Capítulo 04: Semelhança de Triângulos

Resposta da questão 01: [D]

$$\frac{30}{20} = \frac{C}{180} \implies C = 270\ cm = 2{,}7\ m$$

Resposta da questão 02: [A]

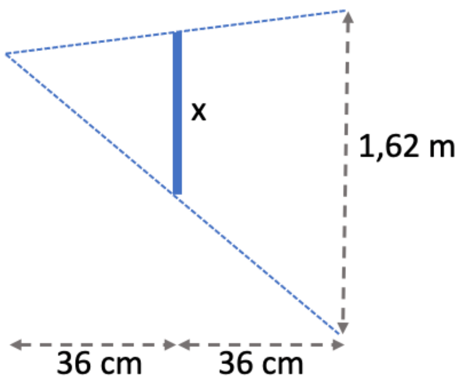
Para que a sombra da vela dobre de tamanho, a altura x que a vela deve derreter é de:

$$\frac{30-x}{18} = \frac{16+48}{48}$$
$$30 - x = 24$$
$$x = 6\ \text{cm}$$

O que deve demorar:

$$2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{m}}{\text{h}} = \frac{0{,}06\ \text{m}}{\Delta t}$$
$$\therefore \Delta t = 24\ \text{h} = 1\ \text{dia}$$

Resposta da questão 03: [B]



Sendo x a altura mínima do espelho, como o triângulo menor é semelhante ao maior, temos:

$$\frac{x}{1{,}62} = \frac{36}{72} \implies x = 0{,}81\ m = 81\ cm.$$

Resposta da questão 04: [C]

Por semelhança entre os triângulos ADE e ABC, obtemos:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$
$$\frac{x}{2x+1} = \frac{2}{6}$$
$$3x = 2x + 1$$
$$x = 1$$

Também podemos obter:

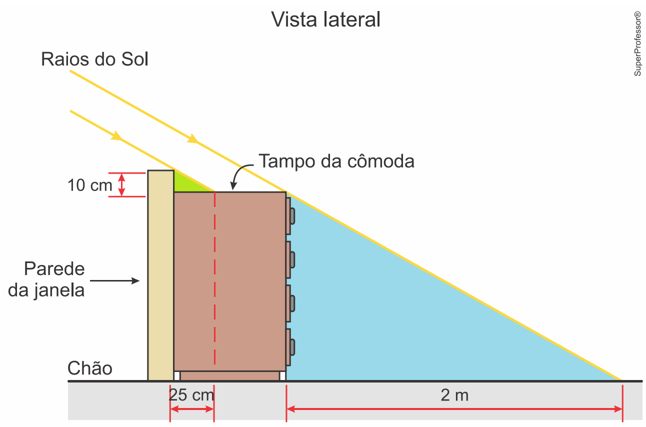
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$
$$\frac{2x}{x+y} = \frac{2}{6}$$
$$6 = 1 + y$$
$$y = 5$$

Portanto, o comprimento do segmento AB vale:

$$x + y = 6$$

Resposta da questão 05: [E]

Como o Sol está muito distante da Terra os raios podem ser considerados paralelos, com isso, a resolução é realizada por intermédio de semelhança de triângulos.



Na figura acima, os triângulos verde e azul são semelhantes, então a altura h da cômoda é obtida pela proporção:

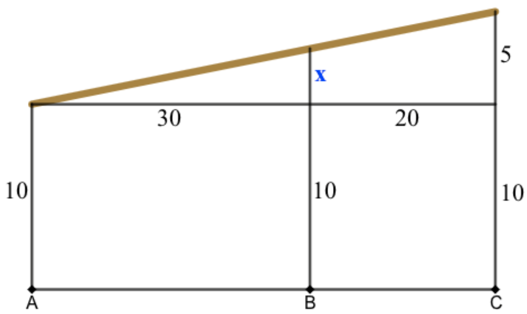
$$\frac{h}{2\ \text{m}} = \frac{10\ \text{cm}}{25\ \text{cm}} \Rightarrow h = 2\ \text{m} \cdot \frac{10\ \text{cm}}{25\ \text{cm}} \therefore h = 0{,}8\text{m} = 80\ \text{cm}$$

Resposta da questão 06: [B]

O triângulo maior é semelhante ao menor, logo:

$$\frac{x+3}{3} = \frac{7}{2} \implies x + 3 = 10{,}5 \implies x = 7{,}5\ m.$$

Resposta da questão 07: [C]



