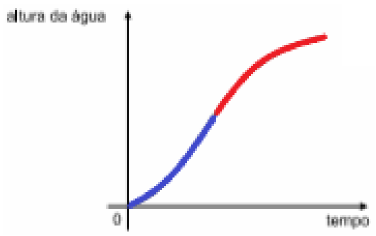
Resolução – Treinamento ENEM
S11.L2 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Item 01 =======================================

Como temos que a vazão é constante e o gráfico representa a altura do nível da água no recipiente ao longo do tempo, podemos dividir o gráfico em duas partes:

- 1° parte: onde a água vai subindo cada vez mais rapidamente no recipiente. Para isso o recipiente deveria ter uma forma mais grossa no começo e que fosse afinando aos poucos. Essa 1° parte representa a parte em azul no gráfico abaixo.

- 2° parte: onde a água vai subindo cada vez mais lentamente no recipiente. Para isso o recipiente deveria ter uma forma mais fina que fosse alargando aos poucos. Essa 2° parte representa a parte em vermelha no gráfico abaixo.



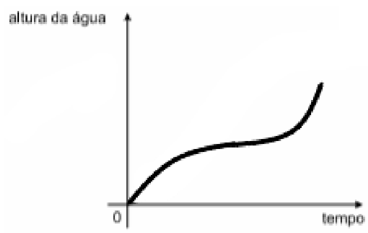
Dessa forma concluímos que o gráfico representa o recipiente de letra B.

Resposta: Letra B.

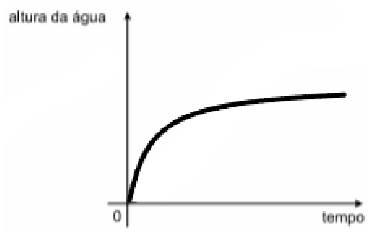
Observação:

Aqui vai uma ajuda para quem tem dificuldade com esse tipo de questão e que frequentemente cai no ENEM nas provas de matemática e física. Tente fazer o gráfico para as demais possibilidades dadas e compare com os seguintes:

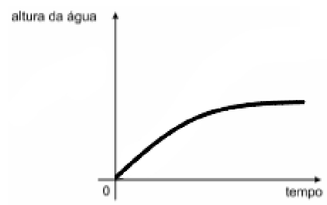
a)



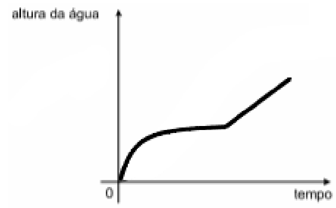
c)



d)



e)



Item 02 =======================================

O gráfico mostrado deve associar corretamente os valores da tabela a uma posição coordenada, logo, se alguma posição não corresponder ao valor original esse item com certeza não é a resposta. Por exemplo, se percebermos que alguma alternativa colocou o valor de janeiro como igual ou inferior a fevereiro, já sabemos que estará errada, já que na realidade o valor de janeiro foi maior. Vamos então às alternativas:

a) Como acabamos de falar, fevereiro não foi igual a janeiro, então de cara podemos descartar esse gráfico.
b) Esse gráfico ilustrou bem quando que ocorreu aumento e diminuição da conta, mas ele tem um simples erro que o invalida: na tabela os valores de janeiro e abril são iguais (110), mas no gráfico os valores de janeiro e abril não estão na mesma altura, invalidando esta alternativa
c) A partir de agora, os 3 gráficos que sobraram relacionam bem quando a função aumenta e diminui, e colocaram o valor de janeiro igual a abril, então o que falta a gente julgar para encontrar a resposta? A resposta é: a escala! Os valores que a função assume a cada mês precisam ser proporcionais quando representado no gráfico. Para vocês entenderem, olhem para o gráfico deste item e percebam como o valor de janeiro tem 4 ou 5 vezes a altura do valor de março. Na tabela, vemos que o valor de janeiro é ligeiramente maior que março, não sendo nem o dobro, logo o item está errado por demonstrar mal a dimensão dos valores de cada mês.
d) **Esse item é nossa resposta. A função aumenta e diminui nos momentos certos, abril está igual a janeiro, e as dimensões de cada mês estão bem representadas, com variações pequenas de janeiro a maio e um grande salto em junho, mês este cujo valor é quase o dobro do de março**
e) Aqui temos o mesmo erro que na letra C, Pois os meses de janeiro a abril parecem ter praticamente um terço do valor de maio e praticamente um quinto de junho, o que claramente está errado pelos valores da tabela.

