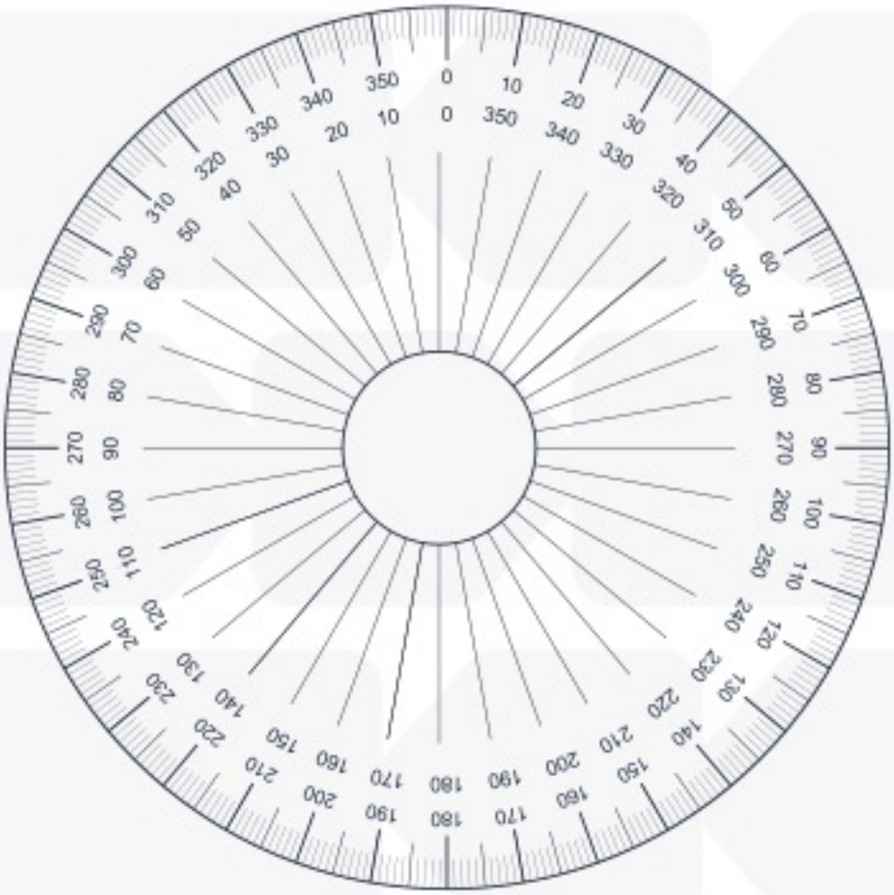
LIVRO 4

RONAEBSON
MATEMÁTICA CRIATIVA

SUMÁRIO

CONCEITOS BÁSICOS E ÂNGULOS



RONAEBSON
MATEMÁTICA CRIATIVA

GEOMETRIA PLANA

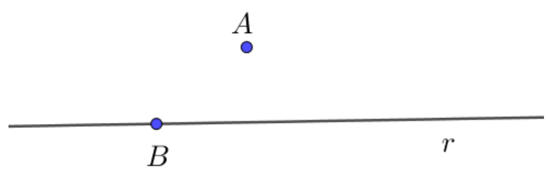
A Teoria da Geometria Plana é uma das áreas da matemática mais presentes na história e a sua magnitude aparece da construção das pirâmides pelos egípcios por volta de 2600 a.C até a construção do Burj Khalifa Bin Zayid maior arranha céu do mundo com 826 metros de altura no Emirados Árabes.

Além das aplicações da Geometria, a sua formalização foi uma grande evolução na Teoria Matemática com a coletânea escrita por Euclides de Alexandria denominada *Os Elementos*, pois iniciou a construção por meio de conceitos primitivos, axiomas e o raciocínio lógico-dedutivo.

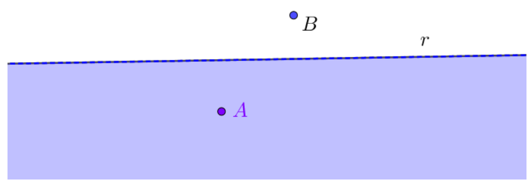
Os axiomas são verdades evidentes que não necessitam de demonstração e os conceitos primitivos são determinados objetos geométricos que não dispensam explicações. Com apenas essas duas ideias, consegue-se demonstrar toda a teoria matemática da Geometria.

Por exemplo, o conceito de ponto e reta ou plano estão bem presentes no senso comum, por isso são conceitos primitivos e o utilizaremos para elaborar as novas definições. Para referenciar os pontos, utilizaremos as letras maiúsculas do alfabeto Hindu-Arábicos enquanto para os pontos utilizaremos as letras minúsculas.

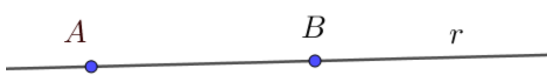
Um ponto P pode pertencer ou não a uma reta $\boldsymbol{r}$. Caso pertença, escrevemos $P \in r$, caso contrário $P \notin r$.



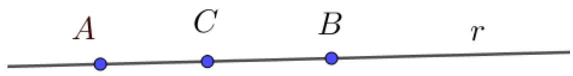
Uma reta r divide um plano em dois semi planos distintos cuja interseção é a reta $\boldsymbol{r}$.



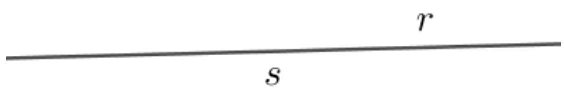
Por dois pontos distintos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ podemos traçar uma única reta r. Nessa situação, também denotamos a reta por $\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.



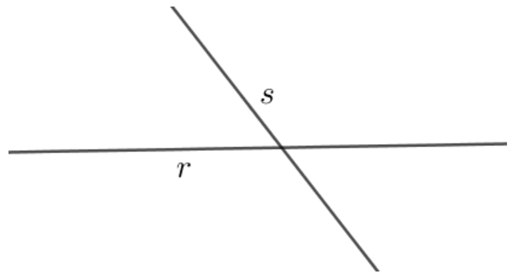
Caso haja um terceiro ponto $\boldsymbol{C}$ pertencente a $\boldsymbol{r}$, dizemos que $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ são pontos colineares.



Se duas retas r e s possuem todos os pontos em comum, dizemos que r e s são retas coincidentes.



Caso r e s possuam apenas um ponto em comum, dizemos que r e s são retas concorrentes



- **Semirreta:** Um ponto A, situado sobre uma reta r, a divide em dois pedaços, quais sejam, as semirretas de origem $\boldsymbol{A}$. Para denotar melhor cada pedaço, basta escolher um ponto $\boldsymbol{B}$ que está em uma metade e um ponto $\boldsymbol{C}$ em outra, denotando assim cada semirreta por $\boldsymbol{AB}$ e $\boldsymbol{AC}$, respectivamente.

Semirreta $\overrightarrow{AB}$

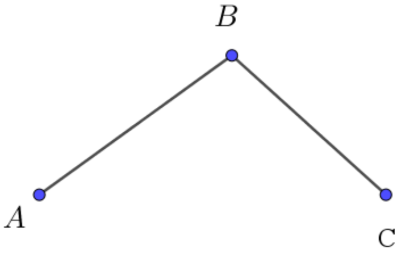
Os segmentos de retas são um dos objetos mais utilizados na geometria plana e no cotidiano, pois é um dos objetos geométricos mais próximos da nossa realidade. Matematicamente, definimos:

- **Segmento de Reta:** Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ pontos distintos e a reta $\boldsymbol{r}$ que passa por $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$. Os conjuntos de pontos que pertencem a $\boldsymbol{r}$ e estão entre $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ é denominado segmento de reta e é representado por $\overline{AB}$.

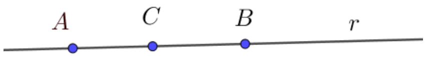
Segmento $\overline{AB}$

Os segmentos podem ser classificados como:

i) Segmentos consecutivos:
Dois segmentos de reta são ditos consecutivos se, e somente se, uma extremidade de um deles é também extremidade do outro.



Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são consecutivos

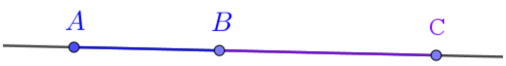


Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são consecutivos
Os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ são consecutivos

ii) Segmentos colineares:
Dois segmentos de retas são colineares se, e somente se, estão numa mesma reta.

Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são colineares

iii) Segmentos adjacentes:
Dois segmentos consecutivos e colineares são ditos adjacentes se, e somente se, possuem em comum apenas uma extremidade (não têm pontos internos em comum).



Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são adjacentes

Para poder medir o comprimento de um segmento de reta, é necessário definir uma unidade. No nosso caso, salvo menção contrária, adotaremos 1 u.c. (unidade de comprimento). Assim, a medida de um segmento $\overline{AB}$, indicada por AB, será um número real positivo associado ao segmento de tal forma que:

- Segmentos congruentes têm medias iguais e, reciprocamente, segmentos de medidas iguais são congruentes.
- Se um segmento é maior que outro, sua medida é maior que a deste outro.
- $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} \implies AB = AC + CB$

Um pouco de história...

A palavra metro tem origem no grego métron, que significa “o que mede”.

O sistema métrico surgiu por volta do ano de 1790. Antes disso, cada povo usava um sistema de unidades diferentes, o que, naturalmente, causava a maior confusão. Por exemplo: o mesmo comprimento era medido em um lugar usando-se jardas e em outro com o uso de palmos. O resultado disso tornava praticamente impossível a comunicação entre os povos.

Para solucionar esse problema, reformadores franceses escolheram uma comissão de cinco matemáticos para que elaborassem um sistema padronizado.

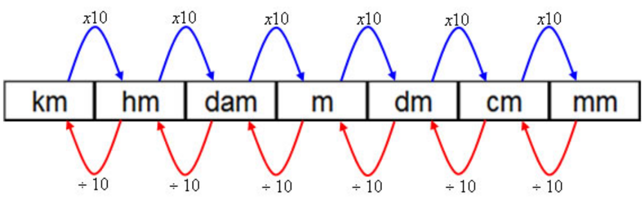
Essa comissão decidiu que a unidade de medida de comprimento se chamaria metro, e que corresponderia a décima milionésima parte da distância do equador terrestre ao polo norte, medida ao longo de um meridiano.

Mas a medida da distância do equador ao polo não era nada prática, tanto que ao efetuarem os cálculos os matemáticos acabaram cometendo um erro. Então em 1875 uma comissão internacional de cientistas foi convidada pelo governo francês para que reconsiderassem a unidade do Sistema Métrico, e dessa vez foi construída uma barra de uma liga de platina com irídio, com duas marcas, cuja distância define o comprimento do metro, e para evitar a influência da temperatura, esta barra é mantida a zero grau centígrado, num museu na Suíça.

Entretanto os cientistas não pararam por aí, no decorrer do tempo foram sendo propostas novas definições para o metro. A última, e que passou a vigorar em 1983, é baseada na velocidade com que a luz se propaga no vácuo.
Resumidamente, pode-se dizer que um metro corresponde a fração 1/300.000.000 da distância percorrida pela luz, no vácuo em um segundo.

Disponível em: https://www.colegioweb.com.br/historia-da-matematica/metro.html

Observe o esquema para a transformação das unidades de medidas:



Divisão de um Segmento

Dizemos que um ponto P divide internamente o segmento $\overline{AB}$ na razão k quando

$$\frac{AP}{PB} = k$$

Por exemplo, se considerarmos um segmento $\overline{AB}$ de 10 cm de comprimento e o ponto P dividir internamente $\overline{AB}$ de tal modo que $AP = 2\,cm$ e $PB = 8\,cm$, temos que P divide AB na razão

$$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},$$

ou seja, $PB = 4 \cdot AP$.

Um ponto P divide internamente o segmento $\overline{AB}$ na razão áurea quando

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AB}{AP}$$

Assim, denotando $AP = a$ e $PB = b$, temos:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AB}{AP} \implies \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \implies \frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}$$

Fazendo, $\varphi = \frac{a}{b}$, temos:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \implies \varphi^2 = \varphi + 1 \implies \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Resolvendo a última equação, obteremos:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad ou \quad \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

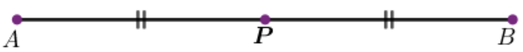
Como $\varphi = \frac{a}{b} > 0$, temos:

$$\boldsymbol{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \rightarrow \boldsymbol{Número\ de\ Ouro}$$

Ponto Médio de um Segmento

Dizemos que P é ponto médio do segmento $\overline{AB}$, quando ele o divide na razão 1, isto é,

$$\frac{AP}{PB} = 1 \implies AP = PB$$

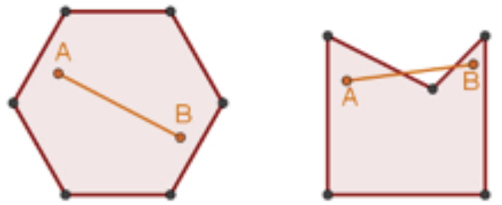


Em outras palavras, o ponto médio de um segmente, divide-o em dois outros segmentos congruentes.

Convexidade de Regiões Planas

As regiões planas são definidas em duas categorias: convexas e côncavas.

Dizemos que Ω é uma região convexa, quando dados dois pontos A e B em Ω, temos o segmento $\overline{AB}$ ainda em Ω. Quando Ω não é convexa, dizemos que Ω é côncava.



Conjunto Convexo **Conjunto Não Convexo**

Uma das regiões mais importantes na Geometria Plana é o ângulo, assunto que abordaremos na seção seguinte.

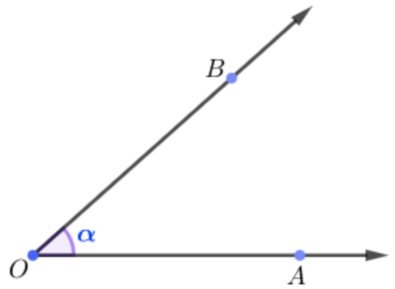
Ângulos

O ângulo é uma forma que os filósofos gregos pensaram em determinar o conceito de abertura de algo. A implementação dessa simples teoria trouxe grandes resultados, por exemplo, a descoberta do raio da terra realizada por Erastóstenes.

Com a teoria de ângulo e retas paralelas, Erastóstenes (276 a.c - 194 a.c) o Bibliotecário-chefe da famosa Biblioteca de Alexandria foi capaz de determinar o raio da terra antes mesmo de sonharmos com a existência do satélite. Com apenas um pedaço de madeira e os raios solares, ele foi capaz de entender algo que é muitos mais profundo do que a humanidade poderia imaginar.

Há ainda muitas outras aplicações da teoria de ângulos presentes no cotidiano no processo da costura de roupas às construções de casas, prédios e pontes. Neste contexto, veremos as principais definições de ângulos e propriedades.

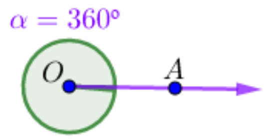
Definição: Dadas duas semirretas de mesma origem, chamamos de ângulo a região do plano limitada por essas duas semirretas.



Dizemos que O é o vértice do ângulo $A\hat{O}B$ e que as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados do ângulo. Além disso, a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é dada por

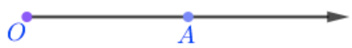
$$m(A\hat{O}B) = \alpha.$$

Como falamos inicialmente, o ângulo foi criado para dar a noção de abertura. Para isso, há medidas que determinam o tamanho da abertura do ângulo $A\hat{O}B$ que são: o grau, o radiano e o grado. Usaremos aqui como unidade de referência o *grau*, onde a unidade corresponde a uma fração de 1/360 da circunferência. Assim, 360º corresponde a uma volta completa.

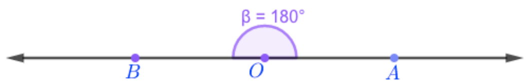


Os ângulos podem ser classificados como:

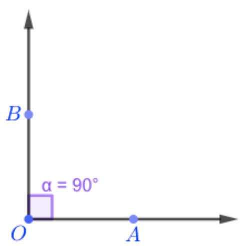
- **Ângulo Nulo:** é o ângulo formado por duas semirretas de mesmo sentido.



- **Ângulo Raso:** é o ângulo formado por duas semirretas opostas.

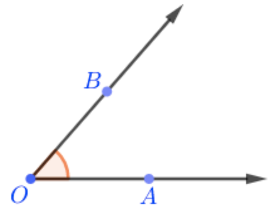


- **Ângulo Reto:** é o ângulo correspondente a ¼ de volta, ou seja, metade de um ângulo raso.

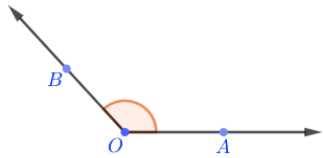


Quando duas retas concorrentes r e s formam um ângulo reto, dizemos que elas são perpendiculares e denotamos por $r \perp s$.

- **Ângulo Agudo:** é o ângulo cuja medida é maior que um ângulo nulo e menor que um ângulo reto.

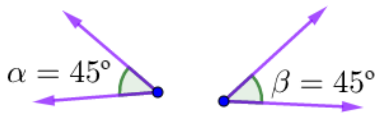


- **Ângulo Obtuso:** é o ângulo cuja medida é maior que um ângulo reto e menor que um ângulo raso.

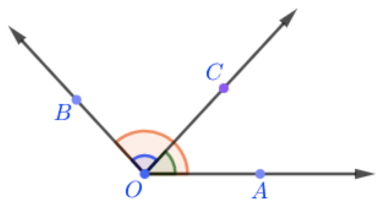


Agora que aprendemos a classificar os quantos quanto a sua medida (quanto a sua abertura), vejamos as relações existentes entre dois ângulos.

- **Ângulos Congruentes:** são ângulos que possuem a mesma medida. De sorte que, a partir de movimentos rígidos de rotação e translação podemos sobrepor perfeitamente, um sobre o outro.

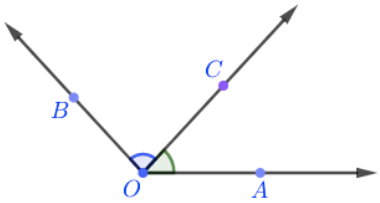


- **Ângulos Consecutivos:** dois ângulos são ditos consecutivos quando possuem um lado em comum.



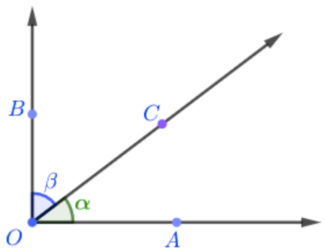
Os ângulos $A\hat{O}C$ e $A\hat{O}B$ são consecutivos, pois possuem o lado $\overrightarrow{OA}$ em comum.
Os ângulos $C\hat{O}B$ e $A\hat{O}B$ são consecutivos, pois possuem o lado $\overrightarrow{OB}$ em comum.
Os ângulos $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$ são consecutivos, pois possuem o lado $\overrightarrow{OC}$ em comum.

- **Ângulos Adjacentes:** dois ângulos consecutivos são adjacentes quando possuem apenas um lado em comum, ou seja, não possuem pontos internos em comum.

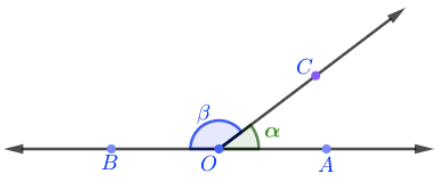


Os ângulos $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$ são adjacentes, pois possuem apenas o lado $\overrightarrow{OC}$ em comum.

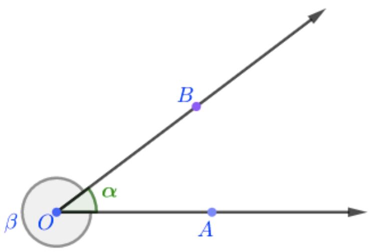
- **Ângulos Complementares:** dois ângulos são assim ditos quando sua soma for igual a 90º.



- **Ângulos Suplementares:** dois ângulos são assim ditos quando sua soma for igual a 180º.

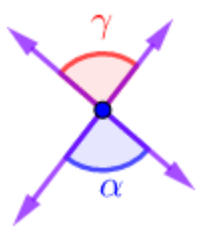


- **Ângulos Replementares:** dois ângulos são assim ditos quando sua soma for igual a 360º.

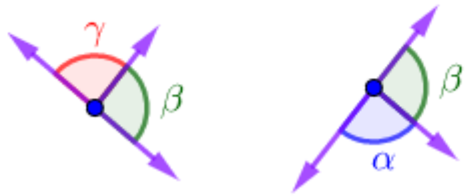


ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE

Dois ângulos são ditos opostos pelo vértice quando os lados de um deles são os prolongamentos dos lados do outro.



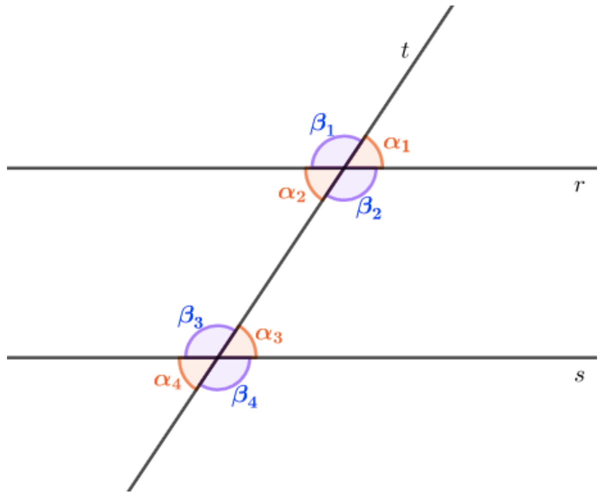
Uma relação importante é que *ângulos opostos pelo vértice são congruentes*. De fato, no sistema a seguir α e γ são o.p.v. e β é um ângulo adjacente suplementar aos dois, assim:



$$\begin{cases} \alpha + \beta = 180^o \\ \gamma + \beta = 180^o \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = \gamma}$$

RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

Consideremos duas retas paralelas *r* e *s* cortadas por uma transversal *t*. Um sistema de oito ângulos é formado. Queremos determinar as relações existentes entre eles. Como já sabemos quais as relações entre dois ângulos quaisquer numa mesma paralela, nos restringiremos a comparar dois ângulos de paralelas diferentes.



- **Ângulos Correspondentes:** estão do mesmo lado da transversal, sendo um na região interna e outra na região externa das paralelas. (Veja que eles ocupam a mesma posição relativa.)

Relação: ângulos correspondentes são congruentes.

$$\alpha_1 = \alpha_3$$
$$\alpha_2 = \alpha_4$$
$$\beta_1 = \beta_3$$
$$\beta_2 = \beta_4$$

- **Ângulos Alternos Internos:** estão em lados opostos da transversal, ambos na região interna das paralelas.

Relação: ângulos alternos internos são congruentes.

$$\alpha_2 = \alpha_3$$
$$\beta_2 = \beta_3$$

- **Ângulos Alternos Externos:** estão em lados opostos da transversal, ambos na região externa das paralelas.

Relação: ângulos alternos externos são congruentes.

$$\alpha_1 = \alpha_4$$
$$\beta_1 = \beta_4$$

- **Ângulos Colaterais Internos:** estão do mesmo lado da transversal, ambos na região interna das paralelas.

Relação: ângulos colaterais internos são suplementares.

$$\alpha_2 + \beta_3 = 180^o$$
$$\beta_2 + \alpha_3 = 180^o$$

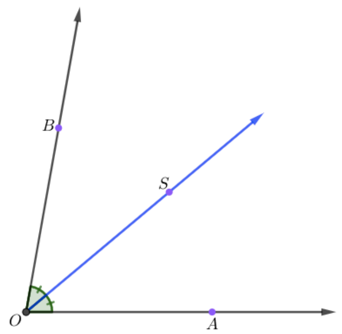
- **Ângulos Colaterais Externos:** estão do mesmo lado da transversal, ambos na região externa das paralelas.

Relação: ângulos colaterais externos são suplementares.

$$\alpha_1 + \beta_4 = 180^o$$
$$\beta_1 + \alpha_4 = 180^o$$

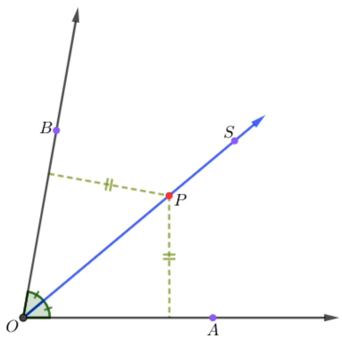
Bissetriz de um Ângulo

A bissetriz de um ângulo $A\hat{O}B$ é a semirreta com origem no vértice do ângulo e que divide esse ângulo em dois outros ângulos congruentes.



$$\overrightarrow{OS} = Bissetriz\ do\ \hat{A}ngulo\ A\hat{O}B$$
$$A\hat{O}S = S\hat{O}B$$

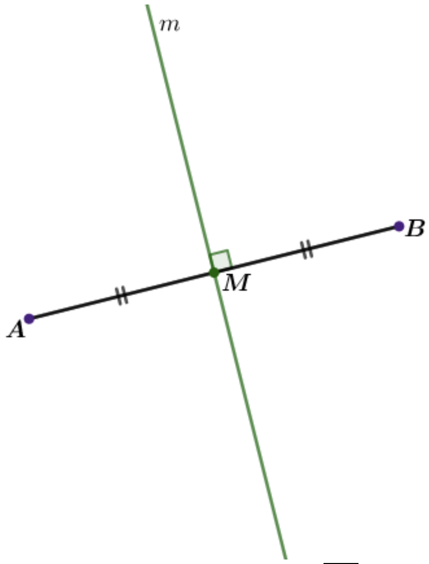
A bissetriz de ângulo também é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente dos lados do ângulo.



$$\boldsymbol{P \in \overrightarrow{OS} \implies d_{P,\overrightarrow{OA}} = d_{P,\overrightarrow{OB}}}$$

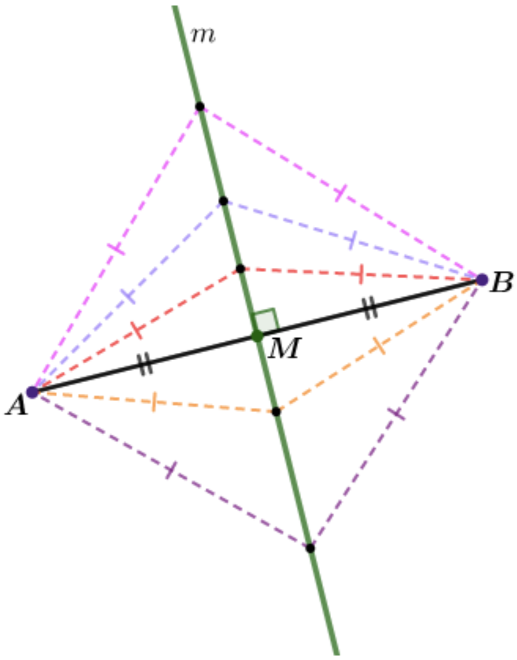
Mediatriz de um Segmento

A mediatriz de um segmento de reta $\overline{AB}$ é a reta perpendicular a $\overline{AB}$ que passa pelo seu ponto médio.



M é ponto médio de $\overline{AB}$
m é a mediatriz de $\overline{AB}$

A mediatriz do segmento $\overline{AB}$ também é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente dos extremos do segmento.



$$\boldsymbol{P \in m \implies d_{P,A} = d_{P,B}}$$

Hora de Praticar

Questão 01

(Ronaebson)

Se utilizando de um software para mostrar a trajetória de um ponto no plano cartesiano quando este se movimenta sob dadas condições, um professor deu vários exemplos de como essas trajetórias ficariam habilitando o *"rastro"* do ponto para cada movimento. Depois disso pediu a seus alunos que refletissem um pouco e tentassem prever qual seria a trajetória descrita pelo ponto que representa o centro da roda no circuito a seguir.

Qual a trajetória descrita pelo centro da roda no circuito acima?

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

Ⓔ 

Questão 02

(Ronaebson)

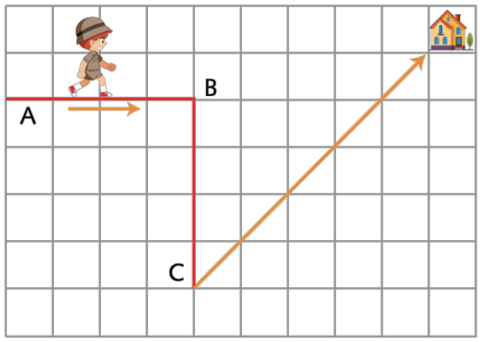
Cinco discos de madeira foram colocados um a um sobre uma mesa, conforme mostra a figura. Em que ordem, de baixo para cima, os discos foram colocados sobre a mesa?

Ⓐ A – B – C – D – E
Ⓑ C – B – E – D – A
Ⓒ A – D – E – B – C
Ⓓ C – B – D – E – A
Ⓔ B – C – D – E – A

Questão 02

(Ronaebson)

Pedrito, partindo do ponto A seguiu em frente por 200 m. Chegando ao ponto B, virou 90º à direita, seguindo por mais 200 m. Chegando ao ponto C, Pedrito alterou novamente sua direção e percorreu 353 m em linha reta até chegar ao seu destino.



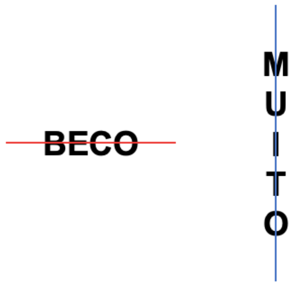
Durante o seu trajeto, Pedrito mudou de direção duas vezes. O ângulo de giro realizado na segunda mudança foi

Ⓐ 45º.
Ⓑ 90º.
Ⓒ 135º.
Ⓓ 145º.
Ⓔ 180º.

Questão 04

(Ronaebson)

A palavra **BECO** apresenta uma linha horizontal de simetria, já a palavra **MUITO** quando escrita verticalmente, isto é, de cima para baixo, uma letra abaixo da outra, possui uma linha vertical de simetria. Veja a figura:



Considere os pares de palavras a seguir:

I. **BOI – ATUS**
II. **BOCA – TIME**
III. **COCO – MALA**
IV. **BEKA – NATHA**
V. **BICHO – MATO**

Em qual dos pares acima a primeira palavra tem uma linha horizontal de simetria e a segunda palavra tem uma linha vertical de simetria?

Ⓐ I
Ⓑ II
Ⓒ III
Ⓓ IV
Ⓔ V

Questão 05

(Ronaebson)

Hand spinner é um brinquedo que serve como um amenizador da ansiedade e do estresse. Consiste num equipamento que quando impulsionado começa a girar constantemente na ponta dos dedos do seu usuário. Também é conhecido como fidget spinner ou fidget hand spinner. Existem vários modelos e essa variabilidade também se dá pelo número de “pás” ou “hélices” que ele tem. Veja os modelos a seguir:

(I)

(II)

(III)

(IV)

(V)

Um objeto com simetria de rotação é aquele que tem a mesma aparência depois de um determinado montante de rotações, ou seja, quando fica invariante por rotação de amplitude inferior a 360º. Assim, o ângulo de simetria rotacional corresponde a quantos graus a forma inicial tem que ser girada para se parecer com a mesma de um lado ou em um vértice diferente.

Logo, dentre os modelos de hand spinners apresentados, aquele(s) que é(são) invariante(s) por rotação de 120º em torno de seu centro é(são)

Ⓐ I.
Ⓑ III.
Ⓒ IV.
Ⓓ II e V.
Ⓔ III e IV.

Questão 06

(Ronaebson)

Durante o exercício Rosca Spider, quando a musculatura está estendida (Figura 1), o ângulo formado entre o braço e o antebraço é um ângulo raso, quando contraída (Figura 2), o ângulo entre o braço e o antebraço é de aproximadamente 50º.

Figura 1

Figura 2

Durante esse exercício, o arco descrito pelo movimento da barra será de aproximadamente

Ⓐ 100º.
Ⓑ 120º.
Ⓒ 130º.
Ⓓ 140º.
Ⓔ 150º.

Questão 07

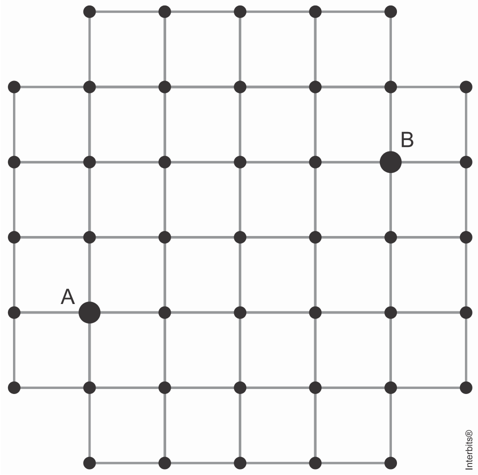
O suplemento do complemento de um ângulo excede a terça parte do complemento do dobro desse ângulo em 85º. O valor desse ângulo em graus é

Ⓐ 10
Ⓑ 15
Ⓒ 20
Ⓓ 25
Ⓔ 30

Questão 08

(ESPM_2019)

A figura abaixo representa uma parte de um bairro, onde os segmentos são as ruas e os pontos são as esquinas. Como só podemos caminhar pelas ruas, a distância entre os pontos A e B é de 6 quarteirões.



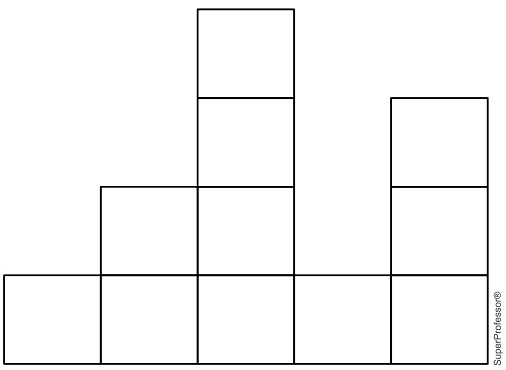
O número de esquinas assinaladas no mapa, que são equidistantes de A e B, é igual a:

- **A** 5
- **B** 6
- **C** 9
- **D** 8
- **E** 7

Questão 09

(UFT_2023)

Considere 11 quadrados iguais, com lados medindo 3 cm e alinhados horizontal e verticalmente, formando a figura a seguir:



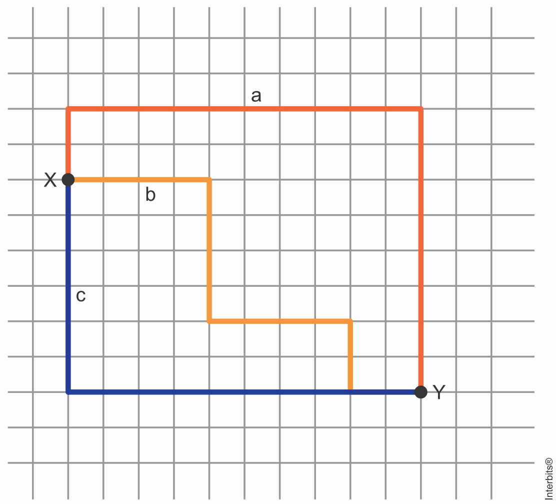
É CORRETO afirmar que o perímetro total dessa figura é de:

- **A** 44 cm
- **B** 53 cm
- **C** 66 cm
- **D** 69 cm

Questão 10

(Fuvest_2021)

A figura ilustra graficamente uma região de um bairro, com ruas ortogonais entre si. O ponto X indica um condomínio residencial, e o ponto Y indica a entrada de um parque.



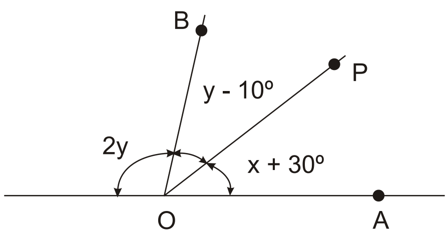
Três moradores realizam caminhos diferentes para chegar ao ponto Y, partindo do ponto X, ilustrados com cores diferentes. Se a, b e c representam as distâncias percorridas por esses moradores nesses caminhos, é correto afirmar que:

- **A** $a = b = c$.
- **B** $b = c < a$.
- **C** $c < b < a$.
- **D** $b < c = a$.
- **E** $c < a = b$.

Questão 11

(CFTSC)

Na figura abaixo, OP é bissetriz do ângulo AÔB. Determine o valor de x e y.



- **A** $x = 13 \text{ e } y = 49$
- **B** $x = 15 \text{ e } y = 35$
- **C** $x = 12 \text{ e } y = 48$
- **D** $x = 17 \text{ e } y = 42$
- **E** $x = 10 \text{ e } y = 50$

Questão 12

(CFTMG_2019)

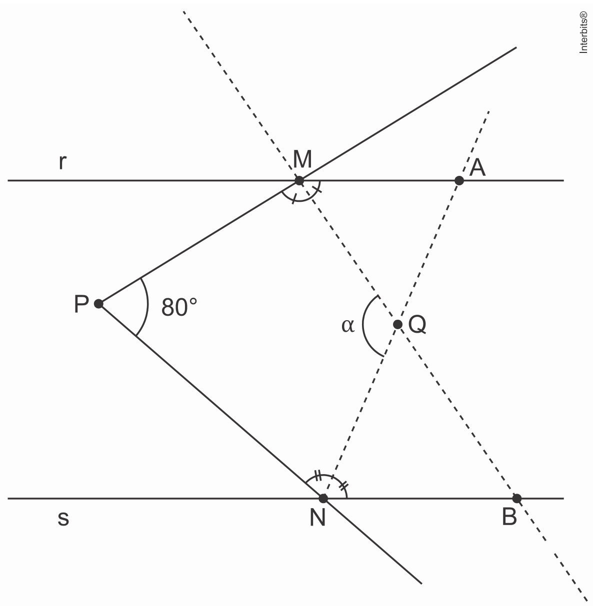
Considere θ e α dois ângulos adjacentes e complementares. A expressão que determina o valor do ângulo formado pelas bissetrizes de θ e α é

A) $\frac{\theta+\alpha}{2}$.
B) $\frac{\theta+\alpha}{4}$.
C) $\frac{90-(\theta+\alpha)}{2}$.
D) $\frac{90-(\theta+\alpha)}{4}$.

Questão 13

(CFTMG_2020)

Observe a figura.



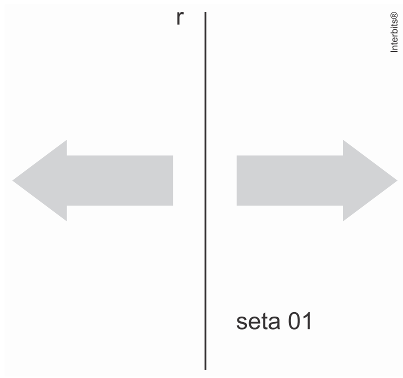
Os pontos A e M pertencem à reta r e os pontos B e N pertencem à reta s, que são paralelas. Se as bissetrizes dos ângulos $A\hat{M}P$ e $B\hat{N}P$ se interceptam no ponto Q, então a medida do ângulo $\alpha = M\hat{Q}N$ é igual a

A) 100°
B) 120°
C) 130°
D) 140°

Questão 14

(CFTMG_2020)

Observe a figura abaixo.



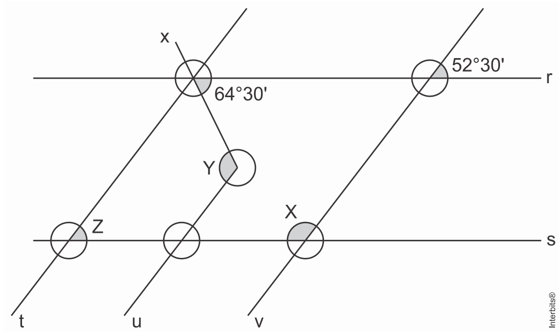
Nessa figura, a simetria mostrada da seta 01 em relação à reta r é uma

A) rotação.
B) reflexão.
C) translação.
D) rotação deslizante.

Questão 15

(UTFPR)

Na figura a seguir temos $r // s$ e $t // u // v$.



Com base nos estudos dos ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal pode-se afirmar que:

I) O ângulo X mede 127°30'.
II) O ângulo Y mede 117°.
III) O ângulo Z mede 67°30'.

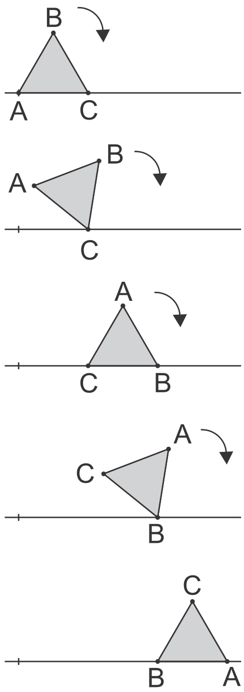
Analise as proposições acima e assinale a alternativa correta.

A) Somente as afirmações I e II estão corretas.
B) Somente as afirmações I e III estão corretas.
C) Somente a afirmação I está correta.
D) As afirmações I, II e III estão corretas.
E) As afirmações I, II e III estão incorretas.

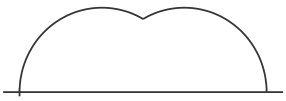
Questão 16

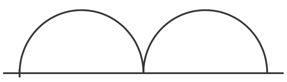
(OBMEP)

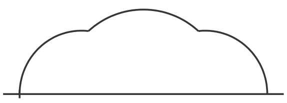
Um triângulo equilátero ABC gira uma vez em torno do vértice C e outra vez em torno do vértice B, sempre se apoiando em uma reta, como na figura abaixo.

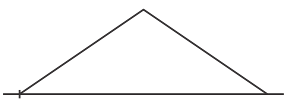


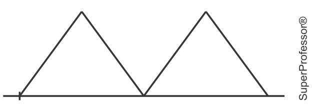
Qual das alternativas representa a trajetória descrita pelo ponto A?

A


B


C


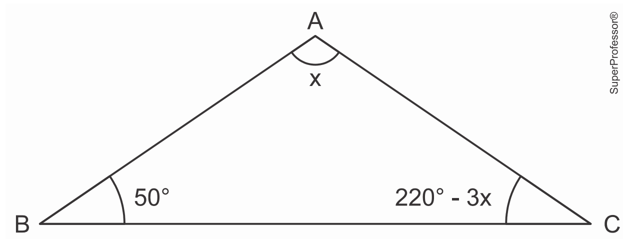
D


E


Questão 17

(Unicamp_2021)

Sabendo-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180 graus, podemos afirmar que os ângulos BAC e ACB do triângulo ABC na figura abaixo valem, respectivamente:

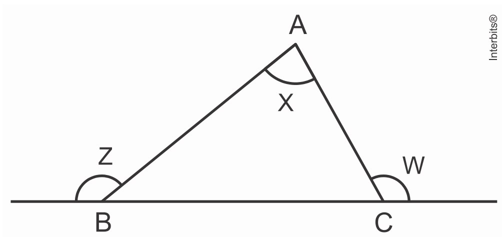


A) 45° e 85°.
B) 40° e 70°.
C) 35° e 55°.
D) 50° e 100°.

Questão 18

(EEAR_2020)

No triângulo ABC da figura, x é a medida de um ângulo interno e z e w são medidas de ângulos externos. Se $z + w = 220°$ e $z - 20° = w$, então x é

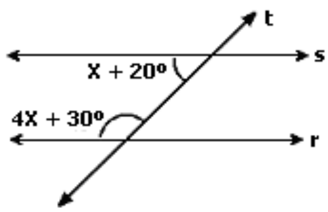


A) complemento de $120°$
B) complemento de $60°$
C) suplemento de $140°$
D) suplemento de $50°$

Questão 19

(UNAERP)

As retas r e s são interceptadas pela transversal "t", conforme a figura. O valor de x para que r e s sejam, paralelas é:



A) 20°
B) 26°
C) 28°
D) 30°
E) 35°

Questão 20

(IFSUL_2020)

Especialistas indicam que a qualidade do ambiente de trabalho tem influência direta na produtividade de uma empresa. Questões relacionadas ao bem-estar dos colaboradores são essenciais para um melhor desempenho laboral. Ciente disso, o diretor de uma empresa de desenvolvimento de software investiu em uma reforma dos escritórios, visando ao aprimoramento do mobiliário, levando em conta aspectos ergonômicos e estéticos. Uma das alterações mais valorizadas pelos funcionários foi a aquisição de cadeiras com encostos reclináveis, como ilustra a figura 1. A figura 2 descreve uma situação em que uma dessas cadeiras é posicionada na inclinação máxima e encostada na parede.

Figura 1

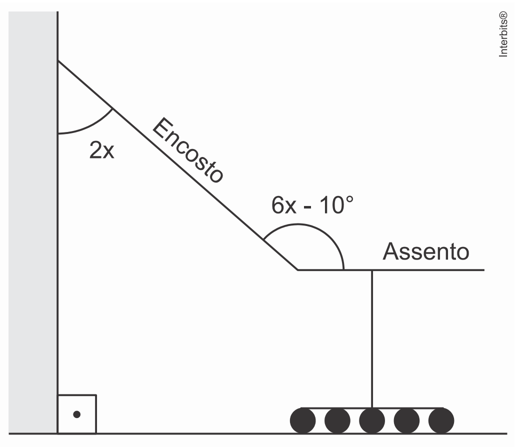


Figura 2

Com base nas informações, a medida do menor ângulo formado entre o assento e o encosto quando a cadeira se encontra com inclinação máxima é

- Ⓐ 110°
- Ⓑ 120°
- Ⓒ 130°
- Ⓓ 140°

Questão 21

(FUVEST)

Três cidades A, B e C situam-se ao longo de uma estrada reta; B situa-se entre A e C e a distância de B a C é igual a dois terços da distância de A a B. Um encontro foi marcado por 3 moradores, um de cada cidade, em um ponto P da estrada, localizado entre as cidades B e C e à distância de 210 km de A. Sabendo-se que P está 20 km mais próximo de C do que de B, determinar a distância que o morador de B deverá percorrer até o ponto de encontro.

- Ⓐ 60 km
- Ⓑ 50 km
- Ⓒ 55 km
- Ⓓ 65 km
- Ⓔ 70 km

Questão 22

(PUC-SP)

Três amigos - Astolfo, Benito e Conrado - disputaram uma corrida cujo percurso era de 20 km e chegaram em primeiro, quinto e décimo lugares, respectivamente. Sabe-se que, ao cruzar a linha de chegada, Astolfo estava a 4 km de Benito e a 6 km de Conrado.

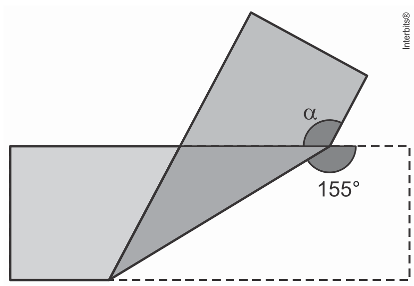
Considerando que, ao longo de todo o percurso, cada um deles manteve a velocidade constante, então, quando Benito cruzou a linha de chegada, quantos quilômetros estava à frente de Conrado?

- Ⓐ 2,5
- Ⓑ 3
- Ⓒ 3,5
- Ⓓ 4
- Ⓔ 4,5

Questão 23

(CFTRJ_2017)

Uma fita de papel retangular é dobrada conforme a figura a seguir.



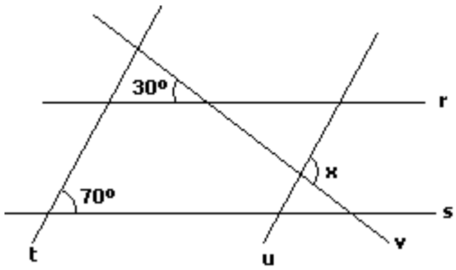
O valor do ângulo α marcado na figura é

- Ⓐ 155º.
- Ⓑ 150º.
- Ⓒ 140º.
- Ⓓ 130º.

Questão 24

(UFCE)

Na figura abaixo, tem-se r//s e t//u. Se os ângulos assinalados têm as medidas indicadas, então x vale:



A 100º.
B 80º.
C 70º.
D 50º.
E 30º.

Questão 25

(UFMG)

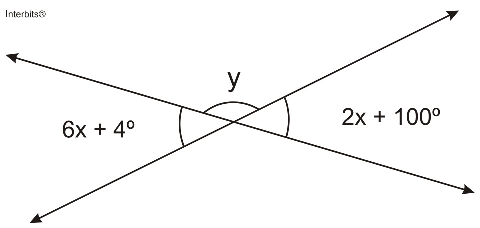
Dois nadadores, posicionados em lados opostos de uma piscina retangular e em raias adjacentes, começam a nadar em um mesmo instante, com velocidades constantes. Sabe-se que, nas duas primeiras vezes em que ambos estiveram lado a lado, eles nadavam em sentidos opostos: na primeira vez, a 15 m de uma borda e, na segunda vez, a 12 m da outra borda. Considerando-se essas informações, é correto afirmar que o comprimento dessa piscina é

A 21 m.
B 27 m.
C 33 m.
D 54 m.
E 60 m.

Questão 26

(UTFPR)

A medida de y na figura, em graus, é:

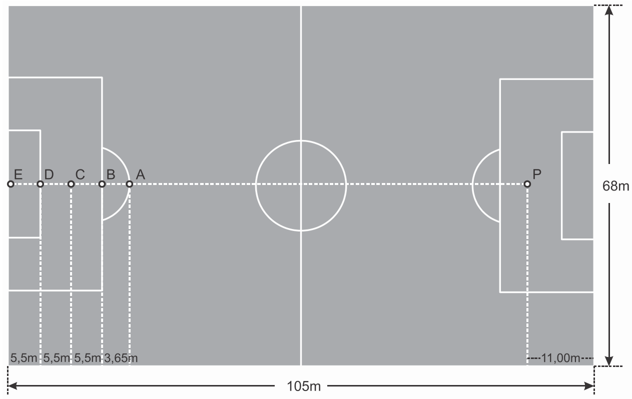


A 42°.
B 32°.
C 142°.
D 148°.
E 24°.

Questão 27

(CMRJ_2019)

As medidas apresentadas na figura abaixo seguem o padrão exigido pela FIFA − Federação Internacional de Futebol.



Adaptado de: globoesporte.globo.com, agosto/ 2018. (Adaptado)

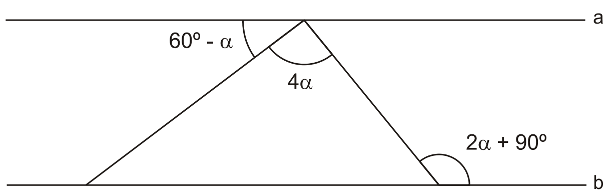
Ederson, goleiro do Manchester City (Inglaterra) e goleiro reserva do Brasil na Copa do Mundo da Rússia, é o atual recordista mundial de “tiro de meta mais longo”. Seu nome foi registrado no livro *Guiness Book* – o livro dos recordes – por ele ter conseguido, com um chute, fazer com que a bola atingisse o solo a uma distância de 75,35 metros do ponto de partida. Se Ederson der um chute em uma bola parada, na marca do pênalti (ponto P), em direção ao ponto E, tão forte quanto o do seu recorde, então ela voltará a tocar o campo, pela primeira vez, entre os pontos

A P e A.
B A e B.
C B e C.
D C e D.
E D e E.

Questão 28

(MACKENZIE)

Na figura abaixo, a e b são retas paralelas.



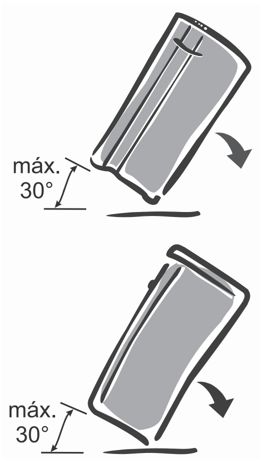
A afirmação correta a respeito do número que expressa, em graus, a medida do ângulo α é

A um número primo maior que 23.
B um número ímpar.
C um múltiplo de 4.
D um divisor de 60.
E um múltiplo comum entre 5 e 7.

Questão 29

(IFPE_2017)

Analisando o manual de instruções do refrigerador RDE30, observamos um destaque para o momento de transportá-lo. Observe abaixo o trecho desse manual sobre transporte do refrigerador.



Transporte
Caso necessite transportar seu Refrigerador em pequenos deslocamentos, incline-o para trás ou para um dos lados com ângulo máximo de 30°. Caso necessite transportar seu Refrigerador em longos deslocamentos (ex.: mudança), movimente-o em pé.

Disponível em: <https://www.colombo.com.br/produtos/111120/111120.pdf?descricao=...>. Acesso: 02 out.2016.

Sabendo que o ângulo máximo de inclinação do refrigerador é 30º, a metade do suplemento desse ângulo é de

A 60º.
B 75º.
C 45º.
D 30º.
E 15º.

Questão 30

(IFAL_2018)

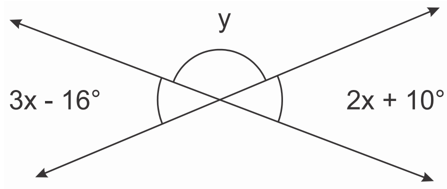
Um fazendeiro resolveu cercar um terreno de formato retangular, cujas dimensões eram 60 metros de largura e 80 metros de comprimento, gastando R$ 20,00 para cada metro linear da cerca. Qual o valor total do gasto para cercar todo o terreno?

A R$ 2.800,00
B R$ 4.800,00
C R$ 5.600,00
D R$ 6.800,00
E R$ 9.600,00

Questão 31

(UTFPR)

A medida do ângulo y na figura é:

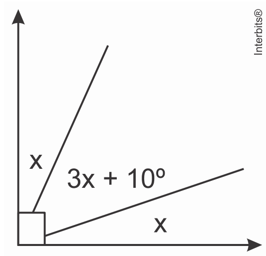


A 62º.
B 72º.
C 108º.
D 118º.
E 154º.

Questão 32

(UTFPR)

Calcule o valor de x, em graus, na figura:



A 16º.
B 10º.
C 20º.
D 58º.
E 32º.

Questão 33

(UECE)

Considere um segmento de reta XY cuja medida do comprimento é 10 cm e P um ponto móvel no interior de XY dividindo-o em dois segmentos consecutivos XP e PY. Se M e N são respectivamente os pontos médios de XP e PY, então podemos afirmar corretamente que a medida do comprimento do segmento MN

A varia entre 0 cm e 10 cm, dependendo da posição do ponto P.
B varia entre 5 cm e 10 cm, dependendo da posição do ponto P.
C varia entre 2,5 cm e 10 cm, dependendo da posição do ponto P.
D é igual a 5 cm, sempre.

Questão 34

(IFSUL)

Duas retas paralelas “r” e “s”, cortadas por uma transversal “t”, formam ângulos colaterais internos, dos quais um excede o outro em 20º.

O ângulo colateral interno agudo mede

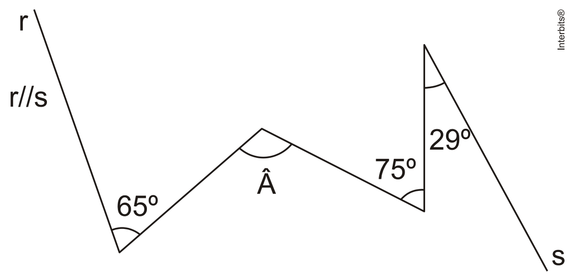
- **A** 20º.
- **B** 35º.
- **C** 55º.
- **D** 80º.

Questão 35

(CFTPR)

Numa gincana, a equipe "Já Ganhou" recebeu o seguinte desafio:

Na cidade de Curitiba, fotografar a construção localizada na rua Marechal Hermes no número igual à nove vezes o valor do ângulo Â da figura a seguir:



Se a Equipe resolver corretamente o problema irá fotografar a construção localizada no número:

- **A** 990.
- **B** 261.
- **C** 999.
- **D** 1026.
- **E** 1260.

Questão 36

(UEPG)

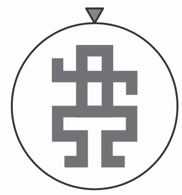
Um fio de 60 cm de comprimento é cortado em duas partes para formar dois quadrados de modo que a área de um deles seja quatro vezes a área do outro. Nesse contexto, assinale o que for correto e determine a soma desses itens.

01) O perímetro do quadrado maior é de 40 cm.
02) O quadrado menor tem área de 25 cm^2.
04) O lado do quadrado maior é o dobro do lado do quadrado menor.
08) A soma das áreas dos dois quadrados é 125 cm^2.

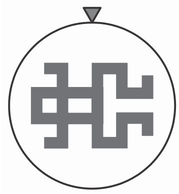
Questão 37

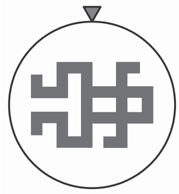
(FATEC_2017)

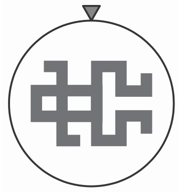
Em um círculo recortado em papel cartão foi feito o desenho de um homem estilizado. Esse círculo foi utilizado para montar uma roleta, conforme a figura 1, fixada em uma parede. Quando a roleta é acionada, o círculo gira livremente em torno do seu centro, e o triângulo indicador permanece fixo na parede.

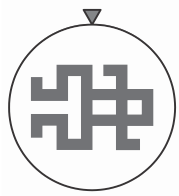


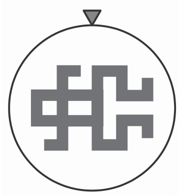
Considerando, inicialmente, a imagem do homem na posição da figura 1, obtém-se, após a roleta realizar uma rotação de três quartos de volta, no sentido horário, a figura representada em

A


B


C


D


E


Questão 38

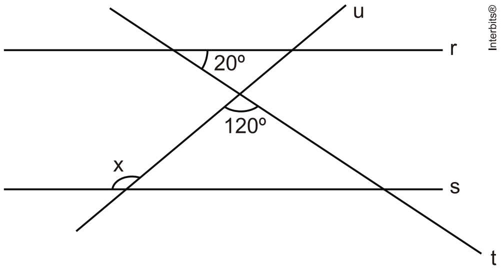
(CP2_2017)

Em uma rua reta, a padaria fica entre o mercado e a banca de jornal, e o mercado fica entre a banca de jornal e a sapataria. Logo,

- **A** a sapataria fica entre a banca de jornal e a padaria.
- **B** a banca de jornal fica entre o mercado e a padaria.
- **C** a padaria fica entre a sapataria e o mercado.
- **D** o mercado fica entre a sapataria e a padaria.

Questão 39

Júlia começou a estudar Geometria na sua escola. Com dúvida em um exercício passado pelo professor de matemática, ela pediu ajuda ao seu tio. O enunciado era: “As retas r e s são paralelas; as retas u e t, duas transversais. Encontre o valor do ângulo x na figura abaixo”. Portanto, o valor de x é

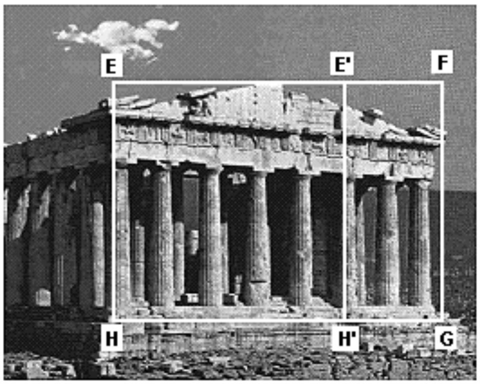


A 120º.
B 125º.
C 130º.
D 135º.
E 140º.

Questão 40

(UFRN)

Phidias, um arquiteto grego que viveu no século quinto a.C., construiu o Parthenon com medidas que obedeceram à proporção áurea, o que significa dizer que EE'H'H é um quadrado e que os retângulos EFGH e E'FGH' são semelhantes, ou seja, o lado maior do primeiro retângulo está para o lado maior do segundo retângulo assim como o lado menor do primeiro retângulo está para o lado menor do segundo retângulo. Veja a figura abaixo.



Assim, podemos afirmar que a razão da medida da base do Parthenon pela medida da sua altura é uma raiz do polinômio:

A $x^2 + x + 1$
B $x^2 + x - 1$
C $x^2 - x - 1$
D $x^2 - x + 1$

Questão 41

Um piloto de rali foi desafiado a dirigir em um deserto, com auxílio de um mapa e uma bússola, para localizar um objeto que se encontra escondido em algum lugar distante do ponto de partida. Seguindo o mapa, o piloto partiu do ponto A e dirigiu em linha reta por 5 km, no sentido oeste-leste, até chegar a um ponto B. A seguir, ele virou 50° no sentido horário, percorreu mais 4 km em linha reta até o ponto C e virou um ângulo de medida x no sentido anti-horário, com $x < 50^o$, percorrendo mais 5 km em linha reta até chegar ao destino, no ponto D.

Considerando que o menor ângulo entre a direção da reta DC e a direção oeste-leste mede 30º, sabe-se que

A $x = 20^o$.
B $x = 30^o$.
C $x = 80^o$.
D $x = 90^o$.
E $x = 100^o$.

Gabarito _ Conceitos Básicos e Ângulos			
Hora de Praticar			
Questão	Resposta	Questão	Resposta
01	E	22	A
02	B	23	D
03	C	24	A
04	E	25	C
05	D	26	B
06	C	27	B
07	B	28	D
08	E	29	B
09	C	30	C
10	B	31	D
11	E	32	A
12	A	33	D
13	D	34	D
14	B	35	C
15	A	36	15
16	A	37	E
17	A	38	D
18	C	39	E
19	B	40	C
20	D	41	A
21	A		

TRIÂNGULOS

RONAEBSON
MATEMÁTICA CRIATIVA

TRIÂNGULOS

Como o passar do tempo, o homem sentiu a necessidade de tornar suas construções mais seguras e rígidas e ele percebeu que os triângulos poderiam ser bastante úteis nesse processo.

O triângulo de descarga, por exemplo, era um triângulo que permitia descarregar as pressões exercidas por grandes pesos que se encontravam por cima das portas, túmulos e das cidadelas. Devido ao peso, as portas podiam abater, mas com o triângulo, esse peso era suportado por postes laterais que eram maciços. Os triângulos de descarga eram geralmente abertos, mas podiam ser tapados e decorados, como acontece no caso da cidade de Micenas, com a Porta dos Leões.

A vela latina é uma vela de formato triangular, desenhada para permitir a navegação de contra-vento. Em relação à vela latina, vários autores sugeriram no passado que ela foi introduzida no Mediterrâneo pelos Árabes, tendo sido possivelmente surgido originalmente na Índia. No entanto, a descoberta de novas representações e referências literárias nas últimas décadas recentes, levou os estudiosos a fazer recuar o aparecimento da vela latina no Levante para o final do período helenístico ou início do período romano.
Os portugueses por volta do século XV adaptaram esta vela à famosa caravela portuguesa, tornando-se uma das principais características destas embarcações. Auxiliou os grandes navegadores em suas grandes expedições, e Vasco da Gama foi um dos primeiros a usá-la com esse fim.

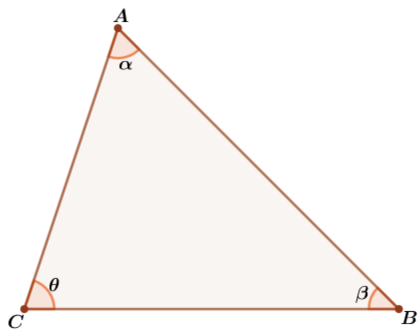
Caravela de Brás de Oliveira

Atualmente, existem outras situações nas quais se recorrem à robustez do triângulo. Os engenheiros usam, frequentemente, formas triangulares nas construções para torna-las mais estáveis e seguras.

Assim, uma das propriedades mais interessantes envolvendo triângulo é que ele é uma *figura rígida (estável)*, além disso, qualquer polígono pode ser decomposto de diversas formas em triângulos.

Definição: Dados três pontos A, B e C distintos e não colineares, chamamos de triângulo a reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$.

Em outras palavras, os triângulos são figuras geométricas planas formadas por três segmentos de retas que se encontram nas extremidades.

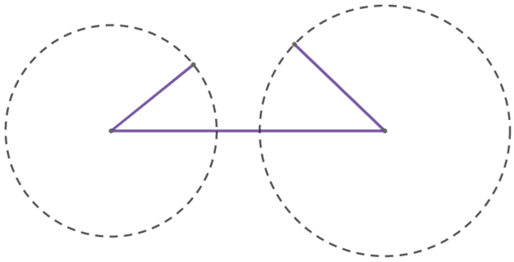


Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$
Vértices: A, B e C
Ângulos internos: α, β e θ.
Perímetro: $AB + BC + CA = soma\ de\ todos\ os\ lados$

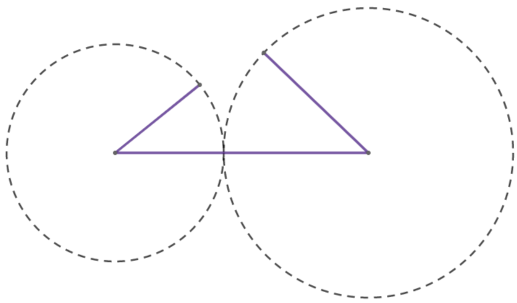
Condição de Existência de um Triângulo

Vale ressaltar que nem sempre que tomarmos três segmentos quaisquer conseguiremos formar um triângulo com eles. Vejamos:

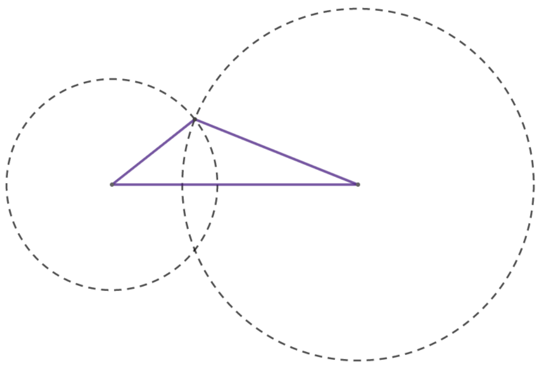
- Não é possível formar triângulo caso tenhamos um segmento sendo maior que a soma dos outros dois.



- Não é possível formar triângulo caso tenhamos um segmento igual a soma dos outros dois.



- Se o maior segmento for menor que a soma dos outros dois segmentos dados, será possível formar um triângulo.



Assim, considerando um triângulo de lados a, b e c, temos que:

$$a < b + c$$
$$b < a + c$$
$$c < a + b$$

Ou seja, em qualquer triângulo, um lado é sempre menor que a soma dos outros dois (obviamente, basta que verifiquemos a relação para o maior lado).

Além disso, como consequência das desigualdades supracitadas, temos:

$$|b - c| < a$$
$$|a - c| < b$$
$$|a - b| < c$$

Isto é, em qualquer triângulo, além de um lado ser menor que a soma dos outros dois, ele deve ser maior do que o módulo da diferença desses outros dois lados.

Problema 01: Em um triângulo ABC, temos as seguintes medidas: AB = 6 cm, AC = 5 cm e BC = x cm. Determine os possíveis valores inteiros para x.

Solução:

Como ABC é um triângulo, pela condição de existência, temos:

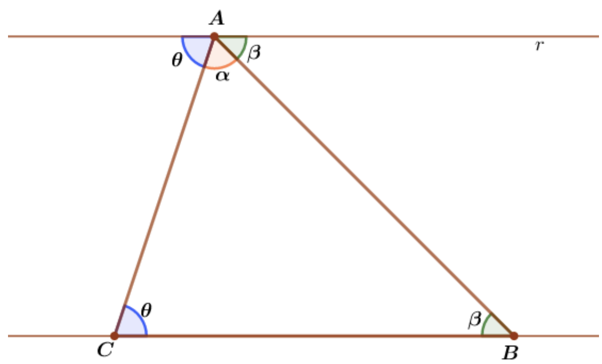
$$|6 - 5| < x < 6 + 5 \quad \Longrightarrow \quad 1 < x < 11$$

Assim, os possíveis valores inteiros de x são os elementos do conjunto $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Algumas relações serão de extrema importância e destacaremos a seguir.

Soma dos Ângulos Internos

Consideremos uma reta *r* paralela ao lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC e que passa pelo vértice *A*. Temos então o sistema de ângulos formados a seguir, onde α, β e θ são os ângulos internos do triângulo.



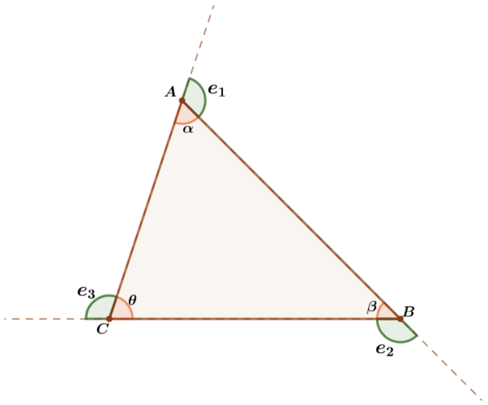
Observe que

$$\boldsymbol{\alpha + \beta + \theta = 180^o}$$

Temos, portanto, que *a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180º*.

ÂNGULOS EXTERNOS

É importante destacar que um ângulo externo de um triângulo é o ângulo formado pelo prolongamento de um dos lados e o lado adjacente. Assim, o triângulo terá três ângulos externos, vejamos:



Observe também que um ângulo interno e seu respectivo ângulo externo são sempre adjacentes suplementares, ou seja, a soma deles é sempre 180º, daí:

$$\alpha + e_1 = 180^o$$
$$\beta + e_2 = 180^o$$
$$\theta + e_3 = 180^o$$

Somando, membro a membro, as três equações anteriores, teremos:

$$\alpha + e_1 + \beta + e_2 + \theta + e_3 = 180^o + 180^o + 180^o$$

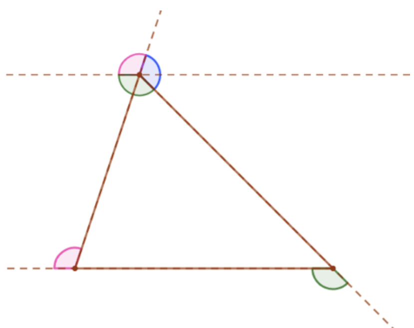
$$(\alpha + \beta + \theta) + S_e = 540^o$$

$$180^o + S_e = 540^o$$

$$S_e = 360^o$$

Logo, *a soma dos ângulos externos de qualquer triângulo é sempre 360º*.

Essa propriedade também pode ser observada através de um argumento geométrico. Veja a imagem:

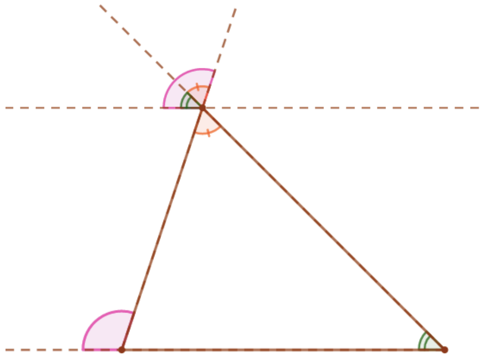


Podemos destacar ainda outra relação envolvendo o ângulo externo. Tomemos como referência o ângulo externo e_3, daí:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \theta = 180^o \\ \theta + e_3 = 180^o \end{cases} \Rightarrow \quad e_3 = \alpha + \beta$$

Em outras palavras, um ângulo externo de um triângulo é sempre igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Esse fato também pode ser observado geometricamente, veja:

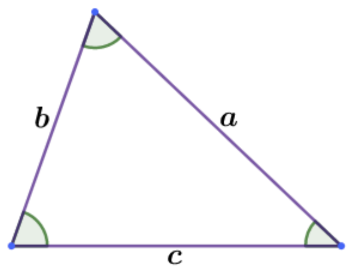


CLASSIFICAÇÃO

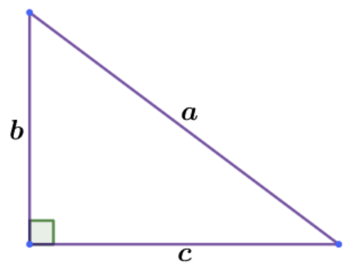
Os triângulos podem ser classificados quanto aos seus ângulos e quanto aos seus lados.

☞ *Quanto aos ângulos:*

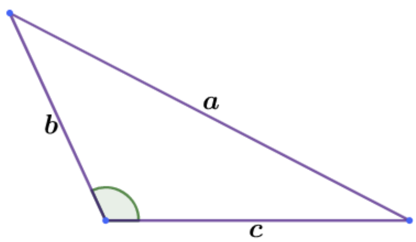
i) **Triângulo Acutângulo:** possui todos os ângulos agudos.



ii) **Triângulo Retângulo:** possui um ângulo reto.



iii) **Triângulo Obtusângulo:** possui um ângulo obtuso.

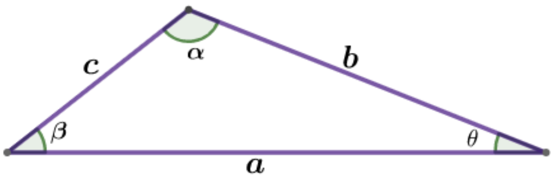


É possível classificar um triângulo quanto aos seus ângulos, a partir da medida de seus lados. O esquema proposto a seguir é dito *Síntese de Clairaut* e para o caso, consideraremos nas figuras anteriores, o lado a como sendo o maior lado:

- $a^2 < b^2 + c^2 \implies Triângulo\ Acutângulo$
- $a^2 = b^2 + c^2 \implies Triângulo\ Retângulo$
- $a^2 > b^2 + c^2 \implies Triângulo\ Obtusângulo$

☞ *Quanto aos lados:*

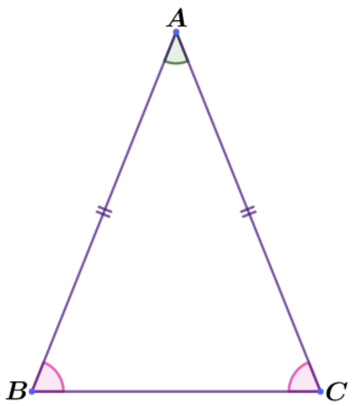
i) **Triângulo Escaleno:** possui todos os lados com medidas diferentes.



O triângulo escaleno, além de ter todos os lados com medidas diferentes, também tem todos os ângulos com medidas diferentes. Perceba também que o maior lado é sempre oposto ao maior ângulo e o menor lado é sempre oposto ao menor ângulo.

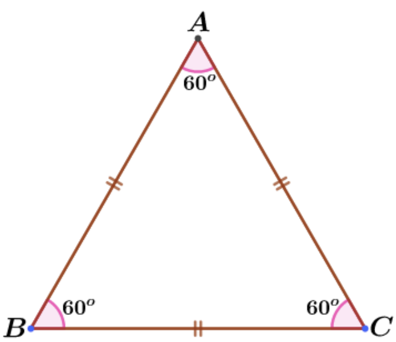
$$a > b > c \implies \alpha > \beta > \theta$$

ii) **Triângulo Isósceles:** possui dois lados congruentes.



No triângulo isósceles, o lado $\overline{BC}$, comumente diferente, é chamado de base e o ângulo oposto a ela é dito ângulo do vértice do triângulo isósceles.

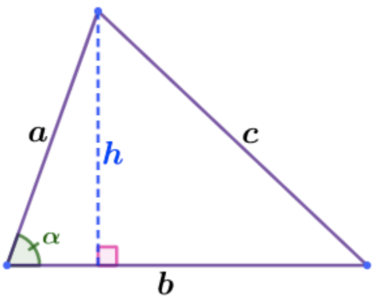
iii) **Triângulos Equilátero:** possui os três lados congruentes.



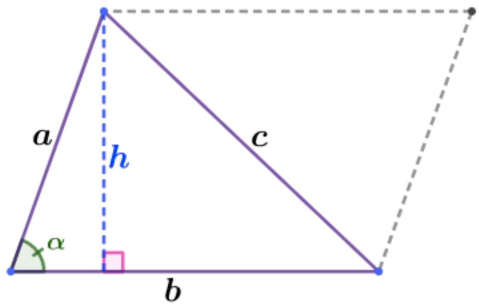
O triângulo equilátero além dos três lados congruentes, também possui os três ângulos congruentes, no caso, com medidas iguais a 60º.

ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Consideremos um triângulo cujos lados medem *a*, *b* e *c* e *h* a altura relativa ao lado *b*.



Observe que a área de um triângulo corresponde a metade da área de um paralelogramo de mesma base e mesma altura.



Daí:

$$A_\Delta = \frac{base \times altura}{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_\Delta = \frac{b \cdot h}{2}}}$$

Observe também que:

$$sen\alpha = \frac{h}{a} \implies h = a \cdot sen\alpha$$

Assim,

$$\boxed{\boldsymbol{A_\Delta = \frac{b \cdot a \cdot sen\alpha}{2}}}$$

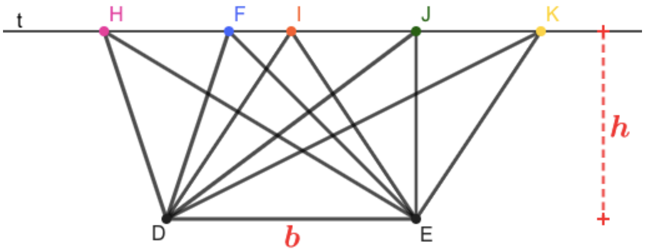
Outra fórmula para o cálculo da área de um triângulo é a Fórmula de Heron (*abriremos mão da demonstração*) que é dada por:

$$\boxed{\boldsymbol{A_\Delta = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}}}$$

em que $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo.

Podemos elencar algumas propriedades envolvendo áreas de triângulos:

P1: A área de um triângulo não se altera quando sua base permanece fixa e o terceiro vértice percorre uma reta paralela a base.



Sendo t uma reta paralela ao lado $\overline{DE}$, é fácil verificar essa propriedade, uma vez que todos os triângulos gerados têm a mesma base e mesma altura, logo têm a mesma área.

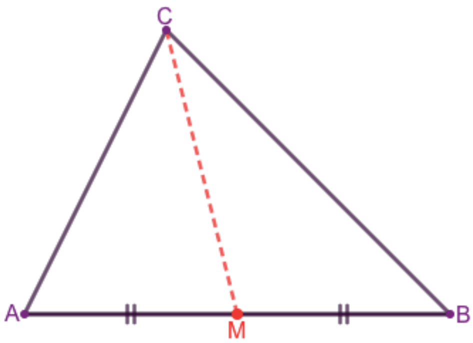
P2: Se dois triângulos têm a mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual a razão entre suas bases.

P3: A razão entre as áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Segmentos e Pontos Notáveis

Mediana

A mediana de um triângulo é o segmento de reta que parte do vértice e vai até o ponto médio do lado oposto a esse vértice.

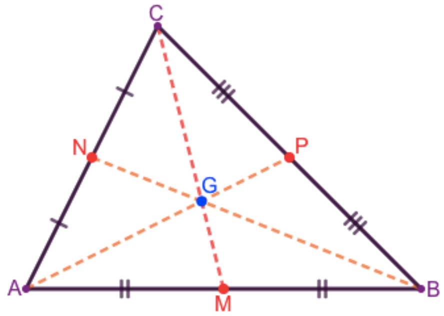


$\overline{CM}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{AB}$.
M é ponto médio de $\overline{AB}$

Observe que os triângulos ACM e BCM possuem a mesma altura e bases com mesma medida ($AM = MC$), logo os triângulos possuem a mesma área. Sendo assim, além da mediana dividir o lado ao meio, ela também dividirá o triângulo em dois outros triângulos de mesma área.

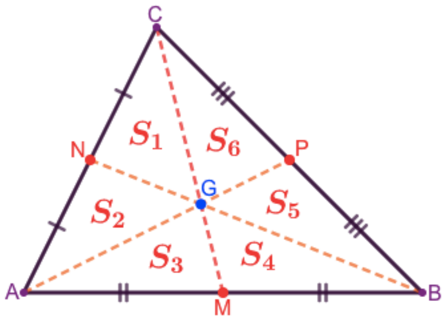
A mediana de um triângulo o divide em dois outros de mesma área.

Quando traçamos as três medianas de um triângulo, elas se interceptam num ponto chamado de **Baricentro**.



G = Baricentro do triângulo

Perceba agora que as três medianas do triângulo o dividem em torno do baricentro em seis triângulos. As áreas desses triângulos estão indicadas na figura a seguir:



Tomando como referência o triângulo AGC, temos que GN é uma mediana, logo $S_1 = S_2$. Agora, tomando como referência o triângulo AGB, temos que GM também é uma mediana, logo $S_3 = S_4$. Por fim, no triângulo BGC, GP é uma mediana e, portanto, $S_5 = S_6$.

Como CM é mediana do triângulo ABC, temos que os triângulos ACM e BCM possuem a mesma área, logo:

$$S_1 + S_2 + S_3 = S_6 + S_5 + S_4$$

$$S_1 + S_1 + S_3 = S_5 + S_5 + S_3$$

$$S_1 = S_5$$

Analogamente, como AP é mediana do triângulo ABC, temos que os triângulos APC e APB também possuem a mesma área, logo:

$$S_2 + S_1 + S_6 = S_3 + S_4 + S_5$$

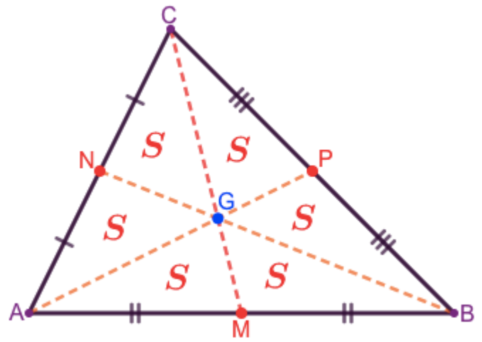
$$S_1 + S_1 + S_5 = S_3 + S_3 + S_5$$

$$S_1 = S_3$$

Daí, temos que:

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6,$$

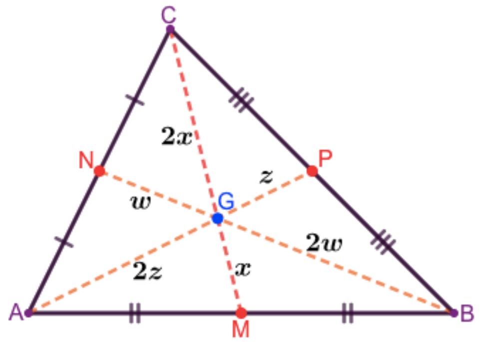
ou seja, os seis triângulos obtidos da divisão possuem a mesma área.



As três medianas de um triângulo o dividem, em torno do baricentro, em seis triângulos de mesma área.

Observe que, como em torno do baricentro temos uma distribuição "igualitária" de áreas, o baricentro também passa a ser conhecido como centro de massa ou centro de gravidade do triângulo.

Outra propriedade importante envolvendo o baricentro de um triângulo é o fato de que ele divide qualquer uma das medianas na razão de 1:2, isto é, a distância do baricentro ao ponto médio é igual a metade da distância do baricentro ao vértice.



Vamos mostrar que vale para uma das medianas. Por exemplo, provemos para a mediana AP. Dos resultados anteriores, temos que a área do triângulo ACG é o dobro da área do triângulo PGC, assim, como esses triângulos têm a mesma altura, temos que a base AG do primeiro é o dobro da base GP do segundo, ou seja,

$$AG = 2 \cdot GP.$$

Veja que a última propriedade pode ser expressa da seguinte forma:

$$\frac{GM}{CG} = \frac{GN}{BG} = \frac{GP}{AG} = \frac{1}{2}$$

ou ainda,

$$\frac{GM}{CM} = \frac{GN}{BN} = \frac{GP}{AP} = \frac{1}{3}$$

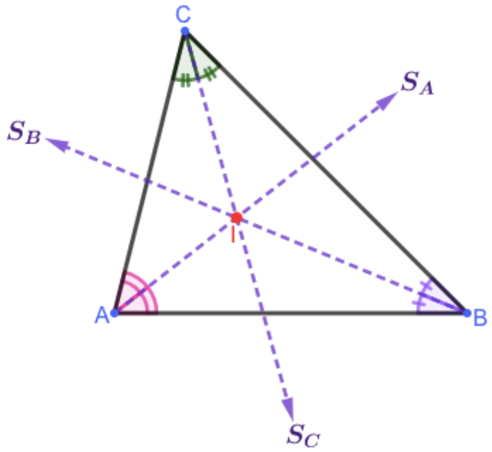
em outras palavras, o baricentro de um triângulo divide qualquer uma das medianas de modo que a distância dele ao ponto médio é 1/3 da mediana e a distância dele ao vértice é igual a 2/3 da mediana.

Vale ressaltar que o baricentro é sempre um ponto interior do triângulo, independentemente de sua classificação.

Bissetriz

Já vimos que a bissetriz de um ângulo é semirreta, com origem no vértice desse ângulo, que o divide em dois outros ângulos congruentes. Além disso, vimos que qualquer ponto da bissetriz está a uma mesma distância dos lados do ângulo.

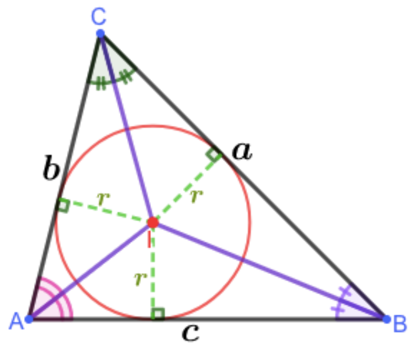
Como o triângulo tem três ângulos internos, ele tem três bissetrizes internas.



S_A: *Bissetriz do ângulo* $\hat{A}$
S_B: *Bissetriz do ângulo* $\hat{B}$
S_C: *Bissetriz do ângulo* $\hat{C}$

O ponto **I** é o ponto de encontro das três bissetrizes e ele é chamado de **INCENTRO**.

Como qualquer ponto de uma bissetriz dista igualmente dos lados do ângulo, temos que o ponto I (Incentro do Triângulo) está igualmente distante dos três lados. Assim, centrando um compasso no ponto I e abrindo de modo que o raio de abertura seja igual a distância (menor distância) do ponto I a qualquer um dos lados do triângulo, será possível traçar uma circunferência que tangencia os lados do triângulo, isto é, uma *circunferência inscrita* no triângulo, por isso o nome incentro, pois ele é o centro da circunferência inscrita no triângulo.



Da figura, podemos dizer que a área do triângulo ABC é igual a soma das áreas dos triângulos BIC, AIC e AIB, logo:

$$A_{ABC} = A_{BIC} + A_{AIC} + A_{AIB}$$

$$A_{ABC} = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2}$$

$$\boldsymbol{A_{ABC} = \frac{(a+b+c) \cdot r}{2}}$$

Assim,

$$\boxed{\boldsymbol{A_{\Delta} = p \cdot r}}$$

onde $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo.

Temos, portanto, que *a área de um triângulo é igual ao seu semiperímetro multiplicado pelo raio da circunferência inscrita nele*.

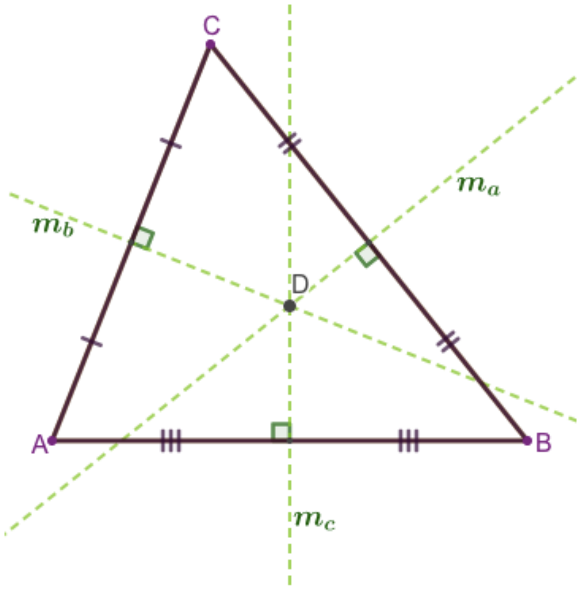
Vale ressaltar que o incentro é sempre um ponto interior do triângulo, independentemente de sua classificação.

O incentro está igualmente distante dos três lados!

MEDIATRIZ

Como vimos anteriormente, a mediatriz de um segmento é a reta que divide esse segmento ao meio e forma 90º com ele. Além disso, qualquer ponto da mediatriz está igualmente distante dos extremos do segmento.

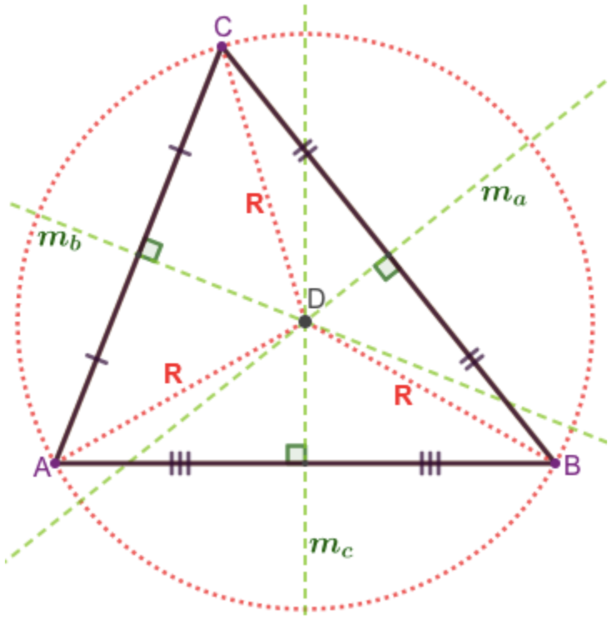
Como o triângulo tem três lados, ele terá então três mediatrizes.



Perceba que a mediatriz não necessariamente passa pelo vértice do triângulo.

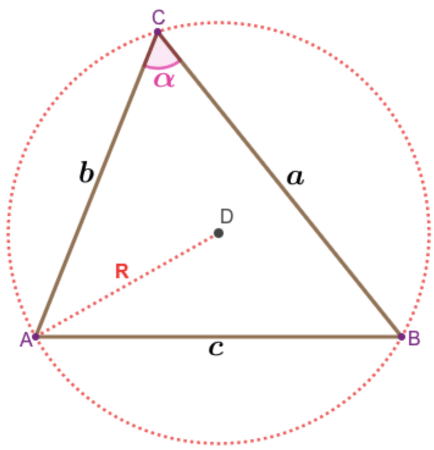
O ponto D é o ponto de encontro das três mediatrizes e ele é chamado de **Circuncentro**.

Como o ponto D pertence às três mediatrizes, ele está igualmente distante dos três vértices do triângulo. Assim, centrando um compasso no ponto D e abrindo-o de modo que o raio de abertura seja igual a distância de D a qualquer um dos vértices do triângulo, será possível traçar uma circunferência centrada em D e que passa pelos três vértices, isto é, uma *circunferência circunscrita* ao triângulo, por isso o nome circuncentro, pois ele é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.



A partir da Lei dos Senos, é possível mostrar uma relação entre a área do triângulo e o raio **R** da circunferência circunscrita a ele.

Considere o triângulo ABC e circunferência de raio R circunscrita a ele na figura a seguir:



Da Lei dos Senos, temos que

$$\frac{c}{sen\alpha} = 2R \implies sen\alpha = \frac{c}{2R}$$

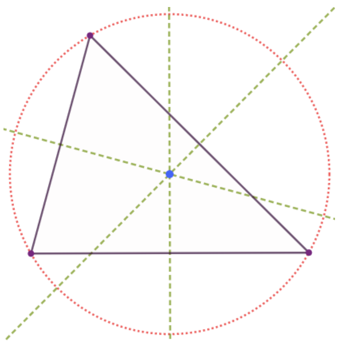
Daí,

$$A_\Delta = \frac{a \cdot b \cdot sen\alpha}{2} \implies A_\Delta = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{c}{2R}$$

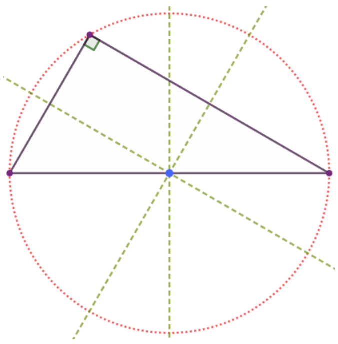
$$\boxed{\boldsymbol{A_\Delta = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}}}$$

É interessante perceber que nem sempre o circuncentro será um ponto pertencente ao interior do triângulo, vejamos:

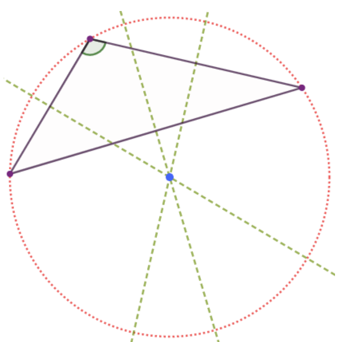
- No triângulo acutângulo, o circuncentro fica no interior.



- No triângulo retângulo, o circuncentro é o ponto médio da hipotenusa.



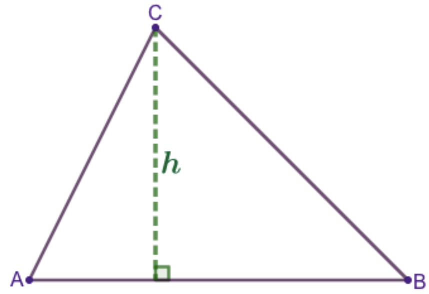
- No triângulo obtusângulo, o circuncentro é exterior ao triângulo.



O circuncentro está igualmente distante dos três vértices!

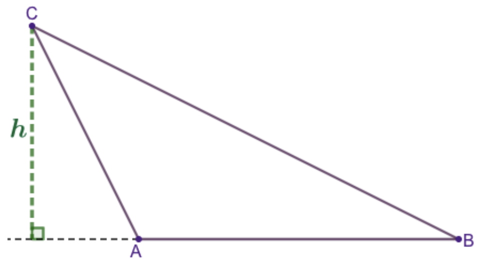
ALTURA

A altura de um triângulo é o segmento de reta que parte do vértice e vai até a reta suporte do lado oposto sendo perpendicular a ela.



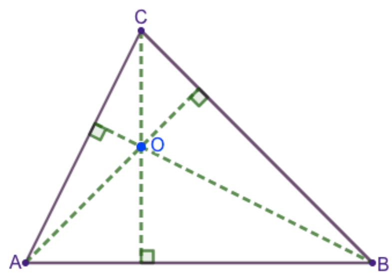
h é a altura relativa ao lado $\overline{AB}$

Perceba que nem sempre a altura intercepta o lado oposto, pode acontecer dela interceptar o prolongamento desse lado, veja:

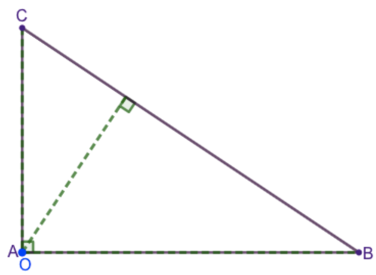


As três alturas, ou suas retas suportes, se cruzam num ponto chamado de **ORTOCENTRO**.

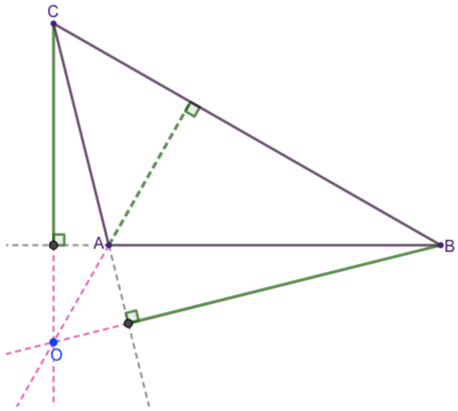
- No triângulo acutângulo, o ortocentro será um ponto pertencente ao interior do triângulo.



- No triângulo retângulo, o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto.

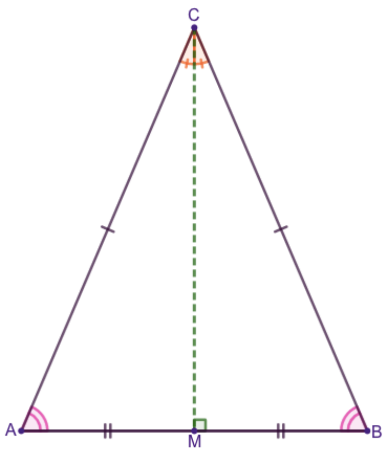


- No triângulo obtusângulo, o ortocentro será um ponto externo ao triângulo.



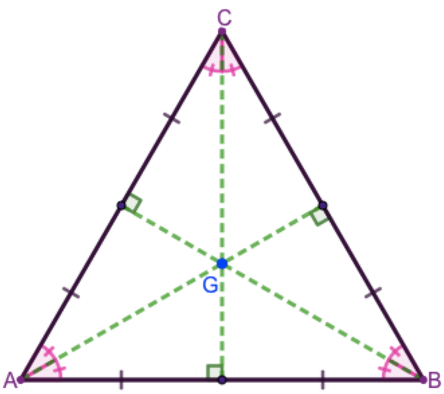
Vamos agora analisar alguns casos particulares envolvendo os segmentos e pontos notáveis de um triângulo:

☞ No triângulo isósceles, a altura, bissetriz e a mediana relativas à base coincidem.



Observe que a reta suporte do segmento $\overline{CM}$ é o eixo de simetria do triângulo.

☞ No triângulo equilátero, a mediana, bissetriz, mediatriz e altura relativas à qualquer um dos lados coincidem. Consequentemente, o baricentro, o incentro, o circuncentro e o ortocentro também coincidem.



Observe que o triângulo equilátero possui três eixos de simetria que correspondem às mediatrizes do triângulo.

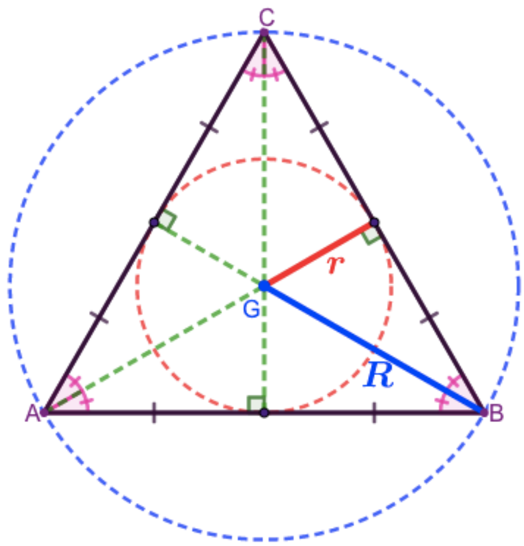
Do Teorema de Pitágoras, temos que o valor da altura do triângulo equilátero de lado a é igual a

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Além disso, como o baricentro também é incentro e circuncentro, temos que a distância de G a um dos lados corresponde ao raio r da circunferência inscrita e a distância de G a um dos vértices é igual ao raio **R** da circunferência circunscrita. Vale lembrar que como G é o baricentro, ele divide a mediana (que no caso também é a altura) na razão de 1:2, de modo que $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{2r}$ e, consequentemente,

$$r = \frac{h}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$R = \frac{2h}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

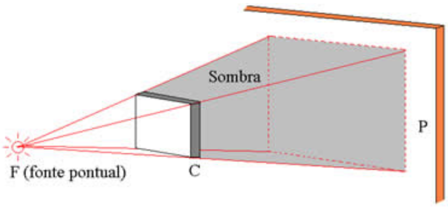


Hora de Praticar

Questão 01

(Ronaebson)

Uma fonte pontual de luz está a uma distância de 3 m de uma parede P. Quando um bloco retangular cuja secção transversal tem dimensões 20 cm por 30 cm é posto a frente dessa fonte luminosa, uma região de sobra é formada na parede.



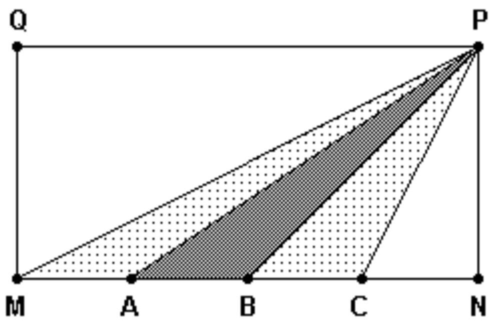
Sabendo que esse bloco foi colocado a uma distância de 60 cm da fonte luminosa, a região sombreada na parede tem área igual a

Ⓐ $0{,}06\ m^2$.
Ⓑ $0{,}30\ m^2$.
Ⓒ $1{,}50\ m^2$.
Ⓓ $3{,}00\ m^2$.
Ⓔ $6{,}00\ m^2$.

Questão 02

(UEL)

A bandeira de um time de futebol tem o formato de um retângulo MNPQ. Os pontos A, B e C dividem o lado MN em quatro partes iguais. Os triângulos PMA e PCB são coloridos com uma determinada cor C_1, o triângulo PAB com a cor C_2 e o restante da bandeira com a cor C_3. Sabe-se que as cores C_1, C_2 e C_3 são diferentes entre si. Que porcentagem da bandeira é ocupada pela cor C_1?

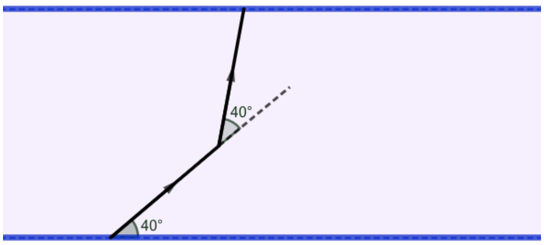


Ⓐ 12,5%
Ⓑ 15%
Ⓒ 22,5%
Ⓓ 25%
Ⓔ 28,5%

Questão 03

(Ronaebson)

Numa manhã de sábado, Lelo e seus irmãos saíram para pescar em um rio cujas margens eram paralelas. Com a intenção de atravessar o rio, eles partiram em linha reta da margem direita por 300 m, de forma que a direção do barco fez um ângulo de 40º com essa margem. Em dado momento da travessia, eles mudaram um pouco a rota desviando 40º a esquerda em relação a direção inicial e seguiram numa trajetória retilínea por mais 400 m até completarem o percurso, chegando à margem oposta.



Com base no exposto, se Lelo e seus irmãos tivessem continuado na trajetória inicial, não mudando o percurso, eles chegariam num ponto da margem oposta que estaria

Ⓐ 350 m à frente do ponto que eles chegaram.
Ⓑ 400 m à frente do ponto que eles chegaram.
Ⓒ 700 m à frente do ponto que eles chegaram.
Ⓓ 500 m antes do ponto que eles chegaram.
Ⓔ 100 m antes do ponto que eles chegaram.

Questão 04

(Ronaebson)

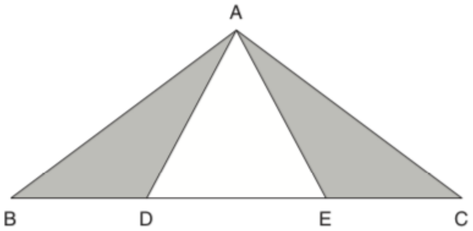
Ruben estava jogando bola de gude com seu filho Rael. As bolinhas deviam ser jogadas no interior de um triângulo acutângulo não equilátero desenhado no chão.

Num dado momento eles jogaram, cada um, uma bolinha de gude e Ruben percebeu que sua bolinha estava equidistante dos lados desse triângulo e a bola de gude do seu filho ficou a uma mesma distância dos vértices do triângulo.
Os pontos onde as bolinhas de Ruben e Rael caíram, respectivamente, correspondem ao

Ⓐ baricentro e ao ortocentro do triângulo.
Ⓑ baricentro e ao incentro do triângulo.
Ⓒ incentro e ao circuncentro do triângulo.
Ⓓ incentro e ao ortocentro do triângulo.
Ⓔ circuncentro e ao incentro do triângulo.

Questão 05

Na figura a seguir, tem-se a imagem do logotipo de uma empresa, do qual as letras A, B, C, D e E não fazem parte.



O dono da empresa exige que, nesse logotipo, o triângulo ADE seja equilátero, que o triângulo ABC seja isóscele de base BC, e que os triângulos ABC e ACB meçam 25º cada um.

Depois que o logotipo estiver pronto, a diferença de medida entre os dois ângulos menores do triângulo ABD será igual a

- **A** 0º.
- **B** 5º.
- **C** 10º.
- **D** 25º.
- **E** 35º.

Questão 06

(Ronaebson)

Os três irmãos Ferreira, Ro, Re e Ru moram no sítio Serragem, na cidade de Cajazeiras-PB. Eles moram em casas distintas e os pontos de localização das três casas são vértices de um triângulo.

Existe uma estrada de terra que liga as casas de Ro e Re, outra estrada que liga as casas de Ro e Ru e uma terceira estrada que liga as casas de Re e Ru.

Um poste de iluminação será instalado num ponto equidistante das três casas e um poço será cavado num ponto equidistante das três estradas.

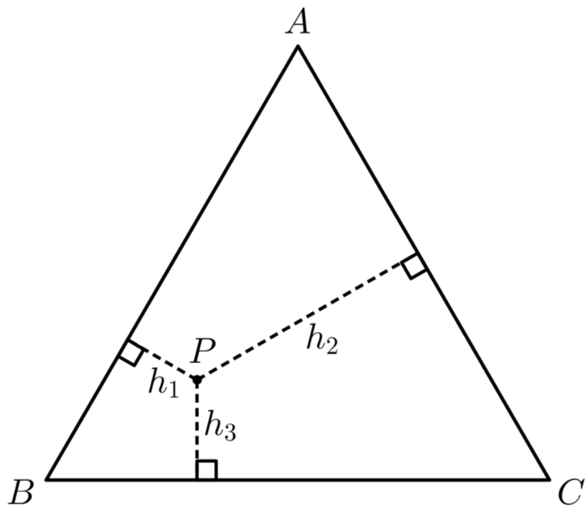
Considerando o triângulo cujos vértices representam as localizações das casas dos irmãos Ferreira e cujos lados representam as estradas que ligam essas casas, sabendo que esse triângulo não é isósceles, os pontos apropriados para a instalação do poste de iluminação e para a construção do poço são, respectivamente,

- **A** o baricentro e incentro desse triângulo.
- **B** o circuncentro e o incentro desse triângulo.
- **C** o incentro e o circuncentro desse triângulo.
- **D** o ortocentro e o baricentro desse triângulo.
- **E** o circuncentro e o ex-incentro desse triângulo.

Questão 07

(Ronaebson)

No meio da área de vivência de uma grande escola, existe uma região na forma de um triângulo equilátero ABC toda coberta com grama.
P é um ponto interior do triângulo, tal que, a soma das distâncias desse ponto aos lados do triângulo é igual a 6m, isto é, $h_1 + h_2 + h_3 = 6\,m$, com h_1, h_2 e h_3 sendo as distâncias de P aos lados AB, AC e BC, respectivamente.



Qual a área da região coberta com grama?

- **A** $4\sqrt{3}\,m^2$.
- **B** $12\,m^2$.
- **C** $8\sqrt{3}\,m^2$.
- **D** $12\sqrt{3}\,m^2$.
- **E** $24\,m^2$.

Questão 08

(Ronaebson)

Pedro e Carol amarraram cada um uma linha num mesmo balão de gás hélio e depois soltaram para que ele subisse até que as linhas ficassem perfeitamente esticadas. A linha que Pedro está segurando tem 12m de comprimento e a que Carol está segurando tem 16m. Sabe-se que eles se posicionaram de modo que Pedro, Carol e o balão ficaram num mesmo plano perpendicular ao solo e que as linhas ficaram perpendiculares entre si.

