PROJETO MÚLTIPLO

Luiz Roberto Dante

Caderno de Estudo

Matemática

Ensino Médio

VOLUME 1

editora ática

PROJETO MÚLTIPLO

Caderno de Estudo

Matemática

Ensino Médio

Luiz Roberto Dante

Livre-docente em Educação Matemática pela Unesp – Rio Claro, SP.
Doutor em Psicologia da Educação: Ensino da Matemática, pela PUC – São Paulo.
Mestre em Matemática pela USP.
Pesquisador em ensino e aprendizagem da Matemática pela Unesp – Rio Claro, SP.
Ex-professor da rede estadual do Ensino Fundamental e Médio – São Paulo.
Autor de vários livros, entre os quais: *Formulação e resolução de problemas de Matemática – Teoria e prática; Didática da Matemática na pré-escola; Projeto Ápis – Matemática* (1º ao 5º ano); *Projeto Teláris Matemática* (6º ao 9º ano); *Projeto Voaz Matemática* (Ensino Médio – volume único); *Matemática – Contextos & Aplicações* (Ensino Médio – volume único).

editora ática

editora ática

Diretoria editorial: Lidiane Vivaldini Olo
Editoria de Ciências Exatas: Cármen Matricardi
Editoras: Monique Matos de Oliveira,
Cibeli de Oliveira Chibante Bueno, Letícia Mancini Martins (estag.)
Colaboradora editorial: Pamela Hellebrekers Seravalli
Supervisor de arte e produção: Sérgio Yutaka
Supervisor de arte e criação: Didier Moraes
Coordenadora de arte e criação: Andréa Dellamagna
Editor de arte: André Gomes Vitale
Diagramação: Wander Camargo
Design gráfico: UC Produção Editorial, Andréa Dellamagna (miolo e capa)
Gerente de revisão: Hélia de Jesus Gonsaga
Equipe de revisão: Rosângela Muricy (coord.), Ana Paula Chabaribery Malfa, Claudia Virgilio, Vanessa de Paula; Flávia Venézio dos Santos e Gabriela Macedo de Andrade (estags.)
Supervisor de iconografia: Sílvio Kligin
Pesquisadora iconográfica: Cláudia Bertolazzi
Tratamento de imagem: Cesar Wolf e Fernanda Crevin
Foto da capa: Photoff/Shutterstock/Glow Images
Grafismos: Shutterstock/Glow Images
(utilizados na capa e aberturas de capítulos e seções)
Ilustrações: Dam d'Souza e Theo Szczepanski

Direitos desta edição cedidos à Editora Ática S.A.
Av. das Nações Unidas, 7221, 3º andar, setor C
Pinheiros – São Paulo – SP
CEP 05425-902
Tel.: 4003-3061
www.atica.com.br/editora@atica.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Dante, Luiz Roberto
Projeto Múltiplo: Matemática : ensino médio /
Luiz Roberto Dante. -- São Paulo : Ática, 2014.

Obra em 3 v.

1. Projeto Múltiplo: Matemática (Ensino médio)
I. Título.

14-02256 CDD-510.7

Índice para catálogo sistemático:
1. Projeto Múltiplo: Matemática : Ensino médio 510.7

2014
ISBN 978 85 08 16749-4 (AL)
ISBN 978 85 08 16750-0 (PR)
Código da obra CL 737769
CAE 501141 (AL)
CAE 501142 (PR)
1ª edição
1ª impressão

Impressão e acabamento

Uma publicação Abril EDUCAÇÃO

Apresentação

O Ensino Médio é a época na qual a maioria dos adolescentes faz uma escolha que os acompanhará por toda a vida: a da profissão que desejam seguir.

Além da profissão, a escolha da universidade também é um fator decisivo para o seu futuro sucesso profissional. E para que você tenha um bom desempenho no exame vestibular da universidade que escolher, além de conhecer muito bem todo o conteúdo do Ensino Médio, você deve ter uma ótima habilidade em resolver exercícios. Por esse motivo, este caderno reúne mais de 200 questões das mais renomadas universidades do país, questões de níveis complexos, que, no todo, representam um momento único de preparação para o vestibular. Para auxiliá-lo com as resoluções, cada sequência de exercícios de um mesmo tema é precedida por quadros-resumos que sintetizam os principais tópicos do conteúdo.

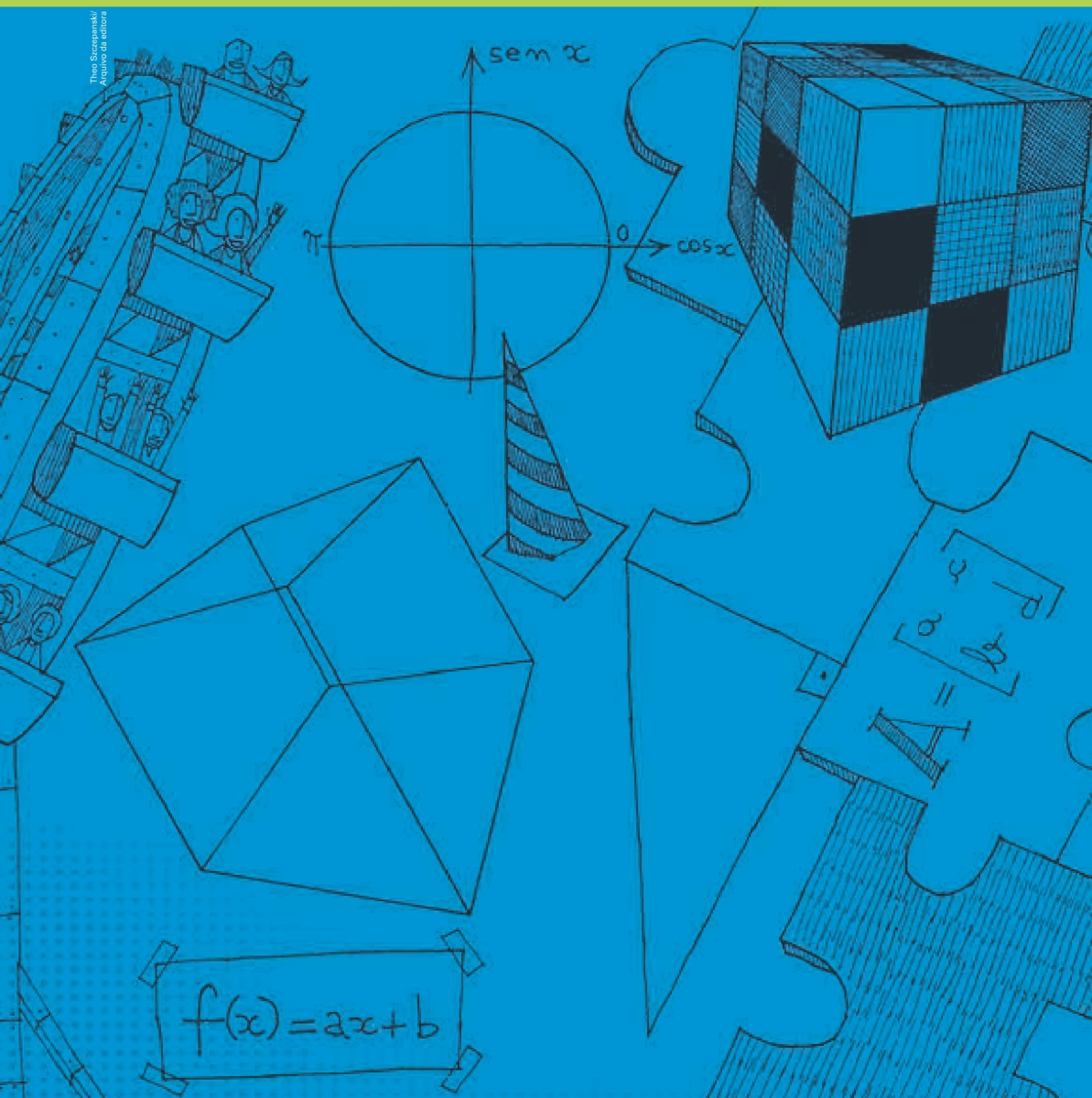
Encare o período de estudo com este caderno como oportunidade de aperfeiçoar sua capacidade de resolver exercícios de forma rápida e segura.