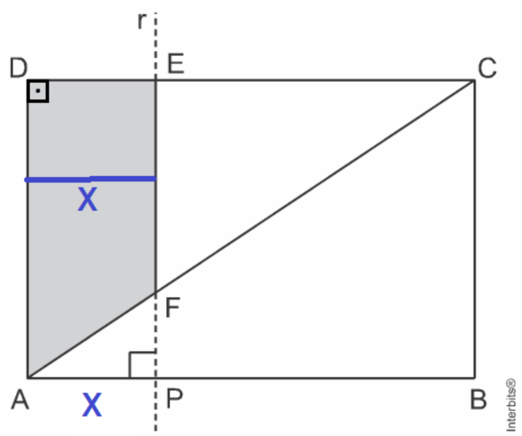
Resposta: Letra D.

Resolução – Treinamento ENEM
S11.L2 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Item 03 ==

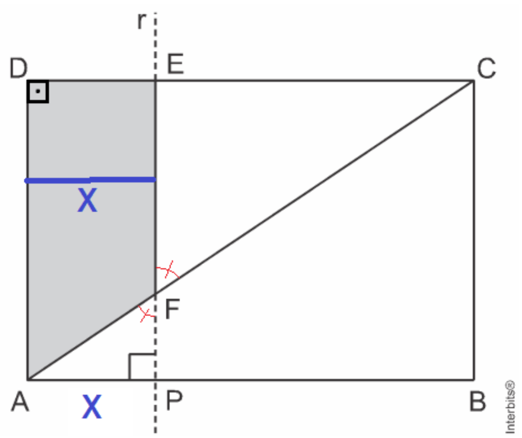
E temos aqui uma questão de geometria fingindo ser uma questão de função. Nossa resposta final vai ser uma função, mas as habilidades para encontrá-la são basicamente de geometria.

Vamos ilustrar onde vai ficar o nosso x e como ele vai influenciar na área do polígono:



O polígono ADEF é um trapézio retângulo, e x é justamente a sua altura. A sua base maior, AD, é o lado do retângulo, logo sempre vale 8 para qualquer valor de x, e a base menor, EF, varia de acordo com x. Percebemos que se x for ficando cada vez maior, EF vai ficando cada vez menor. Além disso, como x é um segmento do lado AB, ele não pode ser maior que 12, já que essa é a medida do lado.

Para calcular a área a gente precisa saber a medida de EF, e como a gente vai saber isso? A gente sabe que o segmento EC é paralelo a AP. A gente sabe que EF e FP estão sobre a mesma reta, e a gente sabe que os ângulos AFP e EFC são opostos pelo vértice:



Com isso, a gente sabe que os triângulos AFP e EFC são semelhantes, já que eles necessariamente têm os três ângulos correspondentes congruentes. Com isso, podemos fazer uma proporção entre seus lados:

$$\frac{EF}{FP} = \frac{EC}{AP}$$

Vamos aqui nos referir a EF como k, só para simplificar um pouco a escrita. Pela imagem, nós percebemos que EC é o lado DC do retângulo menos o segmento x, logo podemos escrever EC = DC – x, e nós sabemos que DC = 12, logo EC = 12 – x:

$$\frac{k}{FP} = \frac{12-x}{AP}$$

AP é o próprio segmento x, e FP será a medida de EP menos EF. FP mede 8, já que é paralelo ao lado AD, e EP é justamente nosso k, então nossa relação fica assim no final:

$$\frac{k}{8-k} = \frac{12-x}{x}$$

E vamos resolver para encontrarmos k em função de x:

$$\frac{k}{8-k} = \frac{12-x}{x}$$
$$kx = (12-x)(8-k)$$
$$kx = 96-8x-12k+kx$$
$$0 = 96-8x-12k$$
$$12k = 96-8x$$
$$k = 8-\frac{2}{3}x$$

