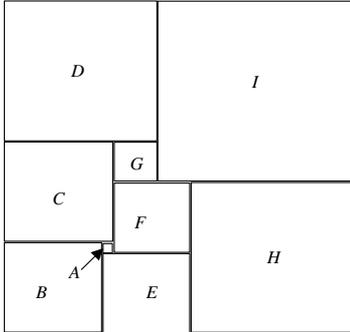


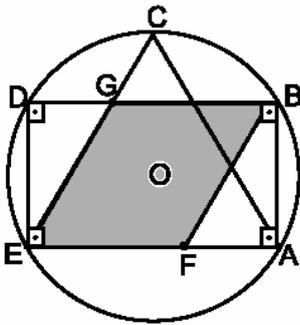
## Quadriláteros

1) (OBM)

O retângulo ao lado está dividido em 9 quadrados,  $A, B, C, D, E, F, G, H$  e  $I$ . O quadrado  $A$  tem lado 1 e o quadrado  $B$  tem lado 9. Qual é o lado do quadrado  $I$ ?



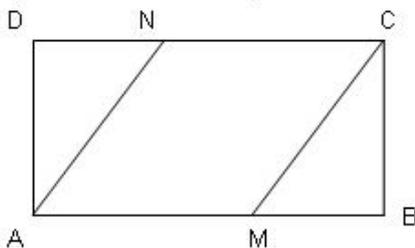
2) (UFSCar) A figura mostra um círculo de centro  $O$  e raio  $R = 18$  cm. O segmento  $AB$  é o lado de um hexágono regular inscrito e  $ACE$ , um triângulo equilátero inscrito.



Nessas condições, a área do paralelogramo  $EFBG$  é

- a)  $216\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>
- b)  $180\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>
- c)  $116\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>
- d)  $120\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>
- e)  $108\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>

3) (FGV) a) Na figura a seguir,  $ABCD$  é um retângulo e  $AMCN$  é um losango. Determine a medida do segmento  $NB$ , sabendo que  $AB = 2AD = 20$  cm.



b) Considere dois polinômios,  $f(x)$  e  $g(x)$ , tais que o grau de  $f(x)$  é  $n + 2$  e o grau de  $g(x)$  é  $n - 1$ . Sejam  $q(x)$  e  $r(x)$  ( $r(x) \neq 0$ ), respectivamente, o quociente e o resto da divisão de  $f(x)$  por  $g(x)$ . O que se pode afirmar a respeito dos graus dos polinômios  $q(x)$  e  $r(x)$ ?

4) Considere o hexágono  $ABCDEF$  da figura abaixo. A diagonal  $AD$  é paralela aos lados  $BC$  e  $EF$  do hexágono. Se  $AD = 32$ , qual é o valor de  $x$ ?

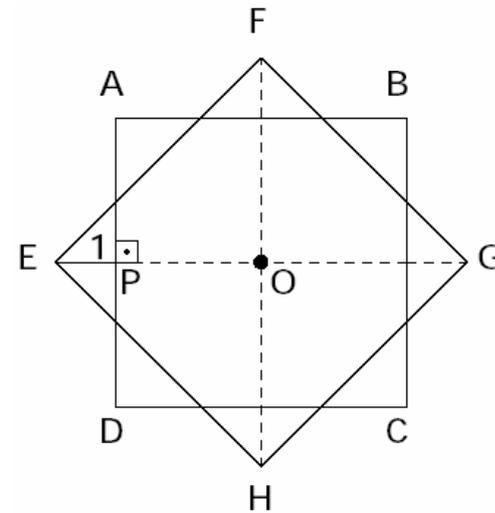
5) (Unifesp) Em um paralelogramo, as medidas de dois ângulos internos consecutivos estão na razão  $1 : 3$ . O ângulo menor desse paralelogramo mede

- a)  $45^\circ$ .
- b)  $50^\circ$ .
- c)  $55^\circ$ .
- d)  $60^\circ$ .
- e)  $65^\circ$ .