Utilize este caderno como um instrumento de aperfeiçoamento de suas habilidades e não desista dos seus sonhos.

Boa sorte!

Sumário

Vestibular em foco



Theo Szczepanski/
Arquivo da editora

CONJUNTOS

Noções

Definição
Conjunto é uma coleção qualquer de objetos. Todo conjunto é formado por elementos.

Subconjuntos
- O conjunto A é subconjunto de um conjunto B se todos seus elementos também forem elementos de B.
- Um conjunto A com n elementos possui 2n subconjuntos.

Relações

Relação de pertinência
- Se x é elemento do conjunto B, então x pertence a B.
- Notação: $\in$ (pertence) e $\notin$ (não pertence).

Relação de inclusão
- Se o conjunto A é subconjunto do conjunto B, então A está contido em B.
- Notação: $\subset$ (contido) e $\not\subset$ (não está contido).

Tipos

Vazio
- Não possui elementos.
- Notação: $\varnothing$ ou { }

Unitário
Formado por um único elemento.

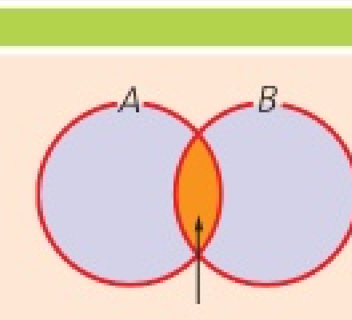
Finito
Tem um número limitado de elementos.

Infinito
Tem um número ilimitado de elementos.

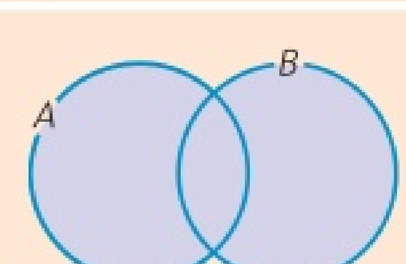
Universo
- Formado por todos os elementos com os quais estamos trabalhando em um determinado assunto.
- Notação: U

Operações

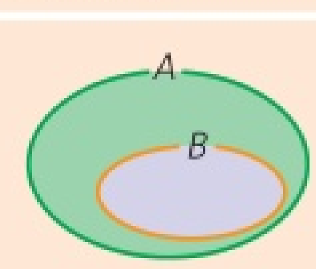
Intersecção ($\cap$)
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$



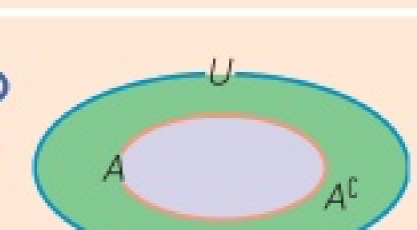
Reunião ou união ($\cup$)
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- Número de elementos da união: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$



Diferença
$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$



Complementar de um conjunto
$A^C = \{x \mid x \in U \text{ ou } x \notin A\}$



Conjuntos numéricos

Números naturais ($\mathbb{N}$)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

Números inteiros ($\mathbb{Z}$)

$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

Números racionais ($\mathbb{Q}$)

- $\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \dfrac{a}{b}, \text{com } x \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\right\}$
- Exemplos: $-2, -\dfrac{3}{2}, 0, \dfrac{10}{2}$, etc.

Números irracionais ($\mathbb{I}_r$)

- Não admitem uma representação decimal exata nem uma representação na forma de dízima periódica.
- Exemplos: $\pi, \phi, -\sqrt{3}, \sqrt{2}$, etc.

Números reais ($\mathbb{R}$)

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}_r = \{x \mid x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}$

Módulo de um número real

Para $r \in \mathbb{R}$, temos:
$|r| = r$, se $r \geqslant 0$ e $|r| = -r$, se $r < 0$

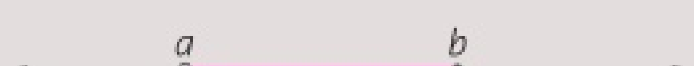
Intervalos reais

- $(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$

- $[a, b) = [a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$

- $(a, b] =]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$



- $(-\infty, b] =]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$

- $(-\infty, b) =]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

- $[a, +\infty) = [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$

- $(a, +\infty) =]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

- $(-\infty, +\infty) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Números complexos ($\mathbb{C}$)

- $\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi, \text{com } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$
- Exemplos: $z = 2 + 5i$, $z = 5$, $z = -3i$, etc.

Exercícios

1. (UFT-TO) Uma Instituição de Ensino Superior oferece os cursos A e B. Em seu processo seletivo o candidato pode optar por inscrever-se nos dois cursos ou apenas em um curso. Ao final, o número de inscrições por curso e o número total de candidatos inscritos pode ser observado no quadro que segue:

Número de inscrições no Curso *A*	**Número de inscrições no curso *B***	**Número total de candidatos inscritos**
480	392	560

Com base nas informações acima e nas possibilidades de inscrições, pode-se afirmar que o número de candidatos que optaram por inscrever-se somente no curso A foi:

a) 80. b) 168. c) 312. d) 480. e) 560.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 560 = 480 + 392 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 312$

Logo, $480 - 312 = 168$ inscritos somente no curso A.

Resposta: alternativa **b**.

2. (UEFS-BA) Em um grupo de 40 casas, sabe-se que 28 são brancas, 19 possuem jardim e 12 possuem piscina. Considerando-se essa informação e as proposições:

I. Há, pelo menos, 7 casas brancas com jardim.

II. Não há nenhuma casa com jardim e piscina.

III. Há, pelo menos, 9 casas sem jardim nem piscina.

Pode-se afirmar, com certeza, que:

a) a proposição II é verdadeira.

b) as proposições I e II são verdadeiras.

c) as proposições II e III são verdadeiras.

d) as proposições I e III são verdadeiras.

e) as proposições I, II e III são verdadeiras.

Como $28 + 19 + 12 = 59$ e só temos 40 casas, significa que há intersecção.
Casas brancas e casas com jardim totalizam 47, portanto há pelo menos 7 casas brancas com jardim. A proposição **I** é verdadeira.
Casas com jardim e casas com piscina totalizam 31 casas, então pelo menos 9 casas não têm jardim nem piscina. A afirmação **III** é verdadeira.
A proposição **II** não pode ser afirmada com certeza.
Portanto, **I** e **III** são verdadeiras.
Resposta: alternativa **d**.

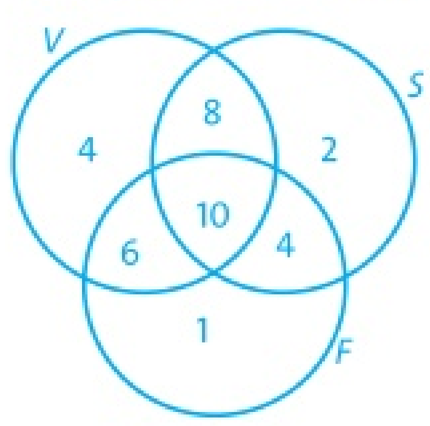
3. (Emescam-ES) Um pesquisador em Medicina fez um estudo do tratamento de uma doença grave com um grupo homogêneo de setenta cobaias não humanas analisando três tipos de intervenções (vacina, medicamento sintético e medicamento fitoterápico). As cobaias foram aleatoriamente divididas em sete grupos com iguais quantidades de membros, sendo três desses grupos submetidos somente a um tipo de tratamento, outros três grupos submetidos a dois tipos simultâneos de tratamentos e um grupo foi submetido aos três tratamentos ao mesmo tempo. Dentre as cobaias que foram curadas da doença, o estudo revelou o seguinte resultado quanto ao uso do tratamento:

— Dez foram submetidas aos três tratamentos simultaneamente;
— Vinte e oito foram vacinadas;
— Vinte e quatro tomaram medicamento sintético;
— Vinte e uma tomaram medicamento fitoterápico;
— Dezoito foram vacinadas e tomaram medicamento sintético;
— Seis usaram somente a vacina e o medicamento fitoterápico juntos;
— Duas usaram somente medicamento sintético.

