

 **OBJETIVO**

ITA
Matemática

2



MÓDULO 5**Números**

1. **(OBM)** – A prefeitura de uma certa cidade fez uma campanha que permite trocar 4 garrafas de 1 litro vazias por uma garrafa de 1 litro cheia de leite. Até quantos litros de leite pode obter uma pessoa que possua 43 dessas garrafas vazias?

- a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

2. **(OBM)** – Há três cartas viradas sobre uma mesa. Sabe-se que em cada uma delas está escrito um número inteiro positivo. São dadas a Carlos, Samuel e Tomás as seguintes informações:

- i) todos os números escritos nas cartas são diferentes;
- ii) a soma dos números é 13;
- iii) os números estão em ordem crescente, da esquerda para a direita.

Primeiro, Carlos olha o número na carta da esquerda e diz: “Não tenho informações suficientes para determinar os outros dois números.” Em seguida, Tomás olha o número na carta da direita e diz: “Não tenho informações suficientes para determinar os outros dois números.” Por

fim, Samuel olha o número na carta do meio e diz: “Não tenho informações suficientes para determinar os outros dois números.” Sabendo que cada um deles sabe que os outros dois são inteligentes e escuta os comentários dos outros, qual é o número da carta do meio?

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5
e) Não há informações suficientes para determinar o número.

3. **(OBM)** – Seja N o número inteiro positivo dado por $N = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (196883)^2$. Qual é o algarismo das unidades de N ?

4. **(OBM)** – No triminó marciano, as peças têm 3 números cada uma (diferente do dominó da Terra, no qual cada peça tem apenas 2 números). Os números no triminó marciano também variam de 0 a 6, e para cada escolha de 3 números (não necessariamente distintos), existe uma e somente uma peça que contém esses 3 números. Qual é a soma dos números de todas as peças do triminó marciano?
a) 756 b) 1512 c) 84 d) 315 e) 900

MÓDULO 6

Números (continuação)

1. Se 1 de maio de um certo ano é uma terça-feira, que dia da semana será 1 de janeiro do ano seguinte?

2. Nove alunos da escola estão dispostos em círculo. Para escolherem um chefe de jogo contam até 5 a partir de um deles, no sentido dos ponteiros do relógio, e o quinto sai do círculo. Depois contam novamente até 5 a partir do seguinte, e o quinto sai do círculo, e assim sucessivamente. O último a ficar no círculo será o chefe.

André é quem conta e quer aproveitar-se disso para ser o chefe. Designemos os seus colegas por B, C, D, E, F, G, H, I, no sentido dos ponteiros do relógio.

A partir de quem deve André começar a Contar?
(100 jogos numéricos – Pierre Berloquin)

MÓDULO 7

Números (continuação)

3. A soma dos algarismos representados pelos asteriscos na multiplicação seguinte:

$$***4** \times 7 = 6743*56 \text{ é:}$$

- a) 31 b) 32 c) 33 d) 34 e) 35

(100 jogos numéricos – Pierre Berloquin)

4. (IME) – Seja N um número inteiro de 5 algarismos. O número P é construído agregando-se o algarismo 1 à direita de N e o número Q é construído agregando-se o algarismo 1 à esquerda de N. Sabendo-se que P é o triplo de Q, o algarismo das centenas do número N é:

- a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

1. (OBM) – Em um ano, no máximo quantos meses têm cinco domingos?

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

2. Todos os dias, à mesma hora, depois do trabalho, Timóteo toma o comboio para os subúrbios, onde mora. Na estação espera-o a mulher para o levar de carro para casa. Um dia, sem avisar a mulher, Timóteo apanhou a comboio mais cedo do que o habitual e resolveu ir andando a pé para casa. Cruzou-se com a mulher, que, infelizmente, não o viu, senão teria chegado 20 minutos mais cedo do que o costume. E continuou a caminhar durante 25 minutos. Nesse momento a mulher, não o tendo visto no comboio, deixa imediatamente a estação e consegue alcançá-lo. Entra para o carro e chega a casa à hora habitual. Supõe-se que a mulher de Timóteo conduz a velocidade constante nos dois sentidos. Os tempos mortos são nulos. Que adiantamento trazia o comboio apanhado nesse dia por Timóteo sobre o comboio habitual? (do livro 100 jogos numéricos de Pierre Berloquin)

3. **(OBM)** – Qual é o maior valor da soma dos algarismos da soma dos algarismos de um número de três algarismos?

- a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

4. **(OBM)** – Qual é o menor inteiro positivo n para o qual qualquer subconjunto de n elementos de $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ contém dois números cuja diferença é 8?

- a) 2 b) 8 c) 12 d) 13 e) 15

5. **(OBM)** – Com três algarismos distintos a, b e c , é possível formar 6 números de dois algarismos distintos. Quantos conjuntos $\{a, b, c\}$ são tais que a soma dos 6 números formados é 484?