Dado que Pedro e Carol tem 1,80m de altura cada e que eles seguravam a linha numa altura aproximadamente igual a 2/3 de seu corpo, a altura que o balão ficou do chão foi de

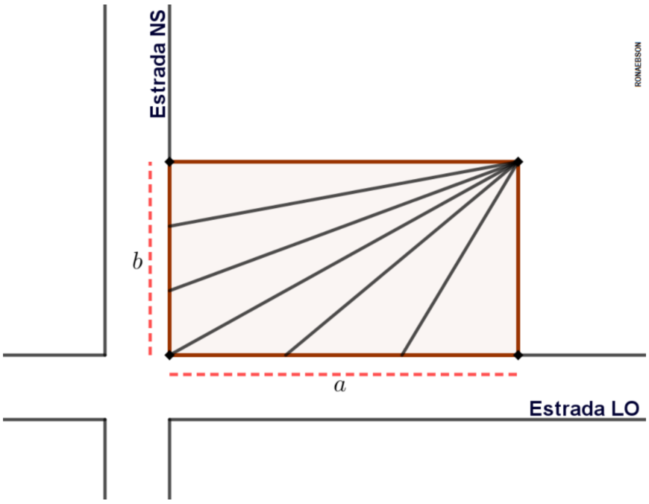
- **A** 6,0 m.
- **B** 9,6 m.
- **C** 10,8 m.
- **D** 11,4 m.
- **E** 12,0 m.

Questão 09

(Ronaebson)

Um agricultor tem um terreno plano retangular de dimensões $a \times b$, com $a > b$ e a e b dados em metros, onde serão feitas marcações para que, em regiões diferentes, ele possa plantar diversos tipos de culturas e fazer a rotação delas.

Localizado no cruzamento das estradas NS e LO, o terreno será dividido em seis partes, de modo que, após a divisão, cada parte possua a frente voltada para uma dessas estradas, por onde se terá acesso direto. A partir da divisão do lado a em três partes iguais e do lado b em outras três partes iguais, são propostas seis regiões de formato triangular, conforme ilustrado na figura.



A partir dessa divisão, tem-se que os lotes triangulares cujo acesso se dá pela estrada NS têm área

- Ⓐ seis vezes maior do que aqueles cujo acesso se dá pela estrada LO.
- Ⓑ três vezes maior do que aqueles cujo acesso se dá pela estrada LO.
- Ⓒ igual aos daqueles cujo acesso se dá pela estrada LO.
- Ⓓ duas vezes menor do que aqueles cujo acesso se dá pela estrada LO.
- Ⓔ três vezes menor do que aqueles cujo acesso se dá pela estrada LO.

Questão 10

(UFF

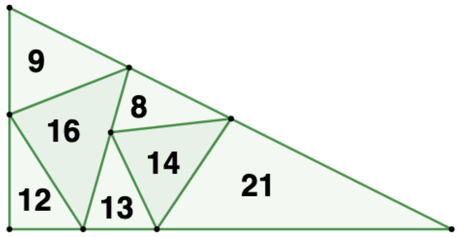
O triângulo MNP é tal que ângulo M = 80º e ângulo P = 60º. A medida do ângulo formado pela bissetriz do ângulo interno N com a bissetriz do ângulo externo P é

- Ⓐ 20º.
- Ⓑ 30º.
- Ⓒ 40º.
- Ⓓ 50º.
- Ⓔ 60º.

Questão 11

(Ronaebson)

Laedson tem uma fazenda na forma triangular na cidade de Coremas-PB. Ele decidiu dividir essa fazendo em terrenos triangulares menores como indica a figura, de modo que os números no interior de cada um dos triângulos indicam seus respectivos perímetros, em decâmetro.



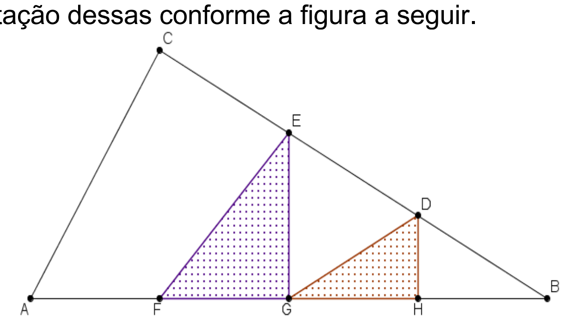
Qual o perímetro do terreno triangular correspondente a fazenda de Laedson?

- Ⓐ 33 dam.
- Ⓑ 42 dam.
- Ⓒ 51 dam.
- Ⓓ 63 dam.
- Ⓔ 93 dam.

Questão 12

(Ronaebson)

Rotação de culturas é uma técnica agrícola de conservação que visa a diminuir a exaustão do solo. Isto é feito trocando as culturas a cada novo plantio de forma que as necessidades de adubação sejam diferentes a cada ciclo. Consiste em alternar espécies vegetais numa mesma área agrícola. As espécies escolhidas devem ter, ao mesmo tempo, propósitos comerciais e de recuperação do solo.
Um fazendeiro tem uma propriedade na forma do triângulo com área total de 60 hectares. Ele decidiu fazer marcações no terreno para que, em regiões diferentes, pudesse plantar culturas diversas e fazer a rotação dessas conforme a figura a seguir.



Sabendo que o lado AB está dividido em quatro partes iguais pelos pontos F, G e H e o lado BC está dividido em três partes iguais pelos pontos D e E, a soma das áreas dos triângulos EFG e DGH é igual a

- Ⓐ 5 hectares.
- Ⓑ 10 hectares.
- Ⓒ 15 hectares.
- Ⓓ 20 hectares.
- Ⓔ 30 hectares.

Questão 13

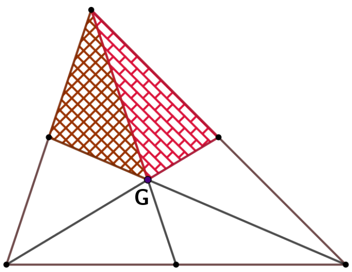
Para fazer um experimento em sala de aula, um professor utilizou uma placa rígida uniforme com formato de um triângulo escaleno e um pouco maior que um livro escolar. Assim, apoiando seu dedo indicador em um ponto destacado na superfície da placa, o professor conseguiu equilibrá-la e mantê-la paralela ao chão. Esse feito ocorre pelo fato de o ponto destacado sobre a superfície ser

Ⓐ o ortocentro da placa triangular.
Ⓑ o ex-incentro da placa triangular.
Ⓒ o incentro da placa triangular.
Ⓓ o circuncentro da placa triangular.
Ⓔ o baricentro da placa triangular.

Questão 14

(Ronaebson)

Um fazendeiro tem uma propriedade na forma do triângulo com área total de 120 hectares. Ele decidiu fazer marcações no terreno para que, em regiões diferentes, pudesse plantar culturas diversas e fazer a rotação dessas conforme a figura a seguir.



Inicialmente, em uma das regiões triangulares hachuradas será plantada batata e na outra região será plantada beterraba. Sabendo que o ponto G é o baricentro do triângulo, então a soma das áreas destinadas ao plantio de batatas e de beterrabas é igual a

Ⓐ 20 hectares.
Ⓑ 30 hectares.
Ⓒ 40 hectares.
Ⓓ 45 hectares.
Ⓔ 60 hectares.

Questão 15

(ESPM)

Num mapa, uma estrada retilínea passa sucessivamente pelas cidades A, B e C e uma cidade D, distante 120 km de A, está localizada de tal forma que o ângulo $D\hat{A}B$ mede 36º. Um viajante fez o trajeto AB, BD e DC, percorrendo em cada trecho a mesma distância. Se ele tivesse ido diretamente de A até C, teria percorrido uma distância de:

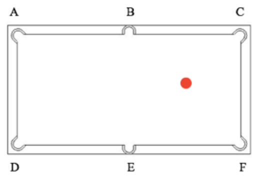
Ⓐ $120\ km$
Ⓑ $60\sqrt{3}\ km$
Ⓒ $120 \cdot cos36^o\ km$
Ⓓ $\frac{120}{cos36^o}\ km$
Ⓔ $140\ km$

Questão 16

(Ronaebson)

A sinuca é um esporte que exige, principalmente, estratégia de jogo e conhecimento matemático sobre geometria, para que se possa estimar o ângulo e a trajetória que a bola deve seguir para que seja encaçapada em uma “boca” específica.

Durante uma de suas jogadas, Mark Selby, atual campeão mundial de Snooker, percebeu que a bola vermelha que ele iria encaçapar estava a uma mesma distância de três “bocas” (a superior direita C, superior intermédia B e a inferior direita F).



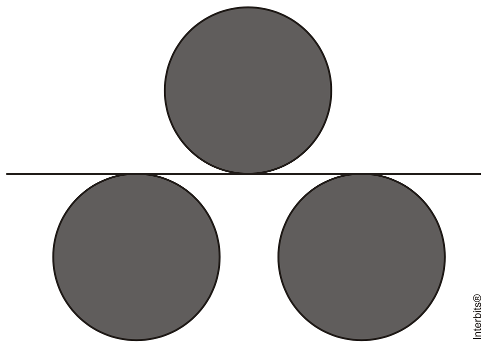
Se imaginássemos um triângulo cujos vértices são as “bocas” mencionadas, a bola vermelha ocuparia um ponto específico do triângulo, esse ponto seria o

Ⓐ baricentro.
Ⓑ incentro.
Ⓒ circuncentro.
Ⓓ ortocentro.
Ⓔ exincentro.

Questão 17

(UFG)

Gerard Stenley Hawkins, matemático e físico, nos anos 1980, envolveu-se com o estudo dos misteriosos círculos que apareceram em plantações na Inglaterra. Ele verificou que certos círculos seguiam o padrão indicado na figura a seguir, isto é, três círculos congruentes, com centros nos vértices de um triângulo equilátero, tinham uma reta tangente comum.

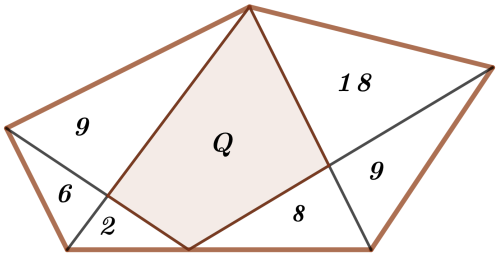


Nestas condições, e considerando-se uma circunferência maior que passe pelos centros dos três círculos congruentes, calcule a razão entre o raio da circunferência maior e o raio dos círculos menores.

Questão 18

(Ronaebson)

Yago tem uma grande fazenda pentagonal na cidade de Patos-PB. Ele decide dividi-la em partes menores para seus sete filhos de acordo com a figura a seguir, sendo os números indicados as áreas de cada uma das regiões, em hectares.



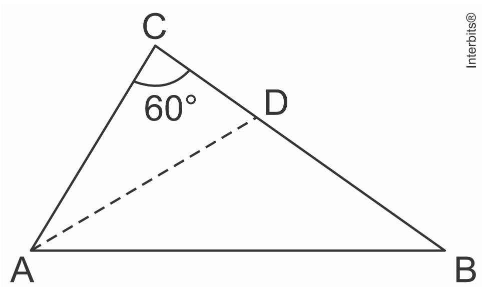
A área Q do quadrilátero hachurado, em hectare, é igual a

- Ⓐ 16.
- Ⓑ 19.
- Ⓒ 21.
- Ⓓ 37.
- Ⓔ 52.

Questão 19

(UNICAMP_2019

No triângulo ABC exibido na figura a seguir, $\overline{AD}$ é a bissetriz do ângulo interno em A, e $AD = DB$.



O ângulo interno em A é igual a

- Ⓐ 60º.
- Ⓑ 70º.
- Ⓒ 80º.
- Ⓓ 90º.

Questão 20

(UFRGS)

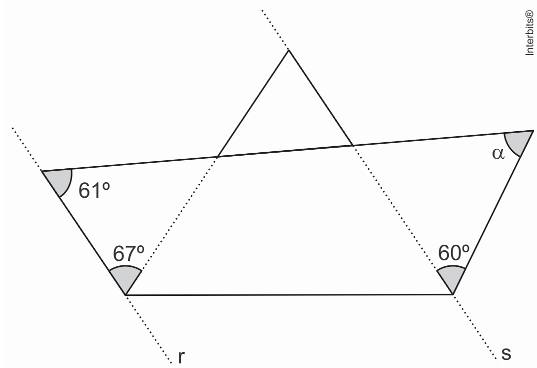
Assinale a alternativa que apresenta corretamente os valores, na mesma unidade de medida, que podem representar as medidas dos lados de um triângulo.

- Ⓐ 1 – 2 – 4
- Ⓑ 3 – 2 – 6
- Ⓒ 8 – 4 – 3
- Ⓓ 3 – 9 – 4
- Ⓔ 6 – 4 – 5

Questão 21

(IFPE_2018)

Eva é aluna do curso de Construção Naval do campus Ipojuca e tem mania de construir barquinhos de papel. Durante a aula de desenho técnico, resolveu medir os ângulos do último barquinho que fez, representado na imagem a seguir. Sabendo que as retas suportes, r e s, são paralelas, qual a medida do ângulo α destacado?

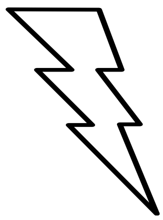


- Ⓐ 52º.
- Ⓑ 60º.
- Ⓒ 61º.
- Ⓓ 67º.
- Ⓔ 59º.

Questão 22

(Ronaebson)

O bruxo Parry Hotter, depois de muitos feitos relacionados à magia negra, ficou bem conhecido, entretanto sua fama se deu, principalmente, pelo fato de ter ficado com uma marca na testa com a forma de um raio depois de ter recebido um feitiço de um bruxo do bem chamado Lord Valdasorte. Esse raio tem a forma de um polígono, como mostra a figura, e o número de lado do mesmo é igual ao número de Dormensais da Sorte que o vigiam. Para conseguir se esconder dos Dormensais da Sorte, Perry precisa conhecer um número de magias, no mínimo, igual ao cubo do número de Dormensais.
Assim, pelo menos quantas magias ele precisa conhecer?

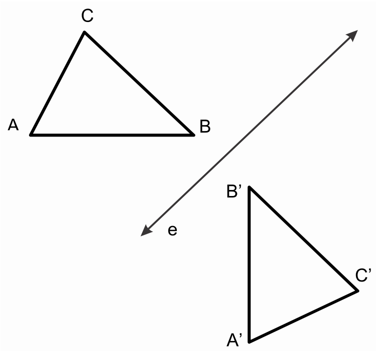


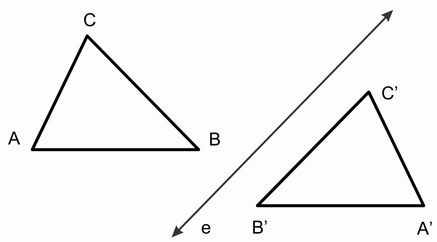
- Ⓐ 11
- Ⓑ 33
- Ⓒ 121
- Ⓓ 343
- Ⓔ 1331

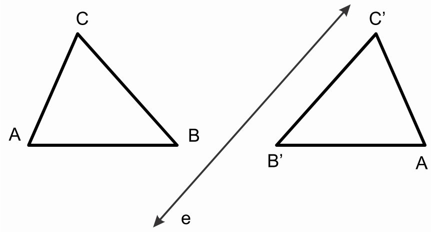
Questão 23

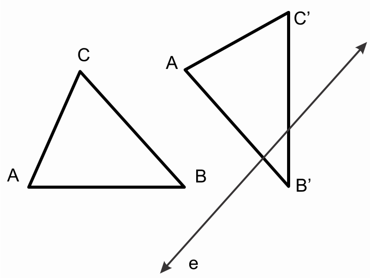
(UPE-SSA)

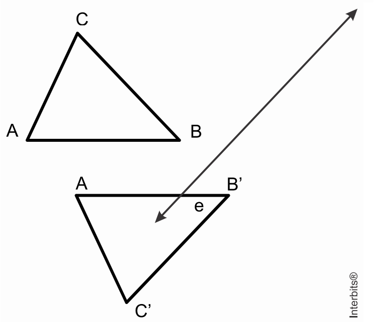
Dentre as alternativas abaixo, qual figura representa melhor o triângulo $A'B'C'$, obtido por uma reflexão do triângulo ABC em relação ao eixo e (destaque nesse "e" eixo) seguida de uma rotação de 90º no sentido anti-horário em torno do ponto B?

A


B


C


D


E


Questão 24

(UNESP)

Um aluno precisa localizar o centro de uma moeda circular e, para tanto, dispõe apenas de um lápis, de uma folha de papel, de uma régua não graduada, de um compasso e da moeda.

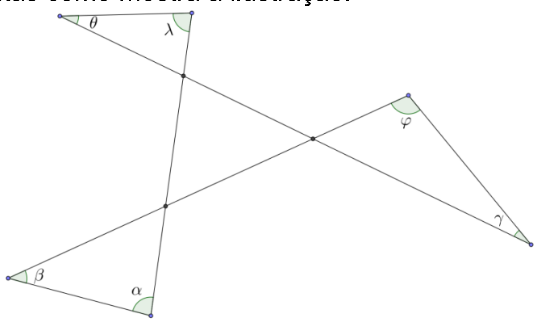
Nessas condições, o número mínimo de pontos distintos necessários de serem marcados na circunferência descrita pela moeda para localizar seu centro é

A 3.
B 2.
C 4.
D 1.
E 5.

Questão 25

(Ronaebson)

Durante uma exploração arqueológica numa cidade em ruínas da Grécia, um arqueólogo encontrou um objeto de formato curioso com algumas letras gregas escritas como mostra a ilustração.



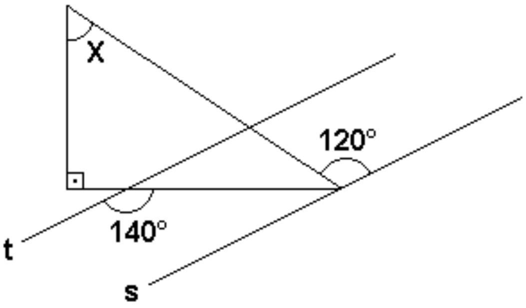
Após uma certa análise, percebeu que as letras representavam as medidas dos referidos ângulos. Curioso, questionou um matemático se existia alguma relação entre essas medidas. O matemático afirmou que existia sim, e que a soma das medidas indicadas, isto é, $\alpha+\beta+\theta+\lambda+\varphi+\gamma$, é sempre constante e igual a

A 120°.
B 180°.
C 270°.
D 300°.
E 360°.

Questão 26

(FUVEST)

As retas t e s são paralelas. A medida do ângulo x, em graus, é



A 30
B 40
C 50
D 60
E 70

Questão 27

(ENEM)

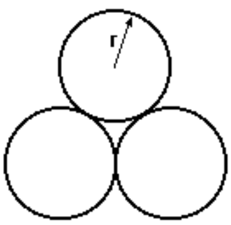
Quatro estações distribuidoras de energia A, B, C e D estão dispostas como vértices de um quadrado de 40 km de lado. Deseja-se construir uma estação central que seja ao mesmo tempo equidistante das estações A e B e da estrada (reta) que liga as estações C e D. A nova estação deve ser localizada

A no centro do quadrado.
B na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 15 km dessa estrada.
C na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 25 km dessa estrada.
D no vértice de um triângulo equilátero de base AB, oposto a essa base.
E no ponto médio da estrada que liga as estações A e B.

Questão 28

(UNICAMP)

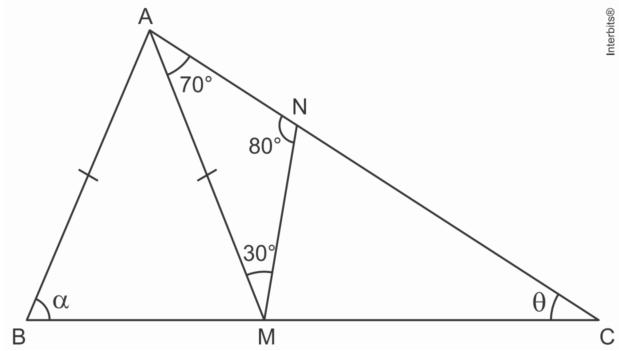
Três canos de forma cilíndrica e de mesmo raio r, dispostos como indica a figura adiante, devem ser colocados dentro de outro cano cilíndrico de raio R, de modo a ficarem presos sem folga. Expresse o valor de R em termos de r para que isso seja possível.



Questão 29

(CFTMG_2017)

Neste triângulo, tem-se $AB = AM$, $M\hat{A}N = 70^o$, $A\hat{M}N = 30^o$ e $A\hat{N}M = 80^o$.



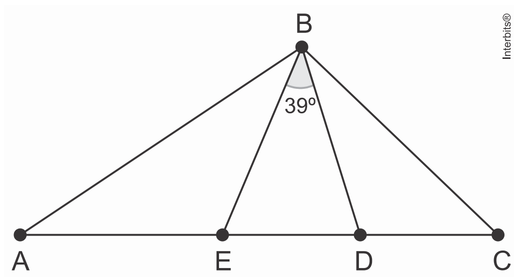
O valor de $\alpha - \theta$ é

A 50º.
B 60º.
C 70º.
D 80º.

Questão 30

(FGV)

A figura representa um triângulo ABC, com E e D sendo pontos sobre $\overline{AC}$. Sabe-se ainda que AB=AD, CB=CE e que $E\hat{B}D$ mede 39º.



Nas condições dadas, a medida de $A\hat{B}C$ é

A 102º.
B 108º.
C 111º.
D 115º.
E 117º.

Questão 31

(CFTSC)

Num triângulo isóscele, cada ângulo da base mede o dobro da medida do ângulo do vértice. A medida do ângulo do vértice é:

A 36º.
B 72º.
C 50º.
D 40º.
E 80º.

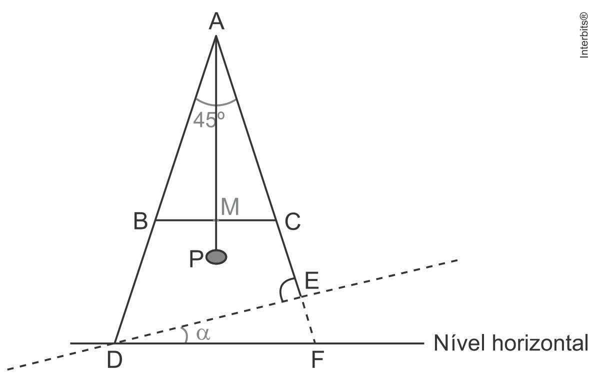
Questão 32

(UERJ)

Uma ferramenta utilizada na construção de uma rampa é composta pela seguinte estrutura:

- duas varas de madeira, correspondentes aos segmentos AE e AD, que possuem comprimentos diferentes e formam o ângulo $D\hat{A}E$ igual a 45º;
- uma travessa, correspondente ao segmento BC, que une as duas varas e possui uma marca em seu ponto médio M;
- um fio fixado no vértice A e amarrado a uma pedra P na outra extremidade;
- nesse conjunto, os segmentos AB e AC são congruentes.

Observe o esquema que representa essa estrutura:



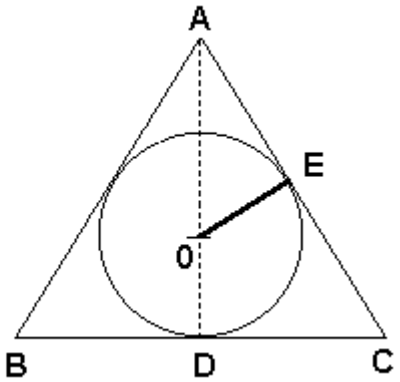
Quando o fio passa pelo ponto M, a travessa BC fica na posição horizontal. Com isso, obtém-se, na reta que liga os pontos D e E, a inclinação α desejada.

Calcule α, supondo que o ângulo $A\hat{E}D$ mede 85º.

Questão 33

(PUC-MG)

Na figura, o triângulo ABC é equilátero e está circunscrito ao círculo de centro 0 e raio 2 cm. AD é altura do triângulo. Sendo E ponto de tangência, a medida de AE, em centímetros, é:

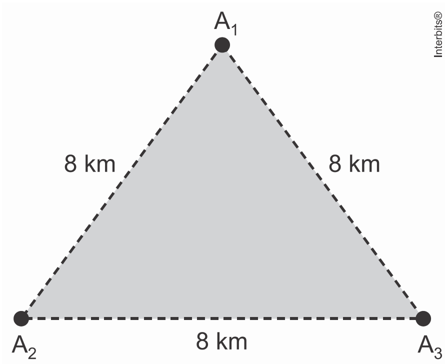


A) $2\sqrt{3}$
B) $2\sqrt{5}$
C) 3
D) 5
E) $\sqrt{26}$

Questão 34

(UEPA)

Um dos problemas enfrentado pelas empresas de telefonia celular e disponibilizar sinal de qualidade aos seus usuários, fato que nos últimos tempos tem gerado uma série de reclamações segundo o PROCON. Visando solucionar os problemas de infraestrutura e cobrir uma região com sinal de qualidade, uma operadora instalou 3 antenas $(A_1, A_2\ e\ A_3)$ situadas nos vértices de um triângulo equilátero cujo lado mede 8 km, conforme indicado na figura abaixo. Nessas condições e considerando que cada uma das antenas cobre uma área circular equivalente a $16\pi\ km^2$ com sinal de qualidade, é correto afirmar que o usuário dessa operadora que se encontrar:

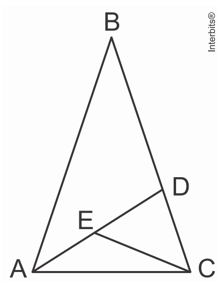


A) num dos lados do triângulo não terá sinal de qualidade.
B) dentro da área delimitada pelo triângulo sempre terá um sinal de qualidade.
C) no centro do triângulo não terá sinal de qualidade.
D) a 4 km de um dos vértices do triângulo não terá um sinal de qualidade.
E) num dos vértices do triângulo não terá sinal de qualidade.

Questão 35

(IFAL)

O triângulo ABC é isósceles, com AB=BC e o ângulo B vale 20º. Os triângulos ADC e DCE são também isósceles, com AD=AC e ED=DC. O ângulo DCE mede:

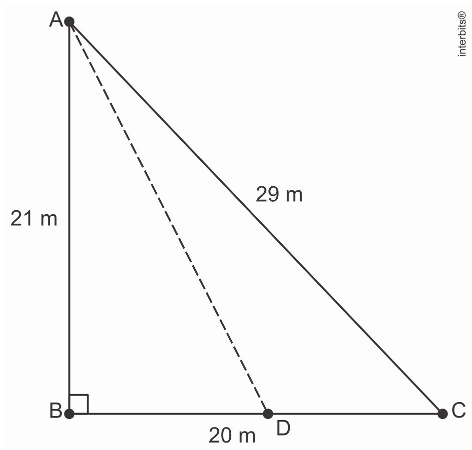


A) 18º.
B) 34º.
C) 48º.
D) 50º.
E) 73º.

Questão 36

(UFU)

Dois irmãos herdaram um terreno que, conforme consta no registro de imóvel, pode ser representado pelo triângulo retângulo ABC da figura a seguir.



Os irmãos pretendem murar esse terreno e, ao mesmo tempo, dividi-lo por um muro, representado pelo segmento AD, em dois terrenos triangulares de mesma área. O preço de construção do metro quadrado de muro foi orçado em R$ 90,00, e em toda extensão o muro terá 3m de altura.

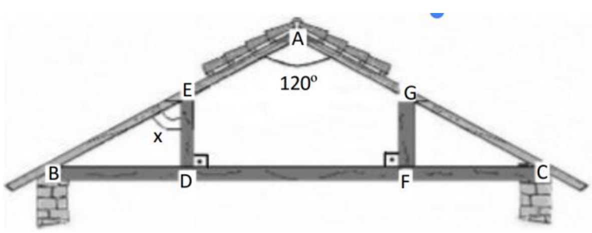
A parte inteira do custo da construção do muro, em milhares de reais, é

- Ⓐ 25.
- Ⓑ 23.
- Ⓒ 24.
- Ⓓ 26.

Questão 37

(IFSUL_2017)

O projeto de madeiramento é fundamental para a construção de um bom telhado em uma residência. Na figura, temos a vista frontal do madeiramento de um telhado. O triângulo ABC é isósceles de base BC tal que $A = 120^o$. Observa-se também que os segmentos DE e FG são perpendiculares à base BC.



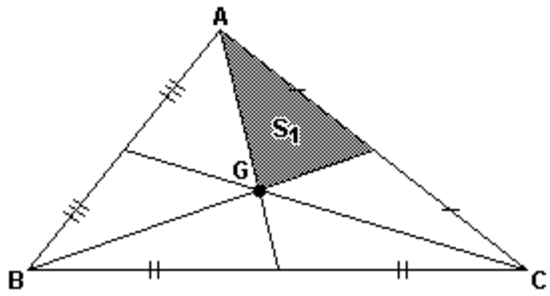
De acordo com os dados acima, a medida *x* do ângulo $B\hat{E}D$ é

- Ⓐ 30º.
- Ⓑ 45º.
- Ⓒ 50º.
- Ⓓ 60º.
- Ⓔ 70º.

Questão 38

(CFTCE)

Na figura, o ponto G é o baricentro do triângulo, e a área de S_1 é 6 cm^2. A Área do triângulo ABC é:



- Ⓐ 72 cm^2
- Ⓑ 62 cm^2
- Ⓒ 50 cm^2
- Ⓓ 42 cm^2
- Ⓔ 36 cm^2

Questão 39

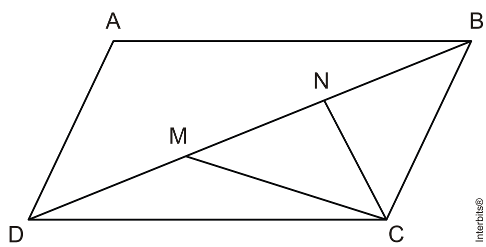
(UFSC)

Calcule a área, em cm^2, de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 10 cm e cujo raio da circunferência inscrita mede 1 cm.

Questão 40

(IFPE)

O Sr. Joaquim comprou um terreno em um loteamento numa praia do litoral sul de Pernambuco. O terreno tem a forma de um paralelogramo (figura abaixo) com a base medindo 20 metros e a altura medindo 15 metros. Os pontos M e N dividem a diagonal BD em três partes iguais. No triângulo CMN, ele vai cultivar flores. Qual é a área que o Sr. Joaquim destinou para esse cultivo, em m^2?

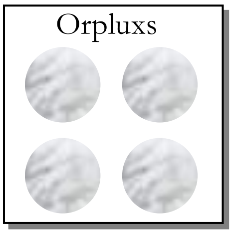


- Ⓐ 37
- Ⓑ 39
- Ⓒ 45
- Ⓓ 48
- Ⓔ 50

Questão 41

(Ronaebson)

Um bruxo não tão famoso, chamado Parry Hotter, para realizar um ritual de magia negra precisa de quatro Orpluxs, que são esferas maciças de mesmo raio e feitas de uma liga metálica muito rara. Três esferas devem ser dispostas sobre uma mesa e no interior de uma circunferência de sal grosso de modo a formar um triângulo qualquer, a figura a seguir representa um esquema onde o bruxo dispôs as três Orpluxs sobre a mesa.



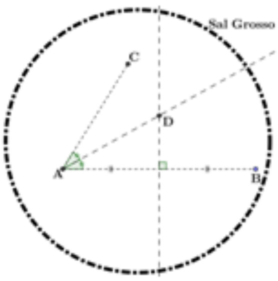
Os pontos A, B e C representam a localização das três Orpluxs no interior da circunferência de sal grosso. Para que o ritual dê certo, a quarta Orplux de ser posicionada num ponto D de modo a

- ficar no interior da circunferência de sal grosso;
- estar a uma mesma distância das Orpluxs A e B;
- ser equidistante das semirretas $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$.

Assim, o ponto D referente à quarta Orplux deve, necessariamente,

A pertencer às mediatrizes dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, como ilustra o esquema

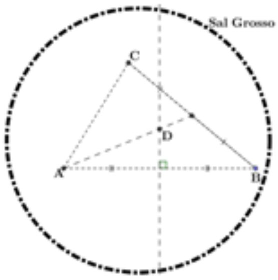
B pertencer à mediatriz do segmento $\overline{AB}$ e à bissetriz do ângulo $C\hat{A}B$, como ilustra o esquema



C ser o Baricentro do triângulo ABC, pertencendo às três medianas do mesmo, como ilustra o esquema

D ser o ponto de encontro das alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, o que corresponde ao ortocentro do triângulo ABC, como ilustra o esquema

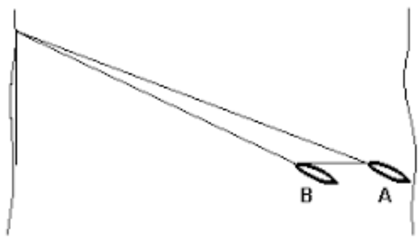
E estar na intersecção da mediatriz do segmento $\overline{AB}$ com a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, como ilustra o esquema



Questão 42

(UFPE)

Um barco está sendo rebocado para a margem de um porto por um cabo de aço. Inicialmente, o barco está no ponto A da ilustração, quando o cabo tem comprimento de 100 m. Após puxar o cabo de 20 m, o barco ocupa a posição B, conforme a imagem a seguir.



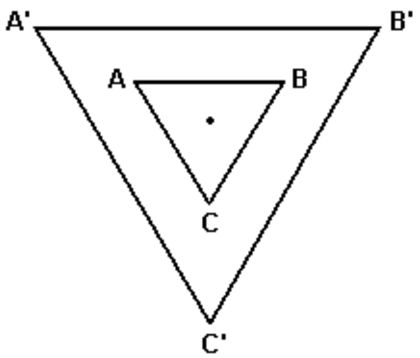
Nessas condições, a distância AB é

A igual a 19 m.
B igual a 180 m.
C maior do que 180m.
D menor do que 20 metros
E um valor entre 20m e 180m.

Questão 43

(UFC)

Na figura a seguir, temos dois triângulos equiláteros ABC e $A'B'C'$ que possuem o mesmo baricentro, tais que $AB||A'B', AC||A'C'\ e\ BC||B'C'$. Se a medida dos lados de ABC é igual a $3\sqrt{3}\ cm$ e a distância entre os lados paralelos mede $2\ cm$, então a medida das alturas de $A'B'C'$ é igual a:

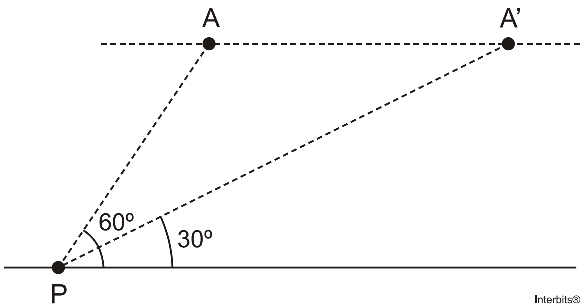


- Ⓐ 11,5 cm
- Ⓑ 10,5 cm
- Ⓒ 9,5 cm
- Ⓓ 8,5 cm
- Ⓔ 7,5 cm

Questão 44

(ESPM)

Um avião voava a uma altitude e velocidade constantes. Num certo instante, quando estava a 8 km de distância de um ponto P, no solo, ele podia ser visto sob um ângulo de elevação de 60° e, dois minutos mais tarde, esse ângulo passou a valer 30°, conforme mostra a figura abaixo.

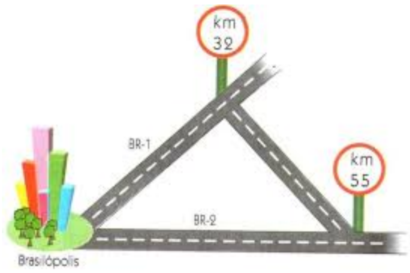


A velocidade desse avião era de:

- Ⓐ 180 km/h
- Ⓑ 240 km/h
- Ⓒ 120 km/h
- Ⓓ 150 km/h
- Ⓔ 200 km/h

Questão 45

Deseja-se fazer uma ligação entre o Km 32 da BR-1 e o Km 55 da BR-2, como mostra a figura.



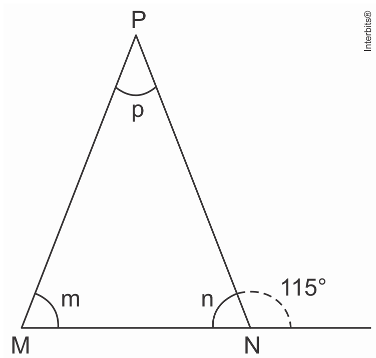
Sabendo que essa ligação terá um número inteiro de quilômetros, quais as medidas, mínima e máxima, respectivamente, que poderá ter?

- Ⓐ 22 km e 86 km
- Ⓑ 23 km e 86 km
- Ⓒ 23 km e 87 km
- Ⓓ 24 km e 86 km
- Ⓔ 24 km e 87 km

Questão 46

(MACKENZIE_2018)

O triângulo PMN acima é isósceles de base $\overline{MN}$ Se p, m e n são os ângulos internos do triângulo, como representados na figura,



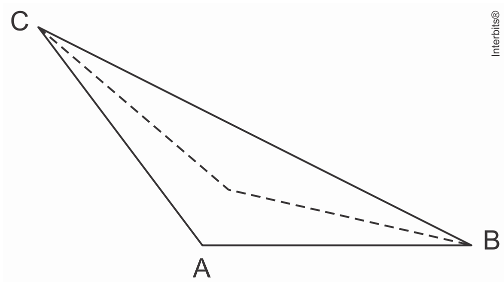
Então podemos afirmar que suas medidas valem, respectivamente,

- Ⓐ $50°, 65°, 65°$
- Ⓑ $65°, 65°, 50°$
- Ⓒ $65°, 50°, 65°$
- Ⓓ $50°, 50°, 80°$
- Ⓔ $80°, 80°, 40°$

Questão 47

(FGV)

Num triângulo isósceles ABC, de vértice A, a medida do ângulo obtuso formado pelas bissetrizes dos ângulos B e C é $140°$.



Então, as medidas dos ângulos A, B e C são, respectivamente:

Ⓐ $120°, 30°\ e\ 30°$
Ⓑ $80°, 50°\ e\ 50°$
Ⓒ $100°, 40°\ e\ 40°$
Ⓓ $90°, 45°\ e\ 45°$
Ⓔ $140°, 20°\ e\ 20°$

Questão 48

(CMRJ_2018)

Considere um ponto A equidistante de outros dois pontos B e C. Sabe-se ainda que o ângulo $B\hat{A}C$ é $10°$ menor que seu complemento. A bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ intercepta o segmento AC em D e, ao traçar uma ceviana CE, E sobre o segmento AB, notamos que o ângulo $A\hat{E}D$ é o dobro do ângulo $B\hat{C}E$ Além disso, o triângulo CDE é semelhante ao triângulo CEA.

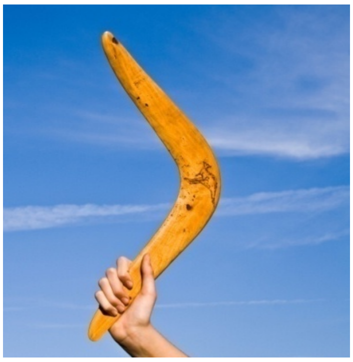
Então podemos afirmar que o número que expressa a medida do ângulo $E\hat{D}B$ em graus, é um

Ⓐ quadrado perfeito.
Ⓑ múltiplo de 3.
Ⓒ múltiplo de 7.
Ⓓ cubo perfeito.
Ⓔ primo.

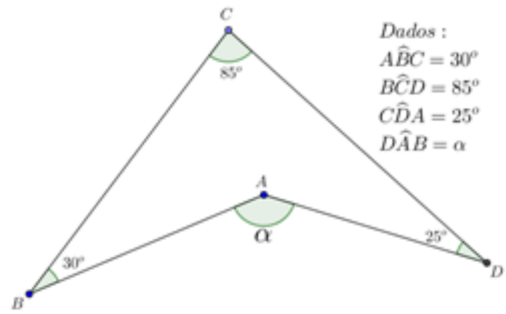
Questão 49

(Ronaebson)

Bumerangue é um objeto de arremesso com origem em várias partes do mundo, eles foram criados para voltar a mão do arremessador quando não atingir o alvo. A origem ainda não é muito certa, mas o país que ganhou a fama como o "país do bumerangue" foi a Austrália. Como esporte, a modalidade aumenta o número de adeptos a cada ano.



Um artesão deseja construir um bumerangue de madeira no formato de um quadrilátero côncavo $ABCD$, com as características descritas na ilustração a seguir, mas para tanto precisa determinar a medida do ângulo $D\hat{A}B = \alpha$ indicado. Depois de alguns cálculos e conferindo com o transferidor para ter certeza de que nada errou, o artesão encontrou para o ângulo $D\hat{A}B = \alpha$ a medida de



Ⓐ 100°.
Ⓑ 140°.
Ⓒ 150°.
Ⓓ 170°.
Ⓔ 180°.

Questão 50

(Integrado_2021)

Os ângulos internos de um triângulo ABC estão em progressão aritmética. Sabe-se que o maior ângulo tem o triplo da medida do menor ângulo.

Qual é o valor, em graus, da diferença da medida entre os dois menores ângulos desse triângulo?

Ⓐ 20°
Ⓑ 30°
Ⓒ 40°
Ⓓ 50°
Ⓔ 60°

Questão 51

(Unicamp_2024)

Joaquim estava brincando com um graveto, quando acertou uma parede e o graveto se partiu em três pedaços, de comprimentos a, b, c, com $a \le b \le c$. Ele recolheu os pedaços e tentou construir um triângulo cujos lados seriam exatamente os pedaços do graveto: não foi possível.

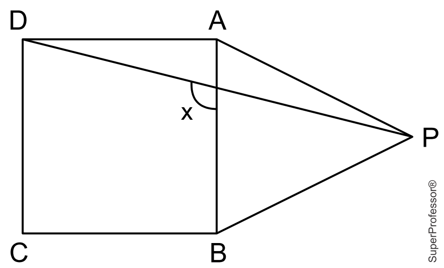
Sabendo que o graveto tinha 50 cm de comprimento e que b = a + 2, qual é o maior valor possível de a?

Ⓐ 9,5 cm.
Ⓑ 10,5 cm.
Ⓒ 11,5 cm.
Ⓓ 12,5 cm.

Questão 52

(EAM_2022)

Observe a figura abaixo:



Se ABCD é um quadrado e ABP um triângulo equilátero, determine o ângulo x e assinale a opção correta.

Ⓐ 135°
Ⓑ 105°
Ⓒ 100°
Ⓓ 97°
Ⓔ 95°

Questão 53

(UFRGS_2017)

Em um triângulo ABC, $B\hat{A}C$ é o maior ângulo e $A\hat{C}B$ é o menor ângulo. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é 70° maior que a medida de $A\hat{C}B$ A medida de $B\hat{A}C$é o dobro da medida de $A\hat{B}C$.

Portanto, as medidas dos ângulos são

Ⓐ $20°, 70°\ e\ 90°.$
Ⓑ $20°, 60°\ e\ 100°.$
Ⓒ $10°, 70°\ e\ 100°.$
Ⓓ $30°, 50°\ e\ 100°.$
Ⓔ $30°, 60°\ e\ 90°.$

Gabarito _ Triângulos			
Hora de Praticar			
Questão	Resposta	Questão	Resposta
01	C	**28**	$R = r\frac{(2\sqrt{3})+3}{3}$
02	D	**29**	C
03	B	**30**	A
04	C	**31**	A
05	C	**32**	17° 30'
06	A	**33**	A
07	D	**34**	C
08	C	**35**	D
09	C	**36**	A
10	C	**37**	D
11	A	**38**	E
12	C	**39**	11
13	E	**40**	E
14	C	**41**	B
15	A	**42**	E
16	C	**43**	B
17	Raio do círculo maior é 4/3 do raio do círculo menor.	**44**	B
18	B	**45**	D
19	C	**46**	A
20	E	**47**	C
21	E	**48**	A
22	E	**49**	B
23	B	**50**	B
24	A	**51**	C
25	E	**52**	B
26	E	**53**	D
27	C		

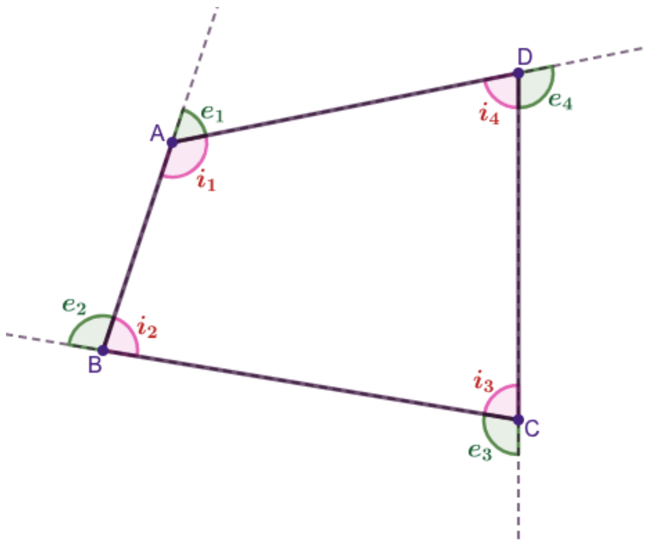
QUADRILÁTEROS

RONAEBSON
MATEMÁTICA CRIATIVA

Quadriláteros

Definição: Dados quatro pontos A, B, C e D distintos num mesmo plano e, três a três consecutivos, não colineares, chamamos de quadrilátero a reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, de modo que esses segmentos interceptam-se apenas nas extremidades.

Em outras palavras, os quadriláteros são figuras geométricas planas formadas por quatro segmentos de retas que se encontram nas extremidades.

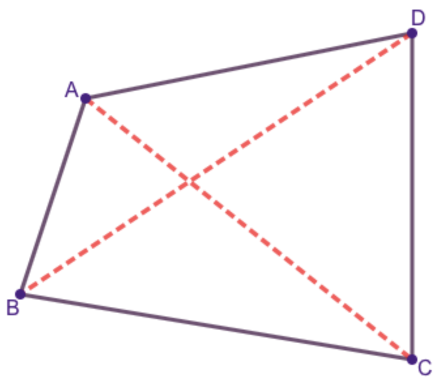


Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$
Vértices: A, B, C e D
Ângulos internos: i_1, i_2, i_3 e i_4.
Ângulos externos: e, e_2, e_3 e e_4.
Perímetro: $AB + BC + CD + DA$

É fácil ver que a soma de um ângulo interno com o seu respectivo ângulo externo é sempre igual a 180º:

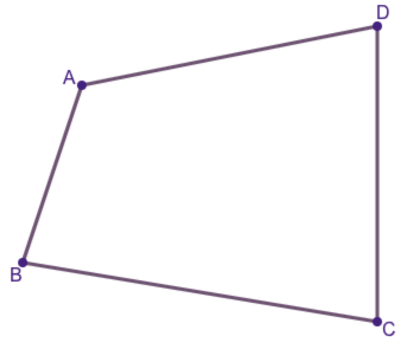
$$\boldsymbol{i + e = 180^o}.$$

A diagonal de um quadrilátero é segmento de reta que une dois vértices não consecutivos. O quadrilátero ABCD possui duas diagonais que são os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

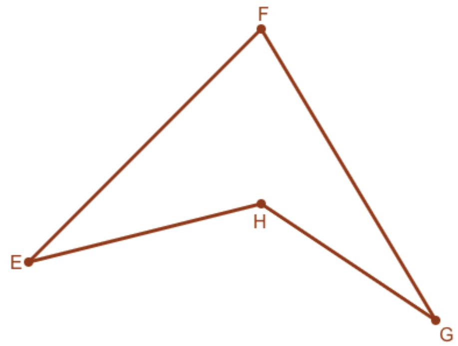


Um quadrilátero pode ser classificado como convexo ou côncavo.

O quadrilátero será dito convexo se ao tomarmos dois pontos internos quaisquer, o segmento de reta que os une estiver contido no quadrilátero. Caso contrário, o quadrilátero será dito côncavo. De maneira alternativa, um quadrilátero será convexo se a reta que contém qualquer um de seus lados deixa todos os demais lados num mesmo semiplano.

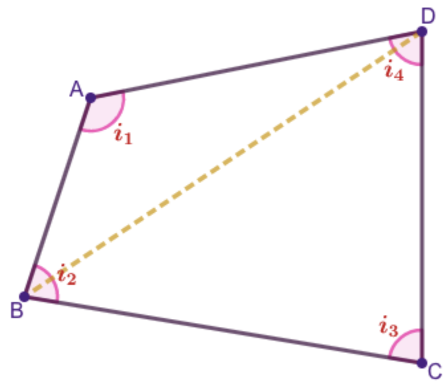


ABCD é um quadrilátero convexo



EFGH é um quadrilátero côncavo

Observe agora que um quadrilátero convexo pode ser dividido, a partir de um de seus vértices em dois triângulos, logo a soma de seus ângulos internos é igual a 360º.



$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 2 \cdot 180^o = 360^o$$

Além disso, tomando como referência a primeira imagem desse capítulo, temos:

$$i_1 + e_1 = 180^o$$
$$i_2 + e_2 = 180^o$$
$$i_3 + e_3 = 180^o$$
$$i_4 + e_4 = 180^o$$

Agora, somando membro a membro as equações acima, temos que:

$$\underbrace{i_1 + i_2 + i_3 + i_4}_{360^o} + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 720^o$$

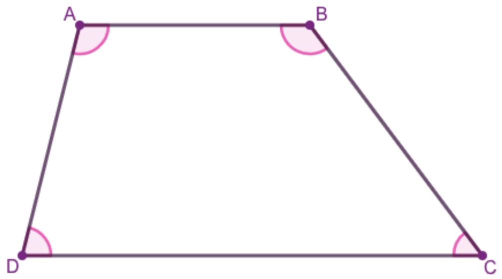
$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 360^o$$

ou seja, a soma dos ângulos externos de um quadrilátero também é sempre 360º.

Quadriláteros Notáveis

Trapézio

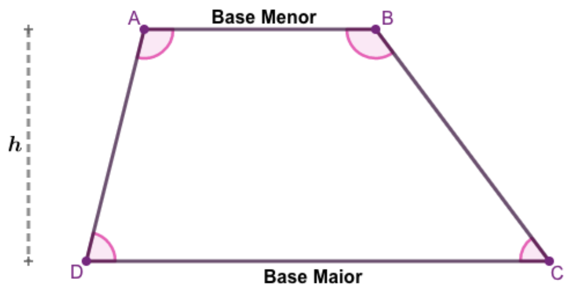
Um quadrilátero convexo é dito um trapézio se, e somente se, possui dois lados opostos paralelos.



$\overline{AB}$: Base Menor
$\overline{CD}$: Base Maior
$\overline{AD}$ e $\overline{BC}$: são os lados não base
$\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$: são os ângulos internos

Obs.: Vamos considerar aqui que o trapézio possui exatamente um par de lados paralelos. Mas existem literaturas que consideram que se tiver os dois pares de lados paralelos também é trapézio.

A distância entre as bases é denominada altura do trapézio.

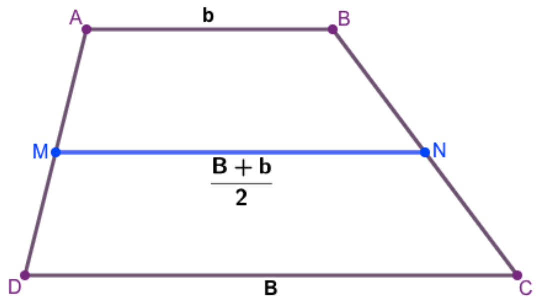


Em virtude do paralelismo das bases, temos:

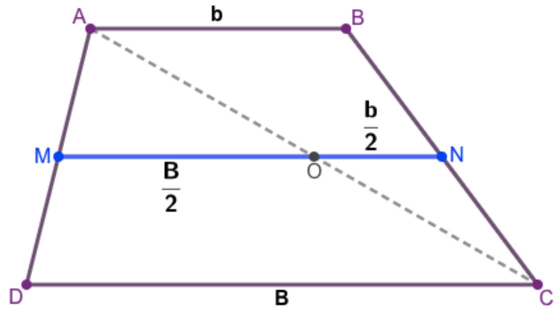
$$\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180^o$$

Base Média

A base média de um trapézio é o segmento de reta que liga os pontos médios dos lados não base e sua medida é igual à média aritmética entre as bases.



Para provarmos esse resultado, basta traçarmos a diagonal $\overline{AC}$ e perceber que os segmentos $\overline{MO}$ e $\overline{NO}$ são as bases médias dos triângulos ADC e CAB, respectivamente.



Assim:

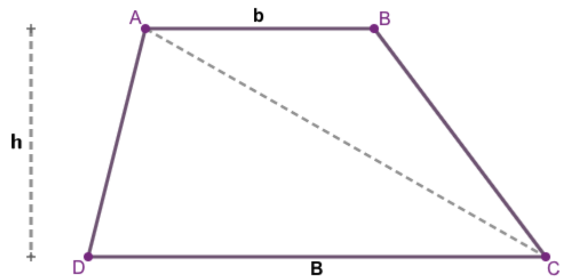
$$MO = \frac{B}{2} \text{ e } NO = \frac{b}{2},$$

logo

$$MN = \frac{B}{2} + \frac{b}{2} \Rightarrow \boldsymbol{MN = \frac{B+b}{2}}$$

Área do Trapézio

Para calcularmos a área do trapézio, basta dividi-lo em dois triângulos a partir de uma das diagonais. Veja:



Como os triângulos têm a mesma altura do trapézio, temos:

$$A_{Trapézio} = A_{ADC} + A_{CAB}$$

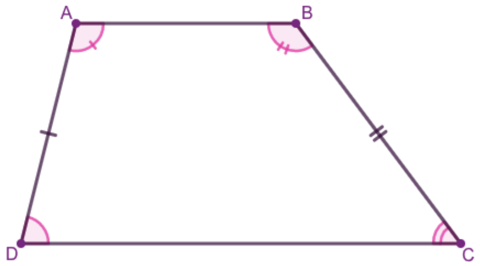
$$A_{Trapézio} = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2}$$

$$\boldsymbol{A_{Trapézio} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}}$$

Classificação

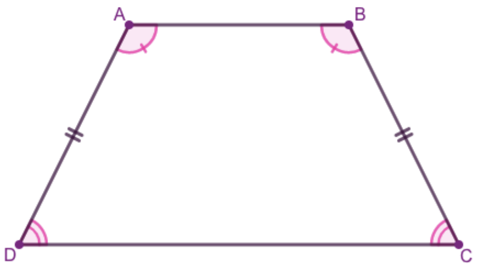
Os trapézios podem ser classificados como:

A) Trapézio Escaleno: os lados não base possuem medidas diferentes.



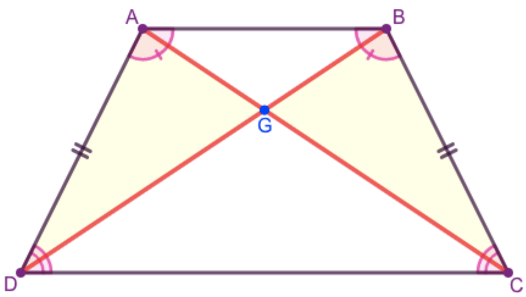
Como consequência, os ângulos de uma mesma base também possuem medidas diferentes.

B) Trapézio Isósceles: os lados não base são congruentes.



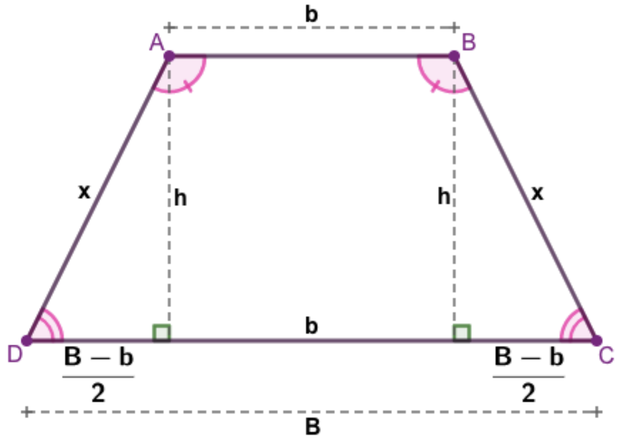
Observe que $AD = BC$ e, consequentemente, $\hat{A} = \hat{B}$ e $\hat{C} = \hat{D}$.

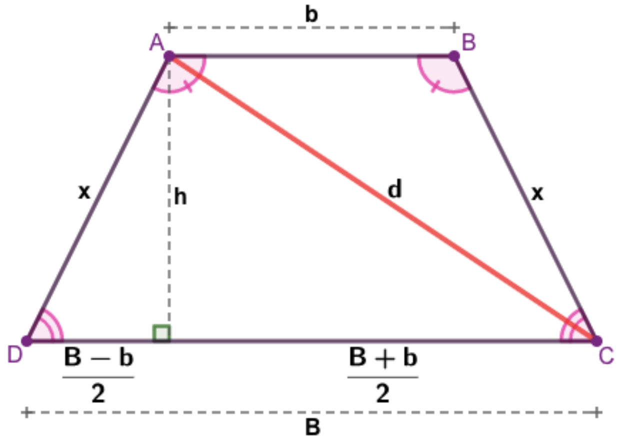
Também verificamos, por congruência de triângulos, que as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.



Veja na figura acima que $AC = BD$, além disso, percebemos que os triângulos AGD e BGC são congruentes e os triângulos ABG e CDG são semelhantes (proporcionais), fatos que podem ser muito úteis na resolução dos problemas.

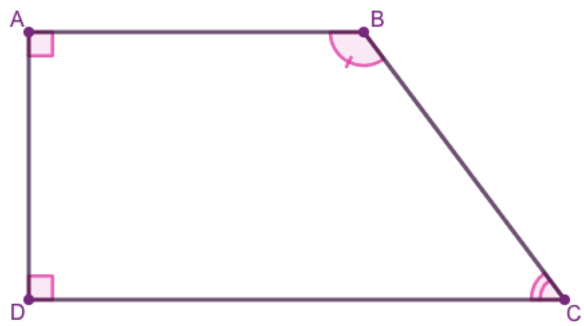
Observe também que podemos fazer as seguintes decomposições num trapézio isósceles:





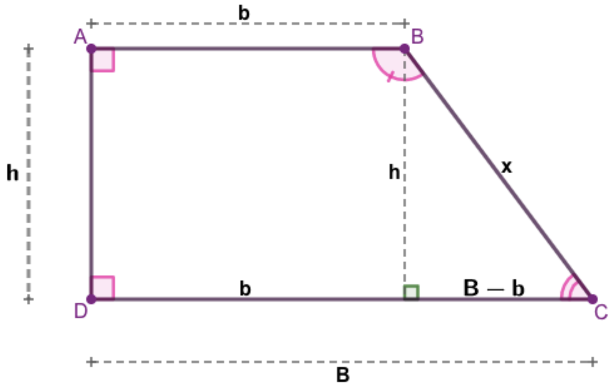
Veja que ao aplicarmos o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos que aparecem, obtemos, de maneira muito natural, várias relações entre os elementos do trapézio isósceles.

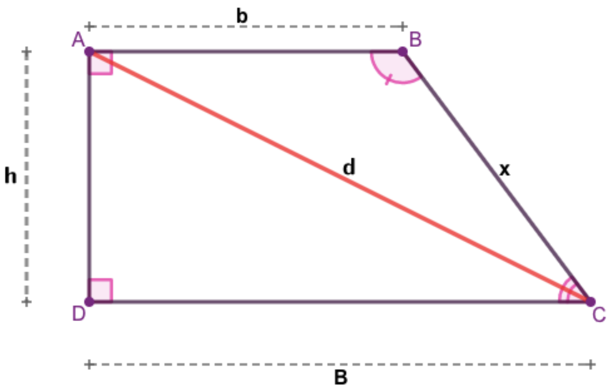
C) Trapézio Retângulo: possui um ângulo reto.



Perceba que o lado $\overline{AD}$ do trapézio é perpendicular às bases.

Observe também que podemos fazer as seguintes decomposições num trapézio retângulo:





Note que ao aplicarmos o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos que surgiram, obtemos, de maneira muito natural, várias relações entre os elementos do trapézio retângulo.

PARALELOGRAMO

Um quadrilátero convexo é dito um paralelogramo se, e somente se, os lados opostos forem paralelos.

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

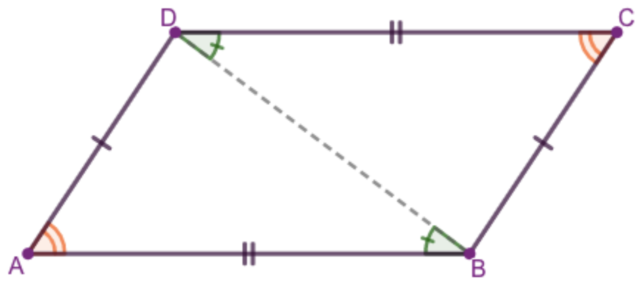
Em virtude do paralelismo entre os lados opostos, temos que

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{C} = \hat{C} + \hat{D} = \hat{D} + \hat{A} = 180^o$$

e, consequentemente, *os ângulos opostos do paralelogramo são congruentes*, ou seja,

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \hat{\boldsymbol{C}} \text{ e } \hat{\boldsymbol{B}} = \hat{\boldsymbol{D}}.$$

Observe agora que, ao traçarmos uma das diagonais, dividimos o paralelogramo em dois triângulos congruentes:

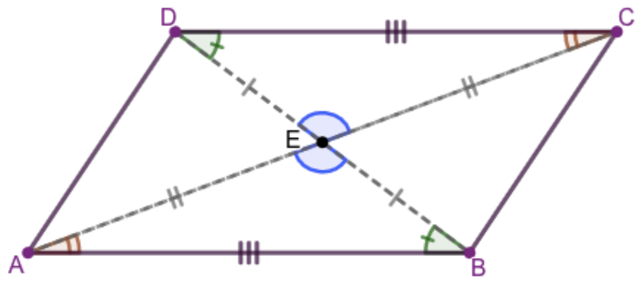


$$\Delta ABD \equiv \Delta CDB$$

Concluímos, portanto, que *os lados opostos de um paralelogramo são congruentes*, isto é,

$$\boldsymbol{AB = CD} \text{ e } \boldsymbol{AD = BC}$$

Ainda usando congruência de triângulos, podemos mostrar que *as diagonais de um paralelogramo se dividem ao meio*.

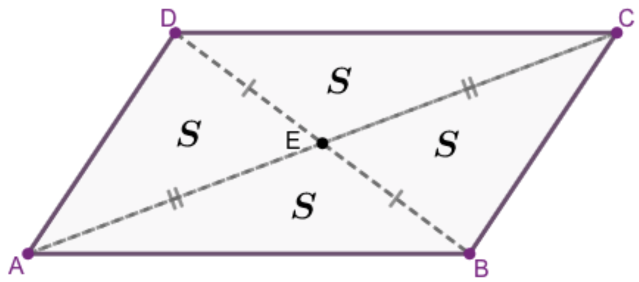


Lembrando que a mediana de um triângulo o divide em dois outros de mesma área, temos:

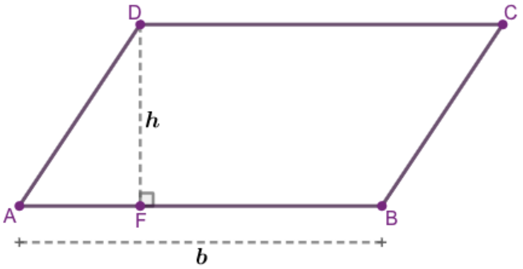
- $\overline{CE}$ é mediana do triângulo BCD, logo
  $$A_{BCE} = A_{DCE}$$
- $\overline{DE}$ é mediana do triângulo ADC, logo
  $$A_{ADE} = A_{CDE}$$
- $\overline{AE}$ é mediana do triângulo BAD, logo
  $$A_{ADE} = A_{ABE}$$
- $\overline{BE}$ é mediana do triângulo BCA, logo
  $$A_{BAE} = A_{BCE}$$

Sendo assim, *as diagonais de um paralelogramo o dividem em quatro triângulos de mesma área*.

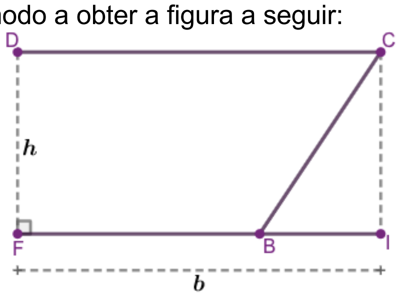
$$\boldsymbol{A_{ABE} = A_{BCE} = A_{CDE} = A_{DAE} = S}$$



Área do Paralelogramo



Perceba que, em virtude do paralelismo dos lados opostos, podemos deslocar o triângulo ADF ($ADF \equiv BCI$) de modo a obter a figura a seguir:



Assim, a área de um paralelogramo é igual a área de um retângulo de mesma base e mesma altura. Portanto:

$$\boldsymbol{A_{Paralelogramo} = b \times h}$$

RETÂNGULO

Um quadrilátero convexo é dito um retângulo se, e somente se, todos os ângulos forem congruentes.

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^o$$

Note que os lados consecutivos são perpendiculares entre si e, em virtude desse perpendicularismo, temos que os lados opostos do retângulo são paralelos, logo, *todo retângulo é um paralelogramo*. Sendo assim, todas as propriedades válidas num paralelogramo são também válidas no retângulo, ou seja:

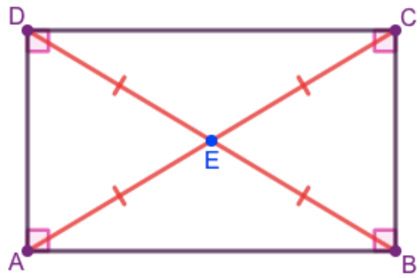
- Os lados opostos são paralelos e congruentes.

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{ e } \overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

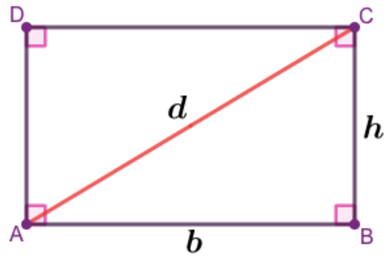
$$\overline{AB} = \overline{CD} \text{ e } \overline{AD} = \overline{BC}$$

- As diagonais se dividem ao meio.
- As diagonais de um retângulo o dividem em quatro triângulos de mesma área.

Em particular, temos que *as diagonais do retângulo são congruentes entre si*, fato que pode ser observado por congruência de triângulos.



A diagonal do retângulo pode ser obtida aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, por exemplo, assim:



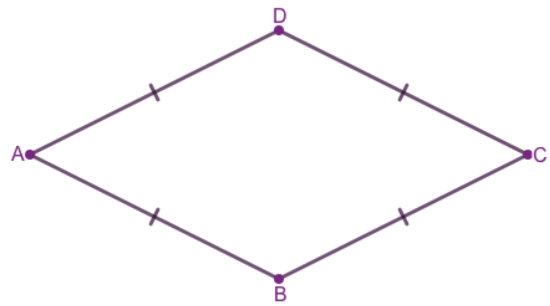
$$d^2 = b^2 + h^2 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{d = \sqrt{b^2 + h^2}}$$

Área do Retângulo

$$\boldsymbol{A_{Retângulo} = b \times h}$$

LOSANGO

Um quadrilátero convexo é dito um losango se, e somente se, todos os lados forem congruentes.



$$AB = BC = CD = DC$$

Como os lados opostos são congruentes, temos que todo losango é um paralelogramo. Sendo assim, todas as propriedades válidas num paralelogramo são também válidas no losango, ou seja:

- Os lados opostos são paralelos.

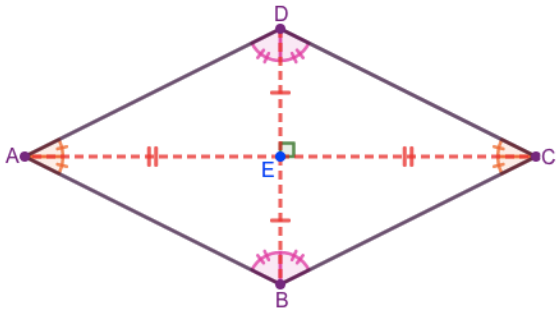
$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{ e } \overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

- Os ângulos opostos são congruentes.

$$\hat{A} = \hat{C} \;\; e \;\; \hat{B} = \hat{D}$$

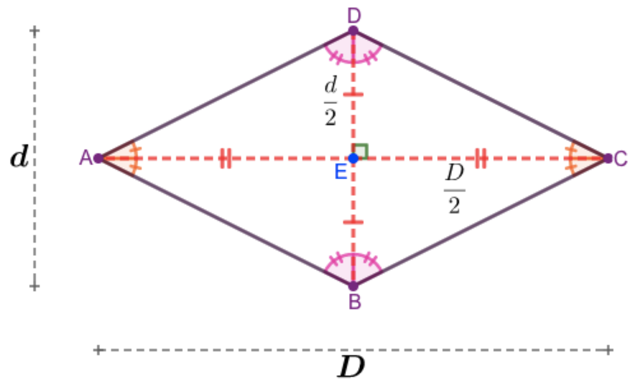
- As diagonais se dividem ao meio.
- As diagonais de um losango o dividem em quatro triângulos de mesma área.

Em particular, temos que *as diagonais do losango são perpendiculares si e são bissetrizes dos seus ângulos*, fato que pode ser observado por congruência de triângulos.



☞ **Área do Losango**

O losango está dividido por suas diagonais em quatro triângulos congruentes.



Assim:

$$A_{Losango} = 4 \cdot A_{\Delta} \quad \Longrightarrow \quad A_{Losango} = 4 \cdot \frac{\frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2}}{2}$$

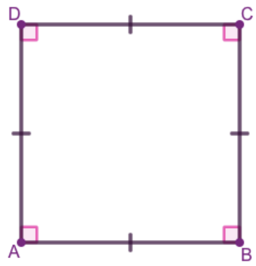
$$\boldsymbol{A_{Losango} = \frac{D \cdot d}{2}}$$

ou seja, a área de um losango é igual ao semiproduto das medidas de suas diagonais.

Você também pode perceber que uma relação entre o lado do losango e suas diagonais pode ser obtida aplicando o Teorema de Pitágoras num dos triângulos retângulos gerados.

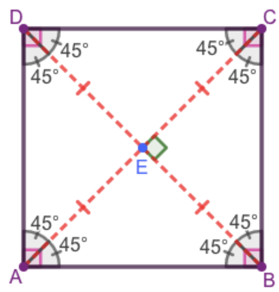
QUADRADO

Um quadrilátero convexo é dito um quadrado se, e somente se, todos os lados e todos os ângulos forem congruentes.

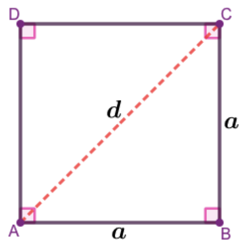


Observe que, como o quadrado tem todos os ângulos congruentes, ele é um retângulo e como ele tem todos os lados congruentes, ele também é um losango e, portanto, todo quadrado é um paralelogramo. Isso significa que todas as propriedades válidas no paralelogramo, no retângulo e no losango serão válidas também no quadrado.

- Os lados opostos são paralelos.
  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
- As diagonais se dividem ao meio.
- As diagonais são congruentes entre si.
- As diagonais são perpendiculares entre si.
- As diagonais são bissetrizes dos seus ângulos.
- As diagonais de um quadrado o dividem em quatro triângulos de mesma área.



A diagonal do quadrado pode ser obtida aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, por exemplo, assim:



$$d^2 = a^2 + a^2 \quad \Longrightarrow \quad d^2 = 2a^2$$

$$d = a\sqrt{2}$$

☞ **Área do Quadrado**

$$A_{Quadrado} = a \times a$$

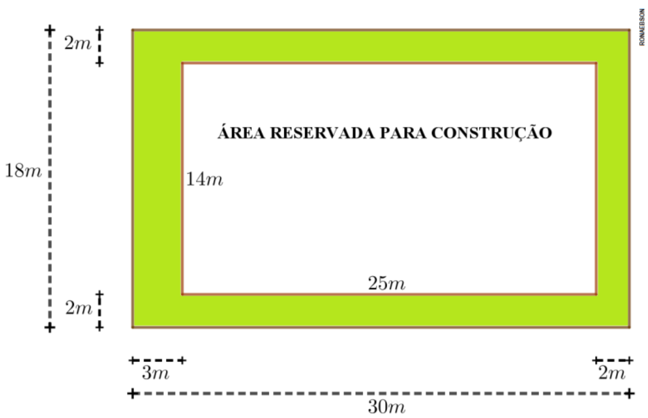
$$\boldsymbol{A_{Quadrado} = a^2}$$

Problema 01: (Ronaebson) O regimento interno de um condomínio horizontal prevê a valorização de áreas verdes, de modo que, além das áreas comuns, cada terreno retangular onde serão construídas as residências terá um jardim ao seu redor. Em cada terreno deverão ser reservados, no mínimo, três metros na frente, dois metros no fundo e dois metros em cada lateral para jardinagem, conforme ilustra a figura a seguir.

Sabendo que o terreno tem 18m de largura por 30 metros de comprimento, a área do espaço destinado à jardinagem é de no mínimo

Ⓐ $120\ m^2$.
Ⓑ $190\ m^2$.
Ⓒ $210\ m^2$.
Ⓓ $350\ m^2$.
Ⓔ $540\ m^2$.

Solução:



A área total do terreno é

$$A_T = 18 \times 30 = 540m^2,$$

enquanto que a área máxima reservada para a construção da casa é

$$A_C = 14 \times 25 = 350m^2.$$

Logo, a área do espaço reservado para a jardinagem é de no mínimo

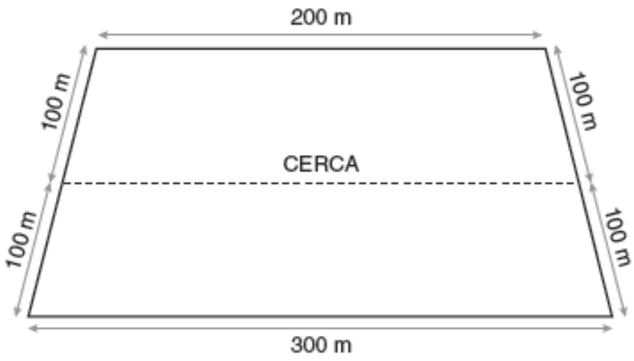
$$A_J = 540 - 350 = 190m^2.$$

Resposta: [B]

Hora de Praticar

Questão 01

Genário e Gervásia receberam por herança um terreno de forma trapezoidal e, após acertarem como seria a divisão dele, resolveram colocar uma cerca limítrofe, como mostrada na figura a seguir:



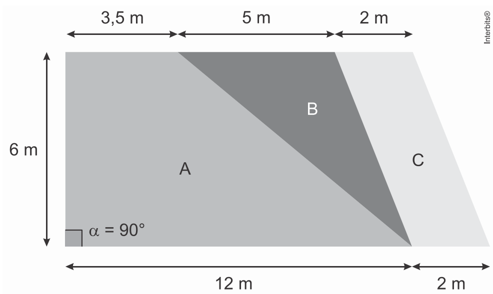
Dadas as dimensões do terreno, a cerca terá um comprimento de

Ⓐ 100 m.
Ⓑ 150 m.
Ⓒ 200 m.
Ⓓ 250 m.
Ⓔ 300 m.

Questão 02

(IFSP_2017)

Observe a figura abaixo.



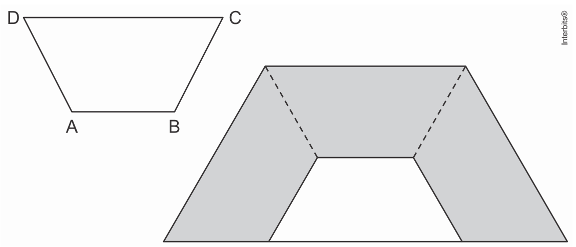
A figura representa a divisão de um terreno; o proprietário pretende vender somente a área B. Sabe-se que o valor de venda do m^2 é de $R\$\ 2.000{,}00$. Após a venda e retirada da área B da figura, assinale a alternativa que apresenta, respectivamente, o valor da venda da área B e quanto sobrou da área do terreno para o proprietário.

Ⓐ R$30.000,00 / 58, 5 m^2.
Ⓑ R$60.000,00 / 73,5 m^2.
Ⓒ R$15.000,00 / 42,0 m^2.
Ⓓ R$18.000,00 / 46,5 m^2.
Ⓔ R$45.000,00 / 61,5 m^2.

Questão 03

(CFTMG_2019)

A região sombreada da figura é formada pela junção de três trapézios congruentes ao trapézio isósceles ABCD.

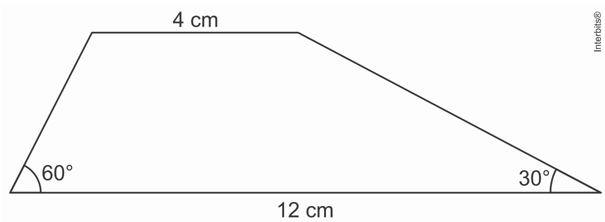


Sendo o perímetro do trapézio ABCD igual a 30 m e a soma das medidas das bases igual a 20 m, o perímetro da região sombreada, em m, é igual a

Ⓐ 45.
Ⓑ 60.
Ⓒ 70.
Ⓓ 90.

Questão 04

(UEFS)



O trapézio representado na figura tem bases medindo 12 cm e 4 cm, e os ângulos internos da base maior medem 60º e 30º.

Seu perímetro, em cm, é igual a

Ⓐ $16 + 4\sqrt{2}$
Ⓑ $16 + 4\sqrt{3}$
Ⓒ $20 + 3\sqrt{2}$
Ⓓ $20 + 4\sqrt{2}$
Ⓔ $20 + 4\sqrt{3}$

Questão 05

(UECE_2018)

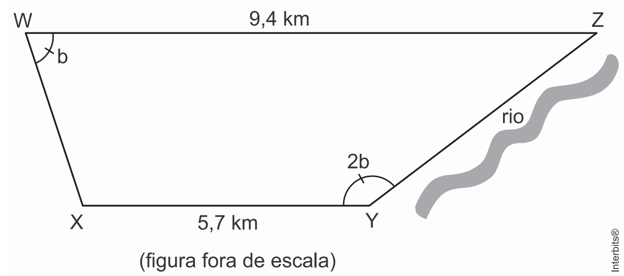
No quadrilátero XYZW as medidas dos ângulos internos Z e W são respectivamente 128 graus e 76 graus. Se as bissetrizes dos ângulos internos X e Y cortam-se no ponto O, pode-se afirmar corretamente que a medida do ângulo XÔY é igual a

Ⓐ 156 graus.
Ⓑ 78 graus.
Ⓒ 204 graus.
Ⓓ 102 graus.

Questão 06

(UNESP)

Uma certa propriedade rural tem o formato de um trapézio como na figura. As bases WZ e XY do trapézio medem 9,4 km e 5,7 km, respectivamente, e o lado YZ margeia um rio.



(figura fora de escala)

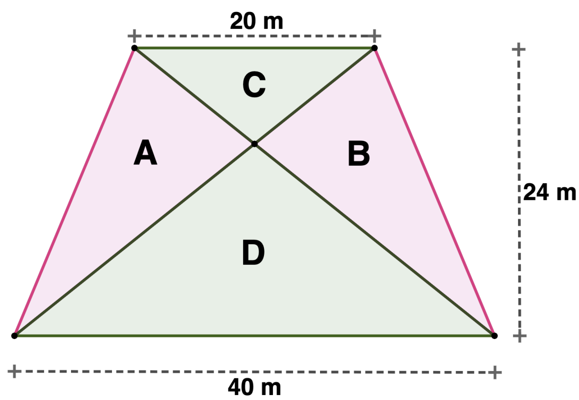
Se o ângulo XYZ é o dobro do ângulo XWZ, a medida, em km, do lado YZ que fica à margem do rio é:

Ⓐ 7,5.
Ⓑ 5,7.
Ⓒ 4,7.
Ⓓ 4,3.
Ⓔ 3,7.

Questão 07

(Ronaebson)

Dona Izabel tem uma área em sua propriedade destinada a um grande e lindo jardim. Essa área tem a forma de um trapézio isósceles com base menor medindo 20m, base maior medindo 40m e com 24 metros de altura.



As áreas A e B são destinadas ao cultivo de rosas e as áreas C e D são reservadas a um gramado.

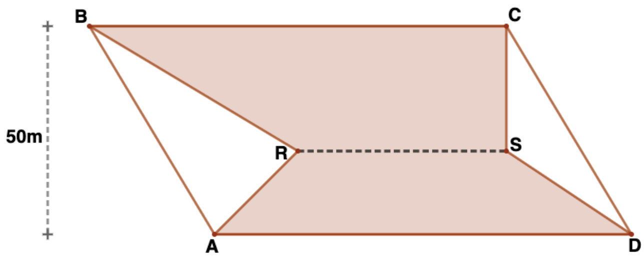
A área total destinada ao cultivo de rosas é igual a

Ⓐ $80\ m^2$.
Ⓑ $160\ m^2$.
Ⓒ $320\ m^2$.
Ⓓ $400\ m^2$.
Ⓔ $720\ m^2$.

Questão 08

(Ronaebson)

Matheus tem uma área rural na forma de um paralelogramo ABCD de altura 50m e base AD medindo 100m. Ele decidiu queimar toda a vegetação correspondente a região poligonal ARBCSD, como indicada na figura.



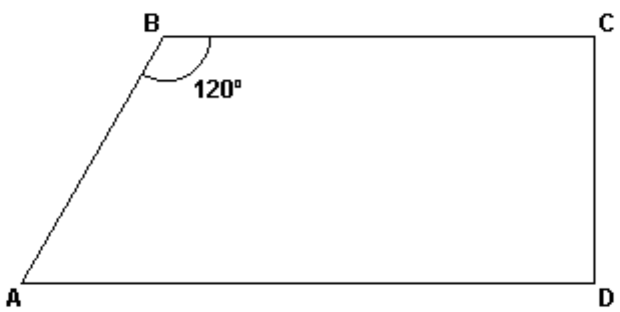
Dado que o segmento RS tem 50m de comprimento e é paralelo aos lados AD e BC do paralelogramo, tem-se que a área a ser queimada é de

Ⓐ $1250\ m^2$.
Ⓑ $2500\ m^2$.
Ⓒ $3750\ m^2$.
Ⓓ $4500\ m^2$.
Ⓔ $5000\ m^2$.

Questão 09

(UFMG)

Esta figura representa o quadrilátero ABCD:



Sabe-se que
- AB = 1 cm e AD = 2 cm;
- o ângulo ABC mede 120º; e
- o segmento CD é perpendicular aos segmentos AD e BC.

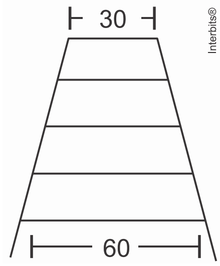
Então, é CORRETO afirmar que o comprimento do segmento BD é

Ⓐ $\sqrt{3}\ cm$.
Ⓑ $\frac{\sqrt{5}}{2}\ cm$.
Ⓒ $2\sqrt{3}\ cm$.
Ⓓ $\sqrt{2}\ cm$.

Questão 10

(ENEM)

Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme a figura:



Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em cm, deve ser:

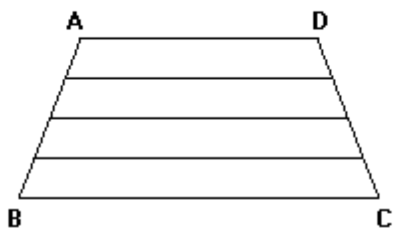
Ⓐ 144.
Ⓑ 180.
Ⓒ 210.
Ⓓ 225.
Ⓔ 240.

Questão 11

(Ronaebson)

Na figura tem-se o trapézio isósceles ABCD no qual as bases medem 15 cm e 27 cm.

Os lados AB e CD foram divididos em 4 partes iguais, e pelos pontos de divisão, foram traçados 3 segmentos paralelos às bases. A soma das medidas dos três segmentos traçados é, em centímetros,



Ⓐ 52
Ⓑ 58
Ⓒ 59
Ⓓ 61
Ⓔ 63

Questão 12

(IFPE_2018)

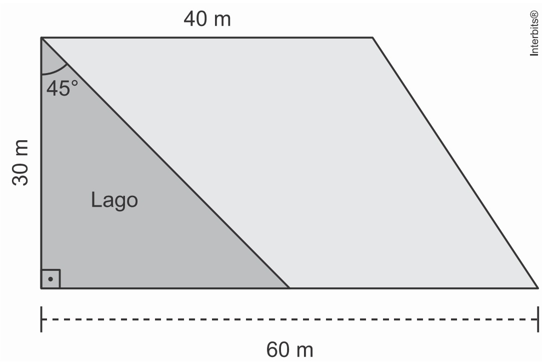
Os alunos do curso de Agricultura do campus Vitória de Santo Antão dispõem de um terreno em forma de trapézio para construir uma horta de orgânicos. As bases do trapézio medem 10 m e 35 m. Já os lados não paralelos medem 15 m e 20 m. Qual a área total do terreno desta horta em m^2?

Ⓐ 120.
Ⓑ 150.
Ⓒ 210
Ⓓ 270.
Ⓔ 540.

Questão 13

(FEEVALE_2017

Supondo que, na praça representada pela figura a seguir, houve uma manifestação e que, para calcular o número de pessoas presentes, foi utilizado o número de quatro pessoas por metro quadrado ocupado, determine o número de pessoas presentes no ato, considerando que no lago não havia ninguém, mas o restante da praça estava ocupado.

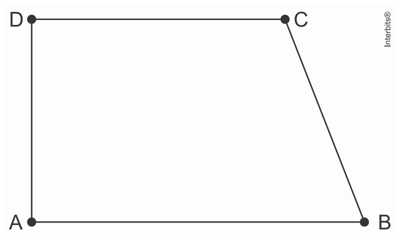


Ⓐ 640 pessoas.
Ⓑ 1.240 pessoas.
Ⓒ 4.200 pessoas.
Ⓓ 4.800 pessoas.
Ⓔ 6.000 pessoas.

Questão 14

(CPS_2018)

O trapézio retângulo ABCD da figura representa a superfície de um reservatório de água.
Na figura, tem-se que:



AB = 20 m;
CD = 15 m;
AD = 12 m;

o ângulo $D\hat{A}B$ é reto.

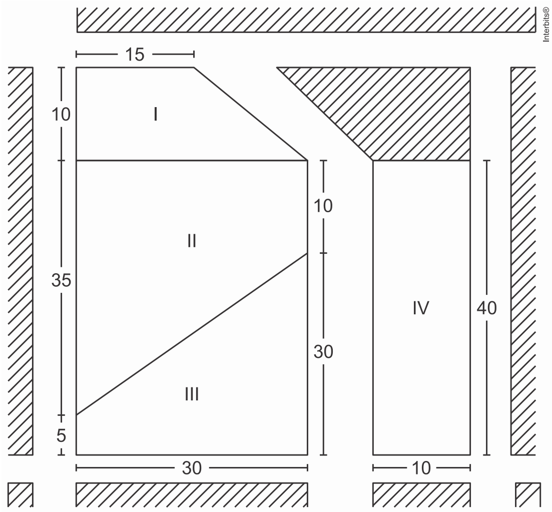
Se, por uma questão de segurança, o reservatório precisa ser cercado, então o comprimento dessa cerca será, em metros, de

Ⓐ 60.
Ⓑ 59.
Ⓒ 58.
Ⓓ 57.
Ⓔ 56.

Questão 15

(CFMTG_2019)

Observe a planta a seguir que representa parte do loteamento de um condomínio residencial.



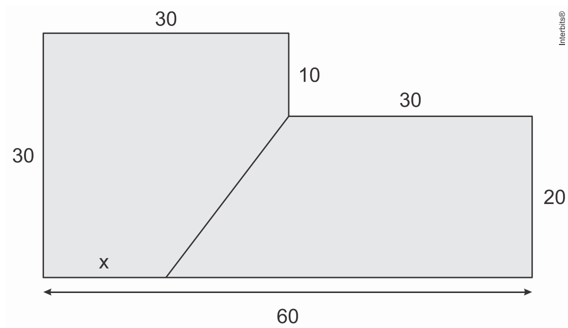
Uma empresa está vendendo os quatro lotes restantes, completamente arborizados. A política de loteamento da região determina que 10% da área de cada lote deve ser preservada com a mata nativa. Uma pessoa que deseja comprar o lote com a menor área de reserva deverá escolher o de número

Ⓐ I.
Ⓑ II.
Ⓒ III.
Ⓓ IV.

Questão 16

(ESPM_2018)

O terreno mostrado na figura abaixo, cujas medidas estão expressas em metros, foi dividido em dois lotes de mesma área.



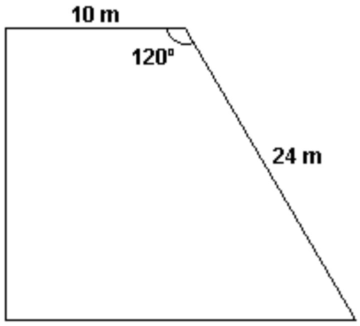
A medida x, em metros, é igual a:

Ⓐ 11
Ⓑ 12
Ⓒ 13
Ⓓ 14
Ⓔ 15

Questão 17

(UFPR)

Uma pessoa pretende adquirir um terreno de esquina para construir sua casa, porém ela não sabe a área do terreno. As únicas informações disponíveis são que o terreno possui o formato de um trapézio retângulo com um dos lados medindo 10 m e outro medindo 24 m. Além disso, o ângulo entre esses lados é de 120 graus, conforme a figura abaixo. Qual é a área desse terreno? Considere $\sqrt{3} = 1{,}73$.

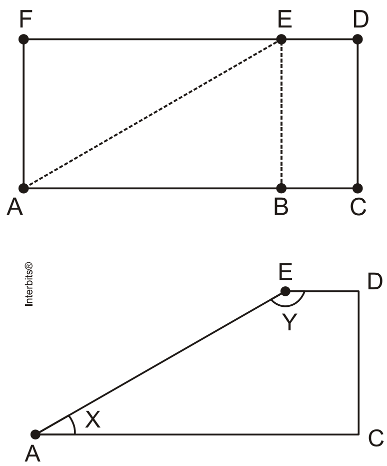


- **A** 314,32 m^2
- **B** 346,54 m^2
- **C** 360,58 m^2
- **D** 308,70 m^2
- **E** 332,16 m^2

Questão 18

(CFTMG)

Uma folha retangular de papel ofício de medidas 287 x 210 mm foi dobrada conforme a figura.



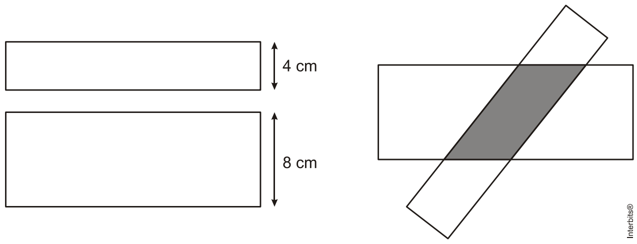
Os ângulos $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ resultantes da dobradura medem, respectivamente, em graus

- **A** 40 e 90.
- **B** 40 e 140.
- **C** 45 e 45.
- **D** 45 e 135.

Questão 19

(UPE)

Dois retângulos foram superpostos, e a intersecção formou um paralelogramo, como mostra a figura abaixo:



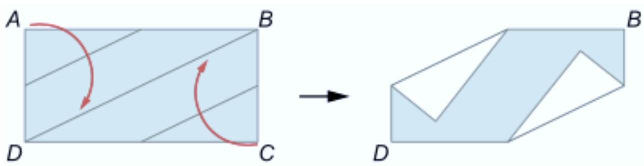
Sabendo-se que um dos lados do paralelogramo mede 4,5 cm, quanto mede a área desse paralelogramo?

- **A** 12 cm^2
- **B** 16 cm^2
- **C** 24 cm^2
- **D** 32 cm^2
- **E** 36 cm^2

Questão 20

(Ronaebson)

Uma folha de cartolina na forma de um retângulo ABCD, de 20 cm por 40 cm, tem uma face azul e o verso branco. Duas dobras foram feitas nessa cartolina, levando-se os pontos A e C sobre a diagonal BD, de modo que as dobras ficaram paralelas a essa diagonal, como descrito na figura a seguir.



Qual a área da região azul visível após as dobras?

- **A** 100 cm^2.
- **B** 200 cm^2.
- **C** 400 cm^2.
- **D** 600 cm^2.
- **E** 800 cm^2.

Questão 21

(UECE_2019)

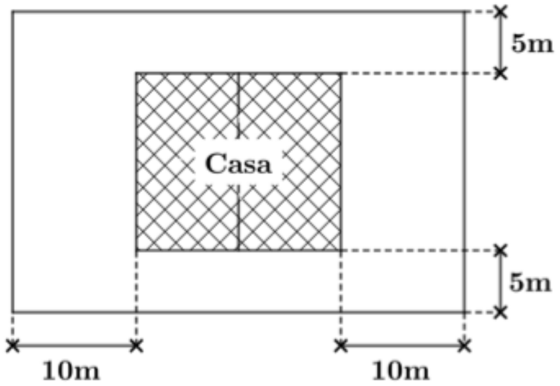
José somou as medidas de três dos lados de um retângulo e obteve 40 cm. João somou as medidas de três dos lados do mesmo retângulo e obteve 44 cm. Com essas informações, pode-se afirmar corretamente que a medida, em cm, do perímetro do retângulo é

- **A** 48.
- **B** 52.
- **C** 46.
- **D** 56.

Questão 22

(Ronaebson)

Matheus tem um terreno retangular com 1360 m^2 de área e deseja construir uma casa térrea numa área retangular de 480 m^2, conforme indicado na figura a seguir.



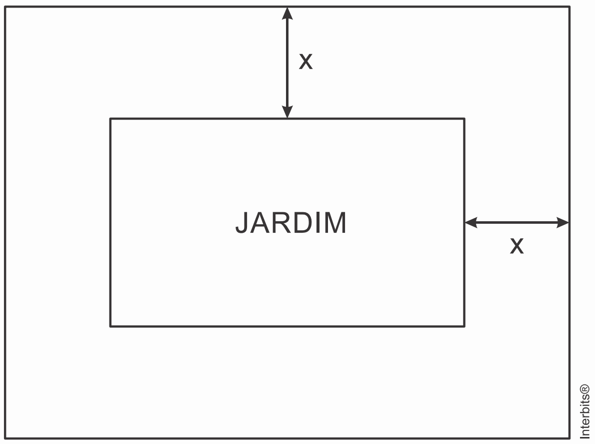
Sabendo que ambas as dimensões da casa são inferiores a 30 m, o perímetro do terreno é igual a

Ⓐ 88 m.
Ⓑ 116 m.
Ⓒ 148 m.
Ⓓ 176 m.
Ⓔ 224 m.

Questão 23

(PUCRJ_2018)

Um terreno de 120 m^2 contém um jardim central de 8 m x 10 m. Em volta do jardim, existe uma calçada de largura X, conforme a figura abaixo:



Qual é o valor de X, em metros?

Ⓐ 1
Ⓑ 3
Ⓒ 5
Ⓓ 10
Ⓔ 11

Questão 24

(Ronaebson)

Para aqueles que se movem com o auxílio de uma cadeira de rodas, acessibilidade significa ter a capacidade de se locomover livremente, por toda a casa, sem obstáculos como degraus ou portas estreitas. As casas mais antigas não foram construídas com esse tipo de acessibilidade, e devem ser modificadas para acomodar as necessidades do portador de deficiência.

Disponível em: https://www.ehow.com.br/sobre-largura-porta-acesso-cadeirantes-estrategia_66019/
Acesso em 07/09/2021

Um microempresário recebeu sugestões de seus clientes cadeirantes para que na nova loja fosse aumentada a largura das portas para que suas cadeiras pudessem transitar com mais facilidade. Em consulta ao seu designer notou que tinha que aumentar a largura delas em 1/9, preservando suas espessuras.

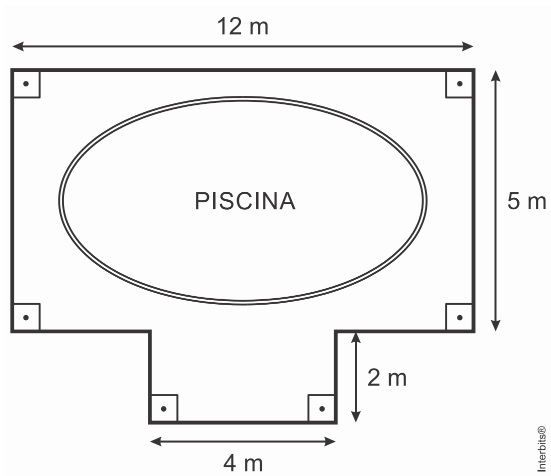
Com o objetivo de manter o custo com o material de cada porta, a altura precisou ser reduzida em

Ⓐ 9%.
Ⓑ 10%.
Ⓒ 11%.
Ⓓ 19%.
Ⓔ 90%.

Questão 25

(IFSP_2017)

Em uma pousada, foi reformada toda a área da piscina como mostra a figura abaixo.

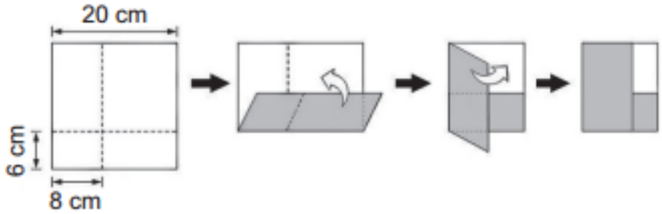


Assinale a alternativa que apresenta a medida da área da piscina em decímetros quadrados.

Ⓐ 60 decímetros quadrados.
Ⓑ 68 decímetros quadrados.
Ⓒ 680 decímetros quadrados.
Ⓓ 6.800 decímetros quadrados.
Ⓔ 68.000 decímetros quadrados.

Questão 26

Um quadrado de papel com 20 cm de lado, com a frente branca e o verso cinza, foi dobrado ao longo das linhas pontilhadas, como na figura.



Qual é a área da parte branca que ficou visível?

- **A** 18 cm^2.
- **B** 32 cm^2.
- **C** 36 cm^2.
- **D** 72 cm^2.
- **E** 84 cm^2.

Questão 27

(CFTMG_2018)

Em um lote retangular, murado, pretende-se construir um jardim que ocupe uma porção retangular com área igual a 60 m^2 conforme a figura 1. A área do jardim, não delimitada pelo muro, foi cercada, usando o modelo representado na figura 2, com estacas de 35 cm de largura, distantes 15 cm uma da outra.

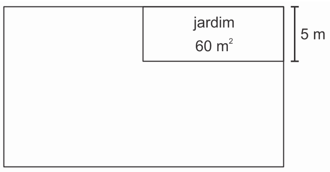


Figura 1 - Esboço do lote

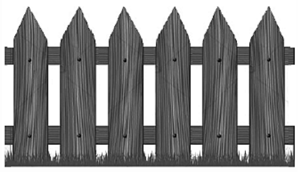


Figura 2 - Modelo da cerca

O número de estacas necessárias para cercar a área do jardim é

- **A** 23.
- **B** 24.
- **C** 33.
- **D** 34.
- **E** 36.

Questão 28

(FGV)

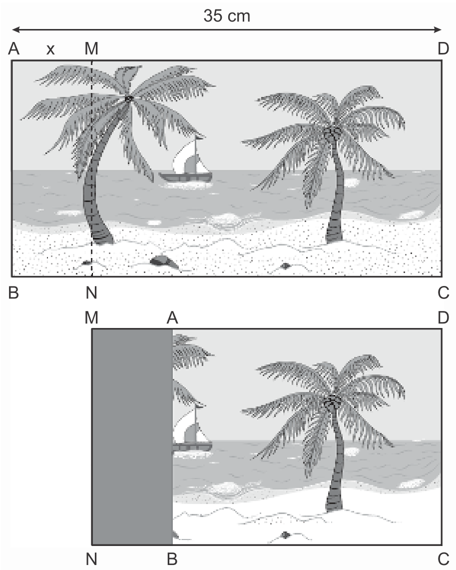
Uma folha de papel retangular dobrada ao meio no comprimento e na largura fica com 42 cm de perímetro. No entanto, se dobrada em três partes iguais no comprimento e em duas partes iguais na largura, fica com 34 cm de perímetro. O módulo da diferença das dimensões dessa folha é:

- **A** 12 cm
- **B** 10 cm
- **C** 9 cm
- **D** 8 cm
- **E** 6 cm

Questão 29

(ESPM_2018)

A gravura mostrada na figura abaixo foi dobrada na linha tracejada MN, a x cm da borda AB.



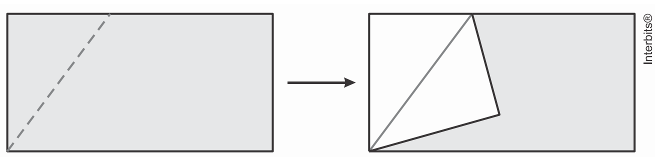
Sabendo-se que, depois da dobradura, a parte oculta da gravura representa 25% da parte visível, podemos afirmar que a medida x, em cm, é de:

- **A** 3,5
- **B** 6
- **C** 3
- **D** 4,5
- **E** 5

Questão 30

(UEFS_2018)

Uma folha de papel retangular de área 32 cm^2, colorida na frente e branca no verso, é dobrada ao longo de uma linha tracejada. Após essa dobra, a parte do verso da folha que fica visível tem a forma de um triângulo e a parte colorida que não ficou encoberta tem a forma de um pentágono, conforme mostra a figura.



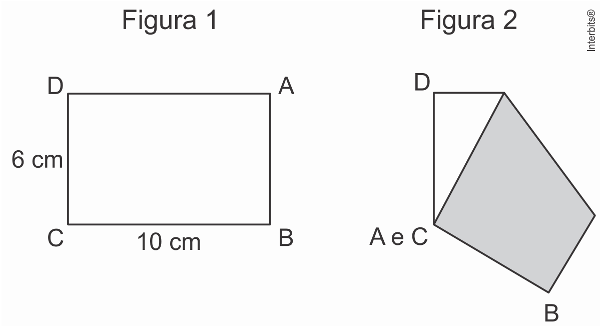
Dado que o perímetro desse pentágono é 24 cm, a diferença entre o maior e o menor lado dessa folha de papel é

- **A** 2 cm.
- **B** 3 cm.
- **C** 4 cm.
- **D** 5 cm.
- **E** 6 cm.

Questão 31

(PUCCAMP_2017)

Os lados de uma folha retangular ABCD de papel medem 10 cm e 6 cm, como indica a Figura 1. Essa folha, que é branca de um dos lados e cinza do outro, será dobrada perfeitamente de tal forma que o vértice A irá coincidir com o vértice C, como mostra a Figura 2.



A área do trapézio cinza indicado na Figura 2, em cm^2, é igual a

- **A** 23.
- **B** 30.
- **C** 25.
- **D** 40.
- **E** 45.

Questão 32

(UPE_2017)

Em torno de um canteiro retangular de 12 m de comprimento por 8 m de largura, pretende-se construir uma calçada. Qual deve ser a largura máxima dessa calçada, se o material disponível só é suficiente para cimentar uma área de 69 m^2?

- **A** 1,0 m
- **B** 1,5 m
- **C** 2,0 m
- **D** 2,5 m
- **E** 3,0 m

Questão 33

(CP2)

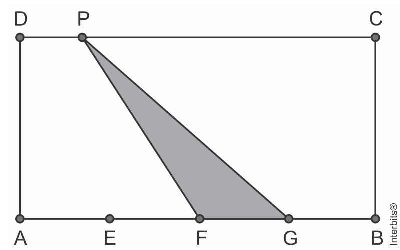
Após assistir ao programa *Ecoprático*, da TV Cultura, em que foi abordado o tema do aproveitamento da iluminação e da ventilação naturais do ambiente, Dona Maria decidiu ampliar a janela de sua cozinha. A janela retangular teve o seu comprimento dobrado e teve a sua altura aumentada em 50%, mantendo a forma retangular. Logo, a área da janela aumentou em

- **A** 100%.
- **B** 150%.
- **C** 200%.
- **D** 250%.
- **E** 300%.

Questão 34

(UFRGS-2018)

No retângulo ABCD a seguir, estão marcados os pontos E,F e G de forma que o lado AB está dividido em 4 partes iguais e P é um ponto qualquer sobre o lado DC.



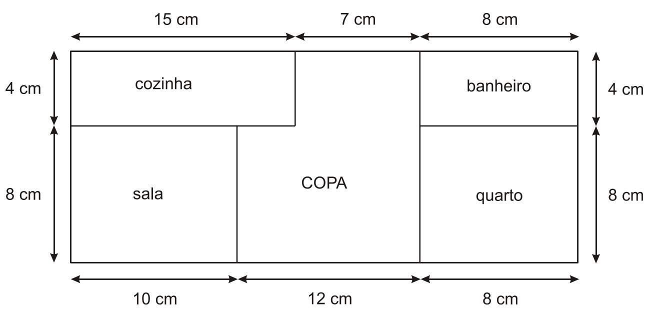
A razão entre a área do triângulo PFG e a área do retângulo ABCD é

- **A** $\frac{1}{8}$
- **B** $\frac{1}{6}$
- **C** $\frac{1}{4}$
- **D** $\frac{1}{2}$
- **E** 1

Questão 35

(UEMG)

A planta de uma residência, apresentada no desenho, a seguir, tem escala 1:80, ou seja, cada medida de 1 cm corresponde a uma medida de 80 cm na dimensão real.



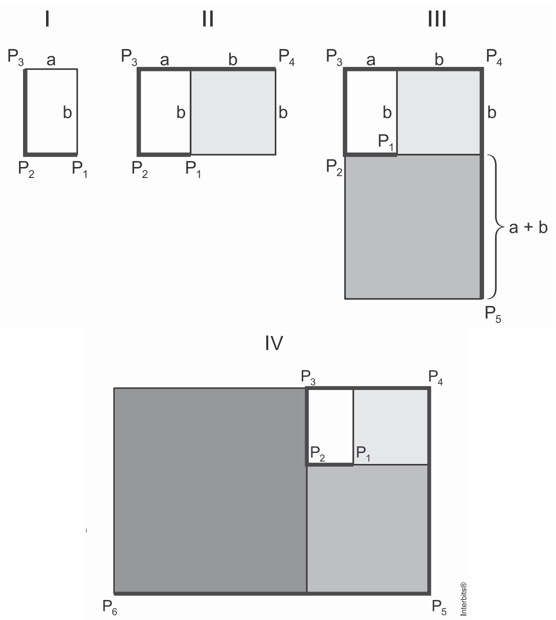
Considerando informações e ilustração, acima, só é CORRETO afirmar que a área real da parte ocupada pela copa é igual a

- **A** 75,01 m^2.
- **B** 79,36 m^2.
- **C** 86,12 m^2.
- **D** 90,4 m^2.

Questão 36

(UERJ)

Admitindo um retângulo cujos lados medem **a** e **b**, sendo a<b, é possível formar uma sequência ilimitada de retângulos da seguinte forma: a partir do primeiro, cada novo retângulo é construído acrescentando-se um quadrado cujo lado é igual ao maior lado do retângulo anterior, conforme ilustrado a seguir.



A figura IV destaca a linha poligonal $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, formada pelos lados dos retângulos, que são os elementos da sequência (a, b, a+b, a+2b, 2ª+3b).

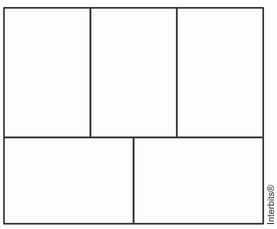
Mantendo o mesmo padrão de construção, o comprimento da linha poligonal $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$, de P_1 até o vértice P_7, é igual a:

- Ⓐ 5a+7b
- Ⓑ 8a+12b
- Ⓒ 13a+20b
- Ⓓ 21a+33b

Questão 37

(IFCE)

Um terreno com perímetro de 176 m é subdividido em 5 retângulos congruentes, como mostrado na figura a seguir.