Logo, EF mede 8 – 2x/3. Agora a gente já tem a altura, a base menor e a base maior do trapézio, e, enfim, podemos calcular sua área:

$$A_{TRA} = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$
$$A_{TRA} = \frac{\left(8+8-\frac{2}{3}x\right)\cdot x}{2}$$
$$A_{TRA} = \left(4+4-\frac{1}{3}x\right)\cdot x$$
$$A_{TRA} = 8x-\frac{1}{3}x^2$$

E ficamos com a **LETRA D**

Resolução – Treinamento ENEM
S11.L2 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Item 04 ===

Para resolver a questão devemos fatorar o polinômio g(x), para descobrirmos as suas raízes e assim conseguirmos esboçar o gráfico da função corretamente. Fatorando o polinômio $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ obtemos:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$
$$g(x) = (x+1)^3$$

Como g(x) é um cubo perfeito com raiz igual a -1, temos que o único gráfico que esboça corretamente essa situação é a letra D.

Resposta: Letra D.

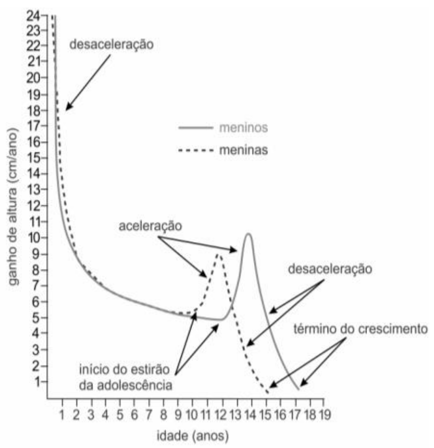
Uma outra forma de resolver o exercício de maneira mais rápida é substituindo valores na função g(x), fazendo esse processo obtemos que:

- g(0) = 1
- g(-1) = 0

Assim, temos que o único gráfico é que possui esses pontos é o representado na letra D.

Resposta: Letra D.

Item 05 ===



a) Olha, se você acabou marcando letra a, tudo bem. Ela está meio mal redigida mesmo. Essa alternativa está errada, pois imediatamente após o período de aceleração do crescimento, há um período de desaceleração do crescimento. Mas, de fato, depois do período de aceleração há um período de término, como o gráfico mostra. Ele só não é imediatamente após, como a questão queria.

b) Essa aqui deve ter sido a maior causadora de erros. Muitos devem ter olhado para o gráfico e pensado. Bom, de fato, a curva atinge o máximo, para os meninos, aos 14 anos, e, para as meninas, aos 12 anos. No entanto, lembrem-se, essa curva é de velocidade de crescimento. Sendo assim, a velocidade máxima de crescimento é nessas idades. Mas, sua altura máxima, é ao fim do período de crescimento, aos 18 e 15 anos, de acordo com o gráfico, para meninos e meninas, respectivamente.

c) Essa está errada, porque não podemos ter certeza dessa afirmação. Não há nada no gráfico que permita essa interpretação.

d) Essa está errada, lembrem que o gráfico indica velocidade de crescimento. Portanto, todos os momentos que o gráfico dos meninos está acima do gráfico das meninas, são momentos em que seu crescimento é maior.

e) Essa é a alternativa correta, pois, de fato, dos 4 aos 8 anos de ambos os meninos e as meninas, o gráfico está visualmente sobreposto. Então, poderíamos considerar que suas velocidades de crescimento são iguais, e, que, portanto, sofrerão variações iguais na estatura.

Observação: novamente, a questão não foi muito feliz ao redigir a letra a, muito menos em conjunto com a e, que faz uma perigosa generalização. Acho que eu, provavelmente, teria marcado a letra a se fosse minha primeira vez vendo a questão. Outra coisa legal, e, spoiler, esse é o gráfico da derivada da altura em função da idade :)

Resposta: Letra E.