Usando os dados acima, podemos afirmar que o número total de cobaias curadas foi de:

a) 109. b) 99. c) 73. d) 56. e) 35.

Considere V: vacina; S: medicamento sintético; F: medicamento fitoterápico.

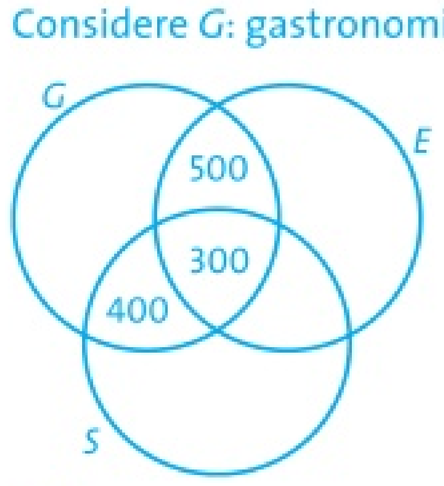


Logo:
$4 + 8 + 2 + 6 + 10 + 4 + 1 = 35$
Resposta: alternativa **e**.

4. (Udesc) Uma das últimas febres da internet são os *sites* de compras coletivas, que fazem a intermediação entre anunciantes e consumidor final, oferecendo cupons com grande percentual de descontos na compra de produtos e/ou serviços. O gestor de um destes *sites*, preocupado em acompanhar essa tendência e ao mesmo tempo oferecer novas opções para seus clientes, tabulou os dados referentes aos negócios realizados por sua empresa durante o ano de 2011. De posse desses dados, ele (gestor) percebeu que em seu *site* foram ofertados cupons apenas nas seguintes categorias: Gastronomia, Entretenimento e Saúde&Beleza. Além disso, considerando apenas os cinco mil clientes cadastrados que efetuaram a compra de pelo menos uma oferta do seu *site*, o gestor notou que 52% destes adquiriram cupons do segmento Gastronomia, enquanto 46% aderiram a ofertas de Saúde&Beleza e 44% compraram itens relacionados a Entretenimento. O gestor notou também que apenas 300 clientes compraram cupons dos três segmentos disponíveis, enquanto que 800 clientes adquiriram ofertas de Gastronomia e Entretenimento e 700 compraram itens de Gastronomia e Saúde&Beleza. Então a soma do número de clientes deste *site* que comprou ofertas relacionadas, exatamente, a um dos três segmentos disponíveis é:

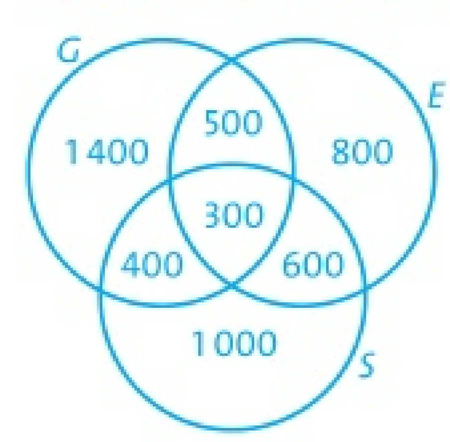
a) 3 800. b) 2 600. c) 3 200. d) 2 200. e) 3 000.

Considere G: gastronomia; E: entretenimento; S: saúde e beleza.



Então:
• $n(G) = 0{,}52 \cdot 5\,000 = 2\,600$
• $n(S) = 0{,}46 \cdot 5\,000 = 2\,300$
• $n(E) = 0{,}44 \cdot 5\,000 = 2\,200$

Logo:
$n(E \cup S) = 5\,000 - 1\,400 = 3\,600 \Rightarrow$
$\Rightarrow n(E \cup S) = n(E) + n(S) - n(E \cap S) \Rightarrow$
$\Rightarrow 3\,600 = 2\,200 + 2\,300 - n(E \cap S) \Rightarrow n(E \cap S) = 900$



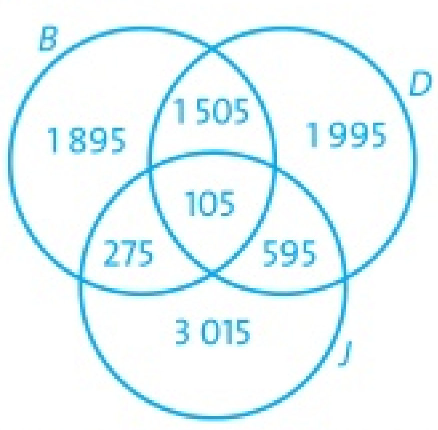
Portanto:
$1\,400 + 1\,000 + 800 = 3\,200$
Resposta: alternativa **c**.

5. (Udesc) O Festival de Dança de Joinville é considerado o maior do mundo pelo *Guinness Book of Records* de 2005. Desde 1998, este festival é realizado no Centreventos Cau Hansen, que tem capacidade para 4 200 pessoas por noite. Suponha que no 28º Festival de Dança, realizado em julho de 2010, houve uma noite exclusiva para cada uma das seguintes modalidades: *ballet*, dança de rua e *jazz*. A noite da dança de rua teve seus ingressos esgotados; na noite do *jazz* restaram 5% dos ingressos; e a noite do *ballet* teve 90% dos ingressos disponíveis vendidos. Sabe-se que algumas pessoas costumam prestigiar mais de uma noite do Festival. Neste ano, 700 pessoas assistiram à dança de rua e ao *jazz*; 1 610 assistiram ao *ballet* e à dança de rua; 380 assistiram ao *ballet* e ao *jazz* e 105 prestigiaram as três modalidades de dança. Se todas as pessoas que adquiriram os ingressos do Festival assistiram à(s) apresentação(ões), então o número total de pessoas distintas que assistiu a pelo menos uma das três modalidades anteriormente mencionadas foi:

a) 9 385. b) 9 070. c) 9 595. d) 6 275. e) 6 905.

Considere B: *ballet*; D: dança de rua; J: *jazz*.
Analisando as porcentagens, temos:
- pessoas que assistiram ao *jazz*: $n(J) = 0{,}95 \cdot 4\,200 = 3\,990$
- pessoas que assistiram ao *ballet*: $n(B) = 0{,}90 \cdot 4\,200 = 3\,780$
- $n(D) = \ = 4\,200$

Então:



Portanto, o número de pessoas distintas que assistiu a pelo menos uma das três modalidades é:
$1\,895 + 1\,505 + 1\,995 + 275 + 105 + 595 + 3\,015 = 9\,385$
Resposta: alternativa **a**.

6. (UEPB) O controle de vacinação em uma creche indica que, dentre 98 crianças cadastradas, 60 receberam a vacina Sabin, 32 foram vacinadas contra o sarampo e 12 crianças não foram vacinadas. Dessa forma, o número de crianças que não receberam exatamente as duas vacinas é igual a:

a) 72. b) 38. c) 66. d) 92. e) 44.

Sendo B: vacina Sabin e S: vacina sarampo, temos:
$n(B \cup S) = 98 - 12 = 86$
$n(B \cup S) = n(B) + n(S) - n(B \cap S) \Rightarrow 86 = 60 + 32 - n(B \cap S) \Rightarrow$
$\Rightarrow n(B \cap S) = 6$
$98 - 6 = 92$
Resposta: alternativa **d**.

