{vmatrix} =$

$= r^2 \,\text{sen}^2 x \cos^2 y + r^2 \,\text{sen}^2 x \,\text{sen}^2 y - r^2 \,\text{sen}^2 x \cos^2 x =$

$= r^2 \,\text{sen}^2 x (\cos^2 y + \text{sen}^2 y - \cos^2 x) = r^2 \,\text{sen}^2 x (1 - \cos^2 x) =$

$= r^2 \,\text{sen}^2 x \,\text{sen}^2 x = r^2 \,\text{sen}^4 x$

268. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \end{vmatrix} = xy = 15 \quad (1)$

traço de $A = x + y + 1 = 9 \quad (2)$

De (1) e (2), vem: $\begin{cases} xy = 15 \\ x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x = 5 \text{ ou } x = 3)$

Para $x = 5$, $y = 3$ e para $x = 3$, $y = 5$.

278. $D = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & x \\ c & 0 & d & x & e \\ f & 0 & x & 0 & 0 \\ g & x & h & i & j \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{5+1} \cdot x \cdot \begin{vmatrix} 0 & b & 0 & x \\ 0 & d & x & e \\ 0 & x & 0 & 0 \\ x & h & i & j \end{vmatrix} =$

$= x \cdot (-1)^{4+1} \cdot x \cdot \begin{vmatrix} b & 0 & x \\ d & x & e \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -x^2 \cdot (-1)^{3+1} \cdot x \cdot \begin{vmatrix} 0 & x \\ x & e \end{vmatrix} =$

$= -x^3 \cdot (-x^2) = x^5$

Sendo $D < -32 \Rightarrow x^5 < -32 \Rightarrow x^5 < (-2)^5 \Rightarrow x < -2$.

280. $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 11 \\ 5 & 24 & 13 \\ 7 & 36 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 12 \cdot 1 & 11 \\ 5 & 12 \cdot 2 & 13 \\ 7 & 12 \cdot 3 & 17 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 5 & 2 & 13 \\ 7 & 3 & 17 \end{vmatrix}$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 4 & 8 & 12 & 8 \\ 10 & 5 & 9 & 13 \\ 14 & 7 & -3 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3\cdot 1 & 11 \\ 1\cdot 4 & 2\cdot 4 & 3\cdot 4 & 2\cdot 4 \\ 10 & 5 & 3\cdot 3 & 13 \\ 14 & 7 & 3\cdot(-1) & 15 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot 4\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 10 & 5 & 3 & 13 \\ 14 & 7 & -1 & 15 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 11 & 15 \\ 5 & 13 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5\cdot 1 \\ 3 & 11 & 5\cdot 3 \\ 5 & 13 & 5\cdot 5 \end{vmatrix} = 5\cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 11 & 3 \\ 5 & 13 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 = 0$$

281. A é uma matriz quadrada de ordem 4.
Então, $\det(2A) = 2^4 \cdot \det A \Rightarrow \det(2A) = 16(-6) = -96$
Como $\det(2A) = x - 97$, então $x - 97 = -96 \Rightarrow x = 1$.

282. Se $\det Q \neq 0$, então Q é inversível, ou seja, existe Q^{-1} tal que $Q^{-1}Q = I_4 = QQ^{-1}$ e daí:

$$Q^3 + 2Q^2 = 0 \Rightarrow Q^3Q^{-1} + 2Q^2Q^{-1} = 0 \cdot Q^{-1} \Rightarrow Q^2 + 2Q = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q^2Q^{-1} + 2QQ^{-1} = 0 \cdot Q^{-1} \Rightarrow Q + 2I_4 = 0 \Rightarrow Q = -2I_4$$

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det Q = 16$$

284. $$D' = \begin{vmatrix} 8x & -2x^2 & 2x^3 & -2x^4 \\ 4y & -y^2 & y^3 & -y^4 \\ 4z & -z^2 & z^3 & -z^4 \\ 4t & -t^2 & t^3 & -t^4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4\cdot 2\cdot x & 2\cdot(-1)\cdot x^2 & 2\cdot x^3 & 2\cdot(-1)\cdot x^4 \\ 4\cdot y & (-1)\cdot y^2 & y^3 & (-1)\cdot y^4 \\ 4\cdot z & (-1)\cdot z^2 & z^3 & (-1)\cdot z^4 \\ 4\cdot t & (-1)\cdot t^2 & t^3 & (-1)\cdot t^4 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(-1)(-1)\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & x^4 \\ y & y^2 & y^3 & y^4 \\ z & z^2 & z^3 & z^4 \\ t & t^2 & t^3 & t^4 \end{vmatrix} = 8\cdot D$$

286. Multiplicamos a 1ª linha por *x*, a 2ª por *y* e a 3ª por *z*.

$$\begin{vmatrix} zy & x & 1 \\ xz & y & 1 \\ xy & z & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} xyz & x^2 & x \\ xyz & y^2 & y \\ xyz & z^2 & z \end{vmatrix} = \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ 1 & y^2 & y \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ 1 & y^2 & y \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}$$

289. $$\begin{vmatrix} a & b+2c & c \\ x & y+2z & z \\ m & n+2p & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & 2c & c \\ x & 2z & z \\ m & 2p & p \end{vmatrix}}_{(*)} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

(*) 2ª coluna = 2 · 3ª coluna e, então, o determinante é igual a zero.

291. $$\begin{vmatrix} \cos 2a & \cos^2 a & \text{sen}^2 a \\ \cos 2b & \cos^2 b & \text{sen}^2 b \\ \cos 2c & \cos^2 c & \text{sen}^2 c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2 a - \text{sen}^2 a & \cos^2 a & \text{sen}^2 a \\ \cos^2 b - \text{sen}^2 b & \cos^2 b & \text{sen}^2 b \\ \cos^2 c - \text{sen}^2 c & \cos^2 c & \text{sen}^2 c \end{vmatrix} = 0$$

porque 1ª coluna = 2ª coluna + (−1) · 3ª coluna, isto é, a 1ª coluna é combinação linear das outras duas.

292. Seja $M = \begin{bmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{bmatrix}$

Pelo teorema de Jacobi, podemos adicionar, à 1ª linha, a 2ª e a 3ª linhas, obtendo:

$$M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{bmatrix}$$, tal que det M = det M'.

Mas det M' = 0 porque a 1ª linha é nula. Então, det M = 0.

295. Vamos somar à 3ª coluna uma combinação linear das duas outras, a saber, 1ª × 100 + 2ª × 10:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & (0+1\cdot100+3\cdot10) \\ 1 & 1 & (7+1\cdot100+1\cdot10) \\ 1 & 5 & (6+1\cdot100+5\cdot10) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 130 \\ 1 & 1 & 117 \\ 1 & 5 & 156 \end{vmatrix} =$$

$$= 13 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 12 \end{vmatrix}$$

296. Somando à 1ª coluna as outras três colunas, temos:

$$D = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ x+3a & x & a & a \\ x+3a & a & x & a \\ x+3a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & x & a & a \\ 1 & a & x & a \\ 1 & a & a & x \end{vmatrix}$$

297. $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ y & y & y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & x \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & x \\ y & y & y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + y \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= (x - y) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (x - y) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x - y) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x - y)(b - a)(c - a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (x - y)(b - a)(c - a)(c - b)$$

298. $$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$= (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} =$$

$= (a + b + c)(a + b + c)^2 = (a + b + c)^3$

(1) (2ª linha + 3ª linha) + 1ª linha

(2) 2ª coluna − 1ª coluna e 3ª coluna − 1ª coluna

299. $$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$$

$$\underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} (b+c)^2 - a^2 & b^2 - (a+c)^2 & 0 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (b+c+a)(b+c-a) & (b+a+c)(b-a-c) & 0 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a + b + c) \cdot \begin{vmatrix} b+c-a & b-a-c & 0 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

Justificativa:

(1) 1ª linha − 2ª linha

300. Para todo $a \in \mathbb{R}$, temos:

$$D = \begin{vmatrix} \cos 0 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$$

$$\underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} \cos 0 & (\cos 0 + \cos a + \cos 2a) & \cos 2a \\ \cos a & (\cos a + \cos 2a + \cos 3a) & \cos 3a \\ \cos 2a & (\cos 2a + \cos 3a + \cos 4a) & \cos 2a \end{vmatrix} =$$

$$\underset{(2)}{=}\begin{vmatrix} \cos 0 & \left(\cos a + 2\cdot\cos^2 a\right) & \cos 2a \\ \cos a & (\cos 2a + 2\cdot\cos 2a\cdot\cos a) & \cos 3a \\ \cos 2a & (\cos 3a + 2\cdot\cos 3a\cdot\cos a) & \cos 4a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos 0 & \cos a\,(1 + 2\cdot\cos a) & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a\,(1 + 2\cdot\cos a) & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a\,(1 + 2\cdot\cos a) & \cos 4a \end{vmatrix} =$$

$$= (1 + 2\cos a)\cdot \begin{vmatrix} \cos 0 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix} = (1 + 2\cdot\cos a)\cdot D$$

então, para todo $a \in \mathbb{R}$, temos:
$D = D + 2D\cdot\cos a \Rightarrow D\cdot\cos a = 0$ e isso exige $D = 0$.