Item 06 ===

Essas questões escritas meio nesse modelo sempre me lembram de questões de física que a gente aplica os diferentes tipos de movimento nos eixos x e y e tals.

Nessa questão isso daria uma resolução muito mais complicada e chata do que realmente é.

Para resolver de forma rápida e assertiva, é só aplicar conceitos matemático.

i) Descobrindo o ponto x do início do voo

Bom, sabemos que a equação da rampa é

$$y = \frac{1}{10}x,$$

e, também sabemos que a rampa tem 2 metros de altura.

Como a moto perde o contato com a rampa no ponto relativo a esses 2 metros de altura (x,2). Podemos descobrir o x apenas aplicando na equação.

$$y = \frac{1}{10}x$$

$$2 = \frac{1}{10}x$$

$$20 = x$$

Portanto, a bicicleta começa o deslocamento no ar a 20m no eixo x.

ii) Agora, para descobrir o ponto em que a moto toca o chão novamente, basta pegar a maior raiz da função da trajetória.

Para descobrir essas raízes, vamos aplicar a Fórmula de Bhaskara, visto que é uma função quadrática completa e aplicar as Relações de Girard seria trabalhoso com esses valores feios da função.

E, antes de aplicar Bhaskara, vamos deixar um pouco mais bonitinha a função. Como queremos as raízes, temos:

$$f(x) = \frac{-1}{900}x^2 + \frac{7}{30}x - \frac{20}{9}$$

$$\frac{-1}{900}x^2 + \frac{7}{30}x - \frac{20}{9} = 0$$

Multiplicando por 900 dos dois lados, temos:

$$-1x^2 + 30 \cdot 7x - 2000 = 0$$

$$-x^2 + 210x - 2000 = 0$$

$$x^2 - 210x + 2000 = 0$$

Agora, mesmo nosso plano inicial sendo fazer por Bhaskara, nem precisamos. Só olhando eu já sei as raízes.

ii-a) Achando as raízes por Girard

Vou mostrar pra vocês por Relações de Girard e depois faço por Bhaskara pros céticos.

Primeiro, vocês lembram o que são as Relações de Girard?

"Relações de Girard" é o nome chique pra "Soma e Produto".

Ou seja, estou falando de acharmos as raízes da seguinte forma:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Vejam como fica óbvio quais são os x_1 e x_2:

$$x_1 + x_2 = \frac{-(-210)}{1}$$

$$x_1 + x_2 = 210$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{2000}{1}$$

$$x_1 \cdot x_2 = 2000$$

Então, o que é o que é que a soma dá 210 e a multiplicação dá 2000?

$$x_1 = 10$$

$$x_2 = 200$$

Porque 10 + 200 = 210 e 10.200 = 2000.

ii-b) Agora, por Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-210) \pm \sqrt{(-210)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2000}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{210 \pm \sqrt{21^2 \cdot 10^2 - 80 \cdot 10^2}}{2}$$

$$x = \frac{210 \pm \sqrt{10^2 \cdot (441 - 80)}}{2}$$

$$x = \frac{210 \pm 10\sqrt{361}}{2}$$

$$x = \frac{210 \pm 10 \cdot 19}{2} = \frac{210 \pm 190}{2}$$

Agora, achando as raízes:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{210 - 190}{2} = 10 \\ x_2 = \dfrac{210 + 190}{2} = 200 \end{cases}$$

Como queríamos a maior raiz, temos que o x do pouso = 200m.

iii) Agora, achando esse deslocamento horizontal

Basicamente, o deslocamento horizontal é quanto Evel Knievel percorreu nesse eixo, que corresponde a x = 200 do pouso - x = 20 metros da partida.

200 - 20 = deslocamento

Deslocamento = 180m

Resposta: Letra C.