7. (UPM-SP) Num grupo constituído de k pessoas, das quais 14 jogam xadrez, 40 são homens. Se 20% dos homens jogam xadrez e 80% das mulheres não jogam xadrez, então o valor de k é:

a) 62. b) 70. c) 78. d) 84. e) 90.

Homens que jogam xadrez: $0{,}2 \cdot 40 = 8$
Mulheres que jogam xadrez: $14 - 8 = 6$
Como 20% das mulheres jogam xadrez, então:
$6 = 0{,}2 \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{6}{0{,}2} \Rightarrow x = 30$
Portanto:
$k =$ número de mulheres $+$ número de homens $\Rightarrow$
$\Rightarrow k = 30 + 40 \Rightarrow k = 70$
Resposta: alternativa **b**.

8. (UFRN) Uma escola de Ensino Médio tem 3 600 estudantes assim distribuídos:
— 1 200 cursam o 1º ano, 1 200 cursam o 2º ano, e 1 200 cursam o 3º ano;
— de cada série, metade dos estudantes são do sexo masculino e metade do sexo feminino;
— de cada sexo, metade dos estudantes estuda Inglês e metade estuda Francês.
Considere que, em cada série, a quantidade de alunos de Inglês e de Francês é a mesma.
O número de estudantes dessa escola que estão cursando o 3º ano ou que não estudam Francês é:

a) 3 000. b) 600. c) 1 200. d) 2 400.

$$1200 \text{ estudantes} \begin{cases} 600 \text{ homens} \begin{cases} 300 \text{ estudam Inglês} \\ 300 \text{ estudam Francês} \end{cases} \\ 600 \text{ mulheres} \begin{cases} 300 \text{ estudam Inglês} \\ 300 \text{ estudam Francês} \end{cases} \end{cases}$$

Sabendo que o esquema é o mesmo para cada um dos três anos, temos:
- 1 200 estudantes cursam o 3º ano;
- 1 800 estudantes não estudam Francês;
- 600 estudantes fazem o 3º ano e não estudam Francês.

Logo:
$U = 1\,200 + 1\,800 - 600 = 2\,400$
Resposta: alternativa **d**.

9. (Udesc) Considere um conjunto universo, com 7 elementos e os subconjuntos A, B e C, com 3, 5 e 7 elementos, respectivamente. É correto afirmar que:

a) $(A \cap B) \cap C$ tem no máximo 2 elementos.

b) $(A \cap B) \cap C$ tem no mínimo 1 elemento.

c) $B \cap C$ tem 3 elementos.

d) $A \cap C$ tem no mínimo 2 elementos.

e) $A \cap B$ pode ser vazio.

a) Falsa. $(A \cap B) \cap C$ pode ter no máximo 3 elementos.
b) Verdadeira.
c) Falsa. $B \cap C$ tem 5 elementos.
d) Falsa. $A \cap C$ tem 3 elementos.
e) Falsa. $A \cap B$ tem pelo menos 1 elemento.
Resposta: alternativa **b**.

10. (PUC-RJ) Considere o conjunto $A = \{3, 5\}$. Sabendo que $B \cap A = \{3\}$ e $B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, determine o conjunto B.

a) $B = \{1, 2, 3\}$
b) $B = \{1, 2, 4\}$
c) $B = \{1, 2, 3, 4\}$
d) $B = \{1, 2, 3, 5\}$
e) $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Se $B \cap A = \{3\}$, então $3 \in B$ e $5 \notin B$.
Se $B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, então $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
Resposta: alternativa **c**.

11. (Uece) Os subconjuntos P, X e Y do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais são dados por: $P = \{\text{números primos}\}$, $X = \{\text{múltiplos de } 2\}$ e $Y = \{\text{múltiplos de } 3\}$. Podemos afirmar corretamente que:

a) $P \cup X \cup Y = \mathbb{N}$.
b) $P \cap X \cap Y \neq \varnothing$.
c) $X \cup Y \subset N - P$.
d) $X \cap Y \subset N - P$.

a) Falsa. Contraexemplo: 25 não está em nenhum subconjunto, mas é natural.
b) Falsa. $P \cap X \cap Y = \varnothing$.
c) Falsa. Contraexemplo: 2 e 3 são primos e pertencem a $X \cup Y$, então $X \cup Y \not\subset N - P$.
d) Verdadeira. Os elementos de $X \cap Y$ são múltiplos de 6, e portanto não são primos.
Resposta: alternativa **d**.

---

12. (ITA-SP) Sejam r_1, r_2 e r_3 números reais tais que $r_1 - r_2$ e $r_1 + r_2 + r_3$ são racionais. Das afirmações:

I. Se r_1 é racional ou r_2 é racional, então r_3 é racional;
II. Se r_3 é racional, então $r_1 + r_2$ é racional;
III. Se r_3 é racional, então r_1 e r_2 são racionais,

é (são) sempre verdadeira(s):

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) apenas I e II.
e) I, II e III.

Se $r_1 - r_2$ é racional, r_1 e r_2 devem ser ambos racionais ou ambos irracionais. Então, se um deles for racional, o outro também será. Assim, a soma $r_1 + r_2$ também será racional. Como $(r_1 + r_2) + r_3$ é racional, r_3 é racional. As afirmações **I** e **II** são verdadeiras.
Como $r_1 - r_2$ é racional, $(r_1 + r_2) + (r_1 - r_2) = 2r_1$ também é racional. Então, r_1 é racional e, portanto, r_2 também é.
A afirmação **III** é verdadeira.
Resposta: alternativa **e**.

13. (UFF-RJ) Historicamente, a Matemática é extremamente eficiente na descrição dos fenômenos naturais. O prêmio Nobel Eugene Wigner escreveu sobre a “surpreendente eficácia da Matemática na formulação das leis da Física, algo que nem compreendemos nem merecemos”. Toquei outro dia na questão de a Matemática ser uma descoberta ou uma invenção humana.

Aqueles que defendem que ela seja uma descoberta creem que existem verdades universais inalteráveis, independentes da criatividade humana. Nossa pesquisa simplesmente desvenda as leis e teoremas que estão por aí, existindo em algum metaespaço das ideias, como dizia Platão.

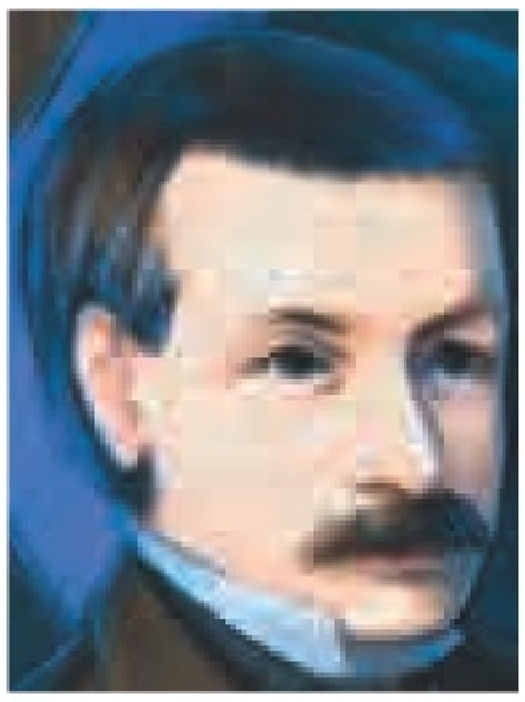
Nesse caso, uma civilização alienígena descobriria a mesma Matemática, mesmo se a representasse com símbolos distintos. Se a Matemática for uma descoberta, todas as inteligências cósmicas (se existirem) vão obter os mesmos resultados. Assim, ela seria uma língua universal e única.

Os que creem que a Matemática é inventada, como eu, argumentam que nosso cérebro é produto de milhões de anos de evolução em circunstâncias bem particulares, que definiram o progresso da vida no nosso planeta.

Conexões entre a realidade que percebemos e abstrações geométricas e algébricas são resultado de como vemos e interpretamos o mundo.