O perímetro de qualquer um dos 5 retângulos congruentes vale, em m,

- Ⓐ 80.
- Ⓑ 76.
- Ⓒ 35,2.
- Ⓓ 84.
- Ⓔ 86.

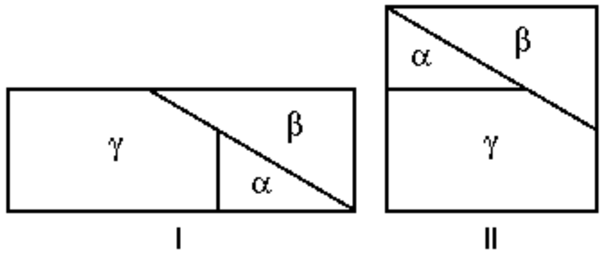
Questão 38

(UFMG)

Na Figura I, está representado um retângulo, cuja base mede 25 cm e cuja altura mede

9 cm. Esse retângulo está dividido nas regiões á, α e β.

Sem que haja qualquer superposição delas, essas regiões podem ser reagrupadas, formando um quadrado, como mostrado na Figura II.



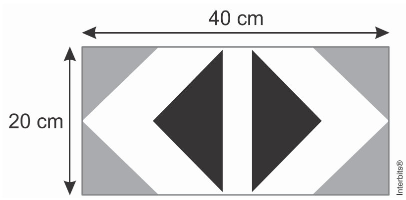
Então, é correto afirmar que a área da região á mede

- Ⓐ 24 cm².
- Ⓑ 28 cm².
- Ⓒ 30 cm².
- Ⓓ 32 cm².

Questão 39

(FATEC_2019)

Uma artesã borda, com lã, tapetes com desenhos baseados em figuras geométricas. Ela desenvolve um padrão retangular de 20 cm por 40 cm. No padrão, serão bordados dois triângulos pretos e quatro triângulos na cor cinza e o restante será bordado com lã branca, conforme a figura.



Cada triângulo preto é retângulo e isósceles com hipotenusa $12\sqrt{2}\ cm$. Cada triângulo cinza é semelhante a um triângulo preto e possui dois lados de medida 10 cm.

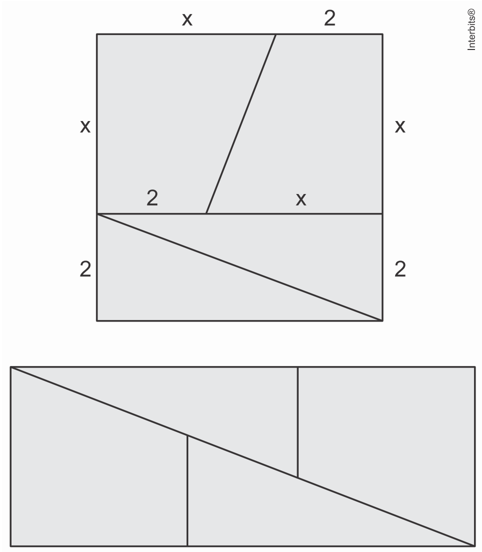
Assim posto, a área no padrão bordada em branco é, em cm^2,

- Ⓐ 344
- Ⓑ 456
- Ⓒ 582
- Ⓓ 628
- Ⓔ 780

Questão 40

(ESPM_2018)

O quadrado e o retângulo da figura abaixo foram montados com as mesmas 4 peças. A medida x é igual a:



A $2\sqrt{5} - 1$

B $\sqrt{5} - 1$

C $\sqrt{5} + 1$

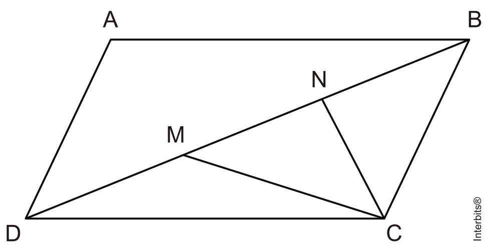
D $3\sqrt{5} - 2$

E $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

Questão 41

(IFPE)

O Sr. Joaquim comprou um terreno em um loteamento numa praia do litoral sul de Pernambuco. O terreno tem a forma de um paralelogramo (figura abaixo) com a base medindo 20 metros e a altura medindo 15 metros. Os pontos M e N dividem a diagonal BD em três partes iguais. No triângulo CMN, ele vai cultivar flores. Qual é a área que o Sr. Joaquim destinou para esse cultivo, em m^2?

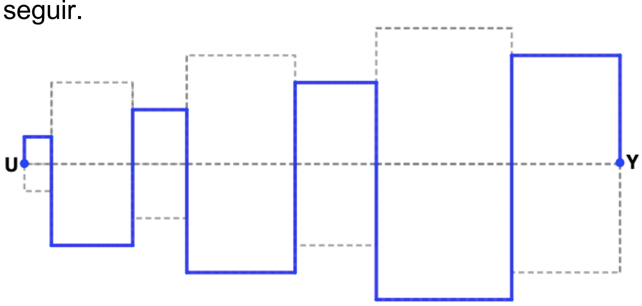


A 37
B 39
C 45
D 48
E 50

Questão 42

(Ronaebson)

Weshiley, ao andar "ziguezagueando" pelos quarteirões quadrados de um bairro de Montevideo, percorreu um total de 1800 m e o trajeto ficou registrado em seu GPS como descrito na imagem a seguir.



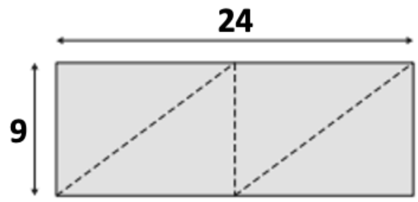
Desprezando a largura das ruas, caso ele tivesse percorrido a rua em linha reta que liga os pontos U e Y, ele teria percorrido a menos do que percorreu um total de

A 450 m.
B 600 m.
C 900 m.
D 1200 m.
E 1500 m.

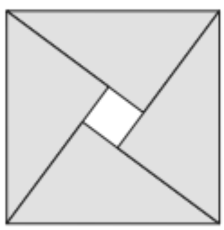
Questão 43

(Ronaebson)

A professora do 9º ano do ensino fundamental dividiu uma folha de 24 cm de comprimento e 9 cm de largura em quatro triângulos retângulos, conforme descrito na figura



Logo em seguida, a professora usou os quatro triângulos para formar um quadrado com um "buraco" no seu interior, conforme a figura a seguir.



Qual a medida da área do quadrado central correspondente ao "buraco"?

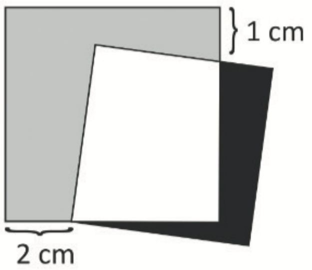
A $3\ cm^2$
B $9\ cm^2$
C $54\ cm^2$
D $216\ cm^2$
E $225\ cm^2$

Questão 44

(Ronaebson)

Duas crianças brincam com dois quadrados de cartolina, um cinza de 6 cm de lado e outro preto de com lado medindo 5 cm.

Esses quadrados são sobrepostos conforme a figura a seguir, de modo que a região de sobreposição é representada pelo quadrilátero branco, onde um de seus vértices é vértice do quadrilátero cinza.



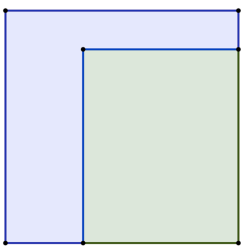
Qual o perímetro da região de sobreposição?

- **A** 25
- **B** 20
- **C** 18
- **D** 14
- **E** 13

Questão 45

(Ronaebson)

A senhora Bueno tem em sua humilde mansão um jardim retangular de 50m de comprimento por 40m de largura. Ela irá construir um lago artificial na forma de "L" adjacente ao jardim, de modo que o conjunto Jardim + Lago forme um quadrado de lado 60m como descrito na figura a seguir.



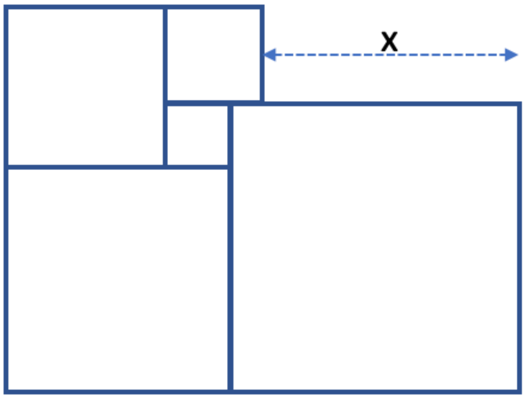
A área da superfície do lago quando comparada com a área do jardim é

- **A** 20% menor.
- **B** 20% maior.
- **C** 25% menor.
- **D** 25% maior.
- **E** 80% maior.

Questão 46

(Ronaebson)

Um grupo de empresários alugou uma sala comercial e a dividiu em quadrados, conforme a figura a seguir.



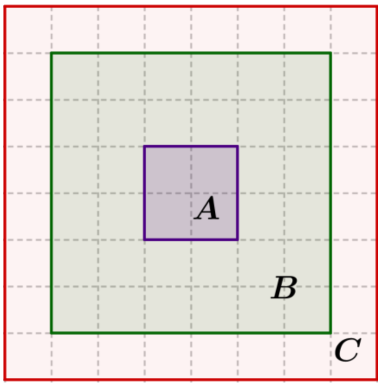
Sabendo que o menor dos quadrados tem área igual a $1\ m^2$, qual o valor de x?

- **A** 3,0 m.
- **B** 3,5 m.
- **C** 4,0 m.
- **D** 4,5 m.
- **E** 5,0 m.

Questão 47

(Ronaebson)

Zé das Contas diverte-se praticando jogo de dardos cujo alvo está descrito na figura a seguir:



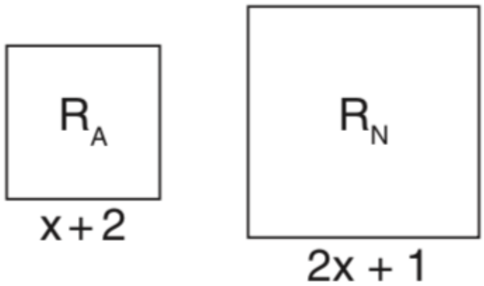
Nesse jogo, a pontuação de um dardo é inversamente proporcional a área da região que ele acerta.

Zé das Contas acertou 1 dardo na região A, 3 dardos na região B e 2 dardos na região C. Sabendo que a pontuação de um dardo que acerta a região B é de 7 pontos, a pontual total conseguida por Zé das Contas foi

- **A** 21.
- **B** 56.
- **C** 71.
- **D** 93.
- **E** 94.

Questão 48

Uma família, depois de 10 anos morando em um mesmo bairro da cidade, resolveu se mudar para uma residência maior em outro bairro. A figura a seguir representa, sem escalas, a diferença de tamanho entre as casas, de forma quadrada, em que R_A indica a residência atual e R_N a residência nova.



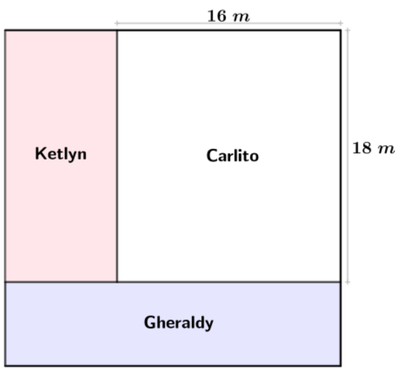
Se a diferença entre as áreas dessas duas residências é de $297\ m^2$, a diferença entre seus perímetros é de

- **A** 25 metros.
- **B** 36 metros.
- **C** 49 metros.
- **D** 64 metros.
- **E** 81 metros.

Questão 49

(Ronaebson)

Carlito possui um terreno quadrado e decidiu dividi-lo com seus dois filhos, Gheraldy e Ketlyn. A figura a seguir ilustra as dimensões do terreno e as partes sombreadas possuem a mesma área e serão destinadas aos filhos.



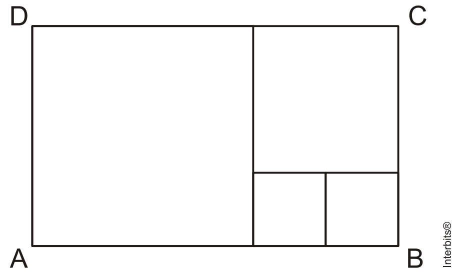
Desse modo, a medida da área do terreno de cada filho será

- **A** $36\ m^2$.
- **B** $144\ m^2$.
- **C** $288\ m^2$.
- **D** $432\ m^2$.
- **E** $576\ m^2$.

Questão 50

(UNICAMP)

A figura abaixo exibe um retângulo ABCD decomposto em quatro quadrados.



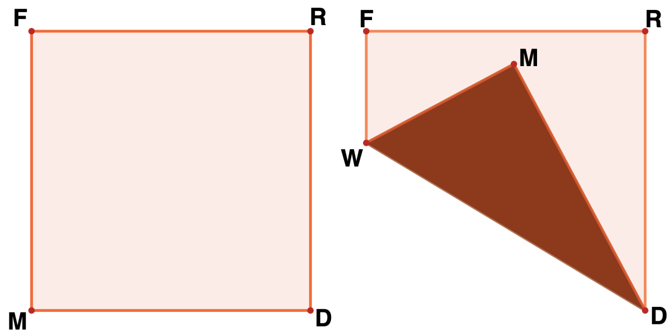
O valor da razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ é igual a

- **A** $\frac{5}{3}$
- **B** $\frac{5}{2}$
- **C** $\frac{4}{3}$
- **D** $\frac{3}{2}$

Questão 51

(Ronaebson)

MDRF representa uma folha de papel quadrado de lado 50 cm que possui uma face mais clara e outra face escura. Essa folha foi dobrada, conforme a figura a seguir, sendo W um ponto sobre o lado MF do quadrado e WD o vinco da dobra.



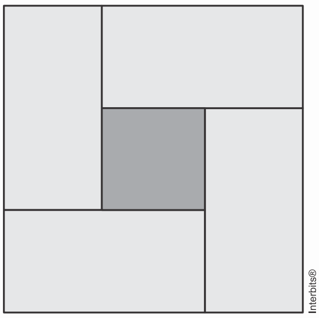
Sabendo que WF tem 20 cm de comprimento, a área da região mais clara ainda exposta após a dobradura, ou seja, a área do polígono MDRFW é igual a

- **A** 750 cm².
- **B** 1000 cm².
- **C** 1500 cm².
- **D** 1750 cm².
- **E** 2500 cm².

Questão 52

(CP2)

Nas salas de aula do Colégio Pedro II serão colocados pisos conforme a figura a seguir:



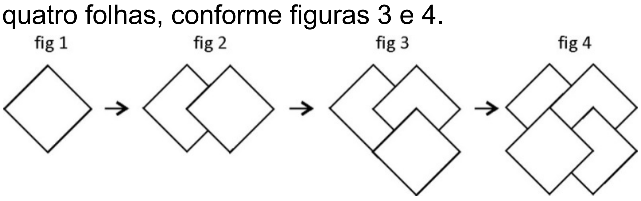
Cada piso é formado por quatro retângulos iguais de lados 10 m e (x+10)cm, respectivamente, e um quadrado de lado igual a x cm.

Sabendo-se que a área de cada piso equivale a $900cm^2$, o valor de x em centímetros, é

- **A** 10
- **B** 23
- **C** 24
- **D** 50

Questão 53

Esmeralda tem quatro folhas quadradas iguais, de lado 20 cm. Ela cola uma folha sobre a outra, fazendo um vértice da folha de cima coincidir com o centro da folha de baixo, de modo que os lados da folha de cima sejam paralelos aos lados da folha de baixo, conforme figuras 1 e 2. Ela continua fazendo isto, até colar as quatro folhas, conforme figuras 3 e 4.



Qual é a área da figura 4?

- **A** 1200 cm²
- **B** 1300 cm²
- **C** 1400 cm²
- **D** 1500 cm²
- **E** 1600 cm²

Questão 54

(ESPM)

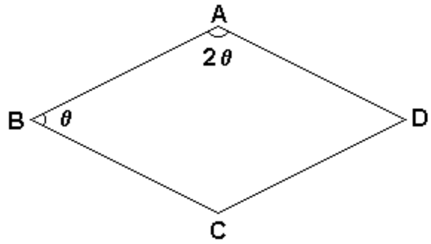
Uma parede retangular pode ser totalmente revestida com ladrilhos retangulares de 30 cm por 40 cm ou com ladrilhos quadrados de 50 cm de lado, inteiros, sem que haja espaço ou superposição entre eles. A menor área que essa parede pode ter é igual a:

- **A** 4,5 m²
- **B** 2,5 m²
- **C** 3,0 m²
- **D** 4,0 m²
- **E** 3,5 m²

Questão 54

(PUCCAMP)

Na figura a seguir tem-se representado o losango ABCD, cuja diagonal menor mede 4 cm.



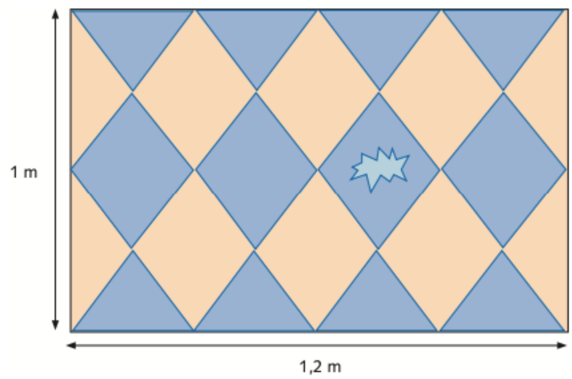
A medida do lado desse losango, em centímetros, é

- **A** $6\sqrt{3}$
- **B** 6
- **C** $4\sqrt{3}$
- **D** 4
- **E** $2\sqrt{3}$

Questão 55

(Ronaebson)

Um vitral com 1,2 metros de comprimento e 1 metro de altura é composto por várias peças de vidros, sendo algumas, losangos e outras triângulos, como indica a figura. Os triângulos dividem os lados dos retângulos em partes iguais.



A figura indica que uma das peças do vitral foi quebrada. Sabendo que o metro quadrado do respectivo vidro custa R$ 400,00, quanto o proprietário gastará para trocar a peça danificada?

- **A** R$ 30,00
- **B** R$ 60,00
- **C** R$ 120,00
- **D** R$ 240,00
- **E** R$ 300,00

Questão 57

(IFSC)

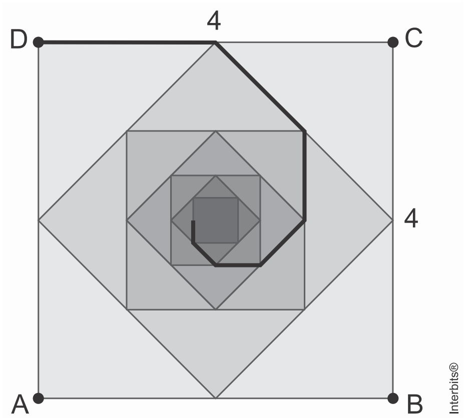
O perímetro de um losango é 40 cm e uma diagonal mede 16 cm. A outra diagonal mede:

- **A** 10 cm.
- **B** 6 cm.
- **C** 12 cm.
- **D** 8 cm.
- **E** 5 cm.

Questão 58

(ESPM)

A partir do quadrado ABCD de lado 4, constrói-se uma sequência infinita de novos quadrados, cada um com vértices nos pontos médios dos lados do anterior, como mostrado abaixo:



O comprimento da poligonal infinita destacada na figura por linhas mais grossas é igual a:

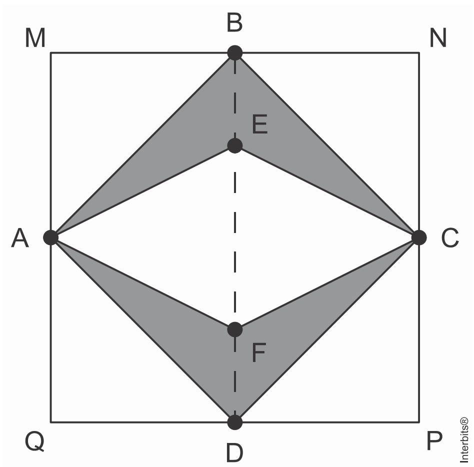
Ⓐ $4\sqrt{2}$
Ⓑ $4\sqrt{2}+1$
Ⓒ $8+\sqrt{2}$
Ⓓ $4+2\sqrt{2}$
Ⓔ 8

Questão 59

(FATEC)

Na figura, os pontos A, B, C, e D são pontos médios dos lados do quadrado MNPQ de lado de medida L. Os pontos E e F pertencem ao segmento $\overline{BD}$ de modo que $BE = FD = \frac{L}{4}$.

A área do quadrado MNPQ é igual a K vezes a área da superfície destacada em cinza.

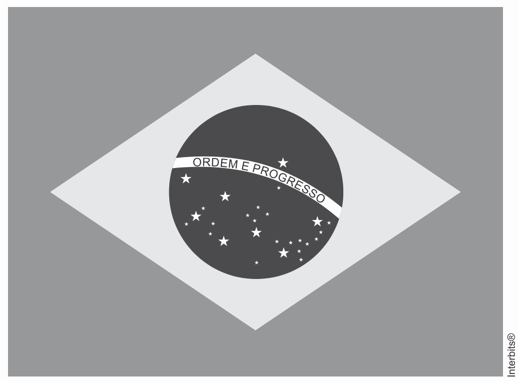


Assim sendo, o valor de K é

Ⓐ 2
Ⓑ 4
Ⓒ 6
Ⓓ 8
Ⓔ 10

Questão 60

(IFSC)



Todos os anos, no mês de Setembro, comemora-se a Independência do Brasil. Durante uma semana, muitas Instituições exibem a Bandeira do Brasil como forma de homenagear a Pátria.

A maioria dos brasileiros desconhece que a fabricação da Bandeira Nacional obedece a rígidos critérios em relação às dimensões das figuras geométricas (retângulo, losango e círculo), das letras e das estrelas.

Considere que as diagonais maior e menor do losango amarelo da Bandeira do Brasil medem 16 dm e 12 dm, respectivamente.

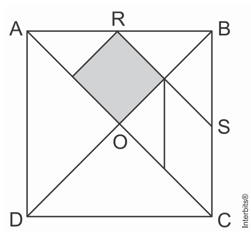
Então é CORRETO afirmar que a linha que delimita a parte amarela mede:

Ⓐ 40 dm
Ⓑ 28 dm
Ⓒ 20 dm
Ⓓ 48 dm
Ⓔ 96 dm

Questão 61

(UPF)

No quadrado ABCD de lado x, representado na figura a seguir, os pontos R e S são pontos médios dos lados AB e BC, respectivamente, e O é o encontro das duas diagonais. A razão entre a área do quadrado pequeno (pintado) e a área do quadrado ABCD é:



Ⓐ $\frac{1}{16}$ Ⓑ $\frac{1}{12}$ Ⓒ $\frac{1}{10}$ Ⓓ $\frac{1}{8}$ Ⓔ $\frac{1}{4}$

Questão 62

(CFTMG)

O TANGRAM é um quebra-cabeças chinês formado por 5 triângulos retângulos isósceles, um paralelogramo e um quadrado que, ao serem colocadas lado a lado, sem sobreposição, formam um quadrado ABCD, conforme mostra a figura 01.

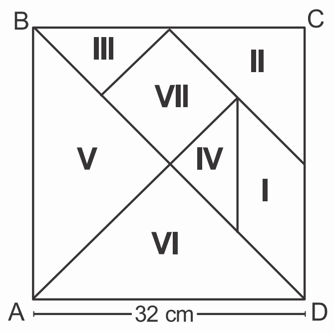


Figura 01

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Tangram. Acesso: 24 de set. 2017. (adaptado)

Com as peças desse TANGRAM, pode-se formar uma casinha, como a representada na figura 02.

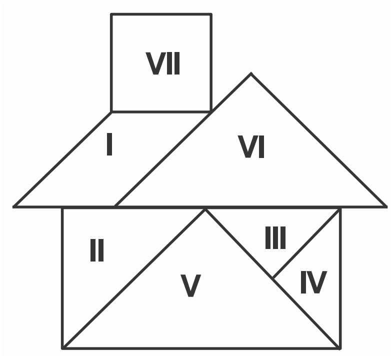


Figura 02

Suponha que as superfícies I, II, III e IV serão revestidas com pedaços de isopor que foram comprados em quadrados de área igual a 45 mm^2. Se o quadrado ABCD tem lado igual a 32 cm, a quantidade mínima “inteira” de pedaços de isopor necessária para cobrir toda a superfície desejada é

- **A** 853.
- **B** 854.
- **C** 1.137.
- **D** 1.138.

Questão 63

(IFSP

Considerando que as medidas de dois ângulos opostos de um losango são dadas, em graus, por 3x+60º e 135º-2x, a medida do menor ângulo desse losango é

A 75°. **B** 70°. **C** 65°. **D** 60°. **E** 55°.

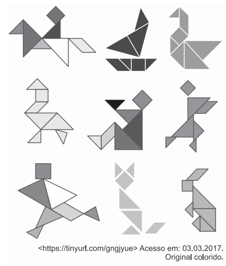
Questão 64

(CSP)

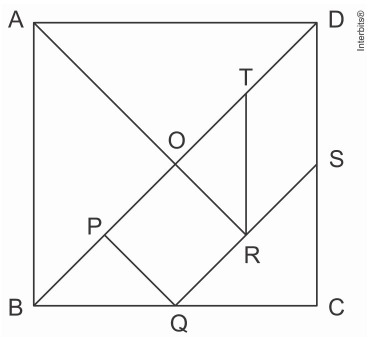
O Tangram é um quebra-cabeça chinês. Há uma lenda sobre esse quebra-cabeça que afirma que um jovem chinês, ao despedir-se de seu mestre, para uma longa viagem pelo mundo, recebeu uma tábua quadrada cortada em 7 peças (um quadrado, um paralelogramo e cinco triângulos).

Assim o discípulo poderia reorganizá-las para registrar todas as belezas da viagem. Lendas e histórias como essa sempre cercam a origem de objetos ou fatos, a respeito da qual temos pouco ou nenhum conhecimento, como é o caso do Tangram. Se é ou não uma história verdadeira, pouco importa: o que vale é a magia, própria dos mitos e lendas.

<https://tinyurl.com/htszezr> Acesso em: 03.03.2017. Adaptado.



Observe o Tangram, em uma possível disposição de suas peças.



Na figura, tem-se que:

- $\overline{QS}$ é paralelo a $\overline{BD}$;
- os polígonos ABCD e OPQR são quadrados;
- S é ponto médio de $\overline{CD}$;
- P é ponto médio de $\overline{OB}$;
- O é ponto médio de $\overline{BD}$.

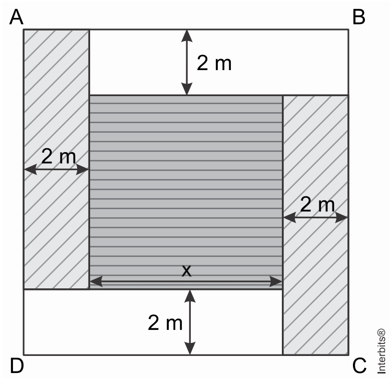
Se a área do triângulo ABO é 16 cm^2, a área do quadrado OPQR é, em centímetros quadrados,

- **A** 2.
- **B** 4.
- **C** 6.
- **D** 8.
- **E** 10.

Questão 65

(UNESP)

Renata pretende decorar parte de uma parede quadrada ABCD com dois tipos de papel de parede, um com linhas diagonais e outro com riscos horizontais. O projeto prevê que a parede seja dividida em um quadrado central, de lado X, e quatro retângulos laterais, conforme mostra a figura.



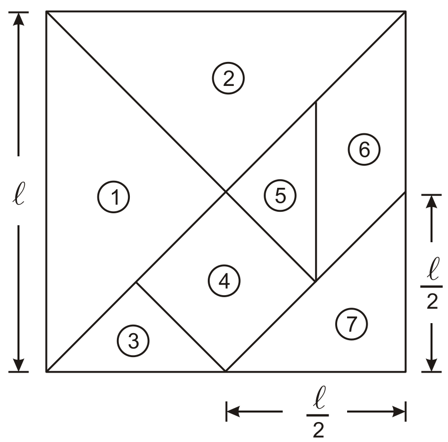
Se o total da área decorada com cada um dos dois tipos de papel é a mesma, então x, em metros, é igual a

A $1 + 2\sqrt{3}$
B $2 + 2\sqrt{3}$
C $2 + \sqrt{3}$
D $1 + \sqrt{3}$
E $4 + \sqrt{3}$

Questão 66

(UFRGS)

O tangran é um jogo chinês formado por uma peça quadrada, uma peça em forma de paralelogramo e cinco peças triangulares, todas obtidas a partir de um quadrado de lado ℓ, como indica a figura a seguir.



Três peças do tangran possuem a mesma área. Essa área é

A $\frac{\ell^2}{16}$. **B** $\frac{\ell^2}{12}$. **C** $\frac{\ell^2}{8}$. **D** $\frac{\ell^2}{6}$. **E** $\frac{\ell^2}{4}$.

Questão 67

(CP2)

O tangram é um conhecido quebra-cabeça de sete peças que tem formas geométricas bem conhecidas, originadas da decomposição de um quadrado (figura 1).

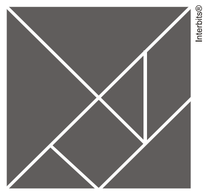


Figura 1

Hoje já se tem conhecimento do surgimento de vários tipos de quebra-cabeças geométricos planos, muitas vezes também chamados de tangram, e que também têm origem em recortes de alguma figura plana.
Abaixo se encontra o tangram coração, cujas peças são obtidas recortando-se um coração plano de acordo com o esquema da figura 2, composta de: 3 setores de 90° de um círculo, 2 setores de 45° de um círculo, 1 triângulo retângulo, 1 quadrado, 1 paralelogramo e 1 trapézio retângulo. Utilizando-se todas as nove peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 3 e 4.

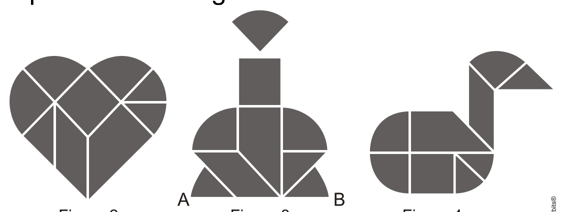


Figura 2 Figura 3 Figura 4

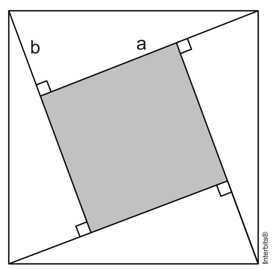
Se a base AB do vidro de perfume mostrado na figura 3 mede 3 cm, então a área da figura 4, que representa um "patinho" mede:

A $\pi + 4\ cm^2$
B $2(\pi + 4)\ cm^2$
C $2\pi + 4\ cm^2$
D $2\pi + 2\ cm^2$

Questão 68

(UFRGS

Na figura abaixo, os triângulos retângulos são congruentes e possuem catetos com medidas a e b.



A área da região sombreada é

A $2ab$.
B $a^2 + b^2$.
C $a^2 + 2ab + b^2$.
D $a^2 - 2ab + b^2$.
E $a^2 - b^2$.

Questão 69

(CPS)

O revestimento do piso de um ambiente, com a utilização de tacos de madeira, pode ser feito formando desenhos que constituam um elemento decorativo para o local.
Combinando apenas tacos com as formas apresentadas a seguir, pode-se criar o desenho, conforme a figura 1, que será utilizado para cobrir o piso desse ambiente.

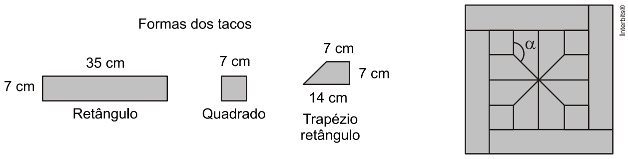
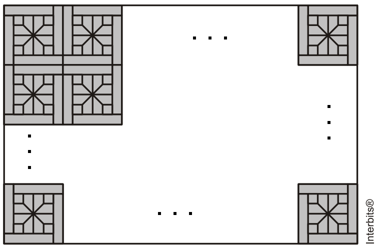


Figura 1

Um arquiteto vai construir uma casa e pretende revestir o piso da sala, que é retangular, com o desenho da figura 1, de modo que no piso caiba apenas o desenho inteiro, isto é, sem cortes e repetido várias vezes nas duas dimensões, conforme a figura 2.

Figura 2


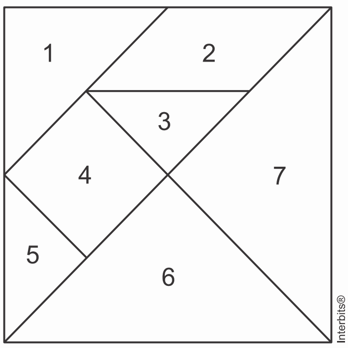
Nestas condições, as dimensões do piso dessa sala podem ser

A 8,40 m x 5,25 m.
B 6,30 m x 5,04 m.
C 3,50 m x 7,00 m.
D 2,10 m x 4,75 m.
E 1,75 m x 6,00 m.

Questão 70

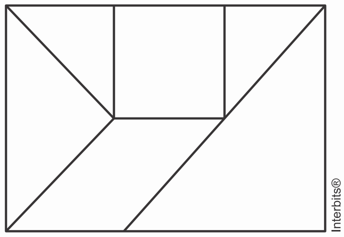
(CP2)

O Tangram é um quebra-cabeça chinês formado por 7 peças com as quais podemos formar várias figuras, utilizando todas as peças e sem sobrepô-las.



<u>Legenda</u>:
Fig. 1 – Triângulo retângulo isósceles médio
Fig. 2 – Paralelogramo
Fig. 3 e 5 – Triângulos retângulos isósceles congruentes
Fig. 4 – Quadrado
Fig. 6 e 7 – Triângulos retângulos isósceles congruentes

O retângulo a seguir foi formado por seis dessas sete peças.



A razão entre a área desse retângulo e a área do quadrado inicial é de

A 0,25.
B 0,33.
C 0,56.
D 0,75.

Questão 71

(PUCCAMP)

Na abertura da Olimpíada de Atenas, um Ulisses menino acenava de um barquinho nada épico, que parecia de papel. Suponhamos que sua construção tenha sido inspirada no barquinho mostrado na figura 1, que foi feito a partir de dobraduras de uma folha de papel retangular.
Considere que, desmontado o barquinho, a folha de papel ficará com as marcas das dobras, conforme indica o tracejado na figura 2.

Figura 1

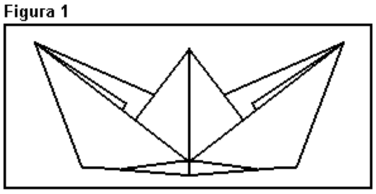
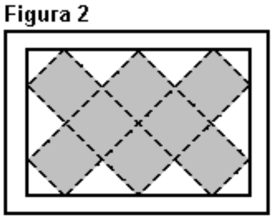



Figura 2


Nessas condições, se o lado de cada quadrado sombreado mede $4\sqrt{2}\,cm$, a área da superfície da folha de papel, em centímetros quadrados, é

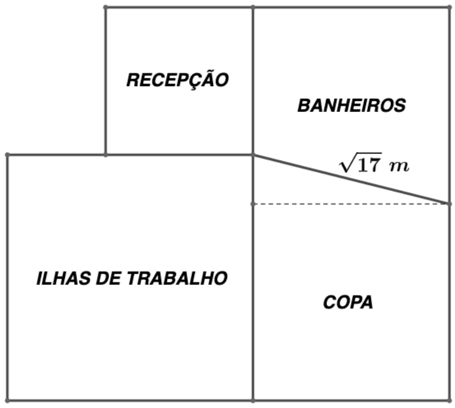
A 64
B 80
C 160
D 192
E 384

Questão 72

(Ronaebson)

Uma empresa de Coworking alugou uma área num edifício empresarial e, no projeto inicial, ela seria dividida em quatro quadrados como descritos a seguir.

A arquiteta decidiu fazer um ajuste de modo a ter uma melhor integração entre os quatro ambientes, para tanto, retirou a parede original que comunica a copa e os banheiros e colocou uma nova parede de $\sqrt{17}\,m$ desempenhando essa função, de modo que essa nova parede terá um dos extremos coincidindo com o extremo da parede original e o outro extremo sendo um dos vértices comuns a recepção e às ilhas de trabalho, como descrito a seguir.



A soma das áreas destinadas à recepção e às ilhas de trabalho é igual a

- **A** 17 m².
- **B** 25 m².
- **C** 34 m².
- **D** 43 m².
- **E** 66 m².

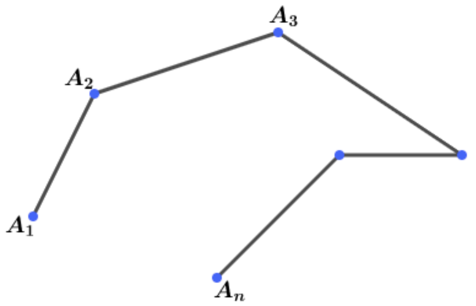
Gabarito _ Quadriláteros			
Hora de Praticar			
Questão	Resposta	Questão	Resposta
01	D	37	A
02	A	38	C
03	C	39	B
04	E	40	C
05	D	41	E
06	E	42	D
07	C	43	B
08	C	44	C
09	A	45	A
10	D	46	C
11	E	47	D
12	D	48	B
13	C	49	B
14	A	50	A
15	A	51	B
16	E	52	A
17	E	53	A
18	D	54	C
19	E	55	D
20	C	56	A
21	D	57	C
22	C	58	D
23	A	59	B
24	B	60	A
25	D	61	D
26	B	62	B
27	D	63	A
28	E	64	D
29	A	65	B
30	C	66	C
31	B	67	A
32	B	68	D
33	C	69	B
34	A	70	D
35	B	71	E
36	B	72	C

POLÍGONOS

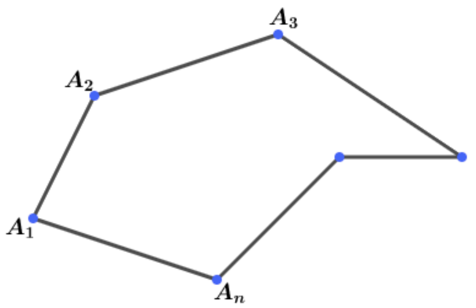
RONAEBSON
MATEMÁTICA CRIATIVA

POLÍGONOS

Dados vários pontos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, com $n \geq 3$, em ordem e de forma que três consecutivos não sejam colineares, a figura formada pela reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$ chama-se *linha poligonal aberta* e os pontos A_1 e A_n são os extremos.



Unindo-se os extremos por um segmento, obtemos uma *linha poligonal fechada*, a qual chamaremos de *Polígono*.



Podemos destacar os seguintes elementos:

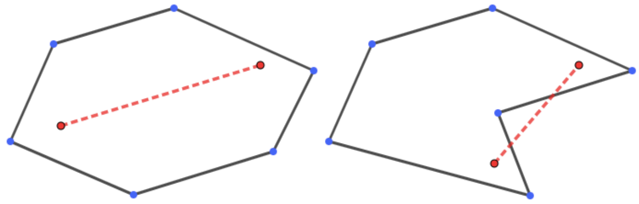
Vértices: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$
Lados: $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_nA_1}$
Perímetro *(2p)* é a soma dos comprimentos de todos os lados.

Desde que dois lados não consecutivos de um polígono não se cruzem, o polígono define uma região do plano a que chamaremos de região poligonal e esses polígonos serão chamados de *polígonos simples*. Quando um polígono não define uma região, diremos que o polígono é entrecruzado.

Dedicaremos nossos estudos aos polígonos simples.

Um polígono simples pode ser classificado como convexo ou côncavo.

O polígono será dito convexo se ao tomarmos dois pontos internos quaisquer, o segmento de reta que os une estiver contido no polígono. Caso contrário, o polígono será dito côncavo. De maneira alternativa, um polígono será convexo se a reta que contém qualquer um de seus lados deixa todos os demais lados num mesmo semiplano.



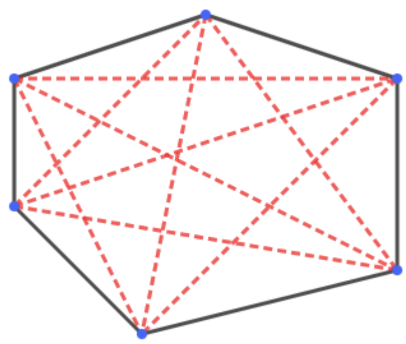
Polígono Convexo   Polígono Côncavo

O nome do polígono é dado de acordo com o número de lados:

Número de Lados	Nome do Polígono
$n = 3$	triângulo
$n = 4$	quadrilátero
$n = 5$	pentágono
$n = 6$	hexágono
$n = 7$	heptágono
$n = 8$	octógono
$n = 9$	eneágono
$n = 10$	decágono
$n = 11$	undecágono
$n = 12$	dodecágono
$n = 15$	pentadecágono
$n = 20$	icoságono

Diagonais do Polígono

A diagonal de um polígono é um segmento cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono.



Os segmentos tracejados representam
as diagonais do polígono.

Consideremos agora um polígono de *n* lados, consequentemente *n* vértices.

Tomando como extremidade um dos vértices do polígono e sabendo que não se pode tomar uma diagonal de um vértice para ele mesmo, nem para os dois consecutivos, temos

$$n - 3 \ diagonais.$$

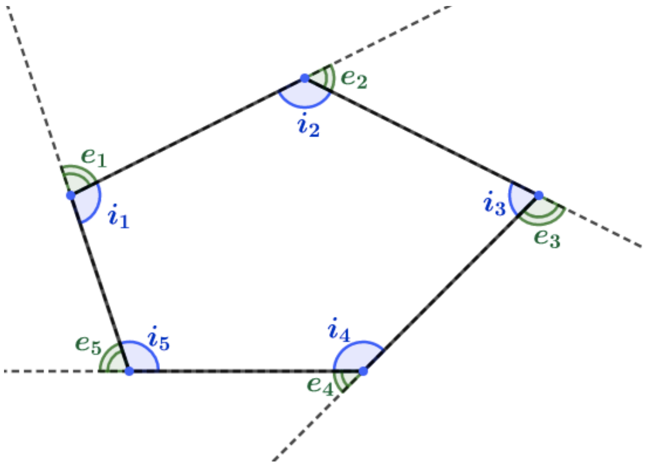
Se com extremidade em cada vértice temos $n - 3$ diagonais, então com extremidades nos *n* vértices, temos:

$$n \cdot (n - 3) \ diagonais$$

Entretanto, na conta anterior, cada diagonal foi contada duas vezes, pois tem extremidades em dois vértices, logo, o total de diagonais de um polígono é dada por

$$\boldsymbol{d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}}.$$

☞ Ângulos do Polígono



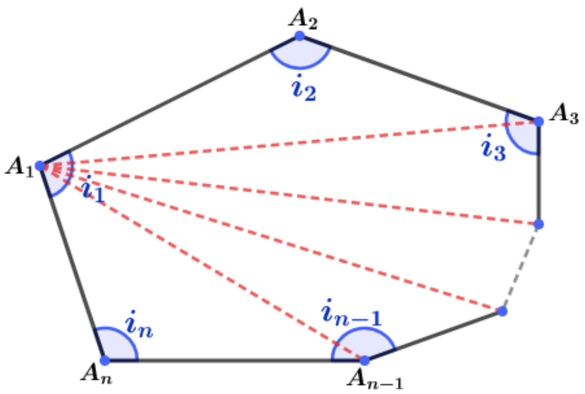
No polígono acima, temos:

i_1, i_2, i_3, i_4 e i_5 são os ângulos internos.
e_1, e_2, e_3, e_4 e e_5 são os ângulos externos.

Observe que um ângulo interno e seu respectivo ângulo externo são adjacentes suplementares, isto é:

$$i + e = 180^o$$

Consideremos o polígono a seguir de n lados, consequentemente n vértices. Note que, a partir de um único vértice, podemos dividir o polígono em $n-2$ triângulos.



Logo, a soma dos ângulos internos do polígono é igual a:

$$S_i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_{n-1} + i_n$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{S_i = (n-2) \cdot 180^o}$$

A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é igual a $S_i = (n-2) \cdot 180^o$.

Lembrando que a soma de um ângulo interno com seu respectivo ângulo externo é igual a 180º, temos:

$$\begin{aligned} i_1 + e_1 &= 180^o \\ i_2 + e_2 &= 180^o \\ i_3 + e_3 &= 180^o \\ &\vdots \\ i_n + e_n &= 180^o \end{aligned}$$

Agora, somando membro a membro as equações acima, temos que:

$$\underbrace{i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n}_{(n-2)\cdot 180^o} + e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_n = n \cdot 180^o$$

$$n \cdot 180^o - 360^o + e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_n = n \cdot 180^o$$

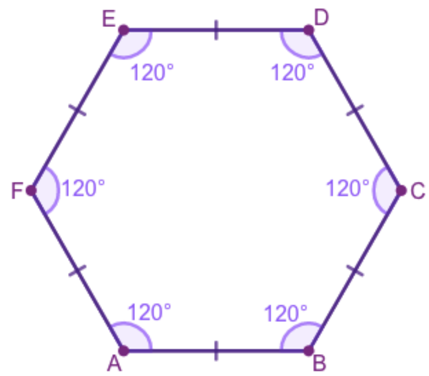
$$\boldsymbol{S_e = 360^o}$$

ou seja:

A soma dos ângulos externos de qualquer polígono é sempre 360º.

POLÍGONOS REGULARES

Um polígono convexo é dito regular se, e somente se, ele for simultaneamente equilátero e equiângulo, ou seja, se ele possuir todos os lados e todos os ângulos congruentes.



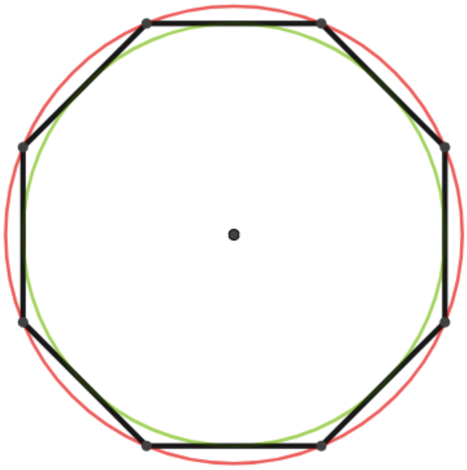
Observe que para encontrarmos o valor de cada ângulo interno, já que são todos iguais, basta calcular a soma dos ângulos internos do polígono e depois dividir pelo número de ângulos, ou seja,

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2) \cdot 180^o}{2}$$

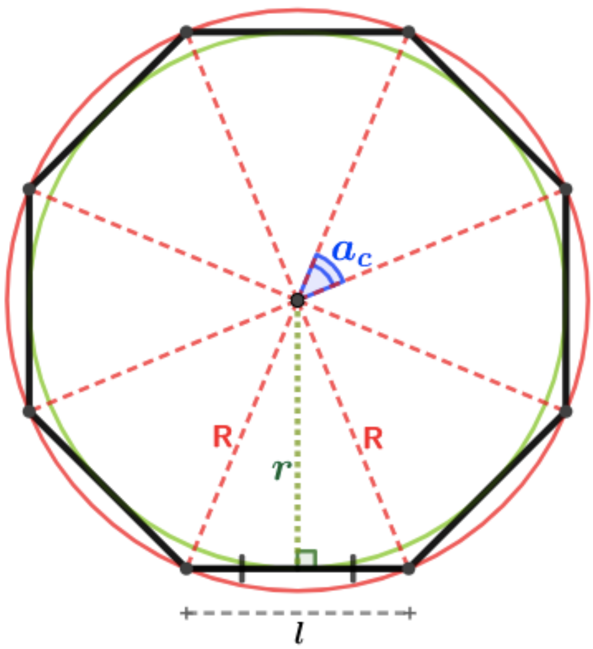
Para encontrarmos o valor de cada ângulo externo, basta dividirmos a soma dos ângulos externos do polígono pelo número de ângulos externos, isto é,

$$a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360^o}{n}$$

Todo polígono regular possui uma circunferência inscrita e outra circunscrita, ambas de mesmo centro, o qual é dito *centro do polígono regular*.



Diante disso, percebemos que um polígono regular de *n* lados pode ser dividido, a partir do seu centro, em *n* triângulos isósceles congruentes, onde a base de cada triângulo corresponde ao lado do polígono e os outros dois lados correspondem ao raio da circunferência circunscrita ao polígono. Além disso, a altura de cada triângulo corresponde ao raio da circunferência inscrita ao polígono regular e o ângulo do vértice de cada triângulo isósceles será dito ângulo central do polígono regular.



R: *Raio da Circunferência Circunscrita*
r: *Raio da Circunferência Inscrita*
l: *Lado do polígono regular*
$\boldsymbol{a_c}$: *Ângulo Central*

O segmento de reta que une o centro do polígono regular ao ponto médio de qualquer um dos lados é chamado apótema do polígono regular e sua medida coincide com a do raio da circunferência inscrita no polígono.
Observe na figura que R, r e $l/_2$ são os lados de um triângulo retângulo e, consequentemente, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

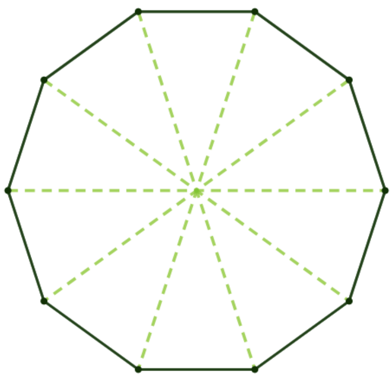
$$R^2 = r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

Para determinarmos o valor do ângulo central do polígono regular de *n* lados, basta perceber que temos *n* ângulos centrais e que a soma de todos eles é igual a 360º, assim:

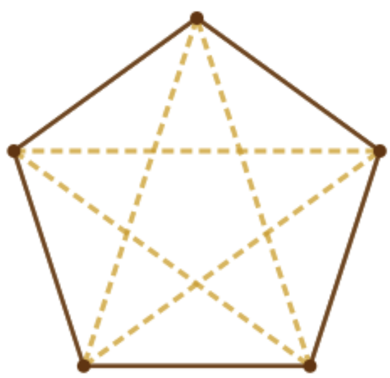
$$a_c = \frac{360^o}{n},$$

ou seja, a medida do ângulo central é igual a medida do ângulo externo do polígono regular.

Outro fato importante sobre polígonos regulares é que, se o número de lados do polígono regular for par, então o número de diagonais que passam pelo seu centro é igual a metade do número de lados. Entretanto, se o número de lado do polígono for ímpar, então o polígono não possui diagonais passando pelo seu centro.



Decágono: 5 diagonais passando pelo seu centro



Pentágono: nenhuma de suas diagonais passa pelo seu centro

Área do Polígono Regular

Como um polígono regular de n lados pode ser dividido em n triângulos isósceles congruentes, para determinarmos a área de um polígono regular, basta calcular a área de um desses triângulos e multiplicar pelo número de triângulos (que é igual ao número de lados.

$$A_{PR} = n \cdot A_{\Delta}$$

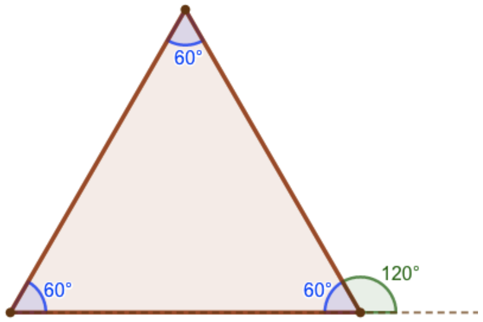
$$A_{PR} = n \cdot \frac{l \cdot r}{2}$$

$$\boldsymbol{A_{PR} = p \cdot r}$$

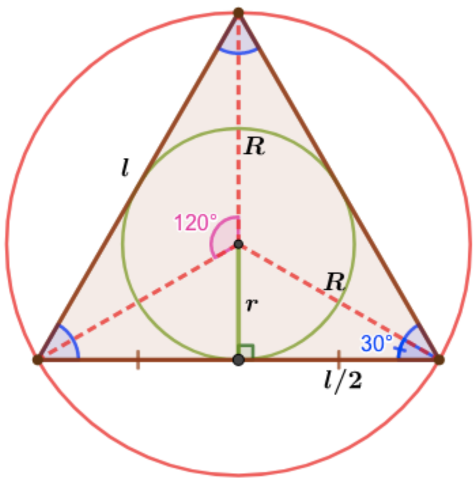
onde:

p: semiperímetro do polígono
r: apótema do polígono regular

TRIÂNGULO EQUILÁTERO



$$a_i = 60^o$$
$$a_e = 120^o$$



$$a_c = 120^o$$

Do triângulo (30º, 60º, 90º) da figura, temos:

$$R = 2r$$

e, além disso, como já sabemos que a altura do triângulo equilátero mede

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2},$$

temos,

$$r = \frac{h}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

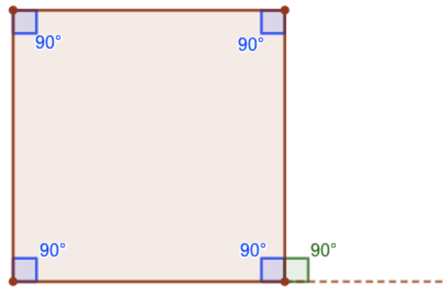
$$R = \frac{2h}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

Para o cálculo da área, basta fazermos:

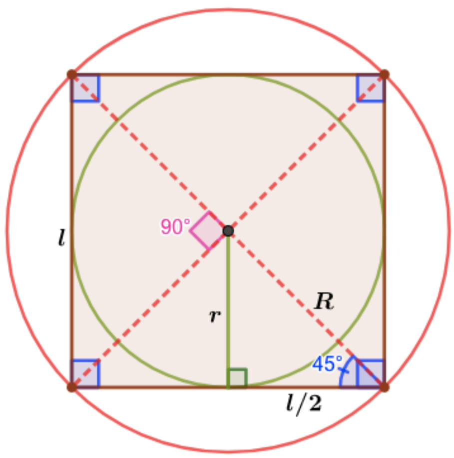
$$A = \frac{1}{2} \cdot l \cdot h = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$\boldsymbol{A = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}$$

QUADRADO



$$a_i = 90^o$$
$$a_e = 90^o$$



$$a_c = 90^o$$

Do triângulo (45º, 45º, 90º) da figura, temos:

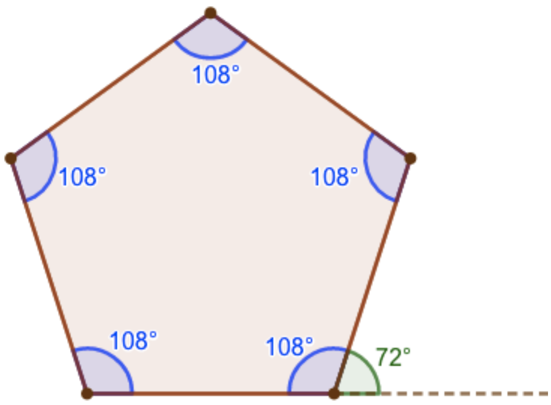
$$r = \frac{l}{2}$$

$$R = r\sqrt{2} = \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

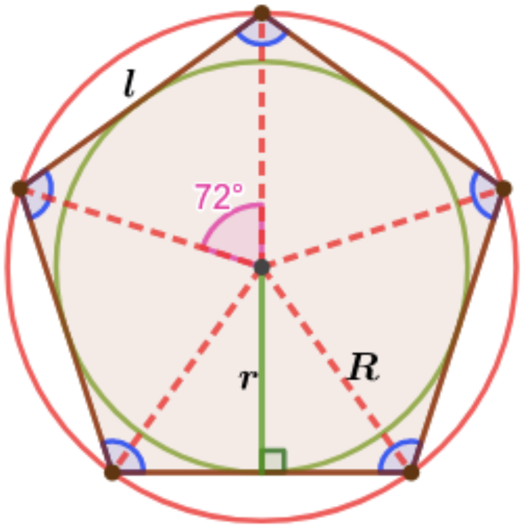
Para o cálculo da área, basta fazermos:

$$A = l^2$$

Pentágono Regular



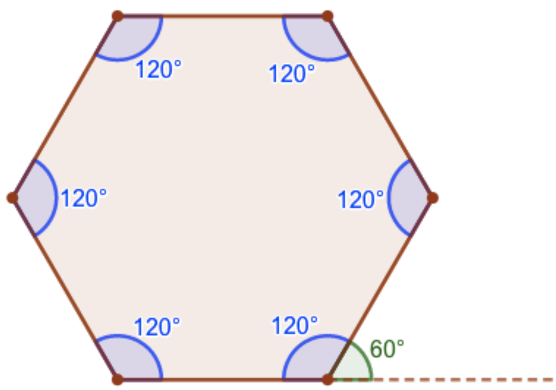
$$a_i = 108^o$$
$$a_e = 72^o$$



$$a_c = 72^o$$

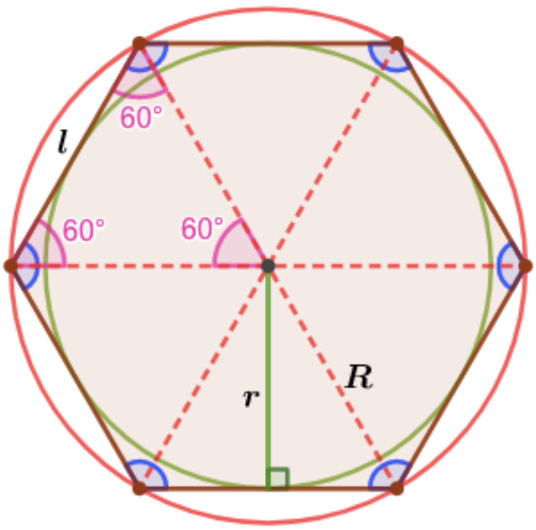
Para encontrarmos o valor do raio da circunferência inscrita e da circunferência circunscrita, precisamos saber o valor das razões trigonométricas para o ângulo de 36º e 72º.

Hexágono Regular



$$a_i = 120^o$$
$$a_e = 60^o$$

Observe que o hexágono regular pode ser dividido, a partir do seu centro, em seis triângulos equiláteros congruentes, onde o lado de cada triângulo equilátero têm a mesma medida do lado do hexágono.



$$R = l$$
$$r = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

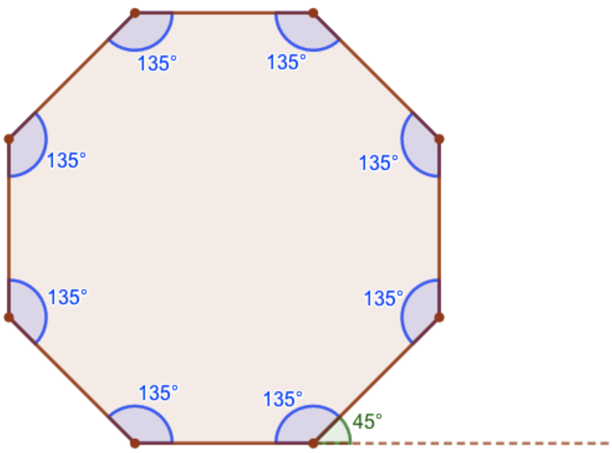
Para calcularmos a área do hexágono regular, basta calcularmos a área de um triângulo equilátero de lado l e multiplicar por seis:

$$A = 6 \cdot A_{Delta}$$

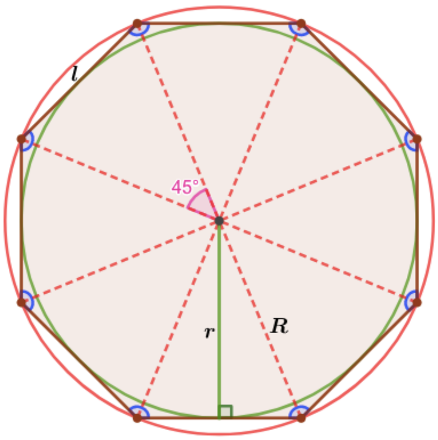
$$A = 6 \cdot \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$A = \frac{3l^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Octógono Regular



$$a_i = 135^o$$
$$a_e = 45^o$$



$$a_c = 45^o$$

Para encontrarmos o valor do raio da circunferência inscrita e da circunferência circunscrita, precisamos saber o valor das razões trigonométricas para o ângulo de 22,5º e 67,5º.

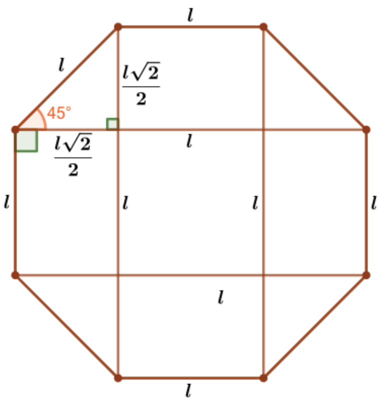
Para o cálculo da área de um octógono regular, basta fazermos:

$$A = 8 \cdot \frac{R \cdot R \cdot sen45^o}{2}$$

$$A = 4 \cdot R^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A = 2 \cdot R^2 \cdot \sqrt{2}$$

Outra maneira de calcular a área de um octógono é decompondo-o como descrito na figura abaixo:



Veja que o octógono está decomposto em um quadrado, quatro retângulos congruentes e quatro triângulos retângulos isósceles congruentes, assim:

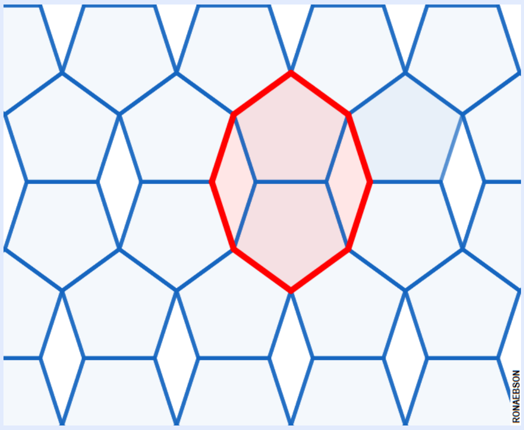
$$A = A_{Quadrado} + 4 \cdot A_{Retângulo} + 4 \cdot A_{Triângulo}$$

$$A = l^2 + 4 \cdot l \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

$$A = l^2 + 2l^2\sqrt{2} + l^2$$

$$A = 2 \cdot l^2 \cdot (1 + \sqrt{2})$$

Problema 01: (Ronaebson) Após formar um mosaico utilizando suas peças poligonais na forma de pentágonos regulares e losangos, dispostos como mostra a figura, o pequeno Samuel enxergou, no meio desse emaranhado de polígonos, um octógono composto por dois pentágonos e dois losangos, como destacado.



As medidas dos ângulos internos desse octógono são iguais a

- **A** 108º e 136º.
- **B** 108º e 144º.
- **C** 120º e 144º.
- **D** 124º e 168º.
- **E** 136º e 144º.

Solução:

Como o pentágono é regular, todos os seus ângulos internos medem 108º, basta fazer

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(5-2) \cdot 180^o}{5} = 108^o.$$

Se denotarmos o ângulo obtuso do losango por x e o ângulo agudo por w, teremos

$$x + 108^o + 108^o = 360^o \implies x = 144^o$$

além disso,

$$144^o + w = 180^o \implies w = 36^o.$$

Sendo assim, um dos ângulos do internos do octógono em destaque será 108º, o outro ângulo será 144º, que tanto pode ser identificado com um dos ângulos obtusos do losango como a soma do ângulo agudo do losango e um ângulo interno do pentágono ($36^o + 108^o = 144^o$).

Resposta: [B]

Hora de Praticar

Questão 01

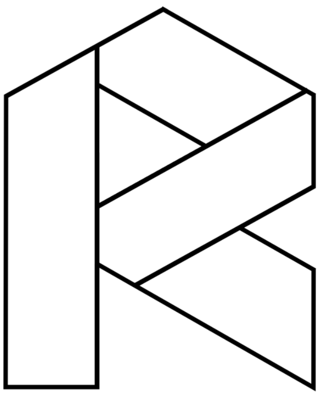
(Ronaebson)

Logomarca é a representação gráfica do nome de uma empresa ou marca, que determina a sua identidade visual e tem como objetivo facilitar o seu reconhecimento.
Uma logomarca dá sentido à marca em questão, identificando-a e definindo-a no tempo e no espaço. Pode ser vista como uma parte importante do código genético de uma empresa, que influencia o seu percurso.
Na construção da marca do curso Matemática Criativa, as escolhas das cores e formas foram feitas com base na mensagem que se queria passar para o público.

RONAEBSON MATEMÁTICA CRIATIVA

O vermelho representa a força e paixão envolvidas no trabalho desenvolvido, enquanto o azul representa toda racionalidade e assertividade no processo.

No ícone associado a letra R, as formas geométricas se fizeram presentes para trazer o contexto matemático a essência da marca.



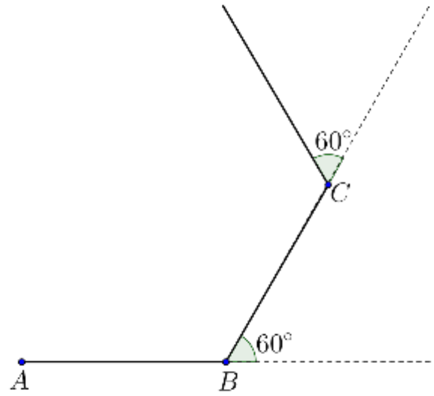
As formas geométricas planas utilizadas na confecção do ícone foram

- **A** um triângulo, dois trapézios e dois pentágonos.
- **B** um triângulo, três trapézios e um pentágono.
- **C** um triângulo, dois trapézios, um pentágono e um hexágono.
- **D** um triângulo, um trapézio, dois pentágonos e um hexágono.
- **E** um triângulo, um paralelogramo, um trapézio, e dois pentágonos.

Questão 02

(Ronaebson)

Em uma competição de robótica, um dos robôs descreve um movimento numa plataforma de madeira de acordo com a figura abaixo.



Partindo de A, o robô caminha uma distância fixa de 30cm e gira 60° para esquerda, depois repete o procedimento, ou seja, percorre uma distância de 30 cm e gira 60º para esquerda e torna a repetir o procedimento até retornar ao ponto A.

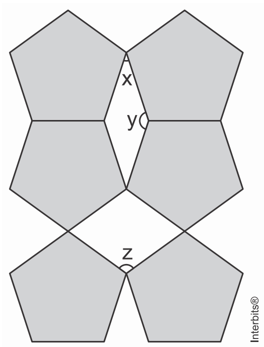
Dado que ao andar, o robô vai pintando a trajetória que ele descreve, ao retornar o ponto A o robô terá descrito no chão uma linha poligonal de

- **A** 90 cm.
- **B** 120 cm.
- **C** 150 cm.
- **D** 180 cm.
- **E** 240 cm.

Questão 03

(CP2)

O mosaico a seguir é formado por pentágonos regulares e losangos.



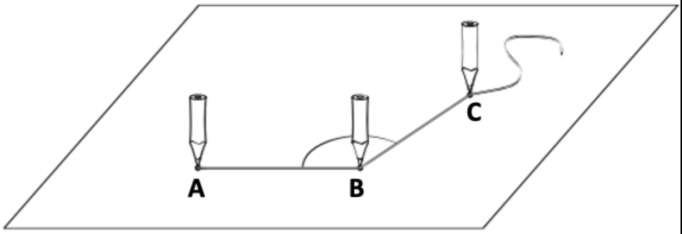
A soma das medidas dos ângulos x, y e z é igual a

- **A** 252º.
- **B** 288º.
- **C** 324º.
- **D** 360º.

Questão 04

(Ronaebson)

A área de vivência de uma escola deverá ser construída com a forma de um pentágono regular. A primeira providência a ser tomada para iniciar a construção é marcar no terreno os vértices e lados do pentágono, o que está sendo feito com a cravação de estacas e uma linha, como indicado na figura.



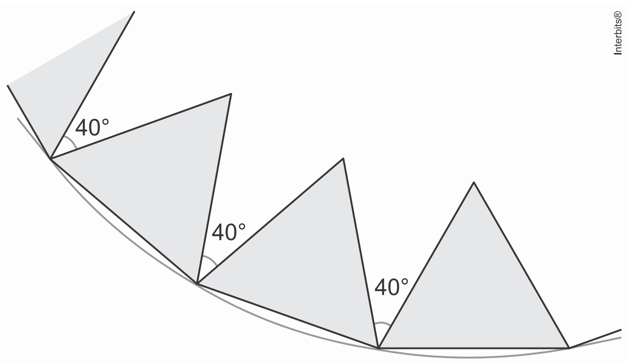
Após as marcações dos pontos A e B, para obtenção do ponto C, foi necessário a determinação da medida do ângulo $A\hat{B}C$ correspondente a medida do ângulo interno do pentágono regular que é igual a

- **A** 72º.
- **B** 108º.
- **C** 120º.
- **D** 144º.
- **E** 150º.

Questão 05

(UFRGS)

Um desenhista foi interrompido durante a realização de um trabalho, e seu desenho ficou como na figura abaixo.



Se o desenho estivesse completo, ele seria um polígono regular composto por triângulos equiláteros não sobrepostos, com dois de seus vértices sobre um círculo, e formando um ângulo de 40º, como indicado na figura.

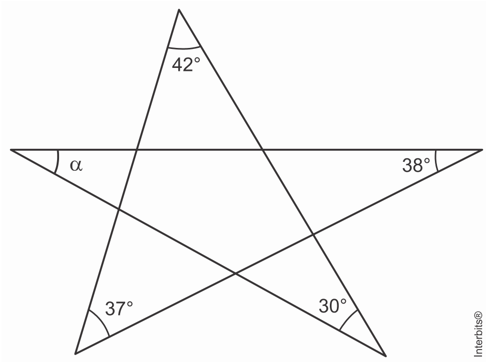
Quando a figura estiver completa, o número de triângulos equiláteros com dois de seus vértices sobre o círculo é

- **A** 10.
- **B** 12.
- **C** 14.
- **D** 16.
- **E** 18.

Questão 06

(IFAL)

Na figura a seguir, calcule o ângulo α.



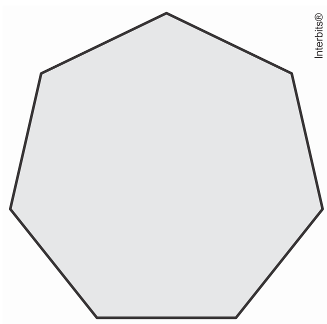
Dica: Use o resultado do ângulo externo de um triângulo.

- **A** 30º.
- **B** 33º.
- **C** 37º.
- **D** 38º.
- **E** 42º.

Questão 07

(IFSC)

Ana estava participando de uma gincana na escola em que estuda e uma das questões que ela tinha de responder era “quanto vale a soma das medidas dos ângulos internos do polígono regular da figura?”



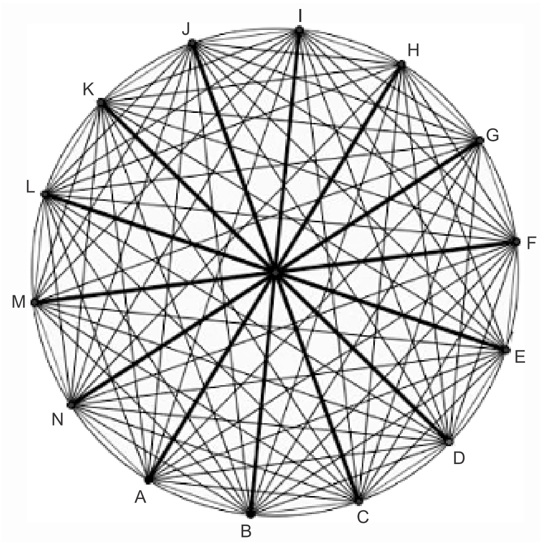
Para responder a essa pergunta, ela lembrou que seu professor ensinou que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, e que todo polígono pode ser decomposto em um número mínimo de triângulos. Sendo assim, Ana respondeu corretamente à pergunta dizendo:

- **A** 720º.
- **B** 900º.
- **C** 540º.
- **D** 1080º.
- **E** 630º.

Questão 08

(Ronaebson)

A figura a seguir mostra um polígono regular de 14 lados e todas as suas diagonais:



Fonte: https://clickexatas.wordpress.com. Acessado em 12/10/2015

O número de diagonais traçadas é de

Ⓐ 77.
Ⓑ 79.
Ⓒ 80.
Ⓓ 98.

Questão 09

(PUC-SP)

Atribui-se aos pitagóricos a ideia de números figurados. Esses números expressam configurações geométricas e representam um elo entre a geometria e a aritmética.
A tabela mostra alguns desses números e suas respectivas expressões algébricas gerais, em que n é um número natural diferente de zero.

Números figurados	**Oblongos**	**Pentagonais**	**Hexagonais**
Expressões algébricas gerais	$n(n+1)$	$\frac{n(3n-1)}{2}$	$2n^2 - n$

Fonte: Carl B. Boyer: História da matemática – Editora Edgard Blücher – 1974 (Adaptado)

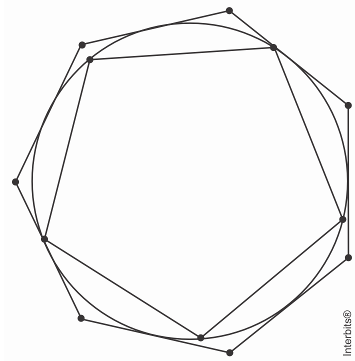
Sabendo que para determinado valor de n, o número pentagonal correspondente possui 3 unidades a menos que o número hexagonal, então, o valor do número oblongo que corresponde ao dobro do valor de n é

Ⓐ 18.
Ⓑ 26.
Ⓒ 34.
Ⓓ 42.

Questão 10

(CP2)

A figura a seguir mostra uma circunferência e dois polígonos. Um dos polígonos é inscrito nessa circunferência e outro, circunscrito a ela



Se M é o número de diagonais do polígono inscrito e N é o número de diagonais do polígono circunscrito, a razão entre M e N é igual a

Ⓐ 7/5.
Ⓑ 5/7.
Ⓒ 14/5.
Ⓓ 5/14.

Questão 11

(EEAR)

Ao somar o número de diagonais e o número de lados de um dodecágono obtém-se

Ⓐ 66
Ⓑ 56
Ⓒ 44
Ⓓ 42

Questão 12

(PUC_2017

De um icoságono regular são escolhidos dois vértices. Qual a probabilidade de que o segmento formado seja uma diagonal que passe pelo centro do icoságono?

Ⓐ 1/10
Ⓑ 1/19
Ⓒ 9/170
Ⓓ 1/17
Ⓔ 2/17

Questão 13

(CFTMG)

Somando-se todos os ângulos internos de três polígonos convexos obtém-se 2160º. Sabe-se que o número de lados desses polígonos é n – 2, n e n + 2. Dentre eles, o que possui menor número de lados é um

Ⓐ triângulo.
Ⓑ quadrilátero.
Ⓒ pentágono.
Ⓓ hexágono.

Questão 14

(CPS)

A arte e a arquitetura islâmica apresentam os mais variados e complexos padrões geométricos.
Na Mesquita de Córdoba, na Espanha, podemos encontrar um dos mais belos exemplos dessa arte. O esquema geométrico da figura 1 é um dos muitos detalhes dessa magnífica obra.

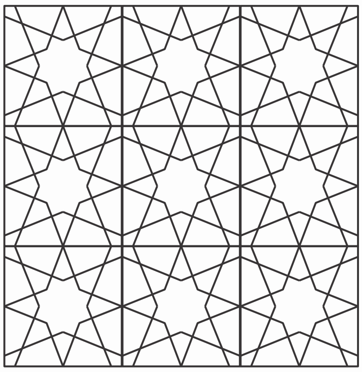
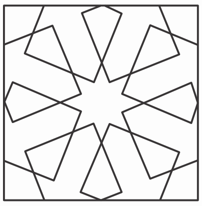
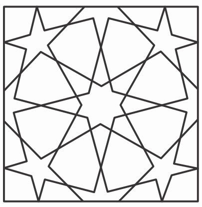
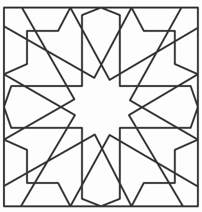


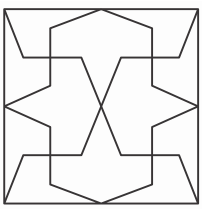
Figura 1
(fonte das figuras desta questao: BROUG, Eric. *Islamic: Geometric Patterns.* Londres. Thames & Hudson, 2008. Adaptado)

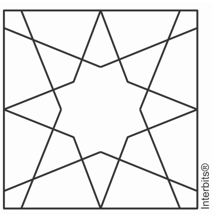
Assinale a alternativa que apresenta o padrão geométrico cuja repetição compõe a figura 1.

A 

B 

C 

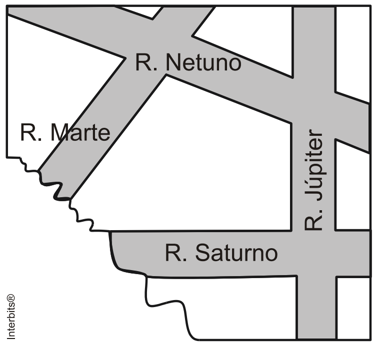
D 

E 

Questão 15

(IFSP)

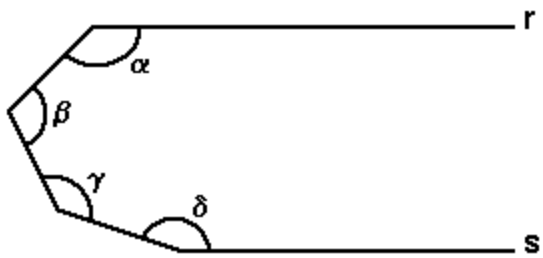
Uma pessoa pegou um mapa rasgado em que constava um terreno delimitado por quatro ruas. Na parte visível do mapa, vê-se que o ângulo formado pela rua Saturno e pela rua Júpiter é 90°; o ângulo formado pela rua Júpiter e pela rua Netuno é 110° e o ângulo formado pela rua Netuno e pela rua Marte é 100°. Nessas condições, a medida de um ângulo formado pelas ruas Marte e Saturno, na parte rasgada do mapa, é de



A 50°.
B 60°.
C 70°.
D 80°.
E 90°.

Questão 16

(UFES)



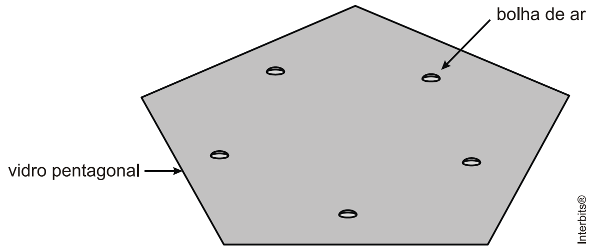
Na figura acima, as retas r e s são paralelas. A soma $\alpha + \beta + \gamma + \sigma$ das medidas dos ângulos indicados na figura é

A 180º.
B 270º.
C 360º.
D 480º.
E 540º.

Questão 17

(UNESP)

Um artesão foi contratado para ornamentar os vitrais de uma igreja em fase final de construção. Para realizar o serviço, ele precisa de pedaços triangulares de vidro, os quais serão cortados a partir de um vidro pentagonal, com ou sem defeito, que possui n bolhas de ar (n = 0, 1, 2…).
Sabendo que não há 3 bolhas de ar alinhadas entre si, nem 2 delas alinhadas com algum vértice do pentágono, e nem 1 delas alinhada com dois vértices do pentágono, o artesão, para evitar bolhas de ar em seu projeto, cortou os pedaços de vidro triangulares com vértices coincidindo ou com uma bolha de ar, ou com um dos vértices do pentágono.



Nessas condições, determine a lei de formação do número máximo de triângulos (T) possíveis de serem cortados pelo artesão, em função do número (n) de bolhas de ar contidas no vidro utilizado.

Questão 18

(FAAP)

A medida mais próxima de cada ângulo externo do heptágono regular da moeda de R$ 0,25 é:

Ⓐ 60º.
Ⓑ 45º.
Ⓒ 36º.
Ⓓ 83º.
Ⓔ 51º.

Questão 19

(UTFPR)

Os ângulos externos de um polígono regular medem 15º. O número de diagonais desse polígono é:

Ⓐ 56.
Ⓑ 24.
Ⓒ 252.
Ⓓ 128.
Ⓔ 168

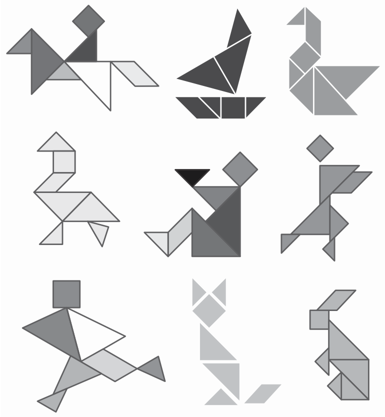
Questão 20

(CPS)

O Tangram é um quebra-cabeça chinês. Há uma lenda sobre esse quebra-cabeça que afirma que um jovem chinês, ao despedir-se de seu mestre, para uma longa viagem pelo mundo, recebeu uma tábua quadrada cortada em 7 peças (um quadrado, um paralelogramo e cinco triângulos).

Assim o discípulo poderia reorganizá-las para registrar todas as belezas da viagem. Lendas e histórias como essa sempre cercam a origem de objetos ou fatos, a respeito da qual temos pouco ou nenhum conhecimento, como é o caso do Tangram. Se é ou não uma história verdadeira, pouco importa: o que vale é a magia, própria dos mitos e lendas.

<https://tinyurl.com/htszezr> Acesso em: 03.03.2017. Adaptado.



<https://tinyurl.com/gngjyue> Acesso em: 03.03.2017. Original colorido.

A partir das informações do texto, as peças do Tangram são

Ⓐ sete polígonos côncavos.
Ⓑ apenas triângulos isósceles.
Ⓒ apenas quadriláteros regulares.
Ⓓ dois trapézios e cinco triângulos.
Ⓔ dois quadriláteros e cinco triângulos.

Questão 21

(IFSUL)

Sabe-se que a medida de cada ângulo interno de um polígono regular é 144º, então qual é o número de diagonais de tal polígono?

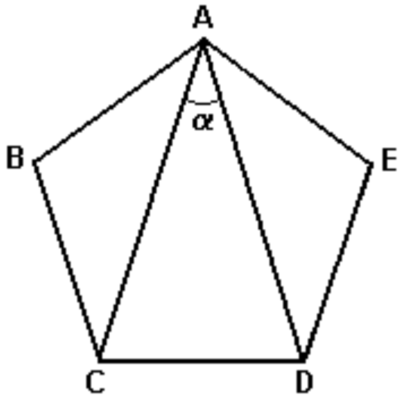
Ⓐ 10
Ⓑ 14
Ⓒ 35
Ⓓ 72

::: Pentágono :::

Questão 22

(FUVEST)

Na figura adiante, ABCDE é um pentágono regular. A medida, em graus, do ângulo á é:

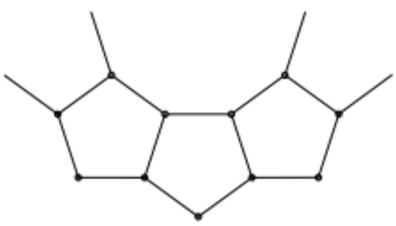


A 32º.
B 34º.
C 36º.
D 38º.
E 40º.

Questão 23

(Ronaebson)

No que diz respeito ao ouro, o quilate é uma unidade de pureza. Ouro 24 quilates é ouro puro. Geralmente, o ouro é misturado como outros metais mais resistentes, como o cobre ou a prata, deixando-o assim mais consistente e ideal para fazer jóias. Cada quilate indica 1/24 do todo, assim, por exemplo, se um jóia é feita de um metal que tem 16 partes de ouro e 8 partes de cobre, dizemos que ela é de ouro 16 quilates.
Um ourives produziu para uma joalheria um colar de ouro feito de placas vazadas no formato de pentágonos regulares. Cada uma dessas placas está conectada a outras duas placas, e parte do colar está ilustrado a figura a seguir.



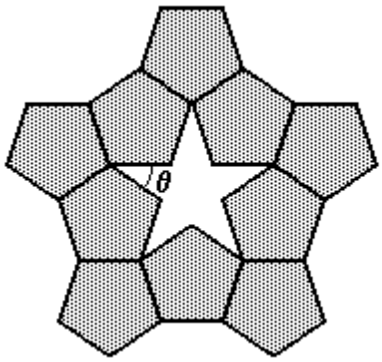
Sabendo que para produzir cada lado do pentágono ele usou 10g de ouro 18 quilates, quantos gramas de ouro puro foram usados para a produção dessa jóia?

A 400g.
B 375g.
C 300g.
D 100g.
E 75g.

Questão 24

(UNIFESP)

Pentágonos regulares congruentes podem ser conectados, lado a lado, formando uma estrela de cinco pontas, conforme destacado na figura.



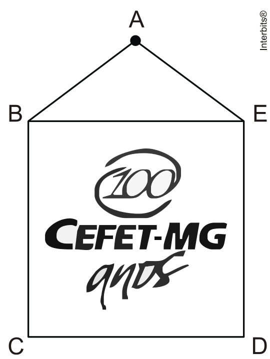
Nestas condições, o ângulo è mede

A 108º.
B 72º.
C 540.
D 36º.
E 18º.

Questão 25

(CFTMG)

Um painel quadrado BCDE, comemorativo dos 100 anos do CEFET-MG, encontra-se pendurado na parede de um dos corredores da escola, em um prego posicionado no ponto A, conforme figura abaixo. O triângulo ABE é isósceles e a medida do segmento AB corresponde a 2/3 da medida do lado do quadrado BCDE.



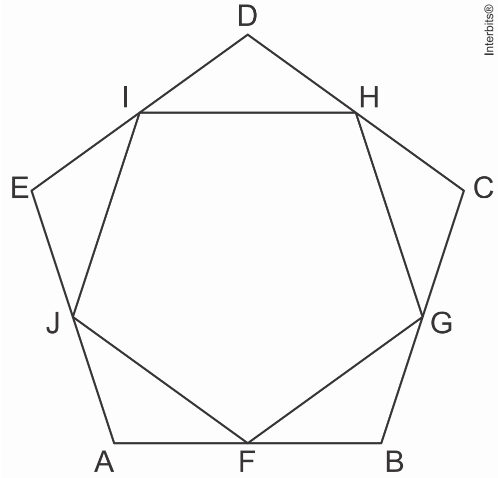
Se o perímetro do polígono ABCDE é 13 metros, então, sua área, em m², é

A $3(3+\sqrt{7})$.
B $3(12+\sqrt{7})$.
C $3(3+\frac{\sqrt{7}}{4})$.
D $3\left(4+\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$.

Questão 26

(UFRGS)

Considere um pentágono regular ABCDE de lado 1. Tomando os pontos médios de seus lados, constrói-se um pentágono FGHIJ, como na figura abaixo.



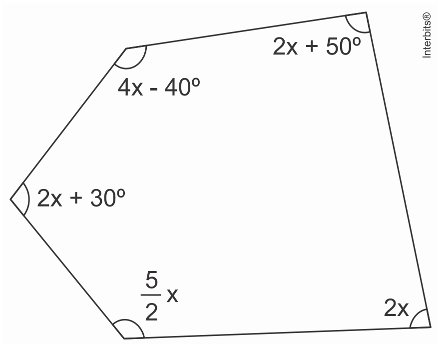
A medida do lado do pentágono FGHIJ é

A sen 36º.
B cos 36º.
C $\frac{sen\, 36°}{2}$.
D $\frac{\cos 36°}{2}$.
E 2 cos 36º.

Questão 27

(UTFPR)

O valor de X no pentágono abaixo é igual a:



A 25º.
B 40º.
C 250º.
D 540º.
E 1000º.

Questão 28

(IFSUL)

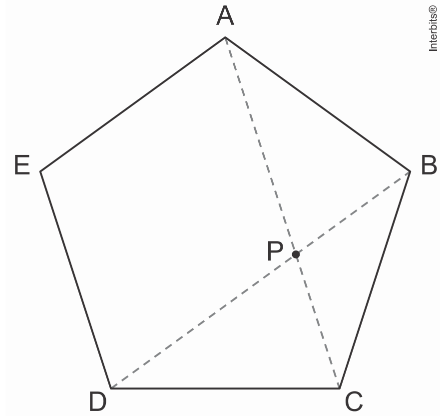
Um objeto de decoração tem a forma de um pentágono regular, apresentando todas as suas diagonais. Sabe-se que cada diagonal foi pintada de uma cor diferente das demais. Então, qual é o número de cores diferentes que foram utilizadas na pintura de tais diagonais?

A 5 **B** 6 **C** 8. **D** 9

Questão 29

(EPCAR_2018)

A figura a seguir é um pentágono regular de lado 2 cm.



Os triângulos DBC e BCP são semelhantes.

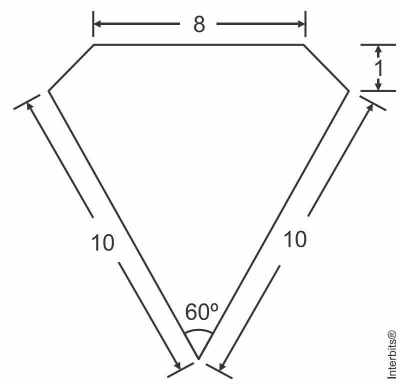
A medida de $\overline{AC}$, uma das diagonais do pentágono regular, em cm, é igual a

A $1+\sqrt{5}$
B $-1+\sqrt{5}$
C $2+\frac{\sqrt{5}}{2}$
D $2\sqrt{5}-1$

Questão 30

(UFRGS)

O emblema de um super-herói tem a forma pentagonal, como representado na figura abaixo.



A área do emblema é

A $9+5\sqrt{3}$
B $9+10\sqrt{3}$
C $9+25\sqrt{3}$
D $18+5\sqrt{3}$
E $18+25\sqrt{3}$

Questão 31

(UECE_2019)

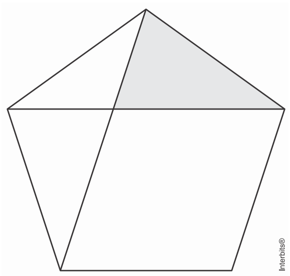
Considere MXYZW um pentágono regular e XYO um triângulo equilátero em seu interior (o vértice O está no interior do pentágono). Nessas condições, a medida, em graus, do ângulo XÔZ é

A 116. **B** 96. **C** 126. **D** 106.

Questão 32

(UFRGS)

Considere o pentágono regular de lado 1 e duas de suas diagonais, conforme representado na figura abaixo.



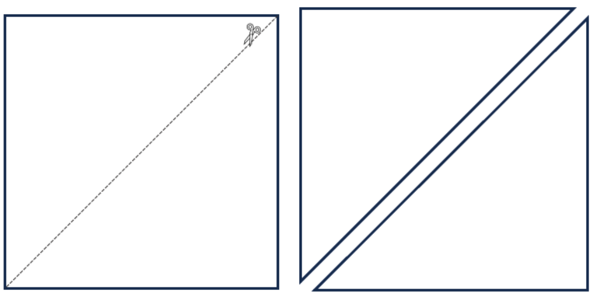
A área do polígono sombreado é

A $\frac{sen\ 36°}{2}$
B $\frac{sen\ 72°}{2}$
C $\frac{sen\ 72°}{3}$
D sen 36º.
E sen 72º.

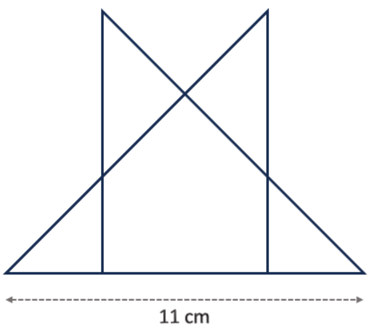
Questão 33

(UFRGS)

Rayenne corta uma folha quadrada de lado igual a 8 cm ao longo de uma diagonal, gerando dois triângulos.



Ao sobrepor esses triângulos, conforme descrito na imagem a seguir, a região de intersecção forma um pentágono.



A área do pentágono que representa a referida região de sobreposição dos dois triângulos é igual a

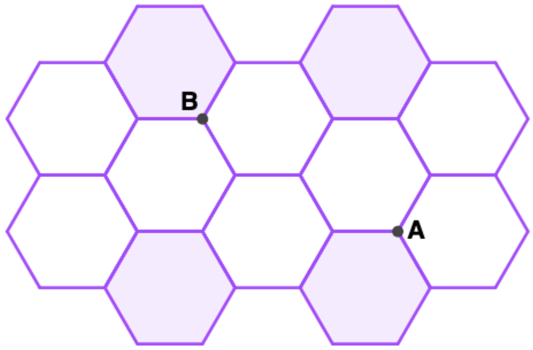
A $21{,}25\ cm^2$
B $27{,}50\ cm^2$
C $30{,}25\ cm^2$
D $31{,}25\ cm^2$
E $34{,}00\ cm^2$

::: Hexágono :::

Questão 34

(Ronaebson)

Um grande salão tem o seu piso formado por ladrilhos na forma de hexágonos regulares congruentes de lados iguais a 2m. Uma criança encontra-se no ponto A e um brinquedo no ponto B.



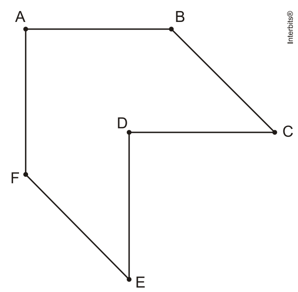
A menor distância percorrida pela criança para sair de A até B é igual a

A $4\ m.$
B $6\ m.$
C $4\sqrt{3}\ m.$
D $6\sqrt{3}\ m.$
E $8\ m.$

Questão 35

(Unioeste)

Uma empresa de cerâmica desenvolveu uma nova peça (de cerâmica) para revestimento de pisos. A peça tem formato de hexágono não regular na forma do desenho da figura. Na figura, os segmentos AB e DC são paralelos entre si, bem como os segmentos AF e DE e os segmentos BC e EF. Também o ângulo BAF mede 90° e o ângulo DEF mede 45°. A empresa fabrica esta peça com todos os lados de mesma medida ℓ. A área desta peça, em função do lado ℓ, é

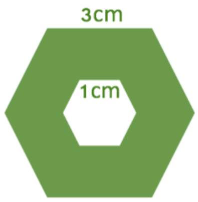


A $2l^2$.
B $l^2\sqrt{2}$.
C $6l^2$
D $\frac{l^2\sqrt{2}}{2}$
E $\frac{l^2}{2}$

Questão 36

(Ronaebson)

Um estudante deseja pintar de verde uma coroa hexagonal em um *post it* com as medidas indicadas na figura a seguir.



Sabendo que o hexágono maior tem lado com 3cm de medida e o hexágono interno tem lado medindo 1cm. A área a ser pintada de verde representada acima é, em cm^2, igual a

- **A** $3\sqrt{3}$.
- **B** $12\sqrt{3}$.
- **C** $24\sqrt{3}$.
- **D** $27\sqrt{3}$.
- **E** $30\sqrt{3}$.

Questão 37

(CP2-2018)

Alguns polígonos regulares, quando postos juntos, preenchem o plano, isto é, não deixam folga, espaço entre si. Por outro lado, outras combinações de polígonos não preenchem o plano.
A seguir, exemplos desse fato: a Figura 1, formada por hexágonos regulares, preenche o plano; a Figura 2, formada por pentágonos e hexágonos regulares, não preenche o plano.

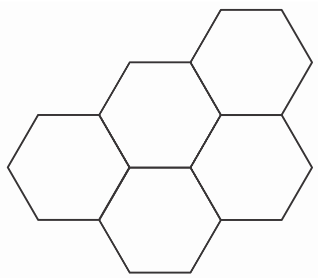


Figura 1

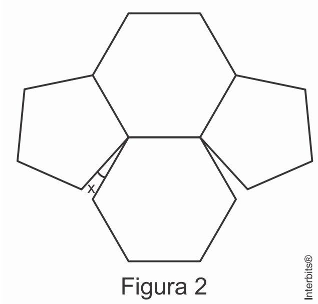


Figura 2

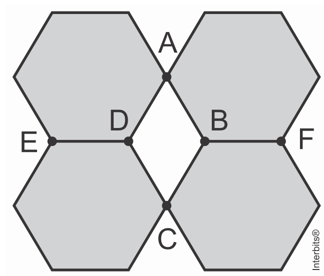
Na Figura 2, a medida do ângulo é igual a x

- **A** 14º.
- **B** 12º.
- **C** 10º.
- **D** 8º.

Questão 38

(UFRGS)

Os quatro hexágonos da imagem a seguir são regulares e cada um tem área de 48 cm^2. Os vértices do quadrilátero ABCD coincidem com vértices dos hexágonos. Os pontos E, D, B e F são colineares.



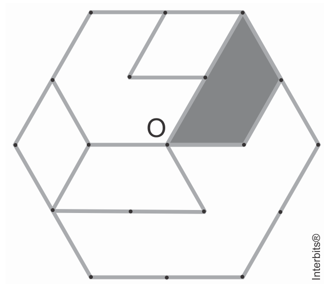
A área do quadrilátero ABCD, em cm^2, é

- **A** 8.
- **B** 10.
- **C** 16.
- **D** 24.
- **E** 36.

Questão 39

(CP2)

A figura a seguir é um hexágono regular, com centro O, dividido em polígonos. Todos os polígonos são formados por segmentos paralelos aos lados do hexágono. Os segmentos que partem dos lados do hexágono partem dos respectivos pontos médios desses lados.



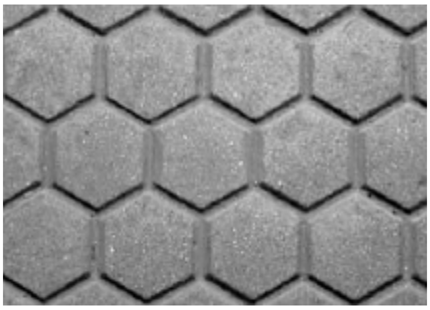
A fração do hexágono ocupada pelo trapézio sombreado é

- **A** $\frac{1}{8}$.
- **B** $\frac{1}{6}$.
- **C** $\frac{3}{16}$.
- **D** $\frac{2}{9}$.

Questão 40

(UPE_2017)

Rafael decidiu colocar cerâmicas com a forma de hexágonos regulares no piso da sala de seu escritório. Sabendo que a área do piso do escritório mede 25,5 m^2, que a cerâmica mede 10 cm de lado, desconsiderando a área ocupada pelos rejuntes, quantas pedras de cerâmica serão necessárias para cobrir todo o piso dessa sala?



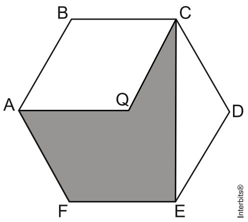
Considere $\sqrt{3} = 1{,}7$.

A 225.
B 425.
C 765.
D 1.000.
E 1250.

Questão 41

(FGV)

Na figura, ABCDEF é um hexágono regular de lado 1 dm, e Q é o centro da circunferência inscrita a ele.



O perímetro do polígono AQCEF, em dm, é igual a

A $4 + \sqrt{2}$
B $4 + \sqrt{3}$
C 6
D $4 + \sqrt{5}$
E $2(2 + \sqrt{2})$

Questão 42

(IFAL)

Um pai possui um terreno no formato de um hexágono regular com lado 12 m. Ele pretende construir um muro dividindo o terreno em dois trapézios de mesma área, um com frente para uma rua e outro para a outra, que serão dados para seus dois filhos. Qual o comprimento do muro?

A 12 m.
B 18 m.
C 24 m.
D 30 m.
E 36 m.

Questão 43

(FATEC)

As "áreas de coberturas" a serem atendidas por um serviço de telefonia móvel são divididas em células, que são iluminadas por estações-radiobase localizadas no centro das células.
As células em uma mesma área de cobertura possuem diferentes frequências, a fim de que uma célula não interfira na outra. Porém, é possível reutilizar a frequência de uma célula em outra célula relativamente distante, desde que a segunda não interfira na primeira.
Cluster é o nome dado ao conjunto de células vizinhas, o qual utiliza todo o espectro disponível. Uma configuração muito utilizada está exemplificada na Figura 1, que representa um modelo matemático simplificado da cobertura de rádio para cada estação-base.
O formato hexagonal das células é o mais prático, pois permite maior abrangência de cobertura, sem lacunas e sem sobreposições.
A figura 2 ilustra o conceito de reutilização de frequência por *cluster*, em que as células com mesmo número utilizam a mesma frequência.

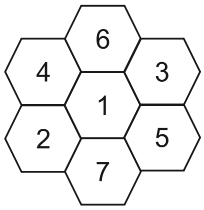


Figura 1: *cluster* de sete células

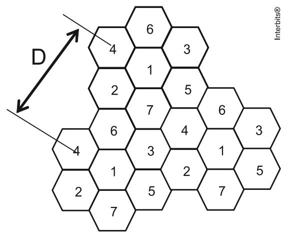


Figura 2: reuso de frequência

(www.teleco.com.br/tutoriais/tutorialatalaia/pagina_2.asp e www.teleco.com.br/tutoriais/tutorialsmsloc/pagina_3.asp Acesso em: 05.10.2012. Adaptado)

Na figura 2, os hexágonos são congruentes, regulares, têm lado de medida R e cobrem uma superfície plana. Para determinar a distância D, distância mínima entre o centro de duas células que permitem o uso da mesma frequência, pode-se traçar um triângulo cujos vértices são os centros de células convenientemente escolhidas, conforme a figura 3.

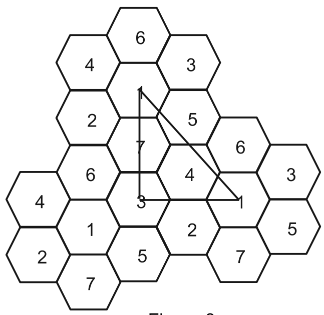


Figura 3

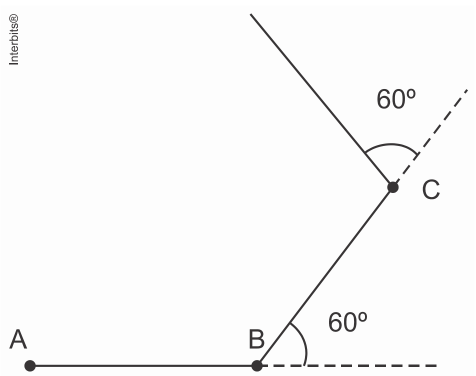
Assim sendo, o valor de D, expresso em função de R, é igual a

A $R\sqrt{21}$
B 5R
C $3R\sqrt{3}$
D $R\sqrt{30}$
E 6R

Questão 44

(Fac. Pequeno Príncipe)

A figura a seguir descreve o movimento executado por uma máquina para o corte de uma placa metálica:



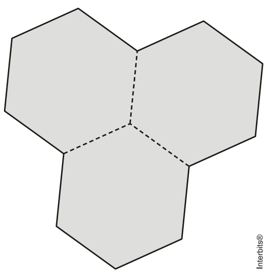
Partindo de A, ela sistematicamente avança 6 cm e gira 60º para esquerda, até retornar ao ponto A A área da superfície recortada, em cm^2, é:

- Ⓐ $18\sqrt{3}$
- Ⓑ $36\sqrt{3}$
- Ⓒ $54\sqrt{3}$
- Ⓓ $64\sqrt{3}$
- Ⓔ $120\sqrt{3}$

Questão 45

(FUVEST)

Uma das piscinas do Centro de Práticas Esportivas da USP tem o formato de três hexágonos regulares congruentes, justapostos, de modo que cada par de hexágonos tem um lado em comum, conforme representado na figura abaixo. A distância entre lados paralelos de cada hexágono é de 25 metros.



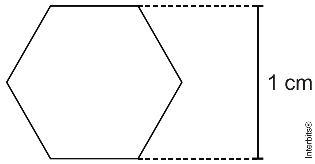
Assinale a alternativa que mais se aproxima da área da piscina.

- Ⓐ 1.600 m^2
- Ⓑ 1.800 m^2
- Ⓒ 2.000 m^2
- Ⓓ 2.200 m^2
- Ⓔ 2.400 m^2

Questão 46

(PUCRS)

Para uma engrenagem mecânica, deseja-se fazer uma peça de formato hexagonal regular. A distância entre os lados paralelos é de 1 cm, conforme a figura abaixo.



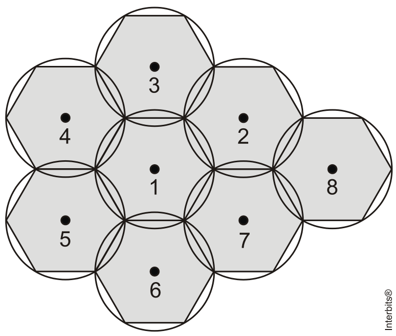
O lado desse hexágono mede, em cm,

- Ⓐ $\frac{1}{2}$
- Ⓑ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- Ⓒ $\sqrt{3}$
- Ⓓ $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- Ⓔ 1

Questão 47

(UFF)

No estudo da distribuição de torres em uma rede de telefonia celular, é comum se encontrar um modelo no qual as torres de transmissão estão localizadas nos centros de hexágonos regulares, congruentes, justapostos e inscritos em círculos, como na figura a seguir.



Supondo que, nessa figura, o raio de cada círculo seja igual a 1 km, é correto afirmar que a distância $d_{3,8}$ (entre as torres 3 e 8), a distância$d_{3,5}$ (entre as torres 3 e5) e a distância $d_{5,8}$ (entre as torres 5 e8) são, respectivamente, em km, iguais à

- Ⓐ $d_{3,8} = 2\sqrt{3};\ d_{3,5} = 3;\ d_{5,8} = 3 + 2\sqrt{5}.$
- Ⓑ $d_{3,8} = 4;\ d_{3,5} = 3;\ d_{5,8} = 5.$
- Ⓒ $d_{3,8} = 4;\ d_{3,5} = \frac{3\sqrt{3}}{2};\ d_{5,8} = 4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}.$
- Ⓓ $d_{3,8} = 2\sqrt{3};\ d_{3,5} = 3;\ d_{5,8} = \sqrt{21}.$
- Ⓔ $d_{3,8} = 4;\ d_{3,5} = \frac{3\sqrt{3}}{2};\ d_{5,8} = \frac{9}{2}.$

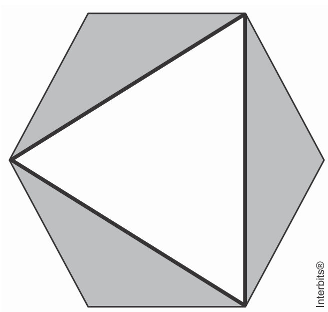
Questão 48

(CP2_2017)

Um heliponto é um local destinado exclusivamente às operações de aterragem e decolagem de helicópteros. Diferentemente dos heliportos, os helipontos não dispõe de instalações e facilidades complementares, tais como área de taxiamento, reabastecimento, pátios e hangares para estacionamento e manutenção dos helicópteros.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Heliponto. Adaptado. Acesso em 22/10/2016.

Oscar, arquiteto, foi incumbido de fazer o projeto de um heliponto para a cobertura de um edifício comercial no centro da cidade. Decidiu fazer a pista de pouco no formato de hexágono regular com 12 metros de lado, sendo a chamada "área de toque" um triângulo equilátero inscrito no mesmo.