Justificativas:

(1) 2ª coluna + (1ª coluna + 3ª coluna)
(2) $\cos 2a + \cos 0 = 2\cdot\cos^2 a, \forall a$
$\cos 3a + \cos a = 2\cdot\cos 2a\cdot\cos a, \forall a$
$\cos 4a + \cos 2a = 2\cdot\cos 3a\cdot\cos a, \forall a$

pois $\cos p + \cos q = 2\cdot\cos\dfrac{p+q}{2}\cdot\cos\dfrac{p-q}{2}$

301. $$\begin{vmatrix} \cos(x+a) & \operatorname{sen}(x+a) & 1 \\ \cos(x+b) & \operatorname{sen}(x+b) & 1 \\ \cos(x+c) & \operatorname{sen}(x+c) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{(1)}{=}\begin{vmatrix} \cos(x+b) & \operatorname{sen}(x+b) \\ \cos(x+c) & \operatorname{sen}(x+c) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cos(x+a) & \operatorname{sen}(x+a) \\ \cos(x+c) & \operatorname{sen}(x+c) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \cos(x+a) & \operatorname{sen}(x+a) \\ \cos(x+b) & \operatorname{sen}(x+b) \end{vmatrix} =$$

$= \text{sen}\,(x + c - x - b) - \text{sen}\,(x + c - x - a) + \text{sen}\,(x + b - x - a) =$
$= \text{sen}\,(c - b) + \text{sen}\,(a - c) + \text{sen}\,(b - a)$
que independe de x.

302. $$\begin{vmatrix} a^2 & a^2+4a+4 & a^2+8a+16 \\ a^2+4a+4 & a^2+8a+16 & a^2+12a+36 \\ a^2+8a+16 & a^2+12a+36 & a^2+16a+64 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & 4a+4 & 4a+12 \\ a^2+4a+4 & 4a+12 & 4a+20 \\ a^2+8a+16 & 4a+20 & 4a+28 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & 4(a+1) & 4(a+3) \\ a^2+4a+4 & 4(a+3) & 4(a+5) \\ a^2+8a+16 & 4(a+5) & 4(a+7) \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a+1 & a+3 \\ a^2+4a+4 & a+3 & a+5 \\ a^2+8a+16 & a+5 & a+7 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$= 2^4 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a+1 & a+3 \\ 4(a+1) & 2 & 2 \\ 4(a+3) & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2^4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a+1 & a+3 \\ 2(a+1) & 1 & 1 \\ 2(a+3) & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=}$$

$$= 2^6 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a+1 & a+3 \\ 2(a+1) & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2^6 \cdot 2^2 \cdot \begin{vmatrix} a+1 & a+3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2^8 \cdot (a + 1 - a - 3) = 2^8 \cdot (-2) = -2^9$$

Justificativas:

(1) 3ª coluna − 2ª coluna
2ª coluna − 1ª coluna

(2) 3ª linha − 2ª linha
2ª linha − 1ª linha

(3) 3ª linha − 2ª linha

303. $u^2 - 2u + 1 = 0 \Rightarrow u = 1$
Como $u = x^4$, então $x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

304. $A \cdot A^{-1} = I_3 \Rightarrow \det (A \cdot A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\det A^{-1} = -\frac{1}{2}$$

305. $\det (AB) = (\det A) \cdot (\det B) = (\det A) \cdot [\det (2A)] = (\det A)(2^3 \cdot \det A) =$

$$= 2^3 \cdot (\det A)^2 = \det C^{-1} \Rightarrow (\det A)^2 = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{32} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\det A)^2 = \frac{1}{2^8} \Rightarrow |\det A| = \frac{1}{16}$$

306. $$\left|\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

307. $$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & a & b & b \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & a & a & b \\ 1 & a & a & a \end{vmatrix} =$$

$$= a \cdot \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 \\ a-b & a-b & 0 \\ a-b & a-b & a-b \end{vmatrix} = a(a-b)^3$$

308. $$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 4 & 5 \\ x & x & x & 6 \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 4 & 5 \\ 1 & x & x & 6 \\ 1 & x & x & x \end{vmatrix} =$$

$$= x \cdot \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ x-1 & x-2 & 3 \\ x-1 & x-2 & x-3 \end{vmatrix} = x(x-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & x-2 & 3 \\ 1 & x-2 & x-3 \end{vmatrix} =$$

$$= x(x-1) \cdot \begin{vmatrix} x-4 & 1 \\ x-4 & x-5 \end{vmatrix} = x(x-1)(x-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x-5 \end{vmatrix} =$$

$= x(x-1)(x-4)(x-6) = 0$

então, $S = \{0, 1, 4, 6\}$.

311. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & r^2 & r^3 \\ 1 & r^2 & r^3 & r^4 \\ 1 & r^3 & r^4 & r^5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r-1 & r^2-1 & r^3-1 \\ r^2-1 & r^3-1 & r^4-1 \\ r^3-1 & r^4-1 & r^5-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (r-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & r+1 & r^2+r+1 \\ r+1 & r^2+r+1 & (r+1)(r^2+1) \\ r^2+r+1 & (r+1)(r^2+1) & r^4+r^3+r^2+r+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (r+1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -r & -r(r+1) \\ -r(r+1) & -r(r+1)^2 \end{vmatrix} = 0$$

pois no último determinante a 2ª linha é proporcional à 1ª.

313. $$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 \\ a-x & 0 & x-a & 0 \\ a-x & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} =$$

$$= (x-a)^3 \cdot \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-a)^3 \cdot \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-a)^3 \cdot (x+3a) = 0 \Rightarrow x = a \text{ ou } x = -3a \Rightarrow S = \{a, -3a\}$$

314. $$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -x & y & a & b \\ -x & -y & z & c \\ -x & -y & -z & t \end{vmatrix} = xy \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & z & t \\ -1 & 1 & a & b \\ -1 & -1 & z & c \\ -1 & -1 & -z & t \end{vmatrix} = xy \cdot \begin{vmatrix} 2 & a+z & b+t \\ 0 & 2z & c+t \\ 0 & 0 & 2t \end{vmatrix} =$$

$$= xy \cdot 2 \cdot 2z \cdot 2t = 8xyzt$$

315. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

316. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{sen } x & \text{sen } x & \text{sen } z \\ \cos x & \cos y & \cos z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{sen } y - \text{sen } x & \text{sen } z - \text{sen } x \\ \cos y - \cos x & \cos z - \cos x \end{vmatrix} =$$

$= (\text{sen } y - \text{sen } x)(\cos z - \cos x) - (\text{sen } z - \text{sen } x)(\cos y - \cos x) =$

$= (\text{sen } y \cdot \cos z - \text{sen } z \cdot \cos y) + (\text{sen } x \cdot \cos y - \text{sen } y \cdot \cos x) +$

$+ (\text{sen } z \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \cos z) =$

$= \text{sen } (y - z) + \text{sen } (x - y) + \text{sen } (z - x).$

Portanto, a igualdade é verdadeira.

317. $\begin{vmatrix} 1 & \text{sen } a & \cos a \\ 1 & \text{sen } b & \cos b \\ 1 & \text{sen } c & \cos c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{sen } b - \text{sen } a & \cos b - \cos a \\ \text{sen } c - \text{sen } a & \cos c - \cos a \end{vmatrix} =$

$= (\text{sen } b - \text{sen } a)(\cos c - \cos a) - (\text{sen } c - \text{sen } a)(\cos b - \cos a) =$

$$= \left(2 \text{ sen}\frac{b-a}{2} \cdot \cos\frac{b+a}{2}\right)\left(-2 \text{ sen}\frac{c+a}{2} \cdot \text{sen}\frac{c-a}{2}\right) -$$

$$- \left(2 \text{ sen}\frac{c-a}{2} \cdot \cos\frac{c+a}{2}\right)\left(-2 \text{ sen}\frac{b+a}{2} \cdot \text{sen}\frac{b-a}{2}\right) =$$

$$= 4 \cdot \text{sen } \frac{b-a}{2} \cdot \text{sen } \frac{c-a}{2} \cdot$$

$$\cdot \left(\text{sen}\frac{b+a}{2} \cdot \cos\frac{c+a}{2} - \text{sen}\frac{c+a}{2} \cdot \cos\frac{b+a}{2}\right) =$$

$$= 4 \cdot \text{sen } \frac{b-a}{2} \cdot \text{sen } \frac{c-a}{2} \cdot \text{sen } \frac{b-c}{2} =$$

$$= 4 \cdot \text{sen } \frac{b-c}{2} \cdot \text{sen } \frac{a-c}{2} \cdot \text{sen } \frac{a-b}{2}$$

318. $\begin{vmatrix} 1 & \cos 2a & \text{sen } a \\ 1 & \cos 2b & \text{sen } b \\ 1 & \cos 2c & \text{sen } c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1-2\cdot\text{sen}^2 a & \text{sen } a \\ 1 & 1-2\cdot\text{sen}^2 b & \text{sen } b \\ 1 & 1-2\cdot\text{sen}^2 c & \text{sen } c \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 2\cdot(\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b) & \text{sen } b - \text{sen } a \\ 2\cdot(\text{sen}^2 a - \text{sen } c) & \text{sen } c - \text{sen } a \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (\text{sen } a - \text{sen } b) \cdot (\text{sen } a - \text{sen } c) \cdot \begin{vmatrix} \text{sen } a + \text{sen } b & -1 \\ \text{sen } a + \text{sen } c & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (\text{sen } a - \text{sen } b)(\text{sen } a - \text{sen } c)(\text{sen } c - \text{sen } b)$$