Resolução – Treinamento ENEM
S11.L2 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

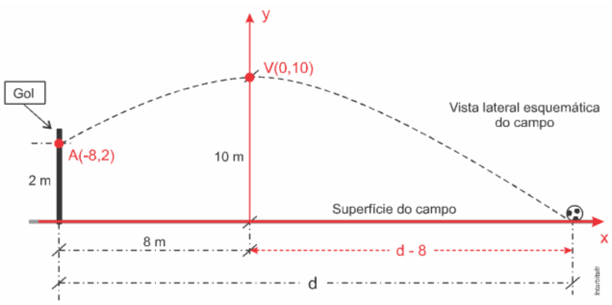
Item 07 ===

Essa é outra daquelas questões que se você só olhar a figura tem um cara de ser uma questão de física de Movimento Retilíneo Uniformemente Variado.

Mas, como ela não fala sobre essas questões de velocidade ou aceleração tão diretamente, fica para nós da matemática resolver com outras ferramentas.

O que nós temos de informação é basicamente o esquema representativo desenhado.

Bom, vamos então apenas nomear alguns pontos, antes de começar:



Chamamos A o ponto da bola quando ela está na linha do gol e de V o ponto mais alto da trajetória (vértice da parábola).

i) Escrevendo a função que descreve esse movimento

Bom, como temos o vértice do gráfico, podemos muito bem já aplicar direto a nossa Forma Canônica, ficando com o seguinte:

$$f(x) = a \cdot (x - X_V)^2 + Y_V$$

$$f(x) = a \cdot (x - 0)^2 + 10$$

$$f(x) = a \cdot x^2 + 10$$

E, como ainda temos mais um ponto, vamos aplicar esse ponto A (-8,2) na função para descobrir o valor de a.

$$f(x) = a \cdot x^2 + 10$$

$$f(-8) = a \cdot (-8)^2 + 10$$

$$2 = 64a + 10$$

$$64a = -8$$

$$a = -\frac{1}{8}$$

Sendo assim, nossa função é:

$$f(x) = -\frac{1}{8} \cdot x^2 + 10$$

ii) Achando as raízes da função

Agora, como nosso gráfico está com o eixo y centralizado, temos as 2 raízes simétricas em relação ao vértice.

Desse modo, a distância x que queremos encontrar será igual a 8m já mostrados na questão + raiz positiva.

$$-\frac{1}{8} \cdot x^2 + 10 = 0$$

$$\frac{1}{8} \cdot x^2 = 10$$

$$x^2 = 80$$

$$x = \pm 4\sqrt{5}$$

Chegamos a um ponto interessante, pois não sabemos o valor de raiz quadrada de 5.

Então, temos de fazer uma aproximação ou uma delimitação de valores possíveis, tendo em vista as alternativas fornecidas.

Nós sabemos que 4.2,25 = 9. Então, para dar 17 (8 + 9), raiz de 5 teria de ser 2,25. No entanto, sabemos que a raiz de 5 será um valor menor que esse. Costumamos aproximá-la para 2,22 ou 2,23.

Então, podemos afirmar que nosso x é menor que 17, pois será 8 + y, em que y < 9.

Resposta: Letra A.

Item 08 ===

O movimento do avião é descrito por 3 funções diferentes. Primeiro, ele sobe formando uma trajetória retilínea, e a função afim que o descreve é y = x (porque tangente de 45° é 1, logo essa é a função identidade). Depois, o avião descreve uma trajetória parabólica de acordo com $y = -x^2 + 14x - 40$, e, por fim, passa a não variar mais sua altitude, e assume a trajetória de uma função constante y = a.

Se a questão nos pediu a variação de altitude entre V e P, ele quer a diferença entre suas coordenadas y. as coordenadas do ponto P são o primeiro ponto de encontro entre a função y = x e a parábola, logo para encontrarmos suas coordenadas só precisamos igualar as duas funções:

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x^2 + 14x - 40 \end{cases}$$

$$y = -y^2 + 14y - 40$$

$$y^2 - 13y + 40 = 0$$

E podemos resolver essa equação rapidamente por soma e produto. A soma é 13 e o produto é 40. Se pegarmos todos os produtos possíveis para 40 entre números inteiros temos:

$$1 \times 40 = 40$$
$$2 \times 20 = 40$$
$$4 \times 10 = 40$$
$$5 \times 8 = 40$$

E quais desses somam 13? Só 5 e 8, ou seja, existem dois pontos de encontro entre essas duas funções, mas nós só queremos o primeiro deles, ou seja, o 5.