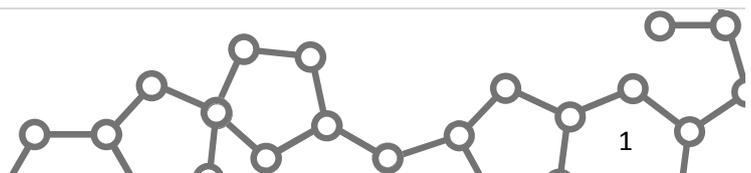
6) (UEL) Embora o desenho abaixo pareça representar uma figura em três dimensões, ele foi feito no plano, usando-se apenas losangos congruentes entre si. Os ângulos internos desses losangos medem:

- a)  $30^\circ$  e  $150^\circ$
- b)  $36^\circ$  e  $72^\circ$
- c)  $36^\circ$  e  $144^\circ$
- d)  $45^\circ$  e  $135^\circ$
- e)  $60^\circ$  e  $120^\circ$

7) (Fuvest) Na figura abaixo, os quadrados  $ABCD$  e  $EFGH$  têm, ambos, lado  $a$  e centro  $O$ . Se  $EP = 1$ , então  $a$  é:

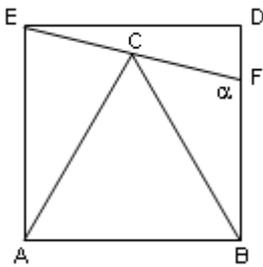


- a)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$



- b)  $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$
- c)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- d) 2
- e)  $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$

8) Na figura, ABC é um triângulo equilátero, ABDE é um quadrado e o ponto C pertence ao segmento EF. Qual o valor  $\alpha$  do ângulo CFB ?

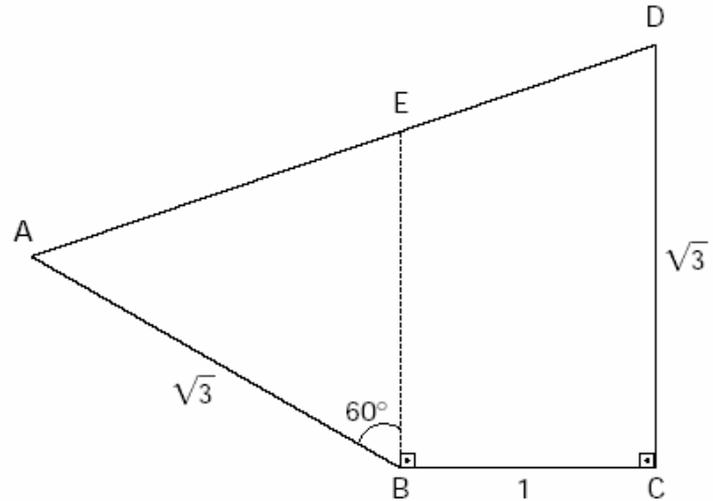


9) (UFPE) Na(s) questão(ões) a seguir escreva nos parênteses (V) se for verdadeiro ou (F) se for falso.

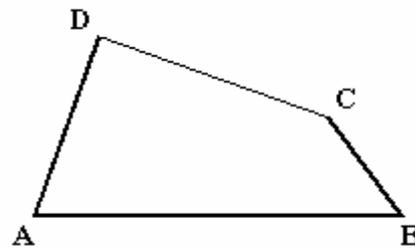
Analise as seguintes afirmações:

- ( ) Dois triângulos equiláteros quaisquer são semelhantes.
- ( ) Dois triângulos retângulos são semelhantes se os catetos de um são proporcionais aos catetos do outro.
- ( ) Num triângulo qualquer, cada lado é maior que a soma dos outros dois.
- ( ) Se as diagonais de um quadrilátero se interceptam no seus pontos médios, então esse quadrilátero é um retângulo.
- ( ) Se pelo ponto médio do lado AB de um triângulo ABC traçarmos uma reta paralela ao lado BC, então esta reta interceptará o lado AC no seu ponto médio.