Dessa forma, por segurança, o helicóptero deveria pousar, sempre, na parte interna do triângulo equilátero. E, para facilitar a visualização da "área de toque", a região interna ao hexágono e externa ao triângulo equilátero seria pintada com tinta amarela fluorescente.

Sendo assim, a área a ser pintada com essa tinta amarela teria medida, em m^2, igual a

A $216\sqrt{3}$.
B 216.
C $108\sqrt{3}$.
D 108.

Questão 49

(IFCE)

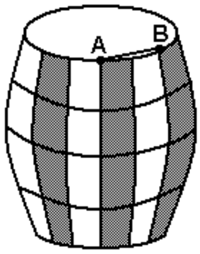
Um robô, caminhando em linha reta, parte de um ponto A em direção a um ponto B, que distam entre si cinco metros. Ao chegar ao ponto B, gira novamente 60° à esquerda e caminha mais cinco metros, repetindo o movimento e o giro até retornar ao ponto de origem. O percurso do robô formará um polígono regular de

A 10 lados.
B 9 lados.
C 8 lados.
D 7 lados.
E 6 lados.

Questão 50

(UFPB)

A figura a seguir representa um barril totalmente fechado, que foi construído unindo-se 12 tábuas encurvadas e iguais, encaixadas e presas a outras 2 tábuas circulares e iguais, de raio 10 cm.



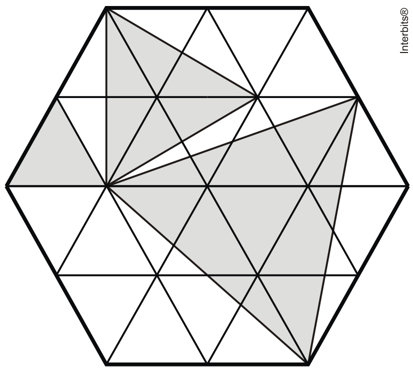
Com base nessas informações, pode-se concluir que a medida, em cm, do segmento de reta AB é igual a:

A 10
B 8
C 7
D 6
E 5

Questão 51

(CFTRJ)

A figura abaixo consta de um hexágono formado por 24 triângulos equiláteros de lado 1. A área sombreada é formada por três triângulos equiláteros de tamanhos distintos entre si.
Se S é a área sombreada e B é a área não sombreada do hexágono, o valor de $\frac{B}{S}$ é

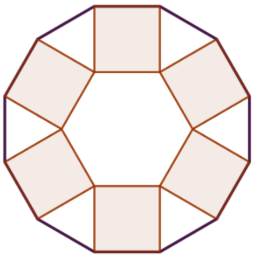


A $\frac{11}{24}$
B $\frac{15}{24}$
C $\frac{9}{11}$
D $\frac{13}{11}$

Questão 52

(Ronaebson)

O espaço de vivência do IFPB – Campus Santa Rita tem a forma de um dodecágono regular. O projeto entregue pelo arquiteto decompôs o dodecágono em seis quadrados, seis triângulos equiláteros e um hexágono regular central, como indicado na figura. No projeto proposto pelo arquiteto, em cada quadrado seria colocado um caramanchão (pergolado de madeira – suporte que dá sustentação às plantas trepadeiras), que além de muito bonito, dá um toque especial na decoração do ambiente.



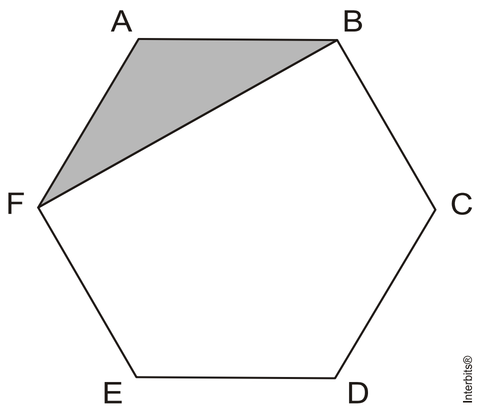
Sabendo que o dodecágono regular tem lado medindo 5 metros, a área total do espaço de vivência é igual a

- **A** $25 + 25\sqrt{3}\, m^2$.
- **B** $150 + 30\sqrt{3}\, m^2$.
- **C** $150 + 35\sqrt{3}\, m^2$.
- **D** $150 + 75\sqrt{3}\, m^2$.
- **E** $300 + 75\sqrt{3}\, m^2$.

Questão 53

(MACKENZIE)

Na figura, ABCDEF é um hexágono regular e a distância do vértice D à diagonal FB é 3. A área do triângulo assinalado é

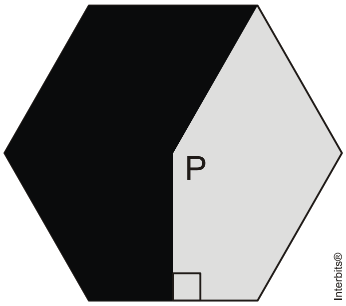


- **A** $\sqrt{3}$
- **B** $2\sqrt{3}$
- **C** $4\sqrt{3}$
- **D** 3
- **E** 6

Questão 54

(CFTMG)

Um hexágono regular de área 12 cm^2 e de centro P foi pintado em duas tonalidades, conforme a figura.



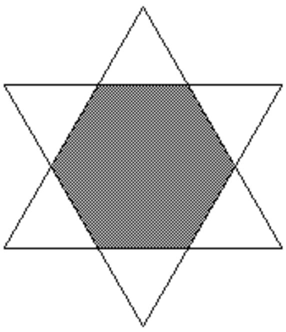
A área pintada na tonalidade mais clara, em cm^2, é

- **A** 3.
- **B** 4.
- **C** 5.
- **D** 6.

Questão 55

(UNIFESP)

O hexágono cujo interior aparece destacado em cinza na figura regular e origina-se da sobreposição de dois triângulos equiláteros.



Se k é a área do hexágono, a soma das áreas desses dois triângulos é igual a:

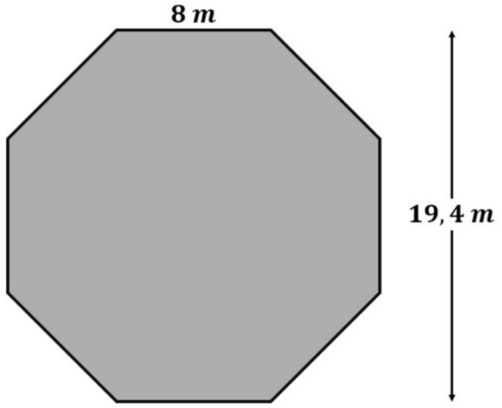
- **A** k.
- **B** 2k.
- **C** 3k.
- **D** 4k.
- **E** 5k.

::: Octógono :::

Questão 56

(Weslley e Rayenne)

Numa competição paraibana de Artes Marciais Mistas (MMA), a instituição Lutas Criativas que organiza o evento decidiu montar um ringue especial em formato de um octógono regular para a abertura do campeonato.
A equipe do evento montou um esquema que representa as medidas aproximadas desse ringue octogonal.



Um dos participantes da competição decidiu perguntar à equipe organizadora qual seria a área desse espaço.

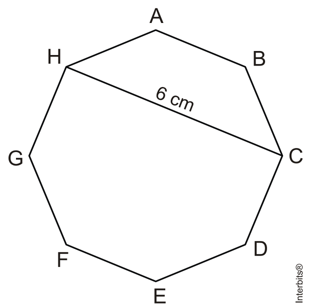
Baseado no esquema apresentado acima, a instituição Lutas Criativas divulgou que a medida correta da área seria aproximadamente:

A $77{,}6\ m^2$
B $96\sqrt{3}\ m^2$
C $128\sqrt{3}\ m^2$
D $232{,}8\ m^2$
E $310{,}4\ m^2$

Questão 57

(EPCAR)

A figura abaixo representa um octógono regular tal que $CH = 6\ cm$.



A área desse polígono, em cm^2, é igual a

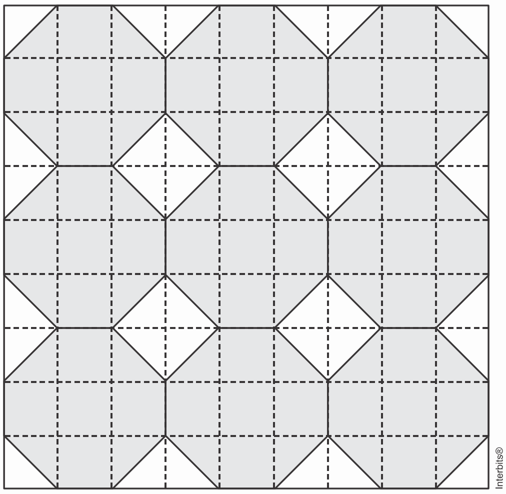
A $56\left(\sqrt{2}-1\right)$
B $64\left(\sqrt{2}-1\right)$
C $72\left(\sqrt{2}-1\right)$
D $80\left(\sqrt{2}-1\right)$

Questão 58

(PUC-SP)

"Toda energia necessária para o consumo na Terra provém de fonte natural ou sintética. Ultimamente, tem havido muito interesse em aproveitar a energia solar, sob a forma de radiação eletromagnética, para suprir ou substituir outras fontes de potência. Sabe-se que células solares podem converter a energia solar em energia elétrica e que para cada centímetro quadrado de célula solar, que recebe diretamente a luz do sol, é gerado 0,01 watt de potência elétrica."

Considere que a malha quadriculada abaixo representa um painel que tem parte de sua superfície revestida por 9 células solares octogonais, todas feitas de um mesmo material.



Se, quando a luz do sol incide diretamente sobre tais células, elas são capazes de, em conjunto, gerar 50.400 watts de potência elétrica, então a área, em metros quadrados, da superfície do painel não ocupada pelas células solares, é:

A 144
B 189
C 192
D 432
E 648

Questão 59

(ACAFE)

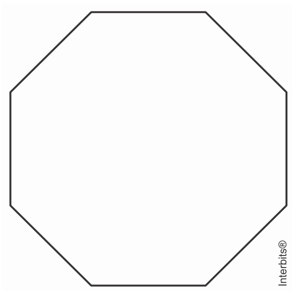
Tomando-se ao acaso uma das diagonais formadas pelos vértices de um octógono regular, a probabilidade de que a diagonal passe pelo centro do octógono é de:

A 50%.
B 40%.
C 20%.
D 0%.

Questão 60

(IFPE_2019)

As lutas de UFC acontecem num ringue com formato de um octógono regular, conforme a figura abaixo.



Para a montagem das laterais do ringue, o responsável pelo serviço precisaria da medida do ângulo interno formado entre dois lados consecutivos, de modo que pudesse montar sem erros. Consultando o manual do ringue, ele verificou que o ângulo que precisava media

Ⓐ 100°
Ⓑ 120°
Ⓒ 140°
Ⓓ 135°
Ⓔ 150°

Questão 61

(IFPE_2018)

As formas geométricas aparecem em vários objetos do nosso cotidiano. Observe, na imagem abaixo, um relógio octogonal, objeto que fascina qualquer admirador de relógios.

Disponível em: <http://www.safirabrasilleiloes.com.br/peca.asp?Id=2928996>. Acesso em: 04 out. 2017.

A soma das medidas dos ângulos internos de um octógono como o da imagem acima é

Ⓐ 1080º.
Ⓑ 900º.
Ⓒ 1440º.
Ⓓ 360º.
Ⓔ 180º.

Questão 62

(IFPE_2017)

Um porta-retratos tem a forma de um octógono regular conforme imagem a seguir.

Disponível em: <Fonte: http://www.mauriciojasso.com/galeria/cache/lo-nuevo/DSC07649-Resolucion-de-Escritorio.JPG_595.jpg>. Acesso: 02 out. 2016.

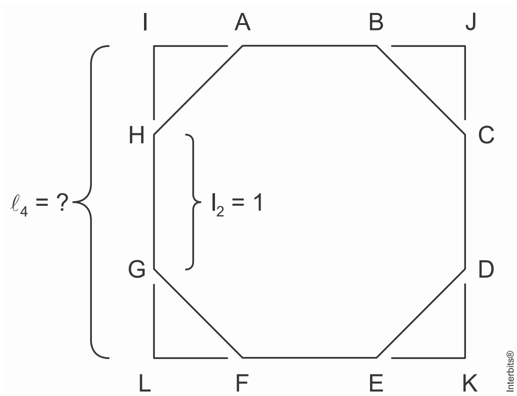
A medida de cada ângulo interno desse octógono é

Ⓐ 45º.
Ⓑ 60º.
Ⓒ 90º.
Ⓓ 135º.
Ⓔ 30º.

Questão 63

(PUC-RJ_2019)

A figura mostra um octógono regular de lado $\overline{GH} = \ell_8 = 1$. Prolongamos os lados AB, CD, EF e GH para obter o quadrado IJKL. Quanto mede o lado $\overline{IL} = \ell_4$?

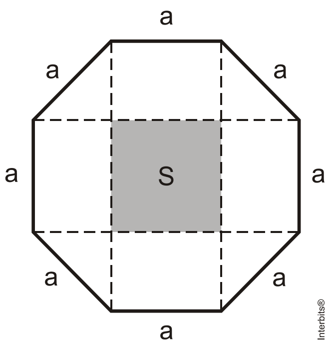


Ⓐ 2
Ⓑ $1+\sqrt{2}$
Ⓒ $1-\sqrt{2}$
Ⓓ $\frac{12}{5}$
Ⓔ 3

Questão 64

(Insper)

As disputas de MMA (Mixed Martial Arts) ocorrem em ringues com a forma de octógonos regulares com lados medindo um pouco menos de 4 metros, conhecidos como “Octógonos”. Medindo o comprimento exato de seus lados, pode-se calcular a área de um “Octógono” decompondo-o, como mostra a figura a seguir, em um quadrado, quatro retângulos e quatro triângulos retângulos e isósceles.



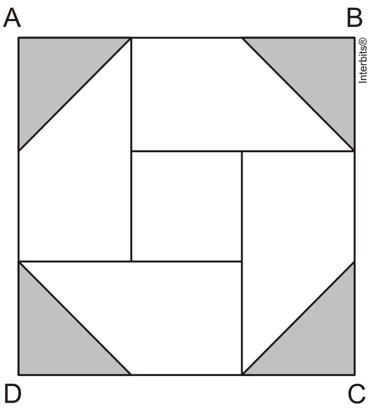
A medida do lado do quadrado destacado no centro da figura é igual à medida a do lado do “Octógono”. Se a área desse quadrado é S, então a área do “Octógono” vale

- **A** $S(2\sqrt{2}+1)$
- **B** $S(\sqrt{2}+2)$
- **C** $2S(\sqrt{2}+1)$
- **D** $2S(\sqrt{2}+2)$
- **E** $4S(\sqrt{2}+1)$

Questão 65

(CFTMG)

A figura abaixo representa o vitral de uma janela quadrada ABCD de área S, em que cada lado esta dividido em três segmentos congruentes. Retirando-se os quatro triângulos sombreados, obtém-se um octógono, cuja área é



- **A** $\frac{7}{9}S$
- **B** $\frac{5}{8}S$
- **C** $\frac{3}{4}S$
- **D** $\frac{2}{3}S$

Questão 66

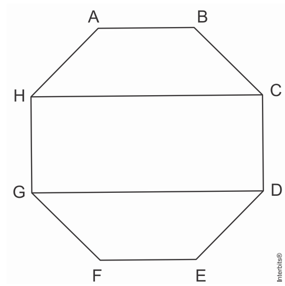
(CP2)

Um dos esportes que mais tem atraído o público nos últimos anos é o MMA, em que as lutas são disputadas dentro de um ringue com a forma de um octógono regular. Segundo seu criador, Rorion Gracie, um dos fatores que levou à escolha deste formato de ringue foi o fato de seus ângulos internos evitarem que os lutadores fiquem presos nos cantos.

http://ec.1.thumbs.canstockphoto.com/canstock6607318.jpg
acessado em 8 - Nov - 2012

a) Quanto mede cada um dos ângulos internos de um octógono regular?

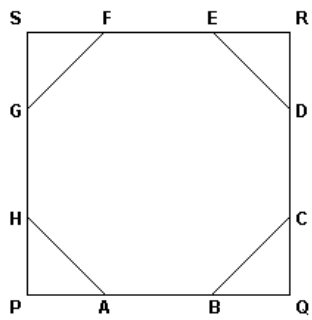
b) Qualquer octógono pode ser dividido em dois trapézios e um retângulo, conforme a figura ao lado. Calcule o valor aproximado da área interna desse octógono, sabendo que cada lado mede aproximadamente 4 metros. (use $\sqrt{2} \cong 1{,}4$)



Questão 67

(UFMG)

O octógono regular de vértices ABCDEFGH, cujos lados medem 1 dm cada um, está inscrito no quadrado de vértices PQRS, conforme mostrado nesta figura:



Então, é correto afirmar que a área do quadrado PQRS é

- **A** $1+2\sqrt{2}\ dm^2$
- **B** $1+\sqrt{2}\ dm^2$
- **C** $3+2\sqrt{2}\ dm^2$
- **D** $3+\sqrt{2}\ dm^2$

Questão 68

(ENEM)

Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

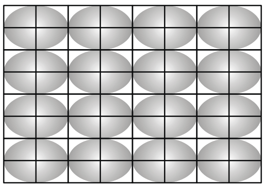


Figura 1: Ladrilhos retangulares pavimentando o plano

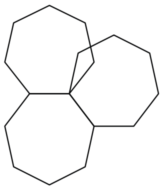
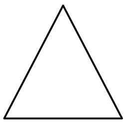
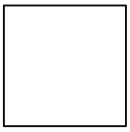
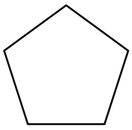
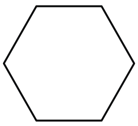
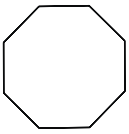
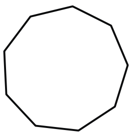


Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou superposição)

A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

Nome	Triângulo	Quadrado	Pentágono
Figura			
Ângulo interno	60°	90°	108°

Nome	Hexágono	Octágono	Eneágono
Figura			
Ângulo interno	120°	135°	140°

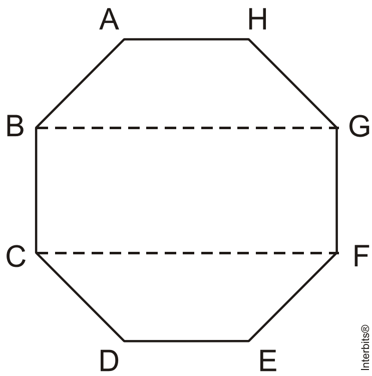
Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um

- A) triângulo.
- B) quadrado.
- C) pentágono.
- D) hexágono.
- E) eneágono.

Questão 69

(UFRGS)

Observe o octógono regular *ABCDEFGH* representado na figura abaixo.



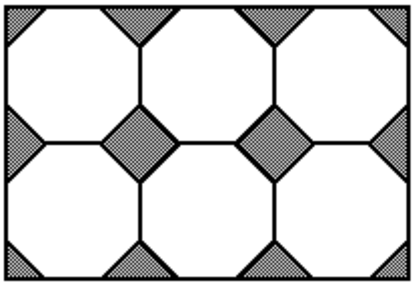
Nesse octógono, a razão entre a área do trapézio *ABGH* e a área do retângulo *BCFG* é

- A) $\frac{1}{2}$.
- B) $\frac{3}{4}$.
- C) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.
- D) $\frac{1+\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}$.
- E) 1.

Questão 70

(UFRGS)

Seis octógonos regulares de lado 2 são justapostos em um retângulo, como representado na figura adiante.



A soma das áreas das regiões sombreadas na figura é

- A) 16.
- B) $16\sqrt{2}$.
- C) 20.
- D) $20\sqrt{2}$.
- E) 24.

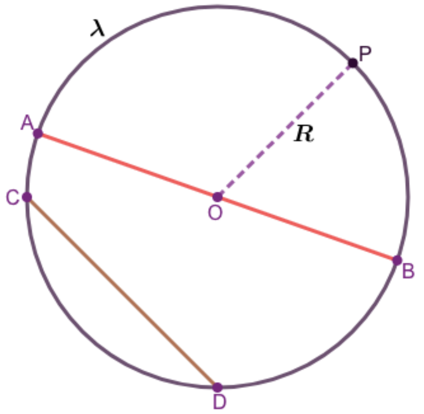
Gabarito _ Polígonos			
Hora de Praticar			
Questão	Resposta	Questão	Resposta
01	C	**36**	B
02	D	**37**	B
03	B	**38**	C
04	B	**39**	A
05	E	**40**	D
06	B	**41**	B
07	B	**42**	C
08	A	**43**	A
09	D	**44**	C
10	D	**45**	A
11	A	**46**	B
12	B	**47**	D
13	B	**48**	C
14	E	**49**	E
15	B	**50**	A
16	E	**51**	D
17	$T = 2n + 3$	**52**	D
18	E	**53**	A
19	C	**54**	C
20	E	**55**	C
21	C	**56**	E
22	C	**57**	C
23	C	**58**	A
24	D	**59**	C
25	C	**60**	D
26	B	**61**	A
27	B	**62**	D
28	A	**63**	B
29	A	**64**	C
30	C	**65**	A
31	C	**66**	a) $a_{interno} = 135°$ b) $A_{oct} = 76{,}4\ m^2$
32	A	**67**	C
33	A	**68**	B
34	B	**69**	A
35	B	**70**	E

CIRCUNFERÊNCIA, CÍRCULO E SUAS PARTES

RONAEBSON
MATEMÁTICA CRIATIVA

CIRCUNFERÊNCIA, CÍRCULO E SUAS PARTES

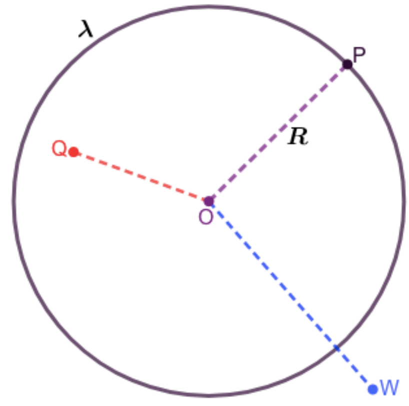
Dados um ponto fixo O e uma distância R, uma circunferência é definida como o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância ao ponto fixo O é constante e igual a R.



$$\lambda = \{P \in \alpha : d_{P,O} = R\}$$

O : Centro da Circunferência
$\overline{CD}$: Corda – segmento de reta que une dois pontos da circunferência
$\overline{AB}$: Diâmetro (corda máxima $AB = 2R$)

Um ponto qualquer no plano pode pertencer a circunferência, ser interior ou exterior a ela. Vejamos:

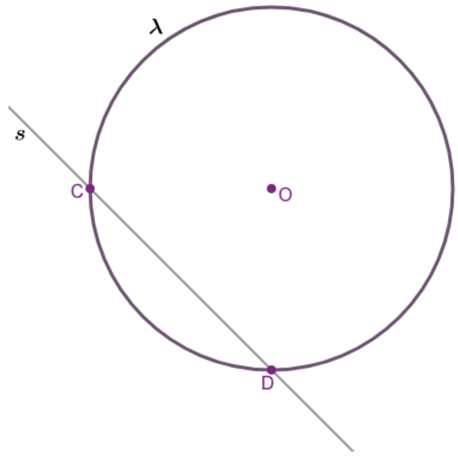


$$P \in \lambda \implies d_{P,O} = R$$
$$Q \in int(\lambda) \implies d_{Q,O} < R$$
$$W \in \lambda \implies d_{W,O} > R$$

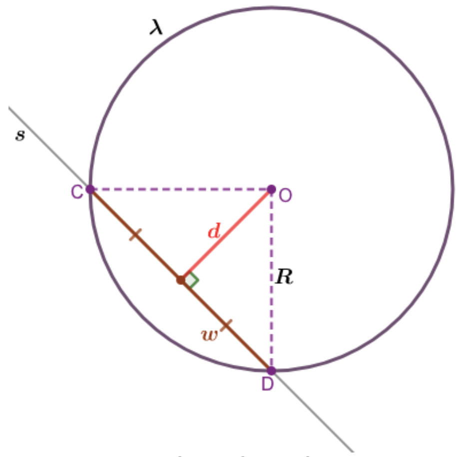
Já uma reta, pode ser tangente, secante ou externa a circunferência:

- **Reta Secante:**

Uma reta *s* é dita secante a uma circunferência quando ela intersecta a circunferência em dois pontos.



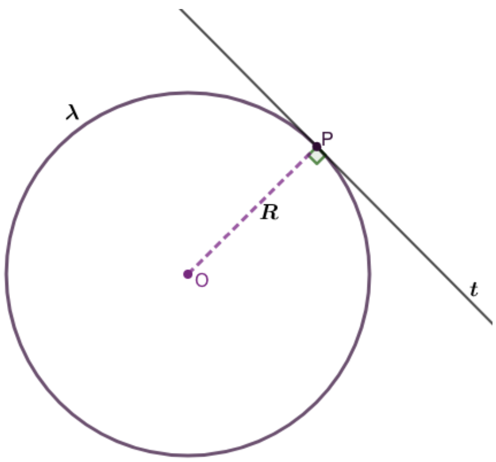
Observe agora que a distância *d* da reta *s* até o centro da circunferência é menor do que o raio *R*.



$$R^2 = d^2 + w^2$$

- **Reta Tangente:**

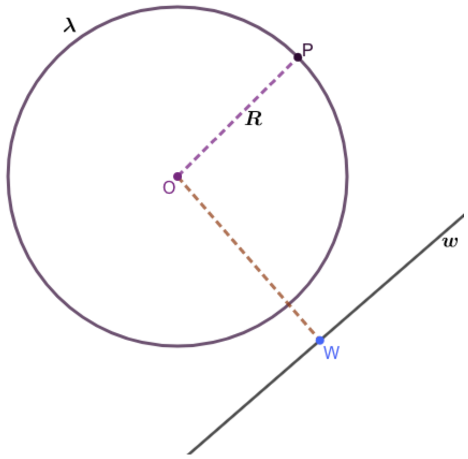
Uma reta *t* é dita tangente a uma circunferência quanto ela intersecta a circunferência em apenas um ponto.



Perceba que a distância da reta *t* ao centro da circunferência é igual ao raio *R* e, além disso, o raio da circunferência no ponto de tangência é perpendicular a reta tangente.

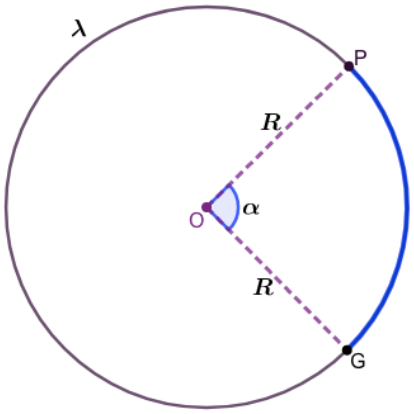
- **Reta Exterior:**

Uma reta *w* é dita exterior a uma circunferência quando ela não intersecta a circunferência.



Ângulos e Arcos na Circunferência

Dados dois pontos na *P* e *G* numa circunferência, chamamos de arcos às partes em que ela fica dividida.



$Arco\ \widehat{PG}$

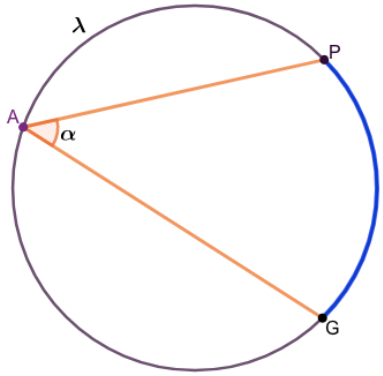
A medida de um arco é igual a medida do *ângulo central* que o determina, assim:

$$med(\widehat{PG}) = \alpha$$

A demonstração dos resultados a seguir fica como exercício, lembrando que nossa referência estará sempre no fato de que a medida do arco é igual a medida do ângulo central que o determina.

- **Ângulo Inscrito:**

Um ângulo inscrito numa circunferência é o ângulo formado por duas cordas da circunferência e cujo vértice pertence a circunferência.

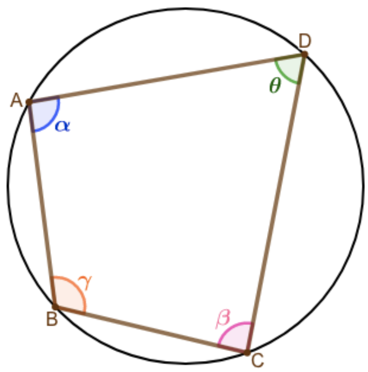


$$\boldsymbol{\alpha = \frac{\widehat{PQ}}{2}}$$

A medida de um ângulo inscrito é sempre igual à metade da medida do arco que ele determina.

Como consequência desse teorema, podemos listar aqui outros dois resultados importantes:

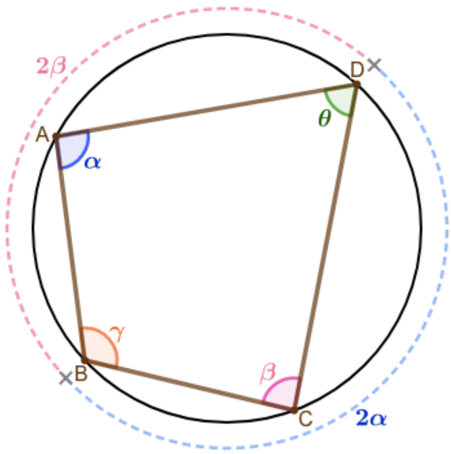
Teorema: *Se um quadrilátero convexo está inscrito numa circunferência, então a soma de dois ângulos opostos é sempre igual a 180º.*



De fato, como α é um ângulo inscrito, temos que o arco $\widehat{BCD}$ mede 2α e, como β é um ângulo inscrito, temos que o arco $\widehat{DAB}$ mede 2β, daí:

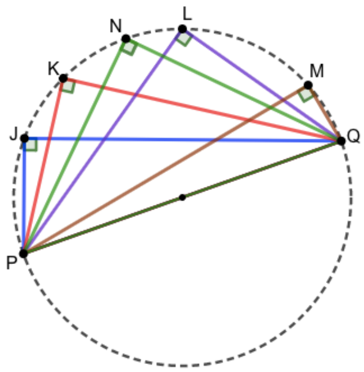
$$2\alpha + 2\beta = 360^o \implies \boldsymbol{\alpha + \beta = 180^o}$$

Consequentemente, $\boldsymbol{\theta + \gamma = 180^o}$.

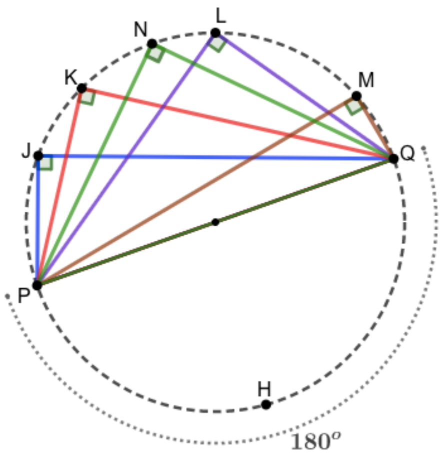


É possível mostrar também que se num quadrilátero convexo a soma de dois ângulos opostos é igual a 180º, então ele está inscrito numa circunferência.

Teorema: *Todo triângulo inscrito numa circunferência cujo maior lado coincide com o diâmetro é um triângulo retângulo.*

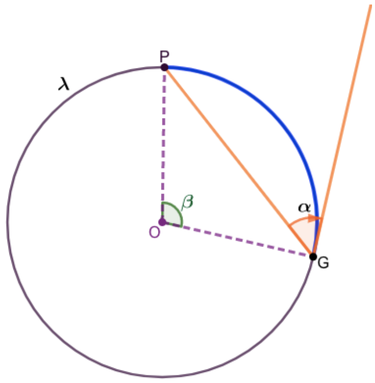


De fato, observe em cada um dos triângulos gerados, o ângulo oposto ao diâmetro é um ângulo inscrito que determina o arco $\widehat{PHQ} = 180^o$, assim, todos eles medem 90^o.



- **Ângulo de Segmento:**

Um ângulo de segmento é o ângulo formado por uma corda e por uma reta tangente a circunferência e cujo vértice pertence a circunferência.

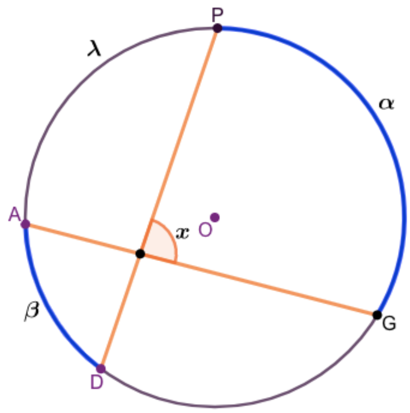


$$\alpha = \frac{\widehat{PQ}}{2} = \frac{\beta}{2}$$

A medida de um ângulo de segmento é sempre igual à metade da medida do arco que ele determina.

- **Ângulo Excêntrico Interior:**

Um ângulo excêntrico interior é o ângulo formado por duas cordas da circunferência e cujo vértice está no interior da circunferência e não coincide com o centro.

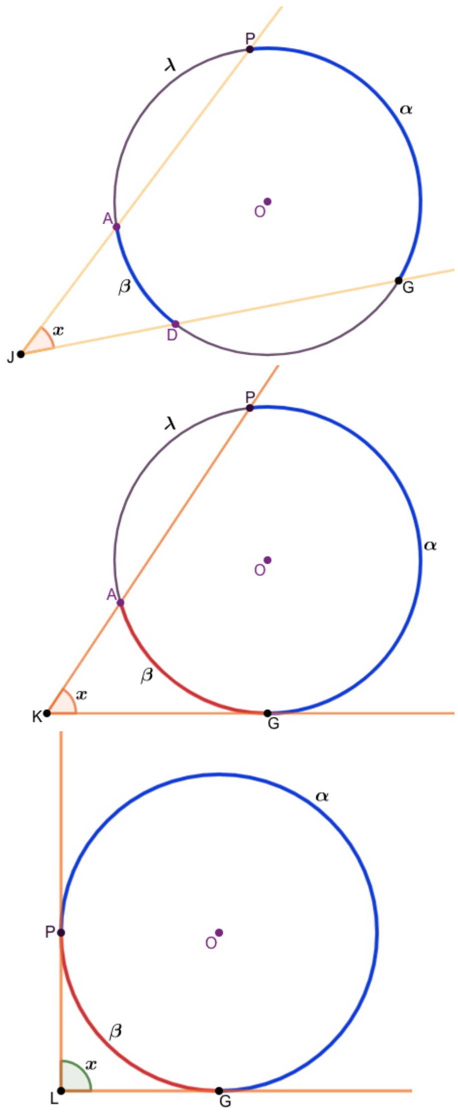


$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

A medida de um ângulo excêntrico interior é igual a média aritmética dos arcos que ele determina.

- **Ângulo Excêntrico Exterior:**

Se, a partir de um ponto exterior a uma circunferência, conduzirmos duas semirretas, ambas secantes à circunferência, ou ambas tangentes ou uma secante e outra tangente, estas semirretas formam um ângulo chamado ângulo excêntrico exterior.



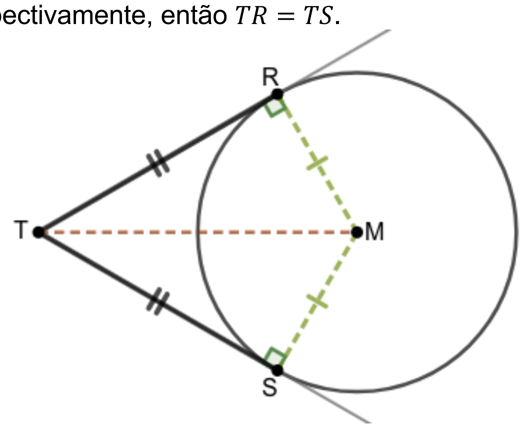
$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

A medida de um ângulo excêntrico exterior é igual a metade da diferença dos arcos que ele determina.

Relações Métricas na Circunferência

- **Teorema do Bico:**

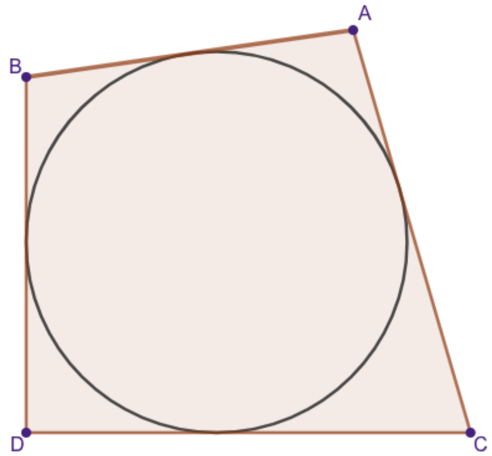
Se por um ponto T conduzirmos duas retas tangentes a uma circunferência nos pontos R e S, respectivamente, então $TR = TS$.



Esse resultado é assegurado pela congruência dos triângulos TRM e TSM.

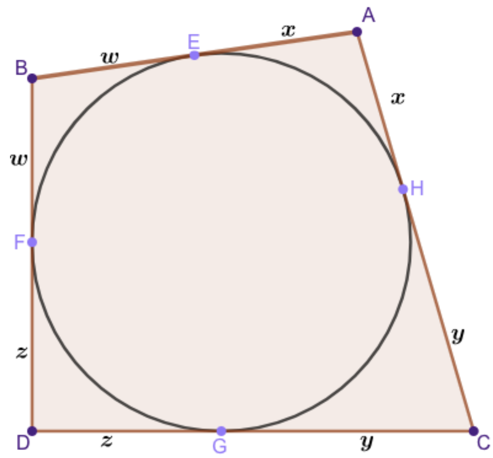
Como consequência do Teorema do Bico, temos o seguinte resultado:

Corolário: Se um quadrilátero está circunscrito a uma circunferência, então a soma de dois lados opostos é igual a soma dos outros dois.



$$\boldsymbol{AB + CD = AC + BD}$$

De fato, pois pelo Teorema do Bico, temos:



$$AE = AH = x$$
$$BE = BF = w$$
$$DF = DG = z$$
$$CG = CH = y$$

Assim,

$$AB + CD = x + w + y + z$$

e

$$AC + BD = x + y + w + z$$

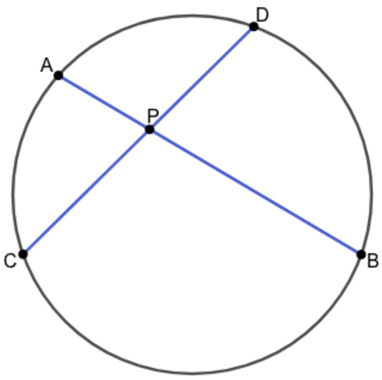
Logo,

$$AB + CD = AC + BD.$$

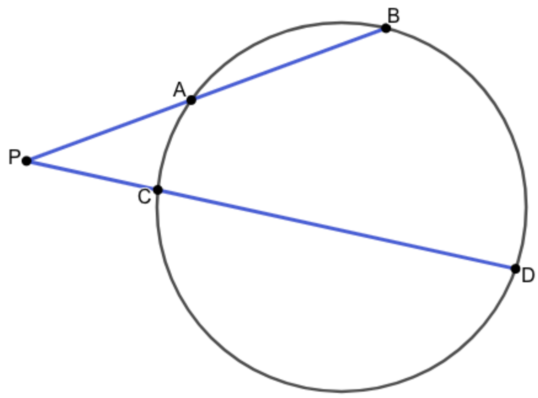
- **Potência de um Ponto:**

Teorema 01: Se duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de uma circunferência concorrem em um ponto P interior ou exterior a esse círculo, o produto $PA \cdot PB$ é igual a $PC \cdot PD$.

$$\boldsymbol{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$$



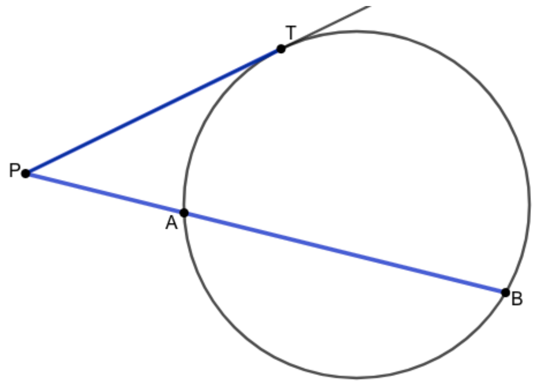
$$\boldsymbol{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$$



$$\boldsymbol{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$$

Teorema 02: Se P é um ponto exterior a uma circunferência, *r* uma reta secante a circunferência nos pontos A e B e que passa por P e t uma reta tangente a circunferência no ponto T e que também contém P, então

$$\boldsymbol{PT^2 = PA \cdot PB.}$$

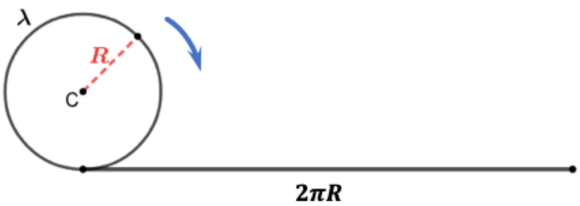


Para os casos anteriores, o produto $PA \cdot PB$ é dito potência do ponto P em relação à circunferência.

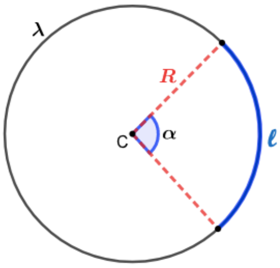
Comprimento de Arco

Dada uma circunferência λ de raio R, o seu comprimento (perímetro) é dado pela expressão:

$$\boldsymbol{C = 2\pi R}$$



O comprimento (ℓ) de um arco é proporcional a sua medida (α).



Assim, para calcularmos o comprimento (ℓ) do arco, basta fazermos uma regra de três:

- *α dado em graus:*

$$\begin{array}{ccc} 360^o & \longrightarrow & 2\pi R \\ \alpha & \longrightarrow & \ell \end{array}$$

$$\boldsymbol{\ell = \frac{\alpha \cdot 2\pi R}{360^o}}$$

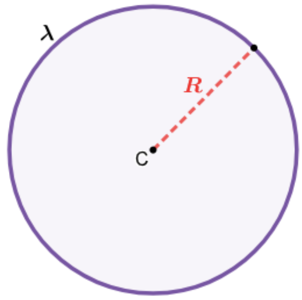
- *α dado em radianos:*

$$\begin{array}{ccc} 2\pi\, rad & \longrightarrow & 2\pi R \\ \alpha\, rad & \longrightarrow & \ell \end{array}$$

$$\boldsymbol{\ell = \alpha R}$$

Círculo

Dada uma circunferência λ de centro O e raio R, um círculo de centro O e raio R é conjunto formado por todos os pontos pertencentes a circunferência e ao seu interior.



Observe que ao considerarmos os polígonos regulares inscritos e circunscritos no círculo anterior, a medida que aumentamos o número de lados desse polígono, os perímetros dos polígonos se aproximam do comprimento da circunferência, os apótemas dos polígonos se aproximam do raio da circunferência e as áreas dos polígonos se aproximam da área do círculo. Assim, lembrando que a área de um polígono regular é igual ao produto do semiperímetro do polígono pelo seu apótema, temos que:

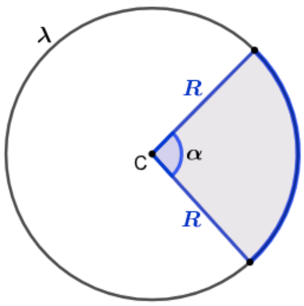
$$\left.\begin{matrix} r\text{: apótema do polígono} \\ p\text{: semiperímetro} \\ A_{PR} = p \cdot r \end{matrix}\right\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left\{\begin{matrix} r \longrightarrow R \\ p \longrightarrow \pi R \\ A_C \longrightarrow \pi R \cdot R \end{matrix}\right.$$

Logo:

$$\boldsymbol{A_{Círculo} = \pi R^2}$$

Setor Circular

Dado um círculo de centro O e raio R, um setor circular é uma região limitada por dois raios e o arco cujos extremos são os extremos dos raios no círculo.



Note que, quando dobramos o arco, a área do setor dobra, quando triplicamos o ângulo central, a área do setor também triplica, de modo que, a área do setor é diretamente proporcional à medida do arco ou mesmo ao seu comprimento.

Assim, para calcularmos a área do setor circular, basta aplicarmos uma regra de três:

- *Quando é dada a medida α do arco em graus:*

$$\begin{matrix} 360^o & \longrightarrow & \pi R^2 \\ \alpha & \longrightarrow & A_S \end{matrix}$$

$$A_S = \frac{\alpha \cdot \pi R^2}{360^o}$$

- *Quando é dado a medida α do arco em radianos:*

$$\begin{matrix} 2\pi\, rad & \longrightarrow & \pi R^2 \\ \alpha\, rad & \longrightarrow & A_S \end{matrix}$$

$$A_S = \frac{\alpha \cdot \pi R^2}{2\pi} \Longrightarrow A_S = \frac{\alpha \cdot R^2}{2}$$

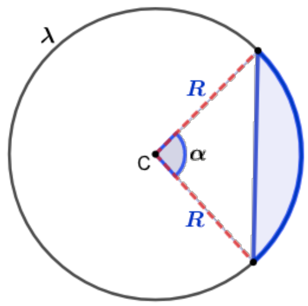
- *Quando é dado o comprimento ℓ do arco:*

$$\begin{matrix} 2\pi R & \longrightarrow & \pi R^2 \\ \ell & \longrightarrow & A_S \end{matrix}$$

$$A_S = \frac{\ell \cdot \pi R^2}{2\pi R} \Longrightarrow A_S = \frac{\ell \cdot R}{2}$$

Segmento Circular

Dado um círculo de centro O e raio R, um segmento circular é uma região limitada por uma corda e pelo arco da circunferência que ela subtende.



Assim, para calcularmos a área de um segmento circular, basta fazer a diferença entre a área do setor circular e a área do triângulo limitado pela corda que defini o segmento circular e os dois raios. Logo, para α dado em radianos, temos:

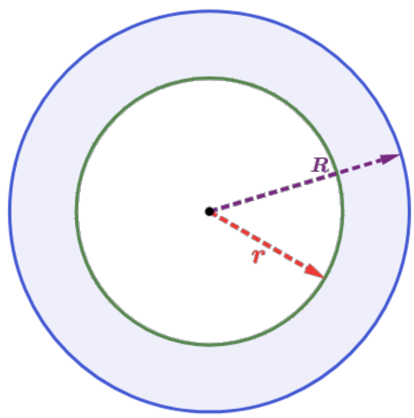
$$A_{Sg} = A_S - A_\Delta$$

$$A_{Sg} = \frac{\alpha \cdot R^2}{2} - \frac{R^2 \cdot sen\alpha}{2}$$

$$\boldsymbol{A_{Sg} = \frac{R^2 \cdot (\alpha - sen\alpha)}{2}}$$

Coroa Circular

Região limitada por duas circunferências, de modo que a coroa circular será a região interior a circunferência maior e exterior a circunferência menor.



$$A_{Cc} = A_{Círculo\ Maior} - A_{Círculo\ Menor}$$

$$A_{Cc} = \pi R^2 - \pi r^2$$

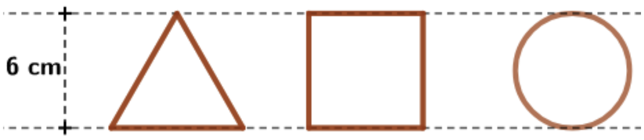
$$\boldsymbol{A_{Cc} = \pi \cdot (R^2 - r^2)}$$

Hora de Praticar

Questão 01

(Ronaebson)

Um pedaço de barbante será dividido em três partes, de modo que, com a primeira será construído um triângulo equilátero, com a segunda será construído um quadrado e com a terceira será construída uma circunferência, todos com 6 cm de altura, conforme a figura:



Nessas condições, o comprimento total do barbante, em centímetros, é

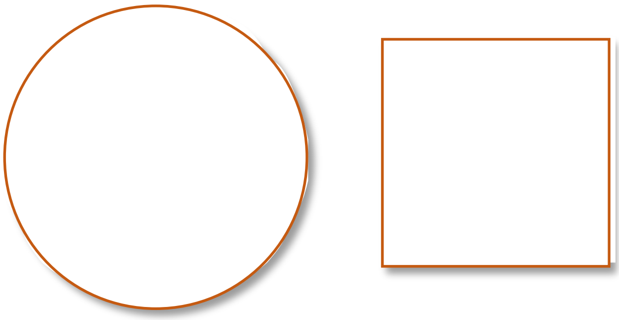
A $4\sqrt{3} + 6 + 3\pi$.
B $12\sqrt{3} + 24 + 6\pi$.
C $4\sqrt{3} + 16 + 3\pi$.
D $18 + 24 + 6\pi$.
E $6\sqrt{3} + 24 + 9\pi$.

Questão 02

Um marceneiro precisa construir um tampo de madeira para a confecção de uma mesa. Foram dadas duas possibilidades:

- um tampo circular de raio 2m; ou
- um tampo quadrado cujo lado mede 3 m.

Ambas as possibilidades de tampo têm a mesma espessura.



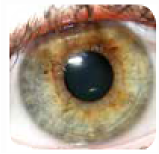
Quando comparadas as áreas de cada um dos tampos, tem-se que a razão entre a área do tampo circular pela área do tampo quadrado é igual a

A $^{4\pi}/_{9}$
B $^{4\pi}/_{3}$
C $^{2\pi}/_{9}$
D $^{2\pi}/_{3}$
E $^{9}/_{4\pi}$

Questão 03

Óptica da visão

Para que consigamos enxergar, cada elemento do olho exerce seu papel, entre eles, podemos destacar a íris e a pupila.



A íris (na figura acima) é a área verde/cinza/marrom (castanha), medindo cerca de 12mmde diâmetro. A pupila é um espaço vazio em forma circular, normalmente preto, definido pela margem interior da íris. Mede de 1,5mm de diâmetro com muita luz até 8 mm de diâmetro com pouca luz. Sua função é controlar a passagem de luz que chega até a retina. Quando o olho é exposto a níveis de iluminação muito elevados, a pupila se contrai, efeito chamado de *Pupillary Reflex*.

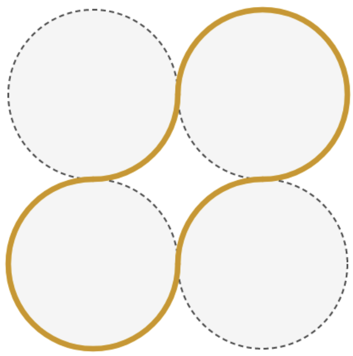
Admita a íris da figura recebendo **pouca luz** e tendo um formato circular plano, alinhado com a pupila. A área da região em verde/cinza/marrom (castanha) é, em mm^2, aproximadamente

(Adote $\pi \cong 3{,}1$)

A 20.
B 62.
C 110.
D 248.
E 440.

Questão 04

No protótipo da construção de um hand spinner foi decidido que serão colocados quatro discos de raio igual a 2 cm, de modo que dois a dois consecutivos fossem tangentes, com seus centros sendo vértices de um quadrado. Além disso, para que ele chamasse mais atenção, foi designado que sobre a curva com traçado mais forte descrita na imagem será colocada uma fita dourada de led que acenderá ao girá-lo.

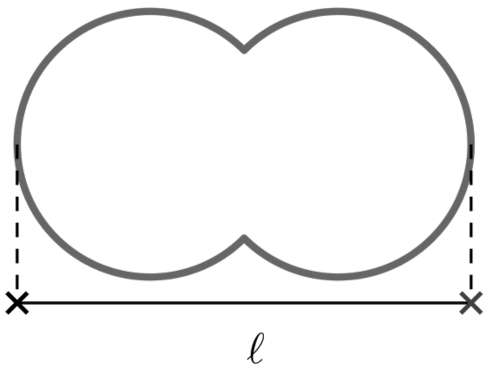


O comprimento da fita de led que será utilizada nesse hand spinner é igual a

A $4\pi\ cm$.
B $6\pi\ cm$.
C $8\pi\ cm$.
D $12\pi\ cm$.
E $16\pi\ cm$.

Questão 05

Dois arcos metálicos circulares idênticos correspondentes a 3/4 de uma circunferência de raio 1m, são unidos por suas extremidades de modo a formar a figura plana a seguir.



Supondo desprezível a largura do arco, o valor da largura máxima ℓ, representada na figura, em metro, é igual a

A $2+2\sqrt{2}$.
B $2+\sqrt{2}$.
C $2\sqrt{2}$.
D 3.
E 4.

Questão 06

(Ronaebson)

"Fez também o mar de fundição, redondo, de dez côvados de uma borda até a outra borda, e de cinco de altura; e um fio de trinta côvados era a medida de sua circunferência."

1 Reis 7:23 (Bíblia Sagrada)

O mar de fundição ou mar de bronze era um grande receptáculo para água, modelado de bronze fundido, que estava no pátio do Templo de Salomão. Ele é descrito com "boca" circular de 10 côvados de diâmetro e circunferência de 30 côvados de comprimento.

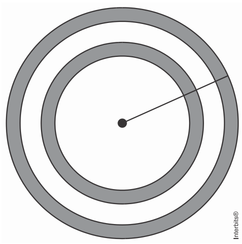
Tomando como referência as medidas usadas na época para a confecção desse mar de fundição, o valor usado para a aproximação de π era

A 3.
B 3,1.
C 3,12.
D 3,14.
E 3,16.

Questão 07

(CFTMG)

Na figura a seguir, há 4 circunferências concêntricas cujos raios medem 1 cm; 0,9 cm; 0,8 cm; 0,7 cm.



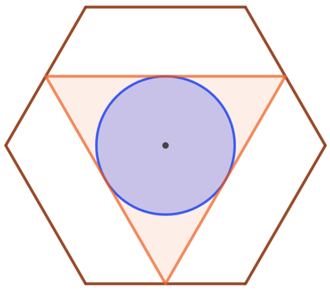
A área da região sombreada, em cm^2, é (use 3 como aproximação para π).

A 1,02
B 1,59
C 1,92
D 2,25.

Questão 08

(Ronaebson)

Um designer gráfico está confeccionando uma logomarca para um novo canal de televisão, o HTC. Para tanto, ele desenhou um hexágono cujos lados medem 20 cm, depois, em seu interior, desenhou um triângulo equilátero cujos vértices são pontos médios de três lados desse hexágono e, finalmente, traçou uma circunferência inscrita nesse triângulo, obtendo assim a imagem a seguir.



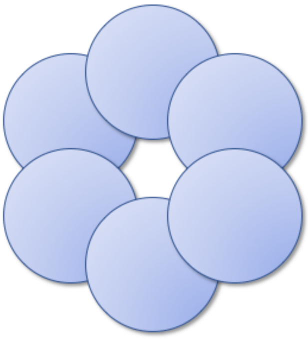
Para que ele tenha referência para a aplicação da marca posteriormente, calculou a razão entre o raio da circunferência e o lado do hexágono, obtendo para essa razão o valor de

A $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
B $\frac{\sqrt{3}}{20}$.
C $\frac{3}{2}$.
D $\frac{2}{3}$.
E $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Questão 09

(Ronaebson)

Uma criança estava brincando com seis placas circulares de $2\ dm^2$ de área cada uma. Ela dispôs as placas, como na figura a seguir, de modo que a área comum a cada duas placas que se sobrepõem é igual a $^1/_3\ dm^2$.



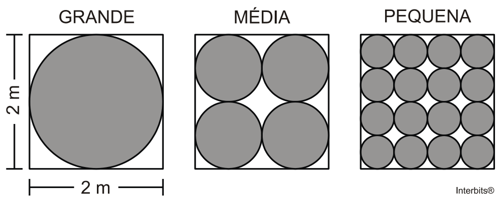
A área da região coberta pelas placas é igual a

- **A** $6\ dm^2$.
- **B** $8\ dm^2$.
- **C** $9\ dm^2$.
- **D** $10\ dm^2$.
- **E** $12\ dm^2$.

Questão 10

(ENEM)

Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas.



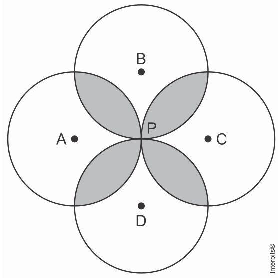
Área do círculo: πr^2.
As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que

- **A** a entidade I recebe mais material do que a entidade II.
- **B** a entidade I recebe metade de material do que a entidade III.
- **C** a entidade II recebe o dobro de material do que a entidade III.
- **D** as entidades I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III.
- **E** as três entidades recebem iguais quantidades de material.

Questão 11

(CFTMG)

A figura abaixo representa quatro circunferências de mesmo raio e centros A, B, C e D. Essas circunferências tangenciam-se em um único ponto P, comum às quatro circunferências, e o quadrilátero ABCD é um quadrado cujo lado mede $2\sqrt{2}$cm.



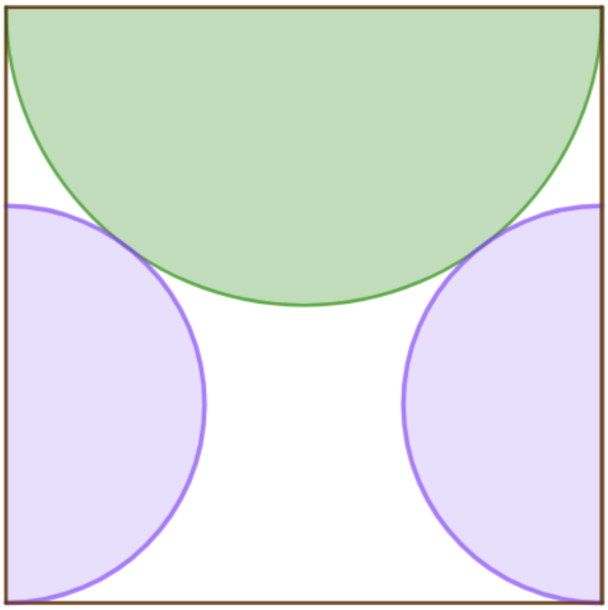
A área da região sombreada na figura, em cm^2 é

- **A** $2\pi - 4$.
- **B** $8\pi - 4$.
- **C** $8\pi - 16$.
- **D** $16\pi - 16$.

Questão 12

(Ronaebson)

O jardim da mansão da família Bueno tem a forma de um quadrado de 36 metros de lado. Nesse jardim, a região correspondente ao semicírculo maior corresponde a um gramado e as regiões correspondentes aos dois semicírculos menores, tangentes ao semicírculo maior, correspondem a um orquidário.

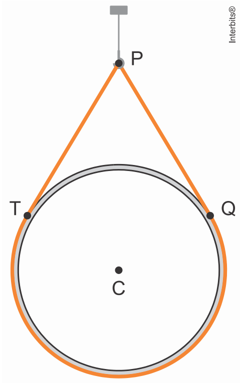


O raio do semicírculo menor é igual a

- **A** 6 m.
- **B** 12 m.
- **C** 15 m.
- **D** 18 m.
- **E** 24 m.

Questão 13

Uma peça circular de centro C e raio 12 m está suspensa por uma corda alaranjada, perfeitamente esticada e fixada em P. Os pontos T e Q são de tangência dos segmentos retilíneos da corda com a peça, e a medida do ângulo agudo TPQ é 60º.



A peça será transportada por um guindaste e colocada sobre uma superfície plana e assim que a peça encostar na superfície, ainda com a corda perfeitamente esticada, alguns calços devem ser colocados para evitar o rolamento da peça. Para que isso aconteça, o operador do guindaste deve planejar a que altura o ponto P deve estar do chão e assim que a altura seja atingida, inicie-se o procedimento para calçar a peça.

Desprezando-se as espessuras da corda, da peça circular e do gancho que a sustenta, a distância, em metros, de P até a superfície, no momento em que se inicia o processo para calçar a peça é

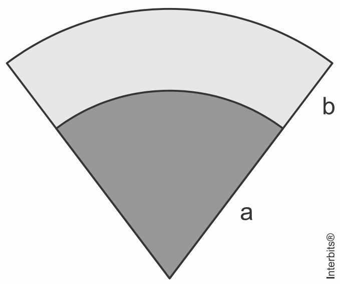
(Adote $\sqrt{3} \cong 1{,}7$)

Ⓐ 12,0.
Ⓑ 20,4.
Ⓒ 24,0.
Ⓓ 36,0.
Ⓔ 40,8.

Questão 14

(UNICAMP_2018)

A figura abaixo exibe um setor circular dividido em duas regiões de mesma área. A razão a/b é igual a

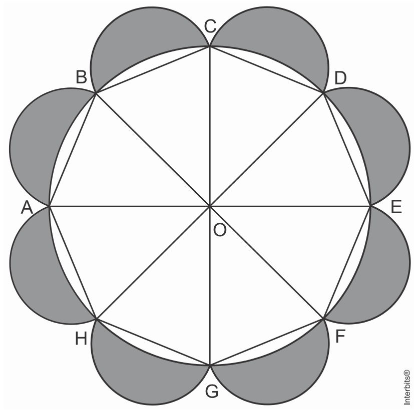


Ⓐ $\sqrt{3}+1$
Ⓑ $\sqrt{2}+1$
Ⓒ $\sqrt{3}$
Ⓓ $\sqrt{2}$

Questão 15

(EPCAR_2019)

Um artista plástico providenciou uma peça de decoração com características matemáticas conforme representado no croqui a seguir.



Considere que:

- $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF} = \overline{OG} = \overline{OH} = R$
- Os arcos de circunferência $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DE}, \widehat{EF}, \widehat{FG}, \widehat{GH}, \widehat{HA}$ ora têm centro no ponto médio de cada uma das cordas $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GH}, \overline{HA}$, respectivamente, ora têm centro no ponto O.
- $\pi = 3$ e $\sqrt{2} = 1{,}4$.

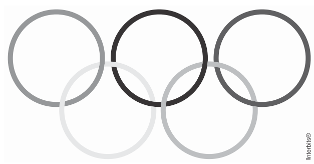
A área hachurada no croqui, em função da medida R é igual a

Ⓐ $1{,}4R^2$
Ⓑ $1{,}6\ R^2$
Ⓒ $1{,}8R^2$
Ⓓ $2R^2$

Questão 16

(IFSUL)

O ano de 2016 ficará marcado na história do Brasil pelo fato de o Rio de Janeiro ter sediado o maior evento esportivo do mundo: as Olimpíadas.
Aproveitando o tema, um grupo de estudantes construiu os 5 anéis olímpicos, conforme figura, reaproveitando mangueiras usadas. Cada aro construído mede 80 cm de diâmetro.



Considerando os dados acima, a medida, em metros, do total de mangueiras utilizadas nesse trabalho, é

Ⓐ $2\ \pi$
Ⓑ $4\ \pi$
Ⓒ $8\ \pi$
Ⓓ $16\ \pi$

Questão 17

(CP2_2018)

Uma moeda foi cunhada na Polônia, em comemoração às Olimpíadas de Pequim, em 2008. A seguir, a Figura 1 mostra as duas faces da moeda e a Figura 2 mostra um modelo matemático de sua face, que é circular com um furo quadrado no centro.


Figura 1

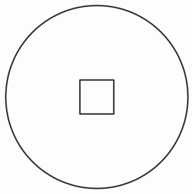


Figura 2

Fonte: https://www.coinsbook.net/images/coins/17840/35024.jpg. Acesso em 20/10/2017.

Suponha que a face da moeda tenha 3 cm de diâmetro e que o quadrado no centro tenha 0,4 cm de lado.

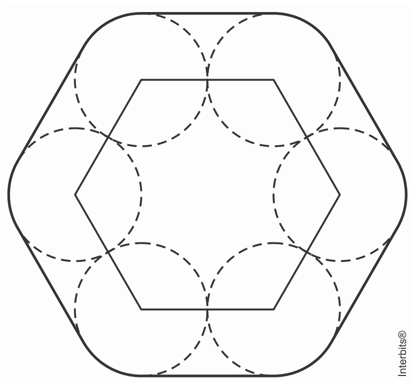
Então, usando a aproximação $\pi = 3$, a área da face da moeda é igual a

A 6,59cm^2
B 8,6cm^2
C 26,2cm^2
D 26,84cm^2

Questão 18

(ITA_2017)

Seis circunferências de raio 5 cm são tangentes entre si duas a duas e seus centros são vértices de um hexágono regular, conforme a figura abaixo.



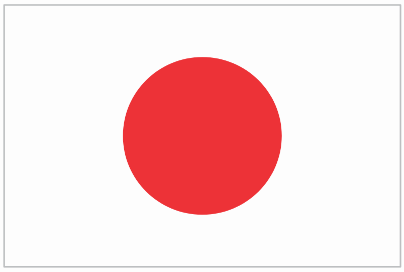
O comprimento de uma correia tensionada que envolve externamente as seis circunferências mede, em cm,

A $18 + 3\pi$
B $30 + 10\pi$
C $18 + 6\pi$
D $60 + 10\pi$
E $36 + 6\pi$

Questão 19

(IFPE)

A imagem abaixo reproduz a bandeira de uma das nações mais desenvolvidas em todo o mundo, o Japão.



Disponível em: <http://www.br.emb-japan.go.jp/cultura/bandeira.html.>. Acesso em: 06 out 2017.

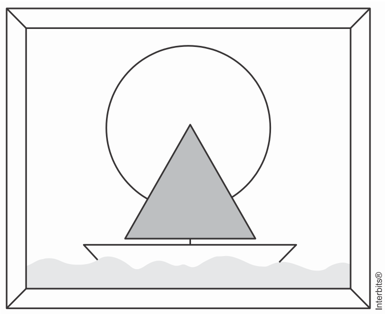
Sabendo que a bandeira tem formato retangular de dimensões 8 cm e 12 cm e um círculo central de 2 cm de raio, usando $\pi = 3$, podemos afirmar que a área da bandeira pintada de branco, em centímetros quadrados, é

A 96.
B 84.
C 12.
D 72.
E 90.

Questão 20

(CP2_2017)

Observe o quadro a seguir, que representa um barco à vela e, ao fundo, a lua cheia. A vela desse barco tem forma de triângulo equilátero com 2dm de lado e a lua é um círculo cujo centro coincide com um dos vértices desse triângulo. A área da parte da lua escondida atrás da vela é exatamente metade da área da vela.

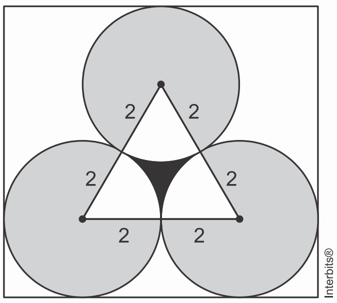


Se não houvesse o barco, a lua cheia estaria completamente visível. Nesse caso, a área da lua seria

A $2\sqrt{3}\ dm^2$.
B $3\sqrt{3}\ dm^2$.
C $2\sqrt{2}\ dm^2$.
D $3\sqrt{2}\ dm^2$.

Questão 21

(UPE-SSA)



Na figura, os vértices de um triângulo equilátero de lado 4 cm são centros de três círculos que se tangenciam mutuamente, determinando a região hachurada de preto no interior do triângulo. Qual é a medida da área dessa região?

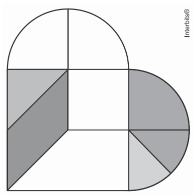
Considere $\pi \cong 3$ e $\sqrt{3} \cong 1{,}7.$

A 0,6
B 0,3
C 0,5
D 0,8
E 0,4

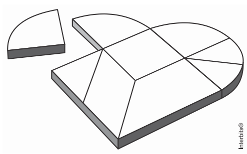
Questão 22

(CP2_2017)

Marcos, apaixonado por matemática, resolveu pedir sua namorada em casamento de uma forma original. Comprou um Tangram (quebra-cabeça) no formato de coração, constituído por nove peças: cinco setores circulares de mesmo raio, um quadrado, um trapézio retângulo, um paralelogramo e um triângulo retângulo, como mostra a figura:



Três dos setores têm abertura de $90°$, e os outros dois, de $45°$. Antes de presenteá-la, no entanto, retirou um dos setores circulares de abertura $90°$, como mostra a figura.



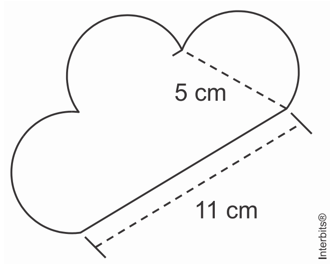
Sabe-se que esse setor seria recolocado na hora do pedido. Usando $\pi \cong 3$, podemos afirmar que a razão entre a área do setor retirado e a área do quebra-cabeça completo é igual a

A $\frac{1}{28}$ B $\frac{3}{28}$ C $\frac{3}{7}$ D $\frac{3}{4}$

Questão 23

(IFSUL_2017)

Em uma escola, o professor de matemática levou seus alunos para o pátio e solicitou que cada um observasse em sua volta e posteriormente elaborasse um exercício envolvendo o conteúdo de geometria com o que haviam avistado. Um dos exercícios construído foi o cálculo da área de uma nuvem formada por três semicírculos idênticos conforme a figura abaixo.

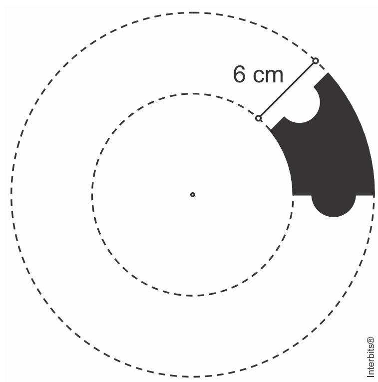


Para desenvolver o cálculo, foi utilizado $\pi \cong 3{,}14$. Com isso, afirma-se que a área da nuvem é aproximadamente

A 90,88cm^2
B 84,44cm^2
C 64,88cm^2
D 61,44cm^2

Questão 24

(ESC. Naval_2017)



A figura acima exibe um total de N peças idênticas de um quebra-cabeça que, resolvido, revela uma coroa circular. Sabe-se que 6 cm é a menor distância entre as circunferências concêntricas pontilhadas da figura e que o raio da menor dessas circunferências é igual a 9 cm.

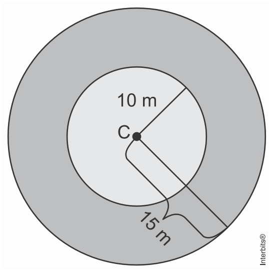
Se a área de cada peça é $12\pi cm^2$, é correto afirmar que N é igual a

A 6
B 8
C 9
D 12
E 15

Questão 25

(CPS)

Os condutos forçados em uma usina hidrelétrica são, na maioria dos casos, tubulações cilíndricas, que escoam o líquido sob uma pressão diferente da atmosfera.
Na imagem, temos a representação da secção transversal de um conduto forçado cilíndrico, na qual as circunferências são concêntricas (centro no ponto C) e a região ocupada entre a circunferência maior e a circunferência menor é chamada de coroa circular.



Sabendo que, o raio da circunferência maior mede 15 metros e o raio da circunferência menor mede 10 metros, podemos afirmar que a área da coroa circular é, em m^2,

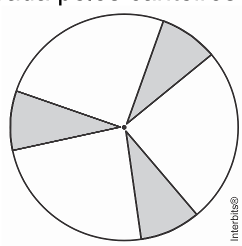
Lembre-se de que:
- Área do círculo $=\pi r^2$
- Adote $\pi \cong 3$

A) 75.
B) 125.
C) 225.
D) 375.
E) 675.

Questão 26

(PUCRS)

Uma pracinha com formato circular ocupa uma área de 100 πm^2. No terreno dessa área, foram colocados 3 canteiros em forma de setor circular, cada um formado por um ângulo central de 30° como na figura. A área total ocupada pelos canteiros é, em m^2

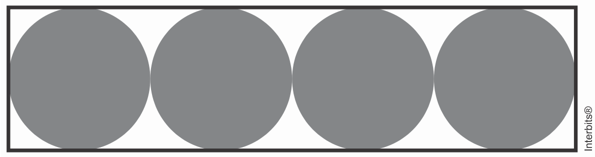


A) π
B) 3π
C) 25π
D) 50π
E) 75π

Questão 27

(IFPE)

Celso decidiu montar uma pequena horta no quintal de sua casa no formato de um retângulo, medindo 1 metro de largura por 4 metros de comprimento. Para fazer a irrigação, decidiu utilizar 4 aspersores, que molham regiões circulares com raio igual a 50cm. As regiões molhadas, representadas em cinza, tangenciam-se entre si e também tangenciam as bordas da região retangular destinada à horta, como mostra a figura a seguir.



Algum tempo depois, Celso percebeu que algumas plantas não recebiam água suficiente para o seu desenvolvimento por estarem próximas à borda da horta. Assim, ele verificou que a área não molhada da horta corresponde a

(utilize $\pi \cong 3$).

A) 33,3% da área destinada à horta.
B) 16% da área destinada à horta.
C) 20% da área destinada à horta.
D) 10% da área destinada à horta.
E) 25% da área destinada à horta.

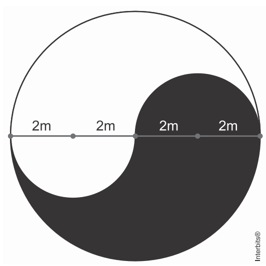
Questão 28

(IFSC)

O fenômeno conhecido como Agroglifo, figuras geométricas ou grandes círculos, se repetiu em 2013 na cidade de Ipuaçu, no Oeste do Estado de Santa Catarina. Moradores avistaram dois desenhos em formatos diferentes e maiores que os do ano passado. Segundo os moradores, o fenômeno acontece na cidade desde 2008, sempre nesta época do ano e atrai curiosos e especialistas.

Texto disponível em: http://diariocatarinense.clicrbs.com.br/sc/geral/noticia/2013/11/figuras-geometricas-e-circulos-surg mnovamente- na-cidade-de-ipuacu-oeste-do-estado-4321378.html. Acesso: 10 ago. 2014. Adaptado.

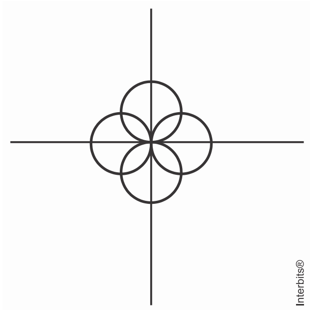
Suponha que uma das figuras encontradas na cidade de Ipuaçu seja a figura abaixo, formada por um círculo maior e dois semicírculos menores, cujas dimensões estão indicadas na figura. Sendo assim, é CORRETO afirmar que a área da região destacada em preto é de:
Use $\pi \cong 3{,}14$



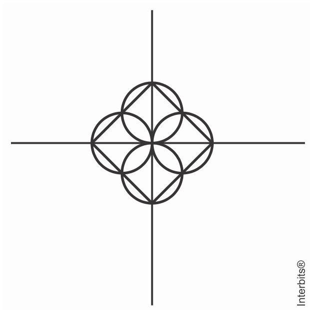
A) 50,24m^2
B) 25,12m^2
C) 12,56m^2
D) 100,48m^2
E) 200,96m^2

Questão 29
(CPS)

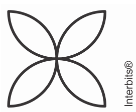
Mariana gosta muito de desenhar, mas sempre usando formas geométricas. Ao iniciar um novo desenho, Mariana traçou um par de eixos perpendiculares e construiu quatro círculos idênticos com raio medindo 2 cm. Cada círculo é tangente a apenas um eixo e a intersecção dos quatro círculos coincide com a intersecção dos eixos.



A seguir, Mariana desenhou um quadrado cujos vértices estão sobre os eixos.



Ela decidiu apagar parte da figura ficando apenas com a “flor” formada pelos arcos das circunferências.

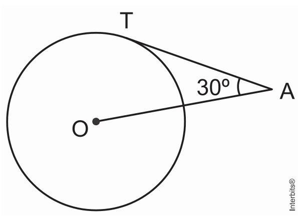


É correto afirmar que o perímetro da “flor” do desenho de Mariana, em cm, mede

- **A** 2π.
- **B** 4π.
- **C** 8π.
- **D** 16π.

Questão 30
(EEAR)

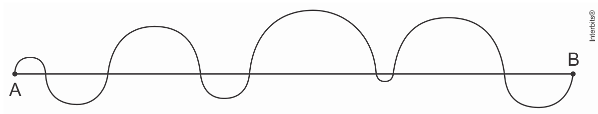
O segmento $\overline{AT}$ é tangente, em T, à circunferência de centro O e raio R = 8cm. A potência de A em relação à circunferência é igual a _______ cm².



A 16 **B** 64 **C** 192 **D** 256

Questão 31
(INSPER)

A linha curva indicada na figura tem extremidades em A e B e é formada apenas por semicircunferências.



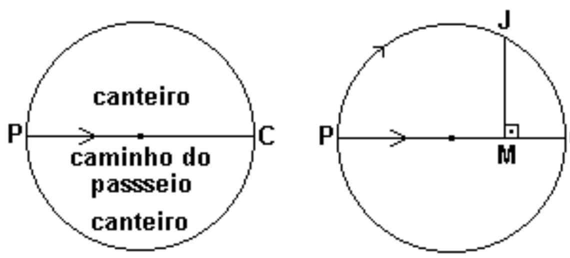
Se o comprimento de $\overline{AB} = x$, então o comprimento da linha curva será igual a

- **A** $\frac{8x}{\pi}$
- **B** $\frac{16\pi}{x}$
- **C** $\frac{x\pi}{2}$
- **D** $\frac{x\pi}{4}$
- **E** $\frac{4x}{\pi}$

Questão 32
(PUC)

João e Maria costumavam namorar atravessando um caminho reto que passava pelo centro de um canteiro circular, cujo raio mede 5 m. Veja a figura 1.
Certo dia, após uma desavença que tiveram no ponto de partida P, partiram emburrados, e, ao mesmo tempo, para o ponto de chegada C. Maria caminhou pelo diâmetro do canteiro João andou ao longo do caminho que margeava o canteiro (sobre o circulo), cuidando para estar, sempre, à "mesma altura" de Maria, isto é, de modo que a reta MJ, formada por Maria e João, ficasse sempre perpendicular ao diâmetro do canteiro. Veja a figura 2.

FIGURA 1 FIGURA 2



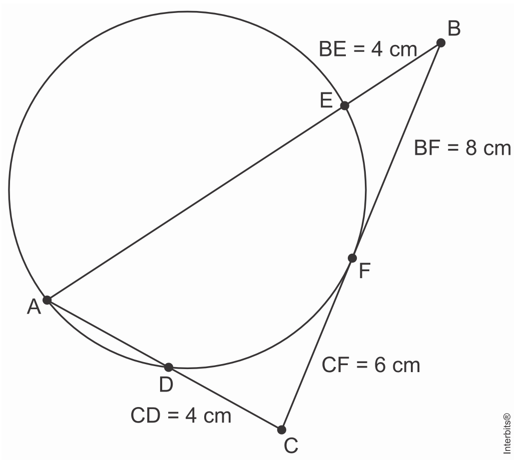
Quando a medida do segmento PM, percorrido por Maria, for igual a 7,5 = 5 + 5/2 metros, o comprimento do arco de circunferência PJ, percorrido por João, será igual a

- **A** $\frac{10\pi}{3}\,m.$
- **B** $2\pi\,m.$
- **C** $\frac{5\pi}{3}\,m.$
- **D** $\frac{2\pi}{3}\,m.$
- **E** $\frac{\pi}{3}\,m.$

Questão 33

(Fac. Albert Einstein)

Uma circunferência tangencia o lado BC de um triângulo ABC no ponto F e intersecta os lados AB e AC desse triângulo, nos pontos E e D respectivamente, conforme mostra a figura.



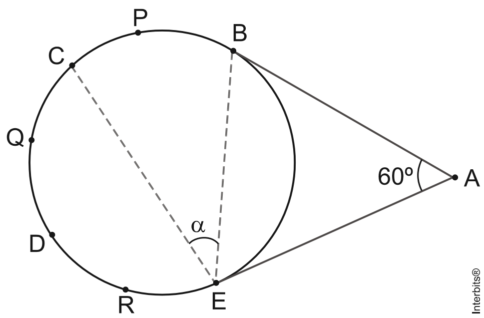
Sabendo que essa circunferência passa pelo ponto A, a distância entre os pontos D e E, em cm, é igual a

A 10,5.
B 10,9.
C 11,3.
D 11,7.

Questão 34

(FGV)

Na figura, AB e AE são tangentes à circunferência nos pontos B e E, respectivamente, e $B\hat{A}E = 60^o$.



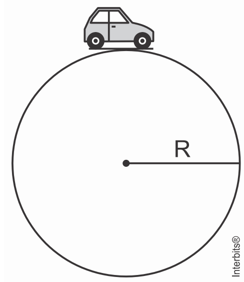
Se os arcos $\widehat{BPC}$, $\widehat{CQD}$ e $\widehat{DRE}$ têm medidas iguais, a medida do ângulo $B\hat{E}C$, indicada na figura por α, é igual a

A 20°
B 40°
C 45°
D 60°
E 80°

Questão 35

(EEAR)

Um carrinho de brinquedo que corre em uma pista circular completa 8 voltas, percorrendo um total de 48m.

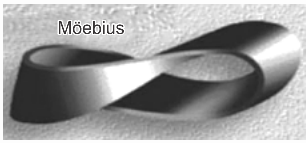


Desprezando a largura da pista e considerando $\pi \cong 3$, o seu raio é, em metros, igual a

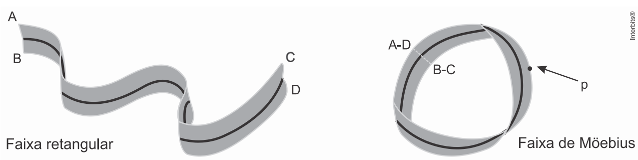
A 0,8
B 1,0
C 1,2
D 2,0

Questão 36

(UPE)



A superfície acima, conhecida como faixa de Möebius, foi descoberta pelo matemático e astrônomo alemão August Ferdinand Möebius (1790- 1868). A faixa de Möebius pode ser obtida a partir de uma faixa retangular ABCD, dando-se meio giro numa de suas extremidade e juntando-se os pontos A com D e B com C, conforme as figuras abaixo.



Caminhando na faixa de Möebius (imagem acima à direita), uma baratinha, sempre sobre a linha escura, saiu do ponto P e a ele retornou percorrendo uma distância de 7,2 m. Qual é a medida do raio da base da superfície cilíndrica obtida com a faixa retangular (imagem acima à esquerda) que gerou a faixa de Möebius?

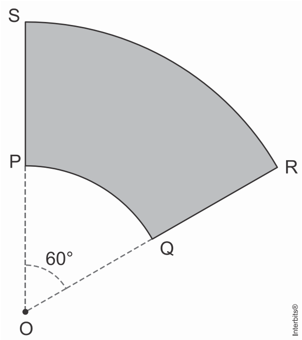
Adote $\pi \cong 3$.

A 0,54m
B 0,58m
C 0,60m
D 0,63m
E 0,70m

Questão 37

(UFRGS)

Considere o setor circular de raio 6 e ângulo central $60°$ da figura abaixo.



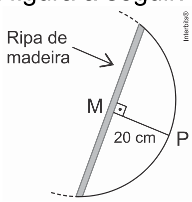
Se P e Q são pontos médios, respectivamente, de OS e OR, então o perímetro da região sombreada é

- **A** $\pi + 6$
- **B** $2\pi + 6$
- **C** $3\pi + 6$
- **D** $\pi + 12$
- **E** $3\pi + 12$

Questão 38

(UPE)

Um estagiário de arqueologia encontrou parte de uma peça que parece ser base de um tubo cilíndrico. Utilizando uma ripa de madeira com 1m de comprimento para efetuar medições no interior da peça, ele constatou que a distância do ponto P até o ponto médio M da ripa de madeira é igual a 20 cm, conforme mostra a figura a seguir:



Qual a medida aproximada da área da peça em metros quadrados? (Considere $\pi \cong 3$).

- **A** 1,6
- **B** 1,7
- **C** 1,8
- **D** 2,0
- **E** 2,5

Questão 39

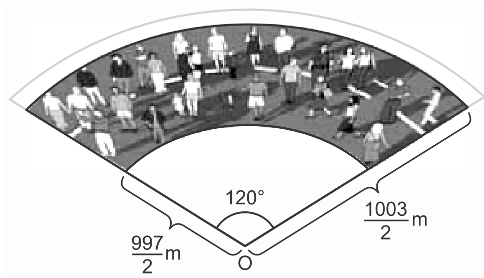
(UEL_2017)

Com a finalidade de se calcular a quantidade de pessoas presentes em manifestações sociais em determinado trecho urbano, são utilizadas diferentes metodologias, sendo que uma delas consiste em quatro etapas:

1. estabelece-se a área A (em m^2) da região delimitada pelo trecho da manifestação;
2. posicionam-se alguns fiscais que ficam responsáveis, cada um, por uma sub-região fixa e exclusiva do trecho urbano, a fim de coletar, de maneira simultânea e periódica, quantas pessoas se encontram em sua sub-região no momento de cada medição;
3. calcula-se a média M de todas as medições realizadas por todos os fiscais;
4. ao final, declara-se que há A·M pessoas presentes na manifestação.

Suponha que uma manifestação ocorreu na região hachurada dada pelo setor de uma coroa circular de centro O (conforme figura) e que foi observada por 3 medições com 2 fiscais cada, cujas tabelas dos dados coletados encontram-se a seguir.

	Medição 1	Medição 2	Medição 3
Fiscal 1	3	3	4
Fiscal 2	2	4	5



Considerando essa metodologia e a aproximação $\pi \cong \frac{22}{7}$, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a quantidade de pessoas que estiveram presentes na manifestação, naquele trecho.

- **A** 11 mil
- **B** 22 mil
- **C** 27 mil
- **D** 31 mil
- **E** 33 mil

Questão 40

(IFPE)

A moeda de 1 real é formada de uma parte prateada (círculo interior onde aparece o valor da moeda e o ano de fabricação) e uma parte dourada (coroa circular).

Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Moeda_de_um_real>. Acesso em: 20 maio 2017.

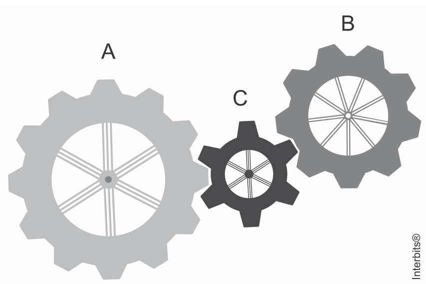
Sabendo que a moeda tem 27mm de diâmetro e que a parte prateada tem 24mm de diâmetro (usando a aproximação $\pi \cong 3{,}14$) podemos afirmar que a área, em milímetros quadrados, da parte dourada, é

- Ⓐ 79,05.
- Ⓑ 6,975.
- Ⓒ 14,415.
- Ⓓ 367,5825
- Ⓔ 118,575.

Questão 41

(UPE-SSA)

Num sistema de engrenagens, cada uma tem seu raio, de forma que a engrenagem A tem raio com medida R; a B tem raio com medida igual à metade do raio da engrenagem A e a C tem raio com medida igual a um quarto do raio da engrenagem A. Sendo a medida do raio de A igual a 4 cm, quantas voltas A dará, quando C percorrer o equivalente a 3.600cm?

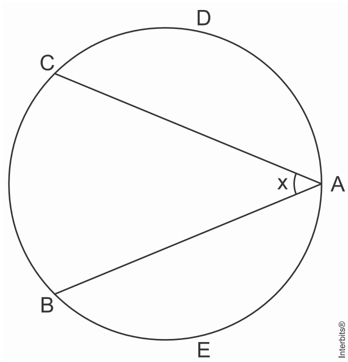


- Ⓐ 2.400
- Ⓑ 1.200
- Ⓒ 600
- Ⓓ 300
- Ⓔ 150

Questão 42

(CFTMG)

A figura a seguir mostra uma circunferência, em que os arcos ADC e AEB são congruentes e medem 160º cada um.



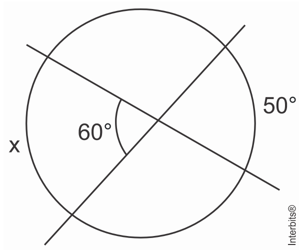
A medida, em graus, do ângulo x, é

- Ⓐ 10º.
- Ⓑ 20º.
- Ⓒ 30º.
- Ⓓ 40º.

Questão 43

(EEAR)

Duas cordas se cruzam num ponto distinto do centro da circunferência, conforme esboço.



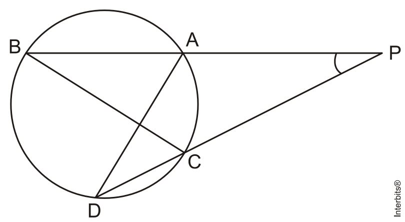
A partir do conceito de ângulo excêntrico interior, a medida do arco x é

- Ⓐ 40º.
- Ⓑ 70º.
- Ⓒ 110º.
- Ⓓ 120º.

Questão 44

(CFTMG)

Na figura, os segmentos PB e PD são secantes à circunferência, as cordas AD e BC são perpendiculares e AP = AD. A medida x do ângulo BPD é

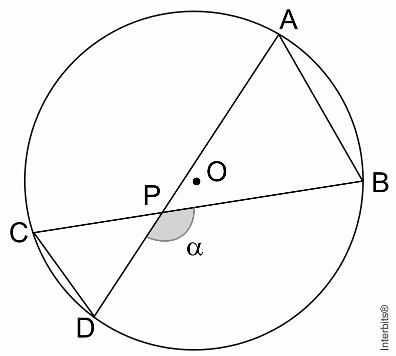


Ⓐ 30° Ⓑ 40° Ⓒ 50° Ⓓ 60°

Questão 45

(FGV)

As cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de uma circunferência de centro O são, respectivamente, lados de polígonos regulares de 6 e 10 lados inscritos nessa circunferência. Na mesma circunferência, as cordas AD e BC se intersectam no ponto P, conforme indica a figura a seguir.



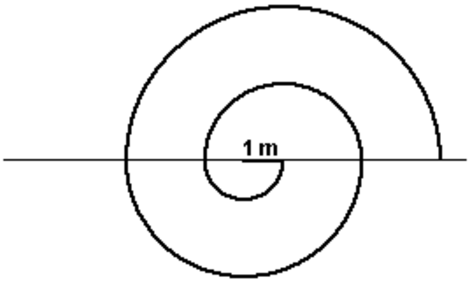
A medida do ângulo $B\hat{P}D$, indicado na figura por α, é igual a

A) 120º.
B) 124º.
C) 128º.
D) 130º.
E) 132º.

Questão 46

(UERJ)

José deseja construir, com tijolos, um muro de jardim com a forma de uma espiral de dois centros, como mostra a figura a seguir.



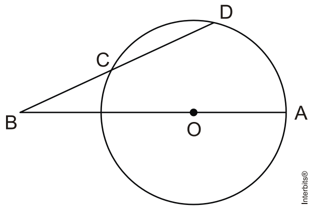
Para construir esta espiral, escolheu dois pontos que distam 1 metro um do outro. A espiral tem 4 meias-voltas e cada tijolo mede 30 cm de comprimento. Considerando $\pi = 3$, o número de tijolos necessários para fazer a espiral é:

A) 100.
B) 110.
C) 120.
D) 130.
E) 140.

Questão 47

(MACKENZIE)

Na figura, se a circunferência tem centro O e BC = OA, então a razão entre as medidas dos ângulos $A\hat{O}D$ e $C\hat{O}B$ é

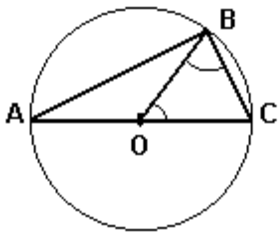


A) 5/2
B) 3/2
C) 2
D) 4/3
E) 3

Questão 48

(UFRRJ)

Um arquiteto vai construir um obelisco de base circular. Serão elevadas sobre essa base duas hastes triangulares, conforme figura a seguir, onde o ponto O é o centro do círculo de raio 2 m e os ângulos BOC e OBC são iguais.



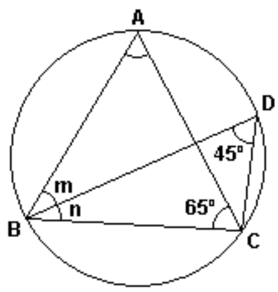
O comprimento do segmento AB é

A) $2\ m.$
B) $3\ m.$
C) $3\sqrt{2}\ m.$
D) $2\sqrt{5}\ m.$
E) $2\sqrt{3}\ m.$

Questão 49

(CFTMG)

Na figura, os triângulos ABC e BCD estão inscritos na circunferência. A soma das medidas m + n, em graus, é



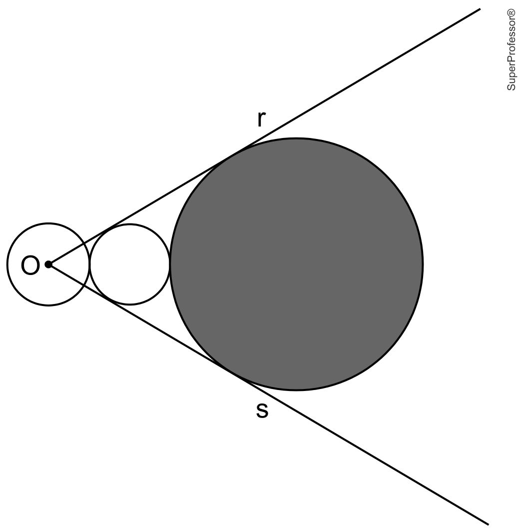
A) 70.
B) 90.
C) 110.
D) 130.

Questão 50

(UFRGS_2023)

Na figura abaixo, há três círculos tangentes externamente, com centros colineares.

As semirretas r e s têm origem no centro O do primeiro círculo e são tangentes aos outros dois círculos, como mostra a figura abaixo.



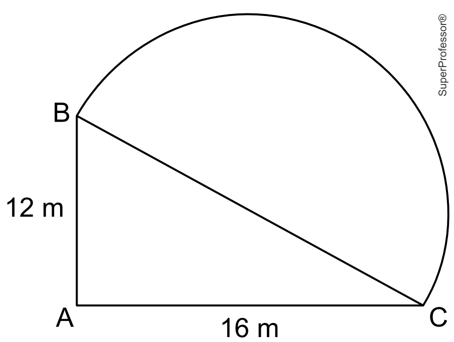
Sabendo que os dois círculos menores possuem mesma área igual a 1, a área do círculo sombreado é

Ⓐ 9.
Ⓑ 10.
Ⓒ 12.
Ⓓ 9π.
Ⓔ 10π.

Questão 51

(EEAR_2023)

Um jardim tem a forma da figura, sendo ΔABC um triângulo retângulo em A e BC um arco de diâmetro $\overline{BC}$. De acordo com as medidas dadas na figura e usando $\pi = 3{,}14$ a área desse jardim é __________ m^2.



Ⓐ 295
Ⓑ 282
Ⓒ 260
Ⓓ 253

Questão 52

(UNICAMP_2024)

Sr. Gauss tem uma pizzaria, chamada $\pi - zzaria$, que vende dois tipos de pizzas circulares: uma individual, de diâmetro d; e uma de 20 cm de diâmetro, partida em quatro pedaços iguais.

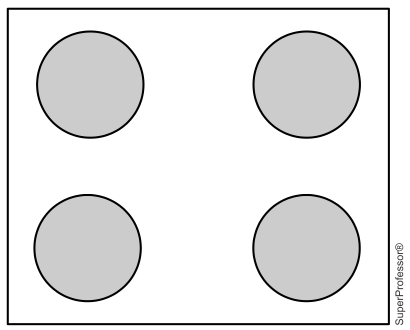
Considerando que o preço de uma pizza é proporcional à sua área, qual precisa ser o valor de d para que quatro pizzas individuais custem o mesmo que a pizza mencionada, de quatro pedaços?

Ⓐ 6 cm.
Ⓑ 8 cm.
Ⓒ 10 cm.
Ⓓ 12 cm.

Questão 53

(UNIFOR_2022)

Um artista plástico produz suas obras a partir de materiais recicláveis. Ele dispunha de quatro pedaços de madeira, todos com o formato de um triângulo retângulo isósceles com hipotenusa medindo 10 cm de comprimento. Com o intuito de minimizar o desperdício de material, de cada triângulo ele extraiu o maior disco possível e construiu o painel mostrado abaixo.



A área total coberta pelos quatro discos é

Ⓐ $100\pi(3 - 2\sqrt{2})\ cm^2$.
Ⓑ $100\pi(2 - \sqrt{2})\ cm^2$.
Ⓒ $100\pi\sqrt{2}\ cm^2$.
Ⓓ $100\pi(2 + \sqrt{2})\ cm^2$.
Ⓔ $100\pi(3 + 2\sqrt{2})\ cm^2$.

Questão 54

(UFGD_2023)

Catedral Metropolitana de Brasília

Projetada pelo arquiteto Oscar Niemeyer, foi o primeiro monumento a ser criado em Brasília-DF. Sua pedra fundamental foi lançada em 12 de setembro de 1958. Teve sua estrutura pronta em 1960 e nesta aparecia somente a área circular de 70 metros de diâmetro, da qual se elevam dezesseis colunas de concreto (pilares de secção parabólica) num formato hiperboloide, que pesam noventa toneladas. O engenheiro Joaquim Cardozo foi o responsável pelo cálculo estrutural que permitiu a construção da Catedral. Em 31 de maio de 1970, foi inaugurada de fato, e já nessa data com os vidros externos transparentes.

Disponível em: https://catedral.org.br/historia. Acesso em: 7 set. 2022.

Disponível em: https://revistaazul.voeazul.com.br/destinos/5-curiosidades-da-catedral-de-brasilia/. Acesso em: 7 set. 2022.

Com base nas informações e na imagem dadas, e partindo da hipótese de que as colunas de concreto (pilares de secção parabólica) estão, ao nível do chão, igualmente espaçadas, afirma-se que o comprimento do arco de circunferência entre as bases de duas colunas de concreto é de, aproximadamente,

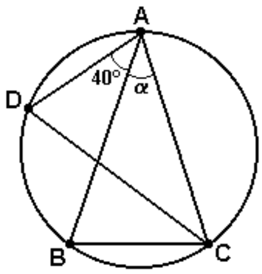
Adote: $\pi = 3{,}14$

- **A** 13,74 m.
- **B** 26,25 m.
- **C** 27,48 m.
- **D** 219,80 m.
- **E** 240,41 m.

Questão 55

(UFES)

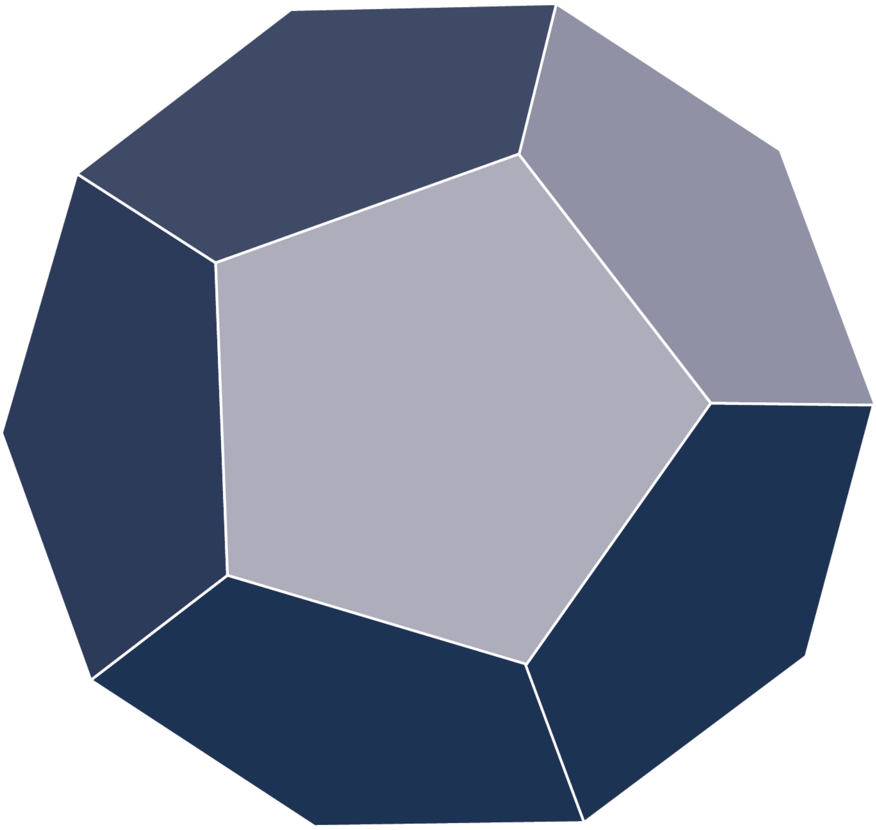
Na figura, A, B, C e D são pontos de uma circunferência, a corda CD é bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ e as cordas AB e AC têm o mesmo comprimento. Se o ângulo BÂD mede 40°, a medida á do ângulo $B\hat{A}C$ é



- **A** 10°
- **B** 15°
- **C** 20°
- **D** 25°
- **E** 30°

Gabarito _ Cirunferência, Círculo e suas partes			
Hora de Praticar			
Questão	Resposta	Questão	Resposta
01	B	29	C
02	A	30	C
03	B	31	C
04	C	32	A
05	B	33	A
06	A	34	B
07	A	35	B
08	A	36	C
09	D	37	C
10	E	38	A
11	C	39	A
12	B	40	E
13	D	41	E
14	B	42	B
15	B	43	B
16	B	44	A
17	A	45	E
18	D	46	A
19	B	47	E
20	B	48	E
21	D	49	A
22	B	50	A
23	D	51	D
24	D	52	C
25	D	53	A
26	C	54	A
27	E	55	E
28	B		

POLIEDROS



RONAEBSON
MATEMÁTICA CRIATIVA

GEOMETRIA DE POSIÇÃO

Como já aprendemos, *ponto*, *reta* e *plano* são conceitos primitivos.

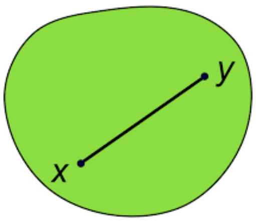
Diante desses conceitos, destaco aqui dois postulados muito importantes:

P1: Dois pontos distintos determinam uma única reta.

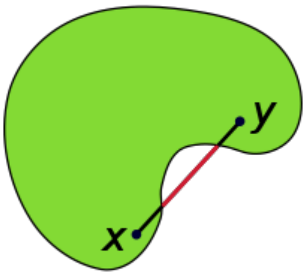
P2: Três pontos não colineares determinam um único plano.

Um conceito que nos será muito útil ao longo desse capítulo é o de conjunto convexo:

Uma região *C* de pontos é *convexa* se, e somente se, dois pontos quaisquer de *C* são extremos de um segmento de reta contido em *C*.

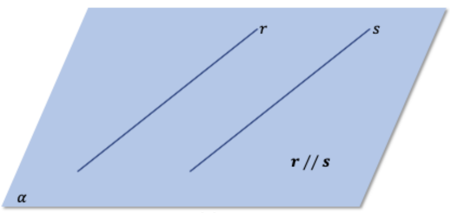


Uma região *não* será convexa se existirem dois pontos pertencentes a ela cujo segmento que os une não está contido na região.

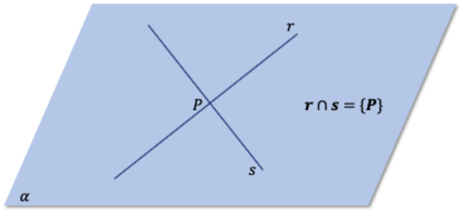


POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

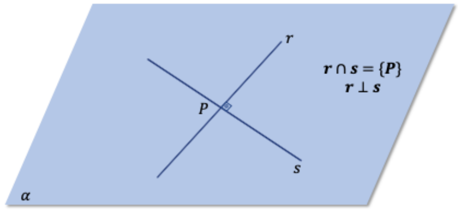
Duas retas podem ser coplanares (quando estão no mesmo plano) ou reversas. Duas retas coplanares podem ser distintas ou coincidentes. Sendo distintas, elas podem ser ditas paralelas (não têm pontos em comum) ou concorrentes (têm um único ponto em comum. Sendo concorrentes, elas podem ser classificadas como oblíquas ou perpendiculares, nesse último caso, elas formam um ângulo de 90º.



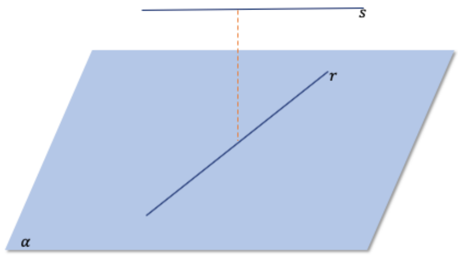
Retas Paralelas



Retas Concorrentes
Oblíquas



Retas Concorrentes
Perpendiculares

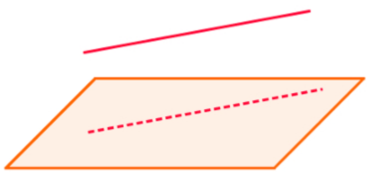


Retas Reversas

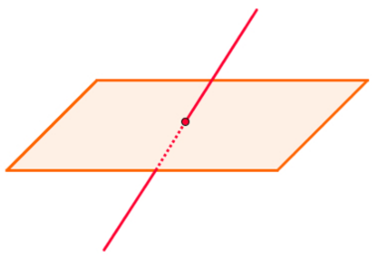
POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E PLANO

Uma reta r está contida em um plano α se, e e somente se, todos os pontos de r pertencem ao plano α.

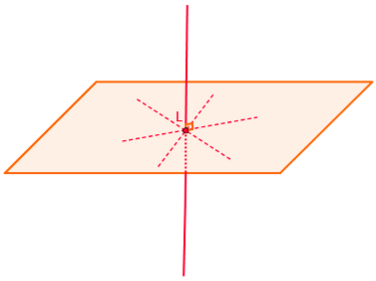
Uma reta r é paralela a um plano α se, e somente se, r e α não têm pontos em comum.



Uma reta r é secante a um plano α se, e somente se, r e α têm um único ponto e comum.



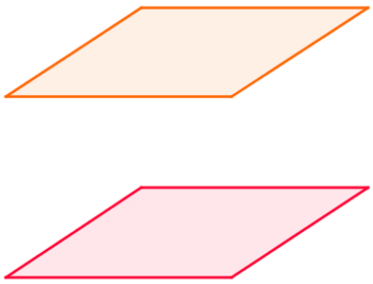
Caso a reta forme 90º com o plano, ela será dita perpendicular ao plano.



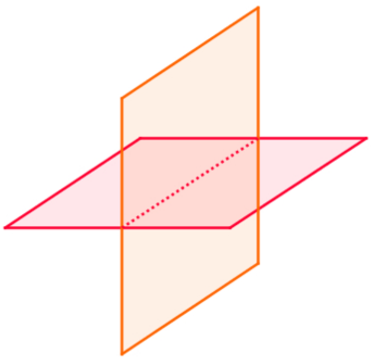
Observe também que se uma reta é perpendicular a um plano, então ela é perpendicular a qualquer reta do plano que passa pelo ponto de intersecção L.

Posições relativas entre planos

Dois planos distintos são paralelos se, e somente se, não têm pontos em comum.

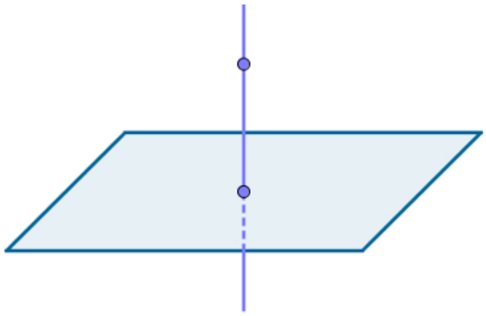


Dois planos são secantes se, e somente se, têm uma única reta em comum.