Então o ponto P tem altitude de 5 km. O ponto V é um pouco mais direto, só precisamos encontrar o y do vértice da parábola:

$$y = -x^2 + 14x - 40$$
$$y_V = \frac{-\Delta}{4a}$$
$$y_V = \frac{-\left(b^2 - 4ac\right)}{4a}$$
$$y_V = \frac{-(196 - 160)}{4 \cdot (-1)}$$
$$y_V = \frac{-36}{-4}$$
$$y_V = 9$$

Logo, a altitude de P é 5 e a de V é 9, e a diferença entre eles é 4 km.

LETRA D

Item 09 ==

O que a questão nos pede aqui é o y do vértice, o valor mínimo que a função assumiu, mas não nos deu a função que descreve esse gráfico, então vamos precisar descobrir.

Tendo que:

$$V(t) = at^2 + bt + c$$

O gráfico nos mostra que quando t é 0, V = 60, então substituindo esses valores encontramos c rapidamente:

$$60 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$
$$60 = c$$

E os outros dois pontos que o gráfico nos deu foram (20,50) e (24,60). Substituindo t e V por esses valores nós podemos montar um sistema para encontrar a e b:

$$\begin{cases} 60 = a \cdot 24^2 + 24b + 60 \\ 50 = a \cdot 20^2 + 20b + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24b = -24^2 a \\ 20b = -20^2 a - 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b = \dfrac{-24^2 a}{6} \\ 4b = \dfrac{-20^2 a - 10}{5} \end{cases}$$

$$4b = 4b$$

$$\frac{-24^2 a}{6} = \frac{-20^2 a - 10}{5}$$
$$-4 \cdot 24a = -4 \cdot 20a - 2$$
$$24 \cdot 4a = 20 \cdot 4a + 2$$
$$4 \cdot 4a = 2$$
$$a = \frac{1}{8}$$

$$24b = -24^2 \cdot \frac{1}{8}$$
$$b = \frac{-24}{8}$$
$$b = -3$$

A resolução ficou um pouco longa porque os números foram um pouco chatos, mas é uma resolução normal de sistema. Agora, enfim, a gente tem a função V(t)

$$V(t) = \frac{t^2}{8} - 3t + 60$$

A gente também sabe que, pela simetria da parábola, como 24 e 0 tem a mesma imagem (60), o vértice da parábola vai estar bem no ponto médio entre eles, ou seja, a abscissa do vértice é 12. Com isso, basta substituirmos t por 12 e encontraremos a resposta:

$$V(t) = \frac{12^2}{8} - 3 \cdot 12 + 60$$
$$V(t) = 18 - 36 + 60$$
$$V(t) = 42$$

LETRA D

Item 10 ==

Se a vazão é constante, a quantidade de água retirada por segundo é constante, logo a quantidade de água drenada é diretamente proporcional ao tempo que a torneira está aberta, e o gráfico que representa uma relação de proporcionalidade é uma reta. Com isso nós ficamos em dúvida entre as letras B e E, mas lembremos que o reservatório está sendo esvaziado, logo a quantidade de água dentro dele está diminuindo, e a função deve ser decrescente, conforme mostra a **Letra E.**

Resolução – Treinamento ENEM
S11.L2 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Item 11 ==

Em primeiro lugar, note que a questão pediu um gráfico h x p, e a primeira letra sempre representa a grandeza que estará no eixo das abscissas, logo podemos já desprezar as alternativas D e E, já que representam a altura h no eixo das ordenadas.

Por fim, precisamos notar que a diferença entre os gráficos se dá apenas pelas linhas que determinam a área cinza, que em algumas imagens está contínua e em algumas está pontilhada. A linha contínua quer dizer que aquele valor específico está incluído no gráfico, enquanto a linha pontilhada diz que aquele valor não deve ser incluído.

