FUNÇÕES III

Função Inversa

O conceito de função inversa que apresentaremos agora está relacionado, como o próprio nome diz, com a inversa de uma função, ou seja, representa o efeito inverso da função. Por exemplo, se a função f(x) representa a conversão da temperatura em graus Celcius para Kelvin, então se fizermos a inversa ($f(x)^{-1}$) representará a conversão de Kelvin para graus Celcius. Outra ideia de função inversa é trocarmos o valor de x para o valor de y, por exemplo, dado o ponto (3,4) de uma função, sua inversa conterá o ponto (4,3). Para isto, apresentaremos agora o método para se achar a $f(x)^{-1}$.

Seja a função $f(x) = x$ ou $y = x$, então para acharmos a inversa precisam-se seguir os passos abaixo:

1) Dada a função $f(x)$, troque o Y por X.

2) Troque o X por Y.

3) Isole o Y.

Apenas com esses 3 passos conseguimos encontrar a função inversa $f(x)^{-1}$.

Veremos alguns exemplos abaixo.

Exemplo 1:

Dada a função $y = 2x + 3$ calcule a inversa.

Vamos então seguir os passos!

1) Troque o Y por X

2) Troque o X por Y

Então:

$\boldsymbol{x} = 2.\boldsymbol{y} + 3$

Agora o passo 3) Isole y:

$x - 3 = 2.y$

$y = \frac{x-3}{2}$

Portanto, a inversa de $y = 2x + 3$ é a $função$ $y = \frac{x-3}{2}$

Exemplo 2:

Calcule a inversa de y = 3x – 1

Seguiremos os três passos novamente!

1) Troque o Y por X

2) Troque o X por Y

Então:

$\boldsymbol{x} = 3.\boldsymbol{y} - 1$

E por fim:

3) Isole y.

$x + 1 = 3y$

$y = \frac{x+1}{3}$

Portanto, a inversa de $y = 3x - 1$ é $y = \frac{x+1}{3}$

Exemplo 3:

Calcule a inversa de y = $\frac{2x+1}{x+9}$

Apesar de esse exemplo parecer um pouco mais difícil, seguiremos os três passos.

1) Troque Y por X.

2) Troque X por Y.

$x = \frac{2y+1}{y+9}$

3) Isole Y.

$x.(y + 9) = 2y + 1$

$xy + 9x = 2y + 1$

$2y - xy = 9x - 1$

$y(2 - x) = 9x - 1$

Portanto:

$y = \frac{9x-1}{2-x}$, que por sua vez é a inversa de y = $\frac{2x+1}{x+9}$

Exemplo 4:

Calcule a inversa de $y = x^3 + 1$

Primeiramente trocaremos Y por X e X por Y.

$x = y^3 + 1$

Agora isolaremos y:

$y^3 = x - 1$

Portanto:

$y = \sqrt[3]{x-1}$, que por sua vez, é a inversa da função $y = x^3 + 1$

Relação entre gráficos da função f(x) e da sua inversa $f(x)^{-1}$:

Como sabemos, se a função contiver um ponto (x,y), sua inversa conterá o ponto (y,x), por esse motivo, os gráficos das função e de sua inversa serão SIMÉTRICOS em relação à reta y=x, ou ainda, os gráficos da $f(x)$e da $f(x)^{-1}$ são reflexões em relação a reta x=y.

Exemplo 1:

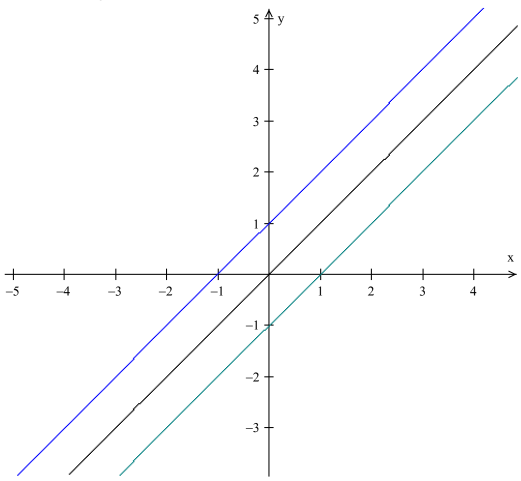
Dada a função $y = x + 1$, calcule sua inversa e o gráfico da inversa.