10) (Fuvest) No quadrilátero ABCD da figura abaixo, E é um ponto sobre o lado AD tal que o ângulo ABE mede  $60^\circ$  e os ângulos EBC e BCD são retos. Sabe-se ainda que  $AB = CD = \sqrt{3}$  e  $BC = 1$ . Determine a medida de AD.

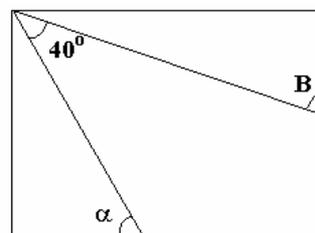


11) (Fuvest) No quadrilátero ABCD, temos  $AD = BC = 2$  e o prolongamento desses lados forma um ângulo de  $60^\circ$ .

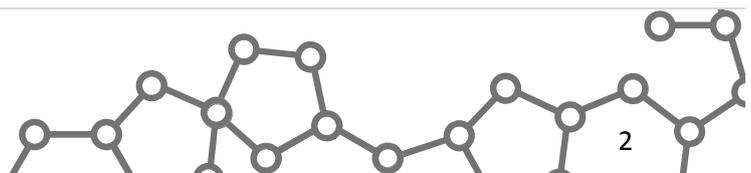


- a) Indicando por  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$ , respectivamente, as medidas dos ângulos internos do quadrilátero de vértices A, B, C e D, calcule  $\hat{A} + \hat{B}$  e  $\hat{C} + \hat{D}$
- b) Sejam J o ponto médio de DC, M o ponto médio de AC e N o ponto médio de BD. Calcule JM e JN.
- c) Calcule a medida do ângulo MJN.

12) (Fuvest) No retângulo a seguir, o valor, em graus, de  $\alpha + \beta$  é:



- a) 50
- b) 90
- c) 120
- d) 130
- e) 220



**13)** Num heptágono, seus ângulos internos medem  $x$ ,  $2x$ ,  $3x$ ,  $4x$ , ... e assim por diante até o último (e maior) ângulo.

- Quanto mede esse maior ângulo?
- Este heptágono é um polígono côncavo ou convexo? Justifique.

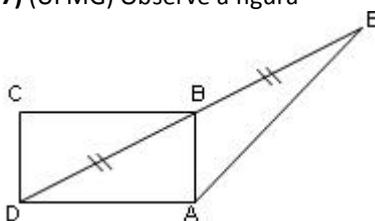
**14)** O perímetro de um losango é 80cm. Se uma de suas diagonais é o triplo da outra, qual a medida da diagonal maior?

**15)** (Unicamp) O quadrilátero formado unindo-se os pontos médios dos lados de um quadrado é também um quadrado.

- Faça uma figura e justifique a afirmação acima.
- Supondo que a área do quadrado menor seja de  $72 \text{ cm}^2$ , calcule o comprimento do lado do quadrado maior.

**16)** (OBM) O trapézio  $ABCD$  tem bases  $AB$  e  $CD$ . O lado  $DA$  mede  $x$  e o lado  $BC$  mede  $2x$ . A soma dos ângulos  $\hat{DAB}$  e  $\hat{ABC}$  é  $120^\circ$ . Determine o ângulo  $\hat{DAB}$ .

**17)** (UFMG) Observe a figura



Nessa figura, B é o ponto médio do segmento DE e ABCD é um retângulo de lados  $DC = 1$  e  $AD = 2$ . Calcule a medida do segmento AE.