Em outras palavras, a Matemática humana é produto da nossa história evolutiva.

Marcelo Gleiser. *Folha de S.Paulo*, maio 2009. Caderno Mais!



UFFRJ/2010

Leopold Kronecker

Segundo o matemático Leopold Kronecker (1823-1891), “Deus fez os números inteiros, o resto é trabalho do homem.”
Os conjuntos numéricos são, como afirma o matemático, uma das grandes invenções humanas.
Assim, em relação aos elementos desses conjuntos, é correto afirmar que:

a) o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

b) a soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.

c) entre os números reais 3 e 4 existe apenas um número irracional.

d) entre dois números racionais distintos existe pelo menos um número racional.

e) a diferença entre dois números inteiros negativos é sempre um número inteiro negativo.

a) Falsa. Contraexemplo: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ (racional).
b) Falsa. Contraexemplo: $(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3}) = 2$ (racional).
c) Falsa.
d) Verdadeira.
e) Falsa. Contraexemplo: $-1 - (-2) = 1$ (inteiro positivo).
Resposta: alternativa **d**.

FUNÇÕES

Definição

Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Notação

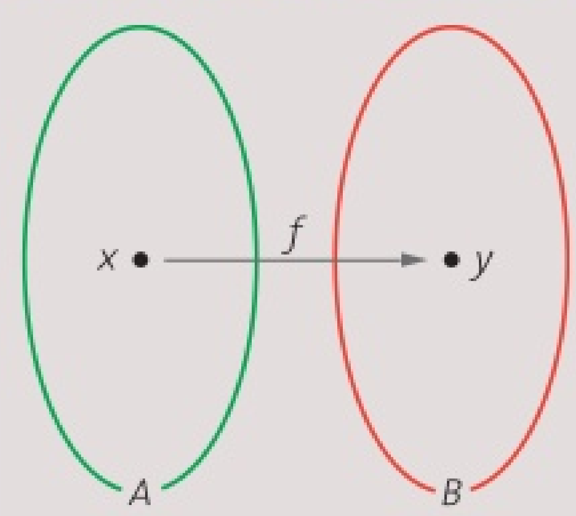
$f: A \rightarrow B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ (lê-se: f é uma função de A em B).

Representações

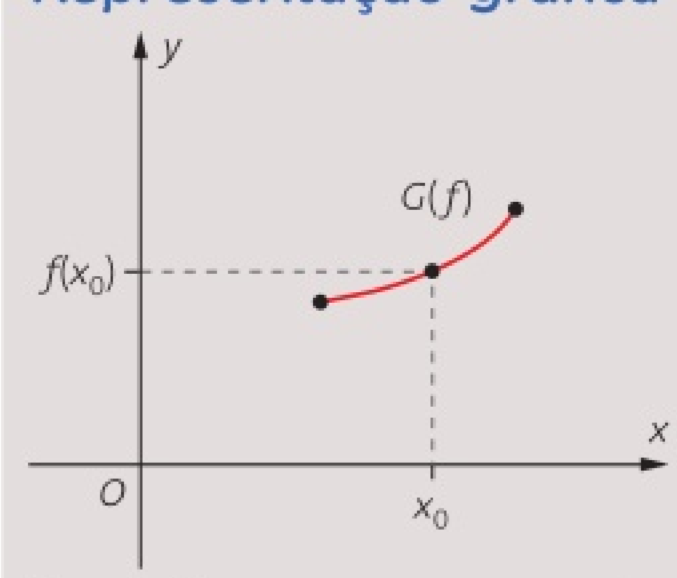
Lei de formação

Exemplos: $y = 2x$; $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$; etc.

Diagrama de Euler-Venn

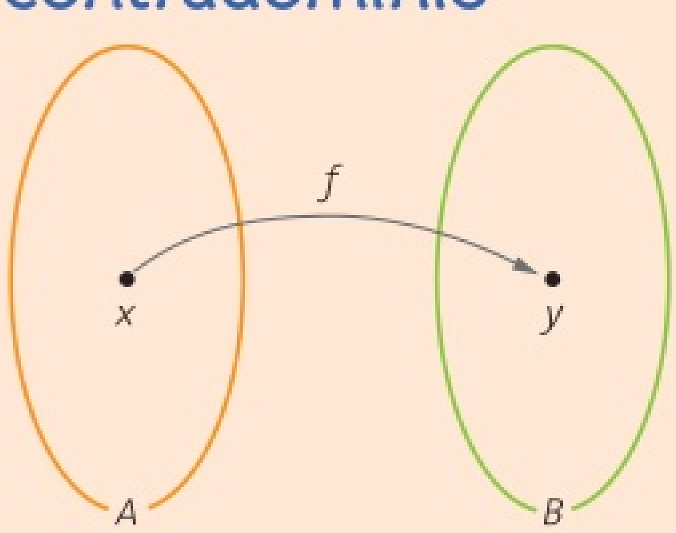


Representação gráfica



$(x_0, f(x_0))$ é um ponto do gráfico.

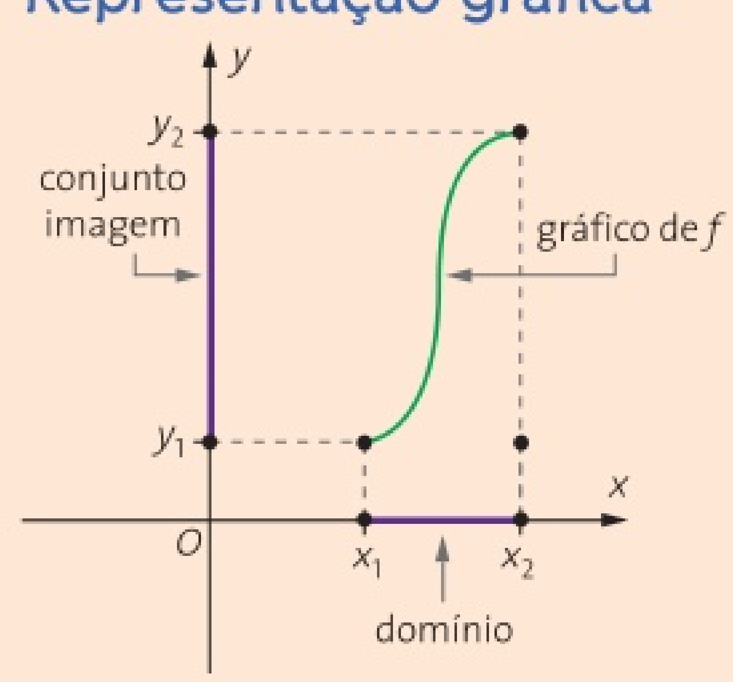
Domínio, imagem e contradomínio



$y = f(x)$

- A é o domínio de f: $D(f)$
- B é o contradomínio de f: $CD(f)$
- O conjunto dos y obtidos é a imagem de f: $Im(f)$

Representação gráfica



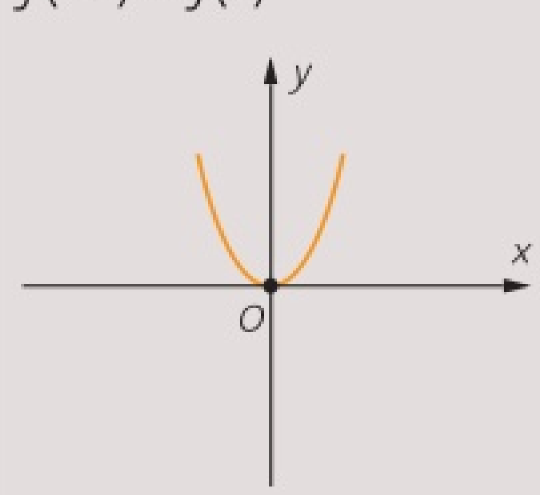
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 \leqslant x \leqslant x_2\} = [x_1, x_2]$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y_1 \leqslant y \leqslant y_2\} = [y_1, y_2]$