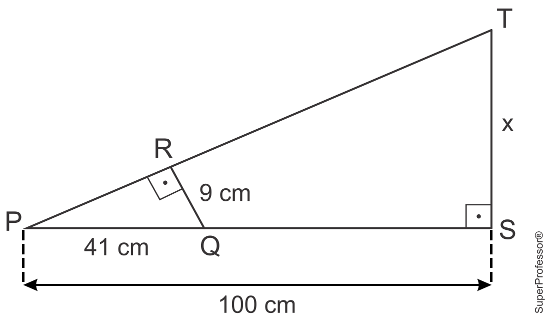
Como o triângulo menor é semelhante ao triângulo maior determinado, temos:

$$\frac{x}{5}=\frac{30}{50} \implies x=3\ cm.$$

Assim, a altura da coluna em B na maquete é de
$$10+3=13\ cm.$$

Resposta da questão 08: [B]

Cálculo do segmento $\overline{PR}$:



$$\overline{PQ}^2=\overline{QR}^2+\overline{PR}^2$$
$$41^2=9^2+\overline{PR}^2$$
$$\overline{PR}=\sqrt{1600}$$
$$\overline{PR}=40\text{ cm}$$

Por semelhança de triângulos, chegamos a:
$$\frac{\overline{ST}}{\overline{QR}}=\frac{\overline{PS}}{\overline{PR}}$$
$$\frac{x}{9}=\frac{100}{40}$$
$$\therefore x=22{,}5\text{ cm}$$

Resposta da questão 09: [B]

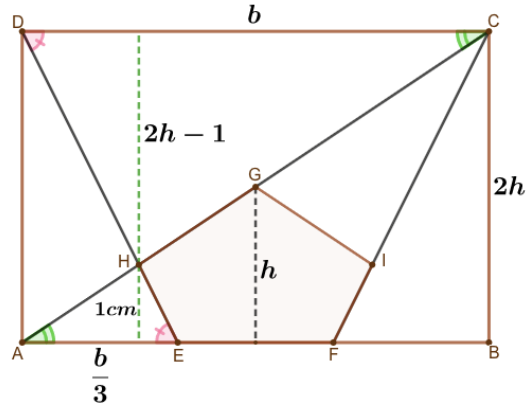
Como os triângulos são semelhantes, temos

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3},$$

ou seja, A'B' tem 2/3 do tamanho do objeto.

Resposta da questão 10: [B]

Sabendo que as diagonais de um retângulo se encontram nos seus respectivos pontos médios, temos que a altura do retângulo é igual a 2h. Além disso, note que os triângulos AEH e CDH possuem, ordenadamente, os mesmos ângulos, portanto, são semelhantes.

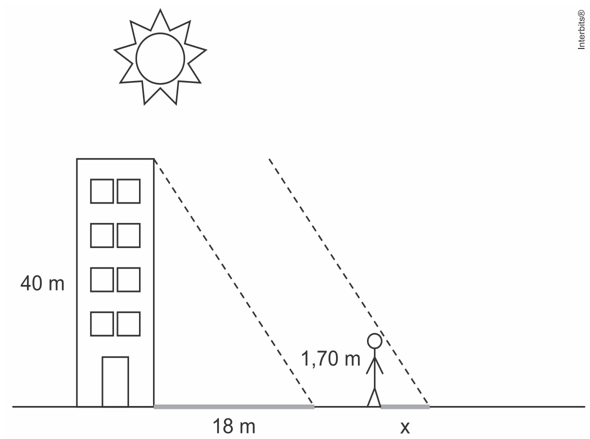


Assim:

$$\frac{1}{2h-1}=\frac{\frac{b}{3}}{b} \implies 2h-1=3 \implies h=2\ cm.$$

A altura h do pentágono EFIGH é 2 cm.

Resposta da questão 11: [D]



Considerando que x é a medida da sombra da pessoa, podemos escrever que:
$$\frac{40}{18}=\frac{1{,}70}{x} \Rightarrow 40x=30{,}6 \Rightarrow x=0{,}765\text{ m}$$

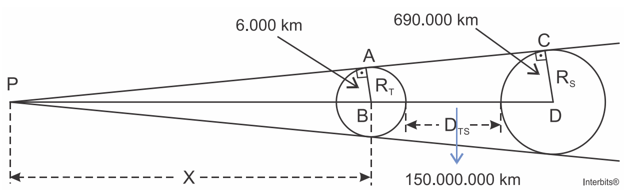
Portanto, a medida da sombra da pessoa será:
$x=0{,}765\text{ m}=76{,}5\text{ cm}$

Resposta da questão 12: [E]

Para obter a altura, basta aplicar a semelhança de triângulos, e neste caso, temos a seguinte relação:

$$\frac{h}{30} = \frac{8}{12} \Rightarrow h = 20 \text{ metros.}$$

Resposta da questão 13: [C]



Considerando os triângulos PAB e PCD semelhantes na figura, podemos escrever:

$$\frac{x}{x+150000000} = \frac{6000}{690000} \Rightarrow \frac{x}{x+150000000} = \frac{1}{115} \Rightarrow 115x = x + 150000000 \Rightarrow$$
$$114x = 150000000 \Rightarrow x = 1.315.789,4 \text{ km}$$

Ou seja, aproximadamente $1.300.000$ km.