- a) Um b) Dois c) Três
d) Quatro e) Mais que quatro

MÓDULO 8

Números (continuação)

1.

a) Prove que $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

b) Calcule o valor da soma

$$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

2. Demonstre que se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

3. (IME) – Sejam a, b e c números reais não nulos.

Sabendo que $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b}$, determine o valor numérico de $\frac{a+b}{c}$.

4.

a) Prove ser múltiplo de 7 o número 111111

b) Verifique se é múltiplo de 7 o número $10^{2010} - 1$

exercícios-tarefa

■ MÓDULO 5

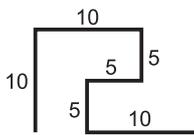
1. (IME) – Um homem nascido no século XX diz a seguinte frase para o filho: “seu avô paterno, que nasceu trinta anos antes de mim, tinha x anos no ano x^2 ”. Em consequência, conclui-se que o avô paterno nasceu no ano de:

- a) 1892 b) 1898 c) 1900 d) 1936 e) 1942

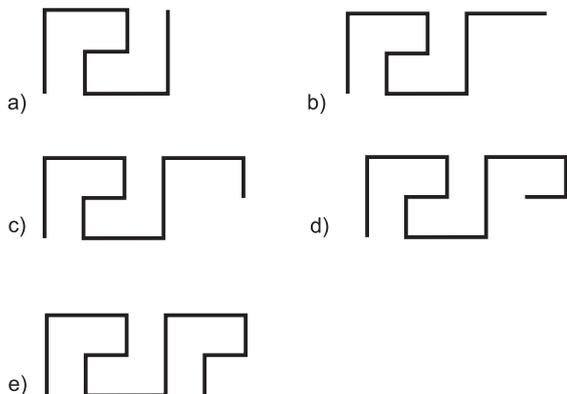
2. Se as semanas tivessem apenas quatro dias (segunda, terça, quarta e quinta) e 1º de maio de um certo ano é uma terça-feira, que dia da semana será 1º de janeiro do ano seguinte?

■ MÓDULO 6

1. (OBM) – Um serralheiro solda varetas de metal para produzir peças iguais que serão juntadas para formar o painel abaixo. O desenho ao lado apresenta as medidas, em centímetros, de uma dessas peças. O serralheiro usa exatamente 20 metros de vareta para fazer o seu trabalho.



Qual dos desenhos abaixo representa o final do painel?



2. Qual o algoritmo das unidades de

$$N = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 2010^3?$$

■ MÓDULO 7

1. (OBM) – Um feirante vende batatas e, para pesar, utiliza uma balança de dois pratos, um peso de 1 kg, um peso de 3 kg e um peso de 10 kg. Considere a seguinte afirmação: “Este feirante consegue pesar (com uma pesagem) n quilogramas de batatas”. Quantos valores positivos de n tornam essa afirmação verdadeira, supondo que ele pode colocar pesos nos dois pratos?

- a) 7 b) 10 c) 12 d) 13 e) 14

2. Com quatro algarismos distintos a, b, c e d , é possível formar 12 números de dois algarismos distintos. Se a soma desses 12 números é 429, qual o maior número possível de se formar com estes algarismos, sem repeti-los?

- a) 5431 b) 6521 c) 7321 d) 8532 e) 9310

■ MÓDULO 8

1. a) Prove que $\frac{n+1}{n+2} - \frac{n-1}{n} = \frac{2}{n(n+2)}$

b) Calcule a soma

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \dots + \frac{1}{9999}$$

2. Se $\frac{a+b}{a} = \frac{b+c}{b} = \frac{a+c}{c}$, qual o valor da

fração $\frac{a}{a-b+c}$?

resolução dos exercícios-tarefa

■ MÓDULO 5

- 1) 1) Se o homem nasceu no século XX, nasceu entre 1901 e 2000.
2) Seu avô, que nasceu 30 anos antes, nasceu entre 1871 e 1970.
3) O ano em que seu avô completou x anos é um quadrado perfeito, pois é x^2 . No intervalo de 1871

a 1970, o único quadrado perfeito é 1936 (quadrado de 44), pois $43^2 = 1849$, $44^2 = 1936$ e $45^2 = 2025$.

- 4) Se em 1936 seu avô completou 44 anos, então nasceu em $1936 - 44 = 1892$ e, neste caso, o homem nasceu em $1892 + 30 = 1922$.

Resposta: A

2) De 1º de maio de um certo ano até 1º de janeiro do ano seguinte são transcorridos 245 dias, ou seja, 61 semanas completas e mais um dia (pois $245 = 4 \times 61 + 1$). Portanto, 1º de janeiro do ano seguinte é uma quarta feira.

■ MÓDULO 6

1) Para confeccionar a peça do destaque o serralheiro utiliza 45 cm de vareta. Com 20 metros (2000 cm) o serralheiro pode confeccionar 44 peças completas e ainda lhe sobram 20 cm de varetas (pois $2000 = 44 \times 45 + 20$). Com os 20 cm que sobram o serralheiro pode confeccionar a peça abaixo. Desta forma, o final do painel é o da alternativa B.