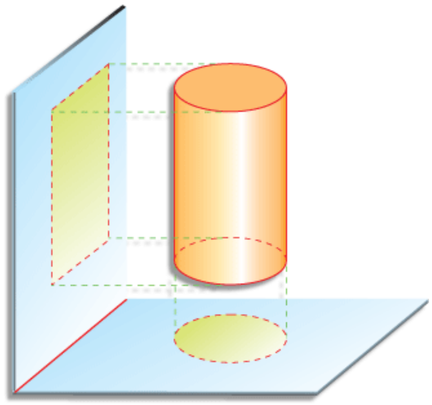
Projeção Ortogonal sobre um plano

A projeção ortogonal do ponto A sobre o plano é exatamente o ponto de encontro entre esse plano e a reta ortogonal a ele que contém o ponto A. Sendo assim, a projeção ortogonal de um ponto sobre o plano também será um ponto.



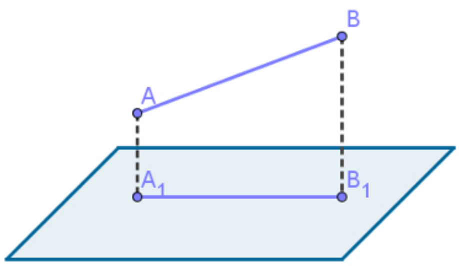
Dada uma figura geométrica qualquer e um plano que não contém nenhum de seus pontos, a projeção ortogonal dessa figura sobre o plano é a imagem formada no plano pelo pé do segmento de reta ortogonal a esse plano que liga cada ponto dessa figura ao plano, ou seja, uma projeção ortogonal de uma figura geométrica sobre um plano é o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos da figura sobre esse plano.

No exemplo a seguir, temos as projeções ortogonais de um cilindro sobre dois planos diferentes.



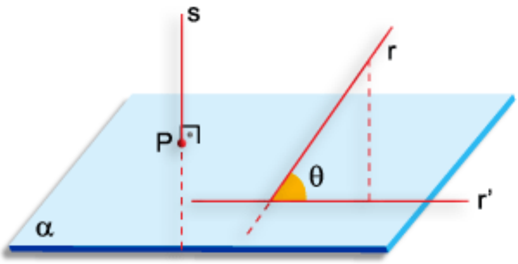
De maneira prática, uma projeção ortogonal, portanto, pode ser imaginada como a sombra de uma figura geométrica em um plano sob o sol do meio-dia.

Se o segmento de reta já for ortogonal ao plano, a sua projeção ortogonal será apenas um ponto. Se o segmento de reta não for ortogonal ao plano, sua projeção ortogonal será o segmento de reta cujas extremidades são as projeções de suas extremidades sobre o plano. Observe isso na figura a seguir:

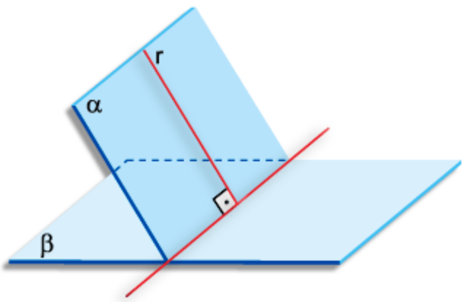


Ângulos no Espaço

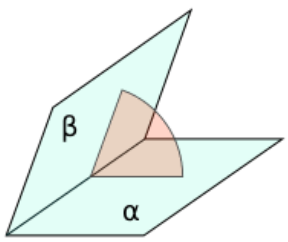
Seja r uma reta secante a um plano α, e não perpendicular a α, e r' a projeção ortogonal de r sobre α. O ângulo formado pela reta r e o plano α é o ângulo formado por r e r'.



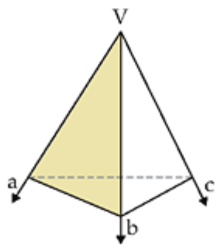
Sejam α e β dois planos secantes e r uma reta contida em α perpendicular a reta comum a esses planos. O ângulo formado pelos planos α e β é o ângulo formado pela reta r e o plano β.



Assim, definimos *ângulo diédrico* (ou simplesmente *diedro*) como o ângulo formado por dois semiplanos de mesma origem.



O ângulo triédrico (ou simplesmente triedro) é a região do espaço limitada por três semiplanos que se encontram num ponto.

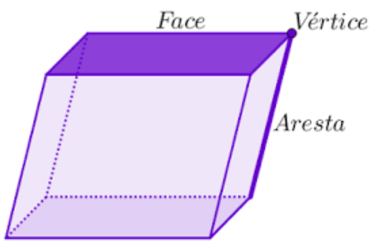


Poliedros

Definição: Chamamos de poliedro o sólido limitado por quatro ou mais polígonos planos, de modo que dois polígonos adjacentes não pertençam a um mesmo plano e cada lado de polígono é lado de dois e apenas dois deles.

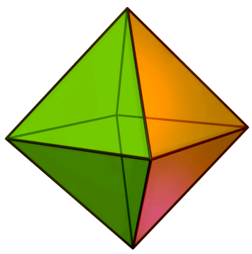
A palavra poliedro vem do grego poly (muitas) e hedras (faces), ou seja, muitas faces.

Num poliedro podemos destacar os seguintes elementos:



Note que os polígonos são as **faces** do poliedro, os lados de polígono são as **arestas** do poliedro e os **vértices** dos polígonos são os vértices do poliedro.

Observe que no poliedro destacado a seguir no formato de um balão de São João, temos seis vértices, oito faces (todas triangulares) e doze arestas.

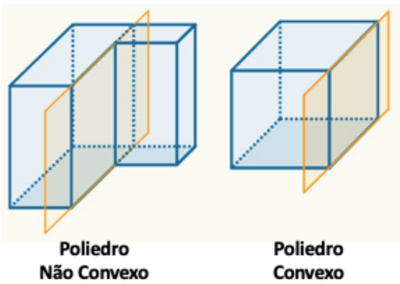


Quando a nomenclatura, o nome do poliedro é dado de acordo com o número de faces, vejamos alguns exemplos:

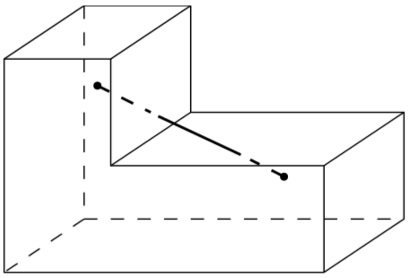
Número de Faces	Nome do Poliedro
4	tetraedro
5	pentaedro
6	hexaedro
7	heptaedro
8	octaedro
9	eneaedro
10	decaedro
11	undecaedro
12	dodecaedro
⋮	⋮
20	icosaedro
⋮	⋮

Poliedros Convexo

Um poliedro é dito convexo quando o plano que contém qualquer uma de suas faces deixa o poliedro contido em um mesmo semiespaço. Você também pode recorrer a definição de um conjunto convexo, de modo que basta tomar dois pontos internos quaisquer do poliedro, se o segmento de reta que os une estiver sempre contido no poliedro, independentemente dos pontos escolhidos, ele será convexo, do contrário ele será dito um poliedro não convexo.



Observe, pelo segundo modo, que o poliedro abaixo não é convexo.



Relação de Euler

Na geometria plana, rapidamente percebemos que o número de lados de um polígono é igual ao número de vértices. Analogamente, na geometria espacial, somos levados a seguinte pergunta:

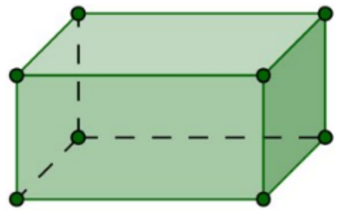
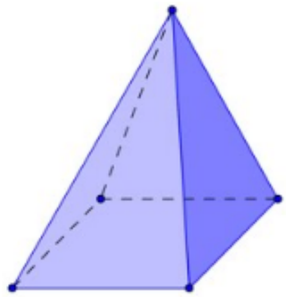
Será que existe uma relação entre o número de vértices, o número de faces e o número de arestas de um poliedro?

O matemático suíço Leonhard Euler respondeu a essa pergunta ao demonstrar o seguinte teorema:

Teorema: Em todo poliedro convexo vale a relação:

$$V + F = A + 2,$$

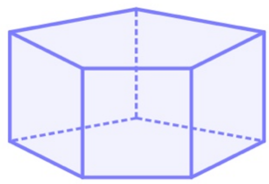
em que V, F e A representam o número de vértices, faces e arestas do poliedro, respectivamente.

Hexaedro 	V = 8 F = 6 A = 12 8 + 6 = 12 + 2 ✓
Pentaedro (Pirâmide de base Quadrangular) 	V = 5 F = 5 A = 8 5 + 5 = 8 + 2 ✓

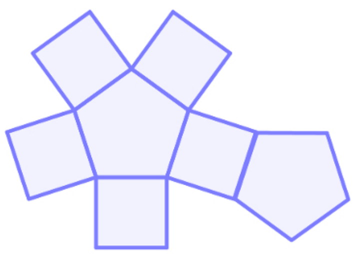
Embora a relação de Euler seja para poliedros convexos, existem poliedros não convexos para os quais a relação também é verificada. Assim, podemos dizer que todo poliedro convexo é euleriano, mas nem todo poliedro euleriano é convexo.

Quando trabalhamos com poliedros convexos ainda podemos obter outras relações interessantes.

Tomemos, por exemplo, o prisma pentagonal a seguir:



Quando planificamos esse sólido, obtemos dois pentágonos e cinco faces quadrangulares, veja:



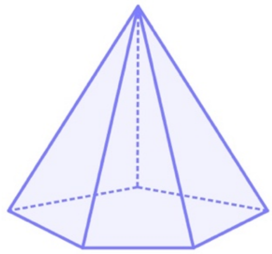
Observe que cada face quadrangular possui quadro lados e cada face pentagonal possui cinco lados. Assim, o total de lados de polígono que esse poliedro possui é igual a

$$5 \times 4 + 2 \times 5 = 30.$$

Entretanto, na formação do poliedro, cada aresta é formada pela "junção" de dois lados de polígonos, assim o total de arestas é igual a metade do número de lados de polígonos quando contados de forma independente, ou seja:

$$A = \frac{Número\ de\ lados\ de\ polígono}{2}$$

Agora vamos analisar quantas arestas partem de cada vértice de uma pirâmide de base pentagonal.



Note que do vértice oposto a base partem cinco arestas e de cada um dos cinco vértices da base partem três arestas, assim, de forma independente, contamos

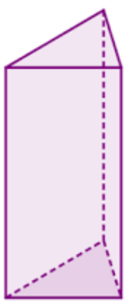
$$1 \times 5 + 5 \times 3 = 20\ arestas.$$

Entretanto, observe que nessa contagem cada aresta foi contada duas vezes, assim, o número de arestas do poliedro é igual a metade da quantidade de arestas que saem de cada vértice quando contadas de forma independente, ou seja:

$$A = \frac{Total\ de\ arestas\ que\ partem\ de\ cada\ vértice}{2}$$

SOMA DOS ÂNGULOS DE TODAS AS FACES

Considere o prisma de base triangular a seguir:



Observe que ele é formado por três faces retangulares e duas faces triangulares, logo para calcular a soma dos ângulos de todas as faces, basta lembrarmos que a soma dos ângulos internos de um retângulo é 360º e a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º e fazer:

$$S = 3 \cdot 360^o + 2 \cdot 180^o = 1440^o.$$

Generalizando o processo para um poliedro qualquer que tenha *F* faces, para calcularmos a soma *S* dos ângulos de todas as faces, basta aplicarmos a fórmula que nos dá a soma dos ângulos internos de um polígono de *n* lados que é dada por

$$S_i = (n-2) \cdot 180^o.$$

Aplicando a fórmula acima para cada uma das faces, teremos:

$$\begin{gathered} S_1 = (n_1 - 2) \cdot 180^o \\ S_2 = (n_2 - 2) \cdot 180^o \\ S_3 = (n_3 - 2) \cdot 180^o \\ \vdots \\ S_F = (n_F - 2) \cdot 180^o \end{gathered}$$

Somando membro a membro as equações acima, temos:

$$S = \left(\underbrace{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_F}_{Dobro\ do\ número\ de\ arestas} \underbrace{-2 - 2 - 2 - \cdots - 2}_{F\ vezes} \right) \cdot 180^o$$

$$S = (2A - 2F) \cdot 180^o = (A - F) \cdot 360^o$$

Logo, pela Relação de Euler, temos:

$$S = (V - 2) \cdot 360^o,$$

onde *V* é o número de vértices.

POLIEDROS DE PLATÃO

Um poliedro convexo é chamado poliedro de Platão se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições:

- todas as faces têm o mesmo quantidade de arestas;
- todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas;
- vale a relação de Euler $(V + F = A + 2)$.

É possível provar que existem cinco, e apenas cinco, classes de poliedros de Platão, a saber, o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.

POLIEDROS REGULARES

Um poliedro convexo é dito regular se, e somente se, são obedecidas as seguintes condições:

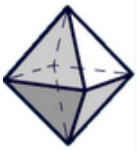
- todas as suas faces são polígonos regulares congruentes entre si;
- todos os seus ângulos poliédricos são congruentes entre si.

Observe que, dadas as condições, todo poliedro regular é um poliedro de Platão. Sendo assim, existem exatamente cinco classes de poliedros regulares.

Conta-se que os antigos membros da escola pitagórica haviam associado os quatro elementos da natureza à quatro dos poliedros regulares e que mais tarde, Platão viria associar o quinto poliedro ao quinto elemento.

Platão
Filósofo e Matemático

Veja a tabela com os poliedros regulares:

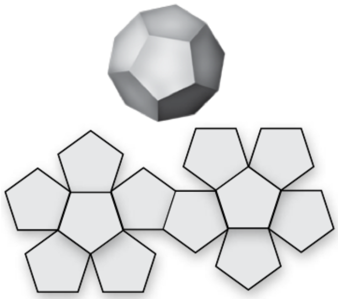
TETRAEDRO 	4 faces triangulares	FOGO
HEXAEDRO 	6 faces quadrangulares	TERRA
OCTAEDRO 	8 faces triangulares	AR
DODECAEDRO 	12 faces pentagonais	QUITAESSÊNCIA ÉTER IDEIA
ICOSAEDRO 	20 faces triangulares	ÁGUA

Hora de Praticar

Questão 01

(UFF)

João Vitor, empresário do ramo de festas e eventos, decidiu oferecer a seus clientes embalagens diferenciadas para as populares lembrancinhas. Segundo o empresário, a introdução de uma embalagem em formato de poliedro convexo regular (apresentada na imagem, com sua planificação) aumentou seu faturamento no último mês.

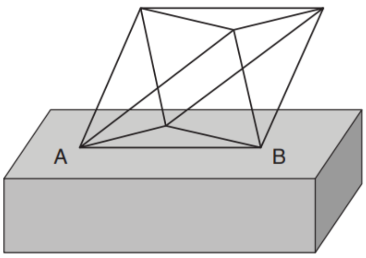


Sabendo que a embalagem oferecida por João Vitor tem o formato de um dodecaedro regular, o número de vértices do poliedro correspondente a embalagem é

Ⓐ 12
Ⓑ 20
Ⓒ 30
Ⓓ 32
Ⓔ 60

Questão 02

A figura a seguir representa uma grande escultura metálica em forma de octaedro regular cuja aresta AB está presa a uma base de concreto. Essa escultura está instalada em uma praça pública no centro da cidade onde mora o artista plástico criador da obra.



Com o passar dos anos, algumas arestas enferrujaram, sendo necessário substituí-las. Após uma verificação técnica, foi constatado que apenas as arestas reversas à aresta $\overline{AB}$ deveriam ser trocadas. Assim, o número de arestas originais que permanecerão na escultura será igual a

Ⓐ 2
Ⓑ 4
Ⓒ 6
Ⓓ 8
Ⓔ 10

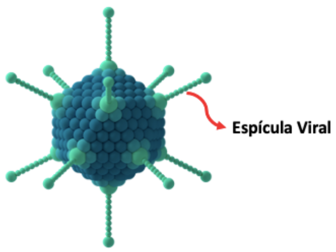
Questão 03

(Ronaebson)

Adenovírus são agentes infecciosos de tamanho médio, sem envelope, com DNA de cadeia dupla. Até o momento, são conhecidos 51 tipos diferentes desse micróbio, divididos em 6 subgrupos (nomeados de A a F), que podem causar infecções em humanos de qualquer idade, especialmente nas crianças. Normalmente, eles se instalam nas vias respiratórias, nos tratos digestório e intestinal e no revestimento dos olhos.

Disponível em: https://drauziovarella.uol.com.br/doencas-e-sintomas/infeccao-pelo-adenovirus-humano/
Acesso em 10/10/2021.

Um determinado adenovírus possui a forma de um icosaedro, poliedro com 20 faces triangulares, e em cada um dos vértices desse poliedro há uma estrutura denotada por espícula viral.



O número de espículas virais presentes nesses tipos de adenovírus é

Ⓐ 12.
Ⓑ 20.
Ⓒ 30.
Ⓓ 32.
Ⓔ 60.

Questão 04

(FGV)

Dado um tetraedro regular de aresta 6 cm, assinale os pontos que dividem cada aresta em três partes iguais. Corte o tetraedro pelos planos que passam pelos três pontos de divisão mais próximos de cada vértice e remova os pequenos tetraedros regulares que ficaram formados.

A soma dos comprimentos de todas as arestas do sólido resultante, em centímetros, é

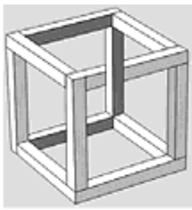
Ⓐ 56.
Ⓑ 32.
Ⓒ 30.
Ⓓ 36.
Ⓔ 48.

Questão 05

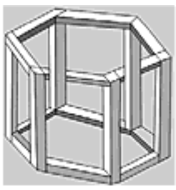
(ENEM)

Representar objetos tridimensionais em uma folha de papel nem sempre é tarefa fácil. O artista holandês Escher (1898-1972) explorou essa dificuldade criando várias figuras planas impossíveis de serem construídas como objetos tridimensionais, a exemplo da litografia Belvedere, reproduzida a seguir.

Considere que um marceneiro tenha encontrado algumas figuras supostamente desenhadas por Escher e deseje construir uma delas com ripas rígidas de madeira que tenham o mesmo tamanho. Qual dos desenhos a seguir ele poderia reproduzir em um modelo tridimensional real?

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

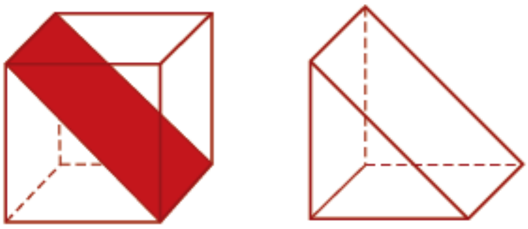
Ⓔ 

Questão 06

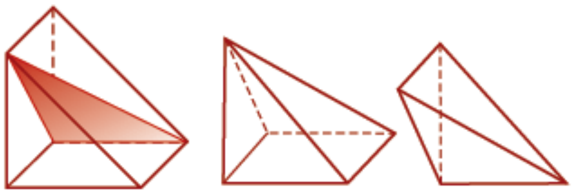
(Ronaebson)

Para calcular o volume dos sólidos, os chineses utilizavam quatro sólidos elementares: o lifang (cubo), o qiandu, o yangma e o bienuan, obtidos do seguinte modo:

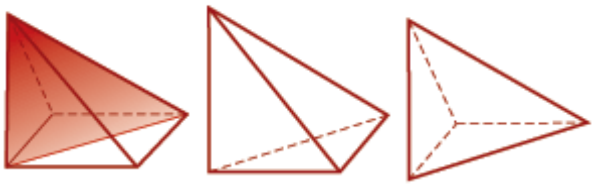
- Interceptar o lifang com um plano que contém sua diagonal, obtendo dois prismas (qiandu).



- Interceptar o qiandu com o plano determinado pela diagonal da face lateral e da face não perpendicular à base, obtendo o yangma e o bienuan.



- Interceptar o yangma com um plano que contém a diagonal da base e o vértice que não pertence à base, obtendo dois bienuan.



Disponível em http://www.rpm.org.br/cdrpm/81/1.html
Acesso em 15/09/2019.

Sabendo que a área total do lifang (cubo) apresentado inicialmente é numericamente igual ao seu volume, temos que o volume do bienuan obtido é igual, em unidades de volume, a

Ⓐ 216.
Ⓑ 108.
Ⓒ 72.
Ⓓ 48.
Ⓔ 36.

Questão 07

(UECE)

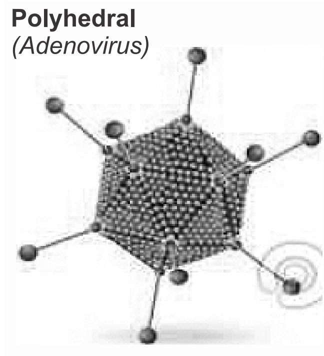
Um poliedro convexo com 32 vértices possui apenas faces triangulares. O número de arestas deste poliedro é

Ⓐ 100.
Ⓑ 120.
Ⓒ 90.
Ⓓ 80.

Questão 08

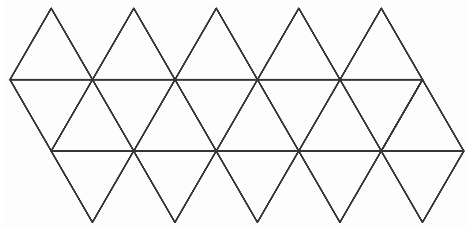
(UFJF)

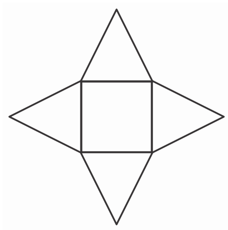
Observe, abaixo, uma imagem desse vírus que tem a forma de um sólido geométrico.

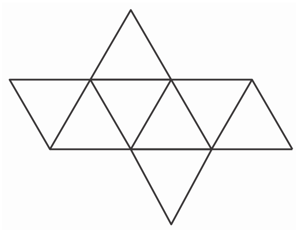


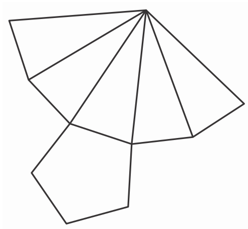
Disponível em: <http://www.thinkstockphotos.com/image/stockillustration-shapes-of-viruses/507687357>. Acesso em: 14 set. 2016.

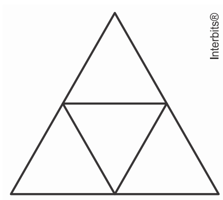
Qual é a planificação do sólido representado por esse vírus?

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

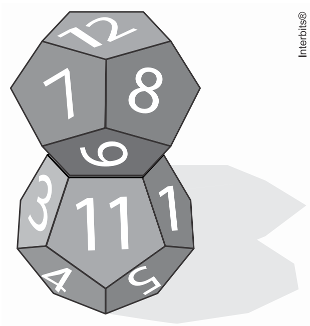
Ⓔ 

Interbits®

Questão 09

(UERJ)

Dois dados, com doze faces pentagonais cada um, têm a forma de dodecaedros regulares. Se os dodecaedros estão justapostos por uma de suas faces, que coincidem perfeitamente, formam um poliedro côncavo, conforme ilustra a figura.



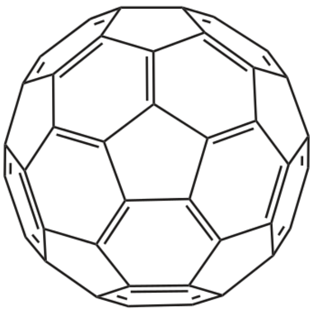
Considere o número de vértices V, de faces F e de arestas A desse poliedro côncavo.

A soma V+F+A é igual a:

Ⓐ 102
Ⓑ 106
Ⓒ 110
Ⓓ 112

Questão 10

Os fulerenos são uma forma alotrópica do Carbono, a terceira mais estável após o diamante e o grafite. Tornaram-se populares entre os químicos, tanto pela sua beleza estrutural quanto pela sua versatilidade para a síntese de novos compostos químicos. Os fulerenos são formados quando o carbono vaporizado se condensa numa atmosfera de gás inerte (hélio).



Um dos formatos mais belos do fulereno é um que se assemelha a uma bola de futebol, onde as ligações representam as arestas de um poliedro constituído de 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais e os vértices representam átomos de carbonos.

A molécula de fulereno ilustrada possui quantos átomos de carbono?

Ⓐ 32
Ⓑ 48
Ⓒ 60
Ⓓ 90
Ⓔ 92

Questão 11

(IFSP)

A figura mostra uma peça feita em 1587 por Stefano Buonsignori, e está exposta no Museu Galileo, em Florença, na Itália. Esse instrumento tem a forma de um dodecaedro regular e, em cada uma de suas faces pentagonais, há a gravação de um tipo diferente de relógio.

(www.europeana.eu/portal/record/02301/09A148 E006A2F3B5A6E202BB5B4F79735A2D2B6C.html - Acesso em 15.10.2012. Adaptado)

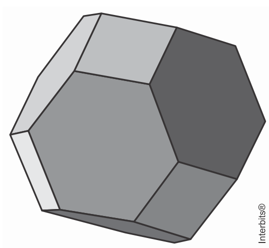
Em 1758, o matemático Leonard Euler (1707-1783) descobriu o teorema conhecido por relação de Euler: em todo poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces, vale a relação V-A+F=2. Ao se aplicar a relação de Euler no poliedro da figura, o número de arestas não visíveis é

Ⓐ 10.
Ⓑ 12.
Ⓒ 15.
Ⓓ 16.
Ⓔ 18.

Questão 12

(UPF)

O poliedro representado na figura (octaedro truncado) é construído a partir de um octaedro regular, cortando-se, para tal, em cada vértice, uma pirâmide regular de base quadrangular. A soma dos ângulos internos de todas as faces do octaedro truncado é:



Ⓐ 2160°
Ⓑ 5760°
Ⓒ 7920°
Ⓓ 10080°
Ⓔ 13680°

Questão 13

As cúpulas geodésicas são estruturas poliédricas geradas, principalmente, a partir de dodecaedros ou icosaedros, mas que também podem ser originadas a partir de qualquer outro sólido platônico. Suas faces costumam ser triangulares, e todos os seus vértices devem estar sobre uma mesma superfície esférica ou elipsoide. Além disso, suas arestas devem ser confeccionadas com um metal bastante leve e resistente, como o alumínio, por exemplo.

Disponível em: <https://images.app.goo.gl/uSWsRRj7tqLaDubT7>

Uma importante relação entre o número A de arestas e o número V de vértices de uma estrutura como essa é dada pela desigualdade $A + 6 \leq 3V \leq 2A$. Sendo assim, para construir uma estrutura geodésica, dispondo de apenas 25 arestas, são necessários

- **A** de 5 a 10 vértices.
- **B** de 11 a 16 vértices.
- **C** de 17 a 21 vértices.
- **D** de 21 a 25 vértices.
- **E** mais de 25 vértices.

Questão 14

(UPE)

Um poliedro convexo possui 8 (oito) faces, todas triangulares. Nestas condições, assumindo que tal poliedro exista, o número esperado de vértices para este será

- **A** 10
- **B** 9
- **C** 8
- **D** 7
- **E** 6

Questão 15

(UECE)

Um poliedro convexo tem 32 faces, sendo 20 hexágonos e 12 pentágonos. O número de vértices deste polígono

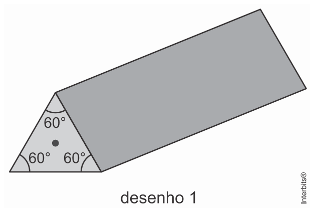
- **A** 90.
- **B** 72.
- **C** 60.
- **D** 56.

Questão 16

(CPS_2017)

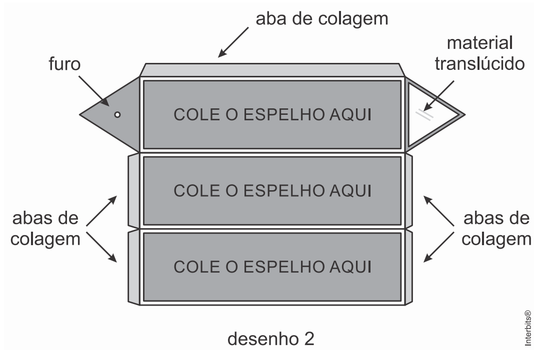
O caleidoscópio consiste em um prisma regular de base triangular, obtido da união de três espelhos planos retangulares, todos com as suas faces espelhadas voltadas uma para as outras (desenho 1). Em uma das bases triangulares, é colado um material translúcido, enquanto a outra base é opaca, contendo apenas um furo em seu centro. Dentro do caleidoscópio encontram-se pequenos objetos soltos, tais como contas ou pedacinhos de papel.

Ao olharmos para o interior do caleidoscópio através do furo da base opaca, podemos ver as imagens obtidas pelas inúmeras reflexões dos objetos nos espelhos.



desenho 1

Desejando construir seu caleidoscópio, João o fez com papel cartão escuro (desenho 2).



desenho 2

João colou dois espelhos consecutivos, bem como as abas correspondentes das laterais nas bases formadas com os triângulos equiláteros. Enquanto esperava a cola secar, decidiu olhar as imagens de um botão que ele segurou entre esses dois espelhos. Como o caleidoscópio ainda não estava fechado completamente, ele pôde olhar diretamente para as faces refletoras dos espelhos.
O número de imagens distintas (N) que se formam de um objeto colocado entre dois espelhos pode ser calculado pela relação

$$N = \frac{360°}{\hat{a}ngulo\ entre\ as\ superf\acute{\imath}cies\ refletoras} - 1$$

O número máximo de imagens distintas do botão, que podem ser vistas por João é

- **A** 1
- **B** 2
- **C** 3
- **D** 5
- **E** 6

Questão 17

(UEMA)

A bola de futebol evoluiu ao longo do tempo e, atualmente, é um icosaedro truncado, formado por 32 peças, denominadas de gomos e, geometricamente, de faces. Nessa bola, 12 faces são pentágonos regulares, e as outras, hexágonos, também regulares. Os lados dos pentágonos e dos hexágonos são iguais e costurados. Ao unirem-se os dois lados costurados das faces, formam-se as arestas. O encontro das arestas formam os vértices. Quando cheio, o poliedro é similar a uma esfera.

O número de arestas e o número de vértices existentes nessa bola de futebol são, respectivamente,

Pode ser utilizado o Teorema de Descartes-Euler, A+2=V+F

Ⓐ 80 e 60
Ⓑ 80 e 50
Ⓒ 70 e 40
Ⓓ 90 e 60
Ⓔ 90 e 50

Questão 18

(UFPR)

Todas as faces de um cubo sólido de aresta 9 cm foram pintadas de verde. Em seguida, por meio de cortes paralelos a cada uma das faces, esse cubo foi dividido em cubos menores, todos com aresta 3 cm. Com relação a esses cubos, considere as seguintes afirmativas:

1. Seis desses cubos menores terão exatamente uma face pintada de verde.
2. Vinte e quatro desses cubos menores terão exatamente duas faces pintadas de verde.
3. Oito desses cubos menores terão exatamente três faces pintadas de verde.
4. Um desses cubos menores não terá nenhuma das faces pintada de verde.

Assinale a alternativa correta.

Ⓐ Somente as afirmativas 1, 2 e 4 são verdadeiras.
Ⓑ Somente as afirmativas 1 e 4 são verdadeiras.
Ⓒ Somente as afirmativas 1, 3 e 4 são verdadeiras.
Ⓓ Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
Ⓔ As afirmativas 1, 2, 3 e 4 são verdadeiras.

Questão 19

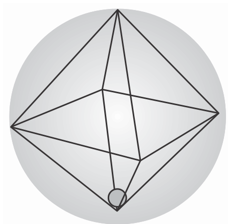
(UEL)

Originalmente os dados eram feitos de osso, marfim ou argila. Há evidências da existência deles no Paquistão, Afeganistão e noroeste da Índia, datando de 3500 a.C. Os dados cúbicos de argila continham de 1 a 6 pontos, dispostos de tal maneira que a soma dos pontos de cada par de faces opostas é sete.

Adaptado de: Museu Arqueológico do Red Fort. Delhi, India.

Atualmente, além dos dados em forma de cubo (hexaedro), encontram-se dados em vários formatos, inclusive esféricos, como mostram as figuras a seguir.

Apesar do formato esférico, ao ser lançado, o dado mostra pontos de um a seis, como se fosse um dado cúbico. Isso acontece porque no interior da esfera existe uma cavidade em forma de octaedro, na qual existe um peso (um chumbinho) que se aloja em um dos vértices do octaedro.



Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a propriedade dos poliedros regulares que justifica o fato de a cavidade no interior da esfera ser octaédrica.

Ⓐ O número de vértices do octaedro é igual ao número de faces do hexaedro.
Ⓑ O número de vértices do octaedro é diferente do número de faces do hexaedro.
Ⓒ O número de arestas do octaedro é igual ao número de arestas do hexaedro.
Ⓓ O número de faces do octaedro é igual ao número de vértices do hexaedro.
Ⓔ O número de faces do octaedro é diferente do número de vértices do hexaedro.

Questão 20

(UFC)

O número de faces de um poliedro convexo com 20 vértices e com todas as faces triangulares é igual a:

Ⓐ 28
Ⓑ 30
Ⓒ 32
Ⓓ 34
Ⓔ 36

Questão 21

(UERJ)

Considere o icosaedro a seguir (Fig.1), construído em plástico inflável, cujos vértices e pontos médios de todas as arestas estão marcados.
A partir dos pontos médios, quatro triângulos equiláteros congruentes foram formados em cada face do icosaedro.
Admita que o icosaedro é inflado até que todos os pontos marcados fiquem sobre a superfície de uma esfera, e os lados dos triângulos tornem-se arcos de circunferências, como ilustrado na figura 2.
Observe agora que, substituindo-se esses arcos por segmentos de reta, obtém-se uma nova estrutura poliédrica de faces triangulares, denominada geodésica. (Fig. 3)

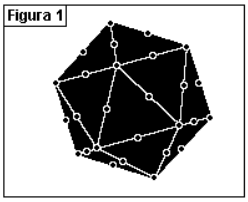
Figura 1


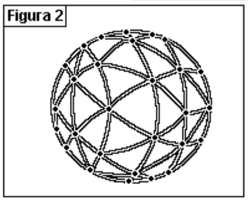
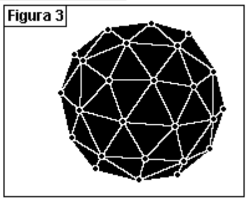
Figura 2


Figura 3


O número de arestas dessa estrutura é igual a:

- **A** 90
- **B** 120
- **C** 150
- **D** 180

Questão 22

(PUCRS)

Um poliedro convexo é formado por faces quadrangulares e 4 faces triangulares. A soma dos ângulos de todas as faces é igual a 12 retos.
Qual o número de arestas desse poliedro?

- **A** 8
- **B** 6
- **C** 4
- **D** 2
- **E** 1

Questão 23

(PUCRS)

Um poliedro convexo possui duas faces pentagonais e cinco quadrangulares. O número de vértices deste poliedro é

- **A** 4
- **B** 6
- **C** 8
- **D** 9
- **E** 10

Questão 24

(UFC)

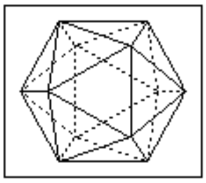
Um poliedro convexo só tem faces triangulares e quadrangulares. Se ele tem 20 arestas e 10 vértices, então, o número de faces triangulares é:

- **A** 12
- **B** 11
- **C** 10
- **D** 9
- **E** 8

Questão 25

(UERJ)

Um icosaedro regular tem 20 faces e 12 vértices, a partir dos quais retiram-se 12 pirâmides congruentes. As medidas das arestas dessas pirâmides são iguais a 1/3 da aresta do icosaedro. O que resta é um tipo de poliedro usado na fabricação de bolas. Observe as figuras.




Para confeccionar uma bola de futebol, um artesão usa esse novo poliedro, no qual cada gomo é uma face. Ao costurar dois gomos para unir duas faces do poliedro, ele gasta 7 cm de linha.

Depois de pronta a bola, o artesão gastou, no mínimo, um comprimento de linha igual a:

- **A** 7,0 m
- **B** 6,3 m
- **C** 4,9 m
- **D** 2,1 m

Questão 26

(PUCRS)

Um poliedro convexo tem 7 faces. De um dos seus vértices partem 6 arestas e de cada um dos vértices restantes partem 3 arestas. Quantas arestas tem esse poliedro?

- **A** 8
- **B** 10
- **C** 12
- **D** 14
- **E** 16

Questão 27

(UFC)

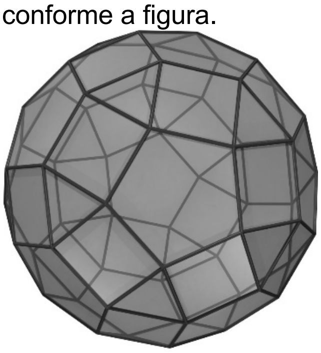
Um poliedro convexo de nove vértices possui quatro ângulos triédricos e cinco ângulos tetraédricos. Então o número de faces deste poliedro é:

- **A** 12
- **B** 11
- **C** 10
- **D** 9
- **E** 8

Questão 28

(Ronaebson)

Um artista plástico deseja confeccionar uma escultura metálica no formato de um rombicosidodecaedro, um poliedro convexo constituído por faces regulares, sendo 20 triangulares, 30 quadrangulares e 12 pentagonais, conforme a figura.



Disponível em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rhombicosidodecahedron.jpg. Acesso em 09 set. 2023.

Em cada vértice da obra de arte, o artista pretende colocar uma esfera, interligando por meio dela tubos que constituirão as arestas do sólido geométrico, cujos comprimentos deverão ser de 20 cm.

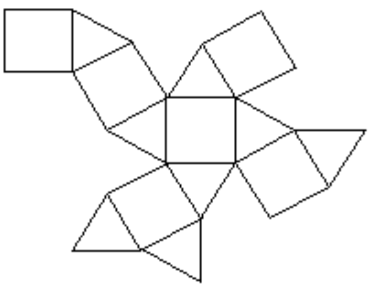
Sabendo-se que o preço de 6 metros desse tubo é de R$ $150{,}00$ e que uma caixa contendo 12 dessas esferas é vendida a R$ $22{,}00$, quanto o artista deverá gastar com a compra desses materiais?

- **A** R$ $670{,}00$
- **B** R$ $710{,}00$
- **C** R$ $860{,}00$
- **D** R$ $1040{,}00$
- **E** R$ $1310{,}00$

Questão 29

(UFJF)

A figura a seguir representa a planificação de um poliedro convexo.



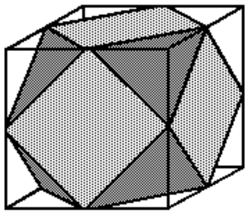
O número de vértices deste poliedro é:

- **A** 12.
- **B** 14.
- **C** 16.
- **D** 20.
- **E** 22.

Questão 30

(UNIFESP)

Considere o poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um cubo.



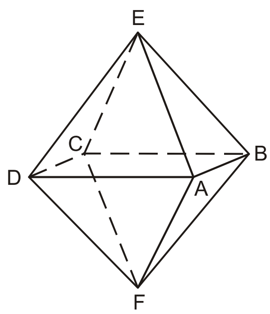
O número de faces triangulares e o número de faces quadradas desse poliedro são, respectivamente:

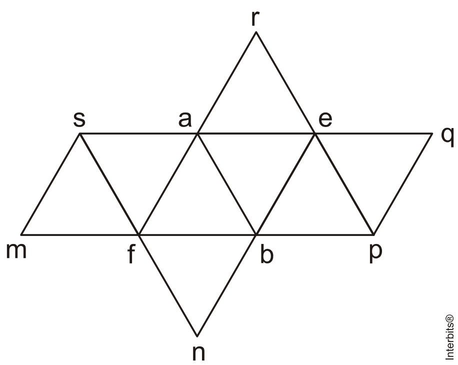
- **A** 8 e 8
- **B** 8 e 6
- **C** 6 e 8
- **D** 8 e 4
- **E** 6 e 6

Questão 31

(UFRGS)

As figuras a seguir representam um octaedro regular e uma de suas planificações.





Aos vértices A, B, E, F do octaedro correspondem, respectivamente, os pontos a, b, e, f da planificação. Ao vértice D do octaedro correspondem, na planificação, os pontos

- **A** m, n, p.
- **B** n, p, q.
- **C** p, q, r.
- **D** q, r, s.
- **E** r, s, m.

Questão 32

(Ronaebson)

José Antônio ganhou do seu tio vários cubos de plástico, algumas apenas com faces brancas, outros com todas as faces verdes e os demais contendo faces brancas e verdes. Em um dado dia, ele estava brincando e empilhou 14 deles conforme a figura a imagem a seguir.

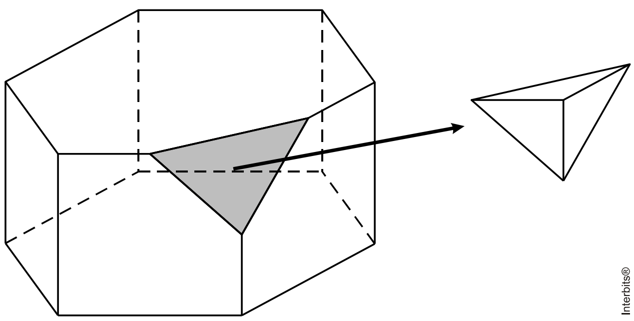
Desses 14 cubos, tendo como referência apenas essa vista, o número máximo de que podem ter todas as faces verdes é

A 1.
B 2.
C 3.
D 4.
E 5.

Questão 33

(Insper)

De cada vértice de um prisma hexagonal regular foi retirado um tetraedro, como exemplificado para um dos vértices do prisma desenhado a seguir.



O plano que definiu cada corte feito para retirar os tetraedros passa pelos pontos médios das três arestas que concorrem num mesmo vértice do prisma. O número de faces do poliedro obtido depois de terem sido retirados todos os tetraedros é

A 24.
B 20.
C 18.
D 16.
E 12.

Gabarito_Poliedros	
Hora de Praticar	
Questão	Resposta
01	B
02	D
03	A
04	D
05	E
06	E
07	C
08	A
09	D
10	C
11	A
12	C
13	B
14	E
15	C
16	D
17	D
18	C
19	A
20	E
21	B
22	A
23	E
24	E
25	B
26	C
27	D
28	B
29	A
30	B
31	D
32	E
33	B

PRISMAS

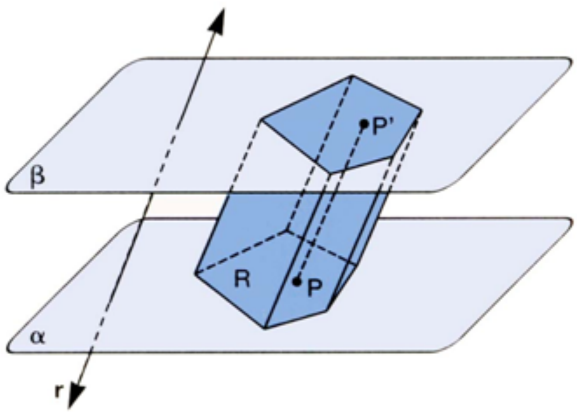
RONAEBSON
MATEMÁTICA CRIATIVA

PRISMAS

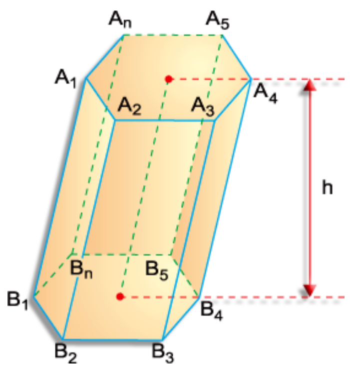


O prisma é uma das formas poliédricas mais presentes no nosso dia a dia, quando olhamos em volta, rapidamente o enxergamos numa caixa de sapatos, numa caixa de leite, no formato dos prédios, nos favos de mel das abelhas, em embalagens de presentes, etc.

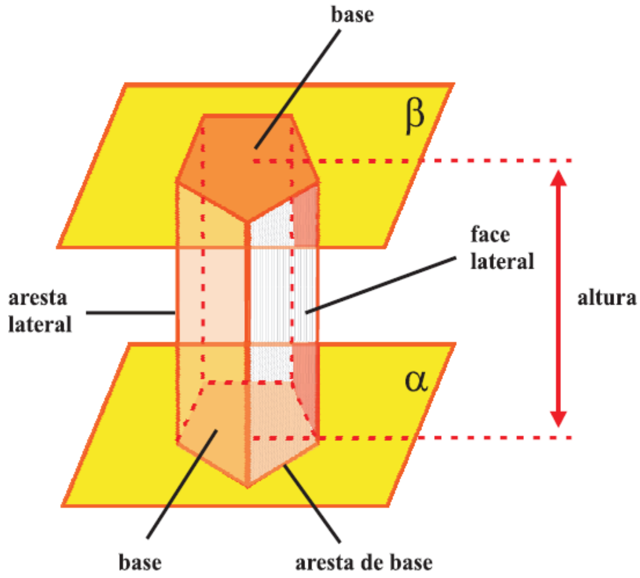
Definição: Sejam dois planos α e β paralelos e distintos. Consideremos uma região poligonal com *R* contida em α e uma reta *r* secante aos planos α e β. Chama-se prisma, a união de todos os segmentos paralelos a reta *r*, com uma extremidade na região poligonal *R* e a outra extremidade em β.



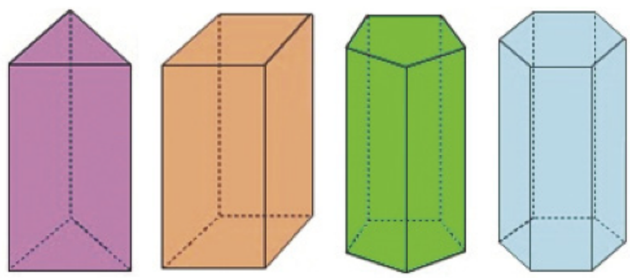
Podemos destacar num prisma os seguintes elementos:



- *Bases:* são os polígonos $A_1A_2 \cdots A_n$ e $B_1B_2 \cdots B_n$;
- *Faces Laterais:* são todos os polígonos que formam a superfície do prisma, exceto as bases. Observe que as faces laterais do prisma são paralelogramos.
- *Vértices:* são os vértices das faces $(A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n)$.
- *Arestas da Base:* são os lados dos polígonos da base.
- *Arestas Laterais:* são os segmentos formados pela intersecção de duas faces laterais $(\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \dots, \overline{A_nB_n})$.
- *Altura:* distância entre os planos das bases.

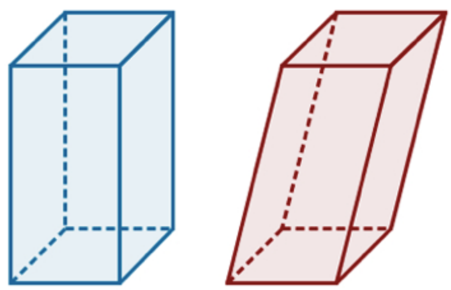


O nome do prisma é dado de acordo com o número de arestas da base.



Prisma Triangular | Prisma Quadrangular | Prisma Pentagonal | Prisma Hexagonal

Um prisma é ***reto*** quando suas arestas laterais são perpendiculares em relação aos planos das bases e será dito um prisma oblíquo quando as arestas laterais forem oblíquas em relação aos planos das bases.

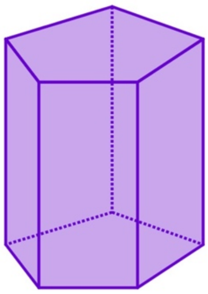


Prisma Reto | Prisma Oblíquo

No prisma reto, as faces laterais são retangulares e no prisma oblíquo são paralelogramos.

Prisma Regular

Um prisma é dito regular quando ele for reto e as bases forem polígonos regulares.



Vale destacar que em todo prisma regular as arestas laterais são todas congruentes e as faces laterais são retângulos também congruentes entre si.

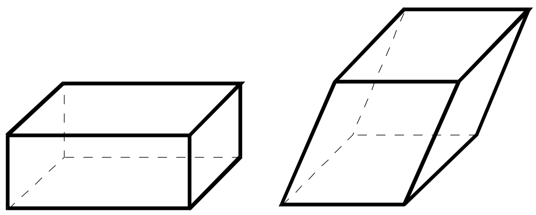
Áreas de um Prisma

- **Área da Base** $(\boldsymbol{A_B})$**:** é área do polígono da base.
- **Área Lateral** $(\boldsymbol{A_L})$**:** é a soma das áreas de todas as faces laterais.
- **Área Total** $(\boldsymbol{A_T})$**:** é a soma da área lateral com as áreas das duas bases.

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$

Paralelepípedo

Paralelepípedo é todo prisma cujas bases são paralelogramos.

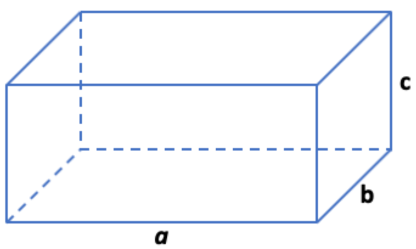


PARALELEPÍPEDO RETO | PARALELEPÍPEDO OBLÍQUO

Paralelepípedo Reto-Retângulo

Dedicaremos nossas atenções ao paralelepípedo reto-retângulo, que é o paralelepípedo cujas bases são retangulares e cujas arestas laterais são todas perpendiculares em relação aos planos das bases.

Consideremos um paralelepípedo reto-retângulo de cujas dimensões – comprimento, largura e altura – são as medidas *a*, *b* e *c*.



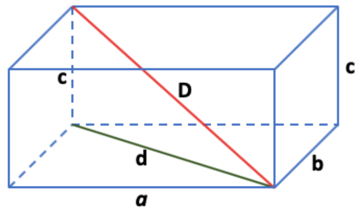
Quando olhamos para as faces do paralelepípedo, percebemos dois retângulos de área ab, dois de área ac e dois de área bc. Assim, a área total desse paralelepípedo é a soma das áreas de suas seis faces:

$$A_T = 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{A_T = 2 \cdot (ab + ac + bc)}$$

Para o cálculo da diagonal *D* do paralelepípedo, vamos calcular primeiramente a diagonal *d* da base utilizando o Teorema de Pitágoras.



$$d^2 = a^2 + b^2 \implies \boldsymbol{d = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

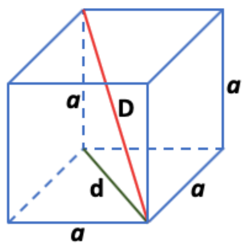
Daí,

$$D^2 = d^2 + c^2 \implies D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\boldsymbol{D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Cubo

O cubo é o paralelepípedo reto-retângulo cujas arestas são todas congruentes.



Considerando o cubo de aresta *a*, como indicado na figura, percebemos que ele tem seis faces quadradas, assim, sua área total pode ser calculada da seguinte maneira:

$$A_T = 6a^2$$

Para o cálculo da diagonal *D* do cubo, vamos calcular primeiramente a diagonal *d* da base utilizando o Teorema de Pitágoras.

$$d^2 = a^2 + a^2 \implies d^2 = 2a^2 \implies \boldsymbol{d = a\sqrt{2}}$$

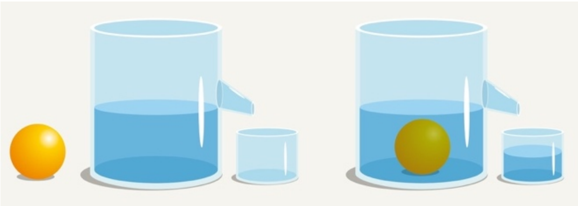
Daí,

$$D^2 = d^2 + a^2 \implies D^2 = 2a^2 + a^2 \implies D^2 = 3a^2$$

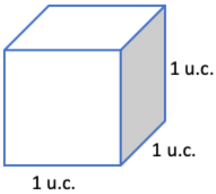
$$\boldsymbol{D = a\sqrt{3}}$$

CÁLCULO DE VOLUMES

O volume de um corpo é a medida do espaço por ele ocupado. Por exemplo, ao mergulharmos uma laranja num recipiente com água, observamos que parte da água é deslocada, de modo que essa quantidade de água deslocada é igual à porção do espaço ocupado pela laranja.

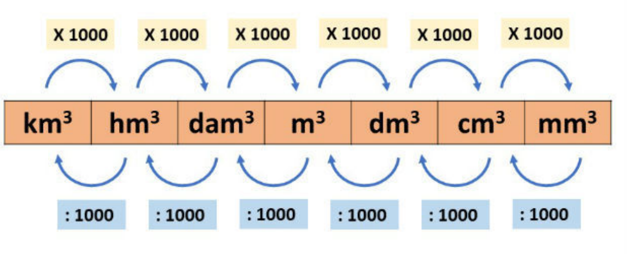


Adotaremos um cubo de aresta *1 u.c.* (unidades de comprimento) como sendo a nossa unidade de volume de referência, ou seja, o volume desse cubo medirá *1 u.v.* (unidade de volume).

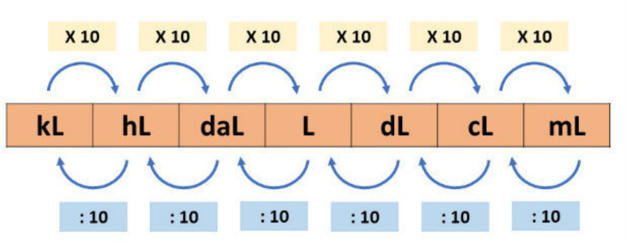


$$V = 1\,u.v. = 1\,(u.c.)^3$$

As unidades de medidas de volume podem ser representadas na escala a seguir:



Outra unidade de volume usada é o *litro* (L), definida como $1\,dm^3$. Também podemos trabalhar com seus múltiplos e submúltiplos, vejamos:



É importante perceber também as seguintes relações:

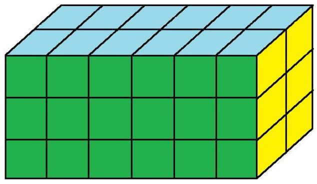
$$1L = 1\,dm^3 = 1000\,cm^3$$
$$\Downarrow$$
$$1000\,mL = 1000\,cm^3 \implies 1\,mL = 1\,cm^3$$

Além disso,

$$1\,m^3 = 1000\,dm^3 = 1000\,L$$

Talvez você não saiba que o nome desta conhecida unidade de volume deriva do nome de um cientista de apelido Claude Emile Jean-Baptiste Litre (1716 – 1778). Foi um notável investigador, sendo de realçar os seus trabalhos no domínio dos pesos e medidas. Seria na passagem do aniversário da morte de Litre, em 1978, que a Comissão Geral de Pesos e Medidas decidiu utilizar o nome deste cientista para o dm3 e adoptar o símbolo L, de acordo com a doutrina de que os símbolos das unidades cujo nome deriva de pessoas devem ser escritos com letra maiúscula.

Diante do exposto, para o cálculo do volume de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 6, 2 e 3 unidades de comprimento, podemos dividi-lo em cubinhos de lado *1 u.c.*, como na figura, assim, teremos três camadas de 12 cubinhos cada uma, resultando um total de 36 cubinhos.



Logo, o volume desse paralelepípedo pode é dado pelo produto

$$V = 6 \times 2 \times 3 = 36\,u.v.$$

Generalizando, temos que o volume do paralelepípedo de dimensões *a*, *b* e *c*, é dado por

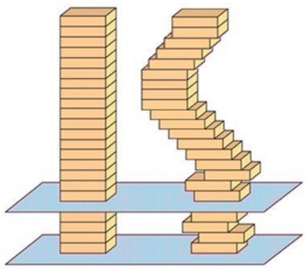
$$\boldsymbol{V = a \cdot b \cdot c}$$

O volume de um cubo de arestas iguais a *a* é dado por:

$$\boldsymbol{V = a^3}$$

Princípio de Cavalieri

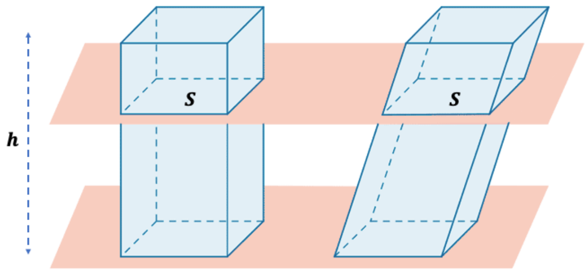
As figuras a seguir representam os mesmos blocos de madeira empilhados de duas maneiras diferentes.



É fácil ver que as pilhas têm volumes iguais, pois o volume de cada pilha é a soma dos volumes dos blocos de madeira que a compõem, e as duas pilhas são compostas pelos mesmos blocos. Em outras palavras, embora o formato de um sólido geométrico seja modificado, excetuando os casos em que ele perde ou ganha massa, seu volume permanece o mesmo.

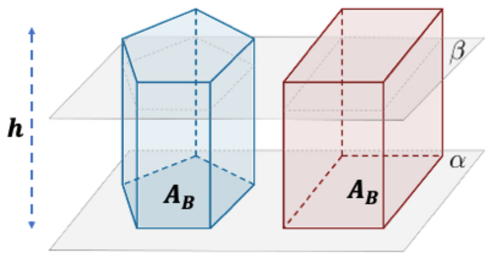
O matemático Bonaventura Cavalieri, professor da Universidade de Bolonha, transformou essa ideia intuitiva numa importante proposição:

Dois sólidos de mesma altura têm volumes iguais se as secções as secções planas de iguais altura possuírem a mesma área.



Assim, podemos usar o princípio de Cavalieri para o cálculo do volume de um prisma.

Consideremos um prisma e um paralelepípedo reto-retângulo de mesma altura, cujas bases estão contidas em α e têm a mesma área A_B. Note que qualquer plano β, paralelo a α, que intercepta o prisma, também intercepta o paralelepípedo.

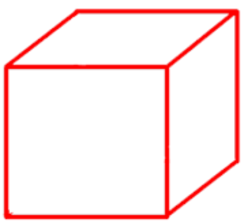


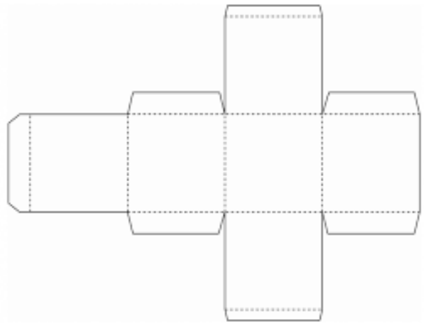
Como qualquer secção transversal de um prisma é congruente às suas bases, temos que qualquer plano β, tomado nas condições anteriores, determina nesses prismas secções de mesma área, assim, como eles têm a mesma altura, pelo Princípio de Cavalieri, os volumes são iguais, ou seja, o volume de um prisma é igual ao volume de um paralelepípedo reto-retângulo de mesma área da base e mesma altura, ou seja:

$$V_{Prisma} = A_B \cdot h$$

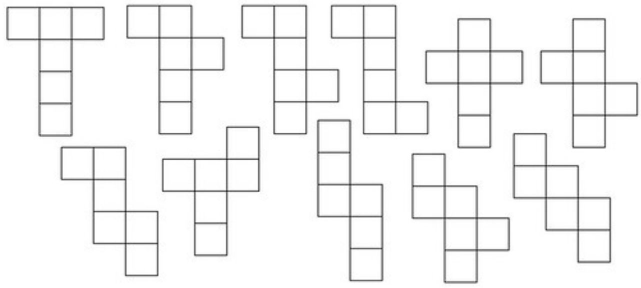
PLANIFICAÇÃO

Um cubo pode ser planificado de várias maneiras, seguem os exemplos:

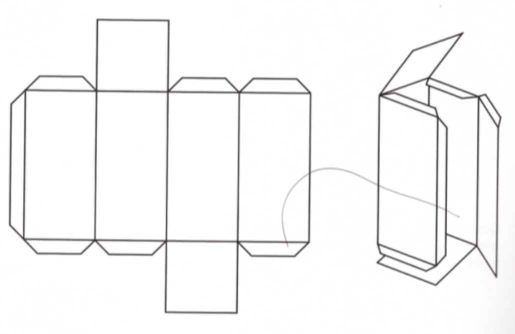




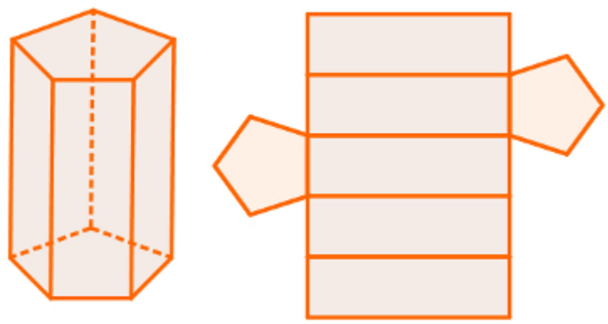
Abaixo seguem outras possíveis planificações para um cubo



Uma das planificações do paralelepípedo reto-retângulo é dada por:



Para um prisma de base pentagonal, uma das maneiras que temos de planificá-lo é dada a seguir.



Hora de Praticar

Questão 01

(Ronaebson)

Carlito estava brincando com seu “material dourado” formado com cubinhos de aresta medindo 1 cm. Inicialmente, ele montou um cubo completo de lado 5 cm, depois ele retirou alguns cubinhos de lado 1 cm obtendo um sólido composto por colunas de mesma altura sobre uma camada completa correspondendo a base, conforme a ilustração.

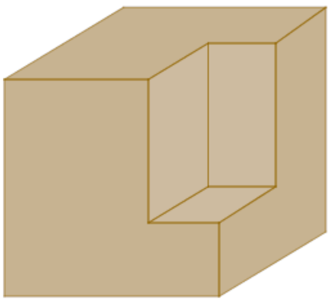
Qual o número de cubinhos que Carlito retirou do cubo de lado 5 cm formado para confeccionar o sólido descrito acima?

Ⓐ 36
Ⓑ 45
Ⓒ 48
Ⓓ 64
Ⓔ 80

Questão 02

(Ronaebson)

Fabiano é um marceneiro muito habilidoso e, para o preparo de um objeto de decoração, ele tomou um cubo de madeira de volume igual a 8000 cm^3, fez três cortes em três de suas faces e produziu a peça mostrada na figura a seguir.

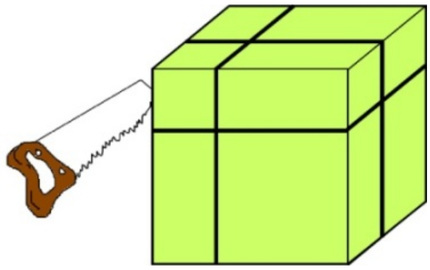


Para saber quando de tinta ele necessita comprar para pintar essa peça, ele precisa calcular sua área total. Assim o valor encontrado por Fabiano para a área total da peça foi

Ⓐ 2400 cm^2.
Ⓑ 1800 cm^2.
Ⓒ 1440 cm^2.
Ⓓ 1200 cm^2.
Ⓔ 1120 cm^2.

Questão 03

Um cubo foi pintado de verde. Em seguida, foi cortado paralelamente às faces, obtendo-se oito blocos retangulares menores. As faces sem cor desses blocos foram pintadas de vermelho.



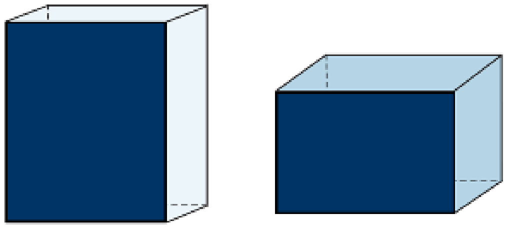
Qual é a razão entre a área da superfície total verde e a área da superfície total vermelha?

Ⓐ 1:1
Ⓑ 1:2
Ⓒ 1:3
Ⓓ 2:3
Ⓔ 3:4

Questão 04

Você deve ter observado que várias marcas de sabão em pó tiveram uma mudança na embalagem de 1kg: passaram de um paralelepípedo “mais estreito e alto” para um “mais largo e baixo”.

As embalagens têm medidas aproximadamente iguais a:



- Embalagem antiga: 5 cm x 18 cm para a base e 24 cm para a altura.
- Embalagem nova: 6 cm x 20 cm para a base e 18 cm para a altura.

Revista do Professor de Matemática 60, 2006 (adaptado)

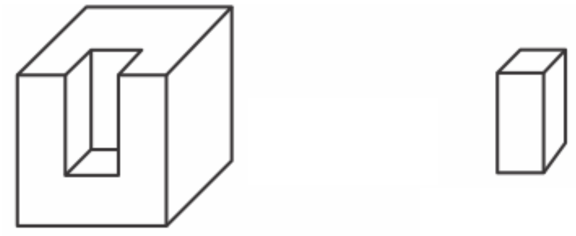
Sabendo que ambas as embalagens têm volume suficiente para embalar 1kg do produto, a mudança nas embalagens proporciona à empresa que comercializa o produto uma redução nos custos de fabricação das embalagens de aproximadamente

Ⓐ 8,4%.
Ⓑ 10,0%.
Ⓒ 15,5%.
Ⓓ 48,6%.
Ⓔ 91,6%.

Questão 05

(Ronaebson)

Um engenheiro de materiais pediu para um torneiro mecânico que confeccionasse uma peça de ferro, obtida a partir do recorte de um cubo de aresta 20 cm, de acordo com a figura.



Sabe-se que a peça retirada corresponde a um paralelepípedo reto-retângulo de 5 cm de largura, 6 cm de comprimento e 12 cm de altura.

Dado que a densidade do ferro é de aproximadamente $8\ g/cm^3$, a massa da peça obtida pelo torneiro foi

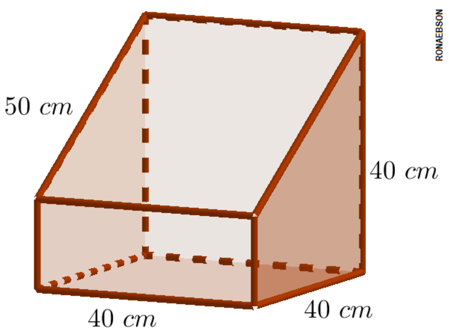
Ⓐ 2,88 kg.
Ⓑ 5,12 kg.
Ⓒ 40,96 kg.
Ⓓ 61,12 kg.
Ⓔ 80,00 kg.

Questão 06

(Ronaebson)

Lápide é uma pedra que contém uma inscrição (epitáfio) gravada para registrar a morte de uma pessoa, normalmente localizada sobre o túmulo ou anexada a ele.

No cemitério Morada Pacífica, as lápides são pedras maciças de granito que tem a forma de um prisma reto de seis faces nos seguintes formatos: dois trapézios retângulos, dois quadrados e dois retângulos. As medidas estão indicadas na figura.



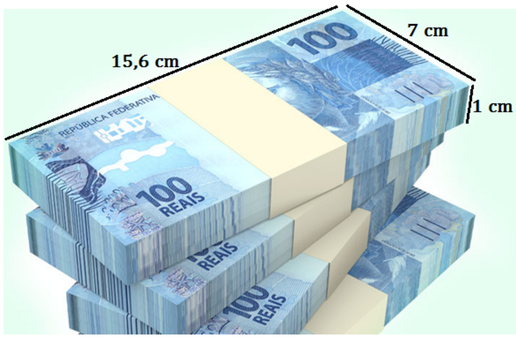
Sabendo-se que a densidade do granito é de $2{,}7\ g/cm^3$, estima-se que a massa dessa lápide seja de aproximadamente

Ⓐ 27 kg.
Ⓑ 40 kg.
Ⓒ 108 kg.
Ⓓ 130 kg.
Ⓔ 270 kg.

Questão 07

(Ronaebson)

A nota de R$ 100 é a nota de maior valor em circulação no nosso país, ela possui 7 cm de largura e 15,6 cm de comprimento, além disso, um “maço” (pacote) contendo 100 notas de R$ 100 possui cerca de 1 cm de espessura, como ilustra a figura a seguir.



Aecinho recebe de mesada R$ 10.000,00 sempre num maço de notas de R$ 100 e a guarda num cofre no formato de um paralelepípedo reto retângulo cujas dimensões internas são 31,2 cm de comprimento, 21 cm de largura e 6 cm de altura. Depois de algum tempo juntando seu dinheiro, sempre em pacotes de 100 notas, ele o organizou de tal modo dentro do seu cofre que a parte interna ficou completamente preenchida.

O valor que Aecinho conseguiu acumular nesse período foi igual a

Ⓐ R$ 20000,00.
Ⓑ R$ 30000,00.
Ⓒ R$ 60000,00.
Ⓓ R$ 180000,00.
Ⓔ R$ 360000,00.

Questão 08

(Ronaebson)

Uma ponte será construída para a travessia de veículos. Para tanto, oito colunas de sustentação devem ser erguidas, de modo que cada coluna tem a forma de um paralelepípedo reto retângulo de 0,8m de largura, 1 m de comprimento e 10 m de altura.

Sabe-se que o metro cúbico de concreto custa R$ 250,00 e que deverão ser comprados 10% a mais de material do que o necessário para a construção das colunas por conta dos eventuais e inevitáveis desperdícios.

O custo total que a empreiteira terá com a compra do concreto para a construção dessa ponte será

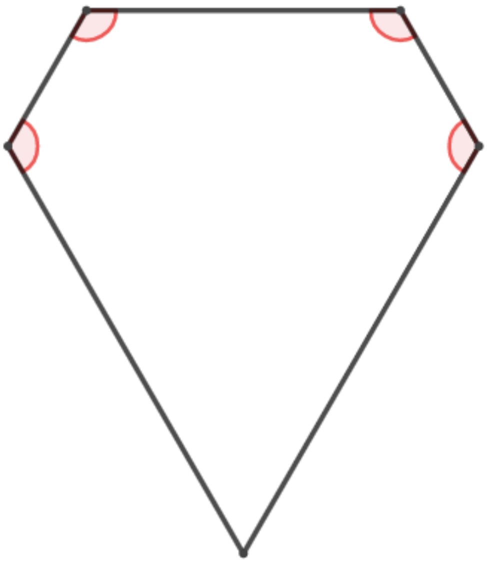
Ⓐ R$ 16.000,00
Ⓑ R$ 17.600,00
Ⓒ R$ 24.000,00
Ⓓ R$ 32.000,00
Ⓔ R$ 64.000,00

Questão 09

(Ronaebson)

Uma empresa irá produzir placas que serve de peso para papéis em escritório e ao mesmo tempo como item de decoração com o símbolo do *Superman*. As placas terão a forma de um prisma pentagonal com um **S** impresso na parte superior.

Para a produção de cada placa será usado um prisma de altura 2 cm e cuja base é um pentágono como descrito na figura a seguir, onde todos os ângulos obtusos destacados são iguais a 120º e seus lados medem 8 cm, 4 cm, 12 cm, 12 cm 4 cm.



Sabendo que a densidade do material utilizado para fazer essa placa é $12{,}5\ g/cm^3$ e que $\sqrt{3} \cong 1{,}7$, a massa da placa antes que seja impresso o **S** na parte superior é de aproximadamente

- **A** 190,4 g.
- **B** 238,0 g.
- **C** 1190,0 g.
- **D** 2380,0 g.
- **E** 2720,0 g.

Questão 10

(ENEM)

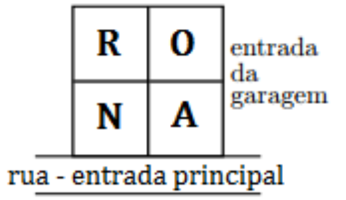
Uma editora pretende despachar um lote de livros, agrupados em 100 pacotes de 20 cm x 20 cm x 30 cm. A transportadora acondicionará esses pacotes em caixas com formato de bloco retangular de 40 cm x 40 cm x 60 cm. A quantidade mínima necessária de caixas para esse envio é

- **A** 9
- **B** 11
- **C** 13
- **D** 15
- **E** 17

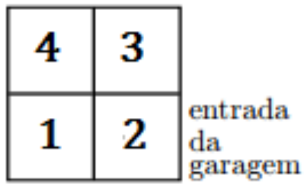
Questão 11

(Ronaebson)

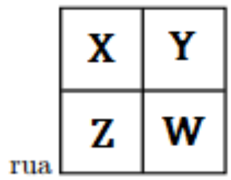
O prédio de uma grande penitenciária tem a forma de um cubo. As figuras a seguir apresentam três vistas do prédio, com as respectivas regiões em que se dividem.



Vista Superior (planta)



Vista frontal - da rua



Vista lateral - de frente para a entrada da garagem

Dessa forma, o prédio se divide em 8 cubos menores, e cada um deles representa um setor diferente. Para identificar o lugar de cada setor, utiliza-se um código de três dígitos, de acordo com as quatro regiões estabelecidas em cada uma das vistas do prédio apresentadas na figura.
Por exemplo, o setor administrativo que fica de frente para a rua, no andar de cima, do lado da garagem, tem código A3X, já o setor de produtividade e refeição que fica na parte dos fundos, no andar de baixo, na lateral oposta à garagem, tem código R1A.

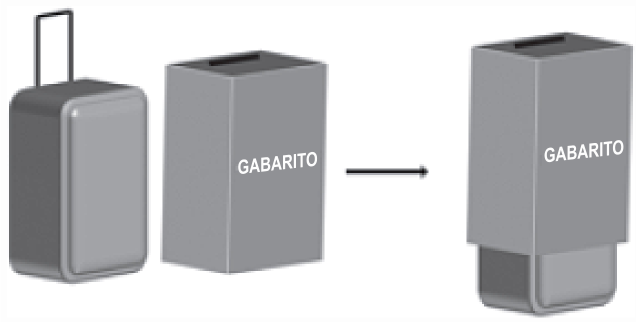
Assim, se o setor de celas tem código R4Y, isto significa dizer que ele fica

- **A** na parte dos fundos, no andar de cima e na lateral oposta à garagem.
- **B** na parte dos fundos, no andar de cima e do lado da garagem.
- **C** na parte dos fundos, no andar de baixo e na lateral oposta à garagem.
- **D** de frente para a rua, no andar de cima e na lateral oposta à garagem.
- **E** de frente para a rua, no andar de baixo e do lado da garagem.

Questão 12

(ENCCEJA_2020)

As bagagens de mão levadas a bordo do avião pelos passageiros têm limites padronizados para altura, largura e profundidade. Para verificar se as dimensões da bagagem de mão estão dentro dos padrões máximos recomendados, criou-se um gabarito. Caso a bagagem de mão caiba dentro desse gabarito, é considerada dentro dos padrões. A figura ilustra o uso desse tipo de gabarito.



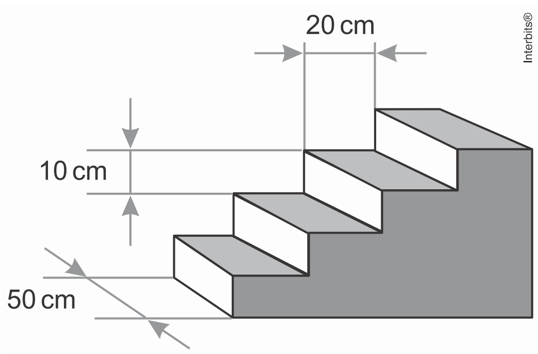
O sólido geométrico cujo formato se assemelha ao do gabarito é chamado de

A cilindro.
B cone.
C pirâmide.
D prisma.

Questão 13

(Fuvest_2019

A figura mostra uma escada maciça de quatro degraus, todos eles com formato de um paralelepípedo reto-retângulo. A base de cada degrau é um retângulo de dimensões 20 cm por 50 cm, e a diferença de altura entre o piso e o primeiro degrau e entre os degraus consecutivos é de 10 cm.

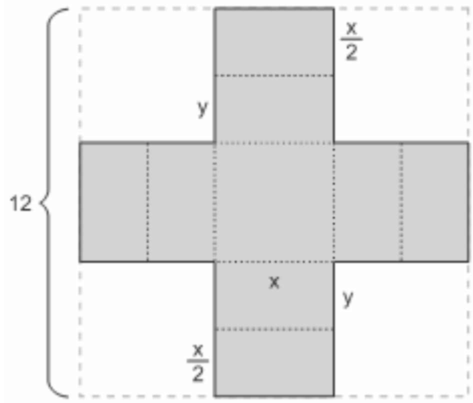


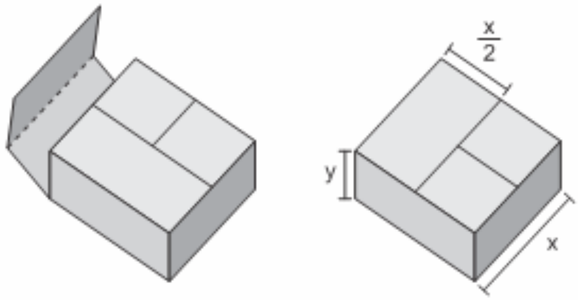
Se essa escada for prolongada para ter 20 degraus, mantendo o mesmo padrão, seu volume será igual a

A 2,1 m^3
B 2,3 m^3
C 3,0 m^3
D 4,2 m^3
E 6,0 m^3

Questão 14

Para construir uma caixa com a forma de um paralelepípedo retângulo, foi usado um quadrado de cartolina de 12 cm de lado. Nessa cartolina, recortou-se um dodecágono com quatro lados medindo $x$cm e oito lados medindo $\left(\frac{x}{2}+y\right)$ cm. A caixa tem altura y e sua base é um quadrado de lado x. Observe as ilustrações:





A expressão que determina o volume V da caixa em função de x é

A $V(x) = -x^2 + 6x$

B $V(x) = x^3 - 6x^2$

C $V(x) = -x^3 - 6x^2$

D $V(x) = x^3 + 6x^2$

E $V(x) = -x^3 + 6x^2$

Questão 15

(EFOMM_2019)

Duas caixas cúbicas e retangulares perfeitas, têm seis faces de quadrados perfeitos. As faces da primeira caixa têm 3 m^2 de área, e cada face da segunda caixa tem 9 m^2 de área. A razão entre o volume da primeira caixa e o volume da segunda é:

A $3^{1/2}$
B $3^{-1/2}$
C $3^{-3/2}$
D $3^{3/2}$
E $3^{-2/3}$

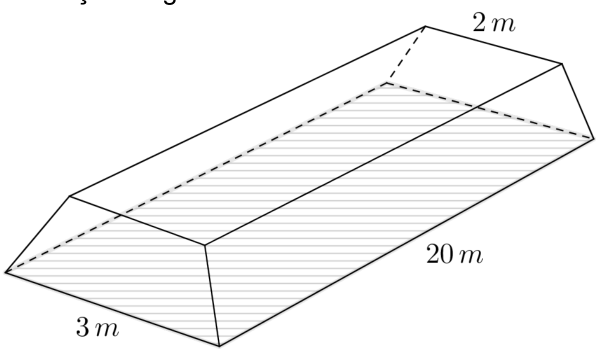
Questão 16

(Ronaebson)

Manter a qualidade do produto pós-colheita é essencial para não perder o rendimento conquistado na lavoura. **Armazenar os grãos** com segurança, ou seja, protegidos de fatores externos que possam danificar sua integridade, é sinônimo de preservação dos investimentos feitos durante toda uma **safra.** A escolha do tipo de silo a ser utilizado pela propriedade vai depender dos fatores econômicos, tecnológicos, flexibilidade de uso, facilidade de obtenção dos materiais de construção e as perdas que podem ser geradas. Os tipos mais comuns são os silos de superfície e os silos de trincheira. O silo de superfície é o mais barato de se construir, pois não exige estruturas de alvenaria ou de revestimentos. Não tem uma seção bem definida, mas se assemelha a forma trapezoidal.

Disponível em https://agropos.com.br/armazenamento-de-graos/
https://www.fundacaoroge.org.br/blog/tipos-diferentes-de-silo-vantagens-e-desvantagens
Acesso em 07/11/2021.

Um silo de superfície tem a forma de um prisma trapezoidal e suas as dimensões estão representadas no esboço a seguir.



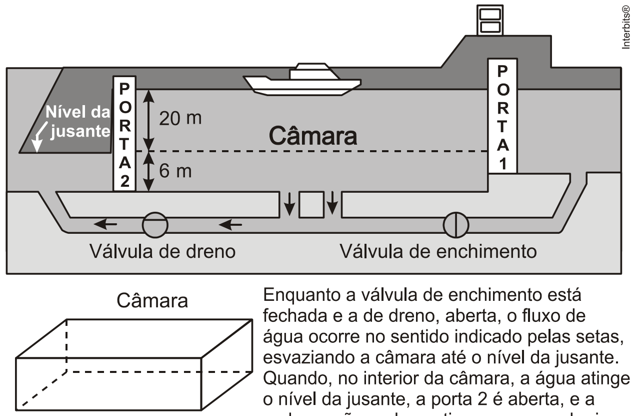
Dado que o volume de grãos armazenados é de $75\,m^3$, tem-se que a “altura do silo”, acima do solo, é

- **A** 0,5 m
- **B** 1,0 m
- **C** 1,5 m
- **D** 2,0 m
- **E** 2,5 m

Questão 17

(ENEM)

Eclusa é um canal que, construído em águas de um rio com grande desnível, possibilita a navegabilidade, subida ou descida de embarcações. No esquema a seguir, está representada a descida de uma embarcação, pela eclusa do porto Primavera, do nível mais alto do rio Paraná até o nível da jusante.



Enquanto a válvula de enchimento está fechada e a de dreno, aberta, o fluxo de água ocorre no sentido indicado pelas setas, esvaziando a câmara até o nível da jusante. Quando, no interior da câmara, a água atinge o nível da jusante, a porta 2 é aberta, e a embarcação pode continuar navegando rio abaixo.

A câmara dessa eclusa tem comprimento aproximado de 200 m e largura igual a 17 m. A vazão aproximada da água durante o esvaziamento da câmara é de 4.200 m^3 por minuto. Assim, para descer do nível mais alto até o nível da jusante, uma embarcação leva cerca de

- **A** 2 minutos.
- **B** 5 minutos.
- **C** 11 minutos.
- **D** 16 minutos.
- **E** 21 minutos.

Questão 18

(Ronaebson)

Querendo calcular o volume de um corpo com formato irregular, Uchôa teve uma ideia simples, porém genial. Pegou um aquário no formato de um paralelepípedo reto retângulo com base de dimensões 50cm x 30 cm e altura igual a 40 cm e colocou água até certo nível. Mergulhou o referido corpo até que ele ficasse completamente submerso e mediu novamente o nível da água.

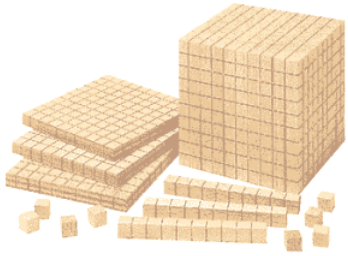
Uchôa percebeu que a variação do nível da água do primeiro momento para o segundo momento foi de 5cm e com isso ele pode calcular o volume do corpo, que era igual a

- **A** 7,5 litros.
- **B** 15 litros.
- **C** 20 litros
- **D** 75 litros.
- **E** 7500 litros.

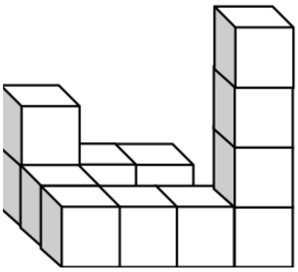
Questão 19

(Ronaebson)

Material Dourado é um dos materiais idealizados pela médica e educadora Maria Montessori. Ele tem como foco o trabalho com a matemática. Apesar de ter sido elaborado para o trabalho com aritmética, seguiu os mesmos princípios montessorianos sobre a educação sensorial.



Samuel, brincando com os cubinhos menores do seu material dourado, colou doze desses cubos para fazer uma peça como a da figura a seguir.



Ele pintou toda a peça de vermelho, incluindo a parte de baixo. Quantos dos cubinhos que compõem a peça tiveram exatamente quatro faces pintadas?

- **A** 4
- **B** 6
- **C** 8
- **D** 9
- **E** 12

Questão 20

(UECE_2019)

José reuniu alguns cubinhos brancos unitários (a medida da aresta de cada um deles é igual a 1cm), formando um cubo maior, e, em seguida, pintou esse cubo de vermelho. Ao “desmontar” o cubo maior, verificou que tinha 80 cubinhos com mais de uma face pintada de vermelho.

Nestas condições, pode-se afirmar corretamente que a medida, em centímetros, da aresta do cubo maior é

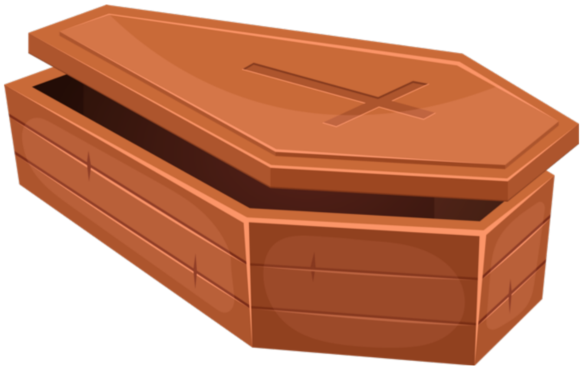
- **A** 7.
- **B** 8.
- **C** 6.
- **D** 9.
- **E** 10.

Questão 21

(Ronaebson)

Um caixão, também conhecido por ataúde, esquife, féretro ou urna funerária, é uma caixa ou recipiente resistente e impermeável, provido em seu interior de material absorvente, usada para acondicionamento, transporte e sepultamento de restos mortais humanos.

Um dos modelos mais vendidos na Funerária PAX é o da figura a seguir.



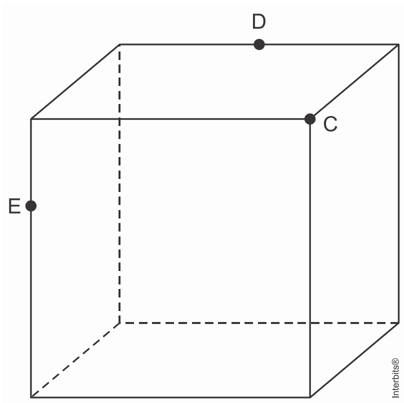
O caixão da figura acima tem a forma geométrica de um(a)

- **A** paralelepípedo.
- **B** pirâmide hexagonal.
- **C** tronco de pirâmide.
- **D** prisma hexagonal.
- **E** octaedro regular.

Questão 22

(UPF_2019)

Na figura abaixo, está representado um cubo.



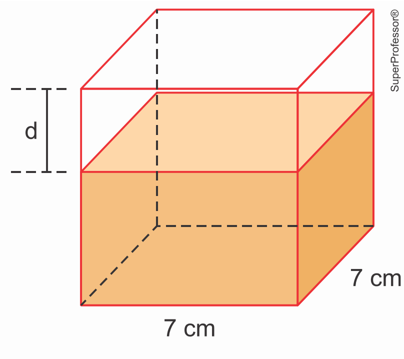
A seção produzida no cubo pelo plano CDE tem a forma de

- **A** triângulo.
- **B** trapézio.
- **C** retângulo.
- **D** pentágono.
- **E** hexágono.

Questão 23

(UEA_2024)

Em uma caneca, no formato de um cubo com arestas internas medindo 7 cm, foram colocados 245 mL de café, que não preencheram totalmente a caneca, restando ainda um espaço entre a superfície do café e a borda superior da caneca, conforme figura.



fora de escala

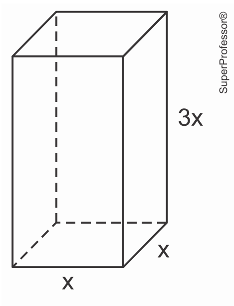
A distância entre a altura do café, no interior da caneca, e a borda superior da caneca, indicada na figura pela letra d, é igual a

- Ⓐ 3 cm.
- Ⓑ 4 cm.
- Ⓒ 2 cm.
- Ⓓ 5 cm.
- Ⓔ 1 cm.

Questão 24

(UEA_2024)

A medida da altura de um prisma reto de base quadrada é o triplo da medida da aresta da base, conforme mostra a figura.



fora de escala

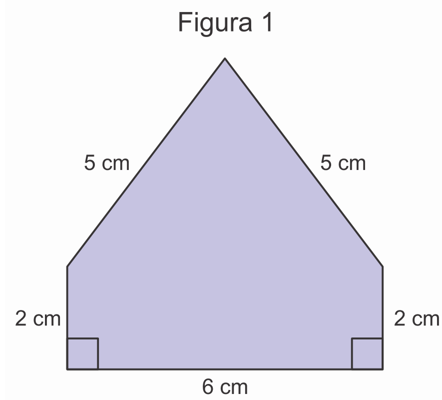
Sabendo que a soma das medidas das 12 arestas desse prisma é 80 cm, seu volume é

- Ⓐ 216 cm^3.
- Ⓑ 144 cm^3.
- Ⓒ 120 cm^3.
- Ⓓ 168 cm^3.
- Ⓔ 192 cm^3.

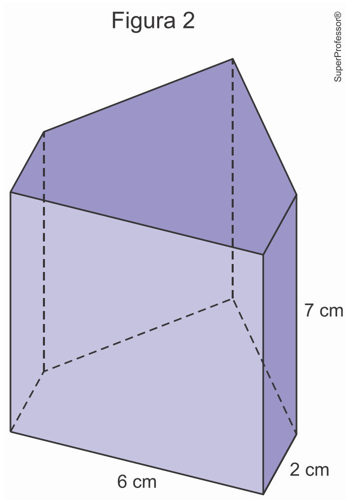
Questão 25

(UEA_2024)

Um prisma reto tem por base um pentágono com dois ângulos retos, conforme mostra a figura 1.



O volume desse prisma é igual a 168 cm^3 e a figura 2 mostra uma vista desse prisma quando está apoiado sobre um dos pentágonos.



A área total desse prisma é

- Ⓐ 140 cm^2.
- Ⓑ 164 cm^2.
- Ⓒ 188 cm^2.
- Ⓓ 212 cm^2.
- Ⓔ 236 cm^2.

Questão 26

(Mackenzie_2023)

Uma fábrica de embalagens produz caixas de vários tamanhos. Uma delas tem formato cúbico com aresta medindo 30 cm. Se a caixa não tem tampa e o material utilizado para as faces laterais custa RS 5,00 o metro quadrado e para a base custa R$ 6,00 o metro quadrado, então o custo do material dessa caixa é

- Ⓐ R$ 28,80
- Ⓑ R$ 23,40
- Ⓒ R$ 10,88
- Ⓓ R$ 2,88
- Ⓔ R$ 2,34

Questão 27

(ACAFE_2022)

O sólido reto, representado na FIGURA 1, foi projetado pelo engenheiro Franz Reuleaux como um mecanismo capaz de substituir os cilindros no processo de transporte de rolagem. As bases paralelas e congruentes desse sólido são conhecidas como triângulo de Reuleaux ou triângulo esférico e, embora não seja exatamente um triângulo, são construídas a partir dos vértices de um triângulo equilátero ABC, representado na FIGURA 2. Os arcos que contornam o triângulo de Reuleaux têm centros nos vértices do triângulo e raio com medida igual ao lado.

Assinale a alternativa que contém o volume, em cm³, de um sólido semelhante à FIGURA 1, com altura de 100cm e com a distância AB = 12cm. (Utilize $\pi = 3{,}14$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$)

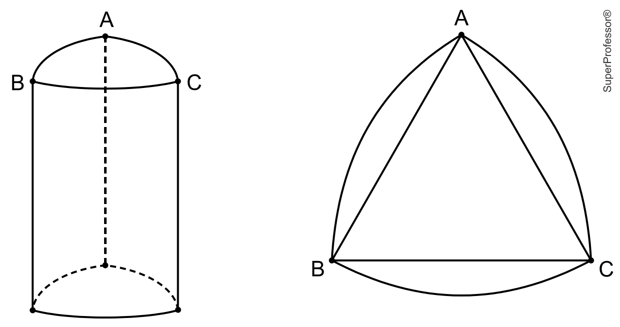


Figura 1 Figura 2

Ⓐ 10.368
Ⓑ 7.536
Ⓒ 8.952
Ⓓ 22.608

Questão 28

(FGV_2023)

Certo produto é transportado em contêineres cúbicos. Para reduzir o custo da embalagem no transporte, os transportadores pretendem trocar o contêiner atual por um cubo maior, com aresta duas vezes a aresta do cubo atual. Suponha que o material gasto para montar um contêiner seja proporcional à área da superfície do cubo. Ao transportar um volume correspondente ao cubo maior totalmente cheio, a economia de material com o cubo maior em relação ao material gasto com os contêineres atuais, necessários para transportar o mesmo volume, é de

Ⓐ 10%
Ⓑ 20%
Ⓒ 30%
Ⓓ 40%
Ⓔ 50%

Questão 29

(PUCRS_2022)

Uma artesã confecciona peças de parafina em formato de um prisma hexagonal regular. O hexágono de dentro é vazio, como mostra a figura 1. O segmento de reta AB = 32 cm une os pontos médios dos lados opostos do hexágono externo (figura 2), e o segmento de reta CD = 28 cm une os pontos médios dos lados opostos do hexágono interno (figura 3).

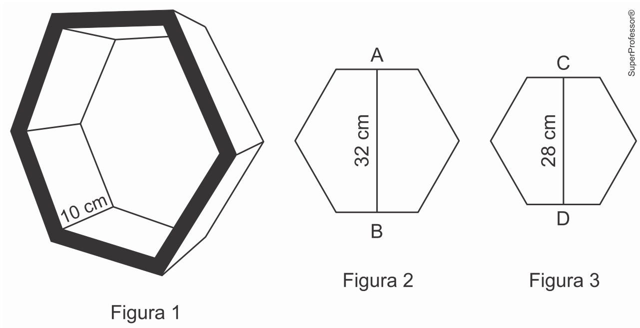


Figura 1 Figura 2 Figura 3

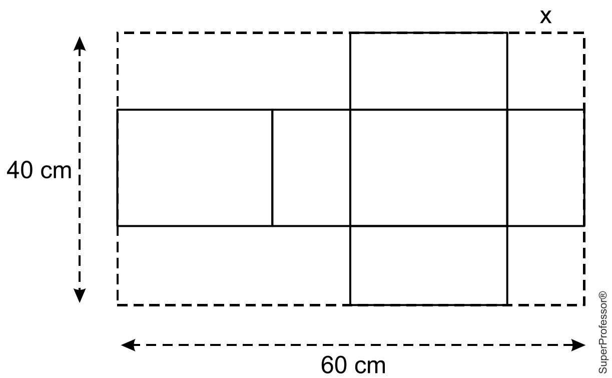
Considerando que a altura do prisma é 10 cm, a quantidade de parafina, em centímetros cúbicos (volume), da peça é

Ⓐ $1.200\sqrt{3}$
Ⓑ $3.920\sqrt{3}$
Ⓒ $5.120\sqrt{3}$
Ⓓ $9.040\sqrt{3}$

Questão 30

(FGV_2022)

De uma folha retangular de papel de medidas 60 cm por 40 cm serão recortados quatro cantos, de maneira a ser possível construir um paralelepípedo reto-retângulo de área total 1.698 cm², conforme mostra a figura.



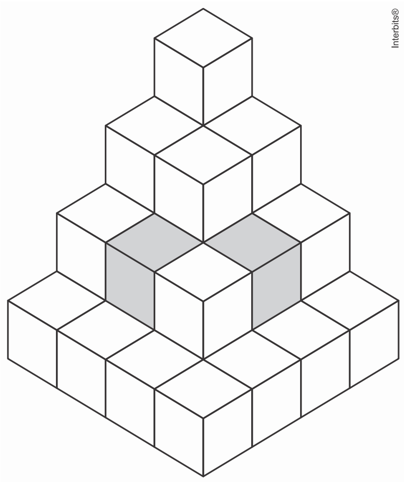
Nessas condições o valor de x é

Ⓐ 6 cm.
Ⓑ 7 cm.
Ⓒ 8 cm.
Ⓓ 9 cm.
Ⓔ 10 cm.

Questão 31

(FGV_2021)

A figura mostra um sólido composto por 30 cubos idênticos. Quando os cubos destacados em cinza são retirados, a área total do sólido aumenta em $144\ m^2$



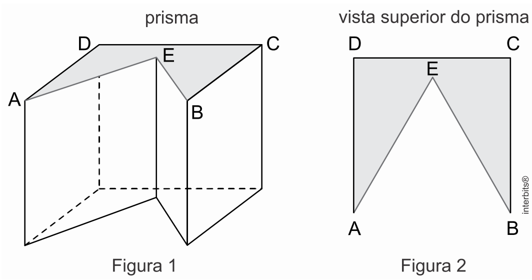
O volume do sólido original, sem a retirada dos cubos destacados em cinza, é igual a

- **A** $1920\ cm^3$.
- **B** $2733{,}75\ cm^3$.
- **C** $3750\ cm^3$.
- **D** $4991{,}25\ cm^3$.
- **E** $6480\ cm^3$.

Questão 32

(UNESP_2021)

Um cubo com aresta de medida igual a x centímetros foi seccionado, dando origem ao prisma indicado na figura 1. A figura 2 indica a vista superior desse prisma, sendo que AEB é um triângulo equilátero.



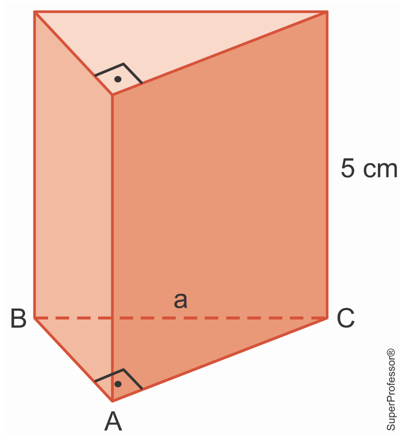
Sabendo-se que o volume do prisma da figura 1 é igual a $2(4-\sqrt{3})cm^3$, x é igual a

- **A** 2
- **B** $\frac{7}{2}$
- **C** 3
- **D** $\frac{5}{2}$
- **E** $\frac{3}{2}$

Questão 33

(PUCPR_2020)

Considere um prisma reto cuja base é o triângulo ABC retângulo em A, sendo a medida do lado AB, 6 cm e a projeção ortogonal do lado AB sobre a hipotenusa BC é 3,6 cm. A altura do prisma é 5 cm. O volume em cm^3 deste prisma é

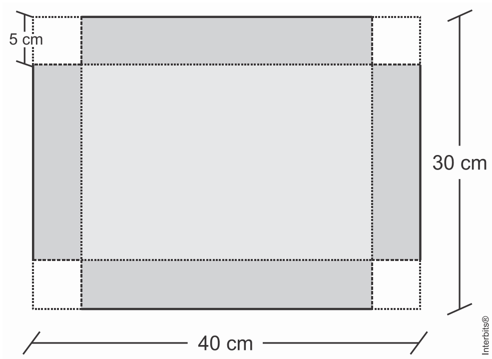


- **A** 36.
- **B** 100.
- **C** 120.
- **D** 150.
- **E** 240.

Questão 34

(IFPE)

Uma folha retangular de papelão de 40 cm por 30 cm será utilizada para confeccionar uma caixa, sem tampa, em forma de paralelepípedo, de base retangular. Para isso, deve-se, a partir desta folha de papelão, retirar 4 quadrados de lado 5 cm, de cada um dos vértices e, em seguida, dobrar os lados, conforme a figura abaixo:



Determine, em litros, o volume dessa caixa.

- **A** 3 litros.
- **B** 2 litros.
- **C** 1 litro.
- **D** 4 litros.
- **E** 5 litros.

Questão 35

(UEMG)

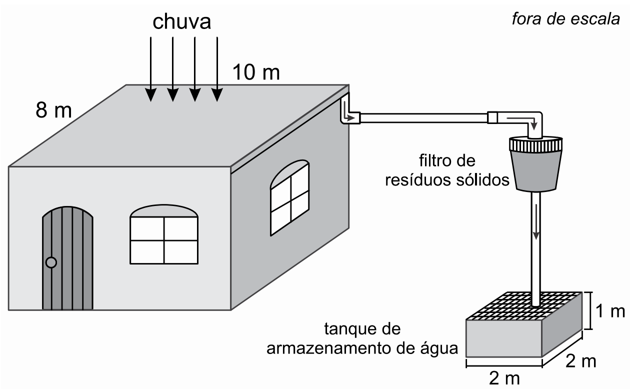
Um design projetou um chaveiro no formato de um prisma triangular reto com 12 cm de altura. Sabe-se que as arestas da base formam um triângulo retângulo com catetos de medidas 6 cm e 8 cm. Para cobrir todas as faces desse prisma, adquirindo a quantidade suficiente de papel adesivo, e, com isso, evitar o desperdício, será preciso saber a área total da superfície desse prisma. Fazendo os cálculos corretos, obtém-se que a área total desse prisma mede

Ⓐ 336 cm^2.
Ⓑ 324 cm^2.
Ⓒ 316 cm^2.
Ⓓ 312 cm^2.

Questão 36

(UNESP)

Quando os meteorologistas dizem que a precipitação da chuva foi de 1mm, significa que houve uma precipitação suficiente para que a coluna de água contida em um recipiente que não se afunila como, por exemplo, um paralelepípedo reto-retângulo, subisse 1mm. Essa precipitação, se ocorrida sobre uma área de $1m^2$, corresponde a 1 litro de água.
O esquema representa o sistema de captação de água da chuva que cai perpendicularmente à superfície retangular plana e horizontal da laje de uma casa, com medidas 8 m por 10 m. Nesse sistema, o tanque usado para armazenar apenas a água captada da laje tem a forma de paralelepípedo reto-retângulo, com medidas internas indicadas na figura.



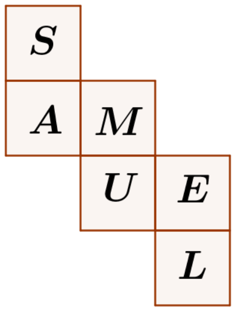
Estando o tanque de armazenamento inicialmente vazio, uma precipitação de 10mm no local onde se encontra a laje da casa preencherá

Ⓐ 40% da capacidade total do tanque.
Ⓑ 60% da capacidade total do tanque.
Ⓒ 20% da capacidade total do tanque.
Ⓓ 10% da capacidade total do tanque.
Ⓔ 80% da capacidade total do tanque.

Questão 37

(Ronaebson)

Em uma aula de matemática, o professor propôs a seus alunos que construíssem um cubo a partir da planificação em uma folha de cartolina, representado na figura a seguir.



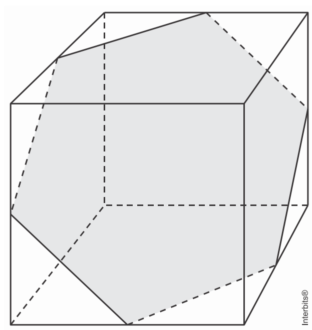
Após a construção do cubo, apoiou-se sobre a mesa a face com a letra U e observou-se que a face voltada para cima tinha a letra

Ⓐ S e, além disso, a face com a letra A era paralela a face com a letra M.
Ⓑ S e, além disso, a face com a letra A era paralela a face com a letra E.
Ⓒ S e, além disso, a face com a letra M era paralela a face com a letra E.
Ⓓ M e, além disso, a face com a letra A era paralela a face com a letra E.
Ⓔ A e, além disso, a face com a letra S era paralela a face com a letra L.

Questão 38

(UPE-SSA_2018)

Qual é, aproximadamente, a medida da área do hexágono regular obtido ao seccionarmos um cubo de aresta 4cm por um plano que contém os pontos médios de seis arestas, opostas duas a duas, conforme apresentado na figura ao lado? Utilize $\sqrt{3} \cong 1{,}7$.

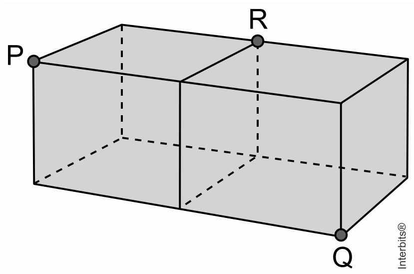


Ⓐ 5 cm^2
Ⓑ 10 cm^2
Ⓒ 20 cm^2
Ⓓ 25 cm^2
Ⓔ 45 cm^2

Questão 39

(FAMERP_2020)

Dois cubos idênticos, de aresta igual a 1 dm, foram unidos com sobreposição perfeita de duas das suas faces. P é vértice de um dos cubos, Q é vértice do outro cubo e R é vértice compartilhado por ambos os cubos, conforme indica a figura.



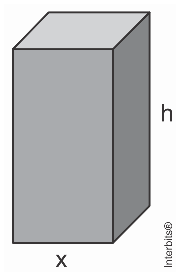
A área do triângulo de vértices P, Q e R é igual a

(A) $\frac{\sqrt{6}}{2}\ dm^2$
(B) $\frac{\sqrt{6}}{3}\ dm^2$
(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}\ dm^2$
(D) $\frac{\sqrt{6}}{6}\ dm^2$
(E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\ dm^2$

Questão 40

(PUCPR_2017)

Considere uma caixa de leite na forma de um paralelepípedo de base quadrada, cujo volume é de 1 litro. O custo de fabricação da tampa e da base da caixa é de R$4,00 por cm^2, e o das faces laterais é de R$ 2,00 por cm^2; considere desprezível o custo da tampinha de plástico. Determine uma função C(x) que expresse o custo de fabricação da caixa em função da aresta da base que vale x.



(A) $C(x) = 8\left(x^2 + \frac{1000}{x}\right)$
(B) $C(x) = 8\left(x^2 + \frac{1000}{x^2}\right)$
(C) $C(x) = 4\left(x^2 + \frac{1000}{x}\right)$
(D) $C(x) = 4x^2 + 2x$
(E) $C(x) = 4x + 2x$

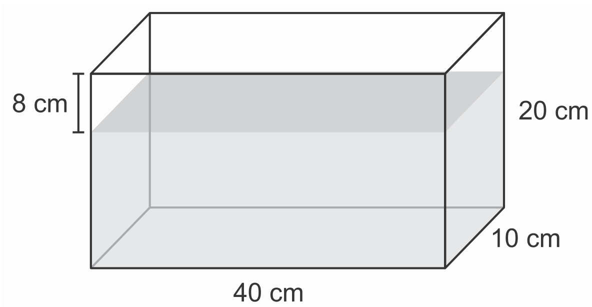
Questão 41

(CP2_2020)

Uma das etapas de tratamento da água de piscinas e também das águas para consumo humano é a adição de "cloro", etapa denominada **cloração**. Porém, é interessante notar que nem sempre se adiciona cloro puro na água. Na maioria das vezes, adiciona-se uma solução de hipoclorito de sódio, conhecida como "cloro líquido". Dependendo do objetivo que se pretende, são utilizadas soluções com concentrações diferentes. No tratamento de água para consumo humano, a solução de hipoclorito de sódio adicionada tem concentração em massa de 0,4 mg/L.

Disponível em: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br. Acesso em: 30 jun. 2019 (adaptada).

Considere um recipiente no formato de um paralelepípedo, com medidas internas de 40 cm (comprimento), 10 cm (largura) e 20 cm (altura), conforme a figura a seguir. Observe que a altura da água dentro do recipiente não atinge os 20 cm, sobrando 8 cm de altura sem água.



Disponível em: http://clubes.obmep.org.br. Acesso em: 30 jun. 2019.