Função par e função ímpar

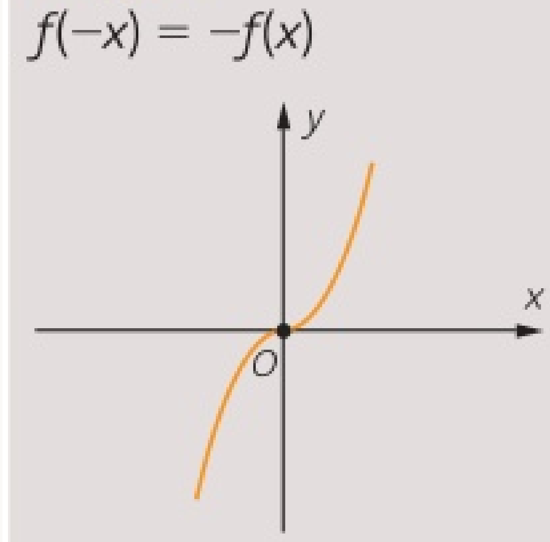
Par

$f(-x) = f(x)$



Ímpar

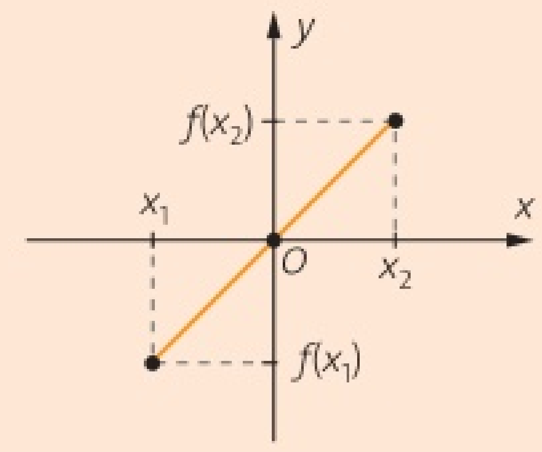
$f(-x) = -f(x)$



Função crescente, função decrescente e função constante

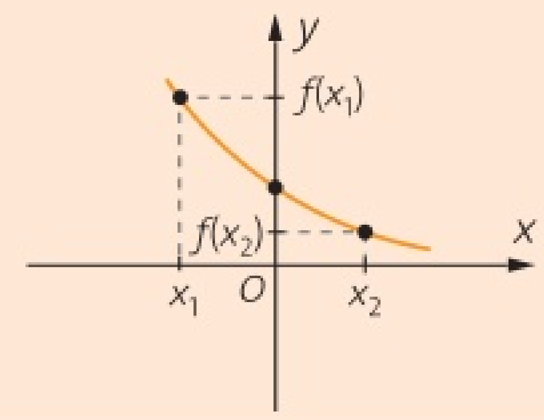
Crescente

$x_1 < x_2$ em $A \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ em B



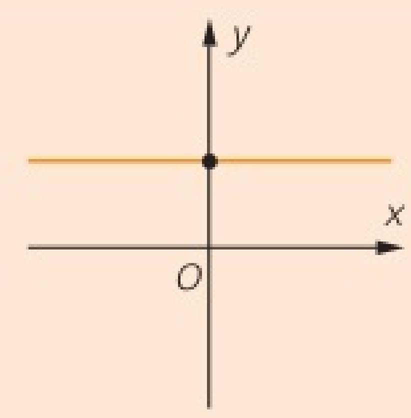
Decrescente

$x_1 < x_2$ em $A \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ em B



Constante

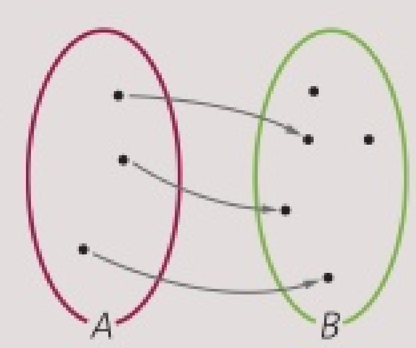
$f(x)$ é constante para qualquer valor de x.



Função injetiva, função sobrejetiva e função bijetiva

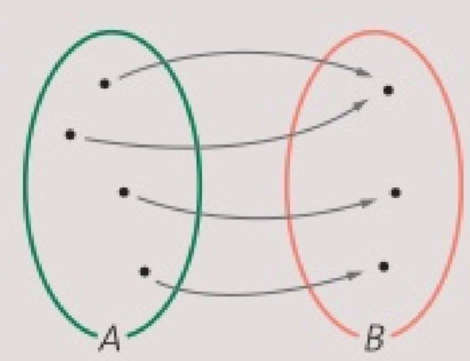
Injetiva

$x_1 \neq x_2$ em $A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ em B



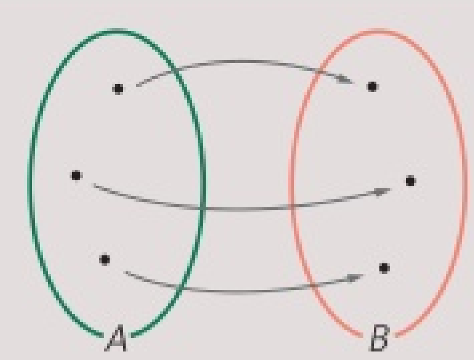
Sobrejetiva

$Im(f) = B$



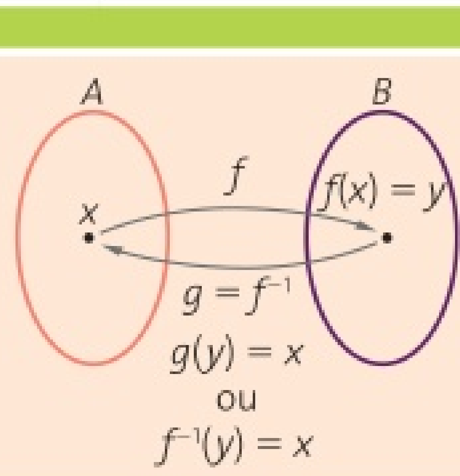
Bijetiva

f é injetiva e sobrejetiva simultaneamente.



Inversa

- f é bijetiva
- $f: A \to B \Rightarrow f^{-1}: B \to A$

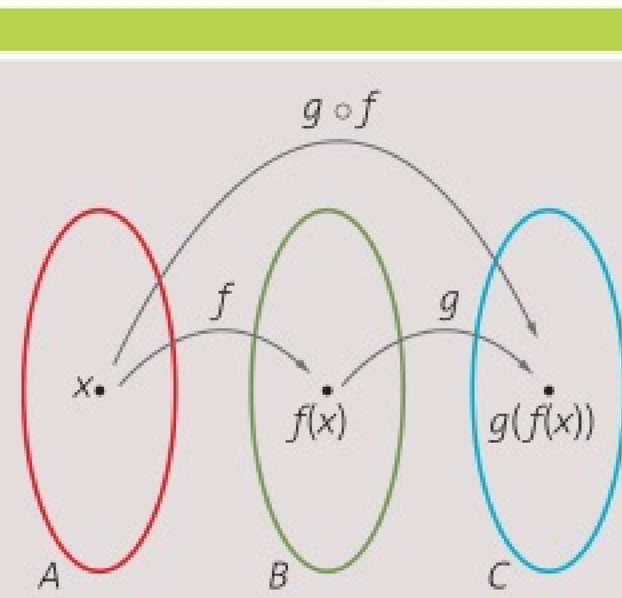


Composta

$f: A \to B$ e $g: B \to C$

$g \circ f: A \to C$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$



Exercícios

1. (Unit-SE) Seja f a função de A em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - 2x$. Se o conjunto imagem de f é o intervalo $[-3, 11[$, o conjunto A é:

a) $]-5, 2]$.
b) $]-2, 5[$.
c) $]-5, 1]$.
d) $[1, -5[$.
e) $[1, 5[$.