Resposta: B

2) A soma dos algarismos de cada uma das sequências abaixo

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3$$

$$11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 + 15^3 + 16^3 + 17^3 + 18^3 + 19^3 + 20^3$$

$$21^3 + 22^3 + 23^3 + 24^3 + 25^3 + 26^3 + 27^3 + 28^3 + 29^3 + 30^3$$

.....

$$2001^3 + 2002^3 + 2003^3 + 2004^3 + 2005^3 + 2006^3 +$$

$$+ 2007^3 + 2008^3 + 2009^3 + 2010^3$$

é $1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9 + 0 = 45$
 O valor de N é a soma dessas 201 sequências e a soma dos algarismos das unidades é $201 \times 45 = 9045$. Desta forma, o algarismo das unidades de N é 5.

■ MÓDULO 7

- 1)
- a) Usando 1 peso, temos 3 possibilidades: 1, 3 e 10;
 - b) Colocando dois pesos num único prato, temos as seguintes possibilidades:
 $1 + 3 = 4$; $1 + 10 = 11$; $3 + 10 = 13$;
 - c) Colocando três pesos num prato, pesamos
 $1 + 3 + 10 = 14$;
 - d) Colocando um peso em cada prato temos:
 $3 - 1 = 2$; $10 - 1 = 9$; $10 - 3 = 7$;
 - e) Colocando dois pesos num prato e um peso no outro, temos:
 $10 - (1 + 3) = 6$; $(10 + 1) - 3 = 8$; $(10 + 3) - 1 = 12$

Os valores de n são: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (treze valores)
 Resposta: D

2) Com os algarismos do conjunto $\{a, b, c, d\}$ é possível formar os números “ab”, “ba”, “ac”, “ca”, “ad”, “da”, “bc”, “cb”, “bd”, “db”, “cd” e “dc”. Se todos são de dois algarismos, $a.b.c.d \neq 0$. A soma desses números é “ab” + “ba” + “ac” + “ca” + “ad” + “da” + “bc” + “cb” + “bd” + “db” + “cd” + “dc” =
 $= (10 \cdot a + b) + (10 \cdot b + a) + (10 \cdot a + c) + (10 \cdot c + a) + (10 \cdot a + d) + (10 \cdot d + a) + (10 \cdot b + c) + (10 \cdot c + b) + (10 \cdot b + d) + (10 \cdot d + b) + (10 \cdot c + d) + (10 \cdot d + c) =$
 $= 33 \cdot (a + b + c + d) = 429 \Leftrightarrow a + b + c + d = 13$
 Sendo a, b, c e d algarismos distintos, e supondo, sem perdas de generalidades, que $a < b < c < d$, podemos ter (a = 1, b = 2, c = 3 e d = 7) ou (a = 1, b = 2, c = 4 e d = 6) ou ainda (a = 1, b = 3, c = 4 e d = 5). Assim, o maior número possível de se formar com os algarismos a, b, c e d é 7321.

Resposta: B

■ MÓDULO 8

1) a) $\frac{n+1}{n+2} - \frac{n-1}{n} =$
 $= \frac{(n+1) \cdot n - (n-1) \cdot (n+2)}{n \cdot (n+2)} =$
 $= \frac{(n^2 + n) - (n^2 + 2n - n - 2)}{n \cdot (n+2)} = \frac{2}{n \cdot (n+2)}$

b) Pela igualdade do item (a) temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} - \frac{0}{1} = \frac{2}{1 \cdot 3} = \frac{2}{3} \\ \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15} \\ \frac{6}{7} - \frac{4}{5} = \frac{2}{5 \cdot 7} = \frac{2}{35} \\ \frac{8}{9} - \frac{6}{7} = \frac{2}{7 \cdot 9} = \frac{2}{63} \\ \vdots \\ \frac{100}{101} - \frac{98}{99} = \frac{2}{99 \cdot 101} = \frac{2}{9999} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{100}{101} - \frac{0}{1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \dots + \frac{2}{9999} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{100}{101} = 2 \cdot S \Leftrightarrow S = \frac{50}{101}$$

Respostas: a) Demonstração b) $S = \frac{50}{101}$

$$2) \frac{a+b}{a} = \frac{b+c}{b} = \frac{a+c}{c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{a+b}{a} = \frac{b+c}{b} = \frac{a+c}{c} = \frac{(a+b) + (b+c) + (a+c)}{a+b+c} = \frac{2 \cdot (a+b+c)}{a+b+c} = 2 \\ \frac{a+b}{a} = \frac{b+c}{b} = \frac{a+c}{c} = \frac{(a+b) - (b+c) + (a+c)}{a-b+c} = \frac{2 \cdot a}{a-b+c} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{2 \cdot a}{a-b+c} = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{a-b+c} = 1$$

Resposta: 1