319. $$D = \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 & S_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_{n-1} & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_{n-1} & S_n \end{vmatrix} =$$

$$= S_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 & S_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_{n-1} & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_{n-1} & S_n \end{vmatrix} =$$

$$= S_1 \cdot \begin{vmatrix} S_2 - S_1 & S_2 - S_1 & \cdots & S_2 - S_1 & S_2 - S_1 \\ S_2 - S_1 & S_3 - S_1 & \cdots & S_3 - S_1 & S_3 - S_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_2 - S_1 & S_3 - S_1 & \cdots & S_{n-1} - S_1 & S_{n-1} - S_1 \\ S_2 - S_1 & S_3 - S_1 & \cdots & S_{n-1} - S_1 & S_n - S_1 \end{vmatrix} =$$

$$= S_1 \cdot (S_2 - S_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & S_2 - S_1 & \cdots & S_2 - S_1 & S_2 - S_1 \\ 1 & S_3 - S_1 & \cdots & S_3 - S_1 & S_3 - S_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & S_3 - S_1 & \cdots & S_{n-1} - S_1 & S_{n-1} - S_1 \\ 1 & S_3 - S_1 & \cdots & S_{n-1} - S_1 & S_n - S_1 \end{vmatrix}$$

e, assim por diante, chegamos a:

$D = S_1 \cdot (S_2 - S_1)(S_3 - S_2)(S_4 - S_3) \ldots (S_{n-1} - S_{n-2})(S_n - S_{n-1}) =$

$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n - 1) \cdot n = n!$

323. $P(x) = (1 - x)(2 - x)(3 - x)(2 - 1)(3 - 1)(3 - 2)$ se anula para $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$.

325. $(\log 70 - \log 7)(\log 700 - \log 7)(\log 7000 - \log 7)(\log 700 - \log 70) \cdot (\log 7000 - \log 70)(\log 7000 - \log 700) =$

$$= \log\frac{70}{7} \cdot \log\frac{700}{7} \cdot \log\frac{7000}{7} \cdot \log\frac{700}{70} \cdot \log\frac{7000}{70} \cdot \log\frac{7000}{700} =$$

$$= \log 10 \cdot \log 100 \cdot \log 1000 \cdot \log 10 \cdot \log 100 \cdot \log 10 =$$
$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 12$$

327. $(2 - 1)(x - 1)(-5 - 1)(x - 2)(-5 - 2)(-5 - x) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(-5 - x) = 0 \Rightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = -5)$
$S = \{-5, 1, 2\}$

328. $$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se desenvolvemos det M pela última linha, obtemos:

$$\det M = (-1)^{n+1} \cdot r_1 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & 0 \\ c_1 & c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Reiterando o processo até eliminarmos o último determinante (de ordem 2), achamos: det M =

$= (-1)^{n+1} \cdot r_1 \cdot (-1)^n \cdot r_2 \cdot (-1)^{n-1} \cdot r_3 \ldots (-1)^{3+1} \cdot c_{n-2} \cdot (-1) \cdot b_{n-1} \cdot a_n =$
$= (-1)^S r_1 r_2 r_3 \ldots c_{n-2} \cdot b_{n-1} \cdot a_n \cdot (-1)$

em que S é a soma dos termos da P.A. $(n + 1, n, n - 1, \ldots, 4)$ que tem $n - 2$ termos; portanto:

$$S = \frac{(n-2)(n+1+4)}{2} = \frac{(n-2)(n+5)}{2}.$$

Como n é múltiplo de 4, S é ímpar e então:
$\det M = (-1)^{S+1} \cdot r_1 r_2 r_3 \ldots a_n$ é positivo.

329. O cálculo do determinante de uma matriz M é feito utilizando operações de multiplicação e de adição com os elementos de M. Se os elementos de M são inteiros, então o resultado dessas operações também é inteiro.

330. Vamos usar as propriedades dos determinantes e a relação de Stifel:

$$\binom{n}{p} - \binom{n-1}{p} = \binom{n-1}{p-1} \text{ ou } \binom{n}{p} - \binom{n-1}{p-1} = \binom{n-1}{p}$$

para calcular o determinante D:

$$D \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} \binom{p+1}{1} - \binom{p}{1} & \binom{p+2}{2} - \binom{p+1}{2} & \binom{p+3}{3} - \binom{p+2}{3} \\ \binom{p+2}{1} - \binom{p+1}{1} & \binom{p+3}{2} - \binom{p+2}{2} & \binom{p+4}{3} - \binom{p+3}{3} \\ \binom{p+3}{1} - \binom{p+2}{1} & \binom{p+4}{1} - \binom{p+3}{2} & \binom{p+5}{3} - \binom{p+4}{3} \end{vmatrix} =$$

$$\underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} \binom{p}{0} & \binom{p+1}{1} & \binom{p+2}{2} \\ \binom{p+1}{0} & \binom{p+2}{1} & \binom{p+3}{2} \\ \binom{p+2}{0} & \binom{p+3}{1} & \binom{p+4}{2} \end{vmatrix} =$$

$$\underset{(3)}{=}\begin{vmatrix} \binom{p}{0} & \binom{p+1}{1}-\binom{p}{0} & \binom{p+2}{2}-\binom{p+1}{1} \\ \binom{p+1}{0} & \binom{p+2}{1}-\binom{p+1}{0} & \binom{p+3}{3}-\binom{p+2}{1} \\ \binom{p+2}{0} & \binom{p+3}{1}-\binom{p+2}{0} & \binom{p+4}{3}-\binom{p+3}{1} \end{vmatrix} =$$

$$\underset{(4)}{=}\begin{vmatrix} \binom{p}{0} & \binom{p}{1} & \binom{p+1}{2} \\ \binom{p+1}{0} & \binom{p+1}{1} & \binom{p+2}{2} \\ \binom{p+2}{0} & \binom{p+2}{1} & \binom{p+3}{2} \end{vmatrix} =$$

$$\underset{(5)}{=}\begin{vmatrix} 1 & p & \binom{p+1}{2} \\ 1 & p+1 & \binom{p+2}{2} \\ 1 & p+2 & \binom{p+3}{2} \end{vmatrix} =$$

$$\underset{(6)}{=}\begin{vmatrix} 1 & p & \binom{p+1}{2} \\ 0 & 1 & \binom{p+2}{2}-\binom{p+1}{2} \\ 0 & 1 & \binom{p+3}{2}-\binom{p+2}{2} \end{vmatrix} =$$

$$\underset{(7)}{=} \begin{vmatrix} 1 & \binom{p+1}{1} \\ 1 & \binom{p+2}{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & p+1 \\ 1 & p+2 \end{vmatrix} = 1$$

Justificativas:

(1) 4ª linha − 3ª linha, 3ª linha − 2ª linha, 2ª linha − 1ª linha

(2) Stifel

(3) 3ª coluna − 2ª coluna, 2ª coluna − 1ª coluna

(4) Stifel

(5) $\binom{n}{0} = 1$ e $\binom{n}{1} = n$

(6) 3ª linha − 2ª linha, 2ª linha − 1ª linha

(7) Stifel

331. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & c & d & a \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & c & d & a \\ 1 & d & a & b \\ 1 & a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & c-b & d-c & a-d \\ 0 & d-c & a-d & b-a \\ 0 & a-d & b-a & c-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} (a-b+c-d) & d-c & a-d \\ -(a-b+c-d) & a-d & b-a \\ (a-b+c-d) & b-a & c-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & d-c & a-d \\ -1 & a-d & a-b \\ 1 & b-a & c-b \end{vmatrix} =$$

$$= -(a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & d-c & a-d \\ 1 & d-a & a-b \\ 1 & b-a & c-b \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ \end{matrix} =$$

$$= -(a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & d-c & a-d \\ 0 & c-a & -(b-d) \\ 0 & b-d & c-a \end{vmatrix} =$$

$$= -(a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} c-a & -(b-d) \\ b-d & c-a \end{vmatrix} =$$

$$= -(a+b+c+d)(a-b+c-d)\left[(c-a)^2 + (b-d)^2\right] =$$
$$= -(a+b+c+d)(a-b+c-d)\left[(a-c)^2 + (b-d)^2\right]$$

332. Seja $M = (a_{ij})_{n \times n}$ uma matriz simétrica.

Os complementos algébricos de dois elementos situados simetricamente em relação à diagonal principal são:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$ e $A_{ij} = (-1)^{j+i} \cdot D_{ji}$.

Como $D_{ij} = D_{ji}$, por se tratarem de determinantes de matrizes transpostas, então $A_{ij} = A_{ji}$.

333. Chamemos de a_i o primeiro termo e de q_i a razão da P.G. colocada na linha *i* da matriz M. Temos:

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_1q_1 & a_1q_1^2 & \dots & a_1q_1^{n-1} \\ a_2 & a_2q_2 & a_2q_2^2 & \dots & a_2q_2^{n-1} \\ a_3 & a_2q_3 & a_3q_3^2 & \dots & a_3q_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_nq_n & a_nq_n^2 & \dots & a_nq_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\det M = (a_1a_2a_3 \dots a_n) \begin{vmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 & q_1^{n-1} \\ 1 & q_2 & q_2^2 & q_2^{n-1} \\ 1 & q_3 & q_3^2 & q_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & q_n & q_n^2 & q_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1a_2a_3 \dots a_n)(q_2 - q_1)(q_3 - q_1) \dots (q_n - q_{n-1})$$

então:

$\det M = 0 \Leftrightarrow (\exists i, j \mid q_i = q_j)$.