O universo da questão está entre indivíduos de altura 1,5 ≤ h < 1,9, logo a altura de 1,9 não deve ser considerada, e podemos descartar a alternativa C, já que esta apresenta uma linha contínua para a altura de 1,9 m.

Ficamos então entre as letras A e B, e note pelo universo de alturas, que a altura de 1,5 m deve ser considerada, logo deve estar representada por uma linha contínua, conforme está na **Letra A.**

Item 12 ==

A melhor estratégia para a gente resolver essa questão é ir preenchendo o gráfico com os valores que a gente for descobrindo de trás pra frente. Se o lucro em maio foi de 183, e a queda no segundo período foi de 15 por mês, logo o lucro em abril havia sido de 198 (183 + 15).

Sabendo que o lucro de abril foi de 198 e o de fevereiro foi de 174, nós temos que ao longo de dois meses a variação total foi de 24 (198 – 174)

Se esse crescimento foi 24 ao longo de dois meses, logo o crescimento mensal foi de 12. Com isso se durante todo o primeiro período, o aumento a cada mês é constante, temos que o lucro em janeiro foi 12 a menos que em fevereiro, logo foi de 162 milhares de reais, **Letra B.**

Item 13 ==

Como à medida que você lê o livro, cada vez você o lê mais rapidamente, temos que o modelo que corresponde a esse modo de leitura é uma função exponencial. Assim, corresponde ao gráfico da letra B.

Resposta: Letra B.

Item 14 ==

Primeiro vamos montar um sistema de duas equações e duas incógnitas com os valores da tabela que correlacionam a escala Otavius e a escala celsius, obtendo:

$$\begin{cases} y = a\cdot x + b \ e\,(18;6) \to 6 = a\cdot 18 + b \\ y = a\cdot x + b \ e\,(36,60) \to 60 = a\cdot 36 + b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima temos que os valores de a e b valem:

$$\begin{cases} 6 = a\cdot 18 + b \to b = 6 - 18\cdot a \\ 60 = a\cdot 36 + b \end{cases}$$

$$substituindo\ b = 6 - 18\cdot a:$$
$$60 = 36\cdot a + 6 - 18\cdot a \to 60 - 6 = 36\cdot a - 18\cdot a$$
$$54 = 18\cdot a \to a = \frac{54}{18} \to a = \frac{3\cdot 18}{18} \to a = 3$$
$$substituindo\ a = 3:$$
$$b = 6 - 18\cdot 3 \to b = -48$$

Assim, como a função que correlaciona a escala Otavius e a escala celsius é $y = 3\cdot x - 48$. Vamos calcular quanto é a temperatura na escala Otavius, obtendo:

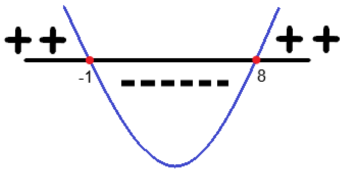
$$y = 3\cdot x - 48 \to y = 3\cdot 100 - 48$$
$$y = 300 - 48$$
$$y = 252°$$

Resposta: Letra C.

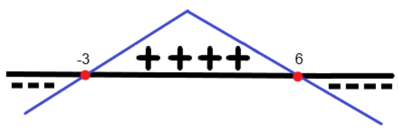
Item 15 ==

Para que a função $h(x)$ assuma valores negativos devemos ter valores do numerador ($f(x)$) ou do denominador ($g(x)$) negativos. Para isso, vamos fazer o estudo do sinal para as duas funções, obtendo:

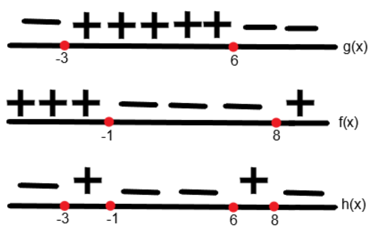
- $f(x)$:



- $g(x)$:



Agora fazendo o estudo do sinal da função $h(x)$ obtemos:



Portanto, os intervalos em que $h(x)$ assume valores negativos são $]-\infty;-3[\,\cup\,]-1;6[\,\cup\,]8;+\infty[$.

Resposta: Letra B.