**18)** Obtenha o perímetro de um losango cujas diagonais meçam 2cm e 4 cm.

**19)** (PUC-RJ) Os ângulos internos de um quadrilátero medem  $3x - 45$ ,  $2x + 10$ ,  $2x + 15$  e  $x + 20$  graus. O menor ângulo mede:

- $90^\circ$
- $65^\circ$
- $45^\circ$
- $105^\circ$
- $80^\circ$

**20)** (Seleção para Olimpíada do Cone Sul) Prove que as distâncias entre um ponto sobre uma circunferência e os

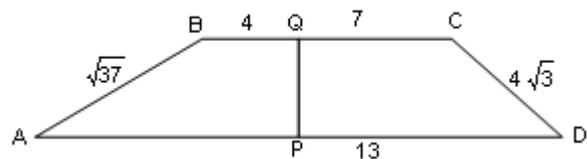
quatro vértices de um quadrado nesta inscrita não podem ser todos números racionais.

**21)** Qual é o menor número de quadriláteros que precisam ser desenhados para que se tenha 2 quadrados, 3 losangos, 2 retângulos, 4 paralelogramos e 4 trapézios? Faça esses desenhos.

**22)** (UFC) Um paralelogramo tem dois lados consecutivos medindo 3cm e 4cm. Sabendo-se que esses lados formam um ângulo de  $120^\circ$ , então, o produto dos valores numéricos das medidas das diagonais do paralelogramo é igual a:

- $\sqrt{407}$
- $\sqrt{444}$
- $\sqrt{481}$
- $\sqrt{518}$
- $\sqrt{581}$

**23)** Um trapézio ABCD foi montado a partir de 2 trapézios retângulos, ABQP e QCDP, como mostra a figura. Obtenha o comprimento do segmento AP, estando todas as medidas em cm.



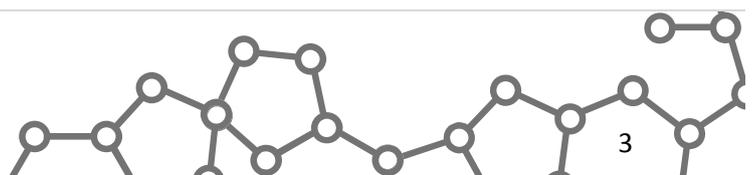
**24)** (Unicamp) Um trapézio retângulo é um quadrilátero convexo plano que possui dois ângulos retos, um ângulo agudo  $\alpha$  e um ângulo obtuso  $\beta$ . Suponha que, em um tal trapézio, a medida de  $\beta$  seja igual a cinco vezes a medida de  $\alpha$ .

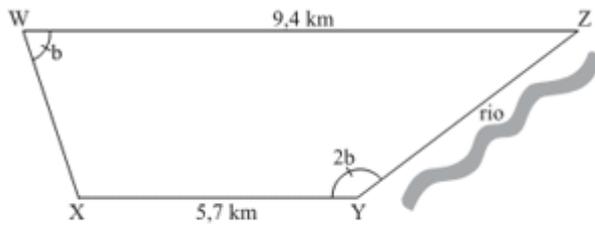
- Calcule a medida de  $\alpha$ , em graus.
- Mostre que o ângulo formado pelas bissetrizes de  $\alpha$  e  $\beta$  é reto.

**25)** (Fuvest) Um trapézio retângulo tem bases 5 e 2 e altura 4. O perímetro desse trapézio é:

- 13
- 14
- 15
- 16
- 17

**26)** (VUNESP) Uma certa propriedade rural tem o formato de um trapézio como na figura. As bases WZ e XY do trapézio medem 9,4 km e 5,7 km, respectivamente, e o lado YZ margeia um rio.





(figura fora de escala)

Se o ângulo XYZ é o dobro do ângulo XWZ, a medida, em km, do lado YZ que fica à margem do rio é:

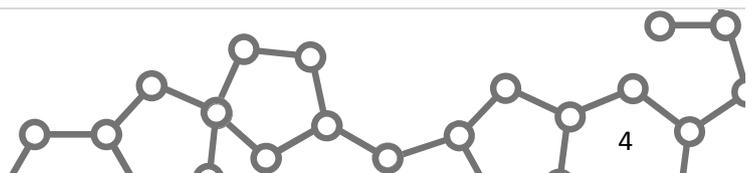
- a) 7,5.
- b) 5,7.
- c) 4,7.
- d) 4,3.
- e) 3,7.