Primeiramente trocaremos Y por X e X por Y:

$x = y + 1$

Isolando y:

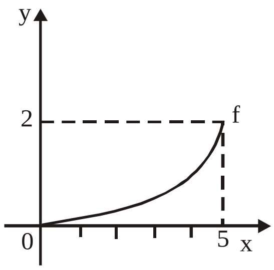
$y = x - 1$



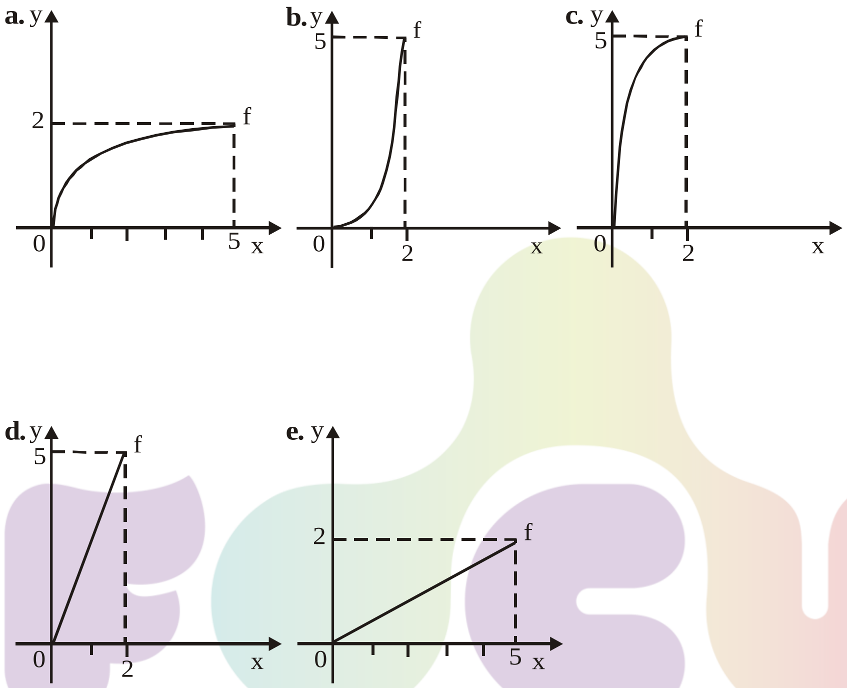
A reta azul representa a função $y = x + 1$ e a reta verde representa a função $y = x - 1$. Podemos ver claramente que a reta azul e a reta verde são simétricas a reta preta (y=x).

Exemplo 2:

A função f: [0,5] → [0,2] representada no gráfico é bijetora.



Dos gráficos abaixo, o que melhor representa a função **f** $^{-1}$, inversa de **f**, é...



Pelo gráfico sabemos que quando a x vale 5, f(x) = 2, então sabemos que quando x = 2 na função inversa, y = 5.

E ainda sabemos que o gráfico da função f(x) e de sua inversa são simétricos em relação a reta y=x.

Com essas informações podemos afirmar que o gráfico da função inversa $f(x)^{-1}$ é o gráfico da letra C, em que é simétrico em relação à reta y=x e possui o ponto (2,5).

Exemplo 3:

Sendo f:R → R^*_+ a função definida por f(x) = 2^x, então a expressão que define a função inversa de f é:

Novamente para esse exemplo, iremos utilizar os três passos:

1) Troca o Y por X

2) Troca o X por Y

Então:

$x = 2^y$

Precisamos agora isolar o Y.