Sabendo que a água contida nesse recipiente será destinada, exclusivamente, para consumo humano e atende às recomendações de tratamento mencionadas no texto inicial, a quantidade (em mg) de hipoclorito de sódio que deve ser adicionada é de

(A) 1,92.
(B) 2,48.
(C) 3,96.
(D) 4,80.

Questão 42

(UEA_2023)

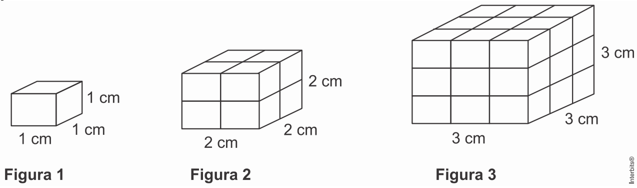
Considere um sólido oco, com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, contendo 1.344 cm^3 de água, com faces e arestas de espessura desprezível, em que uma das arestas mede 16 cm e outra aresta mede 12 cm. Esse sólido está apoiado sobre uma das faces de maneira que a altura da coluna de água seja igual a 14 cm. A área total desse sólido é

(A) 800 cm^2.
(B) 832 cm^2.
(C) 864 cm^2.
(D) 896 cm^2.
(E) 928 cm^2.

Questão 43

(CMRJ_2018)

A Figura 1 representa um cubo de aresta 1 cm. Empilhando, como representado na Figura 2, oito cubos como aquele da Figura 1, podemos formar um cubo de aresta $2\ cm$ Da mesma maneira, empilhando, conforme a Figura 3, 27 cubos de aresta $1\ cm$ podemos formar um cubo de aresta $3\ cm$.



A Figura 4 mostra parte de um cubo de aresta $6\ cm$ que ainda não foi formado por completo.

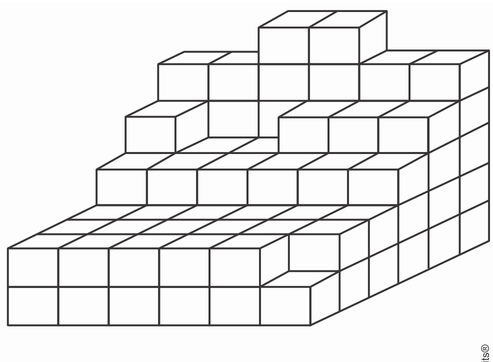


Figura 4

O número de cubos de aresta $1\ cm$ que falta empilhar para completar o cubo de aresta $6\ cm$ é

A) 104.
B) 107.
C) 109.
D) 111.
E) 113.

Questão 44

(UFPR_2017)

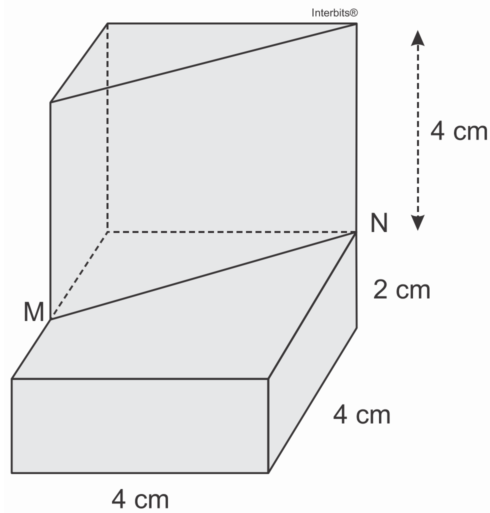
A piscina usada nas competições de natação das Olimpíadas Rio 2016 possui as medidas oficiais recomendadas: 50 metros de extensão, 25 metros de largura e 3 metros de profundidade. Supondo que essa piscina tenha o formato de um paralelepípedo retângulo, qual dos valores abaixo mais se aproxima da capacidade máxima de água que essa piscina pode conter?

A) 37.500 litros
B) 375.000 litros
C) 3.750.000 litros
D) 37.500.000 litros
E) 375.000.000 litros

Questão 45

(UPE-SSA)

O sólido representado a seguir foi obtido acoplando-se um prisma triangular reto de 4 cm altura a um paralelepípedo reto de dimensões 4 cm, 4 cm e 2 cm, conforme a figura.



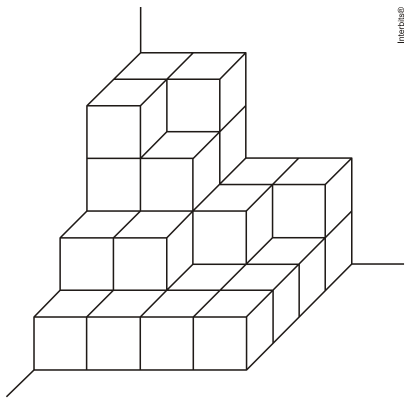
Se M é ponto médio da aresta do paralelepípedo, qual é a área total da superfície do referido sólido? Adote $\sqrt{5} \cong 2{,}2$.

A) $99{,}6\ cm^2$
B) $103{,}6\ cm^2$
C) $105{,}6\ cm^2$
D) $107{,}6\ cm^2$
E) $109{,}6\ cm^2$

Questão 46

(PUCRJ)

O diagrama abaixo mostra uma pilha de caixas cúbicas iguais, encostadas no canto de um depósito.



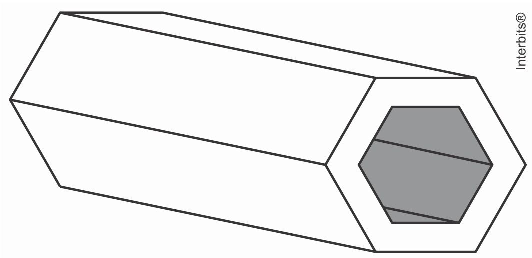
Se a aresta de cada caixa é de 30 cm, então o volume total dessa pilha, em metros cúbicos, é de:

A) 0,513
B) 0,729
C) 0,810
D) 0,837
E) 0,864

Questão 47

(UERN)

A peça geométrica, desenvolvida através de um software de modelagem em três dimensões por um estudante do curso de engenharia e estagiário de uma grande indústria, é formada a partir de dois prismas de base hexagonal regular e assemelha-se ao formato de uma porca de parafuso.



Considerando que o lado do hexágono maior mede 8 cm; que o comprimento do prisma é igual a 35 cm; e, que o lado do hexágono menor mede 6 cm, então o volume da peça, de forma que se possa calcular, posteriormente, a quantidade de matéria-prima necessária à sua produção em massa em determinado período de tempo é, em cm^3:

(Considere $\sqrt{3} = 1,7$).

Ⓐ 1.064.
Ⓑ 1.785.
Ⓒ 2.127.
Ⓓ 2.499.

Questão 48

(PUCSP_2017)

Um bloco maciço de madeira na forma de um prisma reto de base retangular medindo 18 cm por 24 cm e com 30 cm de altura, foi totalmente dividido em cubinhos iguais e de maior aresta possível. Supondo que não tenha ocorrido perda alguma no corte do bloco, o volume de um cubinho é

Ⓐ 64 cm^3
Ⓑ 125 cm^3
Ⓒ 216 cm^3
Ⓓ 343 cm^3

Questão 49

(ESPCEX-AMAN)

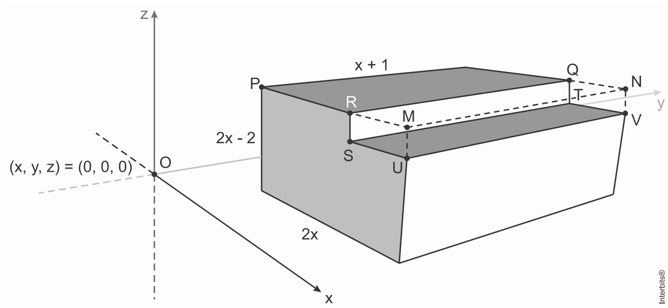
Considere um prisma regular reto de base hexagonal tal que a razão entre a aresta da base e a aresta lateral é $\sqrt{3}/_3$. Aumentando-se a aresta da base em 2 cm e mantendo-se a aresta lateral, o volume do prisma ficará aumentado de 108 cm^3. O volume do prisma original é

Ⓐ 18 cm^3
Ⓑ 36 cm^3
Ⓒ $18\sqrt{3}cm^3$
Ⓓ $36\sqrt{3}cm^3$
Ⓔ 40 cm^3

Questão 50

(INSPER_2018)

A figura indica, em linha cheia, um prisma reto com faces, duas a duas, em planos perpendiculares ou em planos paralelos. Três de suas arestas medem 2x, 2x-2 e x+1, como indicado no desenho. O prisma está no sistema cartesiano XYZ, com uma face contida no plano XY e com arestas paralelas ao eixo x ou ao eixo y. Sabe-se, ainda, que P, Q, R, S, T, U e V são vértices do prisma, que O é a origem do sistema XYZ e que todas as medidas de comprimento da figura estão em centímetros.



Se os volumes do prisma, indicado na figura, e do paralelepípedo reto-retângulo MRSUNQTV, tracejado na figura, são, respectivamente, iguais a 1.264 cm^3 e 80 cm^3, então a medida de x em centímetros, é um número

Ⓐ primo.
Ⓑ múltiplo de 11.
Ⓒ múltiplo de 13.
Ⓓ múltiplo de 3.
Ⓔ par.

Questão 51

(UNEB)

A pele é o maior órgão de seu corpo, com uma superfície de até 2 metros quadrados. Ela tem duas camadas principais: a epiderme, externa, e a derme, interna.

(BREWER. 2013, p. 72).

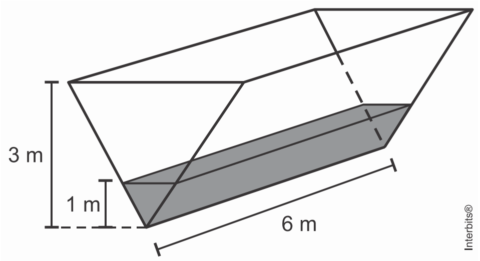
De acordo com o texto, a superfície máxima coberta pela pele humana é equivalente a de um cubo cuja diagonal, em m, é igual a

Ⓐ $^1/_3$
Ⓑ $\sqrt{3}/_3$
Ⓒ $\sqrt{3}/_2$
Ⓓ 1
Ⓔ $\sqrt{3}$

Questão 52

(INSPER)

Um tanque, inicialmente vazio, tem a forma de prisma triangular regular e suas paredes têm espessuras desprezíveis. Após algum tempo despejando água no tanque, um cano de vazão $3\sqrt{3}\,m^3$ por minuto o encheu parcialmente, tendo a água ocupado o espaço de um prisma triangular regular, conforme indicado na figura.



Funcionando na mesma vazão, o tempo necessário para que o cano acabe de encher o tanque é de 5 minutos e t segundos, sendo que t é um número no intervalo

Ⓐ [1, 12]
Ⓑ [13, 24]
Ⓒ [25, 36]
Ⓓ [37,48]
Ⓔ [49, 59]

Questão 53

(Ronaebson)

Um prisma triangular regular tem sua base apoiada no solo e é preenchido por um líquido de modo que a razão entre a altura da coluna formada por esse líquido e a altura do prisma seja igual a $\frac{16}{25}$, como ilustrado na Figura 1. Ao ser apoiado no solo por uma de suas faces laterais o líquido no interior do prisma assume uma nova forma, conforme a Figura 2.

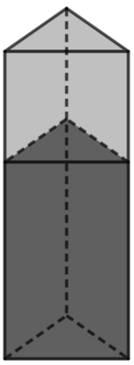


Figura 1

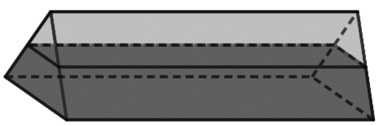


Figura 2

Nessa nova configuração, a razão entre a altura do líquido e a altura do triângulo da base do prisma é de

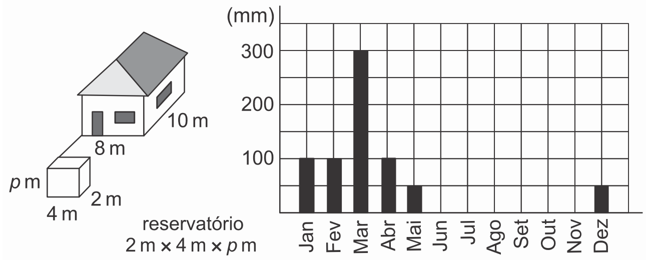
Ⓐ 36%.
Ⓑ 40%.
Ⓒ 44%.
Ⓓ 60%.
Ⓔ 64%.

Questão 54

(ENEM)

Prevenindo-se contra o período anual de seca, um agricultor pretende construir um reservatório fechado, que acumule toda a água proveniente da chuva que cair no telhado de sua casa, ao longo de um período anual chuvoso.

As ilustrações a seguir apresentam as dimensões da casa, a quantidade média mensal de chuva na região, em milímetros, e a forma do reservatório a ser construído.



Sabendo que 100 milímetros de chuva equivalem ao acúmulo de 100 litros de água em uma superfície plana horizontal de um metro quadrado, a profundidade (ρ) do reservatório deverá medir

Ⓐ 4m.
Ⓑ 5m.
Ⓒ 6m.
Ⓓ 7m.
Ⓔ 8m.

Gabarito _ Prismas			
Hora de Praticar			
Questão	Resposta	Questão	Resposta
01	D	28	E
02	A	29	A
03	A	30	D
04	A	31	E
05	D	32	A
06	C	33	C
07	E	34	A
08	B	35	A
09	D	36	C
10	C	37	B
11	A	38	C
12	D	39	A
13	A	40	A
14	E	41	A
15	C	42	B
16	C	43	C
17	D	44	C
18	A	45	C
19	C	46	E
20	B	47	D
21	D	48	C
22	B	49	B
23	C	50	A
24	E	51	D
25	C	52	B
26	E	53	B
27	A	54	D

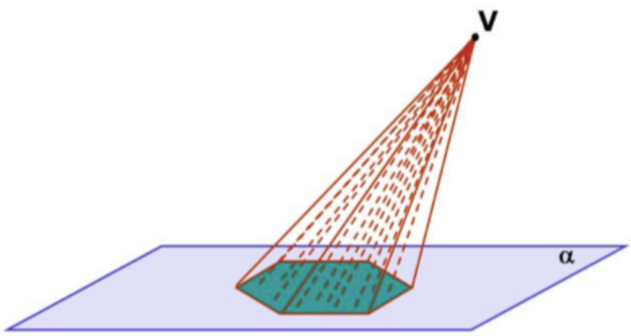
PIRÂMIDE

RONAEBSON
MATEMÁTICA CRIATIVA

PIRÂMIDE

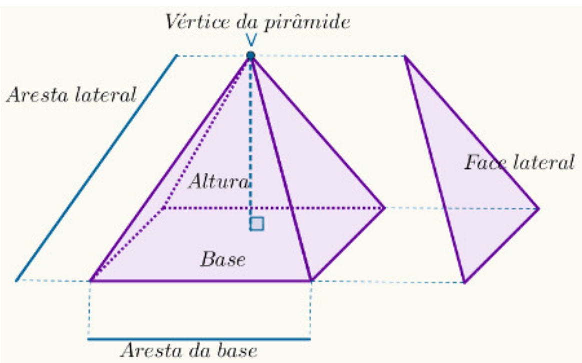
Construídas há milênios, as pirâmides egípcias ainda continuam a nos impressionar devido as suas grandes estruturas e aos mistérios que envolvem as suas construções. Entretanto, sabemos que sua maior finalidade era abrigar e conservar o corpo do faraó mumificado e suas riquezas para outra vida.

Definição: Considere um polígono convexo contido num plano α e um ponto V, não pertencente a α. Chamamos de pirâmide à reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em V e outra extremidade num dos pontos da região poligonal.

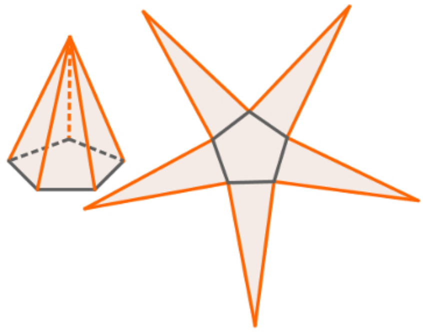


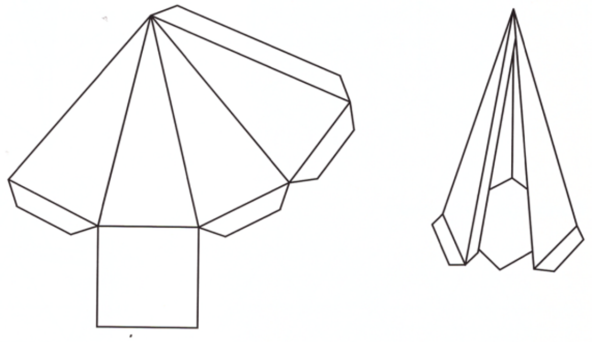
Podemos destacar numa pirâmide os seguintes elementos:

- *Base:* região poligonal contida no plano;
- *Faces Laterais:* são todos os polígonos que formam a superfície da pirâmide, exceto a base. Observe que as faces laterais da pirâmide são triângulos;
- *Vértices:* são os vértices das faces (incluindo à base);
- *Arestas da Base:* são os lados dos polígonos da base;
- *Arestas Laterais:* são os segmentos formados pela intersecção de duas faces laterais;
- *Altura:* distância do vértice V ao plano da base.



PLANIFICAÇÃO





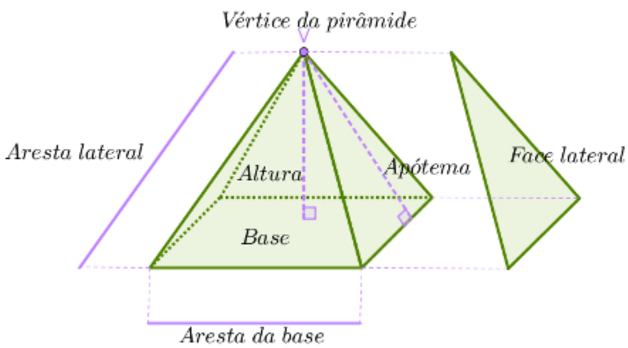
ÁREAS DE UMA PIRÂMIDE

- **Área da Base** (A_B)**:** é área do polígono da base.
- **Área Lateral** (A_L)**:** é a soma das áreas de todas as faces laterais.
- **Área Total** (A_T)**:** é a soma da área lateral com a área base.

$$A_T = A_L + A_B$$

PIRÂMIDE REGULAR

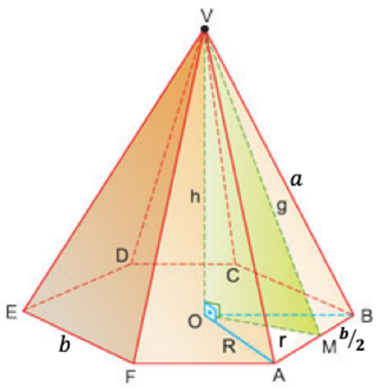
Uma pirâmide é dita regular se, e somente se, sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal de seu vértice sobre o plano da base coincide com o centro da base.



Vale destacar que em toda pirâmide regular as arestas laterais são todas congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles também congruentes entre si.

Considerando o ponto médio de *M* de um dos lados da base de uma pirâmide regular e *O* o centro dessa base, podemos destacar os seguintes elementos:

- *Apótema da pirâmide* (g)*:* segmento de reta que liga o vértice da pirâmide ao ponto médio M de um dos lados da base. Observe que o apótema da pirâmide corresponde a altura de uma face lateral;
- *Apótema da base* (r)*:* segmento de reta que liga o centro da base da pirâmide a ponto médio de um de seus lados. O apótema da base coincide com o *raio da circunferência inscrita* no polígono da base;
- *Aresta Lateral* (a): segmento que une o vértice da pirâmide;
- *Aresta da base* (b): lado do polígono da base;
- *Altura da pirâmide* (h)*:* distância do vértice ao plano da base, que na pirâmide regular é representada pelo segmento de reta que une o vértice da pirâmide ao centro da base;
- *Raio da Circunferência Circunscrita* (R)*:* raio da circunferência circunscrita ao polígono da base.



Diante da figura apresentada e a partir do Teorema de Pitágoras, podemos inferir as seguintes relações:

$$g^2 = h^2 + r^2$$

$$a^2 = g^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$a^2 = R^2 + h^2$$

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Para o cálculo da área de uma face lateral, basta fazer:

$$A_{Face\ Lateral} = \frac{b \cdot g}{2}$$

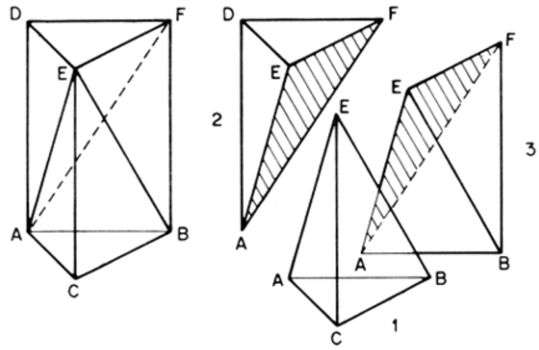
Para o cálculo da área lateral, basta calcular a área de uma face lateral e multiplicar pelo número de faces laterais que a pirâmide possui.

Para o cálculo da área total da pirâmide, basta fazer:

$$A_T = A_L + A_B$$

Volume

Considere, inicialmente, um prisma triangular reto. Vamos dividi-lo em três pirâmides triangulares (1), (2) e (3), como ilustra a figura a seguir.



Nas pirâmides (2) e (3) podemos adotar a face DEA como base das pirâmides, logo elas terão alturas iguais, pois essas alturas também são as alturas dos triângulos retângulos ΔDFA e ΔBFA, que são congruentes. Portanto, as pirâmides (2) e (3), como têm a mesma área da base e a mesma altura, elas têm o mesmo volume, isto é, $V_2 = V_3$.

As pirâmides (1) e (2) também têm o mesmo volume, haja vista que as bases ABC e DEF são congruentes, pois correspondem às bases do prisma, e possuem a mesma altura que também é a altura do prisma, logo $V_1 = V_2$.

Assim, as três pirâmides geradas com os cortes no prisma possuem volumes iguais, ou seja,

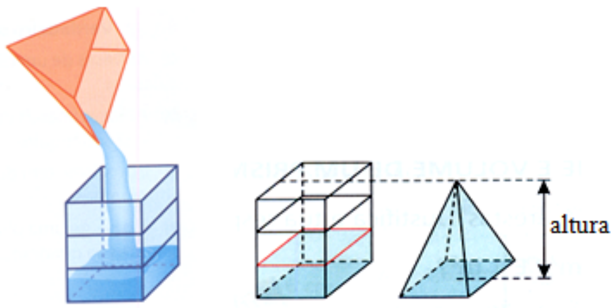
$$V_1 = V_2 = V_3,$$

e, portanto, o volume da pirâmide corresponde a um terço do volume do prisma de mesma base e mesma altura. Assim,

$$\boldsymbol{V_{Pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h}$$

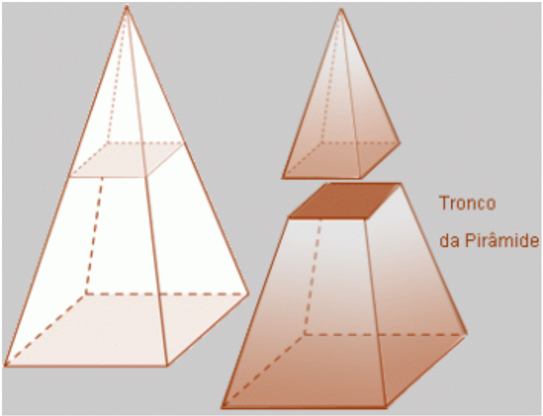
Esse resultado pode ser generalizado, a partir do Princípio de Cavalieri, para pirâmides quaisquer.

Experimentalmente, temos:



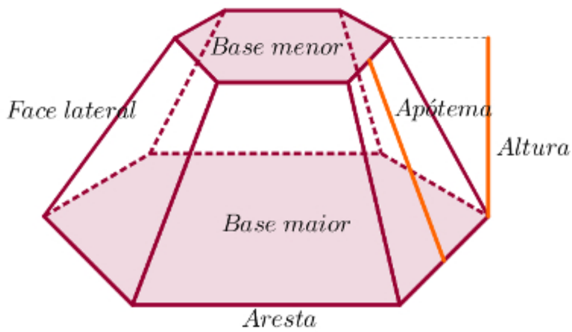
TRONCO DE PIRÂMIDE

Quando seccionamos uma pirâmide por um plano paralelo a base, separamos essa pirâmide em dois sólidos:



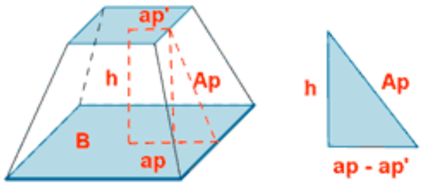
- o sólido que contem o vértice que é uma nova pirâmide semelhante à primeira e
- o sólido que contém a base da pirâmide dada que é um tronco de pirâmide de bases paralelas.

Podemos destacar no tronco de pirâmide os seguintes elementos:



- *Base maior:* polígono da base da pirâmide original;
- *Base menor:* polígono gerado pela secção plana feita na pirâmide;
- *Altura:* distância entre os planos das bases;
- *Arestas da base:* são os lados dos polígonos das bases;
- *Arestas laterais:* são as demais arestas do tronco, que não são arestas da base;
- *Face lateral:* são os trapézios que compõem a superfície lateral do tronco, os seja, são as faces que não são bases.
- *Apótema:* é a altura de uma face lateral.

Algumas relações surgem naturalmente quando invocamos os conhecimentos básicos de geometria plana, por exemplo, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

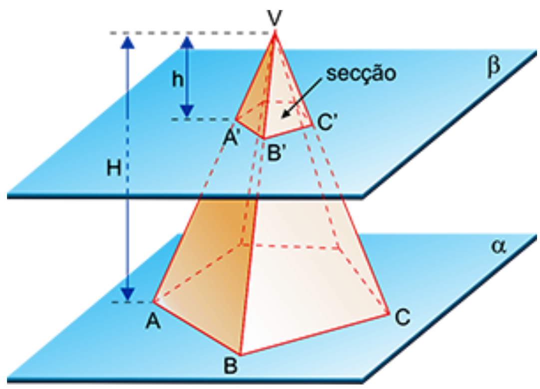


$$A_p^2 = h^2 + (ap - ap')^2$$

Claro, que não existe necessidade de memorizar essa última expressão. Basta aplicar o Teorema de Pitágoras, como vimos.

O tronco de pirâmide é dito regular quando ele é obtido a partir de uma pirâmide regular, ou seja, quando as bases são polígonos regulares e quando o segmento de reta que une os centros das bases é perpendicular a essas bases.

Observe também que ao seccionarmos uma pirâmide com um plano paralelo à base, a nova pirâmide gerada tem a mesma natureza da pirâmide primitiva, isto é, são semelhantes, logo, os ângulos são ordenadamente congruentes e os elementos lineares (arestas da base, arestas laterais, alturas, apótemas) são proporcionais.



Daí, decorrem algumas relações:

$$\frac{h}{H} = \frac{l}{L} = \frac{a_b}{a_B} = \frac{m}{M} = \frac{g}{G} = k$$

onde:

- *h*: Altura da pirâmide menor;
- *H*: Altura da pirâmide maior;
- *l*: Aresta lateral da pirâmide menor.
- *L*: Aresta lateral da pirâmide maior.
- a_b: Aresta da base menor;
- A_b: Aresta da base maior;
- *m*: Apótema da base menor;
- *M*: Apótema da base maior;
- *g*: Apótema da pirâmide menor;
- *G*: Apótema da pirâmide maior;
- *k*: constante de proporcionalidade.

Além disso,

$$\frac{A_b}{A_B} = \frac{A_l}{A_L} = \frac{A_t}{A_T} = k^2$$

onde,

- A_b: Área da base menor;
- A_B: Área da base maior;
- A_l: Área lateral da pirâmide menor;
- A_L: Área lateral da pirâmide maior;
- A_t: Área total da pirâmide menor;
- A_T: Área total da pirâmide maior.

e por fim,

$$\frac{V_{Pirâmide\ Menor}}{V_{Pirâmide\ Maior}} = k^3$$

A partir dessas relações podemos deduzir o volume do tronco de pirâmide, de modo que basta calcular a diferença entre o volume da pirâmide original e o volume da pirâmide menor gerada, veja:

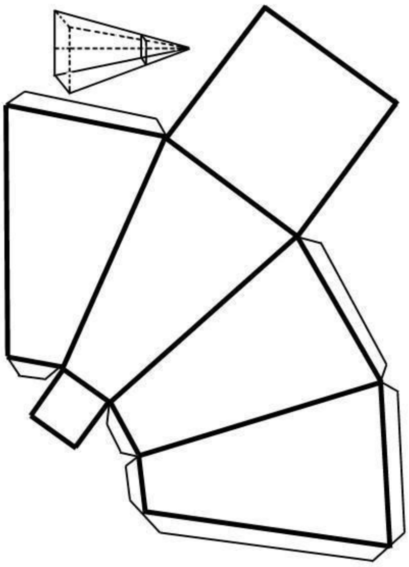
$$V_{Tronco} = V_{Pirâmide\ Maior} - V_{Pirâmide\ Menor}$$

assim,

$$V_{Tronco} = \frac{h_t}{3} \cdot \left[A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b\right]$$

onde h_t é altura do tronco.

Planificação de Tronco



Hora de Praticar

Questão 01

(Ronaebson)

Com o objetivo de “estudar a influência das edificações egípcias na condição física do homem”, o casal russo, Andrey e Viktória Vakhrusheva deram vida uma réplica de uma das Pirâmides de Gizé no quintal de casa, em Istinka, próximo a São Petersburgo. Focada na fidelidade e na reprodução exata do formato de uma das grandes maravilhas do mundo antigo, a pirâmide improvisada chama a atenção logo de cara pelo seu enorme tamanho. A réplica possui 9 m de altura a partir da superfície e é feita em concreto, não de pedras vulcânicas como as que podem ser encontradas ao norte da África.

Disponível em https://br.rbth.com/educacao/84089-casal-piramide-egito-russia
Acesso em 12/10/2021

Vista de cima

Vista frontal

Fotos de Evguêni Kolesnik

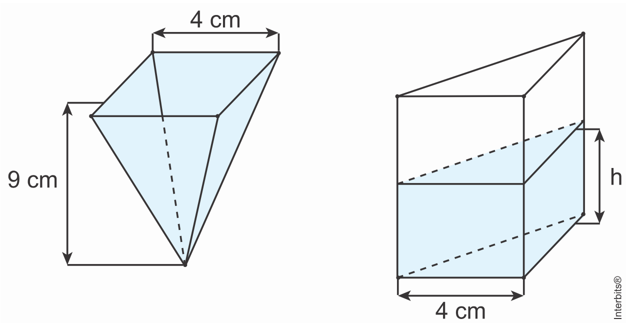
Sabendo-se que o comprimento da base quadrada da réplica mede cerca de 13 m, seu volume, em metros cúbicos, é

Ⓐ 81.
Ⓑ 117.
Ⓒ 169.
Ⓓ 507.
Ⓔ 1.521.

Questão 02

(UERJ_2021)

Um recipiente com a forma de uma pirâmide de base quadrada foi completamente preenchido com um líquido. Sua aresta da base mede 4 cm e a altura, 9 cm. Em seguida, todo esse líquido foi transferido para outro recipiente, com a forma de um prisma reto, sendo sua base um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 4 cm. Observe as imagens:



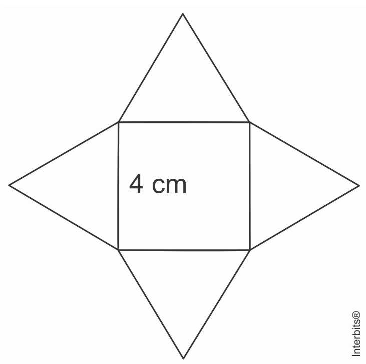
Considere que as espessuras dos recipientes são desprezíveis e que as bases estão em planos horizontais, sendo as alturas definidas em relação às bases.
A altura h, em centímetros, que o líquido atingirá no segundo recipiente é:

A 10
B 8
C 6
D 4

Questão 03

(UFPR)

Temos, abaixo, a planificação de uma pirâmide de base quadrada, cujas faces laterais são triângulos equiláteros. Qual é o volume dessa pirâmide?



A $\frac{16}{3}\sqrt{3}cm^3$.
B $16\sqrt{3}cm^3$.
C $32\ cm^3$.
D $\frac{32}{3}\sqrt{2}cm^3$.
E $\frac{64}{3}cm^3$.

Questão 04

(UPF_2018)

A medida de cada aresta do cubo da figura 1 é 2 cm, e os pontos A, B e C são pontos médios de três arestas. Seccionando o cubo por um plano que passe por ABC, podemos retirar o sólido que se forma em seu vértice. Se repetirmos esse procedimento em todos os vértices do cubo, obtemos um cubo truncado, como mostra a figura 2.

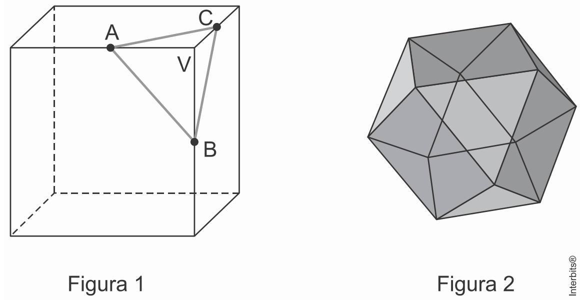


Figura 1 Figura 2

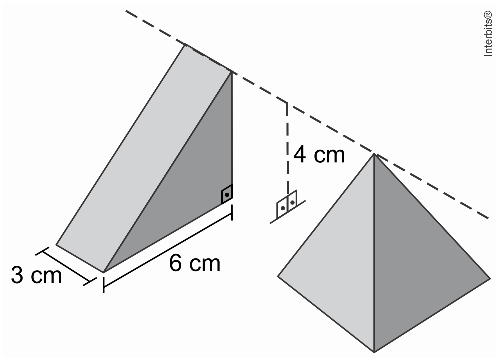
O volume do cubo truncado, em cm^3, é

A $\frac{10}{9}$
B $\frac{16}{3}$
C $\frac{1}{6}$
D $\frac{47}{6}$
E $\frac{20}{3}$

Questão 05

(FAMERP_2018)

A figura indica um prisma reto triangular e uma pirâmide regular de base quadrada. A altura desses sólidos, em relação ao plano em que ambos estão apoiados, é igual a 4 cm, como indicam as figuras.



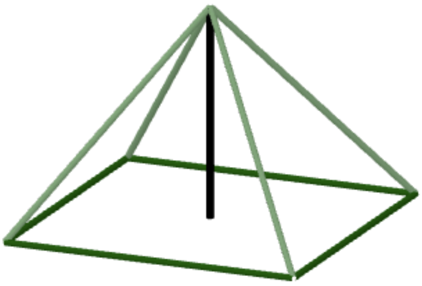
Se os sólidos possuírem o mesmo volume, a aresta da base da pirâmide, em centímetros, será igual a

A $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
B $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
C $\sqrt{3}$
D $3\sqrt{3}$
E $\frac{6\sqrt{3}}{5}$

Questão 06

(Ronaebson)

Tio Rona comprou para seu sobrinho José Antônio uma cabana em forma de uma pirâmide regular de base quadrada. Sabe-se que toda superfície (faces laterais e base) é formada por um tipo especial de tecido e que, quando montada, as faces laterais são triângulos equiláteros.



Além das hastes de ferro que correspondem às arestas laterais e arestas da base, também é utilizada uma haste de plástico cujo comprimento de $\sqrt{2}\,m$ corresponde a altura da pirâmide formada, de modo que essa haste tenha extremidades no vértice da pirâmide e no centro da base.

A área total do tecido utilizado para confecção dessa cabana, em m^2, é igual a

- **A** $2 + 8\sqrt{2}$.
- **B** $4 + 4\sqrt{2}$.
- **C** $4 + 4\sqrt{3}$.
- **D** $4 + 8\sqrt{3}$.
- **E** $4 + 16\sqrt{3}$.

Questão 07

(UFJF_2022)

A Grande Pirâmide de Gizé, que está localizada no Egito, é considerada uma das maiores e mais pesadas obras já construídas pela humanidade. Uma miniatura realista da pirâmide de Gizé pode ser encontrada em certo antiquário. Esta miniatura é uma pirâmide regular, que possui a aresta de sua base quadrada medindo 24 cm enquanto que sua altura mede 16 cm.

A área total da superfície da miniatura da pirâmide mede

- **A** 768 cm^2
- **B** 960 cm^2
- **C** 1344 cm^2
- **D** 1536 cm^2
- **E** 2112 cm^2

Questão 08

(UECE_2023)

A base de uma pirâmide triangular regular está inscrita em uma circunferência cuja medida do raio é 4 cm. Se a medida da aresta dessa pirâmide é igual à medida do lado do triângulo de sua base, então a medida de seu volume, em cm^3, é igual a

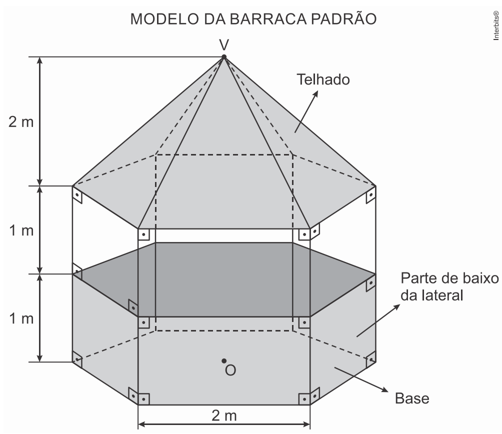
- **A** $12\sqrt{6}$
- **B** $16\sqrt{6}$
- **C** $18\sqrt{6}$
- **D** $14\sqrt{6}$

Questão 09

(EPCAR_2018)

Com a intenção de padronizar as barracas dos vendedores ambulantes, a prefeitura da cidade de Eulerópolis solicitou a uma empresa especializada no ramo que fizesse um orçamento do material a ser empregado e do custo para finalização das barracas.

Segue um esboço do que foi apresentado pela empresa:



O ponto O é a projeção ortogonal do ponto V sobre a base hexagonal regular da barraca.

Considere: $\sqrt{7} = 2{,}6$ e $\sqrt{2} = 1{,}4$.

No modelo apresentado, a parte hachurada indica onde existe tecido, ou seja, no telhado e na parte de baixo da lateral, ao custo de R4 2,00 o metro quadrado. Além disso, em cada aresta está uma barra de alumínio ao custo de R$ 4,00 o metro linear.

Se a empresa cobra uma taxa de mão de obra equivalente a 30% do custo de todo o material gasto, então é correto afirmar que o custo total de uma barraca padrão, em reais, é um número compreendido entre

- **A** 390 e 400
- **B** 401 e 410
- **C** 411 e 420
- **D** 421 e 430

Questão 10

(Ronaebson)

Uma das partes do projeto da feira de ciências de um jovem aluno do 9º ano do ensino fundamental foi a de construir uma réplica da pirâmide mais famosa do Egito, a pirâmide de Quéops. Sabe-se que a pirâmide Quéops é uma pirâmide regular de base quadrada com 138m de altura e 230m de lado da base.

A réplica construída tinha x metros de lado da base e conservava as proporções da pirâmide original. Para essa construção, depois de estruturado o "esqueleto" da pirâmide, as suas faces laterais foram cobertas com papel madeira.

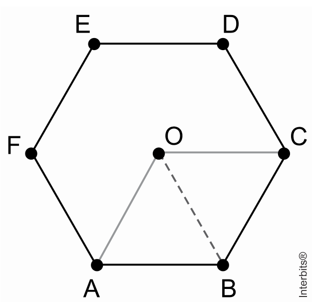
Desconsiderando as perdas de papel durante o processo de confecção, a área de papel madeira utilizada, em função de x, para cobrir a superfície lateral dessa réplica, em metro, é

A) $\frac{x^2\sqrt{61}}{5}$.
B) $\frac{x^2\sqrt{66}}{3}$.
C) $\frac{x^2\sqrt{61}}{2}$.
D) $\frac{x^2\sqrt{59}}{5}$.
E) $\frac{x^2\sqrt{63}}{5}$.

Questão 11

(FGV)

Em uma folha de papel, desenha-se um hexágono regular ABCDEF de lado 3 cm e inscrito em uma circunferência de centro O. O hexágono é recortado, e, em seguida, faz-se um recorte no raio $\overline{OB}$. A partir do recorte no raio, o pedaço de papel será usado para formar uma pirâmide de base quadrangular e centro O. Tal pirâmide será feita com a sobreposição e a colagem dos triângulos OAB e OCD, e dos triângulos OAF e OBC.



O volume da pirâmide formada após as sobreposições e colagens, em cm^3, é igual a

A) $3\sqrt{2}$
B) $3\sqrt{3}$
C) $4\sqrt{2}$
D) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$
E) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

Questão 12

(UFSM)

Desde a descoberta do primeiro plástico sintético da história, esse material vem sendo aperfeiçoado e aplicado na indústria. Isso se deve ao fato de o plástico ser leve, ter alta resistência e flexibilidade. Uma peça plástica usada na fabricação de um brinquedo tem a forma de uma pirâmide regular quadrangular em que o apótema mede 10 mm e a aresta da base mede 12 mm. A peça possui para encaixe, em seu interior, uma parte oca de volume igual a 78 mm^3.

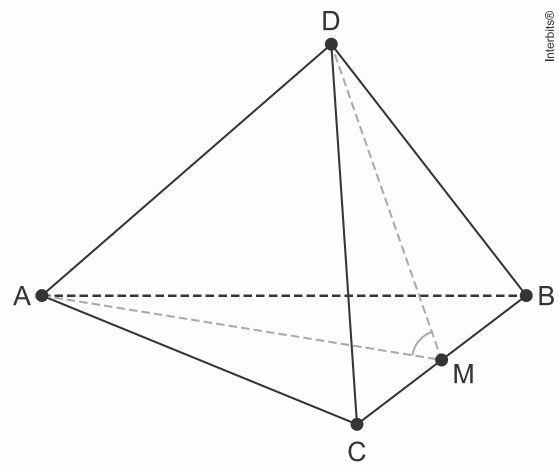
O volume, em mm^3, dessa peça é igual a

A) 1152.
B) 1074.
C) 402.
D) 384.
E) 306.

Questão 13

(UERJ_2017)

Uma pirâmide com exatamente seis arestas congruentes é denominada tetraedro regular. Admita que a aresta do tetraedro regular ilustrado a seguir, de vértices ABCD, mede 6 cm e que o ponto médio da aresta BC é M.



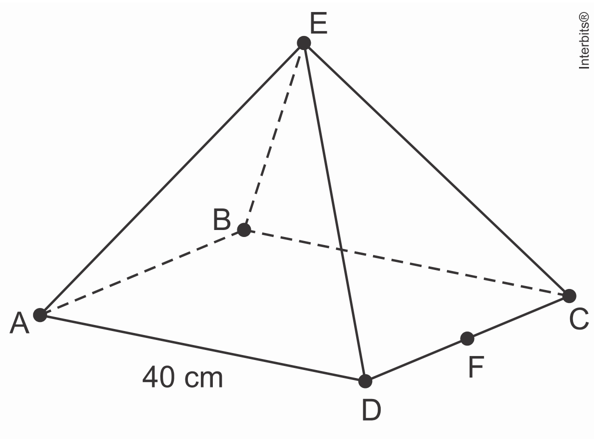
O cosseno do ângulo $\widehat{AMD}$ equivale a:

A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{2}{5}$

Questão 14

(UFU_2017)

Um designer de jogos virtuais está simulando alguns deslocamentos associados com uma pirâmide quadrangular regular, em que o lado do quadrado da base mede 40 cm.



(Figura ilustrativa e sem escalas)

Ele simula a trajetória de um lagarto pelas faces da pirâmide. Inicialmente o lagarto desloca-se de A até E e, posteriormente, de E até F, em que F é o ponto médio de CD. Cada um desses dois trechos da trajetória ocorre em linha reta.

A projeção perpendicular dessa trajetória em ABCD, presente no plano da base da pirâmide, descreve uma curva R, a qual é a união de dois segmentos.

Nessas condições, o comprimento de R, em cm, é igual a

Ⓐ $20\sqrt{2}$
Ⓑ $40\sqrt{2}$
Ⓒ $40(1+\sqrt{2})$
Ⓓ $20(1+\sqrt{2})$

Questão 15

(UECE_2018)

Considere uma pirâmide regular hexagonal reta cuja medida da altura é 30 m e cuja base está inscrita em uma circunferência cuja medida do raio é igual a 10 m. Desejando-se pintar todas as faces triangulares dessa pirâmide, a medida da área a ser pintada, em m^2 é

Ⓐ $115 \cdot \sqrt{39}$.
Ⓑ $150 \cdot \sqrt{39}$
Ⓒ $125 \cdot \sqrt{39}$
Ⓓ $140 \cdot \sqrt{39}$

Questão 16

(UEG_2019)

Em um curso de dobraduras, a instrutora orientou que fosse construída uma pirâmide de base quadrada, de lado igual a 3 cm e altura igual a 10 cm. O volume dessa pirâmide é igual a

Ⓐ 25 cm^3
Ⓑ 30 cm^3
Ⓒ 15 cm^3
Ⓓ 9 cm^3
Ⓔ 12 cm^3

Questão 17

(UDESC)

Em uma escola foi proposta uma gincana. De acordo com as regras da gincana, o vencedor de uma das provas seria aquele que chegasse mais próximo do número de sólidos existentes dentro de um pote. Neste pote, com formato de prisma triangular regular, medindo 50 cm de altura e lado do triângulo da base com 40 cm, foi colocada a mesma quantidade de cubos, pirâmides regulares de base triangular e pirâmides regulares de base quadrangular. Informou-se aos participantes que a altura das pirâmides triangulares é de 3 cm e que a altura das pirâmides quadrangulares é igual à altura dos cubos. Sabe-se, também, que as arestas dos cubos medem $2\sqrt{3}$ cm; as arestas da base das pirâmides triangulares medem 4 cm e as arestas da base das pirâmides quadrangulares equivalem à metade das arestas dos cubos.

Com base nessas informações, João, um dos participantes da gincana, considerou que uma boa estimativa seria fazer os cálculos como se os sólidos preenchessem o máximo possível do pote, deixando a menor quantidade possível de espaços. Nesse caso, João respondeu que o número de sólidos dentro do pote é de

Ⓐ 2001
Ⓑ 1248
Ⓒ 1998
Ⓓ 1251
Ⓔ 2015

Questão 18

(ESPCEX_2017)

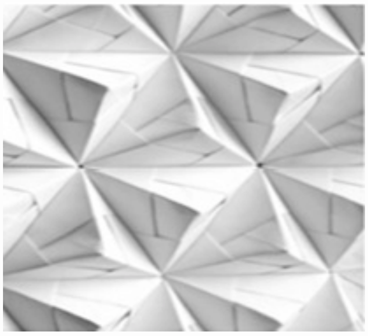
Determine o volume (em cm^3) de uma pirâmide retangular de altura “a” e lados da base “b” e “c” (a, b e c em centímetros), sabendo que $a + b + c = 36$ e “a”, “b” e “c” são, respectivamente, números diretamente proporcionais a 6, 4 e 2.

Ⓐ 16
Ⓑ 36
Ⓒ 108
Ⓓ 432
Ⓔ 648

Questão 19

(UEPA)

A arte é uma forma de expressão da racionalidade humana. O origami é uma técnica japonesa baseada em juntar módulos individuais de papel dobrando para criar prismas e cubos, conforme ilustra a figura abaixo.



Fonte: http://noticias.br.msn.com/fotos/escocesa-explora-varia%c3%a7%c3%b5es-tonais-de-luz-sobre-papel-em-esculturas-de-origami-2?page=2#image=2

Todas as pirâmides ilustradas na composição artística acima são tetraedros regulares de base triangular de aresta L=1dm ligados uns aos outros, por meio de suas arestas e mantendo suas bases sobre um mesmo plano.

Nestas condições, a área total, em dm^2, de um desses tetraedros regulares é

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
C) $\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{2}$
E) $2\sqrt{3}$

Questão 20

(ACAFE)

Uma peça de madeira tem a forma de uma pirâmide hexagonal regular com 21 cm de altura. Essa peça é seccionada por um plano paralelo à base, de forma que o volume da pirâmide obtida seja $^{8}/_{27}$ do volume da pirâmide original.

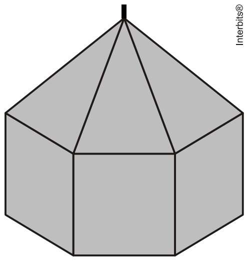
A distância (em cm) da base da pirâmide até essa secção é um número:

A) fracionário.
B) primo.
C) múltiplo de 3.
D) quadrado perfeito.

Questão 21

(INSPER)

Uma empresa fabrica porta-joias com a forma de prisma hexagonal regular, com uma tampa no formato de pirâmide regular, como mostrado na figura.



As faces laterais do porta-joias são quadrados de lado medindo 6 cm e a altura da tampa também vale 6 cm. A parte externa das faces laterais do porta-joias e de sua tampa são revestidas com um adesivo especial, sendo necessário determinar a área total revestida para calcular o custo de fabricação do produto.

A área da parte revestida, em cm2, é igual a

A) $72(3+\sqrt{3})$.
B) $36(6+\sqrt{5})$.
C) $108(2+\sqrt{5})$.
D) $27(8+\sqrt{7})$.
E) $54(4+\sqrt{7})$.

Questão 22

(UTFPR_2017)

Uma barraca de camping foi projetada com a forma de uma pirâmide de altura 3 metros, cuja base é um hexágono regular de lados medindo 2 metros. Assim, a área da base e o volume desta barraca medem, respectivamente:

A) $6\sqrt{3}\,m^2$ e $6\sqrt{3}\,m^3$.
B) $3\sqrt{3}\,m^2\ e\ 3\sqrt{3}\,m^3$.
C) $5\sqrt{3}\,m^2$ e $2\sqrt{3}\,m^3$.
D) $2\sqrt{3}\,m^2$ e $5\sqrt{3}\,m^3$.
E) $4\sqrt{3}\,m^2$ e $8\sqrt{3}\,m^3$.

Questão 23

(UECE)

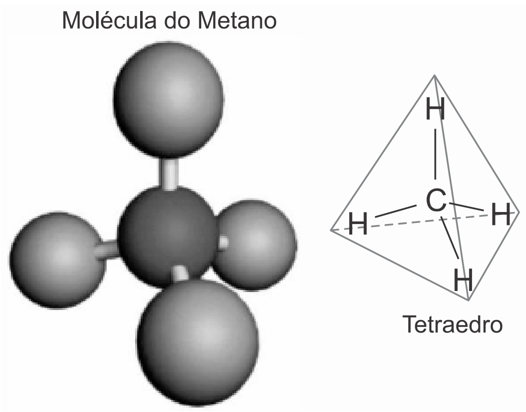
Se a soma dos ângulos de todas as faces de uma pirâmide (incluindo a base) é 3.600°, então, a base da pirâmide é um polígono com

A) 9 lados.
B) 10 lados.
C) 11 lados.
D) 12 lados.

Questão 24

(UEL)

Na molécula do Metano (CH_4), o átomo de carbono ocupa o centro de um tetraedro regular em cujos vértices estão os átomos de hidrogênio.



Considerando que as arestas l do tetraedro regular medem 6cm e que a altura mede $h = \frac{1}{3}l\sqrt{6}$, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o volume desse tetraedro

- **A** $3\sqrt{3}\ cm^3$
- **B** $18\sqrt{2}\ cm^3$
- **C** $18\sqrt{3}\ cm^3$
- **D** $36\sqrt{2}\ cm^3$
- **E** $54\sqrt{2}\ cm^3$

Questão 25

(UEPA)

As pirâmides comunicam, ainda hoje, os valores culturais de uma das civilizações mais intrigantes da humanidade. Foram construídas para a preservação do corpo do faraó. De acordo com a lenda de Heródoto, as grandes pirâmides foram construídas de tal modo que a área da face era igual ao quadrado da altura da pirâmide.

Texto Adaptado: "Contador", Paulo Roberto Martins. A Matemática na arte e na vida – 2Ȓ Ed. rev. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

Considere a pirâmide de base quadrada, cujo lado mede 2ª, a altura H e altura da face h, construída segundo a lenda de Heródoto. Se S expressa a área da face da pirâmide, então é correto afirmar que:

- **A** $S = (a + h)(a - h)$
- **B** $S = (h + a)(h - a)$
- **C** $S = (a + h)^2$
- **D** $S = (h - a)^2$
- **E** $S = a^2 \cdot h^2$.

Questão 26

(Fac. Albert Einstein_2017)

Para a feira cultural da escola, um grupo de alunos irá construir uma pirâmide reta de base quadrada. A pirâmide terá 3m de altura e cada aresta da base medirá 2 m. A lateral da pirâmide será coberta com folhas quadradas de papel, que poderão ser cortadas para um melhor acabamento.

Se a medida do lado de cada folha é igual a 20 cm, o número mínimo dessas folhas necessárias à execução do trabalho será

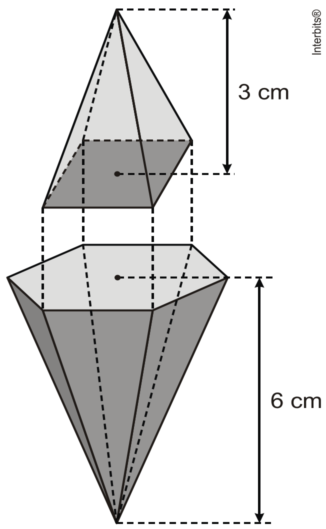
Utilize $\sqrt{10} \cong 3{,}2$.

- **A** 285
- **B** 301
- **C** 320
- **D** 333

Questão 27

(EPCAR)

Um sólido maciço foi obtido quando a base de uma pirâmide hexagonal regular de altura 6 cm foi colada à base de uma pirâmide reta de base retangular e altura 3 cm, de forma que 4 dos 6 vértices da base da primeira coincidam com os vértices da base da segunda, conforme figura. Desprezando-se o volume da cola, se a aresta da base da pirâmide hexagonal mede $\sqrt{5}\ cm$, então, o volume do sólido obtido, em cm^3, é igual a



- **A** $15\sqrt{3}$
- **B** $20\sqrt{3}$
- **C** $25\sqrt{3}$
- **D** $30\sqrt{3}$

Questão 28

(FGV)

Um cubo de aresta 12 cm é seccionado duas vezes, formando três prismas de bases triangulares, sendo dois deles congruentes, como mostra a figura 1. Em seguida, o cubo é novamente seccionado, como indicam as linhas tracejadas na figura 2, de modo que os dois cortes feitos dividem o cubo original em três prismas de bases triangulares, sendo dois deles congruentes, como no primeiro caso. Ao final de todas as secções, o cubo foi dividido em nove peças.

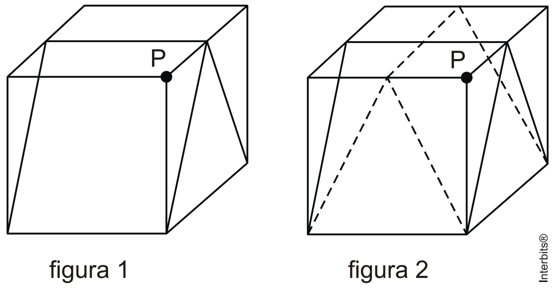


figura 1 figura 2

O volume da peça final que contém o vértice P, em cm^3, é igual a

Ⓐ 144.
Ⓑ 152.
Ⓒ 288.
Ⓓ 432.
Ⓔ 466.

Questão 29

(INSPER)

Dois faraós do antigo Egito mandaram construir seus túmulos, ambos na forma de pirâmides quadrangulares regulares, num mesmo terreno plano, com os centros de suas bases distando 120 m. As duas pirâmides têm o mesmo volume, mas a área da base de uma delas é o dobro da área da base da outra.

Se a pirâmide mais alta tem 100 m de altura, então a distância entre os vértices das duas pirâmides, em metros, é igual a

Ⓐ 100.
Ⓑ 120.
Ⓒ 130.
Ⓓ 150.
Ⓔ 160.

Questão 30

(UECE_2017)

A medida da altura de uma pirâmide é 10 m e sua base é um triângulo retângulo isósceles cuja medida da hipotenusa é 6 m. Pode-se afirmar corretamente que a medida do volume dessa pirâmide, em m^3, é igual a

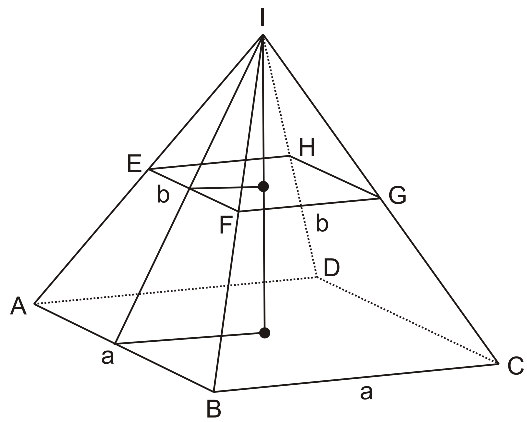
Ⓐ 60.
Ⓑ 30.
Ⓒ 15.
Ⓓ 45.

Questão 31

(PUCRS)

O metrônomo é um relógio que mede o tempo musical (andamento). O metrônomo mecânico consiste num pêndulo oscilante, com a base fixada em uma caixa com a forma aproximada de um tronco de pirâmide, como mostra a foto.

Na representação a seguir, a é o lado da base maior, b é o lado da base menor e V é o volume do tronco de pirâmide ABCDEFGH. Se a=4b e P é o volume total da pirâmide ABCDI, então:



Ⓐ $V = \frac{3}{4}P$

Ⓑ $V = \frac{3}{16}P$

Ⓒ $V = \frac{15}{16}P$

Ⓓ $V = \frac{15}{64}P$

Ⓔ $V = \frac{63}{64}P$

Questão 32

(UCS)

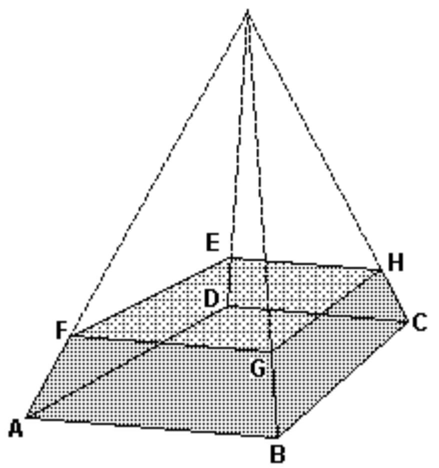
Aumentando-se a medida "a" da aresta da base de uma pirâmide quadrangular regular em 30% e diminuindo- se sua altura "h" em 30%, qual será a variação aproximada no volume da pirâmide?

Ⓐ Aumentará 18%.
Ⓑ Aumentará 30%.
Ⓒ Diminuirá 18%.
Ⓓ Diminuirá 30%.
Ⓔ Não haverá variação.

Questão 33

(UFPB)

As rapaduras, fabricadas no Engenho JB , têm a forma de um tronco de pirâmide regular ABCDEFGH, conforme ilustra a figura a seguir.



Sabendo-se que os segmentos AB e EF medem, respectivamente, 15 cm e 12 cm, e que a altura da pirâmide VABCD mede 20 cm, o volume de cada rapadura, em cm^3, é igual a:

A 2.304
B 1.500
C 768
D 732
E 500

Questão 34

(UPE)

Para a premiação dos melhores administradores de uma galeria comercial, um designer projetou um peso de papel com a forma de um tetraedro regular reto, de aresta 20 cm que será entregue aos vencedores. Esse peso de papel será recoberto com placas de platina, nas faces laterais e com uma placa de prata na base. Se o preço da platina é de 30 reais por centímetro quadrado, e o da prata é de 50 reais por centímetro quadrado, assinale a alternativa que apresenta o valor mais próximo, em reais, do custo desse recobrimento.

Considere $\sqrt{3} = 1{,}7$.

A 24 000
B 18 000
C 16 000
D 14 000
E 12 000

Questão 35

(PUCCAMP_2017)

Considere dois troncos de pirâmides retas exatamente iguais. A base maior é um quadrado de lado igual a 2 metros, a base menor um quadrado de lado igual a 1 metro, e a distância entre as bases igual a 1 metro. Um monumento foi construído justapondo-se esses dois troncos nas bases menores, apoiando-se em um piso plano por meio de uma das bases maiores, formando um sólido.

Desta maneira, a medida da área da superfície exposta do monumento é, em m^2, igual a

A $4 + 6\sqrt{5}$.
B 8.
C $12\sqrt{2} + 4$.
D $\frac{16}{3}$.
E $12\sqrt{2} - 8$.

Questão 36

(Fac. Pequeno Príncipe)

Um engenheiro está projetando uma caixa d'água de concreto em forma de tronco de pirâmide quadrngular regular e reta, com as seguintes medidas internas: base menor de lado 6 m, base maior de 16 m de lado e com altura da face lateral de 13m.

A capacidade de armazenamento da caixa d'água é de

A 1.432.000 litros
B 1.552 litros.
C 1.552.000 litros.
D 1.681,33 litros.
E 1.681.333 litros.

Questão 37

(UDESC)

Uma caixa de um perfume tem o formato de um tronco de pirâmide quadrangular regular fechado. Para embrulhá-la, Pedro tirou as seguintes medidas: aresta lateral 5 cm e arestas das bases 8 cm e 2 cm.

A quantidade total de papel para embrulhar esta caixa, supondo que não haja desperdício e nem sobreposição de material, foi

A 88 cm^2
B 168 cm^2
C 80 cm^2
D 68 cm^2
E 148 cm^2

Questão 38

(UERJ)

A figura abaixo representa o brinquedo Piramix.

Ele tem a forma de um tetraedro regular, com cada face dividida em 9 triângulos equiláteros congruentes. Se, a partir de cada vértice, for retirada uma pirâmide regular cuja aresta é $\frac{1}{3}$ da aresta do brinquedo, restará um novo sólido.

A razão entre as superfícies totais desse sólido e do Piramix equivale a:

- **A** $\frac{4}{9}$
- **B** $\frac{5}{9}$
- **C** $\frac{7}{9}$
- **D** $\frac{8}{9}$

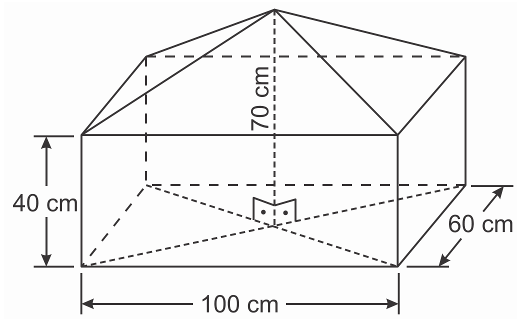
Questão 39

(UERJ)

Leia os quadrinhos:

HAGAR, o horrível

Suponha que o volume de terra acumulada no carrinho de mão do personagem seja igual ao do sólido esquematizado na figura a seguir, formado por uma pirâmide reta sobreposta a um paralelepípedo retângulo.



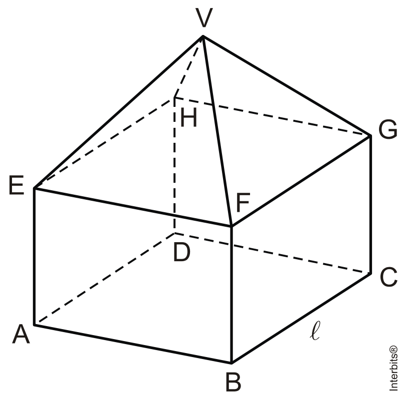
Assim, o volume médio de terra que Hagar acumulou em cada um dos 20 anos de trabalho é, em dm^3, igual a:

- **A** 12
- **B** 13
- **C** 14
- **D** 15

Questão 40

(ESPCEX)

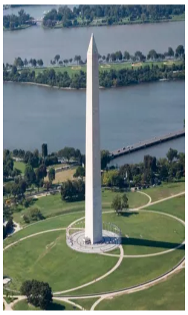
Na figura abaixo, está representado um sólido geométrico de 9 faces, obtido a partir de um cubo e uma pirâmide. Sabendo que todas as arestas desse sólido têm medida ℓ, então as medidas da altura (distância do ponto V à face ABCD) e da superfície total desse sólido são, respectivamente,



- **A** $\ell\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)$ e $\ell^2(\sqrt{3}+4)$
- **B** $\ell\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)$ e $\ell^2(\sqrt{3}+5)$
- **C** $\ell\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)$ e $\ell^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+5\right)$
- **D** $\ell\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\ell^2(\sqrt{3}+5)$
- **E** $\ell\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\ell^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+4\right)$

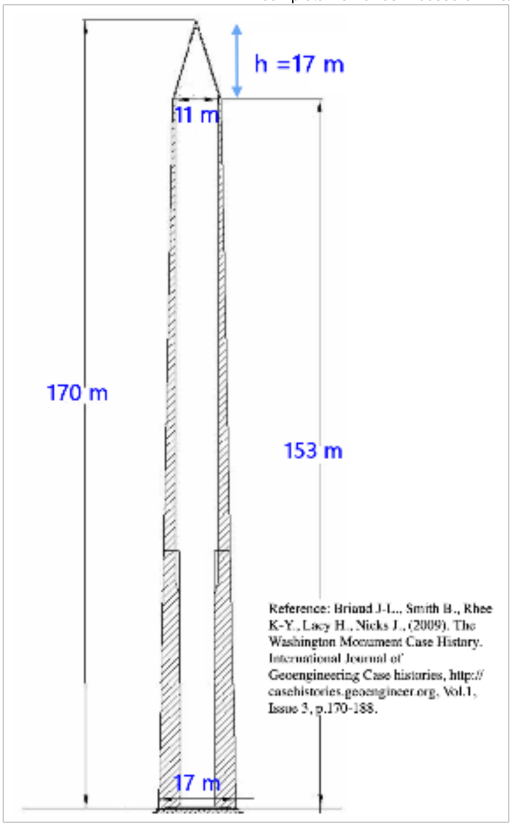
Questão 41

(Ronaebson)



"Com quase 170 metros de altura, o Monumento a Washington, construído na capital dos Estados Unidos, era o edifício mais alto do mundo quando foi inaugurado em 21 de fevereiro de 1885.
O obelisco foi batizado com o sobrenome do primeiro presidente dos Estados Unidos, George Washington, em homenagem a sua liderança política e militar. A proposta de construir um monumento como este surgiu mais de cem anos antes, em 1783."

Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/radioagencia-nacional/cultura/audio/2022-02/historia-hoje-inauguracao-do-monumento-washington-completa-137-anos. Acesso em 10/08/2022.

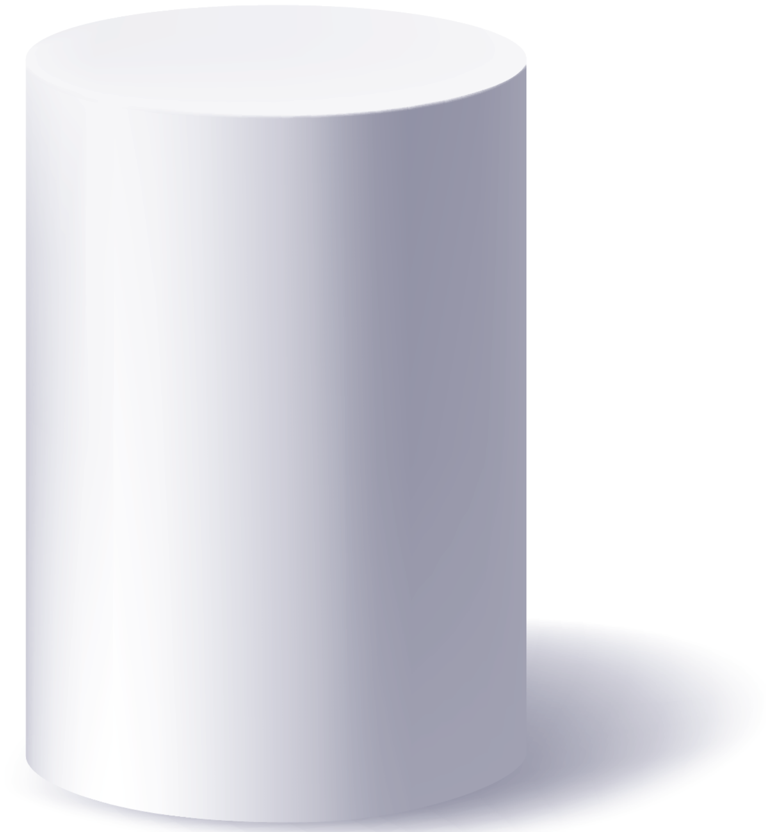


A primeira figura apresenta o monumento a Washington, que é formado pela junção de um tronco de pirâmide de base quadrada, com uma ponta de pirâmide de base quadrada. As dimensões do obelisco são dadas na segunda figura. É correto afirmar que o volume do obelisco, em metros quadrados é dado por:

A) $\frac{30134}{3}\ m^3$.
B) $\frac{34952}{3}\ m^3$.
C) $\frac{91341}{3}\ m^3$.
D) $\frac{93398}{3}\ m^3$.
E) $\frac{98912}{3}\ m^3$.

Gabarito _ Pirâmides			
Hora de Praticar			
Questão	Resposta	Questão	Resposta
01	D	22	A
02	C	23	C
03	D	24	B
04	E	25	B
05	D	26	C
06	C	27	B
07	D	28	A
08	B	29	C
09	B	30	B
10	A	31	E
11	D	32	A
12	E	33	D
13	B	34	A
14	D	35	A
15	B	36	C
16	B	37	E
17	C	38	C
18	D	39	D
19	C	40	B
20	B	41	D
21	E		

CILINDRO

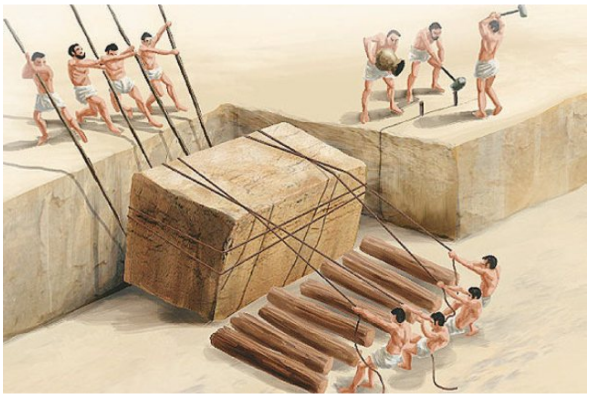


RONAEBSON
MATEMÁTICA CRIATIVA

Cilindro



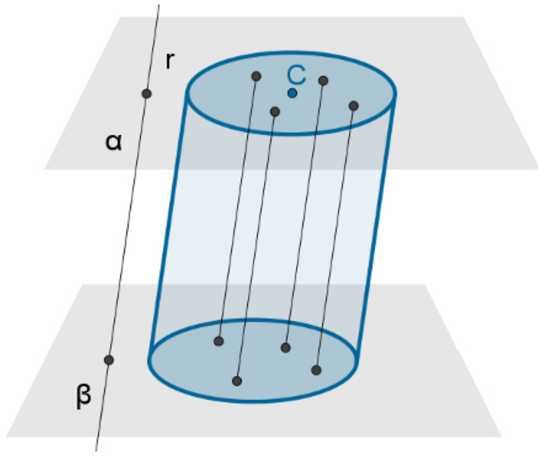
A partir das propriedades físicas e geométricas dos objetos na natureza, o homem ideias engenhosas e criativas para grandes descobertas e invenções. Por exemplo, a invenção da roda, uma das maiores e mais importantes criações humanas, provavelmente teve origem na constatação de que objetos pesados poderiam ser deslocados com facilidade sobre troncos de árvores.



Podemos encontrar a forma cilíndrica em vários outros elementos, como por exemplo, silos de armazenamento, lápis, velas, canos, latas, entre outros.

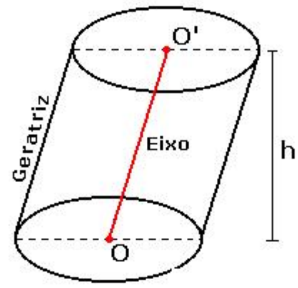
Consideremos α e β planos paralelos distintos e r uma reta interceptando os planos α e β, e S uma região circular contida em α, que não tem ponto em comum com r.

Definição: Chama-se cilindro de base circular de centro C a reunião de todos os segmentos paralelos a r, onde uma de suas extremidades pertence ao círculo.



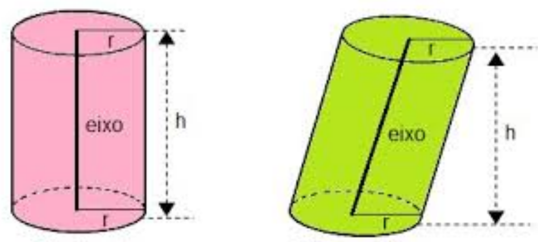
Assim, o cilindro é um corpo redondo que possui duas bases circulares congruentes e paralelas.

Podemos destacar no cilindro circular os seguintes elementos:



- *Bases*: círculos de centros O e O'.
- *Eixo Central*: reta que passa pelos centros das bases.
- *Altura*: Distância entre os planos que contém as bases.
- *Geratriz*: segmento paralelo ao eixo central com extremos nas circunferências das bases.

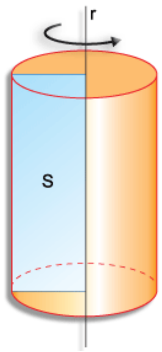
Se o eixo central for perpendicular aos planos das bases, diremos que o cilindro é reto, caso contrário, o cilindro será dito oblíquo.



Cilindro reto   Cilindro oblíquo

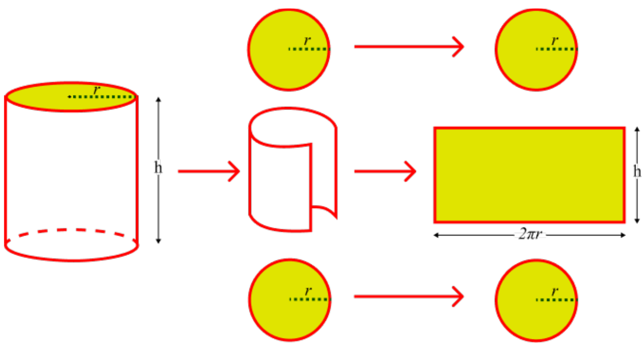
Cilindro Circular Reto

Um cilindro circular é dito *reto* quando ao eixo central é perpendicular ao plano da base. O cilindro circular reto é também um sólido de revolução, pois pode ser obtido pela rotação de um retângulo em torno de um de seus lados.



Planificação

Quando planificamos a superfície de um cilindro reto de raio da base r e altura h obtemos dois círculos, correspondentes à base, e, correspondente à superfície lateral, obtemos um retângulo cuja base mede $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base) e a altura corresponde a altura do cilindro.



Assim, sendo A_B a área da base, A_L a área lateral e A_T a área total desse cilindro circular reto, temos:

- **Área da Base:**

$$A_B = \pi r^2$$

- **Área da Lateral:**

$$A_L = 2\pi r h$$

- **Área da Total:**

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$

$$A_T = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$A_T = 2\pi r(h + r)$$

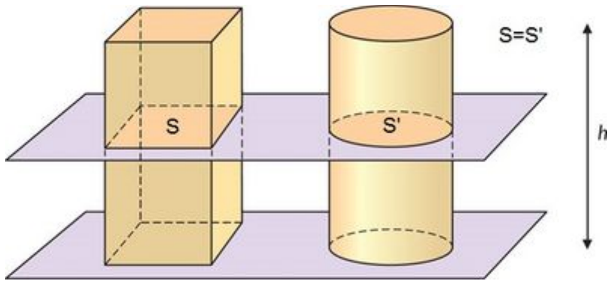
Volume

Como um pouco de imaginação, podemos encarar um cilindro circular reto como sendo um prisma regular cujo número de lados da base tende a infinito, assim, o volume de um cilindro pode ser calculado da mesma forma que o volume de um prisma, ou seja:

$$V = A_B \cdot h$$

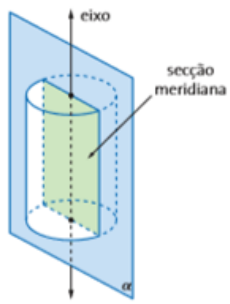
$$V_{Cilindro} = \pi r^2 h$$

Podemos perceber a veracidade desse fato pelo Princípio de Cavalieri

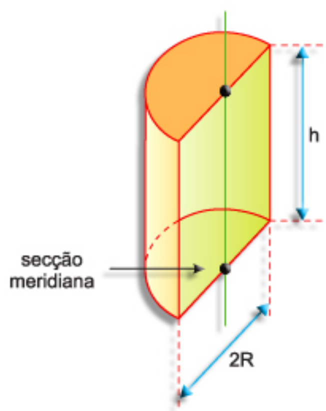


Secção Meridiana

A secção meridiana de um cilindro circular é a intersecção do cilindro com o plano que contém a reta suporte do eixo central do cilindro.



No caso do cilindro circular reto, a secção meridiana é um retângulo cuja base é igual a 2R e cuja altura coincide com a altura do cilindro.

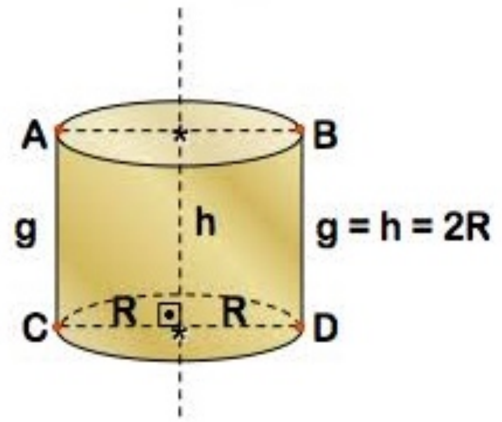


Logo, a área da secção meridiana é igual a

$$A_{SM} = 2R \cdot h$$

Toda secção meridiana feita num cilindro o divide em dois outros sólidos congruentes denominados semicilindros circulares retos.

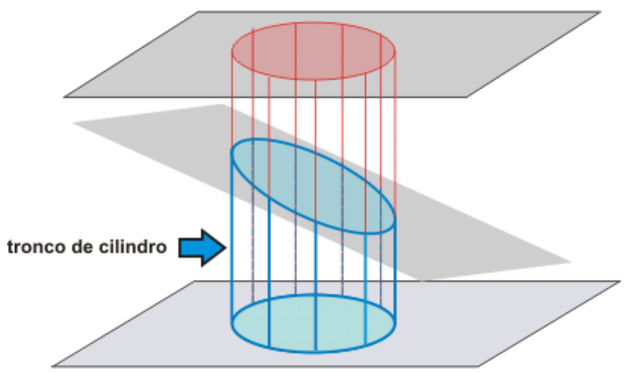
Caso a secção meridiana do cilindro reto seja um quadrado, o cilindro será dito um *Cilindro Equilátero*. Vejamos:

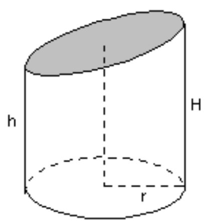


Observe que ABCD é um quadrado e que a altura do cilindro é igual ao diâmetro da base. Daí podemos calcular facilmente a área lateral, área total e o volume do cilindro equilátero conhecendo apenas o raio da base e aplicando nas fórmulas desenvolvidas anteriormente para o cilindro reto.

TRONCO DE CILINDRO RETO

Quando seccionamos um cilindro circular reto por um plano não paralelo a base, separamos esse cilindro em dois sólidos denominados tronco de cilindro.





Para o cálculo do volume do tronco de cilindro, basta imaginarmos outro tronco de cilindro idêntico acoplado ao primeiro, formando um cilindro cuja base é um círculo de raio r e a altura é igual a $H + h$. Logo, perceberemos que o volume do tronco é igual a metade do volume do cilindro, ou seja,

$$V_{Tronco} = \frac{\pi r^2 \cdot (H + h)}{2}.$$

Hora de Praticar

Questão 01

(Ronaebson)

Um arquiteto, inicialmente, havia projetado para um prédio residencial uma caixa d'água no formato de um cilindro reto de raio da base R e altura h. Entretanto, ao perceber que o número de pessoas em cada família que moraria nos apartamentos desse prédio era significativamente maior do que o que ele havia estimado de início, decidiu aumentar a capacidade de armazenamento da caixa d'água em seis vezes.

O fornecedor das caixas d'água enviou uma lista com os tipos cilíndricos disponíveis e cujas dimensões estão apresentadas na tabela a seguir.

Tipo de Caixa d'água	Raio da base (em metros)	Altura (em metros)
I	$3R$	$2h$
II	$2R$	$3h$
III	$R\sqrt{2}$	$3h$
IV	$6R$	h
V	$R\sqrt{3}$	$h\sqrt{2}$

Para atender às suas novas demandas, o arquiteto deverá escolher a caixa d'água do tipo

Ⓐ I.
Ⓑ II.
Ⓒ III.
Ⓓ IV.
Ⓔ V.

Questão 02

(Ronaebson)

Letícia faz "cilindros trufados", uma espécie de trufa no formato cilíndrico, para vender e ajudar na renda da família. O custo com material para produzir cada um desses cilindros trufados é de R$ 2,00. Tentando atrair mais clientes, ela decide aumentar em 20% o comprimento de cada cilindro, mas, em contrapartida, para não alterar demais os custos, decidiu reduzir o raio da base desses cilindros em 10%.

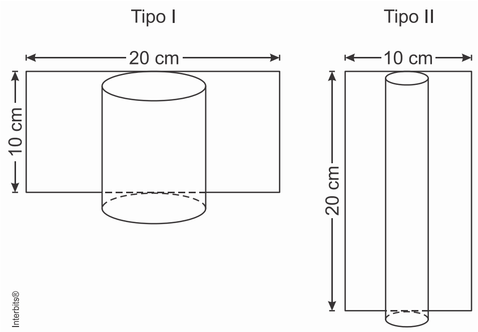
As mudanças nas dimensões do cilindro trufado confeccionados por Letícia, geraram para ela, nos custos de produção desses cilindros, um(a)

Ⓐ aumento de 2,8%.
Ⓑ aumento de 9,72%.
Ⓒ aumento de 10%.
Ⓓ redução de 2,8%.
Ⓔ redução de 9,72%.

Questão 03

(ENEM)

Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 cm x 10 cm (conforme ilustram as figuras abaixo). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.



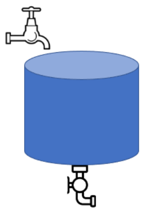
Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será

- **A** o triplo.
- **B** o dobro.
- **C** igual.
- **D** a metade.
- **E** a terça parte.

Questão 04

(Ronaebson)

Uma caixa d'água tem o formato de um cilindro equilátero de raio da base igual a 1m.



Às 7h da manhã, quando a caixa está vazia, abre-se um registro com vazão de $30\ L/min$ e, simultaneamente, abre-se um ladrão com vazão de $10\ L/min$ com o objetivo de irrigar uma plantação.

Sabe-se que quando a caixa estiver completamente cheia, o registro será fechado, permanecendo o ladrão aberto.

A que horas do dia a caixa d'água estará completamente vazia novamente?

Adote $\pi = 3$.

- **A** 12h
- **B** 15h
- **C** 17h
- **D** 20h
- **E** 22h

Questão 05

(Ronaebson)

Num determinado dia, a secretária do curso Matemática Criativa colocou à disposição dos alunos um frasco cilíndrico de 720 mL de álcool em gel para higienização das mãos.

No final do dia, a coluna de álcool havia baixado 5 cm.

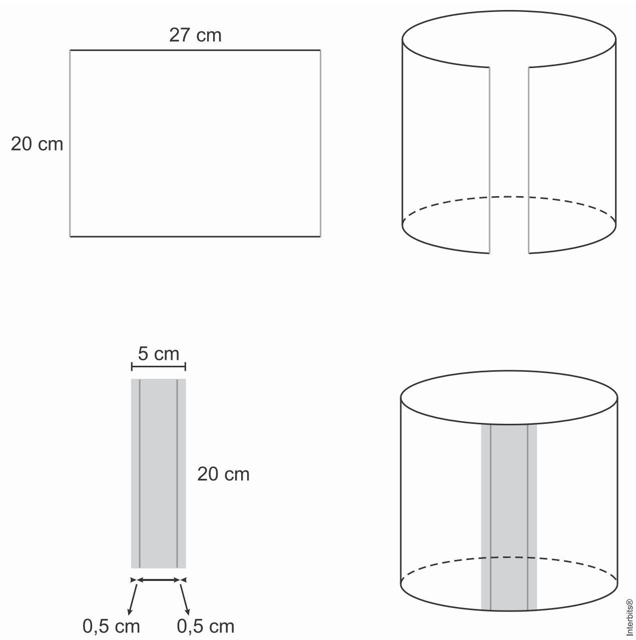
Considerando $\pi = 3$ e sabendo que a base do cilindro tem diâmetro 8 cm e admitindo o mesmo consumo de álcool em gel nos dias subsequentes, o total de dias necessários para que os alunos utilizem todo conteúdo do frasco é

- **A** 3.
- **B** 4.
- **C** 5.
- **D** 6.
- **E** 7.

Questão 06

(UNESP_2019)

Os menores lados de uma folha de papel retangular de 20 cm por 27 cm foram unidos com uma fita adesiva retangular de 20 cm por 5 cm, formando um cilindro circular reto vazado. Na união, as partes da fita adesiva em contato com a folha correspondem a dois retângulos de 20 cm por 0,5 cm conforme indica a figura.



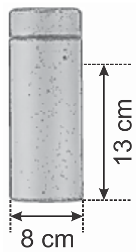
Desprezando-se as espessuras da folha e da fita e adotando $\pi = 3{,}1$, o volume desse cilindro é igual a

- **A** 1.550 cm^3
- **B** 2540 cm^3
- **C** 1652 cm^3
- **D** 4.805 cm^3
- **E** 1.922 cm^3

Questão 07

(FATEC_2019)

Uma garrafa térmica tem formato de um cilindro circular reto, fundo plano e diâmetro da base medindo 8,0 cm. Ela está em pé sobre uma mesa e parte do suco em seu interior já foi consumido, sendo que o nível do suco está a 13 cm da base da garrafa, como mostra a figura. O suco é despejado num copo vazio, também de formato cilíndrico e base plana, cujo diâmetro da base é 4 cm e com altura de 7 cm. O copo fica totalmente cheio de suco, sem desperdício.



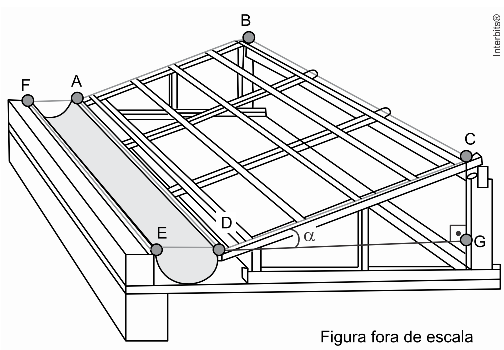
Adote $\pi = 3$. Despreze a espessura do material da garrafa e do copo. Nessas condições, o volume de suco restante na garrafa é, em cm^3, aproximadamente,

- Ⓐ 250.
- Ⓑ 380.
- Ⓒ 540.
- Ⓓ 620.
- Ⓔ 800.

Questão 08

(FGV_2018)

Um telhado retangular ABCD tem área igual a $120m^2$ e está conectado a uma calha de escoamento de água da chuva. A calha tem a forma de um semicilindro reto, de diâmetro AF=DE=0,4 m e capacidade igual a 720 litros.



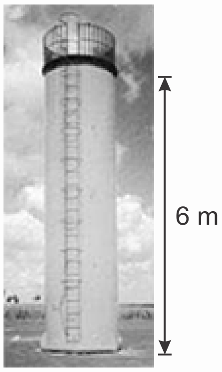
Considerando DG=5 m e adotando $\pi = 3$, a medida do ângulo agudo $C\widehat{D}G$, indicada na figura por α, é igual a

- Ⓐ 75°
- Ⓑ 60°
- Ⓒ 45°
- Ⓓ 30°
- Ⓔ 15°

Questão 09

(ENEM)

A figura abaixo mostra um reservatório de água na forma de um cilindro circular reto, com 6 m de altura. Quando está completamente cheio, o reservatório é suficiente para abastecer, por um dia, 900 casas cujo consumo médio diário é de 500 l de água.



Suponha que, um certo dia, após uma campanha de conscientização do uso da água, os moradores das 900 casas abastecidas por esse reservatório tenham feito economia de 10% no consumo de água. Nessa situação,

- Ⓐ a quantidade de água economizada foi de $4{,}5\ m^3$
- Ⓑ a altura do nível da água que sobrou no reservatório, no final do dia, foi igual a 60 cm
- Ⓒ a quantidade de água economizada seria suficiente para abastecer, no máximo, 90 casas cujo consumo diário fosse de 450 litros.
- Ⓓ os moradores dessas casas economizariam mais de R$200,00, se o custo de $1\ m^3$ de água para o consumidor fosse igual a R$2,50.
- Ⓔ um reservatório de mesma forma e altura, mas com raio da base 10% menor que o representado, teria água suficiente para abastecer todas as casas.

Questão 10

(Ronaebson)

Ao reformar sua casa, Solon resolveu trocar sua caixa d'água por apresentar algumas rachaduras. Na loja de materiais de construção, o vendedor mostrou 3 modelos a Solon com os seguintes formatos:

- Caixa 1: formato de cubo com aresta de 1 m;
- Caixa 2: formato de um paralelepípedo de dimensões 1,25 m de comprimento, 8 dm de largura e 100 cm de altura;
- Caixa 3: formato de um cilindro com capacidade para 1000 L.

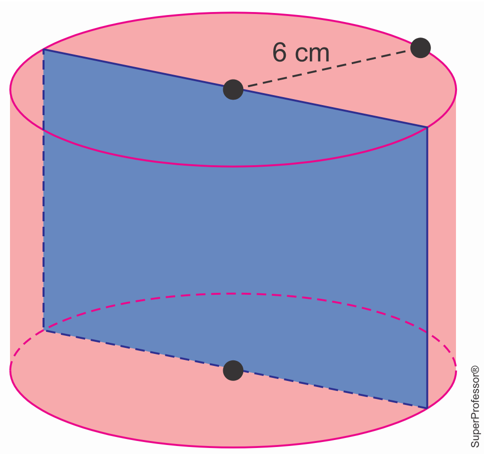
Se os volumes dessas caixas são, respectivamente, $V_1, V_2\ e\ V_3$, então

- Ⓐ $V_1 = V_2 < V_3$.
- Ⓑ $V_2 < V_1 < V_3$.
- Ⓒ $V_2 < V_3 < V_1$.
- Ⓓ $V_1 = V_2 = V_3$.
- Ⓔ $V_2 < V_1 = V_3$.

Questão 11

(UEA_2024)

Em um cilindro reto, sua secção transversal é um círculo de raio 6 cm e sua secção meridiana é um retângulo de área 96 cm^2.



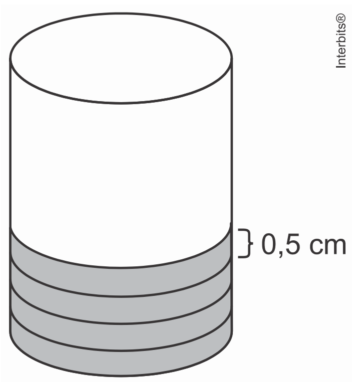
A altura desse cilindro é

A $6\pi\ cm.$
B $16\ cm.$
C $4\pi\ cm.$
D $8\ cm.$
E $6\ cm.$

Questão 11

(EEAR_2022)

Um cilindro circular reto de 5 cm de raio da base e de 10 cm de altura terá toda a sua superfície lateral revestida por uma fita de 0,5 cm de largura, como mostra a figura. Considerando $\pi = 3{,}14$ e que não haverá sobreposição de fita, será necessário uma quantidade mínima de _______ m de fita para realizar a tarefa.

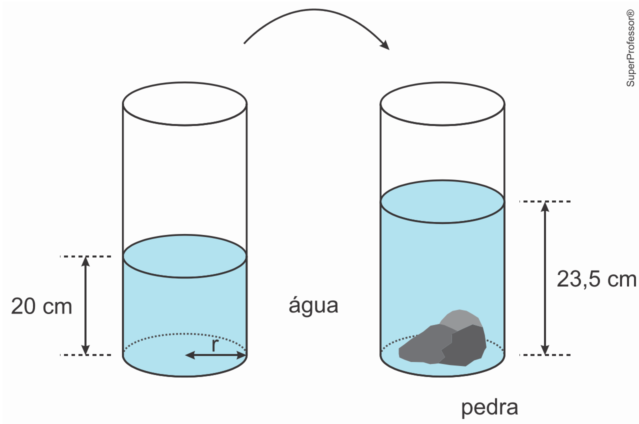


A 4,62
B 6,28
C 8,44
D 9,32

Questão 12

(FUVEST_2023)

Para medir o volume de uma pedra com formato irregular, Ana utilizou um recipiente cilíndrico de raio r = 8 cm e com água até a altura de 20 cm. Após colocar a pedra no recipiente, a altura da água subiu para 23,5 cm.



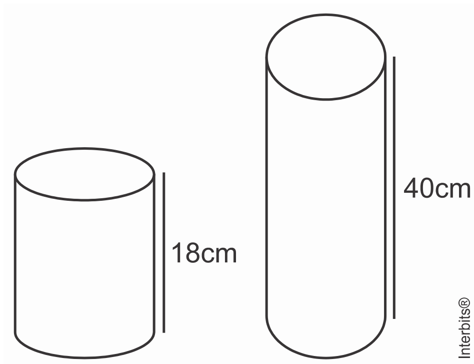
O volume da pedra é:

A $128\pi\ cm^3$
B $224\pi\ cm^3$
C $240\pi\ cm^3$
D $282\pi\ cm^3$
E $320\pi\ cm^3$

Questão 13

(EEAR)

Um cilindro de 18 cm de altura e raio da base igual a 5 cm contém água até a metade de sua altura. Por algum motivo, houve necessidade de despejar essa água em outro cilindro com 40 cm de altura, cujo raio da base mede 4 cm.



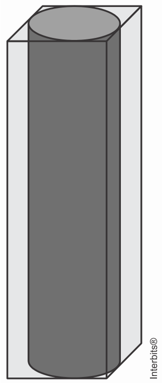
Considerando $\pi = 3$, o valor que mais se aproxima da altura atingida pela água no segundo cilindro é

A 14 cm
B 16 cm
C 20 cm
D 24 cm

Questão 14

(FMP_2022)

Na figura, mostra-se um paralelepípedo de dimensões $2dm \times 2dm \times 8dm$, apoiado sobre a sua base quadrada. Dentro do paralelepípedo, há um cilindro circular reto, o maior que cabe em seu interior.



O volume do cilindro corresponde a que percentual do volume da caixa? (Considere $\pi = 3$)

Ⓐ 90%
Ⓑ 80%
Ⓒ 75%
Ⓓ 70%
Ⓔ 67%

Questão 15

(Fac. Albert Einstein)

Sobre uma artéria média, sabe-se que o diâmetro externo de uma seção reta e a espessura da parede medem 0,04 dm e 1 mm, respectivamente. Considerando que uma seção reta dessa artéria, obtida por dois cortes transversais distantes 1,5 cm um do outro, tem a forma de um cilindro circular reto, quantos mililitros de sangue ela deve comportar, em relação ao seu diâmetro interno? (Considere a aproximação: $\pi = 3$).

Ⓐ 0,018
Ⓑ 0,045
Ⓒ 0,18
Ⓓ 0,45

Questão 16

(PUCRS_2018)

Um recipiente cilíndrico tem 3 cm de raio e 24 cm de altura. Estando inicialmente cheio d'água, o recipiente é inclinado até que o plano de sua base faça $45°$ com o plano horizontal. Nessa posição, o volume de água que permanecerá no recipiente será igual a __________ do volume inicial.

Ⓐ um oitavo
Ⓑ um sexto
Ⓒ sete oitavos
Ⓓ cinco sextos

Questão 17

(UFGD_2022)

O silo tubular horizontal conhecido como silo bag (bolsa) tem aparecido com cada vez mais frequência na paisagem dos campos do Brasil, inclusive de Mato Grosso do Sul. Trata-se de uma ferramenta de logística que permite guardar grãos e outros produtos agroindustriais, sendo uma das alternativas para resolver problemas de estocagem.

Disponível em: https://www.brasilagro.com.br/conteudo/soja-represada-estimulara-vendas-de-silo-bolsa.html. Acesso em: 01 nov. 2021.

Um agricultor deseja calcular a quantidade de massa que pode ser armazenada em um silo-bolsa com 1,8 m de diâmetro e 60 m de comprimento, com um grão de densidade de massa = 200 kg/m^3. Considere o silo-bolsa um cilindro reto, despreze sua espessura e tenha como referência $\pi = 3{,}14$. Qual é a capacidade máxima aproximada desse tipo de grão que pode ser estocada nesse silo-bolsa?

Ⓐ 3.000 kg.
Ⓑ 15,2 t.
Ⓒ 30,5 t.
Ⓓ 67,8 t.
Ⓔ 80,0 t.

Questão 18

(IFCE_2018)

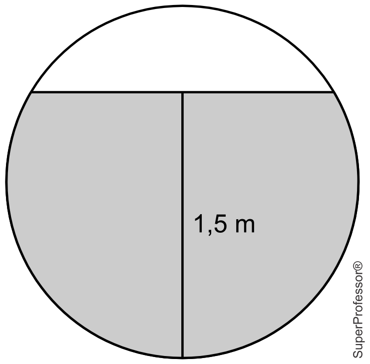
De modo a minimizar custos, um produtor de azeite verificou que é mais rentável armazenar seu estoque em cilindros circulares cuja altura e o diâmetro da base têm as mesmas medidas. Atendendo a essa especificação, ele encomendou reservatórios com 1,5m de raio na base. Considerando $\pi = 3{,}14$, a capacidade total de armazenamento de cada reservatório encomendado, em litros, é

Ⓐ 21,195.
Ⓑ 14130.
Ⓒ 211,95.
Ⓓ 21195.
Ⓔ 14,13.

Questão 19

(UNIOESTE_2022)

Um tanque de óleo possui formato de cilindro circular reto e está posicionado deitado em relação ao solo, isto é, os planos que contém as faces circulares é perpendicular ao plano do solo. O tanque contém óleo de forma que a qualquer secção do cilindro, paralela às faces circulares, mostra a altura do óleo em relação ao solo, de 1,5 m, conforme a figura abaixo.



O comprimento do tanque é de h metros e o raio das faces circulares é de 1 metro. Desprezando a espessura do material com o qual o tanque é fabricado, qual o volume do óleo contido no tanque?

Ⓐ $\frac{h}{12}(8\pi + 3)$
Ⓑ $\frac{h}{12}(4\pi + \sqrt{3})$
Ⓒ $\frac{h}{4}(3\pi + 1)$
Ⓓ $\frac{h}{12}(8\pi + 3\sqrt{3})$
Ⓔ $\frac{h}{12}(4\pi + 3\sqrt{3})$

Questão 20

(FGV)

Determinada marca de ervilhas vende o produto em embalagens com a forma de cilindros circulares retos. Uma delas tem raio da base 4cm A outra, é uma ampliação perfeita da embalagem menor, com raio da base 5 cm. O preço do produto vendido na embalagem menor é de R$2,00. A embalagem maior dá um desconto, por mL de ervilha, de 10% em relação ao preço por mL de ervilha da embalagem menor.

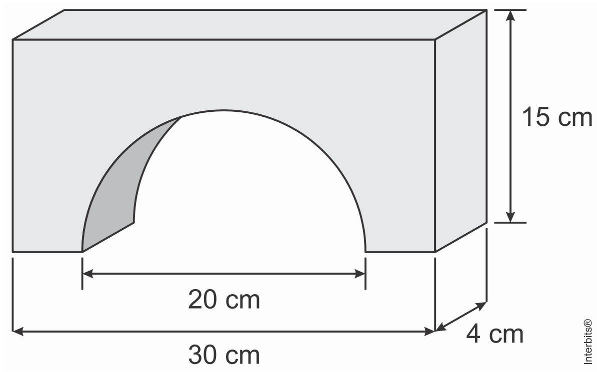
Nas condições dadas, o preço do produto na embalagem maior é de, aproximadamente,

Ⓐ R$3,51
Ⓑ R$3,26
Ⓒ R$3,12
Ⓓ R$2,81
Ⓔ R$2,25

Questão 21

(FATEC_2019)

De um paralelepípedo retorretângulo de $30\ cm, 4\ cm\ e\ 15\ cm$ é removido um semicilindro circular reto de altura $4\ cm$ e base de diâmetro $20\ cm$ obtendo-se uma peça como mostra a figura.



Adote $\pi = 3$

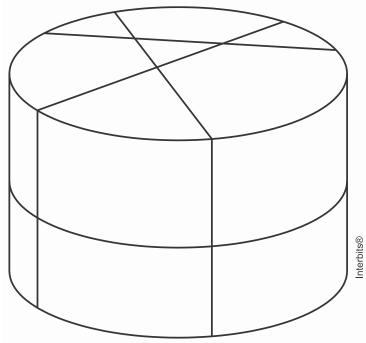
Assim sendo, o volume da peça é, em centímetros cúbicos,

Ⓐ 1.100.
Ⓑ 1.200.
Ⓒ 1.300.
Ⓓ 1.400.
Ⓔ 1.500.

Questão 22

(FATEC_2017)

Um cilindro circular reto é dividido em N partes quando interceptado por quatro planos. Um dos planos é paralelo às bases do cilindro e os outros três, perpendiculares a elas. A figura mostra os cortes obtidos com essas intersecções.



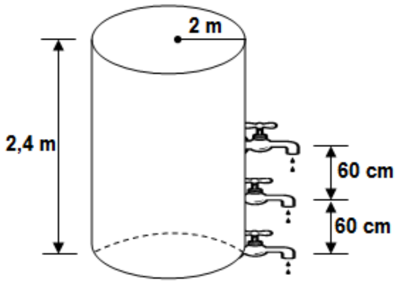
Assim sendo, de acordo com a figura, o valor de N é

Ⓐ 10.
Ⓑ 12.
Ⓒ 14.
Ⓓ 15.
Ⓔ 17.

Questão 23

(Ronaebson)

Um tanque com a forma de um cilindro circular reto com 2,40 m de altura e raio da base igual a 2 m, estando com a base apoiada num plano horizontal. Ao longo de uma geratriz (vertical), de baixo para cima, esse tanque possui três torneiras iguais, espaçadas de 60 cm, sendo a primeira no nível da base como mostra a figura.



Inicialmente o tanque está completamente cheio de água e sabe-se que cada torneira proporciona uma vazão de 20π litros por minuto. Abrindo-se as 3 torneiras, o tempo necessário para o esgotamento completo do tanque será de

- Ⓐ 1h 20min.
- Ⓑ 2h 40min.
- Ⓒ 3h 20min.
- Ⓓ 4h 20min.
- Ⓔ 8h 20min.

Questão 24

(IFSC)

Considere um saleiro com formato cilíndrico e raio da base 2 cm e altura 4 cm conforme a figura. Dados: $\pi = 3{,}14$.

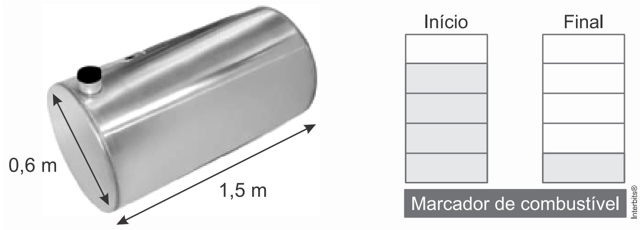
Sabendo que o volume de um cilindro é dado por $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$, com R sendo o raio da base desse cilindro, e h a altura desse cilindro, é correto afirmar que o volume do saleiro descrito acima é de

- Ⓐ 30,5 cm^3
- Ⓑ 50,2 cm^3
- Ⓒ 12,8 cm^3
- Ⓓ 15,4 cm^3
- Ⓔ 18,3 cm^3

Questão 25

(UPE-SSA)

A figura abaixo representa um tanque de combustível de certa marca de caminhão a diesel. Sabendo que esse veículo faz, em média, 3lm/L, e, observando o marcador de combustível no início e no final de uma viagem, quantos quilômetros esse caminhão percorreu?
Considere $\pi = 3$.

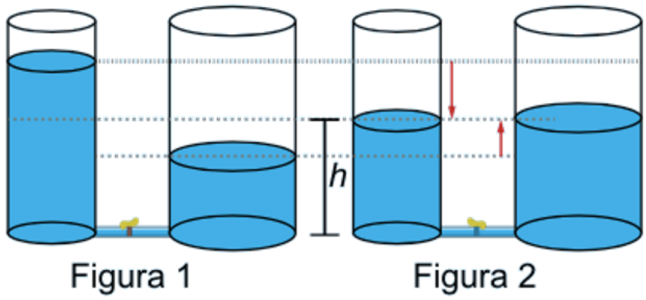


- Ⓐ 243 km
- Ⓑ 425 km
- Ⓒ 648 km
- Ⓓ 729 km
- Ⓔ 813 km

Questão 26

(Ronaebson)

Um professor de física, com o objetivo de mostrar, na prática, o Teorema de Pascal, tomou dois reservatórios ligados por um fino tubo em sua parte inferior. Ambos os reservatórios possuem o mesmo volume de água, mas com diferentes alturas, conforme mostrado na Figura 1. Abrindo-se a torneira do tubo, a água escoa, de modo que as alturas das duas colunas de água se tornem iguais. O nível da água do reservatório esquerdo baixa 3 cm e o nível da água do reservatório direito sobe 1 cm, conforme indica a Figura 2.



Qual a altura h, em cm, da altura de equilíbrio?

- Ⓐ 2 cm.
- Ⓑ 3 cm.
- Ⓒ 4 cm.
- Ⓓ 5 cm.
- Ⓔ 6 cm.

Questão 27
(UFPA)

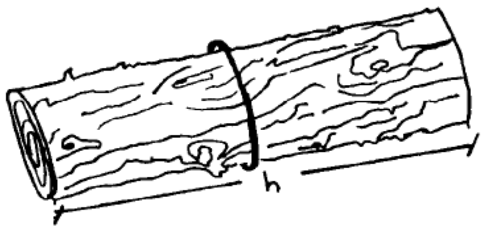
Um tanque cilíndrico de 0,8 m de raio, com eixo na vertical em relação ao solo, está com combustível que é consumido em um veículo à razão média de 4 km por litro. Se o veículo se mover a 50 km/h, a velocidade da coluna de combustível em cm/h é de

- **A** 8,2.
- **B** 4,3.
- **C** 2,1.
- **D** 1,8.
- **E** 0,6.

Questão 28
(ENEM)

Em muitas regiões do Estado do Amazonas, o volume de madeira de uma árvore cortada é avaliado de acordo com uma prática dessas regiões:

I. Dá-se uma volta completa em torno do tronco com um barbante.



II. O barbante é dobrado duas vezes pela ponta e, em seguida, seu comprimento é medido com fita métrica.

1ª dobra   2ª dobra

III. O valor obtido com essa medida é multiplicado por ele mesmo e depois multiplicado pelo comprimento do tronco. Esse é o volume estimado de madeira.

Outra estimativa pode ser obtida pelo cálculo formal do volume do tronco, considerando-o um cilindro perfeito. A diferença entre essas medidas é praticamente equivalente às perdas de madeira no processo de corte para comercialização.