Resposta da questão 14: [A]

Sendo os triângulos retângulos semelhantes por AA e $\overline{BC} = 1{,}6$ m, temos

$$\frac{\overline{CD}}{3} = \frac{1{,}6}{8} \Leftrightarrow \overline{CD} = 0{,}6 \text{ m.}$$

Resposta da questão 15: [D]

Se que os lados AB e BC medem 80 e 100 metros, então o lado AC mede 60 metros (Teorema de Pitágoras). Sabe-se também que os segmentos CM e BM são iguais e medem 50 metros (pois MP é mediatriz da hipotenusa). Como o triângulo ABC é semelhante ao triângulo PMB, pode-se escrever:

$$\frac{100}{PB} = \frac{50}{80} \rightarrow PB = \frac{125}{2} \text{ m}$$

$$AP = 80 - \frac{125}{2} \rightarrow AP = \frac{35}{2} \text{ m}$$

$$\frac{MP}{60} = \frac{50}{80} \rightarrow MP = \frac{75}{2} \text{ m}$$

$$P_{lote1} = 60 + 50 + \frac{75}{2} + \frac{35}{2} \rightarrow P_{lote1} = 165 \text{ m}$$

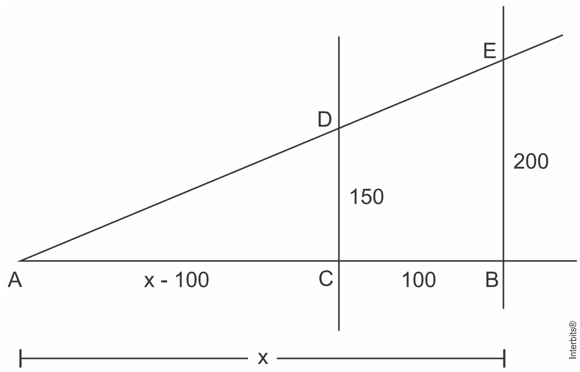
$$P_{lote2} = 50 + \frac{75}{2} + \frac{125}{2} \rightarrow P_{lote2} = 150 \text{ m}$$

Portanto, a razão entre os perímetros dos lotes I e II será:

$$\frac{P_{lote1}}{P_{lote2}} = \frac{165}{150} = \frac{11}{10}$$

Resposta da questão 16: [D]

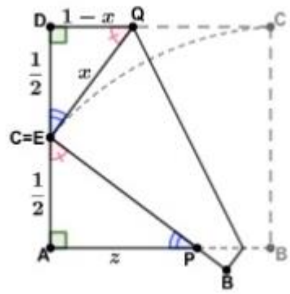
De acordo com o problema, temos a seguinte figura com x sendo a distância procurada.



$$\Delta ACD \sim \Delta ABE \Rightarrow \frac{x-100}{x} = \frac{150}{200} \Rightarrow \frac{x-100}{x} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 400 \text{ m}$$

Resposta da questão 17: [A]

Após a dobradura, temos o seguinte esquema:



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo QDE, temos:

$$x^2 = (1-x)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 1 - 2x + x^2 + \frac{1}{4}$$

$$2x = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{8},$$

consequentemente,

$$QD = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$

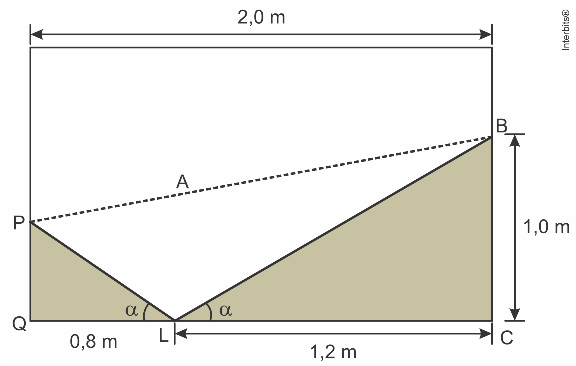
Como os triângulos QDE e EAP têm os mesmos ângulos, eles são semelhantes, logo

$$\frac{AP}{DE} = \frac{EA}{QD} \Rightarrow \frac{z}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} \Rightarrow z = \frac{2}{3}.$$

Logo, a desdobrarmos a folha, retornando o ponto B a sua posição de origem, teremos:

$$PB = 1 - AP = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\ dm.$$

Resposta da questão 18: [A]

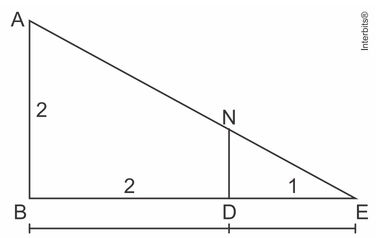


$$\Delta PQL \sim \Delta BCL \Rightarrow \frac{PQ}{1} = \frac{0{,}8}{1{,}2} \Rightarrow PQ = (0.666666...)\ \text{m}$$

Ou seja, aproximadamente 67 cm.