334.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ -2 & -1 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ -2 & -2 & 0 & -2 & \dots & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -2 & -2 & -2 & -2 & \dots & n-4 \end{vmatrix} =$$

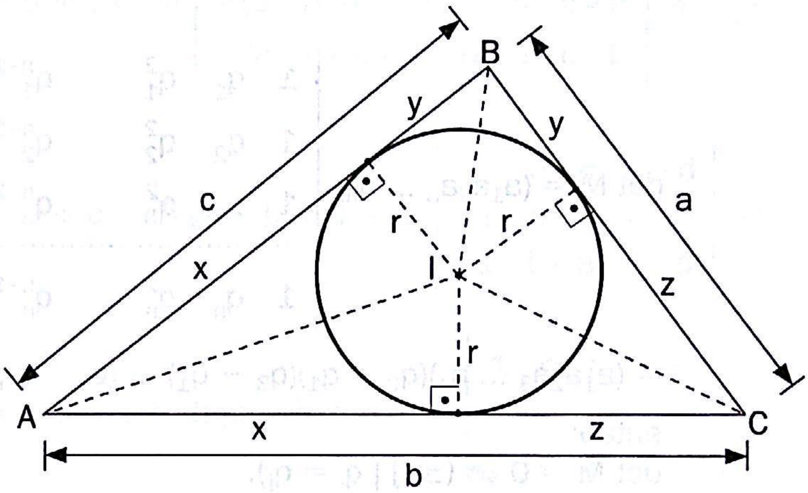
$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 & \cdots & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & \cdots & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & \cdots & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & -2 & -2 & -2 & \cdots & n-4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(n-2)!$$

335. Temos que provar a identidade:

$$(b - c) \cdot \text{cotg}\,\frac{A}{2} + (c - a) \cdot \text{cotg}\,\frac{B}{2} + (a - b) \cdot \text{cotg}\,\frac{C}{2} = 0.$$

Consideremos a circunferência inscrita no triângulo ABC (figura a seguir). Seu centro *I* é o ponto de interseção das bissetrizes internas, então:



$$\begin{cases} \text{cotg}\,\dfrac{A}{2} = \dfrac{x}{r} \\ \text{cotg}\,\dfrac{B}{2} = \dfrac{y}{r} \\ \text{cotg}\,\dfrac{C}{2} = \dfrac{z}{r} \end{cases}$$

e daí

$$\begin{cases} a = y + z = r \cdot \left(\text{cotg}\,\dfrac{B}{2} + \text{cotg}\,\dfrac{C}{2}\right) \\ b = x + z = r \cdot \left(\text{cotg}\,\dfrac{A}{2} + \text{cotg}\,\dfrac{C}{2}\right) \\ c = x + y = r \cdot \left(\text{cotg}\,\dfrac{A}{2} + \text{cotg}\,\dfrac{B}{2}\right) \end{cases}$$

Calculando cada cotangente nesse sistema, vem:

$$\text{cotg}\,\frac{A}{2} = \frac{(a+b+c)-2a}{2r} = \frac{p-a}{r},\ \text{cotg}\,\frac{B}{2} = \frac{p-b}{r},\ \text{cotg}\,\frac{C}{2} = \frac{p-c}{r}$$

em que $a + b + c = 2p$.

Temos, então:

$$(b - c) \cdot \text{cotg}\,\frac{A}{2} + (c - a) \cdot \text{cotg}\,\frac{B}{2} + (a - b) \cdot \text{cotg}\,\frac{C}{2} =$$

$$= \frac{1}{r} \cdot [(b - c)(p - a) + (c - a)(p - b) + (a - b)(p - c)] =$$

$$= \frac{1}{r}\,[p(b - c + c - a + a - b) + a(c - b) + b(a - c) + c(b - a)] = 0$$

336. $6 \cdot$ (6 determinantes de 5ª ordem) =
$= 6 \cdot 5 \cdot$ (5 determinantes de 4ª ordem) =
$= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot$ (4 determinantes de 3ª ordem) =
$= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot$ (3 determinantes de 2ª ordem) =
$= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot$ (2 termos) $= 6! = 720$ termos

337. $$\begin{vmatrix} \frac{m!}{(m-2)!} & \frac{m!}{(m-1)!} & 1 \\ \frac{m!}{2!(m-2)!} & m & 6 \\ m(m-1) & \frac{m!}{(m-1)!} & 0 \end{vmatrix} = -10\,m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} m(m-1) & m & 1 \\ \frac{m(m-1)}{2} & m & 6 \\ m(m-1) & m & 0 \end{vmatrix} = -10\,m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2(m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -10\ m \Rightarrow m(m-1)\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m(m-1)}{-2} = -10 \Rightarrow m^2 - m - 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ \text{ou} \\ m = -4 \ \ \text{(rejeitado)} \end{cases}$$

338. Seja M uma matriz antissimétrica de ordem $2n - 1$ (ímpar). Por ser antissimétrica, $M = -M^t$.

Então:

$\det M = \det(-M^t) = (-1)^{2n-1} \cdot \det M^t = -\det M^t = -\det M$

e daí

$2 \cdot \det M = 0$

portanto:

$\det M = 0$.

CAPÍTULO VI — Sistemas lineares

357. Admitindo que $-3t - 1 \neq 0$, $z - 2t \neq 0$, $t - y \neq 0$ e $2z - y \neq 0$, temos:

$$\frac{x+2y}{-3t-1} = 1 \Rightarrow x + 2y + 3t = -1$$

$$\frac{2x-y}{z-2t} = 1 \Rightarrow 2x - y - z + 2t = 0$$

$$\frac{x-2z}{t-y} = 2 \Rightarrow x + 2y - 2z - 2t = 0$$

$$\frac{3t-1}{2z-y} = 2 \Rightarrow 2y - 4z + 3t = 1$$

$$\begin{cases} x + 2y + \quad\quad 3t = -1 \\ 2x - \ y - \ z + 2t = \ 0 \\ x + 2y - 2z - 2t = \ 0 \\ \quad 2y - 4z + 3t = \ 1 \end{cases} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 124 \text{ e}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -36 \Rightarrow y = \frac{D_y}{D} = \frac{-36}{124} = \frac{-9}{31}$$

358. Fazendo $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$ e $\frac{1}{z} = z'$, temos:

$$\begin{cases} 2x' - \ y' - z' = -1 \\ \ x' + \ y' + z' = \ 0 \\ 3x' - 2y' + z' = \ 4 \end{cases} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$D_{x'} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow x' = \frac{D_{x'}}{D} = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3} \Rightarrow x = -3$$

$$D_{y'} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -14 \Rightarrow y' = \frac{D_{y'}}{D} = \frac{-14}{9} \Rightarrow y = -\frac{9}{14}$$

$$D_{z'} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 17 \Rightarrow z' = \frac{D_{z'}}{D} = \frac{17}{9} \Rightarrow z = \frac{9}{17}$$

$$S = \left\{\left(-3,\ -\frac{9}{14},\ \frac{9}{17}\right)\right\}.$$

360. $D = \begin{vmatrix} \text{sen a} & -\cos a \\ \cos a & \text{sen a} \end{vmatrix} = \text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$

$D_x = \begin{vmatrix} -\cos 2a & -\cos a \\ \text{sen } 2a & \text{sen a} \end{vmatrix} = -\text{sen a} \cdot \cos 2a + \text{sen } 2a \cdot \cos a =$

$= \text{sen }(2a - a) = \text{sen a}$

$D_y = \begin{vmatrix} \text{sen a} & -\cos 2a \\ \cos a & \text{sen } 2a \end{vmatrix} = \text{sen a} \cdot \text{sen } 2a + \cos a \cdot \cos 2a =$

$= \cos (2a - a) = \cos a$

Assim: $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{D_x}{D} \Rightarrow x = \text{sen a} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \Rightarrow y = \cos a \end{array}\right\} \Rightarrow S = \{(\text{sen a}, \cos a)\}$

361. $D = \begin{vmatrix} a-1 & b \\ a+1 & 2b \end{vmatrix} = b(a - 3)$

$D_x = \begin{vmatrix} 1 & b \\ 5 & 2b \end{vmatrix} = -3b \Rightarrow x = \dfrac{D_x}{D} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{3-a} \\ x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 0$

$D_y = \begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ a+1 & 5 \end{vmatrix} = 2(2a-3) \Rightarrow y = \dfrac{D_y}{D} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{2(2a-3)}{b(a-3)} \\ y = 2 \\ a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 1$

362. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$

$D_x = \begin{vmatrix} 28-z & 1 \\ 32 & -1 \end{vmatrix} = z - 60 \Rightarrow x = \dfrac{z-60}{-3}$

Como $x > 0$ e $z > 0$, vem: $0 < z < 60$ (1)

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 28-z \\ 2 & 32 \end{vmatrix} = 2z - 24 \Rightarrow y = \frac{2z-24}{-3} \Rightarrow z = \frac{3y-24}{-2} \quad (2)$$

De (1) e (2), vem: $0 < \dfrac{3y-24}{-3} < 60 \Rightarrow 0 < y < 8$ (3)

Mas $2x - y = 32 \Rightarrow y = 2x - 32$ (4)

De (3) e (4), vem: $0 < 2x - 32 < 8 \Rightarrow 16 < x < 20$

Então, as condições são: $16 < x < 20$, $0 < y < 8$ e $0 < z < 60$.