Pode-se afirmar que essas perdas são da ordem de

- **A** 30%.
- **B** 22%.
- **C** 15%.
- **D** 12%.
- **E** 5%.

Questão 29
(IFPE_2018)

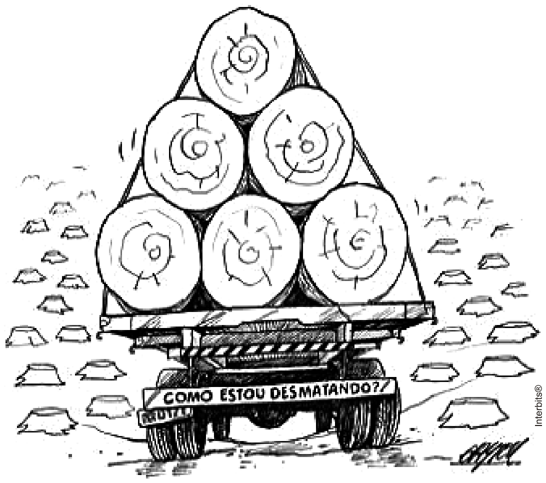
Milena é aluna do curso de Saneamento no campus Afogados da Ingazeira e convenceu seu pai a construir um tanque de tratamento da água do esgoto no quintal de sua casa. Como o espaço disponível não é tão grande, o tanque tem por base um setor circular de um quarto de volta com 1 metro de raio e 2,5 metros de profundidade.

Se o tratamento utilizado por Milena consegue reaproveitar 80% da água, estando o tanque completamente cheio, quantos litros de água poderão ser reaproveitados? (Considere $\pi = 3{,}14$).

- **A** 6.280 litros.
- **B** 7.850 litros.
- **C** 2.000 litros.
- **D** 2.512 litros.
- **E** 1.570 litros.

Questão 30
(UFG)

Observe a charge a seguir.



Disponível em: <http://veronicauerj.blogspot.com.br>. Acesso em: 28 mar. 2012. [Adaptada].

Considerando-se que as toras de madeira no caminhão são cilindros circulares retos e idênticos, com 10 m de comprimento e que a altura da carga é de 2,7 m acima do nível da carroceria do caminhão, então a carga do caminhão corresponde a um volume de madeira, em metros cúbicos de, aproximadamente,

Dados: $\sqrt{3} \cong 1{,}7$ e $\pi \cong 3{,}1$.

- **A** 17,2
- **B** 27,3
- **C** 37,4
- **D** 46,5
- **E** 54,6

Questão 31

(UFU)

A densidade (ou densidade volumétrica) de um material mede a quantidade de matéria (massa) que está presente em uma unidade de volume desse material. Embora todo material seja um objeto espacial, é comum considerarmos sendo de “natureza linear”. Por exemplo, um fio de cobre tem natureza linear e consideramos sua densidade linear (razão de sua massa pelo seu comprimento).
O vergalhão CA-60 são barras de aço muito resistentes, utilizadas na construção civil e comercializadas em barras padrão de 12 metros. Admitindo que essas barras sejam cilíndricas, seus diâmetros (bitolas) variam de 4,2 a 9,5 mm.
De acordo com as especificações da norma NBR 7480, a barra da bitola de 6,0 mm tem densidade linear de 0,222kg/m (quilograma por metro).

Com base nas informações apresentadas, a densidade, em kg/ m^3, de uma barra de bitola 6mm é igual a

A) $\frac{222}{36\pi}$

B) $\frac{222}{9\pi}$

C) $\frac{222000}{9\pi}$

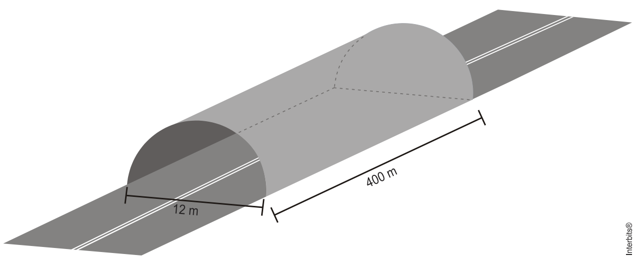
D) $\frac{222000}{36\pi}$

Questão 32

(UFSM)

Uma alternativa encontrada para a melhoria da circulação em grandes cidades e em rodovias é a construção de túneis. A realização dessas obras envolve muita ciência e tecnologia.

Um túnel em formato semicircular, destinado ao transporte rodoviário, tem as dimensões conforme a figura a seguir.



Qual é o volume, em m^3, no interior desse túnel?

A) 4.800 π.
B) 7.200 π.
C) 14.400 π.
D) 28.800 π.
E) 57.600 π.

Questão 33

(UFPB)

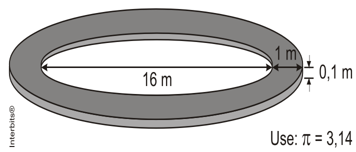
Uma fábrica produz embalagens metálicas fechadas, em formato de um prisma reto, medindo 20 cm de altura, cuja base é um quadrado de lado 10 cm. Para diminuir o desperdício de material, técnicos da fábrica avaliaram que, se as embalagens fossem produzidas em formato de um cilindro fechado, com a mesma altura e volume da embalagem em formato de prisma, haveria uma economia de material usado. Com base nessa avaliação, é correto afirmar que, ao fazer as embalagens em formato de cilindro, a economia da fábrica com o material utilizado será de: (Use: $\sqrt{\pi} \cong 1{,}77$).

A) 6,5%
B) 7,6%
C) 9,2%
D) 13,4%
E) 15,5%

Questão 34

(UFPB)

Sr. Ptolomeu construirá em sua chácara um jardim de formato circular com 16 m de diâmetro. Contornando o jardim, haverá uma calçada, medindo 1 m de largura por 0,1 m de altura, conforme figura a seguir:



Supondo que o preço médio do m^3 da calçada a ser construída é de R$ 100, conclui-se que a despesa do Sr. Ptolomeu com a construção da calçada será, aproximadamente, de:

A) R$ 685,30
B) R$ 653,80
C) R$ 583,30
D) R$ 533,80
E) R$ 835,30

Questão 35

(UNIFOR)

Um copo, em forma de cilindro circular reto de raio 5cm e altura 20 cm, tem um nível h de água. O ângulo máximo que o fundo do copo forma com a horizontal, de modo que a água não transborde é de $60°$. O nível h da água é de:

A) $20 - 2\sqrt{3}$
B) $20 - 3\sqrt{3}$
C) $20 - 5\sqrt{3}$
D) $20 - 6\sqrt{3}$
E) $20 - 7\sqrt{3}$

Questão 36

(UNIFOR)

Duas velas homogêneas e de comprimentos iguais são acesas simultaneamente. A primeira tem um tempo de queima de 4 horas e a segunda de 6 horas. Após certo tempo, ambas foram apagadas ao mesmo tempo.

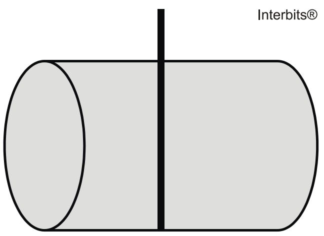
Observou-se que o resto de uma tinha o dobro do resto da outra. Por quanto tempo ficaram acesas?

A 2 horas
B 2 horas e 30 min
C 3 horas
D 3 horas e 20 min
E 3 horas e 30 min

Questão 37

(ENEM)

Uma empresa de transporte armazena seu combustível em um reservatório cilíndrico enterrado horizontalmente. Seu conteúdo é medido com uma vara graduada em vinte intervalos, de modo que a distância entre duas graduações consecutivas representa sempre o mesmo volume.
A ilustração que melhor representa a distribuição das graduações na vara é:



A 

B 

C 

D 

E 

Questão 38

(UEMA)

Um marceneiro tem como seu principal produto bancos de madeira, os quais são envernizados, antes da sua montagem, para melhor acabamento. Tais bancos são compostos pelo assento circular e quatro pernas de seção quadrada. O assento tem raio de 30 cm e espessura de 5 cm, enquanto as pernas têm 3 cm de lado e 40 cm de altura. Sabe-se que o verniz utilizado pelo marceneiro tem rendimento de 8 m^2, por litro, e é vendido, apenas, em latas de um litro.

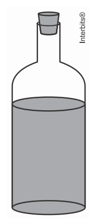
Para envernizar toda a sua produção mensal, 40 (quarenta) bancos, a quantidade de latas de verniz a ser adquirida é de

Considere $1m^2 = 10.000cm^2$ e $\pi = 3{,}14$.

A 3.
B 4.
C 5.
D 6.
E 7.

TEXTO PARA AS PRÓXIMAS 2 QUESTÕES:

Uma garrafa cilíndrica está fechada, contendo um líquido que ocupa quase completamente seu corpo, conforme mostra a figura. Suponha que, para fazer medições, você disponha apenas de uma régua milimetrada.



Questão 39

(ENEM)

Para calcular o volume do líquido contido na garrafa, o número mínimo de medições a serem realizadas é:

A 1
B 2
C 3
D 4
E 5

Questão 40

(ENEM)

Para calcular a capacidade total da garrafa, lembrando que você pode virá-la, o número mínimo de medições a serem realizadas é:

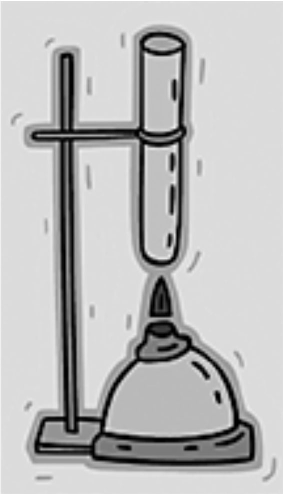
A 1
B 2
C 3
D 4
E 5

Questão 41

(FCMMG_2018)

Em trabalhos de laboratório, é comum acompanhar o comportamento de líquidos em aquecimento. Os líquidos, da mesma forma que os sólidos, passam por uma dilatação quando são aquecidos. Por não possuírem forma específica, os líquidos assumem o formato do recipiente em que foram alojados.

Ao analisar o comportamento térmico de um líquido, percebe-se que sua dilatação ocorre ao mesmo tempo em que ocorre a dilatação do recipiente, ou seja, quando aquecido, o complexo (líquido + recipiente) se dilata. Na prática, quando somente se considera que a capacidade do frasco aumentou, a dilatação observada para o líquido será uma dilatação aparente. A dilatação real sofrida pelo líquido é superior à dilatação aparente e é idêntica à soma da dilatação aparente com a dilatação do recipiente.



Durante um experimento prático de aquecimento de determinado líquido, foi utilizado um tubo de ensaio graduado que indicava, inicialmente, a marcação de um volume de 30 cm^3. Após 4 minutos de aquecimento, o volume no tubo de ensaio indicava 32 cm^3 e também uma elevação de, aproximadamente, 3mm na altura do líquido armazenado no tubo de ensaio.

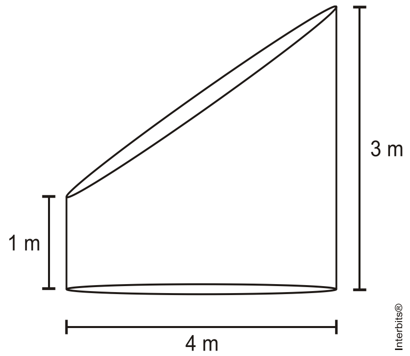
Considerando-se as informações dadas, pode-se concluir que o diâmetro do tubo de ensaio, após o aquecimento, era de, aproximadamente:

Ⓐ 4 cm
Ⓑ 3 cm
Ⓒ 2 cm
Ⓓ 1,5 cm

Questão 42

(IFAL)

Um cilindro reto de 4 m de diâmetro, 2 m e 8 m de altura é cortado por um plano não paralelo à sua base, resultando no sólido ilustrado na figura abaixo. O volume do sólido é:

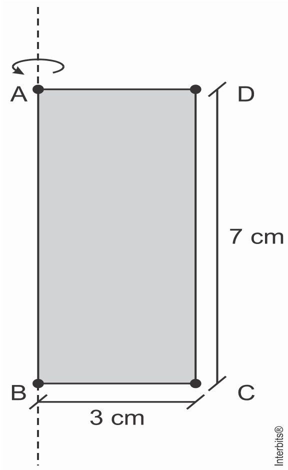


Ⓐ $6\pi m^3$
Ⓑ $8\pi m^3$
Ⓒ $10\pi m^3$
Ⓓ $12\pi m^3$
Ⓔ $nda.$

Questão 43

(FMP_2018)

A figura mostra um retângulo ABCD cujos lados medem 7 cm e 3 cm. Um cilindro será formado girando-se o retângulo ABCD em torno da reta definida pelo seu lado AB.



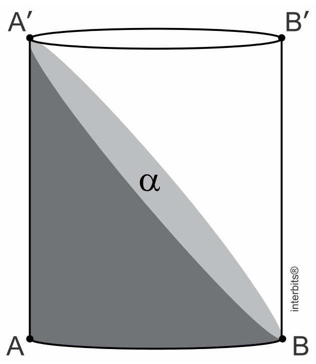
A medida do volume desse cilindro, em centímetros cúbicos, é mais próxima de

Ⓐ 750
Ⓑ 441
Ⓒ 63
Ⓓ 126
Ⓔ 190

Questão 44

(UERJ_2017)

Um cilindro circular reto possui diâmetro AB de 4 cm e altura AA’ de 10 cm. O plano α, perpendicular à seção meridiana ABB’A’, que passa pelos pontos B e A’ das bases, divide o cilindro em duas partes, conforme ilustra a imagem.



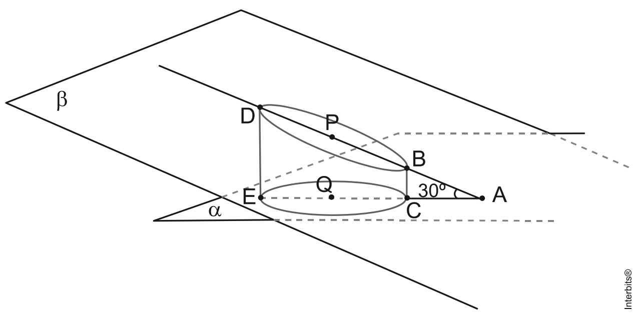
O volume da parte do cilindro compreendida entre o plano α e a base inferior, em cm^3, é igual a:

A 8π
B 12π
C 16π
D 20π

Questão 45

(FGV)

Um cilindro circular reto de base contida em um plano α foi seccionado por um plano β, formando 30° com α gerando um tronco de cilindro. Sabe-se que $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$ são, respectivamente, eixo maior da elipse de centro P contida em β, e raio da circunferência de centro Q contida em α. Os pontos A, B, P e D são colineares e estão em β, e os pontos A, C, Q e E são colineares e estão em α.



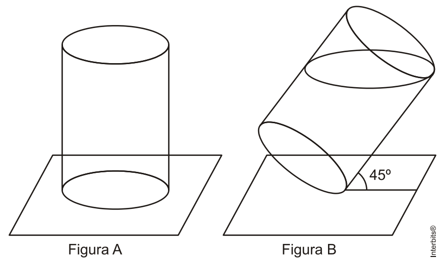
Sendo BC = 1 m e $CQ = \sqrt{3}m$, o menor caminho pela superfície lateral do tronco ligando os pontos C e D mede, em metros,

A $3\sqrt{1+3\pi^2}$
B $3\sqrt{3\pi}$
C $3\sqrt{1+\pi^2}$
D $\sqrt{9+3\pi^2}$
E $\sqrt{9+\pi^2}$

Questão 46

(FGV)

A figura A mostra um copo cilíndrico reto com diâmetro da base de 10 cm e altura de 20 cm, apoiado sobre uma mesa plana e horizontal, completamente cheio de água.
O copo foi inclinado lentamente até sua geratriz formar um ângulo de 45° com o plano da mesa, como mostra a figura B.



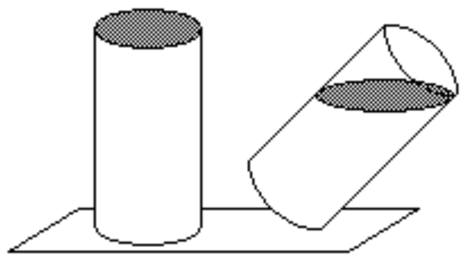
Então, o volume de água derramada, em cm^3, foi:

A 120π
B 125π
C 250π
D 300π
E 500π

Questão 47

(FGV)

Inclinando-se em 45° um copo cilíndrico reto de altura 15 cm e raio da base 3,6 cm, derrama-se parte do líquido que completava totalmente o copo, conforme indica a figura.



Admitindo-se que o copo tenha sido inclinado com movimento suave em relação à situação inicial, a menor quantidade de líquido derramada corresponde a um percentual do líquido contido inicialmente no copo de

A 48%
B 36%
C 28%
D 24%
E 18%

Questão 48

2(C)

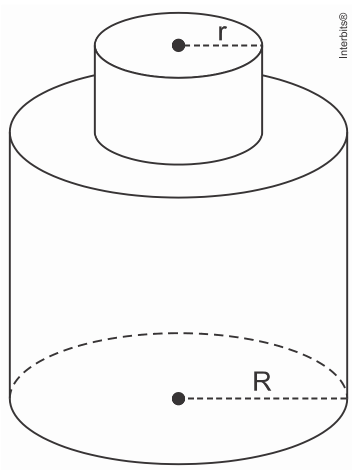
1. (Unisc 2021) Um senhor de oitenta e cinco anos passou por um procedimento de gastrostomia por não ser capaz de ingerir, pela boca, comida suficiente para uma boa nutrição. A família responsabilizou-se pelos cuidados desse senhor. Ao comprar $1\,l$ de alimento utilizou uma certa quantidade na alimentação e armazenou o restante em um recipiente com formato de um cilindro circular reto, cujas medidas são: diâmetro da base igual a $10\ cm$ e altura igual a $10\ cm$. Sabendo-se que o alimento, ao ser armazenado nesse recipiente, atingiu a altura de $10\ cm$. (considere $\pi = 3$) pode-se afirmar que a quantidade de alimento (em ml) que o senhor ingeriu antes de armazená-lo no recipiente foi de:

A) $100\ ml$
B) $150\ ml$
C) $250\ ml$
D) $250\ ml$
E) $300\ ml$

Questão 49

2(B)

2. (G1 - cftmg 2020) Uma empresa construiu um reservatório de água com dois cilindros justapostos, como na figura a seguir.



Sabe-se que o raio do cilindro maior é 8 vezes o raio do cilindro menor e V_1 e V_2 são os volumes do cilindro menor e maior, respectivamente. Considere que $V_1 = 3\pi r^2$ e $V_2 = 12\pi R^2$

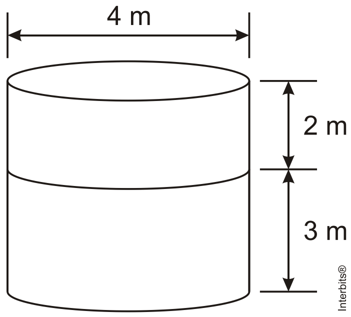
Se o reservatório possui capacidade total de $3.084\pi\ m^3$, então, o raio do cilindro maior é, em metros, igual a

A) 14
B) 16
C) 18
D) 20
E) 22

Questão 50

3(D)

1. (Cesgranrio 2011) Um sólido totalmente maciço é composto pela união de dois cilindros circulares retos de mesmo diâmetro. As densidades do cilindro menor e do cilindro maior valem, respectivamente, $8.900\ kg/m^3$ e $2.700\ kg/m^3$.



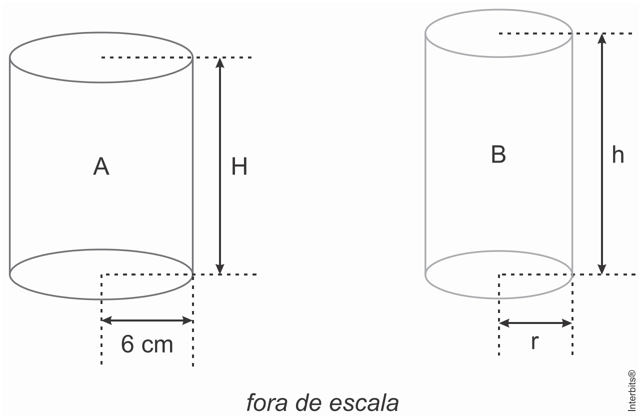
Considerando-se $\pi = 3$, a massa desse sólido, em toneladas, vale

A) 97,2
B) 114,5
C) 213,6
D) 310,8
E) 320,4

Questão 51

3(D)

2. (Famema 2017) Um cilindro circular reto A, com raio da base igual a 6 cm e altura H, possui a mesma área lateral que um cilindro circular reto B, com raio da base r e altura h, conforme mostram as figuras.



fora de escala

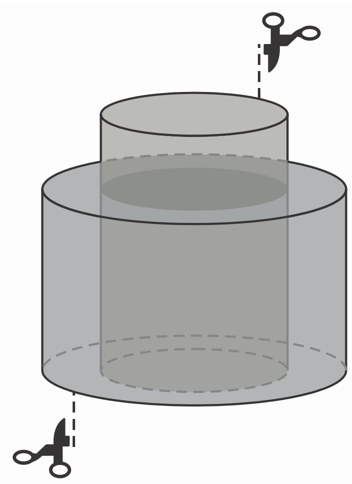
Sabendo que $\frac{h}{H} = 1{,}2$ e que o volume do cilindro B é $240\pi\ cm^3$, é correto afirmar que a diferença entre os volumes dos cilindros é

A) $50\pi\ cm^3$.
B) $42\pi\ cm^3$.
C) $45\pi\ cm^3$.
D) $48\pi\ cm^3$.
E) $37\pi\ cm^3$.

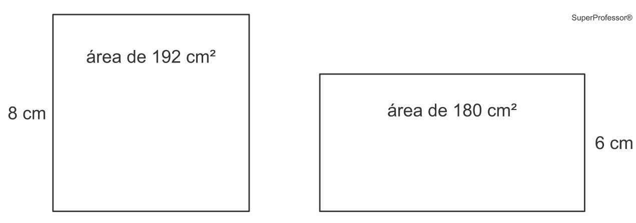
Questão 52

(UFU_2023)

Em um projeto de engenharia envolvendo cilindros hidráulicos, têm-se dois cilindros circulares retos, colocados um no interior do outro e com bases sobrepostas, conforme indicado na figura abaixo.



Se eles forem recortados e planificados, têm-se dois retângulos, com alturas e áreas especificadas a seguir.



Figuras ilustrativas e sem escalas

Assumindo-se que esses cilindros sejam ocos; que não flutuam em água; que tenham paredes de espessura desprezível; e que estejam inicialmente vazios, foram despejados 465 cm^3 de água no interior do cilindro de maior altura, de maneira que parte dessa água transbordará para o cilindro de altura menor. Segundo as condições apresentadas, e utilizando a aproximação $\pi = 3$ determine a altura, em cm, que a coluna de água atingiu no cilindro de altura menor.

(A) 3,00
(B) 1,00
(C) 1,08
(D) 1,69

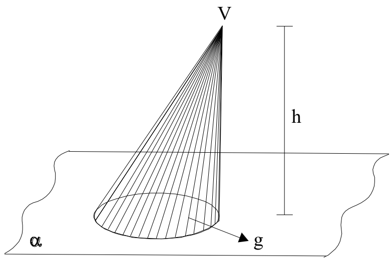
Gabarito _ Cilindros			
Hora de Praticar			
Questão	Resposta	Questão	Resposta
01	C	27	E
02	D	28	B
03	B	29	E
04	E	30	D
05	A	31	C
06	A	32	B
07	C	33	C
08	B	34	D
09	B	35	C
10	D	36	C
11	D	37	A
12	B	38	C
13	A	39	B
14	C	40	C
15	B	41	B
16	C	42	B
17	C	43	E
18	D	44	D
19	D	45	D
20	A	46	B
21	B	47	D
22	C	48	C
23	D	49	B
24	B	50	D
25	D	51	D
26	B	52	A

CONE

RONAEBSON
MATEMÁTICA CRIATIVA

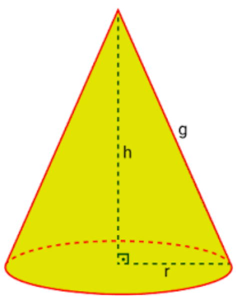
CONE

Consideremos um círculo (região circular) situado num plano α e um ponto *V* fora de α. Chama-se cone circular à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em *V* e outra nos pontos do círculo.

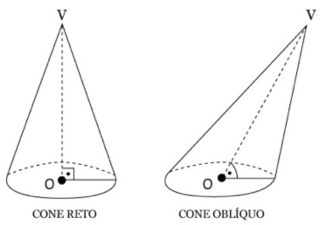


Podemos destacar no cone circular os seguintes elementos:

- *Base:* círculo contido no plano α.
- *Vértice:* ponto *V*.
- *Raio da Base: R*
- *Geratrizes:* são os segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos da circunferência da base.
- *Altura:* é a distância do vértice ao plano da base.
- *Eixo Central:* é a reta que passa pelo vértice do cone e pelo centro do círculo da base.

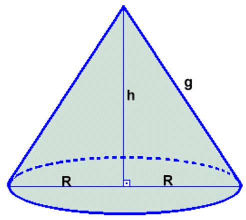


Se o eixo central for perpendicular ao plano da base, diremos que o cone é reto, caso contrário, o cone será dito oblíquo.



CONE CIRCULAR RETO

Um cone circular é dito *reto* quando a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base.

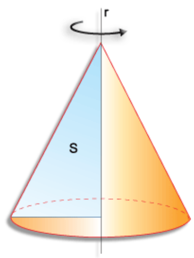


- h: altura do cone.
- g: geratriz do cone.
- R: raio da base do cone.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

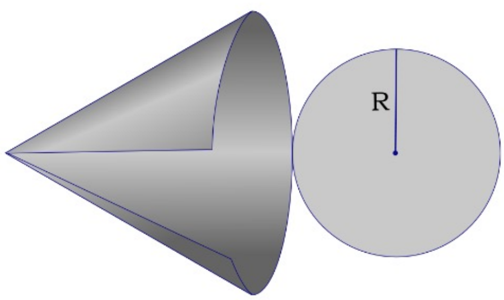
$$\boldsymbol{g^2 = h^2 + r^2}$$

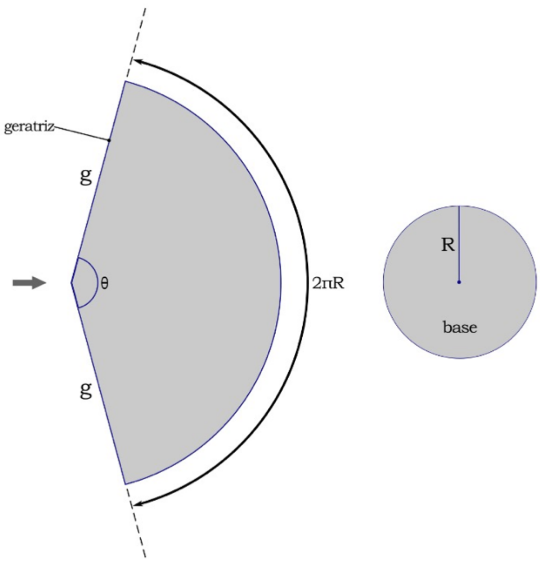
O cone circular reto é também chamado cone de revolução, pois pode ser gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.



PLANIFICAÇÃO

Quando planificamos a superfície de um cone reto de raio da base R e geratriz g obtemos um círculo, correspondente a base, e, correspondente a superfície lateral, obtemos um setor circular de raio g, cujo arco tem comprimento $2\pi R$.





Assim, sendo A_B a área da base, A_L a área lateral e A_T a área total desse cone circular reto, temos:

- **Área da Base:**

$$A_B = \pi R^2$$

- **Área da Lateral:**

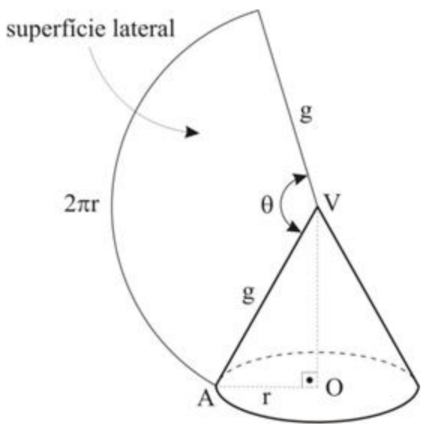
Observe que a área lateral corresponde a área de um setor circular de raio g, assim, basta percebermos que a área do setor é diretamente proporcional ao comprimento do arco, logo:

Comprimento do Arco		Área
$2\pi g$	$\longrightarrow$	A_L
$2\pi R$	$\longrightarrow$	πR^2

$$2\pi R \cdot A_L = 2\pi g \cdot \pi R^2$$

$$A_L = \pi R g$$

Caso seja dado o ângulo central θ do setor correspondente a planificação, teremos:

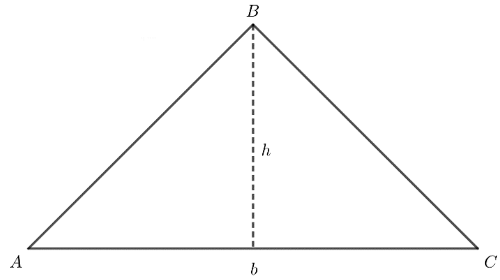


Ângulo Central		Área
θ	$\longrightarrow$	A_L
360^o	$\longrightarrow$	πR^2

$$360^o \cdot A_L = \theta \cdot \pi R^2$$

$$A_L = \frac{\theta \cdot \pi R^2}{360^o}$$

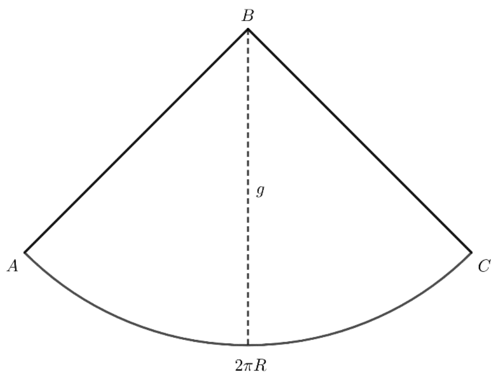
Área da superfície lateral de um cone reto: uma analogia interessante
Considere o triângulo ABC da figura a seguir, de base b e altura h.



Sabemos, da geometria plana, que a área desse triângulo é dada por

$$A_\Delta = \frac{b \cdot h}{2}.$$

Considere, agora, o setor circular ABC, originado a partir da planificação da superfície lateral de um cone reto de geratriz g e raio da base R.



Como vimos anteriormente, a área desse setor é obtida a partir da expressão

$$A = \pi R g,$$

a qual pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$A = \frac{2\pi R \cdot g}{2}.$$

Perceba que, com base nesta última igualdade, o cálculo da área do setor circular é análogo ao cálculo da área de um triângulo de base $2\pi R$ e altura g. Isso nos permite memorizar mais facilmente a fórmula da área da superfície lateral de um cone reto: basta imaginar essa superfície como um triângulo de base $\boldsymbol{2\pi R}$ e altura $\boldsymbol{g}$, e utilizar a conhecida fórmula da área do triângulo.

- **Área Total:**

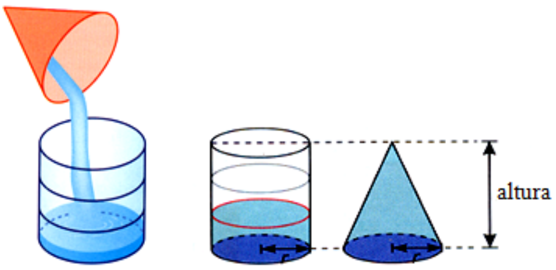
$$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base}$$

$$A_T = \pi R g + \pi R^2$$

$$A_T = \pi R \cdot (g + R)$$

VOLUME

De maneira experimental, temos que o volume do cone corresponde a um terço do volume de um cilindro de mesma base e mesma altura.

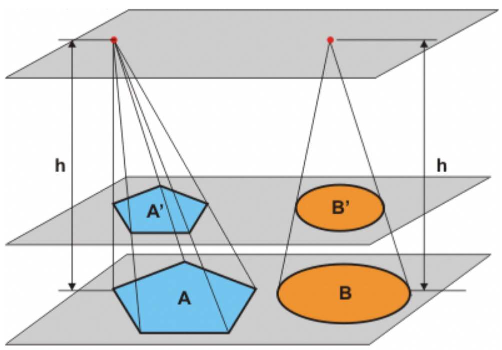


Daí:

$$V_{Cone} = \frac{1}{3} \cdot V_{Cilindro}$$

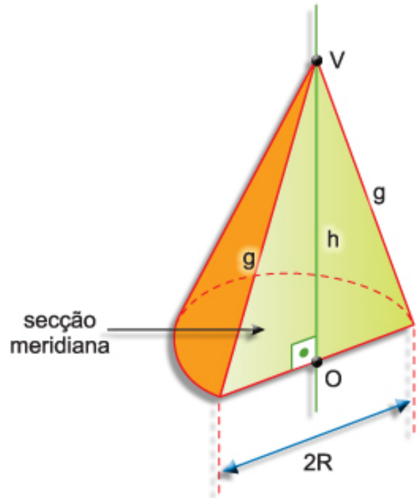
$$V_{Cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h$$

Claro que poderíamos usar o Princípio de Cavalieri para mostrar que o volume do cone corresponde ao volume de uma pirâmide de mesma altura e cuja área da base é igual a área da base do cone.



SECÇÃO MERIDIANA

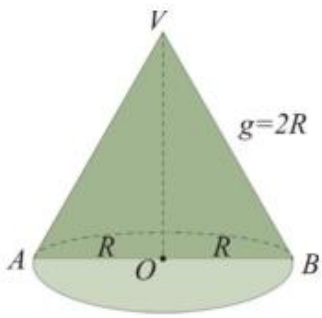
A secção meridiana de um cone é a intersecção do cone com o plano que contém a reta suporte do eixo central do cone.



No caso de o cone ser reto, a secção meridiana é um triângulo isósceles, cuja área é dada por:

$$\boldsymbol{A_{SM} = \frac{2R \cdot h}{2} = Rh}$$

Caso a secção meridiana do cone reto seja um triângulo equilátero, o cone será dito um ***Cone Equilátero***. Vejamos:



$$VA = VB = AB = 2R$$

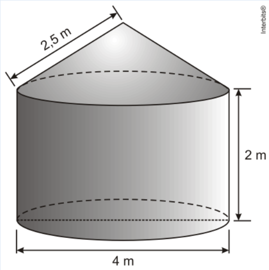
$$g = 2R$$

Além disso, temos que a altura do cone será a altura de um triângulo equilátero de lado $2R$, assim:

$$h = \frac{2R \cdot \sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$$

Para o cálculo da área lateral, área total e volume do cone equilátero, basta aplicar as fórmulas que obtivemos anteriormente para o cone reto.

Problema 01: (UFPB 2011) A prefeitura de certo município realizou um processo de licitação para a construção de 100 cisternas de placas de cimento para famílias da zona rural do município. Esse sistema de armazenamento de água é muito simples, de baixo custo e não poluente. A empreiteira vencedora estipulou o preço de R$ 40 por m^2 construído, tomando por base a área externa da cisterna. O modelo de cisterna pedido no processo tem a forma de um cilindro com uma cobertura em forma de cone, conforme a figura abaixo.



Considerando que a construção da base das cisternas deve estar incluída nos custos, é correto afirmar que o valor, em reais, a ser gasto pela prefeitura na construção das 100 cisternas será, no máximo, de:
Use: $\pi = 3{,}14$

Ⓐ 100.960.
Ⓑ 125.600.
Ⓒ 140.880.
Ⓓ 202.888.
Ⓔ 213.520.

Solução:

Sejam R e h as medidas, respectivamente, do raio da base e da altura da parte cilíndrica de uma cisterna. Considere também g a medida da geratriz da sua cobertura em forma de cone. Note que o raio da base dessa cobertura coincide com o raio da base da parte cilíndrica. Pelos dados apresentados, temos que

$$R = \frac{4}{2} = 2\ m, h = 2\ m\ e\ g = 2{,}5\ m.$$

Dessa forma, a área lateral da parte cilíndrica é dada por

$$A_{Lateral\ cilíndrica} = 2\pi R \cdot h = 2\pi \cdot 2 \cdot 2 = 8\pi\ m^2.$$

Ademais, a área da base da cisterna é

$$A_{Base} = \pi R^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi\ m^2.$$

A área da cobertura, por sua vez, é igual a

$$A_{Cobertura} = \pi R g = \pi \cdot 2 \cdot 2{,}5 = 5\pi\ m^2.$$

Portanto, a área externa total da cisterna é dada por

$$A_{Total} = A_{Lateral\ cilíndrica} + A_{Base} + A_{Cobertura} = 8\pi + 4\pi + 5\pi = 17\pi\ m^2.$$

Como o preço por metro quadrado construído é de R$ 40,00, o custo de uma única cisterna é, em reais,

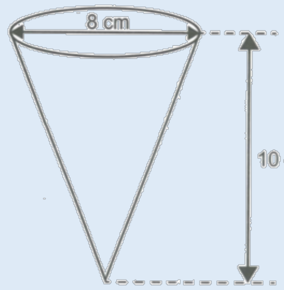
$$C_{cisterna} = 40 \cdot 17\pi = 680\pi.$$

Logo, o valor a ser gasto pela prefeitura na construção das 100 cisternas é, em reais,

$$C_{total} = 100 \cdot 680\pi \approx 68000 \cdot 3{,}14 = 680 \cdot 314 = R\$\ 213520.$$

Resposta: E

Problema 02: (ENEM 2022) Uma empresa produz e vende um tipo de chocolate, maciço, em formato de cone circular reto com as medidas do diâmetro da base e da altura iguais a 8 cm e 10 cm, respectivamente, como apresenta a figura.



Devido a um aumento de preço dos ingredientes utilizados na produção desse chocolate, a empresa decide produzir esse mesmo tipo de chocolate com um volume 19% menor, no mesmo formato de cone circular reto com altura de 10 cm.
Para isso, a empresa produzirá esses novos chocolates com medida do raio da base, em centímetro, igual a

Ⓐ 1,52.
Ⓑ 3,24.
Ⓒ 3,60.
Ⓓ 6,48.
Ⓔ 7,20.

Solução:

Primeiramente, determinemos o volume $V_{inicial}$ dos chocolates antes da alteração no processo produtivo. Uma vez que os produtos possuíam formato de cone reto com diâmetro da base e altura medindo, respectivamente, 8 cm e 10 cm, tal volume é dado por

$$V_{inicial} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{8}{2}\right)^2 \cdot 10 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = \frac{160\pi}{3}\ cm^3.$$

Seja V_{final} o volume de cada chocolate após a mudança na produção, isto é, após a redução de 19% do volume inicial. Temos que

$$V_{final} = V_{inicial} - \frac{19}{100} \cdot V_{inicial} = \left(1 - \frac{19}{100}\right) \cdot V_{inicial} = \frac{81}{100} \cdot \frac{160\pi}{3} = \frac{27 \cdot 16\pi}{10}\ cm^3.$$

Por outro lado, uma vez que, após a alteração, os chocolates permaneceram com formato de cone reto de altura 10 cm,

$$V_{final} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot 10,$$

onde R representa a medida do raio da base dos novos chocolates. Portanto,

$$\frac{1}{3}\cdot \pi R^2 \cdot 10 = \frac{27\cdot 16\pi}{10}.$$

Consequentemente,

$$R^2 = \frac{3\cdot 27\cdot 16\cdot \pi}{10\cdot 10\cdot \pi} = \frac{81\cdot 16}{100}.$$

Logo,

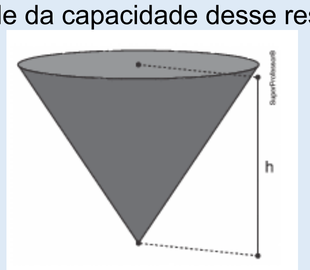
$$R = \sqrt{\frac{81\cdot 16}{100}} = \frac{\sqrt{81}\cdot\sqrt{16}}{\sqrt{100}} = \frac{9\cdot 4}{10} = \frac{36}{10} = 3{,}6\ cm.$$

Resposta: C

Problema 03: (UFPR 2023) Na figura ao lado, tem-se um reservatório no formato de um cone reto com altura h e área do topo igual a $12\ m^2$. Esse reservatório está sendo preenchido com um líquido cujo volume em m^3 é dado por:

$$V(t) = \log_2(t^2+1),$$

sendo $t \geq 0$ o tempo. Em quanto tempo o líquido atingirá metade da capacidade desse reservatório?



A $t = \sqrt{4^h - 1}$.
B $t = 2^h - 1$.
C $t = \sqrt{2^h - 1}$.
D $t = 4^h - 1$.
E $t = \sqrt{4^h + 1}$.

Solução:

Primeiramente, observe que a capacidade máxima $V_{máx}$ do reservatório corresponde ao volume do cone de área da base $A_{base} = 12\ m^2$ e altura h, isto é,

$$V_{máx} = \frac{1}{3}A_{base}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 12\cdot h = 4h.$$

Note também que, em $t = 0$, o volume do líquido no reservatório é dado por $V(0) = \log_2(0^2+1) = \log_2 1 = 0$. Isso significa que, em $t = 0$, o reservatório se encontra vazio. Seja t o instante em que o líquido ocupa metade da capacidade do reservatório. Temos que $V(t) = \frac{V_{máx}}{2} = \frac{4h}{2} = 2h$, e, consequentemente

$$\log_2(t^2+1) = 2h.$$

Isso implica que

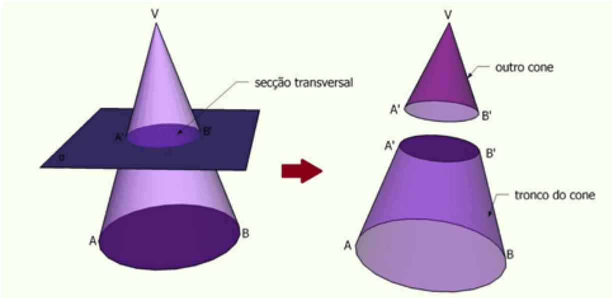
$$t^2 + 1 = 2^{2h} = 4^h.$$

Portanto, $t = \sqrt{4^h - 1}$.

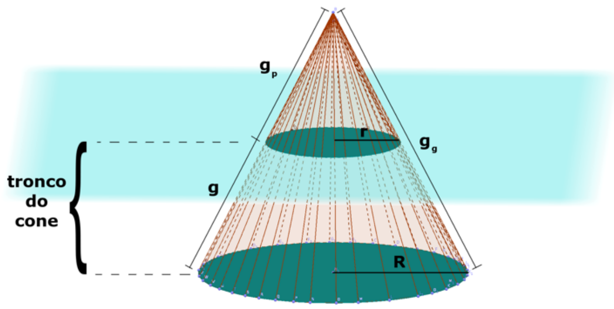
Resposta: A

TRONCO DE CONE RETO

Quando seccionamos um cone por um plano paralelo a base, separamos esse cone em dois sólidos:

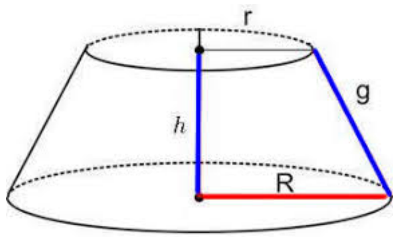


- o sólido que contem o vértice que é um novo cone e
- o sólido que contém a base do cone dado que é um tronco de cone de bases paralelas.

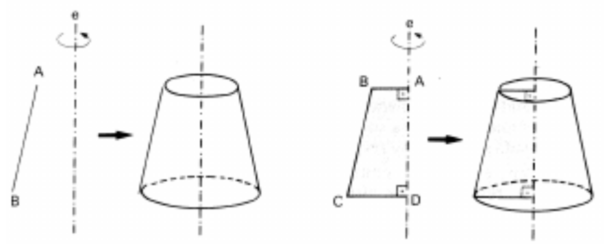


Assim, o tronco de cone reto terá como elementos:

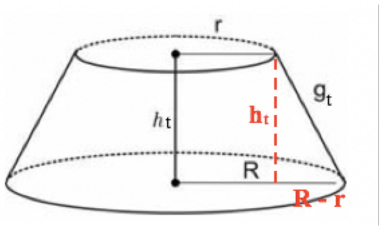
- Base Menor: círculo de raio *r*;
- Base Maior: círculo de raio *R*;
- Altura: distância entre as bases (*h*);
- Geratriz do tronco: *g*.



O tronco de cone reto também é um sólido de revolução, pois pode ser obtido pela rotação de um trapézio retângulo em torno do lado perpendicular as bases.



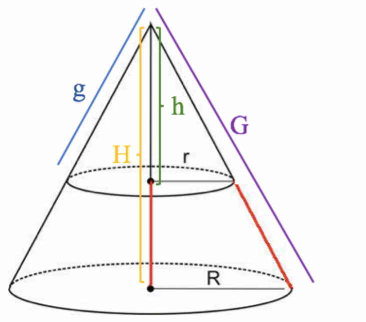
Algumas relações surgem naturalmente quando invocamos os conhecimentos básicos de geometria plana, por exemplo, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:



$$g_t^2 = h_t^2 + (R - r)^2$$

Claro, que não existe necessidade de memorizar essa última expressão. Basta aplicar o Teorema de Pitágoras, como vimos.

Observe também que ao seccionarmos um cone reto com um plano paralelo à base, o novo cone gerado tem a mesma natureza do cone primitivo, isto é, são semelhantes, logo, os ângulos são ordenadamente congruentes e os elementos lineares (raios das bases, geratrizes, alturas) são proporcionais.



Daí, decorrem algumas relações:

$$\frac{h}{H} = \frac{r}{R} = \frac{g}{G} = k$$

onde:

- *h*: Altura do cone menor;
- *H*: Altura do cone maior;
- *r*: Raio da base menor;
- *R*: Raio da base maior;
- *g*: geratriz do cone menor;
- *G*: geratriz do cone maior.
- *k*: constante de proporcionalidade.

Além disso,

$$\frac{A_b}{A_B} = \frac{A_l}{A_L} = \frac{A_t}{A_T} = k^2$$

onde,

- A_b: Área da base menor;
- A_B: Área da base maior;
- A_l: Área lateral do cone menor;
- A_L: Área lateral do cone maior;
- A_t: Área total do cone menor;
- A_T: Área total do cone maior.

e por fim,

$$\frac{V_{Cone\ Menor}}{V_{Cone\ Maior}} = k^3$$

A partir dessas relações podemos deduzir o volume do tronco de cone, de modo que basta calcular a diferença entre o volume do cone original e o volume do cone menor gerado, veja:

$$V_{Tronco} = V_{Cone\ Maior} - V_{Cone\ Menor}$$

assim,

$$V_{Tronco} = \frac{h_t}{3} \cdot \left[A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b\right]$$

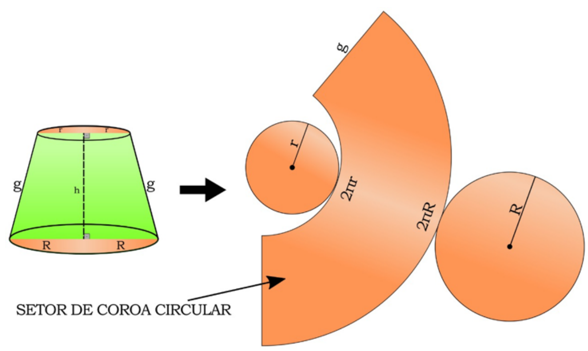
daí

$$V_{Tronco} = \frac{h_t}{3} \cdot \left[\pi R^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2} + \pi r^2\right]$$

$$\Downarrow$$

$$V_{Tronco} = \frac{\pi h_t}{3} \cdot \left[R^2 + R \cdot r + r^2\right]$$

Quando planificamos um tronco de cone circular reto obtemos um círculo menor, um círculo maior e um setor de coroa circular como descrito na imagem a seguir:

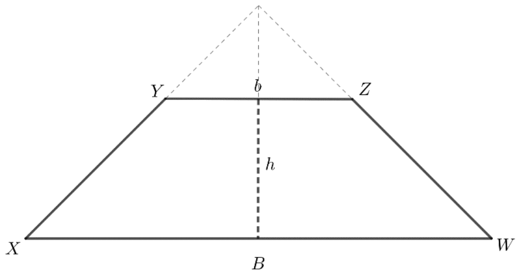


Para o cálculo da área lateral do tronco de cone, também podemos usar as relações obtidas das proporções e fazer a área lateral do cone original menos a área lateral do cone menor gerado. Assim, obteremos:

$$A_{Lateral\ do\ Tronco} = \pi(R + r) \cdot g$$

Façamos agora uma analogia interessante envolvendo a área da superfície lateral de um tronco de cone reto.

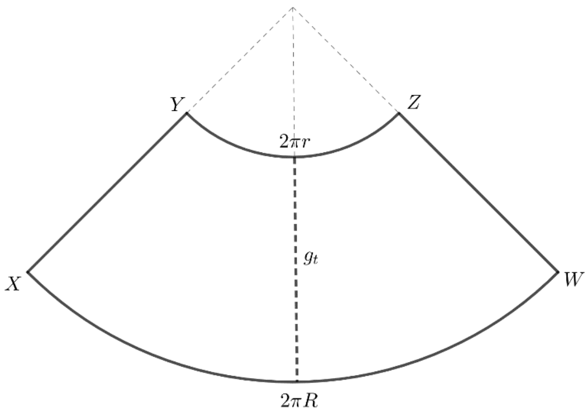
Considere o trapézio $XYZW$ da figura a seguir, de base maior B, base menor b e altura h.



Sabemos, da geometria plana, que a área desse trapézio é dada por

$$A_{trapézio} = \frac{(B+b)\cdot h}{2}.$$

Considere, agora, o setor de coroa circular $XYZW$, originado a partir da planificação da superfície lateral de um tronco de cone reto de geratriz g_t, raio da base maior R e raio da base menor r.



Como vimos anteriormente, a área desse setor é obtida a partir da expressão

$$A = \pi(R+r)\cdot g_t,$$

a qual pode ser reescrita da seguinte maneira:

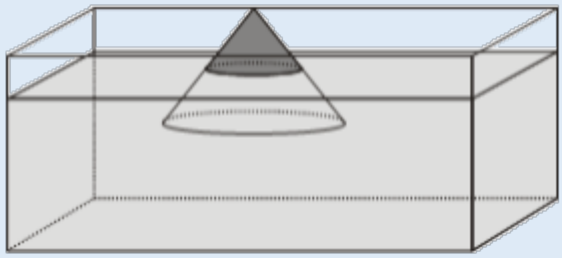
$$A = \frac{(2\pi R + 2\pi r)\cdot g_t}{2}.$$

Perceba que, com base nesta última igualdade, o cálculo da área do setor de coroa circular é análogo ao cálculo da área de um trapézio de base maior $2\pi R$, base menor $2\pi r$ e altura g_t. Isso nos permite memorizar mais facilmente a fórmula da área da superfície lateral de um tronco de cone reto: basta imaginar essa superfície como um trapézio de base maior $\boldsymbol{2\pi R}$, base menor $\boldsymbol{2\pi r}$ e altura $\boldsymbol{g_t}$, e utilizar a conhecida fórmula da área do trapézio.

Para o cálculo da área total, basta fazer:

$$A_{\substack{Total\\ do\,Tronco}} = A_{\substack{Lateral\\ do\,Tronco}} + A_{\substack{Base\\ Menor}} + A_{\substack{Base\\ Maior}}$$

Problema 04: (UERJ 2011) Um sólido com a forma de um cone circular reto, constituído de material homogêneo, flutua em um líquido, conforme a ilustração abaixo.



Se todas as geratrizes desse sólido forem divididas ao meio pelo nível do líquido, a razão entre o volume submerso e o volume do sólido será igual a

A $\frac{1}{2}$.
B $\frac{3}{4}$.
C $\frac{5}{6}$.
D $\frac{7}{8}$.

Solução:

Sejam G e g, respectivamente, as geratrizes do cone maior (sólido completo) e do cone menor (parte do sólido que se encontra fora da água). Uma vez que todas as geratrizes do sólido foram divididas ao meio pelo nível do líquido, temos que

$$\frac{g}{G} = \frac{1}{2}.$$

Consequentemente,

$$\frac{V_{menor}}{V_{maior}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},$$

onde V_{menor} e V_{maior} representam, nessa ordem, os volumes dos cones menor e maior. Assim,

$$V_{menor} = \frac{1}{8}\cdot V_{maior}.$$

Por outro lado, perceba que o volume submerso $V_{submerso}$ é dado por

$$V_{submerso} = V_{maior} - V_{menor}.$$

Portanto,

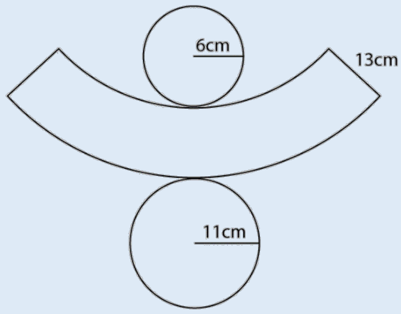
$$V_{submerso} = V_{maior} - \frac{1}{8}\cdot V_{maior} = \left(1-\frac{1}{8}\right)\cdot V_{maior}$$
$$= \frac{7}{8}\cdot V_{maior}.$$

Logo, a razão entre o volume submerso e o volume do sólido é

$$\frac{V_{submerso}}{V_{maior}} = \frac{7}{8}.$$

Resposta: D

Problema 05: (EsPCEx 2010) A figura abaixo representa a planificação de um tronco de cone reto com a indicação das medidas dos raios das circunferências das bases e da geratriz.



A medida da altura desse tronco de cone é

Ⓐ 13 cm.
Ⓑ 12 cm.
Ⓒ 11 cm.
Ⓓ 10 cm.
Ⓔ 9 cm.

Solução:

Sejam r, R, g_t e h_t o raio da base menor, o raio da base maior, a geratriz e a altura do tronco de cone da questão. Pela planificação apresentada, temos que $r = 6\ cm, R = 11\ cm$ e $g_t = 13\ cm$.

Além disso, de acordo com a relação métrica no tronco de cone reto,

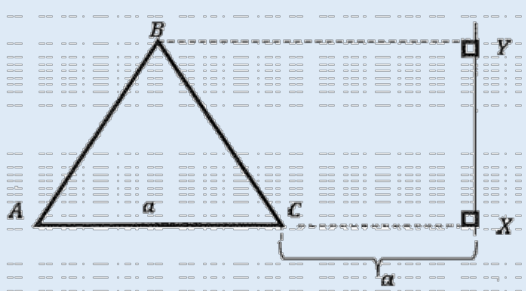
$$h_t = \sqrt{g_t^2 - (R - r)^2}.$$

Logo, a medida da altura desse tronco de cone é, em centímetros,

$$h_t = \sqrt{13^2 - (11 - 6)^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25}$$
$$= \sqrt{144} = 12\ cm.$$

Resposta: B

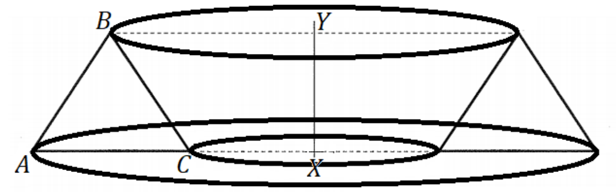
Problema 06: (Escola Naval) A área da superfície de revolução gerada pela rotação do triângulo equilátero ABC em torno do eixo XY na figura abaixo, em unidade de área é



Ⓐ $9\pi a^2$.
Ⓑ $9\sqrt{2}\pi a^2$.
Ⓒ $9\sqrt{3}\pi a^2$.
Ⓓ $6\sqrt{3}\pi a^2$.
Ⓔ $6\sqrt{2}\pi a^2$.

Solução:

Na figura abaixo, é ilustrada a superfície gerada a partir da rotação do triângulo ABC em torno do eixo XY.



Note que essa superfície de revolução é delimitada por três regiões:

Região 1: superfície lateral do tronco de cone de geratriz $g_1 = BC$, raio da base menor $r_1 = XC$ e raio da base maior $R_1 = YB$;
Região 2: superfície lateral do tronco de cone de geratriz $g_2 = AB$, raio da base menor $r_2 = YB$ e raio da base maior $R_2 = XA$;
Região 3: coroa circular de raio menor $r_3 = XC$ e raio maior $R_3 = XA$.

Como ABC é um triângulo equilátero de lado a e XY é a medida de sua altura, temos que

$$XY = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Além disso, pela figura dada, $XC = a$, $XA = 2a$ e

$$YB = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}.$$

Portanto, a área da região 1 é dada por

$$A_1 = \pi(R_1 + r_1) \cdot g_1 = \pi(YB + XC) \cdot BC$$
$$= \pi\left(\frac{3a}{2} + a\right) \cdot a = \frac{5\pi a^2}{2}.$$

De modo similar, a área da região 2 é

$$A_2 = \pi(R_2 + r_2) \cdot g_2 = \pi(XA + YB) \cdot AB$$
$$= \pi\left(2a + \frac{3a}{2}\right) \cdot a = \frac{7\pi a^2}{2}.$$

Por fim, a área da região 3 é

$$A_3 = \pi(R_3^2 - r_3^2) = \pi(XA^2 - XC^2) = \pi[(2a)^2 - a^2]$$
$$= \pi(4a^2 - a^2) = 3\pi a^2.$$

Uma vez que a área da superfície de revolução gerada pela rotação do triângulo ABC em torno do eixo XY é a soma das áreas das regiões 1, 2 e 3, isto é,

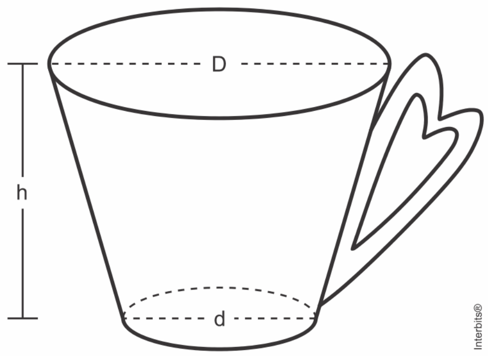
$$A_{superfície} = A_1 + A_2 + A_3,$$

concluímos que, em unidade de área,

$$A_{superfície} = \frac{5\pi a^2}{2} + \frac{7\pi a^2}{2} + 3\pi a^2 = \frac{12\pi a^2}{2} + 3\pi a^2$$
$$= 6\pi a^2 + 3\pi a^2 = 9\pi a^2.$$

Resposta: A

Problema 07: (ENEM 2021) Uma pessoa comprou uma caneca para tomar sopa, conforme ilustração.



Sabe-se que 1 cm³ = 1 mL e que o topo da caneca é uma circunferência de diâmetro (D) medindo 10 cm, e a base é um círculo de diâmetro (d) medindo 8 cm. Além disso, sabe-se que a altura (h) dessa caneca mede 12 cm (distância entre o centro das circunferências do topo e da base).
Utilize 3 como aproximação para π.

Qual é a capacidade volumétrica, em mililitro, dessa caneca?

A 216.
B 408.
C 732.
D 2196.
E 2928.

Solução:

Sejam R e r, respectivamente, os raios das bases maior e menor da caneca. Temos que

$$R = \frac{D}{2} = \frac{10}{2} = 5\,cm \;\; e \;\; r = \frac{d}{2} = \frac{8}{2} = 4\,cm.$$

Como a caneca possui formato de um tronco de cone, seu volume é dado por

$$V = \frac{\pi h}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2).$$

Logo,

$$V = \frac{12\pi}{3} \cdot (5^2 + 5 \cdot 4 + 4^2) \approx \frac{12 \cdot 3}{3} \cdot (25 + 20 + 16)$$
$$= 12 \cdot 61 = 732\,cm^3.$$

Visto que 1 cm³ = 1mL, concluímos que a capacidade volumétrica da caneca é de 732 mL.

Resposta: C

Hora de Praticar

Questão 01

(Ronaebson)

Uma casquinha de sorvete tem a forma de um cone circular reto cujas dimensões internas são:

- Altura: 16 cm;
- Raio da base: 4cm.

Uma bola de sorvete é colocada dentro da casquinha e, como a pessoa não tomou logo, ela derreteu de modo que a altura do líquido dentro do cone ficou na metade da altura da casquinha.

O raio da bola de sorvete colocada dentro da casquinha era igual a

A 1 cm.
B 2 cm.
C 3 cm.
D 4 cm.
E 6 cm.

Questão 02

(Ronaebson)

Vanessa vende *cones trufados* para ajudar no orçamento familiar. As trufas têm o formato de cone circular reto cujo raio da base mede 2 cm e altura mede 8 cm. O custo para a produção de uma única trufa dessas é de R$ 1,00 e esse custo é proporcional a quantidade de material utilizado, ou seja, ao volume da trufa, além disso, ela sempre vende as trufas por R$ 3,00 a unidade.

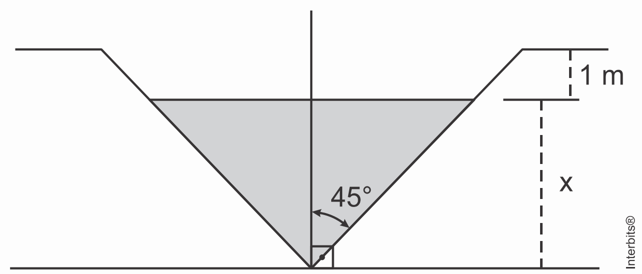
Para tentar atrair mais clientes e dar a impressão que seu cone trufado ficou bem maior, ela decidir aumentar em 30% a altura de cada cone, em contrapartida, diminui 10% no valor do raio da base.
Decidindo não alterar o preço de venda de cada um desses cones trufados, Vanessa previu que a cada 10 dessas trufas vendidas, seu lucro, em relação à situação anterior às alterações feitas,

A diminuiria R$ 0,53.
B diminuiria R$ 1,70.
C diminuiria R$ 3,00.
D aumentaria R$ 0,19.
E aumentaria R$ 1,90.

Questão 03

(UERJ)

Um depósito de óleo tem a forma de um cone circular reto cujo eixo vertical forma com suas geratrizes o ângulo de 45º. Foram retirados desse depósito 19 m^3 de óleo. Com isso, a altura do nível de óleo foi reduzida em 1m e passou a ter *x* metros de altura.



Considerando $\pi = 3$, a altura x do nível de óleo é igual a

- **A** 1 m.
- **B** 2 m.
- **C** 3 m.
- **D** 4 m.
- **E** 5 m.

Questão 04

(Ronaebson)

Com o objetivo de fazer pequenos bolos para que seus filhos levem como lanche para escola, dona Izabel comprou miniformas de bolo como descritas na imagem.

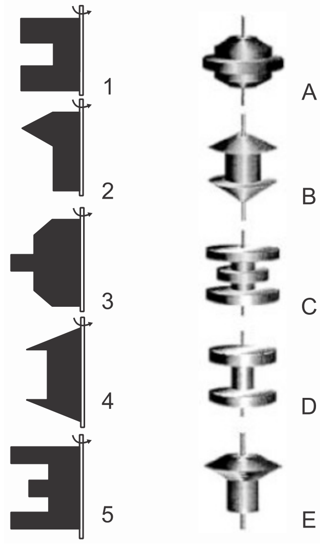
A forma geométrica dos sólidos representados na imagem acima é a de um

- **A** cone.
- **B** cubo.
- **C** cilindro.
- **D** tronco de pirâmide.
- **E** tronco de cone.

Questão 05

(ENEM)

Assim como na relação entre o perfil de um corte de um torno e a peça torneada, sólidos de revolução resultam da rotação de figuras planas em torno de um eixo. Girando-se as figuras a seguir em torno da haste indicada obtém-se os sólidos de revolução que estão na coluna da direita.



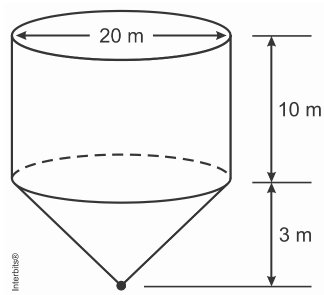
A correspondência correta entre as figuras planas e os sólidos de revolução obtidos é:

- **A** 1A, 2B, 3C, 4D, 5E.
- **B** 1B, 2C, 3D, 4E, 5A.
- **C** 1B, 2D, 3E, 4A, 5C.
- **D** 1D, 2E, 3A, 4B, 5C.
- **E** 1D, 2E, 3B, 4C, 5A.

Questão 06

(IFPE)

Um silo para armazenamento de cereais é formado pela junção de um cilindro e um cone com o mesmo raio da base e dimensões internas indicadas na figura a seguir. Determine quantos metros cúbicos de cereais podem ser armazenados neste silo. (Adote $\pi = 3{,}14$).

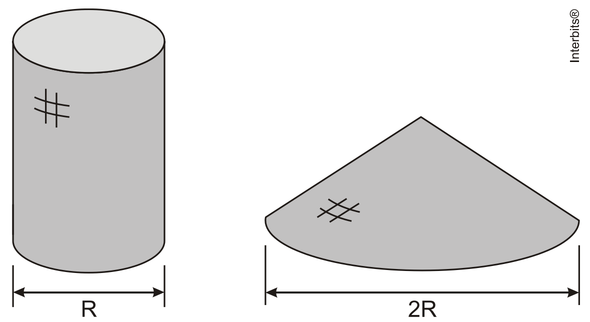


- **A** 3.140
- **B** 3.346
- **C** 3.454
- **D** 3.512
- **E** 3.816

Questão 07

(UNICAMP)

Depois de encher de areia um molde cilíndrico, uma criança virou-o sobre uma superfície horizontal. Após a retirada do molde, a areia escorreu, formando um cone cuja base tinha raio igual ao dobro do raio da base do cilindro.



A altura do cone formado pela areia era igual a

A) $\frac{3}{4}$ da altura do cilindro.

B) $\frac{1}{2}$ da altura do cilindro.

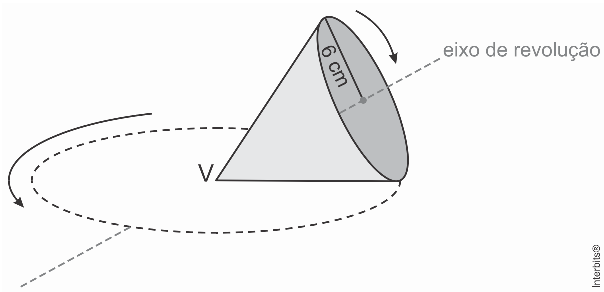
C) $\frac{2}{3}$ da altura do cilindro

D) $\frac{1}{3}$ da altura do cilindro.

Questão 08

(UNESP_2017)

Um cone circular reto, de vértice V e raio da base igual a 6cm, encontra-se apoiado em uma superfície plana e horizontal sobre uma geratriz. O cone gira sob seu eixo de revolução que passa por V, deslocando-se sobre a superfície plana horizontal, sem escorregar, conforme mostra a figura.



O cone retorna à posição inicial após o círculo da sua base ter efetuado duas voltas completas de giro. Considerando que o volume de um cone é calculado pela fórmula $\pi r^2 h/3$, o volume do cone da figura, em cm^3, é igual a

A) $72\sqrt{3}\pi$
B) $48\sqrt{3}\pi$
C) $36\sqrt{3}\pi$
D) $18\sqrt{3}\pi$
E) $12\sqrt{3}\pi$

Questão 09

(UNESP)

Prato da culinária japonesa, o temaki é um tipo de sushi na forma de cone, enrolado externamente com nori, uma espécie de folha feita a partir de algas marinhas, e recheado com arroz, peixe cru, ovas de peixe, vegetais e uma pasta de maionese e cebolinha.

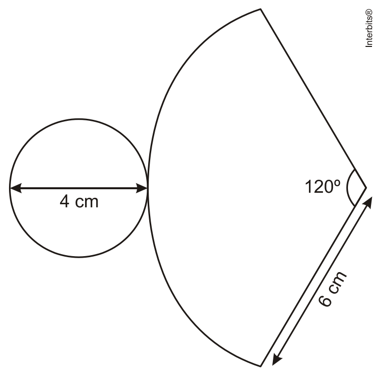
Um temaki típico pode ser representado matematicamente por um cone circular reto em que o diâmetro da base mede 8 cm e a altura 10 cm. Sabendo-se que, em um temaki típico de salmão, o peixe corresponde a 90% da massa do seu recheio, que a densidade do salmão é de 0,35g/cm^3 , e tomando $\pi = 3$, a quantidade aproximada de salmão, em gramas, nesse temaki, é de

A) 46.
B) 58.
C) 54.
D) 50.
E) 62.

Questão 10

(PUCRS)

Um desafio matemático construído pelos alunos do Curso de Matemática tem as peças no formato de um cone. A figura abaixo representa a planificação de uma das peças construídas.



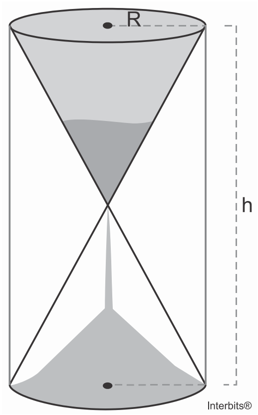
A área dessa peça é de ______ cm^2.

A) 10 π
B) 16 π
C) 20 π
D) 28 π
E) 40 π

Questão 11

(UCS)

Uma ampulheta tem a forma de dois cones circulares retos idênticos (mesmo raio e mesma altura) no interior de um cilindro circular reto, conforme mostra a figura.



O volume da parte do cilindro sem os dois cones é igual ___________ soma dos volumes desses cones. Assinale a alternativa que preenche corretamente a lacuna acima.

Ⓐ à
Ⓑ ao dobro da
Ⓒ à metade da
Ⓓ a um terço da
Ⓔ a dois terços da

Questão 12

(Mackenzie_2018)

Se um cone reto tem altura igual a 12 cm e seu volume é $64\pi cm^3$, então sua geratriz, em mede

Ⓐ 20
Ⓑ $10\sqrt{2}$
Ⓒ $4\sqrt{10}$
Ⓓ $4\sqrt{2}$
Ⓔ $2\sqrt{10}$

Questão 13

(IFAL_2018)

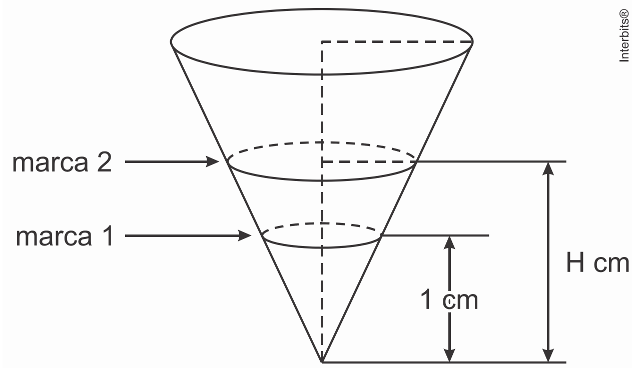
Certo tanque de combustível tem o formato de um cone invertido com profundidade de 5 metros e com raio máximo de 4 metros. Quantos litros de combustível cabem, aproximadamente, nesse tanque?
Considere $\pi = 3{,}14$.

Ⓐ 20.000 l
Ⓑ 50.240 l
Ⓒ 83.733,33 l
Ⓓ 104.666,67 l
Ⓔ 150.000 l

Questão 14

(UFU_2017)

Um recipiente cônico utilizado em experiências de química deve ter duas marcas horizontais circulares, uma situada a 1 centímetro do vértice do cone, marcando um certo volume V, e outra marcando o dobro deste volume, situada a H centímetros do vértice, conforme figura.



Nestas condições, a distância H, em centímetros, é igual a:

Ⓐ $\sqrt[3]{2}$
Ⓑ $\sqrt{3}$
Ⓒ $^4/_3$
Ⓓ $^3/_2$

Questão 15

(Fuvest_2017)

Um reservatório de água tem o formato de um cone circular reto. O diâmetro de sua base (que está apoiada sobre o chão horizontal) é igual a 8m. Sua altura é igual a 12 m. A partir de um instante em que o reservatório está completamente vazio, inicia-se seu enchimento com água a uma vazão constante de 500 litros por minuto.

O tempo gasto para que o nível de água atinja metade da altura do reservatório é de, aproximadamente,

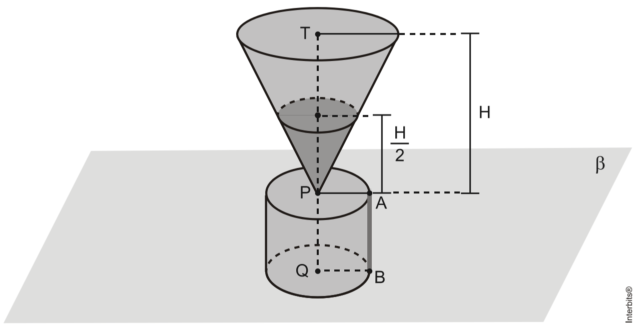
Dados:
- π é aproximadamente 3,14.
- O volume V do cone circular reto de altura h e raio da base r é $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

Ⓐ 4 horas e 50 minutos.
Ⓑ 5 horas e 20 minutos.
Ⓒ 5 horas e 50 minutos.
Ⓓ 6 horas e 20 minutos.
Ⓔ 6 horas e 50 minutos.

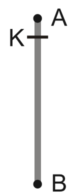
Questão 16

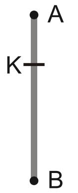
(UERJ)

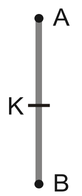
Um funil, com a forma de cone circular reto, é utilizado na passagem de óleo para um recipiente com a forma de cilindro circular reto. O funil e o recipiente possuem a mesma capacidade.
De acordo com o esquema, os eixos dos recipientes estão contidos no segmento TQ, perpendicular ao plano horizontal β.

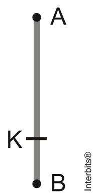


Admita que o funil esteja completamente cheio do óleo a ser escoado para o recipiente cilíndrico vazio. Durante o escoamento, quando o nível do óleo estiver exatamente na metade da altura do funil, $\frac{H}{2}$, o nível do óleo no recipiente cilíndrico corresponderá ao ponto K na geratriz AB.
A posição de K, nessa geratriz, é melhor representada por:

A 

B 

C 

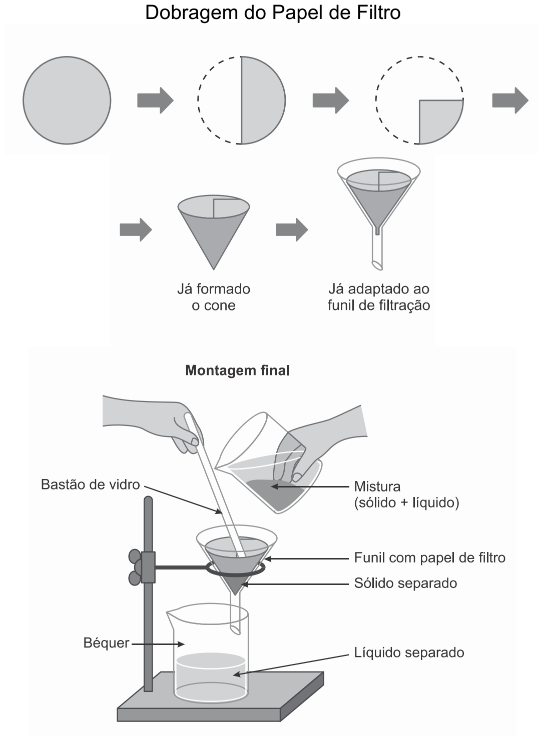
D 

Questão 17

(FCMMG)

Em um experimento de laboratório, foi realizada uma filtragem simples, com auxílio de um funil e de um papel de filtro circular, conforme representado na figura. Durante o processo, a mistura de sólido com líquido, de aproximadamente 270 cm^3, foi imediatamente despejada até a altura máxima do funil coberta pelo papel de filtro, formando um cone de 18 cm de diâmetro.

Dobragem do Papel de Filtro



(Fonte: http://qesenaima.blogspot.com.br/2014/01/separac

A área A em cm^2, do filtro de papel utilizado no procedimento é, aproximadamente:

A $A = 81\pi$
B $A = 181\pi$
C $A = \frac{100}{\pi}$
D $A = 81\pi + \frac{100}{\pi}$

Questão 18

(UECE_2017)

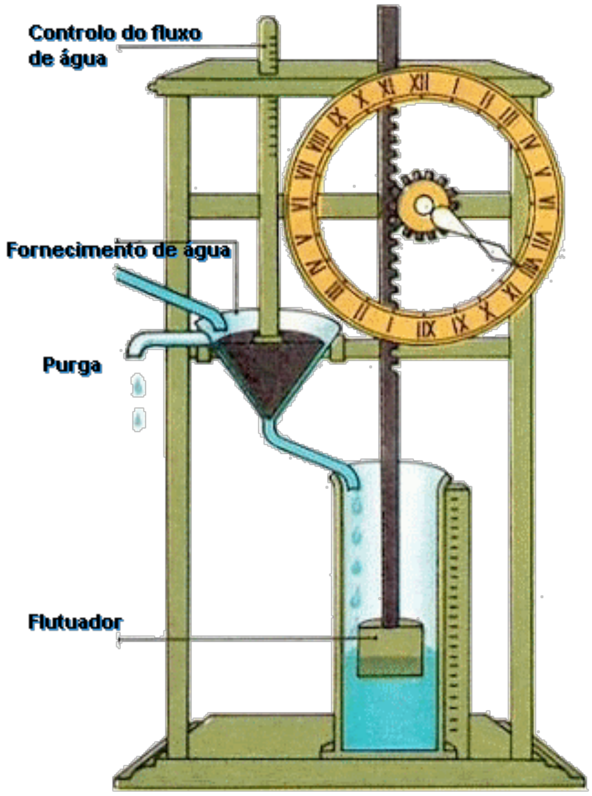
O volume de uma tradicional casquinha de sorvete, com formato de um cone, feito a partir de um setor circular de 12cm de raio e ângulo central de 120°, em cm^3, é igual a

A $\frac{128\sqrt{2}\pi}{3}$
B $\frac{64\sqrt{3}\pi}{3}$
C $\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$
D $\frac{128\sqrt{3}\pi}{3}$

Questão 19

(UFF)

Desde a Antigüidade, a humanidade tem inventado vários mecanismos para medir o tempo. Clepsidras são relógios movidos a água, que funcionam por gravidade, no mesmo princípio da ampulheta de areia. Apesar dos vários modelos e estruturas, o princípio básico é a transferência de água de um recipiente para outro. A figura ao lado ilustra uma clepsidra romana que emprega um cone circular reto e um cilindro circular reto.



Sabendo-se que o cone e o cilindro possuem bases circulares congruentes e que o volume do cilindro é dez vezes o volume do cone, a razão entre a altura do cilindro e a altura do cone é igual a

A) 30.
B) 10.
C) 10/3.
D) 3.
E) 1/3.

Questão 20

(ACAFE_2017)

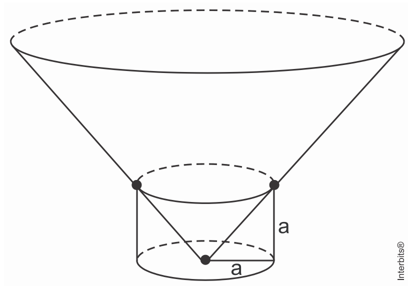
Um cone de revolução tem altura 8cm e está circunscrito a uma esfera de raio igual a 2cm. A razão entre o volume da esfera e o volume do cone igual a

A) $^1/_4$
B) $^1/_8$
C) $^1/_2$
D) 2

Questão 21

(PUCRS)

Uma casquinha de sorvete na forma de cone foi colocada em um suporte com formato de um cilindro, cujo raio da base e a altura medem “a” cm, conforme a figura.



O volume da parte da casquinha que está no interior do cilindro, em cm^3, é

A) $\frac{\pi a^2}{2}$
B) $\frac{\pi a^2}{3}$
C) $\frac{\pi a^3}{2}$
D) $\frac{\pi a^3}{3}$
E) $\frac{\pi a^3}{6}$

Questão 22

(UEMG)

Um reservatório de água, de formato cônico, com raio da tampa circular igual a 8 metros e altura igual a 9 metros, será substituído por outro de forma cúbica, de aresta igual a 10 metros.
Estando o reservatório cônico completamente cheio, ao se transferir a água para o reservatório cúbico, a altura do nível atingida pela água será de (considere $\pi \cong 3$).

A) 5,76m.
B) 4,43m.
C) 6,38m.
D) 8,74m.

Questão 23

(UPE-SSA_2017)

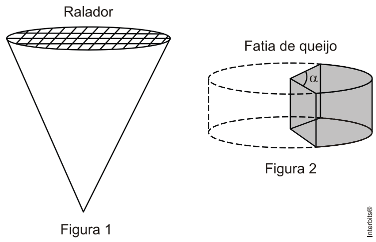
Um cone reto está inscrito num cubo de aresta 8 cm. Se a altura do cone e o diâmetro de sua base têm medidas iguais, qual a diferença entre as medidas dos seus volumes? Considere $\pi = 3$.

A) 128 cm^3
B) 256 cm^3
C) 384 cm^3
D) 424 cm^3
E) 512 cm^3

Questão 24

(FGV)

Um ralador de queijo tem a forma de cone circular reto de raio da base 4cm e altura 10 cm. O queijo é ralado na base do cone e fica acumulado em seu interior (figura 1). Deseja-se retirar uma fatia de um queijo com a forma de cilindro circular reto de raio da base 8 cm e altura 6 cm, obtida por dois cortes perpendiculares à base, partindo do centro da base do queijo e formando um ângulo α (figura 2), de forma que o volume de queijo dessa fatia corresponda a 90% do volume do ralador.



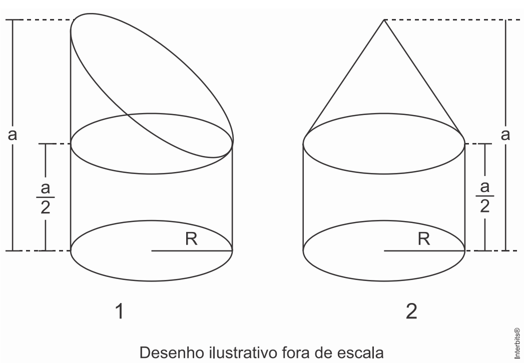
Nas condições do problema, α é igual a

A 45°.
B 50°.
C 55°.
D 60°.
E 65°.

Questão 25

(EXPECEX-AMAN)

O valor da altura de um cilindro reto de raio R, cujo volume é a soma dos volumes dos sólidos 1 e 2 é



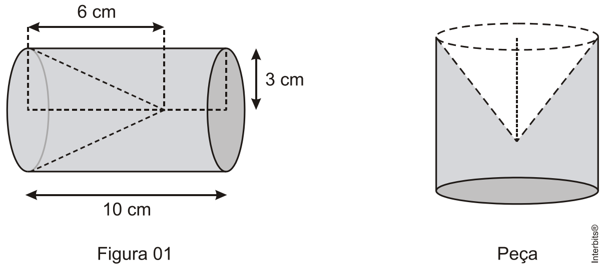
A $^{13a}/_{12}$
B $^{7a}/_{6}$
C $^{5a}/_{4}$
D $^{4a}/_{3}$
E $^{17a}/_{12}$

Questão 26

(UPE)

Um torneiro mecânico construiu uma peça retirando, de um cilindro metálico maciço, uma forma cônica, de acordo com a figura 01 a seguir:

Considere $\pi \cong 3$.



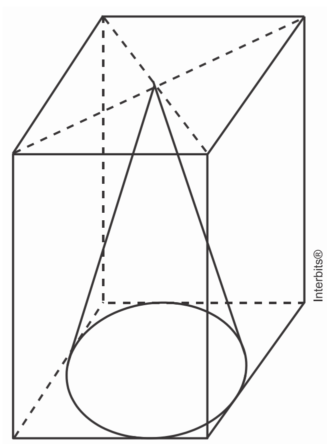
Qual é o volume aproximado da peça em milímetros cúbicos?

A $2{,}16 \cdot 10^5$
B $7{,}2 \cdot 10^4$
C $2{,}8 \cdot 10^5$
D $8{,}32 \cdot 10^4$
E $3{,}14 \cdot 10^5$

Questão 27

(PUCRS)

Um cone está inscrito em um paralelepípedo, como na figura. A altura do paralelepípedo é o dobro do lado da base quadrada, de área $400cm^2$. Então, a razão entre o volume do cone e o do paralelepípedo é

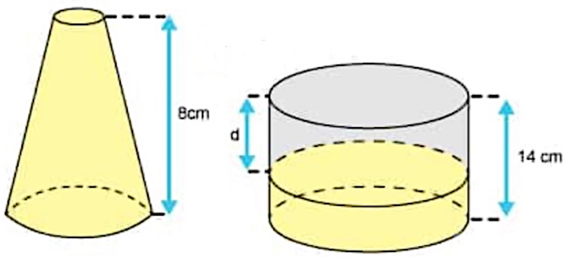


A 16000
B $\frac{4000}{3\pi}$
C $\frac{12}{\pi}$
D $\frac{\pi}{12}$
E $\frac{\pi}{36}$

Questão 28

(Mackenzie)

Um frasco de perfume que tem a forma de um tronco de cone circular reto de raios 1cm e 3cm, está totalmente cheio. Seu conteúdo é despejado em um recipiente que tem a forma de um cilindro circular reto de raio 4cm, como mostrado na figura.



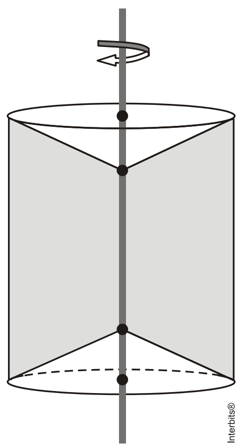
Se d é a altura da parte não preenchida do recipiente cilíndrico e, adotando-se $\pi = 3$, o valor de d é

- **A** 10/6
- **B** 11/6
- **C** 16/6
- **D** 13/6
- **E** 15/6

Questão 29

(UEMG)

Uma empresa deseja fabricar uma peça maciça cujo formato é um sólido de revolução obtido pela rotação de um trapézio isósceles em torno da base menor, como mostra a figura a seguir. As dimensões do trapézio são: base maior igual a 15 cm, base menor igual a 7 cm e altura do trapézio igual a 3 cm.



Considerando-se $\pi = 3$, o volume, em litros, da peça fabricada corresponde a

- **A** 0,212
- **B** 0,333
- **C** 0,478
- **D** 0,536

Questão 30

(UFRGS)

Em uma caixa, há sólidos geométricos, todos de mesma altura: cubos, cilindros, pirâmides quadrangulares regulares e cones. Sabe-se que as arestas da base dos cubos e das pirâmides têm a mesma medida; que o raio da base dos cones e dos cilindros tem a mesma medida. Somando o volume de 2 cubos e de 2 cilindros, obtêm-se $180cm^3$. A soma dos volumes de 3 cubos e 1 cone resulta em $110cm^3$, e a soma dos volumes de 2 cilindros e 3 pirâmides resulta em $150cm^3$.

O valor da soma dos volumes, em cm^3, de um cubo, um cilindro, dois cones e duas pirâmides é

- **A** 150.
- **B** 160.
- **C** 190.
- **D** 210.
- **E** 240.

Questão 31

(Ronaebson)

Um copo de papel descartável (sem tampa) tem a forma de tronco de cone circular reto e de bases paralelas, cujo raio da base menor (fundo do copo) é igual a 3 cm, o raio da base maior (boca do copo) é igual a 4 cm e a altura do copo é igual $4\sqrt{5}\ cm$.

Considerando $\pi = 3$, a área do papel usado para confecção desse copo é igual a

- **A** 189 cm^2.
- **B** 216 cm^2.
- **C** 264 cm^2.
- **D** 292 cm^2.
- **E** 304 cm^2.

Questão 32

(ACAFE_2017)

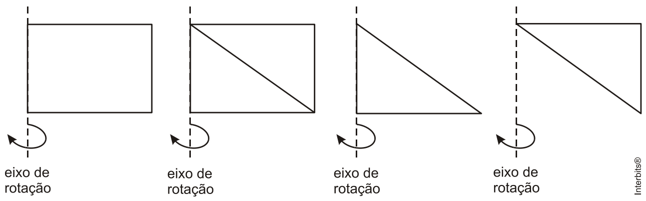
Com uma chapa de um certo material na forma de um setor circular de ângulo central igual a $\pi/4$ radianos e raio igual a 5 dm, constrói-se um cone circular de volume V. Diminuindo-se em 20% o valor do raio e mantendo-se o mesmo ângulo central, a capacidade do novo cone diminui:

- **A** entre 49% e 50%.
- **B** Entre 48% e 49%.
- **C** entre 50% e 51%.
- **D** Entre 51% e 52%.

Questão 33

(CFTMG)

Um aluno gira um retângulo em torno do eixo que contém um de seus lados e calcula o volume V do sólido obtido. Depois, ele traça a diagonal do retângulo e o separa em dois triângulos, como mostra a figura.



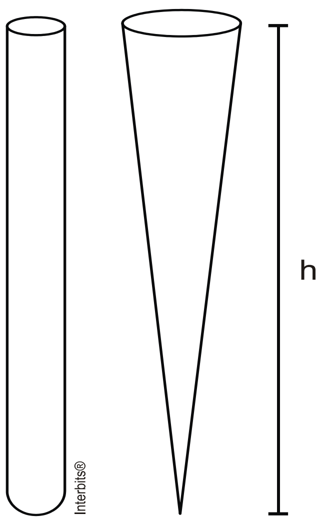
Ao girar cada um dos triângulos, em torno do mesmo eixo de rotação, os volumes dos sólidos obtidos são

A $\frac{1}{3}V$ e $\frac{2}{3}V$
B $\frac{1}{4}V$ e $\frac{3}{4}V$
C $\frac{1}{5}V$ e $\frac{4}{5}V$
D $\frac{1}{6}V$ e $\frac{5}{6}V$

Questão 34

(UFPR)

Num laboratório há dois tipos de recipientes, conforme a figura abaixo. O primeiro, chamado de “tubo de ensaio”, possui internamente o formato de um cilindro circular reto e fundo semiesférico. O segundo, chamado de “cone de Imhoff”, possui internamente o formato de um cone circular reto.



a) Sabendo que o volume de um cone de Imhoff, com raio da base igual a 2 cm, é de 60 ml, calcule a altura h desse cone.

b) Calcule o volume (em mililitros) do tubo de ensaio com raio da base medindo 1 cm e que possui a mesma altura h do cone de Imhoff.

Questão 35

(Mackenzie)

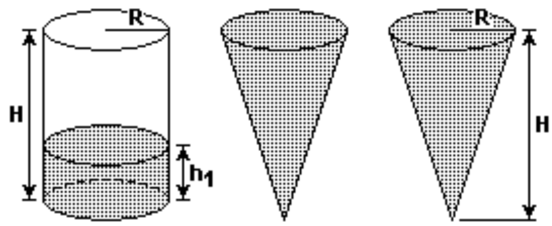
Em um triângulo retângulo, a medida do menor cateto é 6 cm. Rotacionando esse triângulo ao redor desse cateto, obtém-se um sólido de revolução, cujo volume é $128\pi cm^3$. Nessas condições, a área total da superfície do sólido obtido na revolução, em cm^2, é

A 144 π
B 120 π
C 80 π
D 72 π
E 64 π

Questão 36

(UFLA)

Parte do líquido de um cilindro completamente cheio é transferido para dois cones idênticos, que ficam totalmente cheios.



A relação entre as alturas do líquido restante no cilindro (h1) e a altura (H) do cilindro é:

A $h_1 = \frac{H}{4}$
B $h_1 = \frac{H}{2}$
C $h_1 = \sqrt{(\frac{H}{2})}$
D $h_1 = \frac{H}{3}$

Questão 37

(UNIFOR)

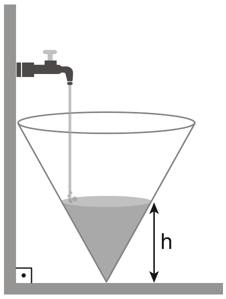
Parte do líquido de um cilindro circular reto que está cheio é transferido para dois cones circulares retos idênticos de mesmo raio e mesma altura do cilindro. Sabendo-se que os cones ficaram totalmente cheios e que o nível da água que ficou no cilindro é de 3 m, a altura do cilindro é de:

A 5 m
B 6 m
C 8 m
D 9 m
E 12 m

Questão 38

(UERJ)

Um recipiente com a forma de um cone circular reto de eixo vertical recebe água na razão constante de 1 cm^3/s. A altura do cone mede 24 cm, e o raio de sua base mede 3 cm.
Conforme ilustra a imagem, a altura h do nível da água no recipiente varia em função do tempo t em que a torneira fica aberta. A medida de h corresponde à distância entre o vértice do cone e a superfície livre do líquido.



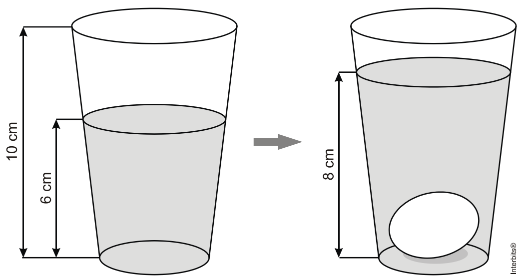
Admitindo $\pi \cong 3$, a equação que relaciona a altura h, em centímetros, e o tempo t, em segundos, é representada por:

- **A** $h = 4\sqrt[3]{t}$
- **B** $h = 2\sqrt[3]{t}$
- **C** $h = 2\sqrt{t}$
- **D** $h = 4\sqrt{t}$

Questão 39

(CEFETMG)

Após mergulhar um ovo em um copo de água de bases (inferior e superior) circulares de diâmetros 4,8 cm e 7,2 cm, respectivamente, um estudante registrou uma elevação no nível de água de 6 cm para 8 cm, tal como mostra a figura seguinte.



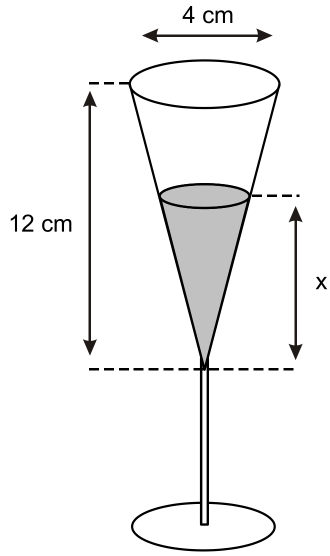
Considerando $\pi = 3$, o volume aproximado do ovo, em cm^3, encontra-se no intervalo

- **A** [0,25[
- **B** [25,50[
- **C** [50,75[
- **D** [75,100[
- **E** [100,125[

Questão 40

(UFPR)

A parte superior de uma taça tem o formato de um cone, com as dimensões indicadas na figura.



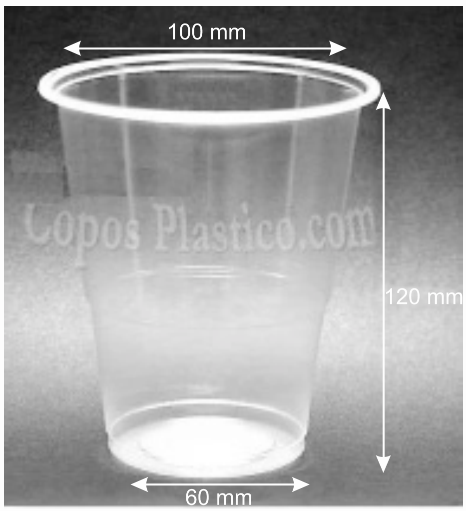
a) Qual o volume de líquido que essa taça comporta quando está completamente cheia?

b) Obtenha uma expressão para o volume V de líquido nessa taça, em função da altura x indicada na figura.

Questão 41

(IFSC)

Suponha que o copo representado na figura abaixo tenha sido utilizado na Oktoberfest para servir chopp. Considerando que $\pi = 3$ é CORRETO afirmar que a capacidade total, em mL, desse copo é



- **A** Maior que 600 mL.
- **B** entre 300 mL e 400 mL.
- **C** maior que meio litro e menor que 0,6 L.
- **D** entre 200 mL e 300 mL.
- **E** menor que 200 mL.

Questão 42

(ESPECEX)

Um recipiente em forma de cone circular reto, com raio da base R e altura h, está completamente cheio com água e óleo. Sabe-se que a superfície de contato entre os líquidos está inicialmente na metade da altura do cone. O recipiente dispõe de uma torneira que permite escoar os líquidos de seu interior, conforme indicado na figura. Se essa torneira for aberta, exatamente até o instante em que toda água e nenhum óleo escoar, a altura do nível do óleo, medida a partir do vértice será

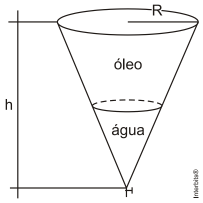


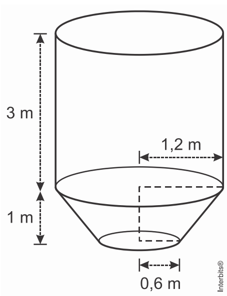
Figura fora de escala

Ⓐ $\frac{\sqrt[3]{7}}{2}h$
Ⓑ $\frac{\sqrt[3]{7}}{3}h$
Ⓒ $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}h$
Ⓓ $\frac{\sqrt[3]{23}}{2}h$
Ⓔ $\frac{\sqrt[3]{23}}{3}h$

Questão 43

(UFP)

Um reservatório de água tem formato de um cilindro circular reto de 3 m de altura e base com 1,2 m de raio, seguido de um tronco de cone reto cujas bases são círculos paralelos, de raios medindo 1,2 m e 0,6 m respectivamente, e altura 1 m, como representado na figura a seguir.



Nesse reservatório, há um vazamento que desperdiça 1/3 do seu volume por semana.
Considerando a aproximação $\pi \cong 3$ e sabendo que $1dcm^3 = 1\,l$, esse vazamento é de:

Ⓐ 4.320 litros
Ⓑ 15,48 litros
Ⓒ 15.480 litros
Ⓓ 12.960 litros
Ⓔ 5.160 litros

Questão 44

(INSPER)

No filme “Enrolados”, os estúdios Disney recriaram a torre onde vivia a famosa personagem dos contos de fadas Rapunzel (figura 1). Nesta recriação, podemos aproximar o sólido onde se apoiava a sua morada por um cilindro circular reto conectado a um tronco de cone, com as dimensões indicadas na figura 2, feita fora de escala.

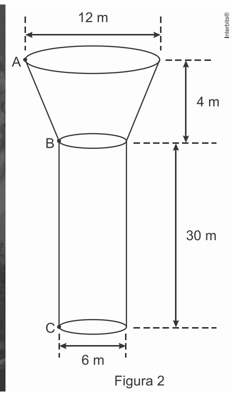


Figura 2

Para que o príncipe subisse até a torre, Rapunzel lançava suas longas tranças para baixo. Nesta operação, suponha que uma das extremidades da trança ficasse no ponto A e a outra no ponto C, onde se encontrava o rapaz.
Considerando que a trança ficasse esticada e perfeitamente sobreposta à linha poligonal formada pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, destacada em linha grossa na figura 2, o comprimento da trança de Rapunzel, em metros, é igual a

Ⓐ 35
Ⓑ 38
Ⓒ 40
Ⓓ 42
Ⓔ 45

Questão 45

(INSPER)

O rótulo de uma embalagem de suco concentrado sugere que o mesmo seja preparado na proporção de sete partes de água para uma parte de suco, em volume. Carlos decidiu preparar um copo desse suco, mas dispõe apenas de copos cônicos, mais precisamente na forma de cones circulares retos. Para seguir exatamente as instruções do rótulo, ele deve acrescentar no copo, inicialmente vazio, uma quantidade de suco até

Ⓐ metade da altura.
Ⓑ um sétimo de altura.
Ⓒ um oitavo da altura.
Ⓓ seis sétimos da altura.
Ⓔ sete oitavos da altura.

Questão 46

(UNIFOR)

Um depósito cheio de combustível tem a forma de um cone circular reto. O combustível deve ser transportado por um único caminhão no qual o tanque transportador tem a forma de um cilindro circular reto, cujo raio da base mede metade do raio da base do depósito e altura 1/3 da altura do depósito. Quantas viagens o caminhão deverá fazer para esvaziar completamente o depósito, se para cada viagem a capacidade do tanque é preenchida?

A 2
B 3
C 4
D 5
E 6

Questão 47

(PUCSP_2018)

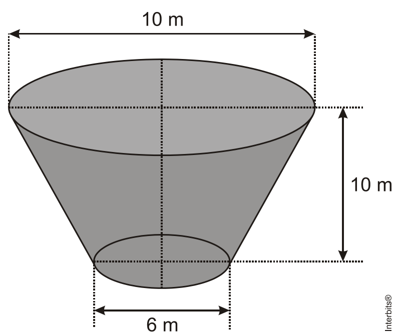
Considere um cilindro reto de área lateral igual a $64\pi\ cm^2$ e um cone reto, com volume igual a $128\pi\ cm^3$, cujo raio da base é o dobro do raio da base do cilindro.
Sabendo que a altura do cone é $2\ cm$ menor do que a altura do cilindro, e que a altura do cilindro é um número inteiro, a área lateral desse cone é

A $100\pi\ cm^2$.
B $80\pi\ cm^2$.
C $64\pi\ cm^2$.
D $40\pi\ cm^2$.

Questão 48

(Escola Naval)

A Marinha do Brasil comprou um reservatório para armazenar combustível com o formato de um tronco de cone conforme figura abaixo. Qual é a capacidade em litros desse reservatório?



A $\frac{40}{3}10^2\pi$
B $\frac{19}{2}10^5\pi$
C $\frac{49}{3}10\pi$
D $\frac{49}{3}10^4\pi$
E $\frac{19}{3}10^3\pi$

Questão 49

(PUCCAMP)

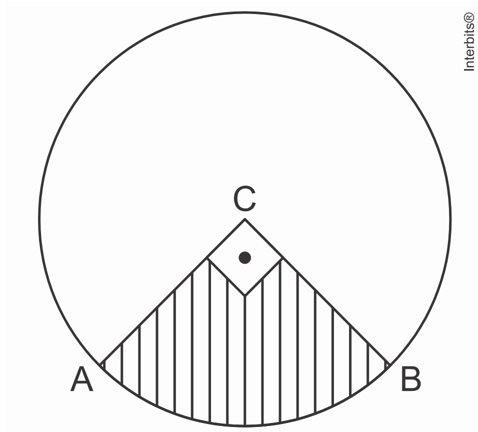
Considere dois troncos de pirâmides retas exatamente iguais. A base maior é um quadrado de lado igual a 2 metros, a base menor um quadrado de lado igual a 1 metro, e a distância entre as bases igual a 1 metro. Um monumento foi construído justapondo-se esses dois troncos nas bases menores, apoiando-se em um piso plano por meio de uma das bases maiores, formando um sólido. Desta maneira, a medida da área da superfície exposta do monumento é, em m^2, igual a

A $4 + 6\sqrt{5}$
B 8
C $12\sqrt{2} + 4$
D $\frac{16}{3}$
E $12\sqrt{2} - 8$

Questão 50

(ESPCEX-AMAN_2017)

Corta-se de uma circunferência de raio 4 cm um setor circular de ângulo $\frac{\pi}{2}$ rad (ver desenho ilustrativo), onde o ponto C é o centro da circunferência. Um cone circular reto é construído a partir desse setor circular ao se juntar os raios CA e CB.



desenho ilustrativo – fora de escala

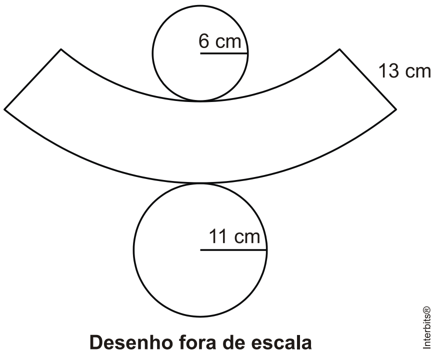
O volume desse cone, em cm^3 é igual a

A $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$
B $\frac{\sqrt{3}}{5}\pi$
C $\frac{\sqrt{15}}{3}\pi$
D $\frac{\sqrt{15}}{5}\pi$
E $\frac{\sqrt{5}}{3}\pi$

Questão 51

(ESPCEX)

A figura abaixo representa a planificação de um tronco de cone reto com a indicação das medidas dos raios das circunferências das bases e da geratriz. A medida da altura desse tronco de cone é



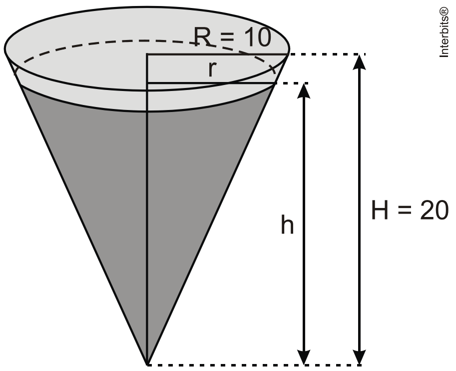
Desenho fora de escala

- **A** 13 cm
- **B** 12 cm
- **C** 11 cm
- **D** 10 cm
- **E** 9 cm

Questão 52

(UFG)

Um cone circular reto de madeira, homogêneo, com 20 cm de altura e 20 cm de diâmetro da base, flutua livremente na água parada em um recipiente, de maneira que o eixo do cone fica vertical e o vértice aponta para baixo, como representado na figura a seguir.



Denotando-se por h a profundidade do vértice do cone, relativa à superfície da água, por r o raio do círculo formado pelo contato da superfície da água com o cone e sabendo-se que as densidades da água e da madeira são 1,0 g/cm^3 e 0,6 g/cm^3, respectivamente, os valores de r e h, em centímetros, são, aproximadamente:

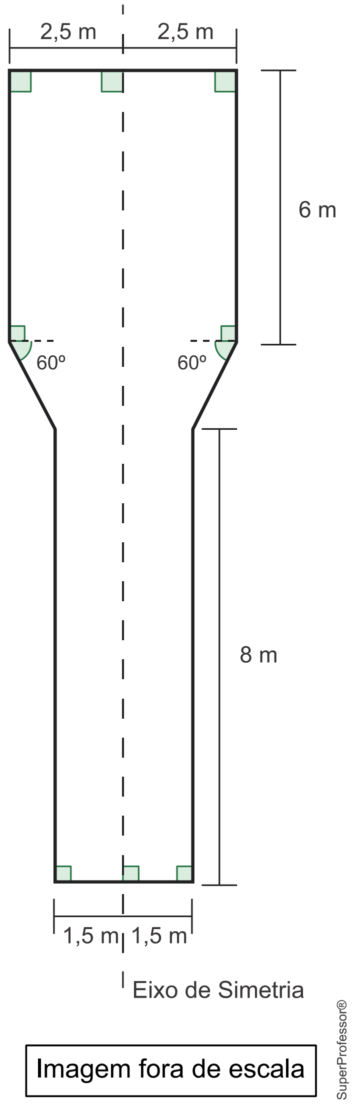
Dados: $\sqrt[3]{3} \cong 1{,}44$, $\sqrt[3]{5} \cong 1{,}71$

- **A** 5,8 e 11,6
- **B** 8,2 e 18,0
- **C** 8,4 e 16,8
- **D** 8,9 e 15,0
- **E** 9,0 e 18,0

Questão 53

(ESPCEX-AMAN_2024)

Foi construído na EsPCEx um reservatório de água cuja seção reta do sólido que o representa e que passa pelo seu eixo de simetria é mostrada na figura a seguir.