Resposta da questão 19: [B]

Considere a situação:



Aplicando semelhança de triângulos temos a seguinte proporção:

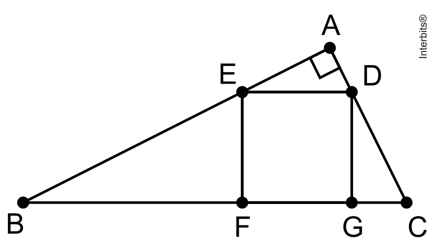
$$\frac{AB}{ND} = \frac{BE}{DE} \Rightarrow \frac{2}{ND} = \frac{3}{1} \Rightarrow ND = \frac{2}{3}$$

Como o valor procurado é $MN = 1 - ND$ temos:

$$MN = 1 - ND = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Resposta da questão 20: [D]

Considere a figura.



É fácil ver que os triângulos BFE e DGC são semelhantes por AA. Portanto, se ℓ é a medida do lado do quadrado, temos

$$\frac{\ell}{2} = \frac{8}{\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 16 \Rightarrow \ell = 4.$$

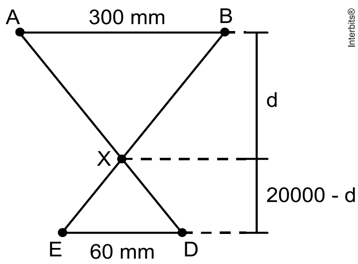
Resposta da questão 21: [A]

Sabendo que a altura é proporcional ao comprimento da sombra projetada, segue-se que a altura h do pau de sebo é dada por

$$\frac{h}{125} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow h = 5\ \text{m}.$$

Resposta da questão 22: [D]

Considere a figura, em que d é a distância pedida.



Como os triângulos ABX e EDX são semelhantes, temos que

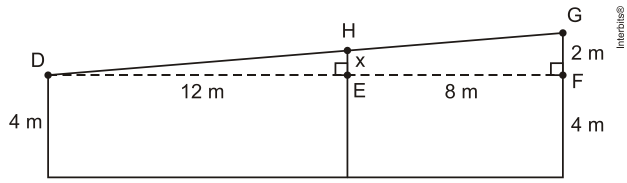
$$\frac{20000 - d}{d} = \frac{60}{300} \Leftrightarrow d = 100000 - 5d$$
$$\Leftrightarrow d = \frac{100000}{6}$$
$$\Rightarrow d \cong 16666{,}7\,\text{mm}$$
$$\Rightarrow d \cong 16{,}7\ \text{m}.$$

Resposta da questão 23: [B]

Se d é a distância procurada, então

$$\frac{d}{12} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow d = 8\ \text{m}.$$

Resposta da questão 24: [D]



Traçando $DF \parallel AC$, temos que os triângulos DHE e DGF são semelhantes por AAA.

Se $\overline{HE} = x$, vem:

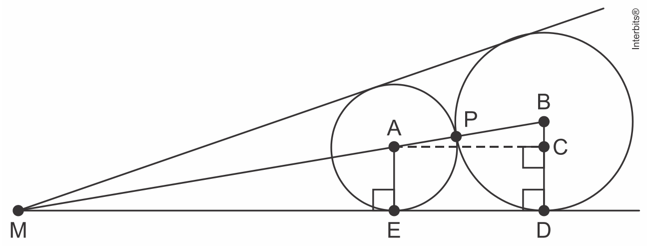
$$\frac{x}{2} = \frac{12}{20} \Rightarrow x = 1{,}2\ \text{m}.$$

Assim, a altura do suporte em B é:

$4 + x = 4 + 1{,}2 = 5{,}2\ \text{m}.$

Resposta da questão 25: [B]

Considere a figura.