367. $$\begin{cases} x + y = 3 \quad \times 3 \quad \times(-2) \\ 3x - 2y = -1 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ -5y = -10 \\ -5y = -10 \end{cases}$$

Somamos e substituímos a 2ª equação multiplicada por -2 com a 3ª equação multiplicada por 3. Do mesmo modo, somamos e substituímos a 3ª equação multiplicada por 3 com a 2ª equação multiplicada por -2.

A 2ª e a 3ª linhas do sistema são a mesma equação e, então, podemos suprimir uma delas:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 5y = 10 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$ e, portanto, $x = 3 - y \Rightarrow x = 1$

$S = \{(1, 2)\}$, sistema possível determinado.

368. b) $$\begin{cases} -x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + 3t = 2 \\ x - 2y + z - 2t = 0 \end{cases} \oplus \quad \times(-2) \oplus \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - 2z = 1 \\ y - 4z + 3t = 4 \\ -y - z - 2t = 1 \end{cases} \oplus \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - 2z = 1 & (1) \\ y - 4z + 3t = 4 & (2) \\ -5z - t = 5 & (3) \end{cases}$$

Em (3), fazendo $z = \alpha$, vem: $-5\alpha + t = 5 \Rightarrow t = 5 + 5\alpha$.

Em (2), substituindo *z* e *t*, temos:

$y - 4\alpha + 3(5 + 5\alpha) = 4 \Rightarrow y = -11 - 11\alpha$

Em (1), substituindo *y* e *z*, temos:

$-x + (-11 - 11\alpha) - 2\alpha = 1 \Rightarrow x = -12 - 13\alpha$

O sistema é possível e indeterminado:

$S = \{(-12 - 13\alpha, -11 - 11\alpha, \alpha, 5 + 5\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

c) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \quad (\times -3)\ (\times -5) \\ 3x + 5y + 4z = 4 \quad \oplus \\ 5x + 3y + 4z = -10 \quad \oplus \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = -2 \\ -4y - 2z = -2 \quad (\times -3) \\ -12y - 6z = -20 \quad \oplus \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ -4y - 2z = -2 \\ 0 + 0 = -14 \text{ (falso)} \end{cases}$

O sistema é impossível. Então, $S = \varnothing$.

375. $\begin{cases} (2a-1)^2x + (4a^2-1)y = (2a+1)^2 \quad \left(\times \frac{-(2a+1)}{2a-1}\right) \\ (4a^2-1)x + (2a+1)y = (4a^2-1) \quad \oplus \end{cases} \xLeftrightarrow{\left(\text{se } a \neq \frac{1}{2}\right)}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2a-1)^2 x + (4a^2-1)y = (2a+1)^2 \\ (2a+1)(-2a)y = \dfrac{(-8a)(2a+1)}{2a-1} \end{cases} \xLeftrightarrow{\left(a \neq 0 \text{ e } a \neq -\frac{1}{2}\right)} y = \dfrac{4}{2a-1}$

Portanto, se $a \neq \dfrac{1}{2}$, $a \neq 0$ e $a \neq -\dfrac{1}{2}$, o sistema é possível e determinado.

Analisando as outras possibilidades, temos:

1) Se $a = \frac{1}{2}$, o sistema é impossível, porque na primeira equação teremos $0x + 0y = 4$, que é falso.

2) Se $a = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ (sistema possível e indeterminado)

3) Se $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 0x = 0 \end{cases}$ (sistema possível e indeterminado)

376. $\begin{cases} x + y = a & (\times -a^2) \\ a^2x + y = a \end{cases} \oplus \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ (1 - a^2)y = a(1 - a^2) \end{cases}$

1) Se $1 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$, então $0y = 0$, sistema possível e indeterminado.

2) Se $a \neq 1$ e $a \neq -1$, $y = a$ e $x = 0$, sistema possível e determinado.

3) Não há valores para *a* que tornem o sistema impossível.

377. $\begin{cases} mx + y = 1 - m \\ x + my = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my = 0 & (\times -m) \\ mx + y = 1 - m \end{cases} \oplus \Leftrightarrow \begin{cases} x + my = 0 \\ (1 - m^2)y = 1 - m \end{cases}$

Se $1 - m^2 \neq 0$, ou seja, $m \neq 1$ e $m \neq -1$, então o sistema é possível e determinado e $S = \left\{\left(-\frac{m}{m+1}, \frac{1}{m+1}\right)\right\}$.

Se $m = 1$, o sistema fica $\begin{cases} x + y = 0 \\ 0y = 0 \end{cases}$, então o sistema é possível e indeterminado e $S = \{(-\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Se $m = -1$, o sistema fica $\begin{cases} x - y = 0 \\ 0y = -2 \end{cases}$, então o sistema é impossível e $S = \varnothing$.

378. $\begin{cases} x+2y=1 \quad (\times -3) \\ 3x+ay=b \end{cases} \oplus \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ (a-6)y=(b-3) \end{cases}$

1) Se $a - 6 = 0$ e $b - 3 = 0$, isto é, se $a = 6$ e $b = 0$, $0y = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ sistema possível e indeterminado.

2) Se $a = 6$ e $b \neq 3$, temos $0y = b - 3$, sistema impossível.

3) Se $a \neq 6$, $\forall b \in \mathbb{R}$, sistema possível e determinado.

379. $\begin{cases} x+2y=b \quad (\times -2a) \\ 2ax+3y=1 \end{cases} \oplus \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=b \\ (3-4a)y=1-2ab \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=b \\ (4a-3)y=2ab-1 \end{cases}$

1) Se $4a - 3 = 0$ e $2ab - 1 = 0$, isto é, se $a = \dfrac{3}{4}$ e $b = \dfrac{1}{2a} = \dfrac{2}{3}$, sistema possível e indeterminado.

Fazendo $y = \alpha$, então $x = \dfrac{2}{3} - 2\alpha \Rightarrow S = \left\{\left(\dfrac{2}{3} - 2\alpha, \alpha\right)\right\}$.

2) Se $a \neq \dfrac{3}{4}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, sistema possível e determinado.

Então, $y = \dfrac{2ab-1}{4a-3} \Rightarrow x = \dfrac{2-3b}{4a-3} \Rightarrow S = \left\{\left(\dfrac{2-3b}{4a-3}, \dfrac{2ab-1}{4a-3}\right)\right\}$.

3) Se $a = \dfrac{3}{4}$ e $b \neq \dfrac{2}{3}$, sistema impossível.

380. $\begin{cases} x + my - (m+1)z = 1 \quad (\times -m) \\ mx + 4y + (m-1)z = 3 \end{cases} \oplus \Leftrightarrow \begin{cases} x + my - (m+1)z = 1 \\ (4 - m^2)y + (m^2 + 2m - 1)z = 3 - m \end{cases}$

Como o número de equações é menor que o número de incógnitas, o sistema é possível e indeterminado, $\forall m, m \in \mathbb{R}$ (sistema compatível).

381. $\begin{cases} x + y = 2 \quad (\times -m) \quad (\times -1) \\ mx + y = 1 \\ x - y = m \end{cases} \oplus \oplus \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ (-m+1)y = -2m + 1 \\ -2y = -2 + m \end{cases}$

Na 3ª equação, se $m = 0$, vem $y = 1$

Então, temos $\begin{cases} x + y = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1$; sistema possível e determinado e

$S = \{(1, 1)\}$.

Na 2ª Equação, se $-m + 1 = 0$, isto é, se $m = 1$, temos

$\begin{cases} x + y = 2 \qquad \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \text{ sistema possível e determinado} \\ -2y = -2 + 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

e $S = \left\{\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

Se $m \neq 0$ e $m \neq 1$, o sistema é indeterminado.

382. $\begin{cases} ax + by = c \quad \left(\times \frac{-p}{a}\right) \\ px + qy = d \end{cases} \oplus \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ (-bp + aq)y = -cp + ad = 0 \end{cases}$

O sistema é indeterminado se $-bp + aq = 0$ e $-cp + ad = 0$.

Então, vem $\begin{cases} -bp + aq = 0 \\ -cp + ad = 0 \Rightarrow p = \dfrac{ad}{c} \end{cases}$

Substituindo $p = \dfrac{ad}{c}$ na 1ª equação, vem: $q = \dfrac{bd}{c}$.

383. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x - y = m \\ x + y = 2 \end{cases}$$

encontramos $x = \frac{m+2}{2}$ e $y = \frac{2-m}{2}$, que, substituídos na equação $mx + y = 2$, conduzem à equação $m^2 + m = 0$, que é satisfeita se $m \in \{1, -2\}$.

Conclusão:

$m = 1$ sistema possível e determinado, com $x = \frac{3}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$

$m = -2 \Rightarrow$ sistema possível e determinado, com $x = 0$ e $y = 2$

$m \neq 1$ e $m \neq -2 \Rightarrow$ sistema impossível

384. $$\begin{cases} 6x + ay = 12 \quad \left(\times -\frac{2}{3}\right) \\ 4x + 4y = b \end{cases} \oplus \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + ay = 12 \\ \left(4 - \frac{2a}{3}\right)y = b - 8 \end{cases}$$

O sistema será e indeterminado somente se $4 - \frac{2a}{3} = 0$ e $b - 8 = 0$, ou seja, se $a = 6$ e $b = 8$.