O formato tridimensional desse reservatório foi obtido pelo giro completo da seção reta em torno do eixo de simetria. Desejando-se realizar a pintura da área lateral do reservatório, a Prefeitura Militar da EsPCEx adquiriu uma tinta que tem rendimento de 5 metros quadrados por litro. Serão dadas <u>duas demãos</u> e não haverá desperdício nem mistura com água. Considerando $\pi = 3$ o mínimo número inteiro de litros de tinta necessários para a pintura é igual a:

- **A** 74
- **B** 75
- **C** 76
- **D** 77
- **E** 78

Questão 54

(PUCRS_2019)

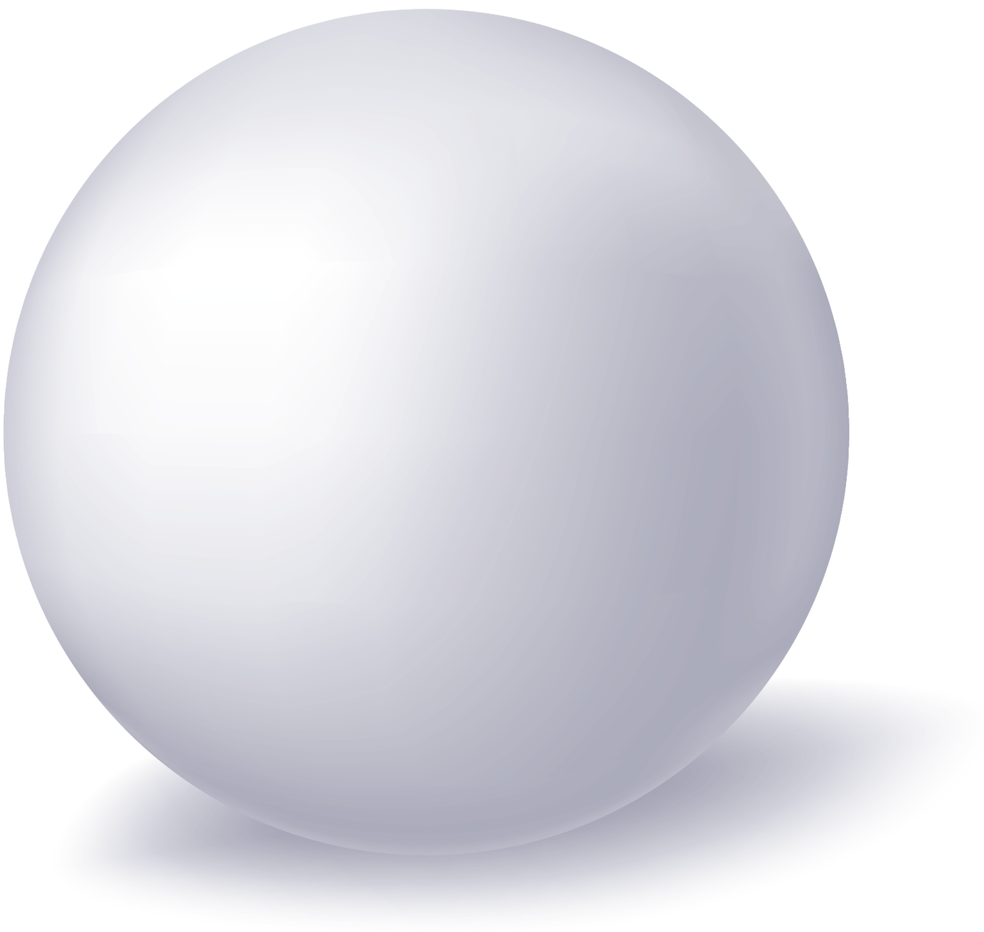
A figura abaixo representa dois vasilhames cilíndricos abertos na parte superior, o maior com raio da base R e o menor com raio da base r e altura $\frac{7}{3}r$. O cilindro maior possui um tubo de escoamento acoplado e está cheio de líquido exatamente até o orifício do tubo de escoamento sem que se perca nada. O cilindro menor possui em seu interior um cone sólido cuja altura é a medida do diâmetro de sua base, encaixando-se perfeitamente à base do cilindro.
Em um experimento, ao imergirmos completamente uma esfera de raio r dentro do cilindro com líquido, certa quantidade de líquido escoará para o vasilhame menor pelo tubo.

Sobre o resultado do experimento, é possível afirmar que

A o líquido transbordará.
B o cilindro menor ficará cheio até a borda.
C o cone ficará totalmente coberto pelo líquido.
D um pedaço do cone de altura $\frac{r}{3}$ ficará acima do líquido.

Gabarito _ Cones			
Hora de Praticar			
Questão	Resposta	Questão	Resposta
01	B	28	B
02	A	29	B
03	B	30	A
04	E	31	B
05	D	32	B
06	C	33	A
07	A	34	a) $\frac{45}{\pi}$ cm b) $\frac{135-\pi}{3}$ ml
08	A	35	A
09	D	36	D
10	B	37	D
11	B	38	A
12	C	39	C
13	C	40	a) 16π b) $\frac{x^3\pi}{108}$
14	A	41	C
15	C	42	A
16	A	43	E
17	D	44	A
18	A	45	A
19	C	46	C
20	C	47	B
21	D	48	D
22	A	49	A
23	C	50	C
24	A	51	B
25	B	52	C
26	A	53	B
27	D	54	C

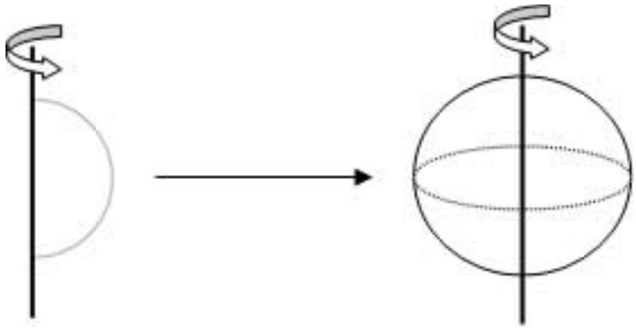
ESFERA

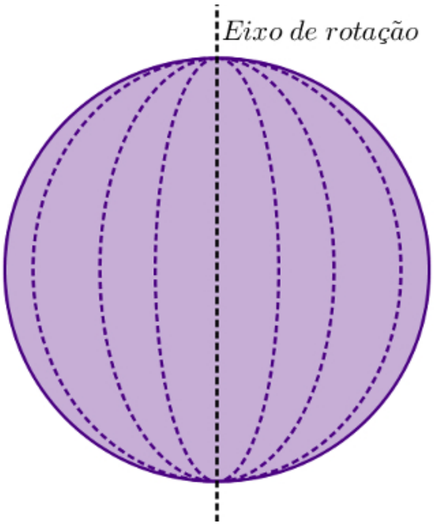


RONAEBSON
MATEMÁTICA CRIATIVA

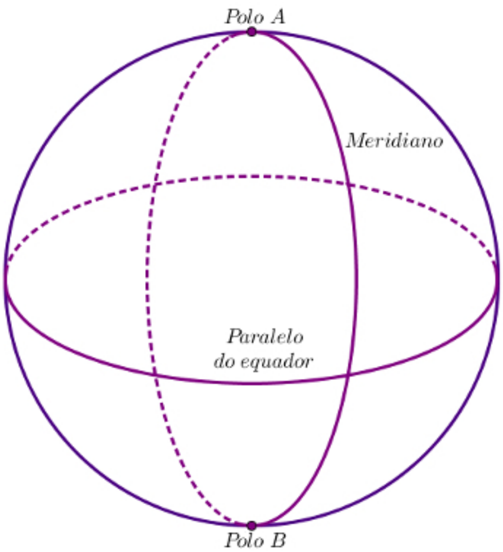
ESFERA

Chamamos de *esfera* de centro **O** e raio **R** o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao centro é menor ou igual ao raio **R**. Considerando a rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo **e**, a esfera é o sólido gerado por essa rotação. Assim, ela é limitada por uma superfície esférica e formada por todos os pontos pertencentes a essa superfície e ao seu interior.



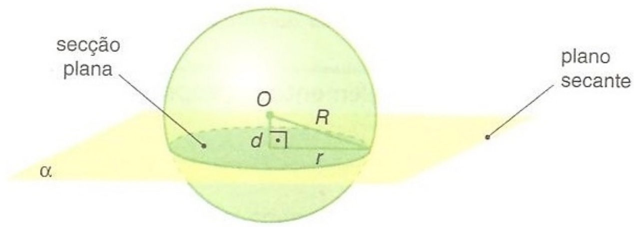


- **Superfície esférica:** é a parte superficial de uma esfera, justamente o conjunto de pontos cuja distância do centro é igual ao raio. Essa superfície pode ser obtida pela rotação de uma circunferência em torno do diâmetro.
- **Polos:** são os pontos de encontro entre a superfície esférica e o eixo de rotação. Sendo assim, os polos são os dois pontos extremos do diâmetro da esfera.
- **Paralelo:** circunferência na superfície da esfera formada pela intersecção de qualquer plano perpendicular ao eixo de rotação e à superfície esférica. O paralelo que possui o maior comprimento é chamado de equador.
- **Meridiano:** circunferência na superfície da esfera formada pela intersecção de qualquer plano que contém o eixo de rotação com a superfície esférica.



SECÇÃO PLANA

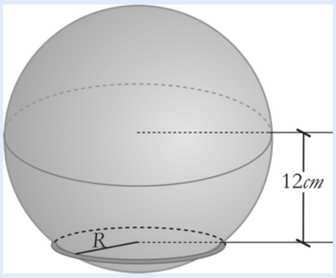
Toda secção plana de uma esfera é um círculo. Se o plano secante passa pelo centro da esfera, temos como secção um círculo máximo da esfera.



Assim, sendo R o raio da esfera, d a distância do plano secante ao centro e r o raio da secção, pelo Teorema de Pitágoras, vale a relação:

$$R^2 = d^2 + r^2.$$

Problema 01: (UFPB) Uma bola esférica está apoiada em um aro circular cujo raio interno R mede $9\,cm$, conforme a figura ao lado. Sabendo-se que a distância entre o centro do aro e o da bola é igual a $12\,cm$, é correto afirmar que o diâmetro externo da bola mede:



Ⓐ 24 *cm*
Ⓑ 25 *cm*
Ⓒ 26 *cm*
Ⓓ 28 *cm*
Ⓔ 30 *cm*

Solução:

Considerando ***r*** como sendo o raio da esfera, temos:

$$r^2 = R^2 + 12^2 \implies r^2 = 9^2 + 12^2 \implies r = 15\ cm$$

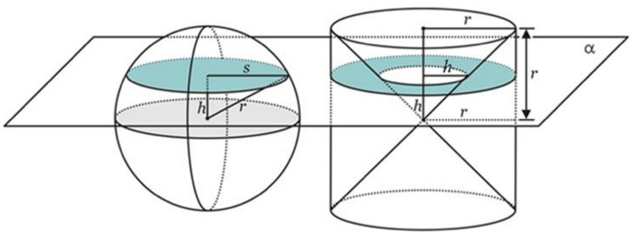
Daí, o diâmetro externo da bola mede 30 cm.

Resposta: [E]

VOLUME

Consideremos um cilindro equilátero de raio da base r (a altura é 2r) e seja S o ponto médio do eixo do cilindro.
Tomemos dois cones tendo como bases as do cilindro e S como vértice comum, a reunião desses dois cones é um sólido chamado clépsidra. Ao sólido que está dentro do cilindro e fora dos dois cones vamos chamar de anticlépsidra (cilindro menos os dois cones).

Consideremos agora uma esfera de raio r e anticlépsidra descrita acima.



Suponhamos que a esfera seja tangente ao plano que contém a base do cilindro que originou a anticlépsidra e que os dois sólidos fiquem num mesmo semi-espaço dos determinados por esse plano.

Qualquer plano secante α, perpendicular ao eixo do cilindro, distando h do centro da esfera (e do vértice dos dois cones), também secciona a anticlépsidra. Assim:

$$\begin{matrix}Área\ da\ secção\\ da\ esfera\end{matrix} = \pi \cdot s^2 = \pi \cdot (r^2 - h^2)$$

$$\begin{matrix}Área\ da\ secção\\ da\ anticlépsidra\end{matrix} = \pi \cdot r^2 - \pi d^2 = \pi \cdot (r^2 - h^2)$$

As áreas das secções na esfera e na anticlépsidra são iguais, então, pelo Princípio de Cavalieri, a esfera e a anticlépsidra têm volumes iguais, logo,

$$V_{Esfera} = V_{Anticlépsidra}$$

$$V_{Esfera} = V_{Cilindro} - 2 \cdot V_{Cone}$$

$$V_{Esfera} = \pi \cdot r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r$$

$$V_{Esfera} = 2\pi \cdot r^3 - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

O volume da esfera de raio **R** é dado por:

$$\boxed{\boldsymbol{V_{Esfera} = \frac{4\pi \cdot r^3}{3}}}$$

Problema 02: Em certo momento, uma cultura tem 30000 bactérias. Essas bactérias têm formato esférico, com diâmetro de 4 micrômetros (1 micrômetro equivale à milésima parte de 1 mm). Nesse momento, o espaço ocupado por essas bactérias é, em milímetros cúbicos, igual a: Use: π = 3,1

Ⓐ $3{,}72 \times 10^{-1}$
Ⓑ $9{,}92 \times 10^{-2}$
Ⓒ $3{,}72 \times 10^{-3}$
Ⓓ $9{,}92 \times 10^{-4}$
Ⓔ $9{,}92 \times 10^{-5}$

Solução:

Se o diâmetro de uma bactéria mede $4\mu m$, então o raio dela mede $2\mu m$, logo:

$$V_{Total} = 30000 \cdot V_{Bactéria}$$

$$V_{Total} = 30000 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2 \cdot 10^{-3}\ mm)^3$$

$$V_{Total} = 3 \cdot 10^4 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 8 \cdot 10^{-9}\ mm^3$$

$$V_{Total} = 9{,}92 \cdot 10^{-4}\ mm^3$$

Resposta: [D]

Problema 03: (Vunesp) O trato respiratório de uma pessoa é composto de várias partes, dentre elas os alvéolos pulmonares, pequeninos sacos de ar onde ocorre a troca de oxigênio por gás carbônico. Vamos supor que cada alvéolo tem forma esférica e que, num adulto, o diâmetro médio de um alvéolo seja, aproximadamente, 0,02 cm. Se o volume total dos alvéolos de um adulto é igual a 1618 cm^3, o número aproximado de alvéolos dessa pessoa, considerando $\pi \cong \mathbf{3}$, é:

Ⓐ 1 618 × 10^3
Ⓑ 1 618 × 10^4
Ⓒ 5 393 × 10^2
Ⓓ 4 045 × 10^4
Ⓔ 4 045 × 10^5

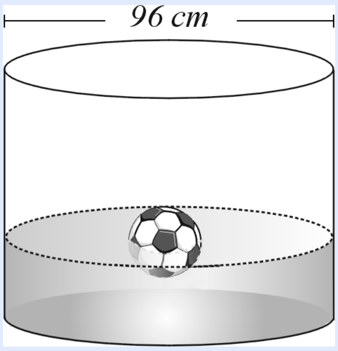
Solução:

Se o diâmetro de um alvéolo mede $0{,}02\ cm$, então o raio dele mede $0{,}01\ cm = 10^{-2}\ cm$, logo, o número de aproximado de alvéolos dessa pessoa é dado por:

$$\frac{V_{Total}}{V_{Alvéolo}} = \frac{1618\ cm^3}{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(10^{-2}\ cm)^3} = 404{,}5\cdot 10^6 = 4045\cdot 10^5.$$

Resposta: [E]

Problema 04: (UFPB) Depois de desistir de retirar a pipa do poste, João foi jogar futebol no quintal da casa. Ao chutar a bola com muita força, fez com que a mesma caísse num reservatório de água com a forma de um cilindro circular reto, cujo diâmetro é de 96cm. Maria percebeu que exatamente a metade da bola ficou submersa, o que elevou o nível da água do reservatório em 0,5cm (ver desenho). O raio dessa bola é



Ⓐ 10cm.
Ⓑ 11cm.
Ⓒ 12cm.
Ⓓ 13cm.
Ⓔ 14cm.

Solução:

Pelo Princípio de Arquimedes, temos que o volume do líquido deslocado é igual ao volume submerso, logo:

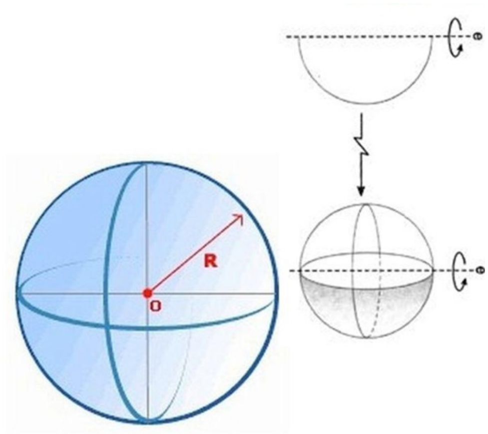
$$V_{semiesfera} = V_{deslocado}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3 = \pi\cdot 48^2\cdot 0{,}5$$

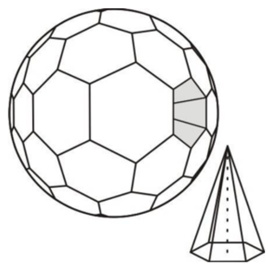
$$R^3 = 1728 \implies R = 12\ cm.$$

Superfície Esférica

A superfície esférica de centro **O** e raio **R** é o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto O é igual ao raio **R**. Se considerarmos a rotação completa de uma semicircunferência em torno de seu diâmetro, a superfície esférica é o resultado dessa rotação.



Podemos decompor a esfera em uma infinidade de pirâmides cujas bases compõem a superfície esférica e os vértices se encontram no centro da esfera.



Desta forma, a superfície da esfera fica dividida em ***n*** polígonos e a área da superfície esférica A_{SE} é dada por:

$$A_S = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

Para o Volume da esfera, podemos dizer que é igual à soma dos volumes dessas ***n*** por:

$$V_{Esfera} = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$$

Sabemos que o volume de uma pirâmide é dado pela fórmula:

$$V_{Pirâmide} = \frac{1}{3}\cdot A_{base}\cdot h$$

No caso destas pirâmides que compõem a esfera, suas alturas são exatamente o raio *R* da esfera. Assim, a essa última relação fica:

$$V_{Pirâmide} = \frac{1}{3}\cdot A_{base}\cdot R$$

Logo, o volume da esfera será a soma dos volumes destas pirâmides:

$$V_{Esfera} = \frac{A_1 \cdot R}{3} + \frac{A_2 \cdot R}{3} + \cdots + \frac{A_n \cdot R}{3}$$

$$V_{Esfera} = \frac{(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \cdot R}{3}$$

Como a soma das áreas nessa última relação é igual à área da superfície esférica (A_S), temos:

$$V_{Esfera} = \frac{A_S \cdot R}{3}$$

Daí:

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{A_S \cdot R}{3}$$

$$A_S = 4\pi R^2$$

Note que para a demonstração da fórmula da área da superfície esférica levamos em conta que já sabíamos previamente a fórmula do volume da esfera.

Assim, a *área da superfície esférica* é dada por:

$$\boxed{A = 4\pi R^2}$$

Problema 05: Para a confecção de um colar, um joalheiro deve banhar em ouro as superfícies das 45 esferas de 0,8 cm de diâmetro. Dado que $\pi \cong 3,1$, calcule quanto custará esse banho, sabendo que o custo por centímetro quadrado é de R$ 6,00.

Solução:

Se o diâmetro de cada esfera mede $0,8\ cm$, então o raio delas mede $0,4\ cm$, logo, a área da superfície de cada uma será dada por:

$$A_S = 4\pi \cdot (0,4)^2 = 0,64\pi\ cm^2$$

Assim, a área de todas as 45 esferas será

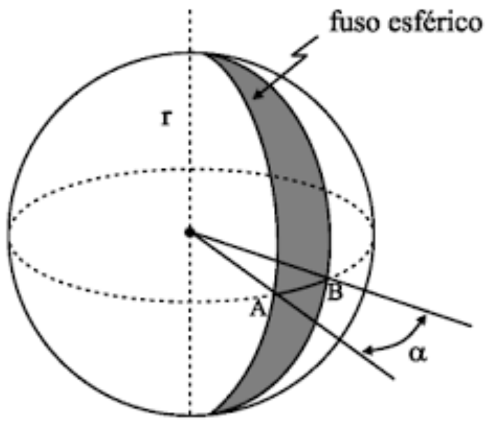
$$45 \cdot 0,64\pi = 28,8 \cdot 89,28\ cm^2$$

Logo, o custo total com o banho será:

$$89,28 \cdot 6 = R\$\ 535,68.$$

Fuso Esférico

O fuso esférico é a parte da superfície esférica que se obtém ao girar uma semicircunferência de um ângulo α $(0 < \alpha < 2\pi)$ em torno de seu eixo:



A área do fuso esférico pode ser obtida por uma regra de três simples e o ângulo pode ser dado em radianos ou graus:

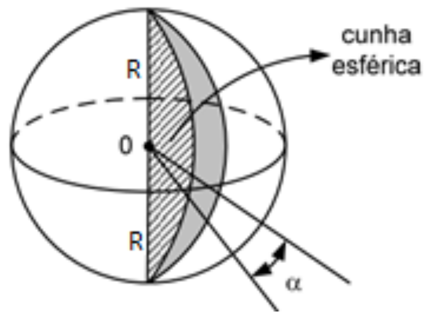
Ângulo		Área
360º	$\longrightarrow$	$4\pi r^2$
α	$\longrightarrow$	A_{Fuso}

$$360^o \cdot A_{Fuso} = 4\alpha\pi r^2 \Rightarrow A_{Fuso} = \frac{4\alpha\pi r^2}{360^o}$$

$$\boldsymbol{A_{Fuso} = \frac{\alpha\pi r^2}{90^o}}$$

Cunha Esférica

Parte da esfera que se obtém ao girar um semicírculo em torno de seu eixo de um ângulo α $(0 < \alpha < 2\pi)$



O volume da cunha pode ser obtido por uma regra de três simples:

Ângulo		Volume
360º	$\longrightarrow$	$\frac{4\pi R^3}{3}$
α	$\longrightarrow$	V_{Cunha}

$$V_{Cunha} \cdot 360^o = \frac{4\alpha\pi R^3}{3} \Rightarrow V_{Cunha} = \frac{4\alpha \cdot \pi R^3}{3 \cdot 360^o}$$

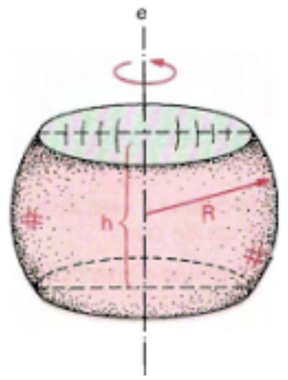
$$\boldsymbol{V_{Cunha} = \frac{\alpha\pi R^3}{270^o}}$$

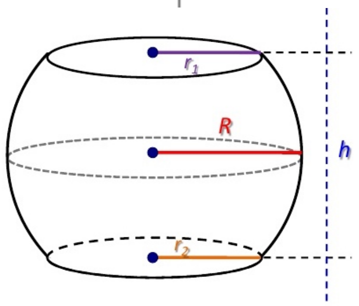
Para calcular a área total da cunha esférica, basta somarmos a área dos dois semicírculos com a área do fuso correspondente.

$$A_{Total\ da\ Cunha} = A_{Fuso} + 2 \cdot A_{semicírculo}$$

ZONA ESFÉRICA

É a parte da esfera gerada do seguinte modo:





A área da zona esférica é dada por:

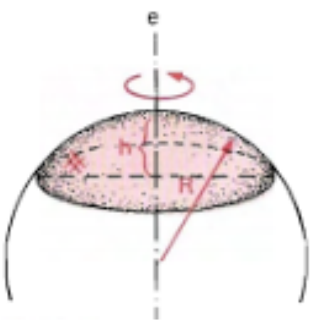
$$A_{Zona\ Esférica} = 2\pi Rh$$

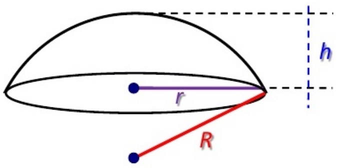
O volume da zona esférica é dado por:

$$V_{Zona\ Esférica} = \frac{\pi h}{6} \cdot [3(r_1^2 + r_2^2) + h^2]$$

CALOTA ESFÉRICA

É a parte da esfera gerada do seguinte modo:





A área da calota esférica é dada por:

$$A_{Calota} = 2\pi Rh$$

O volume da calota esférica é dado por:

$$V_{Calota\ Esférica} = \frac{\pi h}{6} \cdot [3r^2 + h^2]$$

Hora de Praticar

Questão 01

(Ronaebson)

Ana Luiza produz brigadeiros granulados gourmet como descritos na imagem a seguir.

Esses brigadeiros são bem maiores que os de costumes e eles o chamam de brigadeiro gigante, pois seu formato é esférico e de raio medindo 4 cm, antes de granular. Além disso, o seu custo é calculado em função da quantidade de massa de brigadeiro e da quantidade de granulado necessário para cobri-lo por completo.

Sabe-se que o custo da massa do brigadeiro é de R$ 0,04 por cm^3 e o custo para granular os brigadeiros é de R$ 0,002 por cm^2. Adotando $\pi = 3$, o custo para a produção de dez desses brigadeiros gigantes é de

- **A** R$ 102,40.
- **B** R$ 106,24.
- **C** R$ 204,80.
- **D** R$ 212,48.
- **E** R$ 384,00.

Questão 02

Um monumento deverá ser construído. O projeto original prevê para este monumento uma esfera de 1 metro de diâmetro, confeccionada em titânio. Devido ao alto custo do titânio, apenas 60% do volume de titânio necessário foi adquirido. Os arquitetos decidiram substituir a esfera por um cilindro circular reto com o titânio adquirido. O diâmetro da base do cilindro deve ainda ser de 1 metro.

Assim, a altura, em centímetros, deste cilindro será

- **A** 100.
- **B** 80.
- **C** 60.
- **D** 50.
- **E** 40.

Questão 03

"Na indústria farmacêutica, a efervescência é um tipo bastante comum de apresentação de medicamentos. A maioria dos antiácidos estomacais (popularmente conhecidos como *sal de fruta*) é encontrada sob a forma de comprimidos efervescentes, cuja composição é uma mistura de ácidos orgânicos, como o ácido cítrico, e bases carbonadas, como o bicarbonato de sódio, principalmente. A reação desses comprimidos com água produz e libera gás carbônico (CO_2), responsável pela formação de bolhas e pela eructação (arroto) após a ingestão do medicamento".

http://www.infoescola.com/quimica/efervescencia/

Sabe-se que quanto maior a área de um comprimido efervescente, mais rapidamente ele se dissolve na água. Assim, um laboratório farmacêutico decidiu produzir esses medicamentos sob dois formatos, um no formato esférico de raio 0,9cm e o outro na forma cilíndrica com 0,5cm de altura e diâmetro da base de 2cm. A área total da superfície desses comprimidos, em cm^2, será, respectivamente, igual a

Ⓐ 3π e 3π.
Ⓑ $3{,}24\pi$ e 3π.
Ⓒ $3{,}18\pi$ e $3{,}25\pi$.
Ⓓ $3{,}27\pi$ e $2{,}25\pi$.
Ⓔ $3{,}81\pi$ e $3{,}25\pi$.

Questão 04

(IFPE_2017)

Maria Carolina resolveu sair um pouco do seu regime e foi saborear uma deliciosa sobremesa composta por três bolas de sorvete e 27 uvas, conforme a imagem abaixo. Suponha que as bolas de sorvete e as uvas tenham formatos esféricos e que Maria Carolina comeu toda a sua sobremesa.

Disponível em: <http://s1.1zoom.me/big3/144/Ice_cream_Blueberries_440624.jpg>
Acesso em 20 maio 2017.

Usando $\pi = 3$, sabendo que os raios de cada bola de sorvete têm 4 cm e, de cada uva, 1 cm, podemos afirmar que ela consumiu, nessa sobremesa, em centímetros cúbicos, um total de

Ⓐ 108
Ⓑ 768
Ⓒ 876
Ⓓ 260
Ⓔ 9000

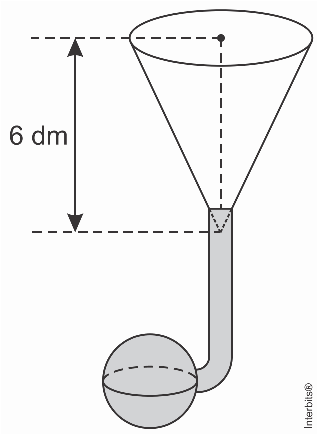
Questão 05

(EPCAR)

Um sistema de irrigação para plantas é composto por uma caixa d'água, em formato de cone circular reto, interligada a 30 esferas, idênticas.

O conteúdo da caixa d'água chega até as esferas por encanamentos cuja capacidade de armazenamento é desprezível.

O desenho a seguir ilustra a ligação entre a caixa d'água e uma das 30 esferas, cujo raio interno mede $r = \pi^{-\frac{1}{3}}\,dm.$



Se a caixa d'água está cheia e as esferas, bem como os encanamentos, estão vazios, então, no momento em que todas as 30 esferas ficarem cheias, restará, no cone, apenas a metade de sua capacidade total.

Assim, a área lateral de um cone equilátero cujo raio da base é congruente ao da caixa d'água, em dm^2, é igual a

Ⓐ 80.
Ⓑ 40.
Ⓒ 30.
Ⓓ 20.
Ⓔ 10.

Questão 06

(Ronaebson)

Admita que uma célula tenha a forma de uma esfera e que sua capacidade de absorção de nutrientes é proporcional a área de sua superfície.
A partir de um determinado momento, se uma célula crescer até que seu volume seja oito vezes o inicial, sua capacidade de absorção de nutrientes será

Ⓐ metade do que era inicialmente.
Ⓑ igual a que era inicialmente.
Ⓒ o dobro da que era inicialmente.
Ⓓ o quádruplo da que era inicialmente.
Ⓔ oito vezes a que era inicialmente.

Questão 07

(Ronaebson)

Um joalheiro produz pequenos brincos metálicos em formato esférico, todos banhados a ouro. A massa de ouro, em mg, utilizada é diretamente proporcional a área da superfície do brinco. Ele tem como referência o fato de que quando o diâmetro é 6 mm, a massa de ouro utilizada é de 2,25 mg.

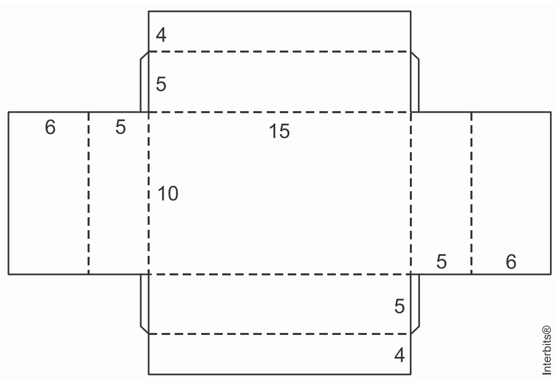
Sabendo que o volume de um determinado modelo de brinco, antes que ele seja banhado a ouro, é de $32\ mm^3$ e considerando $\pi \cong 3$, a quantidade de ouro necessário para banhar o referido brinco será de

Ⓐ 0,75 mg.
Ⓑ 1,00 mg.
Ⓒ 1,25 mg.
Ⓓ 1,75 mg.
Ⓔ 2,00 mg.

Questão 08

(ENEM)

Um fabricante de brinquedos recebeu o projeto de uma caixa que deverá conter cinco pequenos sólidos, colocados na caixa por uma abertura em sua tampa. A figura representa a planificação da caixa, com as medidas dadas em centímetros.



Os sólidos são fabricados nas formas de

I. um cone reto de altura 1 cm e raio da base 1,5 cm.
II. um cubo de aresta 2 cm.
III. uma esfera de raio 1,5 cm.
IV. um paralelepípedo retangular reto, de dimensões 2 cm, 3 cm e 4 cm.
V. um cilindro reto de altura 3 cm e raio da base 1 cm.

O fabricante não aceitou o projeto, pois percebeu que, pela abertura dessa caixa, só poderia colocar os sólidos dos tipos

Ⓐ I, II e III.
Ⓑ I, II e V.
Ⓒ I, II, IV e V.
Ⓓ II, III, IV e V.
Ⓔ III, IV e V.

Questão 09

(UPE-SSA)

Foram colocadas esferas de raio 5 cm dentro de um aquário que tem o formato de um paralelepípedo de 1,25 m de largura, 2 m de comprimento e 1 m de altura, cheio de água, ocupando sua capacidade máxima. Aproximadamente, quantas esferas terão que ser colocadas nesse aquário para que 10% do volume contido no seu interior seja derramado?

Adote $\pi = 3$.

Ⓐ 250
Ⓑ 300
Ⓒ 325
Ⓓ 450
Ⓔ 500

Questão 10

(UFU_2018)

Um recipiente, no formato de um cilindro circular reto de raio de base r cm, possui um líquido solvente em seu interior. A altura h desse solvente presente no recipiente é igual a $\frac{16}{3}$cm conforme ilustra a Figura 1.

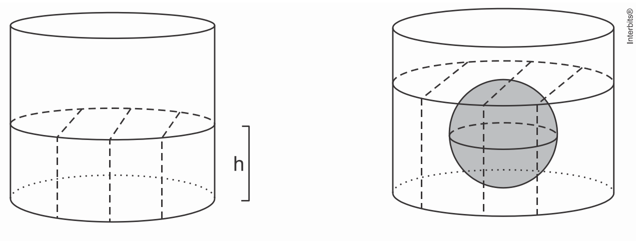


Figura 1
(Ilustrativa e sem escalas)

Figura 2
(Ilustrativa e sem escalas)

Quando uma peça maciça, no formato de uma esfera de raio igual a 3 cm é mergulhada nesse recipiente até encostar no fundo, observa-se que o solvente cobre exatamente a esfera, conforme ilustra a Figura 2.

Segundo as condições apresentadas, o raio r, em cm, é igual a

Ⓐ $4\sqrt{3}$
Ⓑ $2\sqrt{7}$
Ⓒ $5\sqrt{2}$
Ⓓ $3\sqrt{6}$

Questão 11

(ESPCEX_2018)

A angioplastia é um procedimento médico caracterizado pela inserção de um cateter em uma veia ou artéria com o enchimento de um pequeno balão esférico localizado na ponta desse cateter. Considerando que, num procedimento de angioplastia, o raio inicial do balão seja desprezível e aumente a uma taxa constante de 0,5 mm/s até que o volume seja igual a $500\,m^3$ então o tempo, em segundos, que o balão leva para atingir esse volume é

Ⓐ 10.

Ⓑ $10\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$

Ⓒ $10\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$

Ⓓ $10\sqrt[3]{\pi}$

Ⓔ $10\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$

Questão 12

(UEG)

Deseja-se construir um reservatório cilíndrico circular reto com 8 metros de diâmetro e teto no formato de hemisfério. Sabendo-se que a empresa responsável por construir o teto cobra R$ 300,00 por m^2 o valor para construir esse teto esférico será de:

Use $\pi = 3{,}1$

Ⓐ R$ 22.150,00
Ⓑ R$ 32.190,00
Ⓒ R$ 38.600,00
Ⓓ R$ 40.100,00
Ⓔ R$ 29.760,00

Questão 13

(ESPCEX)

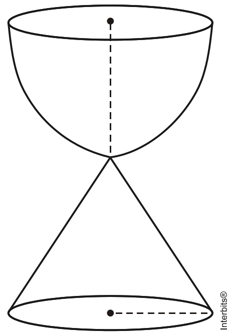
Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base tem medida R, contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é mergulhada nesse recipiente ficando totalmente submersa, sem haver transbordamento de água. Se a altura da água subiu $\frac{9}{16}R$, então o raio da esfera mede

Ⓐ $\frac{2}{3}R$
Ⓑ $\frac{3}{4}R$
Ⓒ $\frac{4}{9}R$
Ⓓ $\frac{1}{3}R$
Ⓔ $\frac{9}{16}R$

Questão 14

(CEFETMG)

Um artesão resolveu fabricar uma ampulheta de volume total V constituída de uma semiesfera de raio 4 cm e de um cone reto, com raio e altura 4 cm, comunicando-se pelo vértice do cone, de acordo com a figura abaixo.



Para seu funcionamento, o artesão depositará na ampulheta areia que corresponda a 25% de V. Portanto o volume de areia, em cm^3, é

Ⓐ $16\,\pi$

Ⓑ $\frac{64\pi}{3}$

Ⓒ $32\,\pi$

Ⓓ $\frac{128\pi}{3}$

Ⓔ $64\,\pi$

Questão 15

(UNEB)

Sua bexiga é um saco muscular elástico que pode segurar até 500ml de fluido. A incontinência urinária, no entanto, tende a ficar mais comum à medida que envelhecemos, apesar de poder afetar pessoas de qualquer idade; ela também é mais comum em mulheres que em homens (principalmente por causa do parto, mas também em virtude da anatomia do assoalho pélvico).

(BREWER. 2013, p. 76).

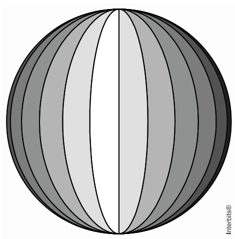
Considerando-se que a bexiga, completamente cheia, fosse uma esfera e que $\pi = 3$, pode-se afirmar que o círculo máximo dessa esfera seria delimitado por uma circunferência de comprimento, em cm, igual a

Ⓐ 20
Ⓑ 25
Ⓒ 30
Ⓓ 35
Ⓔ 40

Questão 16

(UDESC)

Uma bola esférica é composta por 24 faixas iguais, como indica a figura.



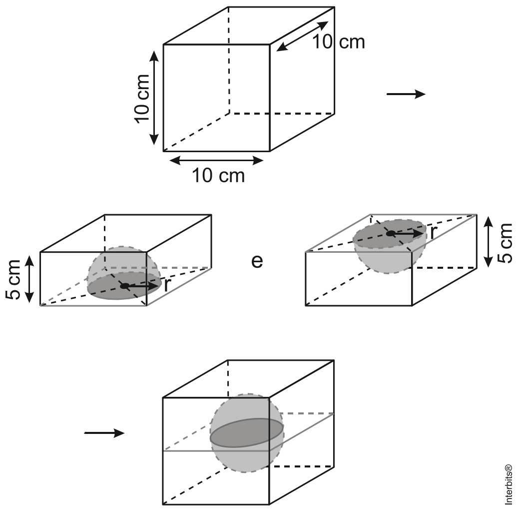
Sabendo-se que o volume da bola é 2304 πcm^3, então a área da superfície de cada faixa é de:

- **A** 20 πcm^2
- **B** 24 πcm^2
- **C** 28 πcm^2
- **D** 27 πcm^2
- **E** 25 πcm^2

Questão 17

(UNESP)

Para confeccionar um porta-joias a partir de um cubo maciço e homogêneo de madeira com 10 cm de aresta, um marceneiro dividiu o cubo ao meio, paralelamente às duas faces horizontais. De cada paralelepípedo resultante extraiu uma semiesfera de 4 cm de raio, de modo que seus centros ficassem localizados no cruzamento das diagonais da face de corte, conforme mostra a sequência de figuras.



Sabendo que a densidade da madeira utilizada na confecção do porta-joias era de 0,85 g/cm3 e admitindo $\pi = 3$, a massa aproximada do porta-joias, em gramas, é

- **A** 636.
- **B** 634.
- **C** 630.
- **D** 632.
- **E** 638.

Questão 18

(UECE)

Duas esferas que se tangenciam estão em repouso sobre um plano horizontal. Os volumes das esferas são respectivamente 2304 πm^3 e $36\pi m^3$. A distância, em metros, entre os pontos de contato das esferas com o plano é igual a

- **A** 9.
- **B** 12.
- **C** 15.
- **D** 10.

Questão 19

(UFRGS)

Se um jarro com capacidade para 2 litros está completamente cheio de água, a menor medida inteira, em cm que o raio de uma bacia com a forma semiesférica deve ter para comportar toda a água do jarro é

- **A** 8.
- **B** 10.
- **C** 12.
- **D** 14.
- **E** 16.

Questão 20

(IFPE)

Uma bola maciça, totalmente vedada, em formato de uma esfera perfeita, de diâmetro igual a 6 cm, foi lançada em uma panela cilíndrica cujo raio da base mede 5 cm e altura 10 cm. Sabendo que inicialmente a panela estava com água até a altura de 5 cm e que a bola ficou completamente submersa pela água, quantos centímetros o nível da água se elevará?

(Dado: Considere $\pi = 3$).

- **A** $\frac{36}{25}$
- **B** $\frac{5}{3}$
- **C** $\frac{25}{3}$
- **D** $\frac{30}{25}$
- **E** $\frac{25}{15}$

Questão 21

(UEFS)

Uma bolha de sabão, esférica, não estouraria se sua área superficial fosse, no máximo, 44% maior. Logo, ela poderia conter um volume de ar em seu interior, sem estourar, até

- **A** 32,4% maior.
- **B** 44% maior.
- **C** 53,6% maior.
- **D** 66% maior.
- **E** 72,8% maior.

Questão 22

(UEG)

Suponha que haja laranjas no formato de uma esfera com 6cm de diâmetro e que a quantidade de suco que se obtém ao espremer cada laranja é 2/3 de seu volume, sendo o volume dado em litros. Nessas condições, se quiser obter 1 litro de suco de laranja, deve-se espremer no mínimo

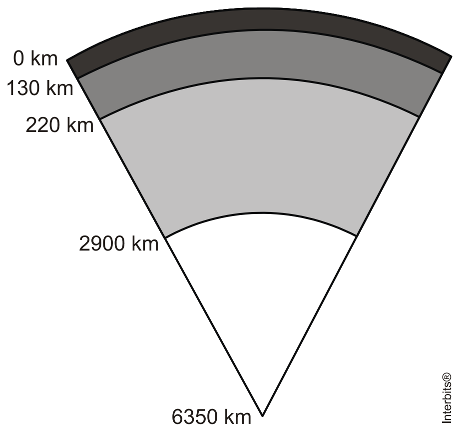
(use $\pi = 3{,}14$).

- **A** 13 laranjas
- **B** 14 laranjas
- **C** 15 laranjas
- **D** 16 laranjas

Questão 23

(UFG)

A figura a seguir representa um modelo esquemático aproximado para a estrutura interna da Terra em camadas concêntricas, da superfície ao centro, indicando as profundidades aproximadas das transições entre as camadas.



Segundo modelos sísmicos, acredita-se que uma destas camadas é formada, predominantemente, por minerais metálicos, em altas temperaturas, e por duas partes, uma fluida e outra sólida, devido à altíssima pressão. A fração do volume da Terra ocupada por esta camada está entre

- **A** $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{5}$
- **B** $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4}$
- **C** $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$
- **D** $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$
- **E** $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$

Questão 24

(UEG)

Uma laranja com formato esférico e com 6 cm de diâmetro foi descascada até a sua metade. Considerando-se esses dados, verifica-se que a área total da casca retirada da laranja é de aproximadamente (use $\pi = 3{,}14$).

- **A** 48 cm^2
- **B** 57 cm^2
- **C** 74 cm^2
- **D** 95 cm^2

Questão 25

(UECE)

Um círculo de raio R gira em torno de seu diâmetro, gerando uma esfera de volume V. Se o raio do círculo é aumentado em 50%, então o volume da esfera é aumentado em

- **A** 100,0 %.
- **B** 125,0 %.
- **C** 215,0 %.
- **D** 237,5 %.

Questão 26

(UNIFOR)

Uma bola de basquete em forma esférica não passa pelo aro da cesta cuja borda é circular. Se o raio do aro mede 60 cm e a distância entre o centro do aro e o centro da bola é igual a 80 cm, o raio da bola é de:

- **A** 90 cm.
- **B** 100 cm.
- **C** 120 cm.
- **D** 140 cm.
- **E** 160 cm.

Questão 27

(ESPECEX)

Considere que uma laranja tem a forma de uma esfera de raio 4 cm, composta de 12 gomos exatamente Iguais. A superfície total de cada gomo mede:

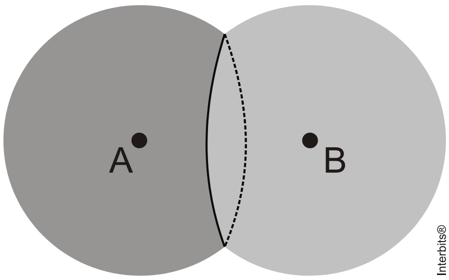
- **A** $\frac{4^3\pi}{3}cm^2$
- **B** $\frac{4^3\pi}{9}cm^2$
- **C** $\frac{4^2\pi}{3}cm^2$
- **D** $\frac{4^2\pi}{9}cm^2$
- **E** $4^3\pi cm^2$

Questão 28

(UERJ)

Na fotografia abaixo, observam-se duas bolhas de sabão unidas.

Quando duas bolhas unidas possuem o mesmo tamanho, a parede de contato entre elas é plana, conforme ilustra o esquema:



Considere duas bolhas de sabão esféricas, de mesmo raio R, unidas de tal modo que a distância entre seus centros A e B é igual ao raio R. A parede de contato dessas bolhas é um círculo cuja área tem a seguinte medida:

Ⓐ $\frac{\pi R^2}{2}$

Ⓑ $\frac{3\pi R^2}{2}$

Ⓒ $\frac{3\pi R^2}{4}$

Ⓓ $\frac{4\pi R^2}{3}$

Questão 29

(Escola Naval)

Um astronauta, em sua nave espacial, consegue observar, em certo momento, exatamente 1/10 da superfície da Terra.
Que distância ele está do nosso planeta? Considere o raio da Terra igual a 6400 km.

Ⓐ 1200 km
Ⓑ 1280 km
Ⓒ 1600 km
Ⓓ 3200 km
Ⓔ 4200 km.

Questão 30

(UERN)

Uma fruta em formato esférico com um caroço também esférico no centro apresenta 7/8 de seu volume ocupado pela polpa. Desprezando-se a espessura da casca, considerando que o raio da esfera referente à fruta inteira é de 12 cm, então a superfície do caroço apresenta uma área de

Ⓐ $121\pi\ cm^2$
Ⓑ $144\ \pi\ cm^2$
Ⓒ $169\ \pi\ cm^2$
Ⓓ $196\ \pi\ cm^2$

Questão 31

(FGV)

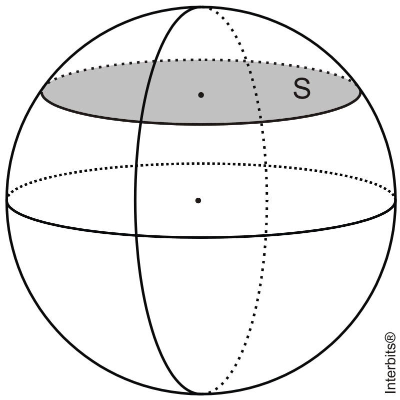
Um reservatório tem a forma de uma esfera. Se aumentarmos o raio da esfera em 20%, o volume do novo reservatório, em relação ao volume inicial, aumentará

Ⓐ 60%
Ⓑ 63,2%
Ⓒ 66,4%
Ⓓ 69,6%
Ⓔ 72,8%

Questão 32

(UDESC)

Seja S uma seção de uma esfera determinada pela interseção com um plano, conforme figura.



Se S está a 3 cm do centro da esfera e tem área igual a 16 πcm^2, então o volume desta esfera é:

Ⓐ 36 πcm^3

Ⓑ $\frac{256\pi}{3} cm^3$

Ⓒ 100 πcm^3

Ⓓ 16 πcm^3

Ⓔ $\frac{500\pi}{3} cm^3$

Questão 33

(UFSM)

Oscar Niemayer é um arquiteto brasileiro, considerado um dos nomes mais influentes na arquitetura moderna internacional. Ele contribuiu, através de uma doação de um croqui, para a construção do planetário da UFSM, um marco arquitetônico importante da cidade de Santa Maria.

Fonte: arquivo COPERVES.

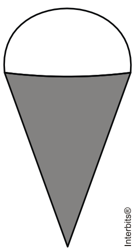
Suponha que a cobertura da construção seja uma semiesfera de 28 m de diâmetro, vazada por 12 partes iguais, as quais são aproximadas por semicírculos de raio 3 m. Sabendo que uma lata de tinta é suficiente para pintar 39 m^2 de área, qual a quantidade mínima de latas de tinta necessária para pintar toda a cobertura do planetário? (Use $\pi = 3$).

Ⓐ 20.
Ⓑ 26.
Ⓒ 40.
Ⓓ 52.
Ⓔ 60.

Questão 34

(UERN)

A figura representa um sorvete de casquinha, no qual todo o volume interno está preenchido por sorvete e a parte externa apresenta um volume de meia bola de sorvete.



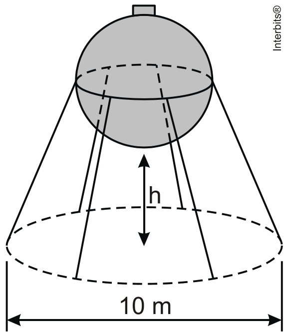
Considerando que o cone tem 12 cm de altura e raio 6 cm, então o volume total de sorvete é

Ⓐ 216 πcm^3
Ⓑ 360 πcm^3
Ⓒ 288 πcm^3
Ⓓ 264 πcm^3

Questão 35

(ESPM)

Um reservatório de água é constituído por uma esfera metálica oca de 4 m de diâmetro, sustentada por colunas metálicas inclinadas de 60° com o plano horizontal e soldadas à esfera ao longo do seu círculo equatorial, como mostra o esquema abaixo.



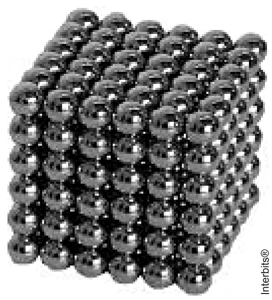
Sendo $\sqrt{3} \cong 1{,}73$, a altura h da esfera em relação ao solo é aproximadamente igual a:

Ⓐ 2,40 m
Ⓑ 2,80 m
Ⓒ 3,20 m
Ⓓ 3,40 m
Ⓔ 3,60 m

Questão 36

(UEPA)

A ideologia dominante também se manifesta por intermédio do acesso aos produtos do mercado, sobretudo daqueles caracterizados por tecnologias de ponta. O “Cubo Magnético” é um brinquedo constituído por 216 esferas iguais e imantadas. Supondo que esse brinquedo possa ser colocado perfeitamente ajustado dentro de uma caixa, também no formato de um cubo, com aresta igual a 30 mm a razão entre o volume total das esferas que constituem o “Cubo Magnético” e o volume da caixa que lhe serve de depósito é:

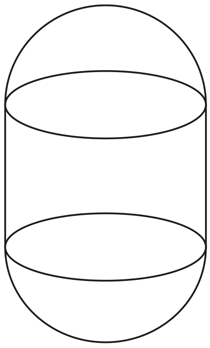


Ⓐ $\frac{\pi}{6}$
Ⓑ $\frac{\pi}{5}$
Ⓒ $\frac{\pi}{4}$
Ⓓ $\frac{\pi}{3}$
Ⓔ $\frac{\pi}{2}$

Questão 37

(UFRGS)

Um reservatório tem forma de um cilindro circular reto com duas semiesferas acopladas em suas extremidades, conforme representado na figura a seguir.



O diâmetro da base e a altura do cilindro medem, cada um 4 dm e o volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.

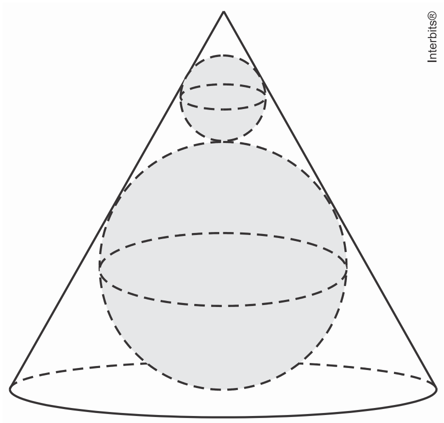
Dentre as opções a seguir, o valor mais próximo da capacidade do reservatório, em litros, é

Ⓐ 50.
Ⓑ 60.
Ⓒ 70.
Ⓓ 80.
Ⓔ 90.

Questão 38

(EPCAR_2022)

Um cone equilátero tem, em seu interior, duas esferas tangentes entre si e tangentes ao cone, conforme figura a seguir.



A distância do vértice do cone ao ponto de tangência entre o cone e a esfera de menor raio é igual a $\pi\sqrt{3}$ cm.

O volume desse cone, em cm^3, é igual a

Ⓐ $81\pi^4$
Ⓑ $81\pi^3$
Ⓒ $243\pi^4$
Ⓓ $243\pi^3$

Questão 39

(UFRN)

Um artesão produz peças ornamentais com um material que pode ser derretido quando elevado a certa temperatura. Uma dessas peças contém uma esfera sólida e o artesão observa que as peças com esferas maiores são mais procuradas e resolve desmanchar as esferas menores para construir esferas maiores, com o mesmo material. Para cada 8 esferas de 10cm de raio desmanchada, ele constrói uma nova esfera.

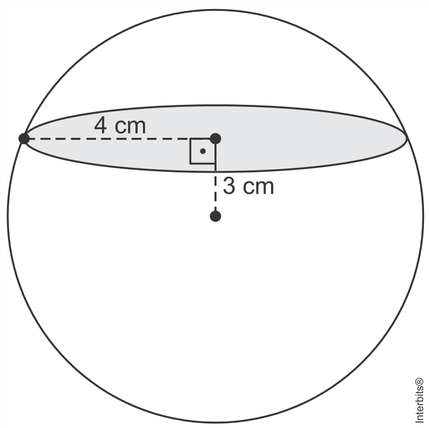
O raio da nova esfera construída mede

Ⓐ 80 cm.
Ⓑ 14,2 cm.
Ⓒ 28,4 cm.
Ⓓ 20 cm.

Questão 40

(IFPE_2019)

Na fazenda de sua família, Michely colheu uma laranja e verificou que ela tinha a forma de uma esfera. Michely, então, foi à cozinha, pegou uma faca e fez um corte na laranja a uma distância de 3 cm do seu centro, conforme figura a seguir.



Sabendo que o raio da circunferência gerada no plano do corte é de 4 cm, determine o volume da laranja inteira.

Ⓐ $\frac{64\pi}{3} cm^3$

Ⓑ $\frac{256\pi}{3} cm^3$

Ⓒ $\frac{108\pi}{3} cm^3$

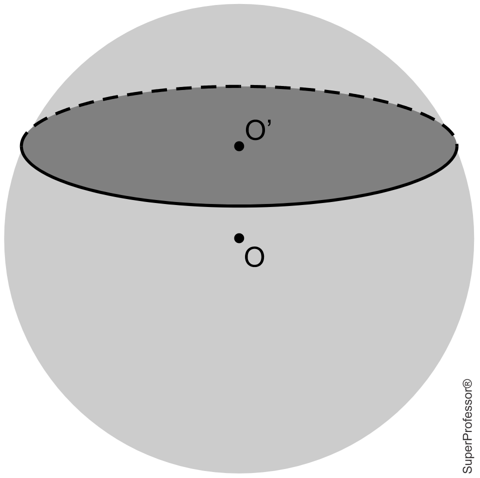
Ⓓ $\frac{125\pi}{3} cm^3$

Ⓔ $\frac{500\pi}{3} cm^3$

Questão 41

(EAM_2022)

Uma esfera com centro em O possui volume igual a $\frac{1371}{3}\ cm^3$. Se tomarmos um plano e o fizermos interceptar essa esfera a uma distância d do seu centro, a seção plana circular resultante, de centro O', terá área igual a $24\pi\ cm^2$ (figura abaixo). Assim, de acordo com os dados, calcule o valor de d, ou seja $\overline{OO'}$, e assinale a opção correta.



Ⓐ 1 cm
Ⓑ 3 cm
Ⓒ 5 cm
Ⓓ 7 cm
Ⓔ 10 cm

Questão 42

(PUCPR_2017)

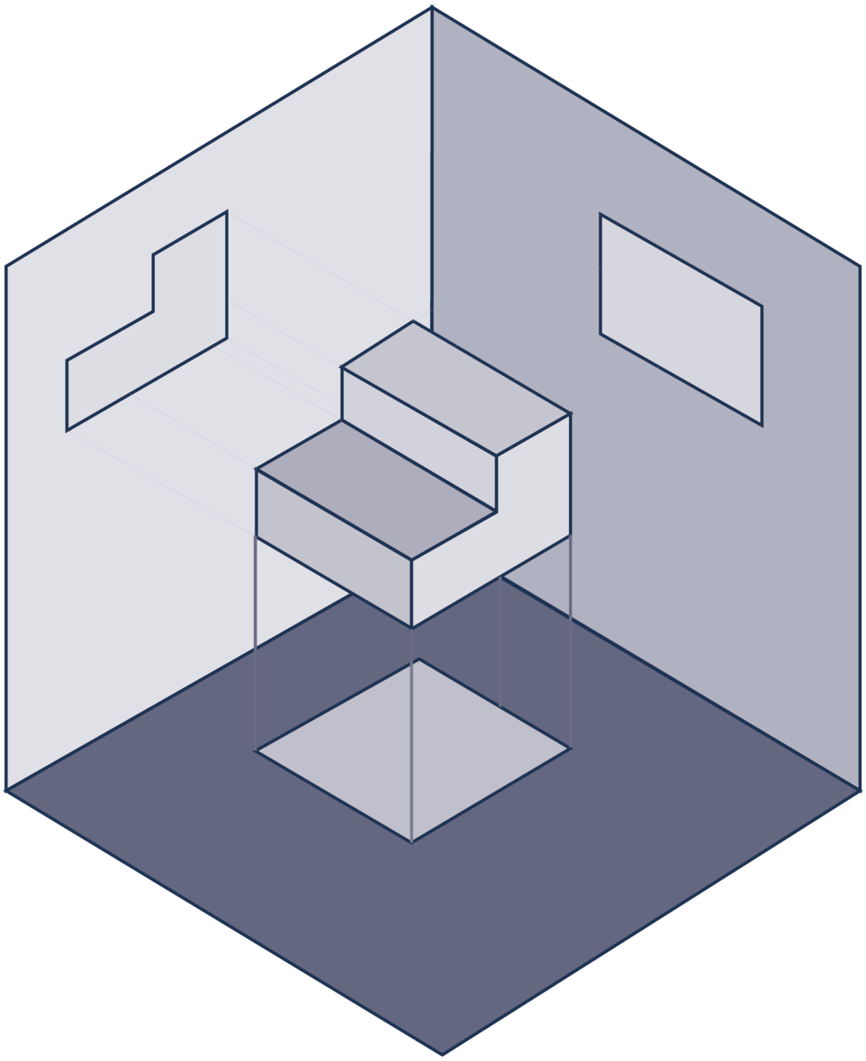
Considere a figura plana abaixo, na qual AF e DE são arcos de circunferências com centros nos pontos B e C respectivamente. Fazendo uma rotação de 360° essa figura em torno de $\overline{AD}$, obtém-se um sólido que será utilizado para armazenar um gás.

O volume deste tanque é:

Ⓐ $36\pi\ m^3$.
Ⓑ $48\pi\ m^3$.
Ⓒ $72\pi\ m^3$.
Ⓓ $96\pi\ m^3$.
Ⓔ $144\pi\ m^3$.

Gabarito _ Esferas			
Hora de Praticar			
Questão	Resposta	Questão	Resposta
01	B	22	B
02	B	23	A
03	B	24	B
04	C	25	D
05	A	26	B
06	D	27	A
07	B	28	C
08	C	29	C
09	E	30	B
10	D	31	E
11	E	32	E
12	E	33	B
13	B	34	C
14	A	35	C
15	C	36	A
16	B	37	D
17	D	38	A
18	B	39	D
19	B	40	E
20	A	41	C
21	E	42	C

PROJEÇÕES



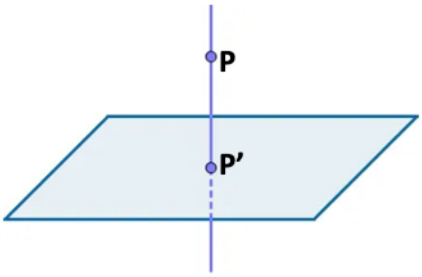
RONAEBSON
MATEMÁTICA CRIATIVA

PROJEÇÃO ORTOGONAL

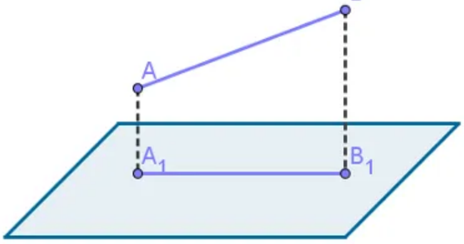
De uma maneira bem intuitiva, podemos pensar a projeção de um objeto sobre um plano horizontal, por exemplo, como a sombra que esse objeto faz no chão (plano horizontal).

Em particular, nesse mesmo sentido, diremos que a projeção é ortogonal quando o sol estiver a pino (sol do meio-dia).

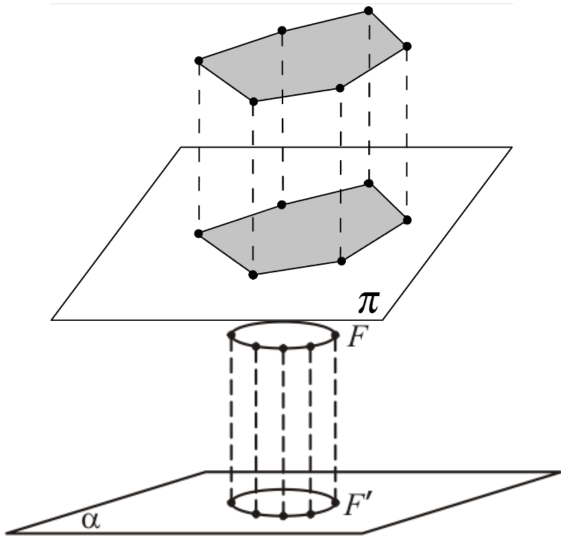
O caso mais simples, é o da projeção ortogonal de um ponto sobre um plano. Assim, dado um plano α e um ponto P fora desse plano, para determinarmos a projeção ortogonal de P sobre α, traçamos uma reta que passa por P e é perpendicular ao plano α, o ponto P' de intersecção da reta traçada com o plano α será dita a projeção ortogonal de P sobre o plano α, ou seja, essa projeção é o "pé da perpendicular" ao plano α que passa por P.



Outro caso ainda simples é o da projeção ortogonal de um segmento sobre um plano. Para determinar, basta tomar o segmento que une as projeções ortogonais dos extremos desse segmento, veja a figura a seguir.



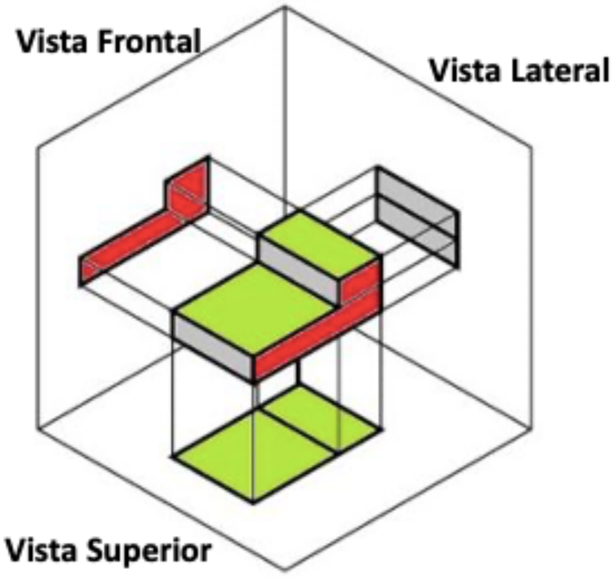
A partir dessas ideias iniciais você poderá identificar as projeções ortogonais de figuras quaisquer sobre um plano, sendo essas projeções um conjunto de projeções ortogonais dos pontos dessa figura sobre o plano.



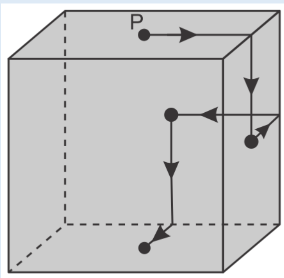
Vistas Ortogonais

A representação de objetos tridimensionais por meio de projeções ortogonais é feito por meio de "vistas" desse objeto tomadas de diferentes posições, a saber:

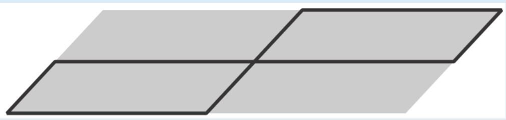
- vertical (vista frontal);
- horizontal (vista superior);
- perfil (vista lateral – direita ou esquerda)

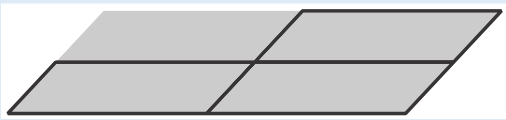


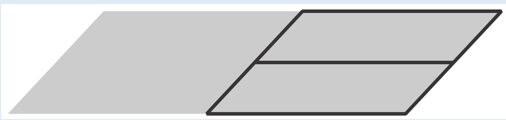
Problema 01: (ENEM 2022) Um robô, que tem um imã em sua base, se desloca sobre a superfície externa de um cubo metálico, ao longo de segmentos de reta cujas extremidades são pontos médios de arestas e centros de faces. Ele inicia seu deslocamento no ponto P, centro da face superior do cubo, segue para o centro da próxima face, converte à esquerda e segue para o centro da seguinte, converte à direita e continua sua movimentação, sempre alternado entre conversões à esquerda e à direita quando alcança o centro de uma face. O robô só termina sua movimentação quando retorna ao ponto P. A figura apresenta deslocamentos iniciais desse robô.

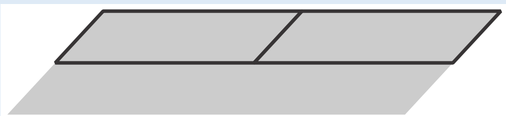


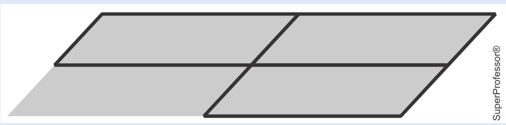
A projeção ortogonal do trajeto descrito por esse robô sobre o plano da base, após terminada sua movimentação, visualizada da posição em que se está enxergando esse cubo, é

A 

B 

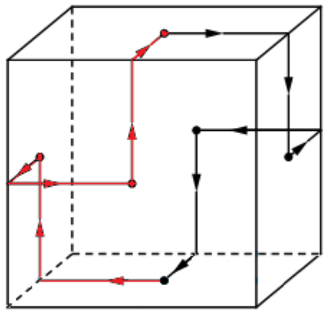
C 

D. 

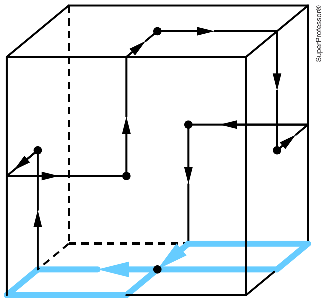
E. 

Solução:

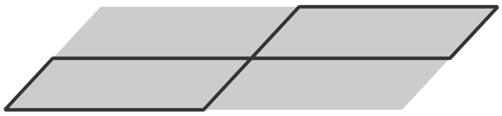
O primeiro desafio encontrado para a resolução desse problema é identificarmos o caminho completo percorrido pelo robô. Realizando o exercício mental de se imaginar caminhando sobre a superfície externa do cubo, seguindo as regras de movimentação apresentadas, obtemos a trajetória indicada na figura a seguir, onde o caminho percorrido após os deslocamentos iniciais do enunciado está destacado em vermelho.



Tendo determinado o caminho percorrido pelo robô, devemos projetar ortogonalmente cada segmento de reta que o compõe sobre o plano da face inferior do cubo. Ao fazermos isso, obtemos a configuração indicada em azul na figura abaixo.



Dessa forma, a projeção ortogonal do trajeto descrito por esse robô sobre o plano da base, após terminada sua movimentação, visualizada da posição em que se está enxergando esse cubo, é

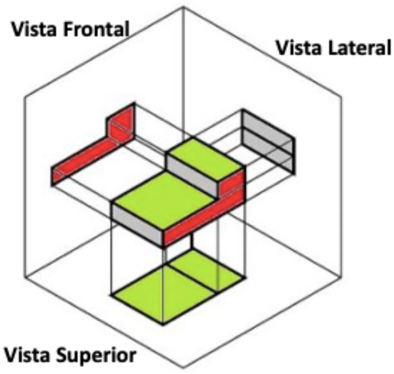


Resposta: A

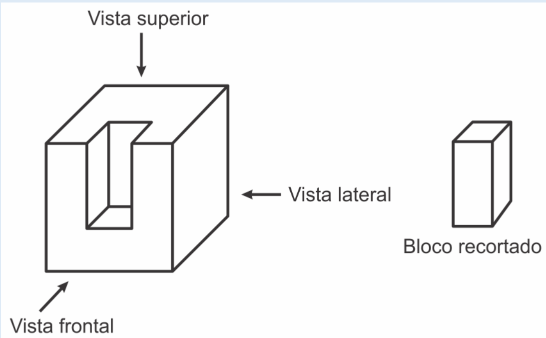
Vistas ortogonais

A representação de objetos tridimensionais por meio de projeções ortogonais é feita por meio de "vistas" desse objeto tomadas de diferentes posições, a saber:

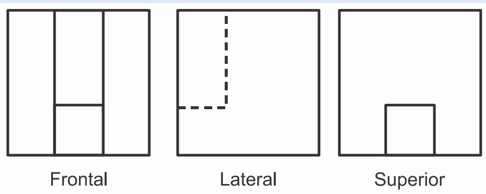
- vertical (vista frontal);
- horizontal (vista superior);
- perfil (vista lateral – direita ou esquerda).

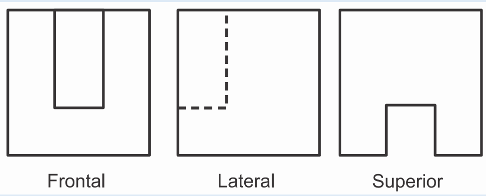


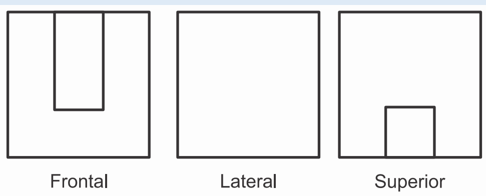
Problema 02: (ENEM Digital 2020) No projeto de uma nova máquina, um engenheiro encomendou a um torneiro mecânico a fabricação de uma peça, obtida a partir do recorte em um cubo, como ilustrado na figura. Para isso, o torneiro forneceu, juntamente com o desenho tridimensional da peça, suas vistas frontal, lateral e superior, a partir das posições indicadas na figura. Para facilitar o trabalho do torneiro, as arestas dos cortes que ficam ocultos nas três vistas devem ser representadas por segmentos tracejados, quando for o caso.

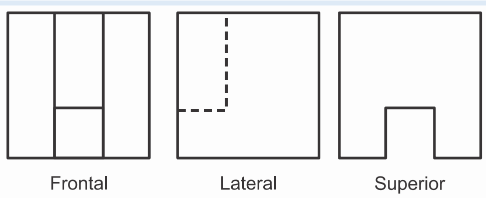


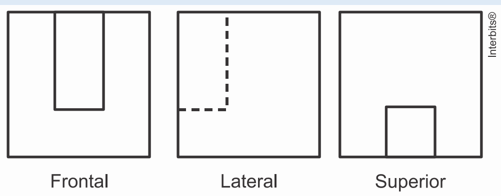
As vistas frontal, lateral e superior que melhor representam o desenho entregue ao torneiro são

A


B


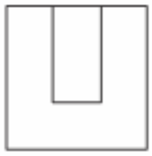
C


D


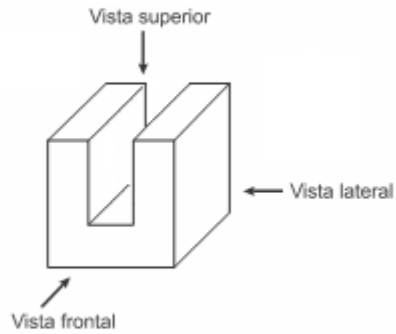
E


Solução:

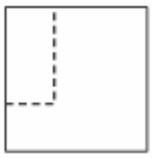
Primeiramente, note que, ao olharmos a peça de frente, vemos uma espécie de "U" sem a abertura de cima, conforme a figura a seguir.



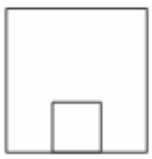
Para ficar mais claro, perceba que a vista frontal seria um "U perfeito", com a abertura de cima, se a peça tivesse o formato da figura abaixo.



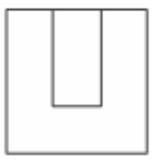
Ao observarmos a peça lateralmente, enxergamos apenas um retângulo branco, porém, devido à retirada do bloco recortado, internamente existe um espaço vazio, o qual deve ser indicado pelas linhas tracejadas, como abaixo.



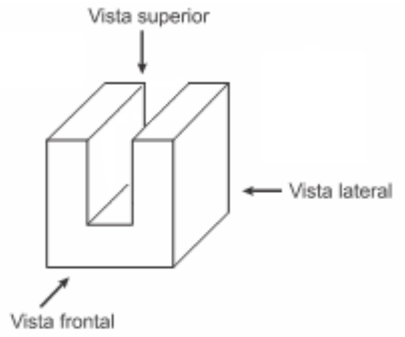
Por fim, enxergando a peça por cima, vemos, similarmente ao caso da vista frontal, uma espécie de "U" de cabeça para baixo e sem abertura, conforme a figura seguinte.



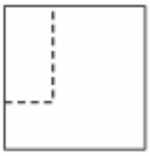
Primeiramente, note que, ao olharmos a peça de frente, vemos uma espécie de "U" sem a abertura de cima, conforme a figura a seguir.



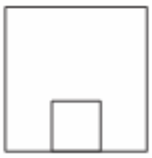
Para ficar mais claro, perceba que a vista frontal seria um "U perfeito", com a abertura de cima, se a peça tivesse o formato da figura abaixo.



Ao observarmos a peça lateralmente, enxergamos apenas um retângulo branco, porém, devido à retirada do bloco recortado, internamente existe um espaço vazio, o qual deve ser indicado pelas linhas tracejadas, como abaixo.

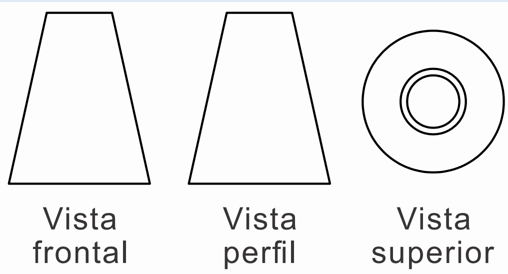


Por fim, enxergando a peça por cima, vemos, similarmente ao caso da vista frontal, uma espécie de "U" de cabeça para baixo e sem abertura, conforme a figura seguinte.



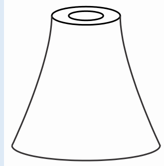
Resposta: E

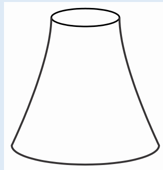
Problema 03: (ENEM PPL 2020) No desenho técnico, é comum representar um sólido por meio de três vistas (frontal, perfil e superior), resultado da projeção do sólido em três planos, perpendiculares dois a dois.
A figura representa as vistas de uma torre.

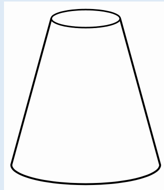


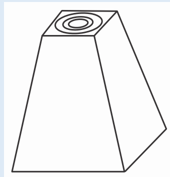
Disponível em: www.uems.br.
Acesso em: 11 dez. 2012 (adaptado).

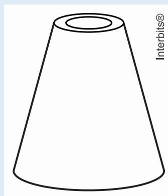
Com base nas vistas fornecidas, qual figura melhor representa essa torre?

A 

B 

C 

D 

E 

Solução:

Como a vista frontal corresponde a um trapézio isósceles, a seção meridiana do objeto tridimensional representado deve ser um trapézio isósceles. Dessa forma, podemos descartar a possibilidade de a torre ser um dos sólidos das alternativas A e B. Ademais, uma vez que a vista superior é de uma espécie de coroa circular, descartamos também a possibilidade de a torre ser o sólido do item d) ou o sólido do item C. Logo, a figura que melhor representa a torre é a do item E.

Resposta: E

Combinação de Sólidos

Nem sempre iremos nos deparar com situações que tragam apenas os sólidos na sua forma mais simples, ou seja, é possível que precisemos calcular o volume de um silo que corresponda a uma combinação de um cilindro e um cone (figura 1), ou mesmo, o volume de uma anticlepsidra que corresponde a um cilindro equilátero suprimindo dele dois cones (figura 2).

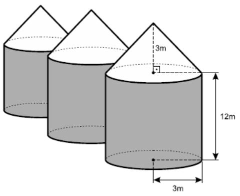
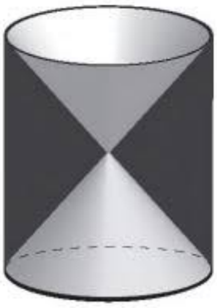


Figura 1

Figura 2

Em particular, vamos explorar um pouco a anticlepsidra. Para isso, tomemos um cilindro equilátero de raio R e retiremos dele uma clepsidra, ou seja, duas folhas de cones de raio da base e altura iguais a R.



Para calcularmos seu volume, basta fazermos

$$V_{Anticlepsidra} = V_{Cilindro} - 2 \cdot V_{Cone}.$$

Obtemos, assim,

$$V_{Anticlepsidra} = \pi R^2 \cdot (2R) - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot R.$$

Consequentemente,

$$V_{Anticlepsidra} = 2\pi R^3 - \frac{2}{3} \cdot \pi R^3.$$

Logo,

$$V_{Anticlepsidra} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

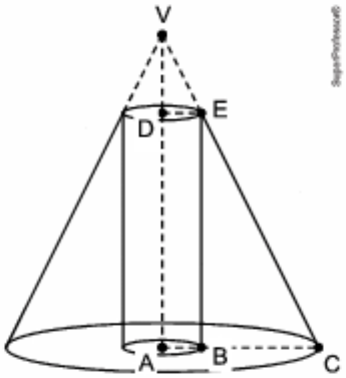
Observe que o volume da anticlepsidra corresponde ao volume de uma esfera de raio R.

Problema 04: (PUCRJ 2022) Considere um cone circular reto de madeira, com raio da base igual a 20 cm e altura 40 cm. É feito um furo cilíndrico de raio interno igual a 5 cm, atravessando todo o cone e com o mesmo eixo.
Qual é o volume, em cm³, do sólido assim obtido?

Ⓐ 4500π.
Ⓑ 6400π.
Ⓒ $\frac{1600\pi}{3}$.
Ⓓ $5000\sqrt{7}\pi$.

Solução:

Considere a representação do sólido obtido apresentada a seguir.



Uma vez que os triângulos DEV e ACV são semelhantes, temos que

$$\frac{VD}{VA} = \frac{DE}{AC}.$$

Como, pelos dados apresentados, $VA = 40\ cm$, $DE = AB = 5\ cm$ e $AC = 20\ cm$, segue que

$$VD = \frac{5 \cdot 40}{20} = 10\ cm.$$

Isso implica que $DA = VA - VD = 40 - 10 = 30\ cm$. Logo, o volume, em cm^3, do sólido obtido é dado por

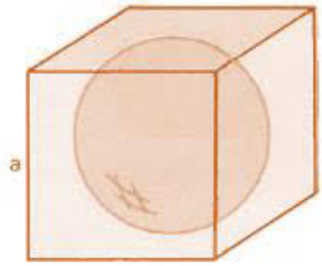
$$\begin{aligned} V_{sólido} &= V_{cone\ maior} - V_{cone\ menor} - V_{cilindro} \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot AC^2 \cdot VA - \frac{1}{3}\pi \cdot DE^2 \cdot VD - \pi \cdot AB^2 \cdot DA \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot 40 - \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 10 - \pi \cdot 5^2 \cdot 30 \\ &= \frac{16000\pi}{3} - \frac{250\pi}{3} - 750\pi \\ &= \frac{16000\pi - 250\pi - 2250\pi}{3} \\ &= \frac{13500\pi}{3} \\ &= 4500\pi. \end{aligned}$$

Resposta: A

Esfera inscrita num cubo

Se considerarmos uma esfera de raio r inscrita num cubo de aresta a, temos que seu diâmetro é igual a altura do cubo, ou seja

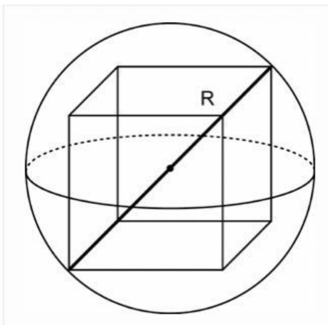
$$a = 2r.$$



Esfera circunscrita a um cubo

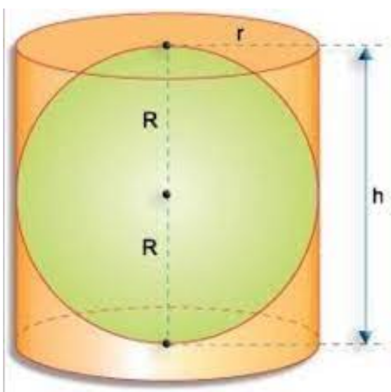
Se considerarmos uma esfera de raio R circunscrita a um cubo de aresta a, temos que seu diâmetro é igual a diagonal do cubo, ou seja:

$$2R = a\sqrt{3}.$$



Esfera inscrita num cilindro circular reto

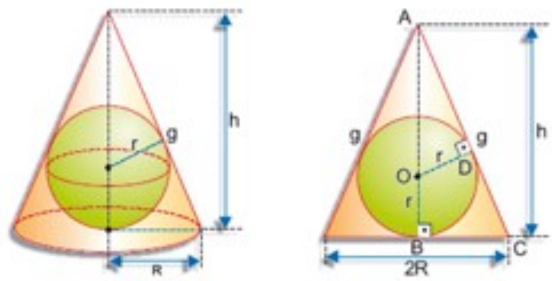
Se uma esfera está inscrita num cilindro circular reto, então ela tangencia todas as geratrizes e as bases desse cilindro. Diz-se também nesse caso que o cilindro está circunscrito à esfera.



Da imagem, temos que $h = 2R$, sendo, portanto, o cilindro em questão um cilindro equilátero.

Esfera inscrita num cone circular retor

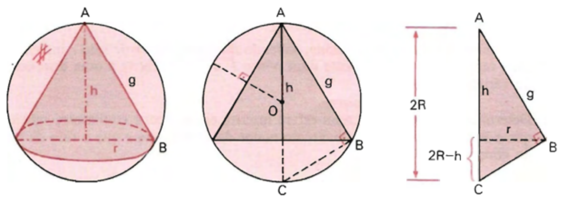
Se uma esfera está inscrita num cone circular reto, então ela tangencia todas as geratrizes e a base desse cone. Diz-se também nesse caso que o cone está circunscrito a esfera.



Um fato interessante e que pode ser muito útil na resolução de questões envolvendo esse tópico é o fato de que o triângulo AOD é semelhante ao triângulo ACB, além de ambos serem triângulos retângulos.

Esfera circunscrita a um cone circular reto

Se uma esfera está circunscrita a um cone circular reto, então o vértice do cone e a circunferência de sua base estão contidos na superfície da esfera.



Observe que o triângulo ABC é retângulo e, sendo assim, podemos aplicar as relações métricas no triângulo retângulo para identificar relações entre os elementos do cone e o raio da esfera.

Problema 05: (UFRJ 2002) Considere uma esfera E_1, inscrita, e outra esfera E_2 circunscrita a um cubo de aresta igual a 1 cm. Calcule a razão entre o volume de E_2 e o volume de E_1.

Solução:

Sejam a, r_1 e r_2, respectivamente, as medidas da aresta do cubo, do raio da esfera E_1 e do raio da esfera E_2. Sabemos que

$$r_1 = \frac{a}{2} \; e \; r_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

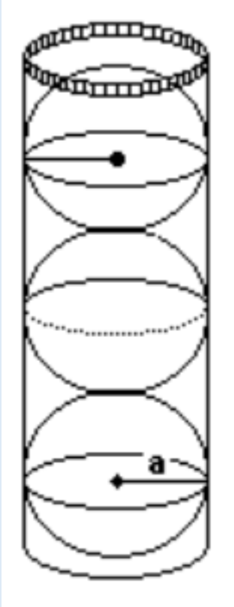
Portanto, como $a = 1cm$, temos que

$$r_1 = \frac{1}{2}\, cm \; e \; r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\, cm.$$

Logo,

$$\frac{V_{E_2}}{V_{E_1}} = \frac{\left(\frac{4}{3}\pi r_2^3\right)}{\left(\frac{4}{3}\pi r_1^3\right)} = \frac{r_2^3}{r_1^3} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot 8 = 3\sqrt{3}.$$

Problema 06: (UFSM 2000) Bolas de tênis são vendidas, normalmente, em embalagens cilíndricas contendo 3 unidades



Supondo-se que as bolas têm raio a centímetros e tangenciam as paredes internas da embalagem, o espaço interno dessa embalagem que NÃO é ocupado pelas bolas é, em cm^3,

Ⓐ $2\pi a^3$.
Ⓑ $\frac{4\pi a^3}{3}$.
Ⓒ $\frac{\pi a^3}{3}$.
Ⓓ a^3.
Ⓔ $\frac{2\pi a^3}{3}$.

Solução:

Primeiramente, observe que a altura h do cilindro que representa a embalagem é igual à soma dos diâmetros das esferas que representam as bolas de tênis, isto é, em centímetros,

$$h = 3 \cdot (2 \cdot a) = 6a.$$

Ademais, o raio da base R desse cilindro coincide com o raio das esferas, ou seja, em centímetros, $R = a$.
Logo, o espaço interno dessa embalagem que NÃO é ocupado pelas bolas é, em cm^3,

$$\begin{aligned} V &= V_{cilindro} - 3 \cdot V_{esfera} \\ &= \pi \cdot R^2 \cdot h - 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi \cdot a^3\right) \\ &= \pi \cdot a^2 \cdot (6a) - 4\pi \cdot a^3 \\ &= 6\pi a^3 - 4\pi a^3 \\ &= 2\pi a^3. \end{aligned}$$

Resposta: A

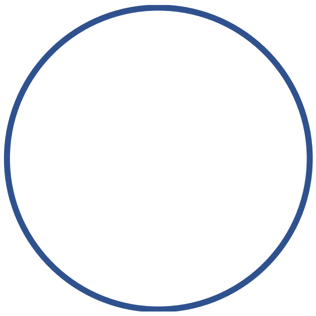
Hora de Praticar

Questão 01

(Ronaebson)

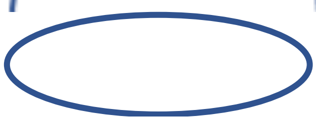
Considere a roda gigante a seguir e ponto A no seu topo.

Qual das figuras representa a projeção ortogonal do ponto A no plano do solo durante uma volta completa da roda-gigante?

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

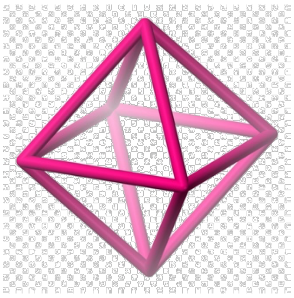
Ⓓ 

Ⓔ 

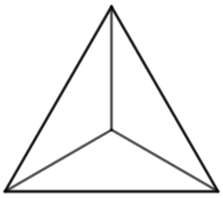
Questão 02

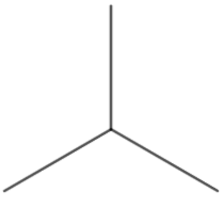
(Ronaebson)

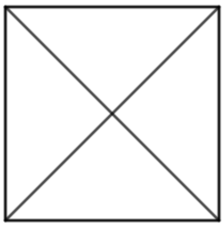
Leonard organizou uma exposição ao ar livre numa praia. Uma das peças expostas é um octaedro regular formado apenas por suas arestas constituídas de arame perfeitamente esticado. Toda estrutura é sustentada por cabos extrafinos que não interferem no formato da construção e a peça ficou posicionada de tal modo que o segmento que liga dois de seus vértices opostos ficou precisamente na vertical.

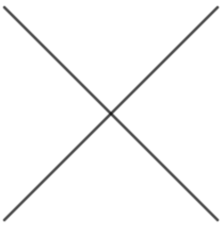


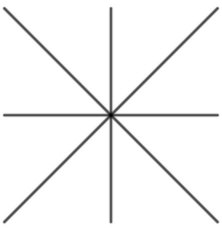
Com o sol a pino, essa peça projeta ortogonalmente uma sombra sobre o solo, representada por

A 

B 

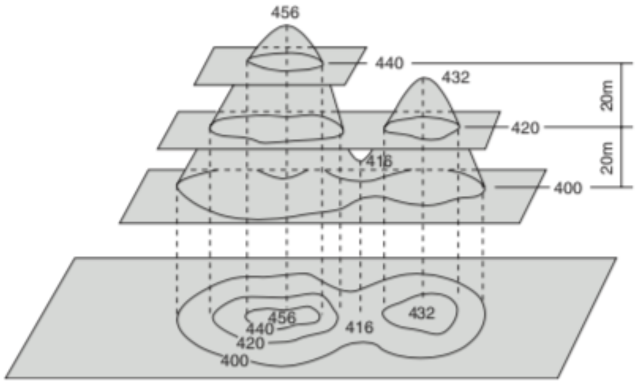
C 

D 

E 

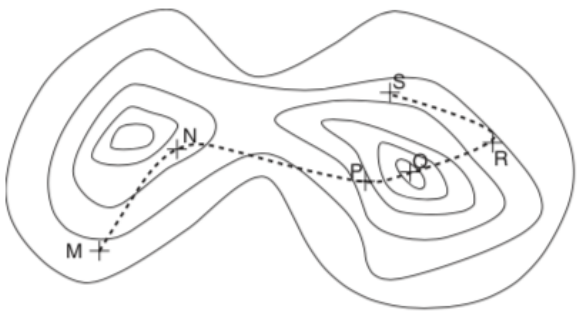
Questão 03

A técnica usada para representar o relevo do terreno nos mapas consiste em imaginar uma série de planos horizontais equidistantes "fatiando" as elevações e desenhando-se no mapa as intersecções desses planos horizontais com o contorno do terreno, como indicado na figura 1. Essas linhas são denominadas curvas de nível, pois correspondem a um conjunto de pontos que têm a mesma altitude.



Disponível em: <www.ibge.gov.br/home/geociencias/cartografia>.

A figura 2 representa uma parte de um mapa com as curvas de nível de uma montanha e o itinerário de uma trilha percorrida por um grupo de estudantes, que partiram do ponto M e chegaram ao ponto S, passando pelos pontos indicados.



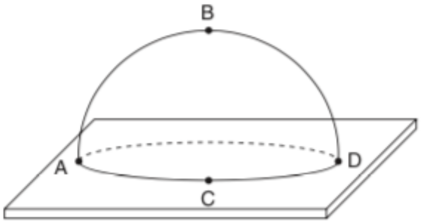
O trecho desse percurso que tem necessariamente aclives (subidas) e declives (descidas) é

- **A** MN.
- **B** NP.
- **C** PQ.
- **D** QR.
- **E** RS.

ANOTAÇÕES:

Questão 04

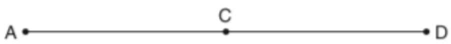
Uma tigela no formato de uma semiesfera está apoiada em um tampo de madeira, conforme figura abaixo. Os pontos A, C e D são pontos de intersecção entre a semiesfera e o tampo de madeira, sendo o segmento AD um diâmetro máximo da esfera e C um ponto equidistante dos pontos A e D. O ponto B é o topo da semiesfera, ou seja, o ponto mais alto.

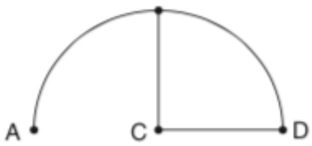


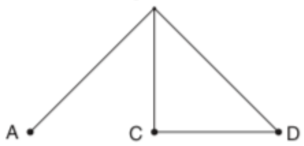
Uma formiga, inicialmente no ponto A, percorre o seguinte trajeto pela superfície da semiesfera:

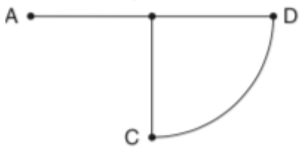
- Vai do ponto A até o ponto B pelo caminho de menor distância;
- Segue até o ponto C pelo caminho de menor distância;
- Vai até o ponto D pelo caminho de menor distância;
- Retorna ao ponto B pelo caminho de menor distância.

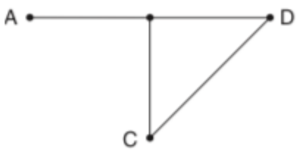
A alternativa que melhor representa a projeção ortogonal do caminho ABCDB percorrido pela formiga na superfície semiesférica no tampo da mesa é

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

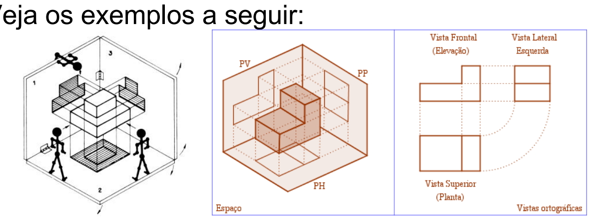
Ⓔ 

Questão 05

(Ronaebson)

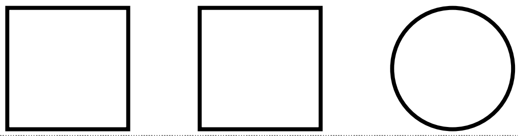
A projeção ortogonal é uma ferramenta bastante utilizada na área do desenho técnico para conseguir a representação gráfica de um objeto. Existem três grandes planos de projeção: de perfil (PP), vertical (PV) e horizontal (PH). A intersecção destes planos é feita em ângulos de noventa graus (isto é, ângulos retos), formando diversos quadrantes. Todos os objetos, por conseguinte, podem ser projetados nestes quadrantes. Tais projeções são indispensáveis na indústria, pelo fato de ser necessário conhecer todas as perspectivas de um objeto antes de iniciar a sua fabricação. Estas projeções surgiram no século XVIII e foram impulsionadas por Gaspard Monge.

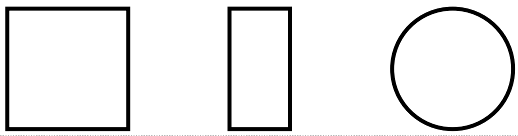
Veja os exemplos a seguir:

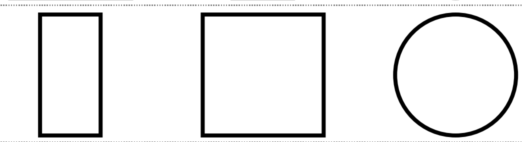


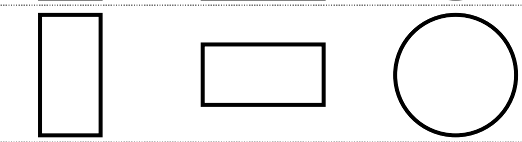
Considerando que a lata de leite moça da figura a seguir tenha a forma de um cilindro equilátero, temos que suas vistas frontal, lateral e superior são, respectivamente:

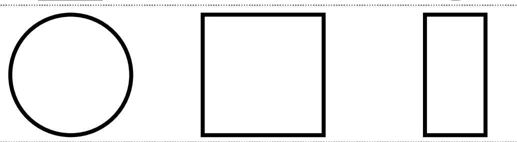
	VISTA FRONTAL	VISTA LATERAL	VISTA SUPERIOR

Ⓐ 

Ⓑ 

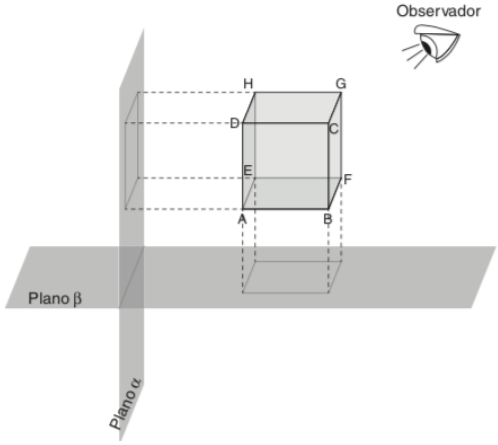
Ⓒ 

Ⓓ 

Ⓔ 

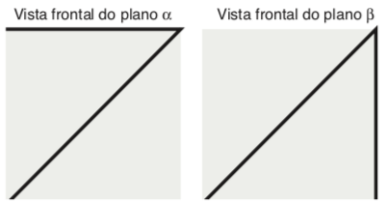
Questão 06

A épura é uma representação geométrica de objetos tridimensionais muito usada em Geometria Descritiva e em Desenho Técnico. Essa representação é obtida a partir de projeções ortogonais em planos α e β, como mostrado na figura a seguir.

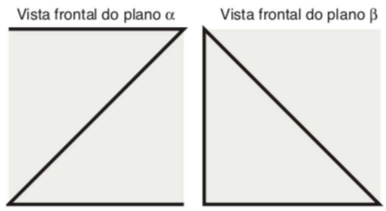


É possível representar, nesses planos, uma trajetória (um caminho percorrido entre alguns pontos). Assim, traçando os segmentos de reta AE, EH, HB e BG, serão formadas, segundo o observador mostrado, respectivamente, nos pontos α e β, as seguintes projeções:

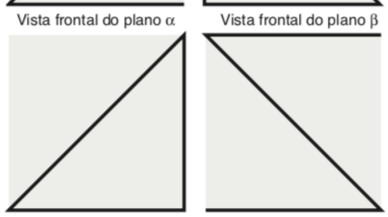
A



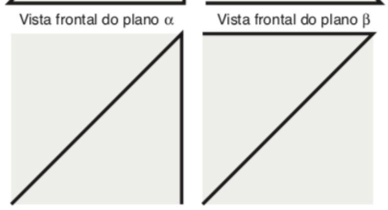
B



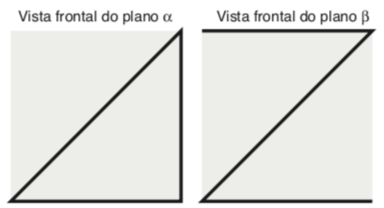
C



D



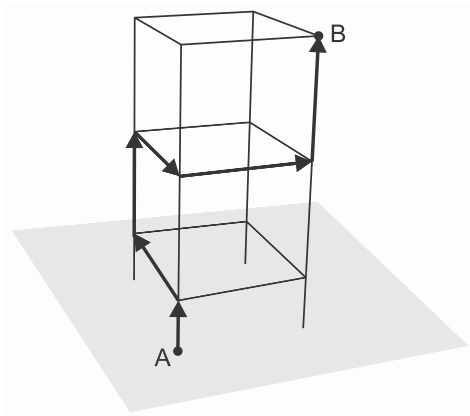
E



Questão 07

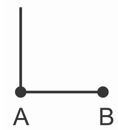
(ENCCEJA)

Uma pessoa que se encontrava em um parque observou a movimentação de um esquilo sobre um dos brinquedos desse parque. A figura indica o percurso feito pelo esquilo, iniciado no ponto A e finalizado no ponto B.

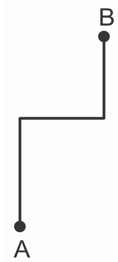


A projeção sobre o plano do chão, feita de forma perpendicular ao solo, do percurso feito pelo esquilo sobre o brinquedo é

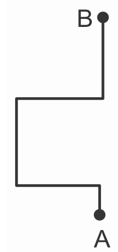
A



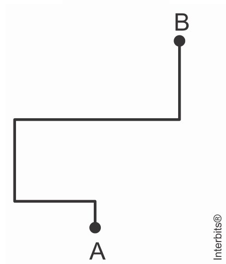
B



C



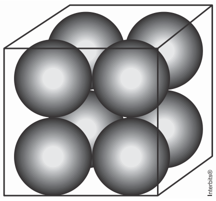
D



Questão 08

(UEMA_2021)

O fabricante de uma das melhores bolas de basquete do país está colocando à venda uma embalagem cúbica, contendo 8 unidades, conforme a figura a seguir.



Considerando que cada bola de basquete tem raio igual a "r" cm e que tangenciam todos os lados internos das faces da embalagem cúbica, o valor, em cm^3, do espaço vazio dentro da caixa, ou seja, o espaço não preenchido pelas bolas de basquete é

A) $\dfrac{32r^3(6-\pi)}{3}$

B) $\dfrac{4r^3(48-\pi)}{3}$

C) $\dfrac{8r^3(3-4\pi)}{3}$

D) $\dfrac{4r^3(6-\pi)}{3}$

E) $\dfrac{32r^3(3-\pi)}{3}$

Questão 09

(UECE_2017)

Considerando-se um cubo cuja medida de cada aresta é igual a $1\,m$ pode-se afirmar corretamente que a medida do volume do poliedro convexo cujos vértices são os centros das faces desse cubo é

A) $\frac{2}{3}\ m^3$.

B) $\frac{2}{7}\ m^3$.

C) $\frac{1}{6}\ m^3$.

D) $\frac{4}{7}\ m^3$.

Questão 10

(UFJF)

Uma peça de ornamentação confeccionada com vidro possui a forma de um prisma regular reto, cuja base é um triângulo equilátero. Em seu interior, há uma esfera representando o globo terrestre, que tangencia cada face do prisma. Sabendo que o raio da esfera é *r*, qual é o volume do prisma?

A) $\sqrt{3}r^3$.

B) $2\sqrt{3}r^3$.

C) $3\sqrt{3}r^3$.

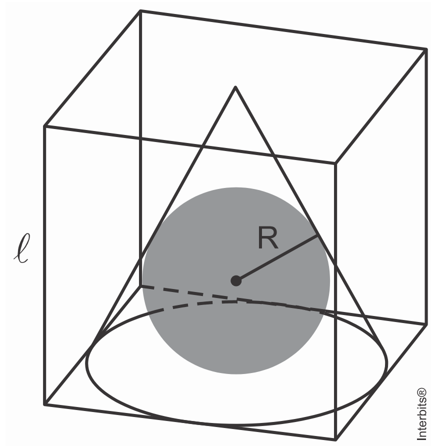
D) $6\sqrt{3}r^3$.

E) $8\sqrt{3}r^3$.

Questão 11

(UFU_2021)

Um cone reto está inscrito num cubo de lado ℓ, de modo que a base do cone esteja contida numa face do cubo, e uma esfera de raio R está inscrita neste cone, como ilustra a figura abaixo.



A razão entre o raio R e o lado ℓ é igual a

A) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

B) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

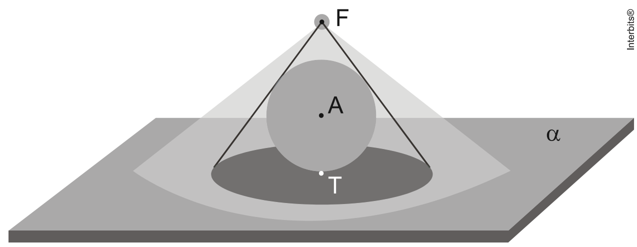
C) $(\sqrt{5}-1)\pi$.

D) $(\sqrt{5}+1)\pi$.

Questão 12

(UERJ)

Uma esfera de centro A e raio igual a 3 dm é tangente ao plano α de uma mesa em um ponto T. Uma fonte de luz encontra-se em um ponto F de modo que F, A e T são colineares. Observe a ilustração:



Considere o cone de vértice F cuja base é o círculo de centro T definido pela sombra da esfera projetada sobre a mesa.
Se esse círculo tem área igual à da superfície esférica, então a distância $\overline{FT}$, em decímetros, corresponde a:

A) 10

B) 9

C) 8

D) 7

Questão 13

(UPF_2021)

Em geral, metais, grande parte dos cerâmicos e certos polímeros cristalizam-se quando se solidificam. Os átomos se arranjam em uma estrutura tridimensional ordenada e repetida. Estas estruturas são chamadas cristais.
A célula unitária é o menor volume repetido no interior de um cristal. É a unidade básica repetitiva da estrutura tridimensional do cristal e é escolhida para representar a simetria da estrutura cristalina. Duas das geometrias básicas das células unitárias são a cúbica de corpo centrado (Figura a) e a cúbica de face centrada (Figura b), ilustradas esquematicamente a seguir.

Figura 1: Agregado de muitos átomos para a estrutura cristalina: (a) cúbica de corpo centrado e (b) cúbica de face centrada.

A rede cúbica de corpo centrado (CCC) é uma rede cúbica na qual existe um átomo em cada vértice, que na célula unitária é representado por $\frac{1}{8}$ de átomo, e um átomo no centro do cubo. Os átomos se tocam ao longo da diagonal.

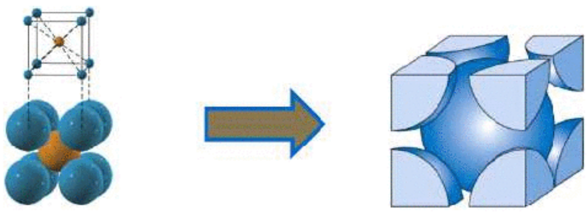


Figura 2: estrutura da célula unitária cúbica de corpo centrado (CCC).

A rede cúbica de face centrada (CFC) é uma rede cúbica na qual existe um átomo em cada vértice e um átomo no centro de cada face do cubo, na célula unitária compondo $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{2}$ de átomo, respectivamente. Os átomos se tocam ao longo das diagonais das faces do cubo.

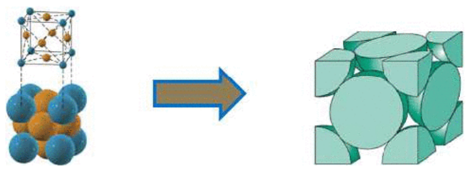


Figura 3: Estrutura da célula cúbica de face centrada (CFC).

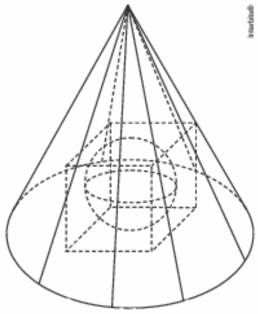
Sendo a a medida da aresta do cubo da célula unitária, a medida do raio r dos átomos na rede cúbica de face centrada (Figura 3) é expressa por:

- **A** $r = \frac{a}{4}$.
- **B** $r = \frac{a}{2}$.
- **C** $r = 2\sqrt{a}$.
- **D** $r = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.
- **E** $r = \frac{\sqrt{a}}{2}$.

Questão 14

(EPCAR_2021

Considere a figura a seguir:



Desenho fora de escala

Nela está representada a inscrição de uma esfera num cubo que, por sua vez, está inscrito num cone equilátero, de tal forma que uma de suas faces está apoiada na base do cone e os vértices da face oposta estão na lateral do cone. A projeção ortogonal do vértice do cone à sua base contém dois pontos de tangência da esfera com o cubo.
Se R e r são, respectivamente, as medidas do raio da base do cone e do raio da esfera, em cm, então

- **A** $\frac{R}{r} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.
- **B** $\frac{r}{R} = \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}$.
- **C** $\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{3}$.
- **D** $\frac{r}{R} = \frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}$.

Gabarito_Projeções	
Hora de Praticar	
Questão	**Resposta**
01	B
02	C
03	B
04	D
05	A
06	E
07	A
08	A
09	C
10	D
11	A
12	C
13	D
14	B