Sendo $\overline{AP} = u$ e $\overline{PB} = v$, temos $\overline{BC} = v - u$. Assim, da semelhança dos triângulos MAE e ABC, vem

$$\frac{\overline{MA}}{u+v} = \frac{u}{v-u} \Leftrightarrow \overline{MA} = \frac{u^2+uv}{v-u}.$$

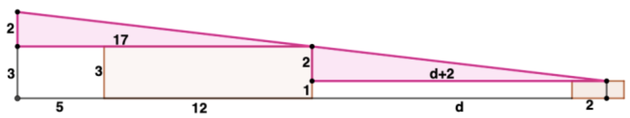
A resposta é

$$\begin{aligned}\overline{MP} &= \overline{MA} + \overline{AP} \\ &= \frac{u^2+uv}{v-u} + u \\ &= \frac{2uv}{v-u}.\end{aligned}$$

Resposta da questão 26: [C]

$$\frac{1}{0{,}005} = \frac{x}{15} \Leftrightarrow x = \frac{15}{0{,}005} \Leftrightarrow x = 3000 \text{ mm} = 3 \text{ m}$$

Resposta da questão 27: [D]



Como os dois triângulos em destaque são congruentes, temos:

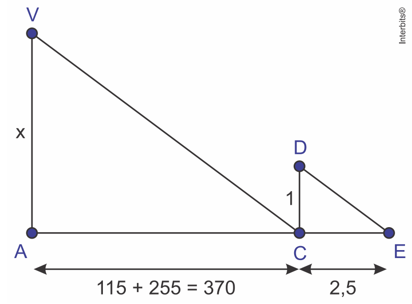
$$d + 2 = 17 \quad \Rightarrow \quad d = 15\, m$$

Resposta da questão 28: [C]

Considerando x a altura do prédio, temos:

$$\Delta ABF \sim \Delta ACE$$
$$\frac{20}{20+x} = \frac{12}{12+36}$$
$$\frac{20}{20+x} = \frac{1}{4}$$
$$x = 60 \text{ m}$$

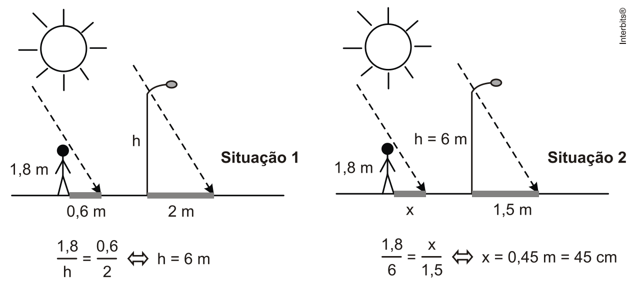
Resposta da questão 29: [C]



$\Delta VAC \sim \Delta DCE$:

$$\frac{x}{1} = \frac{370}{2{,}5} \Rightarrow x = 148\text{m}.$$

Resposta da questão 30: [B]

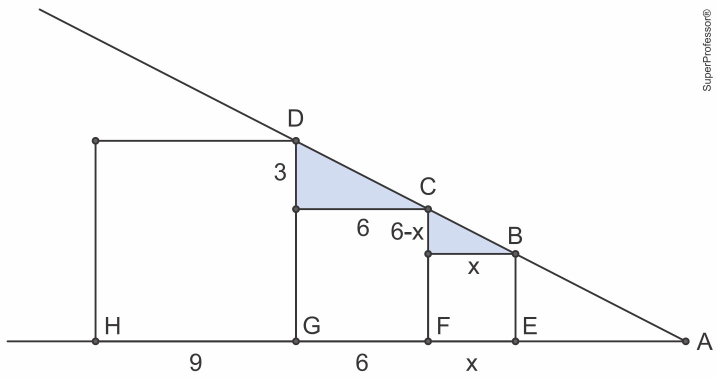


Resposta da questão 31: [D]

$$\frac{h}{1{,}1} = \frac{1{,}6}{0{,}5} \quad \Rightarrow \quad h = 3{,}52\, m$$

Resposta da questão 32: [D]

Os triângulos destacados são semelhantes.



Portanto:

$$\frac{3}{6-x} = \frac{6}{x} \Rightarrow 3x = 36 - 6x \Rightarrow 9x = 36 \Rightarrow x = 4$$

Logo, a soma das áreas dos quadrados será dada por:

$$9^2 + 6^2 + 4^2 = 133$$

Resposta da questão 33: [E]

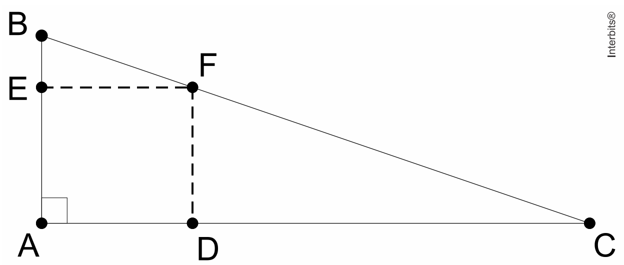
Observe que os triângulos OBC e OEF são semelhantes, logo:

$$\frac{EF}{BC}=\frac{OE}{OB}\Rightarrow\frac{EF}{4}=\frac{5\cdot OB}{OB}\Rightarrow EF=20\ cm$$

Como os triângulos DEF e ABC são semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{EF}{BC}=\frac{20}{4}=5$, temos que a razão entre as áreas desses triângulos é $5^2=25$, logo, a área do triângulo DEF é 25 vezes maior que a área do triângulo ABC.