394. $$\begin{cases} mx \quad -y + mz = m \\ 2x \qquad + mz = 3 \Rightarrow D = m^2(1 - m) \\ mx + my \qquad = 2 \end{cases}$$

1) Se $D \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \text{e} \\ m \neq 1 \end{cases}$ (sistema possível e determinado)

$$D_x = \begin{vmatrix} m & -1 & m \\ 3 & 0 & m \\ 2 & m & 0 \end{vmatrix} = -m(m-1)(m-2) \Rightarrow x = \frac{m-2}{m}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m & m \\ 2 & 3 & m \\ m & 2 & 0 \end{vmatrix} = m(m-4)(m-1) \Rightarrow y = \frac{4-m}{m}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} m & -1 & m \\ 2 & 0 & 3 \\ m & m & 2 \end{vmatrix} = -(m-1)(m+4) \Rightarrow z = \frac{m+4}{m^2}$$

$$S = \left\{\left(\frac{m-2}{m}, \frac{4-m}{m}, \frac{m+4}{m^2}\right)\right\}$$

2) Se $m = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0x - y + 0z = 0 \\ 2x + 0z = 3 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases} \Rightarrow$ sistema impossível

3) Se $m = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \quad (\times -2)\ (\times -1) \\ 2x + z = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - z = 1 \\ 2y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - z = 1 \end{cases} \xrightarrow{(z = \alpha)} y = \frac{\alpha + 1}{2} \text{ e, então, } x = \frac{3 - \alpha}{2}$$

sistema possível indeterminado $\Rightarrow S = \left\{\left(\frac{3-\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

395. $D = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & -1 & m \\ 1 & -m & 1 \end{vmatrix} = (m + 1)(m - 1)$

1) Se $D \neq 0$, então $m \neq 1$ e $m \neq -1 \Rightarrow$ sistema possível e determinado.

$$D_x = \begin{vmatrix} m & m & m \\ 0 & -1 & m \\ m & -m & 1 \end{vmatrix} = m(2m - 1)(m - 1) \Rightarrow x = \frac{m(2m-1)}{m+1}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 0 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = m(m - 1) \Rightarrow y = \frac{m}{m+1}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -m & m \end{vmatrix} = -2m^2 \Rightarrow z = \frac{2m^2}{1-m^2}$$

$$S = \left\{\left(\frac{m(2m-1)}{m+1}, \frac{m}{m+1}, \frac{2m^2}{1-m^2}\right)\right\}.$$

2) Se $D = 0$, suponhamos $m = 1$:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \ (-1) \\ x-y+z=0 \\ x-y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\ \ y+z= \ 1 \\ \quad -2y \quad =-1 \\ \quad -2y \quad = \ 0 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema indeterminado}$$

3) Se $D = 0$, seja $m = -1$:

$$\begin{cases} x-y-z=-1 \ (-1) \\ x-y-z= \ 0 \\ x+y+z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z=-1 \\ 0x + 0y + 0z = \ 1 \ \text{(falso)} \\ \quad 2y + 2z = \ 0 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema indeterminado}$$

397. $\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \quad (-2)\ (-3) \\ 2x + 5y + az = 0 \\ 3x + 7y + \ \ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + \quad 2z = 0 \\ -\ y + (a - 4)z = 0 \quad (-2) \\ -2y - \quad 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + \quad 2z = 0 \\ -y + (a - 4)z = 0 \\ (-2a + 3)z = 0 \end{cases}$$ então, sistema possível indeterminado $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2a + 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

398. $D = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 4x \quad - 2z = 2 \quad \left(\times \frac{3}{4}\right) \\ -\ 4y + 3z = 1 \\ -3x + 2y \quad = 3 - k \end{cases} \oplus \sim$$

$$\sim \begin{cases} 4x - 2y \quad = 2 \\ -\ 4y + 3z = 1 \quad \left(\times \frac{1}{2}\right) \\ 2y - \frac{3}{2}z = \frac{9}{2} - k \end{cases} \oplus \sim$$

$$\sim \begin{cases} 4x - 2y \quad = 2 \\ -\ 4y + 3z = 1 \\ 0z = 5 - k \end{cases}$$

Conclusão: Temos sistema possível indeterminado somente se $5 - k = 0$, ou seja, se $k = 5$.

399. a) $\begin{cases} 2x + 5y - 3z = 1 \\ 4x + 10y + 2z = 5 \\ 6x + 15y - z = k \end{cases}$ $\times -2$ $\oplus$ $\times -3$ $\oplus$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y - 3z = 1 \\ 8z = 3 \\ 8z = k - 3 \end{cases}$

O sistema tem solução (é possível) se k − 3 = 3, ou seja, k = 6.

b) Resolvendo o sistema, vem:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 3z = 1 \\ 8z = 3 \Rightarrow z = \dfrac{3}{8} \end{cases}$$

Fazendo y = α, na 1ª equação, temos:

$$2x + 5\alpha - \frac{9}{8} = 1 \Rightarrow x = \frac{17 - 40\alpha}{16}$$

$$S = \left\{\left(\frac{17 - 40\alpha}{16},\ \alpha,\ \frac{3}{8}\right),\ \forall\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

401. $D = \begin{vmatrix} 1 & m & m-1 \\ m-1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \end{vmatrix} = 2m^3 - 6m^2 + 6m =$

$= 2m(m^2 - 3m + 3)$

$D = 0 \Leftrightarrow m = 0$, considerando que $m^2 - 3m + 3 > 0, \forall m, m \in \mathbb{R}$.
Portanto, $\forall m, m \in \mathbb{R}^*$, $D \neq 0$ e o sistema é determinado.

402. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -m \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -10m + 6$

$D \neq 0$ (sistema determinado) $\Leftrightarrow m \neq \dfrac{3}{5}$

Então, será indeterminado se $m = \dfrac{3}{5}$.

$$\begin{cases} x + 2y - \frac{3}{5}z = -1 \\ 3x - y + z = 4 \\ -2x + 4y - 2z = k \end{cases} \quad \begin{matrix} \times -3 & \times 2 \\ \oplus & \oplus \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - \frac{3}{5}z = -1 \\ -7y + \frac{14}{5}z = 7 \\ 8y - \frac{16}{5}z = k - 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \times \frac{8}{7} \\ \oplus \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - \frac{3}{5}z = -1 \\ -y + \frac{2}{5}z = 1 \\ 0z = k + 6 \end{cases}$$

O sistema será indeterminado se $k + 6 = 0 \Rightarrow k = -6$.

Então, $m = \frac{3}{5}$ e $k = -6$.

403. $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -a \\ a & -a & 6 \end{vmatrix} = (a + 6)(a - 3)$

1) sistema possível e determinado $\Leftrightarrow D \neq 0 \Rightarrow a \neq -6$ e $a \neq 3$

2) Se a = −6:

$$\begin{cases} 2x - \ \ y + 3z = -6 \\ -x + 2y + 6z = \ \ b \\ -6x + 6y + 6z = \ \ 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 6z = -b \\ 2x - \ \ y + 3z = -6 \\ 3x - 3y - 3z = -1 \end{cases} \quad \times(-2) \ \oplus \quad \times(-3) \ \oplus \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - \ \ 6z = -b \\ \quad 3y + 15z = 2b - 6 \\ \quad 3y + 15z = 3b - 1 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema possível e indeterminado} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ 2b - 6 = 3b - 1 \Rightarrow b = -5$$

E, então, sistema impossível se a = −6 e b ≠ −5.

3) Se a = 3:

$$\begin{cases} 2x - \ \ y + 3z = 3 \\ -x + 2y - 3z = b \\ 3x - 3y + 6z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = -b \\ 2x - \ \ y + 3z = 3 \\ 3x - 3y + 6z = 2 \end{cases} \quad \times(-2) \ \oplus \quad \times(-3) \ \oplus \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 3z = -b \\ \quad 3y - 3z = 2b + 3 \\ \quad 3y - 3z = 3b + 2 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema possível e indeterminado} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ 2b + 3 = 3b + 2 \Rightarrow b = 1$$

E, então, sistema impossível se a = 3 e b ≠ 1.

404. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$

Então, o sistema é possível e determinado, quaisquer que sejam *a*, *b* e *c* reais.

408. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = \lambda x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$ e, portanto, $\lambda_1 + \lambda_2 = 4$.

409. $\begin{cases} x + 5y = \lambda x \\ 2x - y = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + 5y = 0 \quad \left(\times \dfrac{-2}{1-\lambda}\right) \\ 2x - (1+\lambda)y = 0 \end{cases} \overset{(\lambda \neq 1)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + 5y = 0 \\ \dfrac{\lambda^2 - 11}{1-\lambda} y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ sistema possível e indeterminado $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 11 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{11}$

415. a) $\begin{vmatrix} 1 & m \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 2m$

$6 - 2m = 0 \Rightarrow m = 3$ e, então, $\begin{cases} m \neq 3, \text{ sistema determinado} \\ m = 3, \text{ sistema indeterminado} \end{cases}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 3 & 5 \\ m^2 & 9 & 25 \end{vmatrix} = (3 - m)(5 - m)(5 - 3) = 2(m - 3)(m - 5)$

Se $m \neq 3$ e $m \neq 5$, sistema determinado.

Se $m = 3$ e $m = 5$, sistema indeterminado.