**27)** Veja as 3 primeiras alternativas desta questão que caiu no vestibular para a U.F.MG, em 1992:

Sobre figuras planas, é correto afirmar-se que:

- a) Um quadrilátero é um retângulo se os lados opostos têm comprimentos iguais.
- b) Um quadrilátero que tem suas diagonais perpendiculares é um quadrado.
- c) Um trapézio que têm 2 ângulos consecutivos congruentes é isósceles.
- d) ....
- e) ....

Um aluno que marcou alternativa (c) acertou ? Justifique.



## Gabarito

1) O quadrado *A* medida de lado 1cm enquanto que o quadrado *B* tem medida de lado 9cm. Daí que as longitudes dos lados dos quadrados restantes são:

$$C = 10\text{cm} \quad G = 4\text{cm}.$$

$$F = 7\text{cm} \quad E = 8\text{cm}.$$

$$D = 14\text{cm} \quad I = 18\text{cm}.$$

2) Alternativa: A

$$\frac{5\sqrt{41}}{2} \text{ cm}$$

3) a)  $BN = \frac{5\sqrt{41}}{2}$   
 b)  $gr(q) = 3$  e  $0 \leq gr(r) < n - 1$

4)  $x = 6+8 = 14\text{cm}$

5) Alternativa: A

6) Alternativa: E

7) Alternativa: E

8)  $\hat{A} = 105^\circ$

9) V - V - F - F - V

10) Resposta:  $\sqrt{7}$

11) Seja *P* o ponto de encontro do prolongamento dos lados *AD* e *BC*.  
 Considerando que o ângulo de  $60^\circ$  seja o ângulo interno ao triângulo *ABP* em *P*, então temos:

- a)  $A+B = 120^\circ$  e  $C+D = 240^\circ$
- b)  $JN = JM = 1$
- c)  $NJM = 60^\circ$

Caso o ângulo de  $60^\circ$  seja o externo ao triângulo *ABP* em *P*, então:

- a)  $A+B = 60^\circ$  e  $C+D = 300^\circ$
- b)  $JN = JM = 1$
- c)  $NJM = 120^\circ$

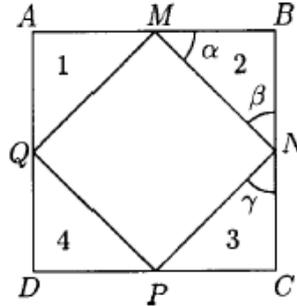
12) Alternativa: D

13) a)  $225^\circ$

b) é côncavo, pois tem pelo menos um ângulo maior que  $180^\circ$ .

14) Diagonal maior =  $6\sqrt{2}$  cm

15) a) Para provar que *MNPQ* é um quadrado, vamos mostrar que os seus quatro lados têm o mesmo comprimento e os seus ângulos internos são retos.

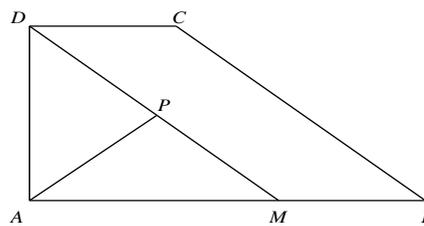


Os triângulos 1, 2, 3 e 4 são retângulos, isósceles e congruentes [dois lados, que são os catetos, e os ângulos compreendidos entre eles, que são retos, iguais]. Logo, as hipotenusas, que são os lados de *MNPQ*, são iguais.

Os ângulos  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  medem, cada um deles  $45^\circ$ . Ou seja,  $\beta + \gamma = 90^\circ$  de modo que o ângulo  $N = 90^\circ$ . Analogamente, os outros 3 ângulos do quadrilátero também medem  $90^\circ$ .

b)  $L = 12\text{cm}$ .