Resposta da questão 34: [C]

Considere a figura, em que $\overline{AB}=12\text{cm}$, $\overline{AC}=35\text{cm}$ e $\overline{AE}=x\text{cm}$.



Os triângulos ABC e EBF são semelhantes por AA. Logo, temos

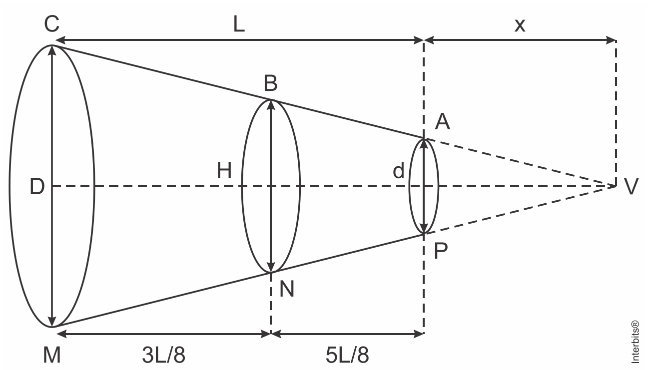
$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{AC}}\Leftrightarrow\frac{12-x}{12}=\frac{x}{35}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{420}{47}\text{cm}.$$

Portanto, como $\frac{420}{47}\cong 8{,}9,$ segue que a medida do lado do quadrado desejado pelo marceneiro está mais próxima de 9cm.

Resposta da questão 35: [C]

Temos a seguinte configuração:



Por semelhança de triângulos, obtemos:

$\Delta VAP \sim \Delta VCM:$

$$\frac{x}{x+L}=\frac{d}{D}\Rightarrow\frac{x}{x+240}=\frac{30}{60}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x=x+240\Rightarrow x=240\text{ cm}$$

$\Delta VAP \sim \Delta VBN:$

$$\frac{x}{x+\frac{5L}{8}}=\frac{d}{H}\Rightarrow\frac{240}{240+\frac{5}{8}\cdot 240}=\frac{30}{H}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8H=240+150\Rightarrow 8H=390$$

$$\therefore H=48{,}75\text{ cm}$$

Resposta da questão 36: [B]

Da figura, temos:

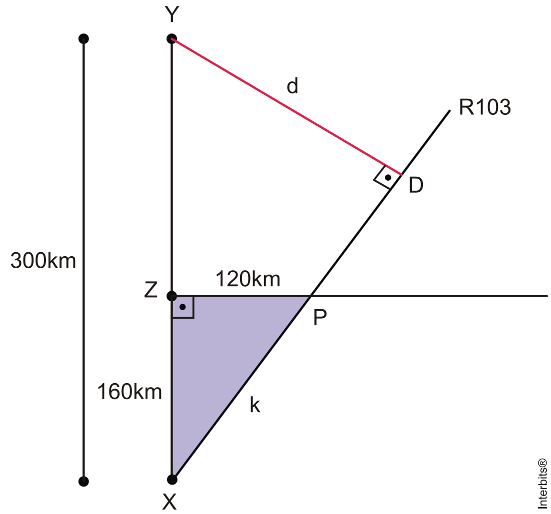
$$5^2=3\cdot(3+n)$$

$$25=9+3n$$

$$16=3n$$

$$n=\frac{16}{3}$$

Resposta da questão 37: [E]



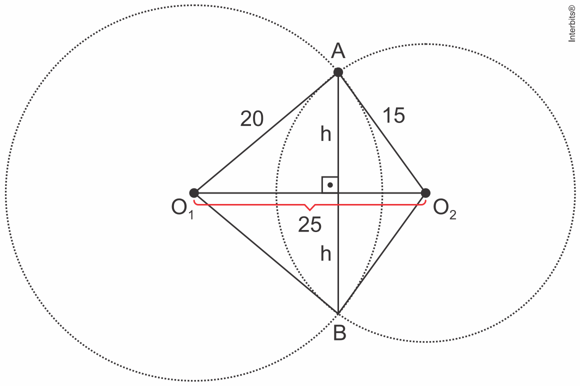
Determinando o valor de k no triângulo XZP:

$K^2 = 120^2 + 160^2$
K = 200 km.