416. $\begin{cases} kx + ky + z = 0 \\ x + ky + kz = 0 \\ kx + y + kz = 0 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} k & k & 1 \\ 1 & k & k \\ k & 1 & k \end{vmatrix} = 2k^3 - 3k^2 + 1 = (k - 1)(k - 1)(2k + 1)$$

Portanto, para $k \neq 1$ e $k \neq -\dfrac{1}{2}$, sistema determinado e para $k = 1$ ou $k = -\dfrac{1}{2}$, sistema indeterminado.

417. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2m & 3 \\ 2 & 6 & -4m \end{vmatrix} = 8m^2 + 20m + 12$

$D = 0 \Rightarrow 8m^2 + 20m + 12 = 0 \Rightarrow m = -1$ ou $m = -\dfrac{3}{2}$

1) Se $m \neq -1$ e $m \neq -\dfrac{3}{2}$, sistema determinado.

2) Se $m = -1$:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \quad (\times -4)\ (\times -2) \\ 4x + 2y + 3z = 0 \ \oplus \\ 2x + 6y + 4z = 0 \ \oplus \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \overset{(z = \alpha)}{\Rightarrow} y = -\frac{\alpha}{2}$$

e, então, $x = -\dfrac{\alpha}{2}$.

Portanto, $S = \left\{\left(-\dfrac{\alpha}{2}, -\dfrac{\alpha}{2}, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

3) Se $m = \dfrac{-3}{2}$:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x + 3y + 3z = 0 \\ 2x + 6y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x + 3y + 3z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases} \quad \times -4 \quad \times -1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \overset{(z = \alpha)}{\Rightarrow} y = -\alpha$$

e, então, $x = 0$

Portanto, $S = \{(0, -\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

419. $\begin{cases} kx + 2y + z = 0 \\ -2kx - y + 3z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ -2k & -1 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 9k + 14 \Rightarrow 9k + 14 = 0 \Rightarrow k = -\frac{14}{9}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{14}{9}x + 2y + z = 0 \\ \dfrac{28}{9}x - y + 3z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 2z = 0 \\ -14x + 18y + 9z = 0 \\ 28x - 9y + 27z = 0 \end{cases} \quad \times 7 \quad \times -14 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 2z = 0 \\ -3y - 5z = 0 \\ 3y + 5z = 0 \end{cases} \overset{(z = \alpha)}{\Rightarrow} y = -\frac{5\alpha}{3}$$

e, então, $x = -\dfrac{3\alpha}{2}$.

$$S = \left\{\left(-\frac{3\alpha}{2}, -\frac{5\alpha}{3}, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

423. $$D = \begin{vmatrix} -(m+1)^3 & (-m-1)^2 & (-m-1) & 1 \\ -(m+2)^3 & (-m-2)^2 & (-m-2) & 1 \\ (m+1)^3 & (m+1)^2 & (m+1) & 1 \\ (m^2+1)^3 & (m^2+1)^2 & (m^2+1) & 1 \end{vmatrix}$$

Considerando que $-(m+1)^3 = (-m-1)^3$ e $-(-m-2)^3$, então D é determinante de Vandermonde.

$D = [(-m-2) - (-m-1)] \cdot [(m+1) - (-m-1)] \cdot [(m+1) - (-m - 2)] \cdot [(m^2+1) - (-m-1)] \cdot [(m^2+1) - (-m-2)] \cdot [(m^2+1) - (m + 1)] \Rightarrow D = [-1] \cdot [2m+2] \cdot [2m+3] \cdot [m^2+m+2] \cdot [m^2+m+3] \cdot [m^2-m]$

$$D = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+2=0 \Rightarrow m=-1 \\ \text{ou} \\ 2m+3=0 \Rightarrow m=-\dfrac{3}{2} \\ \text{ou} \\ m^2-m=0 \Rightarrow m=0 \text{ ou } m=1 \end{cases}$$

porque $m^2 + m + 2 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ e $m^2 + m + 3 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Portanto, $m \in \left\{-\dfrac{3}{2}, -1, 0, 1\right\}$.

428. $$D = \begin{vmatrix} (\text{sen } \alpha - 1) & 2 & -\text{sen } \alpha \\ 0 & 3 \text{ sen } \alpha & 4 \\ 3 & 7 \text{ sen } \alpha & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$D = \text{sen}^2\, \alpha - 10 \text{ sen } \alpha - 24 = 0$
Então, $\text{sen } \alpha = 12$ ou $\text{sen } \alpha = -2$.
Ambas as soluções rejeitadas porque $-1 \leqslant \text{sen } \alpha \leqslant 1$ e, portanto, não existem valores α que satisfaçam a condição do problema.

430. b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

característica = 3

431. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A característica é 2, porque a 3ª linha é igual à soma das duas primeiras.

433. a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a^2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & (a-1) & -(a-1) & (a-1) \\ 0 & -(a-1) & -(a+1)(a-1) & a(a-1) \end{bmatrix}$

Se $a \neq 1$, $\rho = 3$

Se $a = 1$, $A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\rho = 1$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & a-2 & a^2-4 & a^3-8 \end{bmatrix}$$

Se $a \neq 2$, $\rho = 3$.
Se $a = 2$, $\rho = 2$.

Ou, ainda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & a-2 & a^2-4 & a^3-8 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & a-3 & a^2-9 & a^3-27 \end{bmatrix}$$

Se $a \neq 3$, $\rho = 3$.
Se $a = 3$, $\rho = 2$.

Em síntese: $\begin{cases} \text{Se } a \neq 2 \text{ e } a \neq 3, \ \rho = 3. \\ \text{Se } a = 2 \text{ ou } a = 3, \ \rho = 2. \end{cases}$

438. a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -8 \end{bmatrix}$$

$\rho(A) = \rho(B) = 3 = n \Rightarrow$ sistema possível e determinado

Portanto:

$-6z = -8 \Rightarrow z = \dfrac{4}{3}$

$y - z = -2 \Rightarrow y = -\dfrac{2}{3}$

$x + y + 2z = 3 \Rightarrow x = 1$

$S = \left\{\left(1, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)\right\}.$

b) $\left[\begin{array}{ccc:c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\rho(A) = \rho(B) = 2 < 3 \Rightarrow$ sistema possível e indeterminado
Fazendo $z = \alpha$, vem:
$-y + 3\alpha = 0 \Rightarrow y = 3\alpha - 1$
$-x - y + z = 0 \Rightarrow x = 1 - 2\alpha$
$S = \{(1 - 2\alpha, 3\alpha - 1, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}.$

439. a) $\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim$

$\sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 4 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 8 & -3 & 0 \end{array}\right]$

$\rho(A) = \rho(B) = 2 < 4 \Rightarrow$ sistema possível e indeterminado

b) $\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$

$\rho(A) \neq \rho(B) \Rightarrow$ sistema impossível

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right]$

$\rho(A) = \rho(B) = 3 = n \Rightarrow$ sistema possível e determinado

d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\rho(A) = \rho(B) = 2 < n \Rightarrow$ sistema possível e indeterminado

e) $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\rho(A) = \rho(B) = 2 < 3 \Rightarrow$ sistema possível e indeterminado

f) $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$

$\rho(A) \neq \rho(B) \Rightarrow$ sistema impossível

440. $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 & a^2 \\ 2 & 2 & (3-a) & b^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & 0 & a^2-1 \\ 0 & 0 & 1-a & b^2-2 \end{bmatrix}$

a) Para $a \neq 1$, temos $\rho(A) = \rho(B) = 3$ e sistema possível e determinado.

b) Para $a = 1$ e $b \neq \sqrt{2}$ e $b \neq -\sqrt{2}$, temos $\rho(A) = \rho(B) = 2$ e sistema possível e indeterminado, com indeterminação simples.

c) Para $a = 1$ e $b = \pm\sqrt{2}$, temos $\rho(A) = \rho(B) = 1$ e sistema possível e indeterminado, com dupla indeterminação.

442. $$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \\ bc+bd+cd & ac+ad+cd & ab+ad+bd & ab+ac+bc \\ bcd & acd & abd & abc \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & a-c & a-d \\ (a-b)(c+d) & (a-c)(b+d) & (a-d)(b+c) \\ (a-b)cd & (a-c)bd & (a-d)bc \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c+d & b+d & b+c \\ cd & bd & bc \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d) \cdot \begin{vmatrix} b-c & b-d \\ (b-c)d & (b-d)c \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ b+c+d & a+c+d & 0 & a+b+c \\ bc+bd+cd & ac+ad+cd & 0 & ab+ac+bc \\ bcd & acd & B & abc \end{vmatrix} =$$

$$= -B \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c+d & a+c+d & a+b+c \\ bc+bd+cd & ac+ad+cd & ab+ac+bc \end{vmatrix} =$$

$$= -B \begin{vmatrix} a-b & a-d \\ (a-b)(c+d) & (a-d)(b+c) \end{vmatrix} = -B(a-b)(a-d)(b-d)$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-B}{(a-c)(b-c)(c-d)}$$

443. O segundo sistema deve ter uma única solução ($x = 1$ e $y = 1$). Notemos que (1, 1) é solução do segundo sistema, qualquer que seja *a*. Para que não exista outra solução, a condição é

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ ou seja, } a \neq 1.$$

444. $\begin{cases} 2^{x+y+z} = 2^3 \\ 3^{x+z} = 3^{9+2y} \\ 5^{3+x} = 5^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2y + z = 9 \\ x - z = -3 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{array}\right]$$

Então: $-2z = -8 \Rightarrow z = 4$

$-3y = 6 \Rightarrow y = -2$

$x + y + z = 3 \Rightarrow x = 1$

$S = \{(1, -2, 4)\}$.