Se a imagem de f é o intervalo $[-3, 11[$, temos:
$1 - 2x = -3 \Rightarrow x = 2$
$1 - 2x = 11 \Rightarrow x = -5$
Logo, o conjunto A, domínio de f, é $A =]-5, 2]$.
Resposta: alternativa **a**.

2. (UFMG) O gráfico da função $f(x) = x^3 + (a + 3)\,x^2 - 5x + b$ contém os pontos $(-1, 0)$ e $(2, 0)$. Assim sendo, o valor de $f(0)$ é:

a) 1.
b) -6.
c) -1.
d) 6.

A função $f(x) = x^3 + (a + 3)\,x^2 - 5x + b$ passa pelos pontos $(-1, 0)$ e $(2, 0)$. Logo:

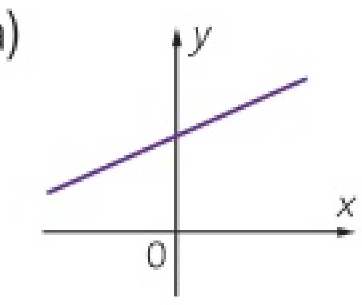
$$\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -7 \\ 4a + b = -10 \end{cases}$$

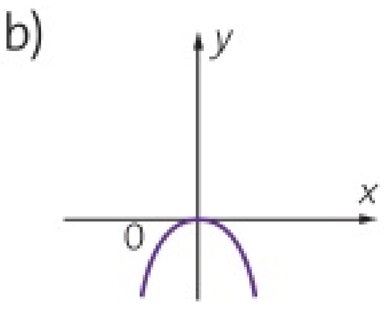
Resolvendo o sistema, temos $a = -1$ e $b = -6$. Então:

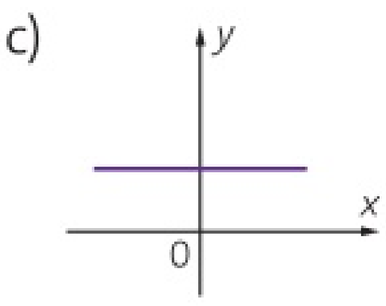
$f(0) = 0^3 + (a + 3)0^2 - 5 \cdot 0 + b \Rightarrow f(0) = b \Rightarrow f(0) = -6$

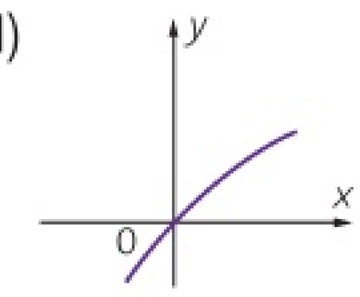
Resposta: alternativa **b**.

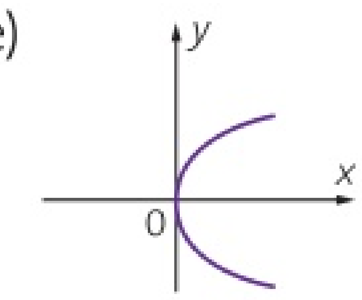
3. (Unaerp-SP) Qual dos seguintes gráficos não representa uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

a)


b)


c)


d)


e)


Para que o gráfico possa representar uma função, é necessário que para cada valor de x haja apenas um único valor atribuído de y.
Resposta: alternativa **e**.

4. (UFU-MG) Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, qual entre as relações seguintes representa uma função de A em B?

a) $\{(-1, 0), (0, 1), (1, 2), (1, 3), (2, -4)\}$
b) $\{(-1, 1), (0, 1), (1, 0), (1, 2)\}$
c) $\{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$
d) $\{(0, -1), (1, 0), (2, 1), (4, 2)\}$
e) $\{(-1, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 4), (2, 4)\}$

a) Não pode ser função em razão de ter dois valores y (2 e 3) para o mesmo valor de x (1).
b) Mesmo raciocínio anterior: $(x = 1)$ $(y = 0$ e $2)$.
d) O par $(4, 2)$ não pertence à função de A em B e faltou o par correspondente ao valor de $x = -1$.
e) Não pode ser função em razão de que para o mesmo valor de x (0) existem dois para y (2 e 3).
Resposta: alternativa **c**.

5. (UFPA) Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2\}$. Qual das afirmativas abaixo é verdadeira?

a) $f: x \to 2x$ é uma função da A em B.

b) $f: x \to x + 1$ é uma função da A em B.

c) $f: x \to x^2 - 3x + 2$ é uma função da A em B.

d) $f: x \to x^2 - x$ é uma função da B em A.

e) $f: x \to x - 1$ é uma função da B em A.

a) Para $x = 2$ não haverá o par correspondente em B para y.
b) Para $x = 2$ não haverá o par correspondente em B para y.
d) Para $x = 0$ e $x = 1$ não haverá o par correspondente em A para y.
e) Para $x = 0$ e $x = 1$ não haverá o par correspondente em A para y.
Resposta: alternativa **c**.

6. (PUC-MG) A temperatura de um paciente, depois de receber um antitérmico, é dada pela função $T(t) = 36{,}4 + \dfrac{3}{t+1}$, onde T é a temperatura em graus Celsius e t é o tempo medido em horas, a partir do momento em que o paciente é medicado. Supondo que certo paciente tenha recebido esse remédio às 8h 00min ($t = 0$), sua temperatura deverá ser de 36,80 °C por volta das:

a) 14h 00min.
b) 14h 30min.
c) 15h 00min.
d) 15h 30min.

$T = ? \to T(t) = 36{,}8$

$36{,}8 = 36{,}4 + \dfrac{3}{t+1} \Rightarrow 0{,}4 = \dfrac{3}{t+1} \Rightarrow 0{,}4t + 0{,}4 = 3 \Rightarrow$

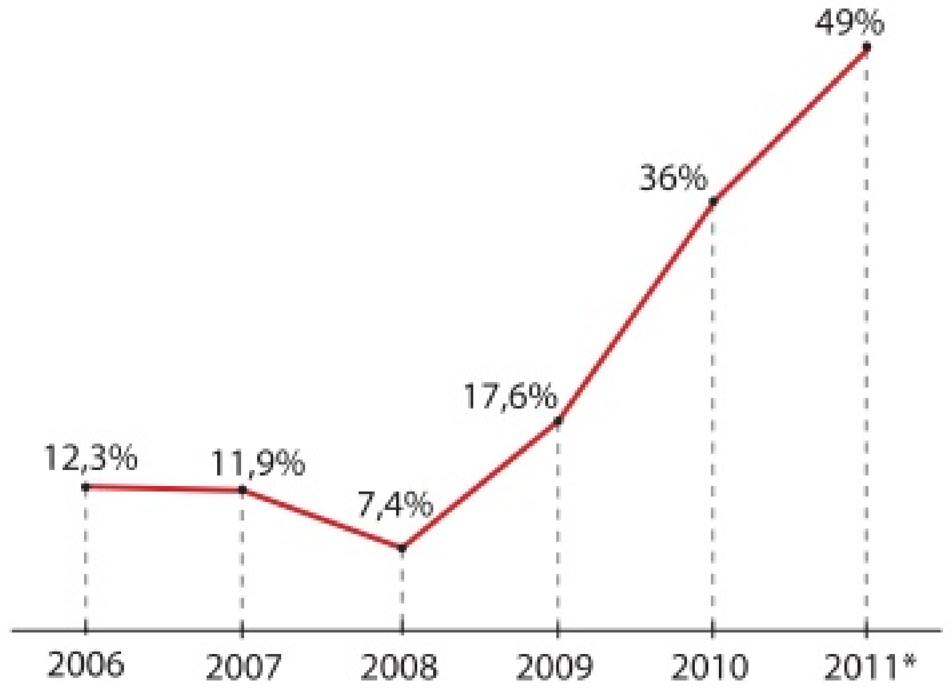
$\Rightarrow 0{,}4t = 3 - 0{,}4 \Rightarrow 0{,}4t = 2{,}6 \Rightarrow t = \dfrac{26}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 6$ horas e 30 minutos

Como $T(0) = 8$ horas, temos:
8 horas + 6 horas e 30 minutos = 14 horas e 30 minutos
Resposta: alternativa **b**.