$\Delta XZP \sim \Delta XDY$

$$\frac{200}{300}=\frac{120}{d}\Leftrightarrow 2d=360\Leftrightarrow d=180\text{km}$$

Resposta da questão 38: [B]



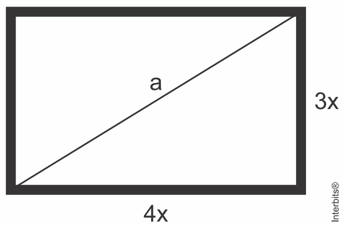
Considerando a figura acima, temos:
O triângulo AO_1O_2 é retângulo em A, pois:
$25^2 = 15^2 + 20^2.$

Logo, o segmento de medida h é altura desse triângulo.
$20 \cdot 15 = 25 \cdot h \Rightarrow h = 12$

Portanto, $AB = 2 \cdot h = 24\text{ cm}.$

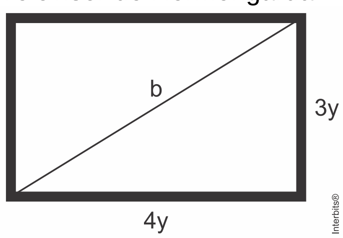
Resposta da questão 39: [C]

Televisor de Eurico.



$a^2 = (3x)^2 + (4x)^2 \Rightarrow a = 5x$

Televisor de Hermengarda.



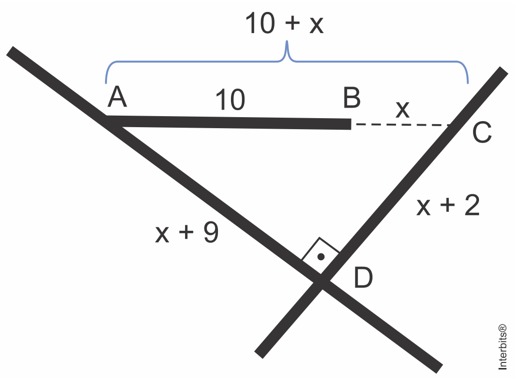
$b^2 = (3y)^2 + (4y)^2 \Rightarrow b = 5y$

Como $b = a + 5,$ temos:
$5y = 5x + 5 \Rightarrow y = x + 1$

Portanto, o lado maior da tela do televisor de Hermengarda excede o lado correspondente do televisor de Eurico em:
$4y - 4x = 4(x+1) - 4x = 4$ polegadas.

Resposta da questão 40: [A]

De acordo com as informações do problema, temos uma nova figura:



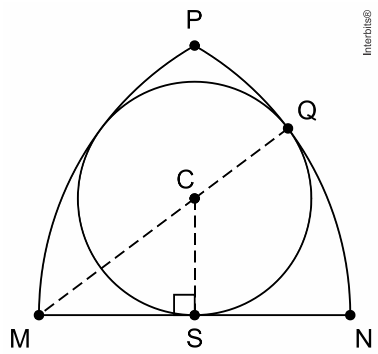
Podemos, então, aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo ADC:

$$(x+10)^2 = (x+9)^2 + (x+2)^2$$
$$x^2 + 20x + 100 = x^2 + 18x + 81 + x^2 + 4x + 4$$
$$x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 8}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -5 \text{ (não convém)}$$

Portanto, $BC = 3\text{ dam}.$

Resposta da questão 41: [B]

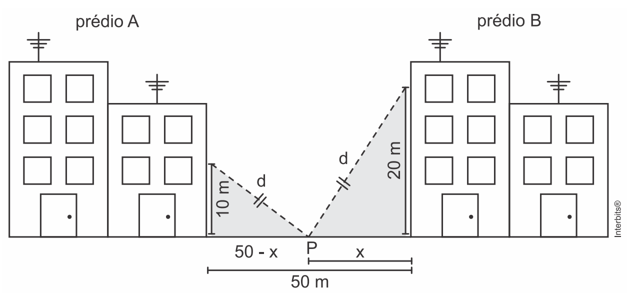
Considere a figura, em que C é o centro do círculo tangente aos arcos MP e $NP,$ S é o ponto médio de MN e Q é o ponto de interseção do círculo de centro C com o arco $NP.$



Logo, sabendo que $\overline{CS} = \overline{CQ} = 15\text{ u.c.}$ e $\overline{MN} = \overline{MQ},$ pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$\overline{MC}^2 = \overline{MS}^2 + \overline{CS}^2 \Rightarrow (\overline{MN} - 15)^2 = \left(\frac{\overline{MN}}{2}\right)^2 + 15^2$$
$$\Rightarrow \overline{MN}^2 - 40\overline{MN} = 0$$
$$\Rightarrow \overline{MN} = 40\text{ u.c.}$$

Resposta da questão 42: [A]



Nos triângulos assinalados na figura temos o seguinte sistema:

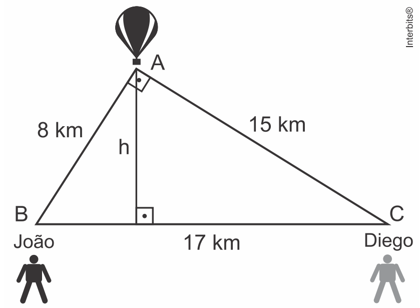
$$\begin{cases} d^2 = 10^2 + (50 - x)^2 \\ d^2 = 20^2 + x^2 \end{cases}$$

Igualando as equações, temos:

$$20^2 + x^2 = 10^2 + (50 - x)^2$$
$$400 + x^2 = 100 + 2500 - 100x + x^2$$
$$100x = 2200$$
$$x = 22$$

Resposta da questão 43: [C]

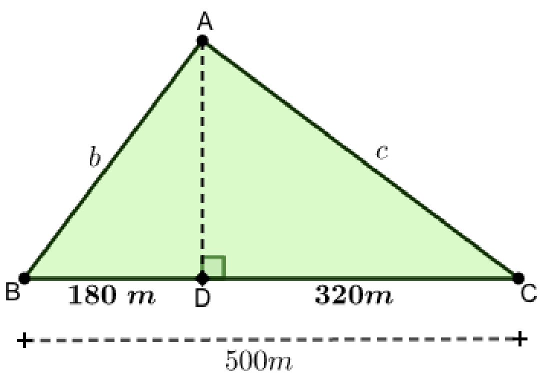
Como $17^2 = 8^2 + 15^2$, concluímos que o ângulo do triângulo com vértice no balão é reto.



Portanto, a altura h do balão desprezando a altura dos pesquisadores será dada por:

$$17 \cdot h = 8 \cdot 15 \Rightarrow 17 \cdot h = 120 \Rightarrow h \cong 7 \text{ km}$$

Resposta da questão 44: [A]



$$b^2 = 180 \cdot 500 \implies b = 300$$
$$c^2 = 320 \cdot 500 \implies c = 400$$

$$b \cdot c = a \cdot h \implies 300 \cdot 400 = 500 \cdot h \implies h = 240$$

Distância percorrida por Weshiley: 300 + 180 = 480m
Distância percorrida por Patrício: 400 + 320 = 720m
Distância percorrida por Flores: 240m.

Como os tempos foram iguais, temos que as velocidades de Weshiley, de Patrício e de Flores são proporcionais a
480, 720 e 240, ou seja, elas são proporcionais a 2, 3 e 1.

Resposta da questão 45: [B]

$$(CJ)^2 = 90 \cdot 160 \implies CJ = 120\ m$$
$$(AC)^2 = 90 \cdot (90 + 160) \implies AC = 150\ m$$
$$(BC)^2 = 160 \cdot (90 + 160) \implies BC = 200\ m$$

Perímetro do triângulo BCJ:

$$160 + 200 + 120 = 480\ m$$

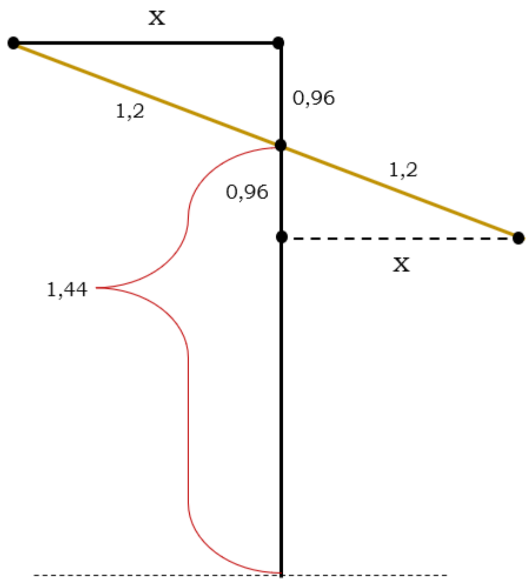
Perímetro do triângulo AJC:

$$90 + 120 + 150 = 360\ m$$

Razão entre os perímetros:

$$\frac{480}{360} = \frac{4}{3}$$

Resposta da questão 46: [B]



A medida AB é igual à medida do segmento CD, que é $2{,}4m$. Sabendo que o ponto Q dista do chão $1{,}44m$, a distância do ponto Q ao ponto C é

$$2{,}4 - 1{,}44 = 0{,}96m.$$

Assim, como os triângulos formados são congruentes, é possível descobrir a medida de X através do Teorema de Pitágoras.

$$x^2 + 0{,}96^2 = 1{,}2^2$$
$$x^2 + 0{,}9216 = 1{,}44$$
$$x^2 = 0{,}5184$$

$$x = 0{,}72m$$