16) Tracemos  $DM \parallel BC$  (vide figura abaixo). Como  $\hat{AMD} = \hat{ABC}$  e  $\hat{DAM} + \hat{AMD} = \hat{DAM} + \hat{ABC} = 120^\circ$  tem-se que  $\hat{ADM} = 60^\circ$ . Como  $AD = x$  e  $BC = 2x$ , sendo *P* o ponto médio de *DM*, então,  $AD = DP = x$  e *ADP* é um triângulo equilátero, isto é,  $AP = a$ . Portanto *APM* é um triângulo isósceles com  $\hat{PAM} = \hat{AMP}$  e como  $\hat{DPA}$  é um ângulo externo do triângulo *APM* temos  $60^\circ = \hat{DPA} = \hat{PAM} + \hat{AMP} = 2 \cdot \hat{AMP} = 2 \cdot \hat{ABC}$ . Portanto,  $\hat{ABC} = 30^\circ$  e  $\hat{DAB} = 120^\circ - \hat{ABC} = 90^\circ$ .

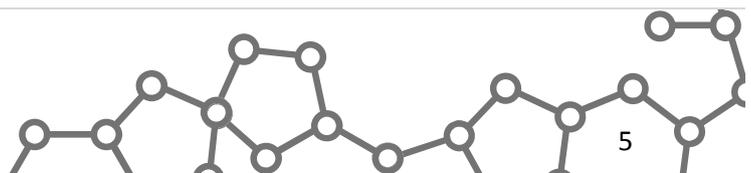


17)  $AE = 2\sqrt{2}$

18) Perímetro =  $4\sqrt{5}$  cm

19) Alternativa: B

20) No caso do ponto coincidir com um dos vértices, o resultado é trivial. Caso isso não ocorra, suponhamos, sem perda de generalidade que o ponto *P* esteja entre os vértices *C* e *D* do quadrado *ABCD* inscrito na

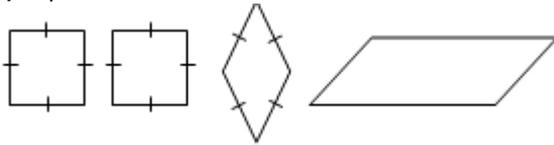


circunferência, chamemos ainda, respectivamente, de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  as distâncias de  $P$  a  $A$ , de  $P$  a  $B$  e de  $P$  a  $C$ . Considerando o quadrilátero  $ABCP$ , pelo teorema de Ptolomeu temos que  $a(BC) + c(AB) = b(AC)$ , reescrevendo obtemos:

$$a + c = b \frac{AC}{AB} = b\sqrt{2}$$

Se  $b$  fosse racional,  $a$  ou  $c$  então teriam de ser irracionais.

**21) 4 quadriláteros:**



**22) Alternativa: C**

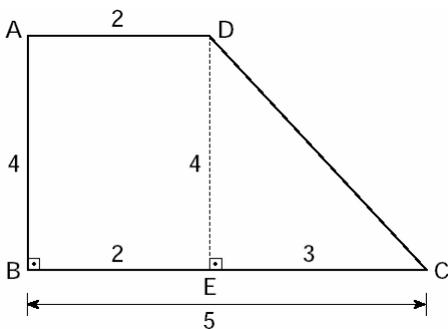
**23) AP = 9cm**

**24) a)  $\alpha = 30^\circ$**

b) Ao se traçar as duas bissetrizes mencionadas, temos um triângulo formado por  $\alpha/2$ ,  $\alpha/2$  e o ângulo  $x$  entre as bissetrizes. Como  $\alpha + \alpha = 180^\circ$  (já que os outros 2 ângulos do trapézio são retos) então  $\alpha/2 + \alpha/2 = 90^\circ$  e  $x = 180^\circ - (\alpha/2 + \alpha/2) = 90^\circ$

**25) Alternativa: D**

Usando Pitágoras temos que  $CD = 5$  portanto o perímetro é  $2+4+5+5 = 16$



**26) Alternativa: E**

**27) Não**, pois ele pode ser um trapézio retângulo que tem dois ângulos retos consecutivos.