445. $D = \left|\begin{array}{c|cc} 1 & -\cos C & -\cos B \\ \hline -\cos C & 1 & -\cos A \\ -\cos B & -\cos A & 1 \end{array}\right| =$

$$= \begin{vmatrix} 1-\cos^2 C & -\cos A - \cos B \cdot \cos C \\ -\cos A - \cos B \cdot \cos C & 1-\cos^2 B \end{vmatrix} =$$

$= (1 - \cos^2 C)(1 - \cos^2 B) - (\cos A + \cos B \cdot \cos C)^2 =$

$= 1 - \cos^2 B - \cos^2 C - \cos^2 A - 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 0$

pois para ângulos de um triângulo vale a relação

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ (conforme se prova no volume 3 desta coleção).

Sendo $D = 0$, o sistema linear homogêneo dado é indeterminado.

Fazendo $z = \alpha$, temos:

$$\begin{cases} x - y \cdot \cos\ C = \alpha \cdot \cos\ B \\ -x \cdot \cos\ C + y = \alpha \cdot \cos\ A \end{cases}$$

em que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -\cos C \\ -\cos C & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2 C = \text{sen}^2\, C$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha \cdot \cos B & -\cos C \\ \alpha \cdot \cos A & 1 \end{vmatrix} = \alpha \cdot (\cos B + \cos A \cdot \cos C)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \cdot \cos B \\ -\cos C & \alpha \cdot \cos A \end{vmatrix} = \alpha \cdot (\cos A + \cos B \cdot \cos C)$$

e daí:

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{\alpha(\cos\ B + \cos\ A \cdot \cos\ C)}{\text{sen}^2 C}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{\alpha(\cos\ A + \cos\ B \cdot \cos\ C)}{\text{sen}^2 C}$$

446. $$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ 5x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -4 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right]$$

Então: $-4z = -2 \Rightarrow z = \dfrac{1}{2}$

$-2y = -1 \Rightarrow -y = \dfrac{1}{2}$

$x = 1 - y - z \Rightarrow x = 0$

Então, $S = \varnothing$, porque $\log_3 x$ deve ter $x > 0$.

447. Vamos atribuir à variável a três valores distintos: a_1, a_2 e a_3

$$\begin{cases} x + a_1y = 1 - a_1^2 \\ x + a_2y = 1 - a_2^2 \\ x + a_3y = 1 - a_3^2 \end{cases}$$

Tomando duas a duas, temos:

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & a_1 & 1 & (1-a_1^2) \\ 1 & a_2 & 1 & (1-a_2^2) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & a_1 & (1-a_1^2) \\ 0 & a_2 - a_1 & a_1^2 - a_2^2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & a_1 & (1-a_1^2) \\ 0 & 1 & a_1 - a_2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow S = \{((1 + a_1a_2); -(a_1 + a_2))\}$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & a_1 & (1-a_1^2) \\ 1 & a_3 & (1-a_3^2) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & a_1 & (1-a_1^2) \\ 0 & 1 & -(a_1+a_3) \end{array}\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow S = \{((1 + a_1a_3); -(a_1 + a_3))\}$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & a_2 & (1-a_2^2) \\ 1 & a_3 & (1-a_3^2) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & a_2 & (1-a_2^2) \\ 0 & 1 & -(a_2-a_3) \end{array}\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow S = \{((1 + a_2a_3); -(a_2 + a_3))\}$

Verifica-se que as retas encontram-se duas a duas.
Tomando as três retas:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & a_1 & 1-a_1^2 \\ 1 & a_2 & 1-a_2^2 \\ 1 & a_3 & 1-a_3^2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & a_1 & (1-a_1^2) \\ 0 & (a_2-a_1) & (a_1^2-a_2^2) \\ 0 & (a_3-a_1) & (a_1^2-a_3^2) \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & a_1 & 1-a_1^2 \\ 0 & 1 & -(a_1+a_2) \\ 0 & 1 & -(a_1+a_3) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & a_1 & 1-a_1^2 \\ 0 & 1 & -(a_1-a_2) \\ 0 & 0 & a_2-a_3 \end{array}\right]$$

em que se verifica que $\rho(A) \neq \rho(B)$, o que significa que o sistema é impossível, ou seja, as três retas não têm um ponto em comum.

448. Chamemos de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}$ os valores de x que anulam P(x). Calculemos os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ de P(x). Temos:

$$\begin{cases} \alpha_1^n a_0 + \alpha_1^{n-1} a_1 + \ldots + \alpha_1 a_{n-1} + a_n = 0 \\ \alpha_2^n a_0 + \alpha_2^{n-1} a_1 + \ldots + \alpha_2 a_{n-1} + a_n = 0 \\ \alpha_3^n a_0 + \alpha_3^{n-1} a_1 + \ldots + \alpha_3 a_{n-1} + a_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n+1}^n a_0 + \alpha_{n+1}^{n-1} a_1 + \ldots + {}_{n+1} a_{n-1} + a_n = 0 \end{cases}$$

O determinante D desse sistema é um determinante de Vandermonde cujos elementos característicos são $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}$, então:

$D = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1) \ldots (\alpha_n - \alpha_{n-1})$

$D \neq 0$ (pois $\alpha_i \neq \alpha_j$, $\forall_i \forall_j$).

Logo, o sistema só admite a solução trivial $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots =$ $= a_{n-1} = a_n = 0$; portanto, $P(x) \equiv 0$.

449. Fazendo $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, temos:

$P(1 - x) = a(1 - x)^4 + b(1 - x)^3 + c(1 - x)^2 + d(1 - x) + e =$
$= ax^4 - (4a + b)x^3 + (6a + 3b + c)x^2 - (4a + 3b + 2x + d)x +$
$+ (a + b + c + d + e)$.

Impondo $P(x) = P(1 - x)$, vem:

$$\sim \begin{cases} 4a + b = -b \\ 6a + 3b + c = c \\ 4a + 3b + 2c + d = -d \\ a + b + c + d + e = e \end{cases} \sim \begin{cases} 4a + 2b = 0 \\ 6a + 3b = 0 \\ 4a + 3b + 2c + 2d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \sim$$

equivalentes

$$\sim \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 4a+3b+2c+2d=0 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \sim \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ b+2c+2d=0 \\ 2b+4c+4d=0 \end{cases} \sim \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ b+2c+2d=0 \end{cases}$$

E daí temos $a = c + d$, $b = -(2c + 2d)$, sendo *c*, *d*, *e* quaisquer.
Então: $P(x) = (c + d)x^4 - (2c + 2d)x^3 + cx^2 + dx + e$
Fazendo $c + d = a$, temos:
$P(x) = ax^4 - 2ax^3 + cx^2 + (a - c)x + e$.

450. O sistema admite a solução trivial se, e somente se, o determinante dos coeficientes for diferente de zero.

$$D = \begin{vmatrix} k_1+k_2 & k_2-k_3 & k_1-k_3 \\ k_2-k_1 & k_2+k_3 & k_3-k_1 \\ k_1-k_2 & k_3-k_2 & k_3+k_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$D = \begin{vmatrix} k_1+k_2 & k_2+k_3 & k_1+k_3 \\ 0 & 2k_3 & 2k_3 \\ 2k_1 & 0 & 2k_1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (1^{\text{a}}\ \text{linha} + 2^{\text{a}}\ \text{linha} + 3^{\text{a}}\ \text{linha}) \\ \leftarrow (2^{\text{a}}\ \text{linha} + 3^{\text{a}}\ \text{linha}) \\ \leftarrow (1^{\text{a}}\ \text{linha} + 3^{\text{a}}\ \text{linha}) \end{matrix}$$

$$D = 4k_1k_3 \begin{vmatrix} k_1+k_2 & k_2+k_3 & k_1+k_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$D = 8k_1k_2k_3$
Então, $D \neq 0 \Leftrightarrow k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ e $k_3 \neq 0$.

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR é uma coleção consagrada ao longo dos anos por oferecer ao estudante o mais completo conteúdo de Matemática elementar. Os volumes estão organizados da seguinte forma:

VOLUME 1	conjuntos, funções
VOLUME 2	logaritmos
VOLUME 3	trigonometria
VOLUME 4	sequências, matrizes, determinantes, sistemas
VOLUME 5	combinatória, probabilidade
VOLUME 6	complexos, polinômios, equações
VOLUME 7	geometria analítica
VOLUME 8	limites, derivadas, noções de integral
VOLUME 9	geometria plana
VOLUME 10	geometria espacial
VOLUME 11	matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva

A coleção atende a alunos do ensino médio que procuram uma formação mais aprofundada, estudantes em fase pré-vestibular e também universitários que necessitam rever a Matemática elementar.

Os volumes contêm teoria e exercícios de aplicação, além de uma seção de questões de vestibulares, acompanhadas de respostas. Há ainda uma série de artigos sobre história da Matemática relacionados aos temas abordados.

Na presente edição, a seção de questões de vestibulares foi atualizada, apresentando novos testes e questões dissertativas selecionados a partir dos melhores vestibulares do país.

Atual Editora

ISBN 978-85-357-1749-5

9 788535 717495