Aplicarmos logaritmo dos dois lados da equação:

$logx = \log(2^y)$

Pela propriedade do logaritmo:

$logx = y.log2$

$y = \frac{logx}{log2}$

Então:

$y = log_2^x$ é a função inversa de $f(x) = 2^x$

Função Composta

Como já sabemos, as funções exercem um papel de relação de proporcionalidade entre duas variáveis, através de uma expressão. A função composta que veremos é um tipo especial dessas funções, em que relaciona duas funções a uma terceira. Escreveremos fog (lê-se "f bola g"") para denominarmos a função composta, ou seja a função f é aplicada em g(x). Por exemplo, se a taxa de emissão de gases poluentes em uma indústria depende do número de máquinas que operam, que por sua vez, é proporcional ao tempo de uso dessas máquinas, então podemos relacionar a taxa de emissão com o tempo diretamente com uma função composta.

Para resolvermos os exercícios, substituiremos a função de "dentro" na variável x da função de "fora". Veremos abaixo alguns exemplos.

Exemplo 1:

Dadas as funções f(x) = x + 3 e g(x) = 2x, faça as composições fog e gof.

Para descobrirmos a função f(g(x)), vamos olhar para a função f(x):

$f(x) = x + 3$ no lugar do x colocaremos a função g(x):

$f\big(g(x)\big) = g(x) + 3$ Ou seja:

$f\big(g(x)\big) = 2x + 3$

Agora faremos o contrário para achar a gof:

$g(x) = 2.x$ Colocaremos a f(x) no lugar do x:

$g(f(x)) = 2.f(x)$ Ou seja:

$g(f(x)) = 2.(x + 3)$

$g\big(f(x)\big) = 2x + 6$

Exemplo 2:

Sendo f(x) = 3x + 7 e g(x) = 4x – 1, faça fog.

Nesse caso, o exercício pede fog, ou seja, f(g(x)).

Então:

$f(x) = 3.x + 7$ Vamos substituir a g(x) no lugar do x da função f(x).

$f\big(g(x)\big) = 3.g(x) + 7$

$f\big(g(x)\big) = 3.(4x - 1) + 7$

$f\big(g(x)\big) = 12x - 3 + 7$ Então a função procurada é:

$fog = 12x + 4$

Exemplo 3:

Sendo f(x) = x + 2 e g(x) = x^2 -2, faça gof.

O exemplo nos pede gof, ou seja, g(f(x)).

$g(x) = x^2 - 2$ Usaremos o mesmo procedimento do exercício anterios, colocaremos a f(x) no lugar do X da função g(x).

$g\big(f(x)\big) = (x + 2)^2 - 2$

$g\big(f(x)\big) = x^2 + 4x + 4 - 2$ Então:

$gof = x^2 + 4x + 2$

Determinar a função g(x) sabendo que f(x) = 5x e fog = 10x + 20:

Temos agora a função fog e queremos achar a g(x).

Sabemos que a função fog é obtida trocando o X da função f(x) por g(x). Portanto:

$fog = 5.g(x)$

Mas o exercício nos deu também que a fog é:

$fog = 10x + 20$

Podemos igualar as duas expressões para achar g(x):

$5.g(x) = 10x + 20$

$g(x) = \frac{10x+20}{5}$ Então:

$g(x) = 2x + 4$

Exemplo 5:

Se f(x) = x^2 + 1 e g(x) = 2x, calcule f(g(2)).

Nesse exercício, a única diferença é que nos dá um valor inicial, porém usaremos o mesmo procedimento para achar a f(g(x)).

Trocaremos o X da função f(x) por g(x).

$f(x) = x^2 + 1$

$f(g(x)) = g(x)^2 + 1$

$f(g(x)) = (2x)^2 + 1$ Portanto:

$f(g(x)) = 4x^2 + 1$

Então agora trocaremos o x por 2 pois o exercício pede f(g(2)):

$f(g(2)) = 4.2^2 + 1 = 17$