7. (UFG-GO) Analise o gráfico a seguir.

Crescimento dos voos domésticos no Brasil, por ano, em relação ao ano anterior, no período de 2006 a 2011



* Estimativa
Entre o céu e o inferno. *Veja*, São Paulo, n. 2 159, p. 70, 7 abr. 2010. Adaptado.

Analisando-se os dados apresentados, conclui-se que o número de voos:

a) diminuiu em 2007 e 2008.
b) sofreu uma queda mais acentuada em 2008 do que em 2007.
c) teve aumento mais acentuado em 2009 do que em 2010.
d) é mais que o dobro em 2010, comparado a 2009.
e) é mais que o dobro em 2011 (estimativa), comparado a 2009.

Analisando o gráfico, temos:
- Em 2006 cresceu 12,3% em relação a 2005.
- Em 2007 cresceu 11,9% em relação a 2006.
- Em 2008 cresceu 7,4% em relação a 2007.
- Em 2009 cresceu 17,6% em relação a 2008.
- Em 2010 cresceu 36% em relação a 2009.
- Em 2011 cresceu 49% em relação a 2010.

Então:
a) Houve crescimento em 2007 (em relação a 2006) e em 2008 (em relação a 2007).
b) Não houve queda e sim um crescimento menor.
c) O contrário (maior em 2010 do que em 2009).
d) Em 2010, o crescimento de 36% (em relação a 2009) não é nem a metade (50%) do que foi em 2009.
e) O dobro de 17,6% (2009) é 35,2%, que é menor do que 49%.
Resposta: alternativa **e**.

8. (FEI-SP) Se $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 1$, então $f(-2)$ é igual a:

a) -13.
b) -33.
c) 13.
d) 19.
e) -29.

Para $x = -2$, temos:
$f(-2) = 3(-2)^3 - 2(-2)^2 - (-2) + 1 = 3(-8) - 2(4) + 2 + 1 =$
$= -24 - 8 + 3 = -29$

Resposta: alternativa **e**.

9. (PUC-SP) Qual das funções abaixo é uma função par?

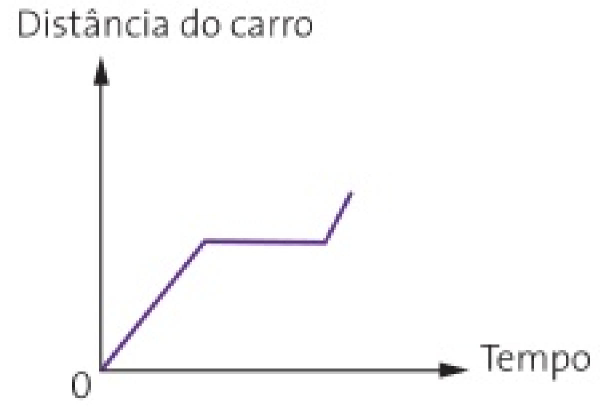
a) $f(x) = x$
b) $f(x) = x^3$
c) $f(x) = x^5$
d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$
e) $f(x) = \frac{1}{x}$

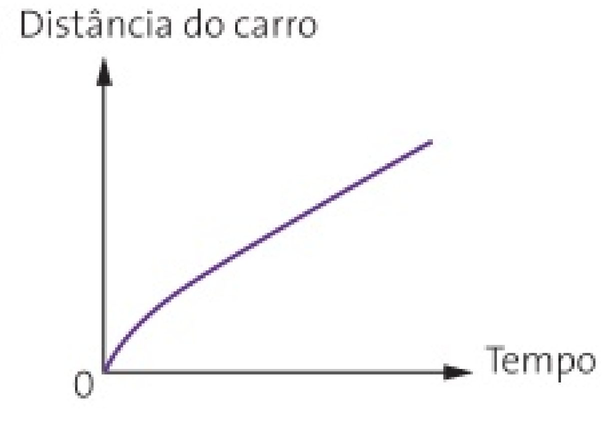
A única que satisfaz $f(x) = f(-x)$ é a função $\frac{1}{x^2}$.

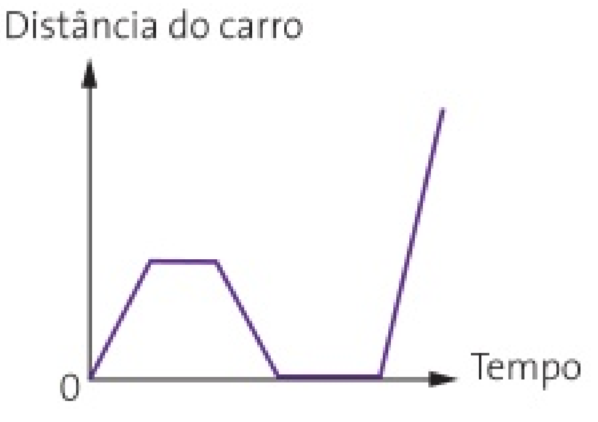
Resposta: alternativa **d**.

10. (Unifor-CE) Associe cada história ao gráfico que melhor define as situações narradas.

1. Eu tinha acabado de sair do carro quando percebi que havia esquecido minha bolsa, então voltei para pegá-la.
2. Tudo corria bem, até que minha sandália quebrou, logo que saí do carro.
3. Parti caminhando devagar pelo *shopping*, mas acelerei quando percebi que iria chegar atrasada ao cinema.

(I)


(II)


(III)


a) Situação **1** — Gráfico **I**; Situação **2** — Gráfico **II**; Situação **3** — Gráfico **III**.
b) Situação **1** — Gráfico **II**; Situação **2** — Gráfico **III**; Situação **3** — Gráfico **I**.
c) Situação **1** — Gráfico **III**; Situação **2** — Gráfico **I**; Situação **3** — Gráfico **II**.
d) Situação **1** — Gráfico **I**; Situação **2** — Gráfico **III**; Situação **3** — Gráfico **II**.
e) Situação **1** — Gráfico **II**; Situação **2** — Gráfico **I**; Situação **3** — Gráfico **III**.

1. Considerando que tinha acabado de sair e voltar após perceber que esquecera a bolsa, o indivíduo se distanciou do veículo, parou (percepção), se aproximou novamente do carro e depois se afastou novamente; logo, a situação **1** se equipara ao gráfico **III**.
2. O indivíduo se distancia do carro a uma certa velocidade até que a sandália quebrou, reduzindo sua velocidade de distanciamento do carro; logo, a situação **2** se equipara ao gráfico **I**.
3. O indivíduo partiu devagar e logo acelerou, situação 3, que se associa ao gráfico **II**.

Resposta: alternativa **c**.

11. (UFRN) Sejam *E* o conjunto formado por todas as escolas de ensino médio de Natal e *P* o conjunto formado pelos números que representam a quantidade de professores de cada escola do conjunto *E*. Se $f: E \rightarrow P$ é a função que a cada escola de *E* associa seu número de professores, então:

a) *f* não pode ser uma função bijetora.

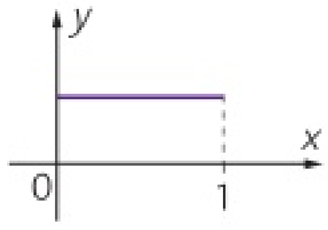
b) *f* não pode ser uma função injetora.

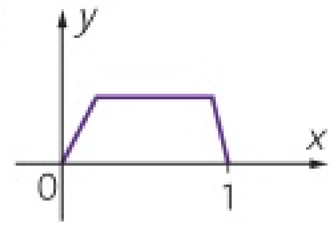
c) *f* é uma função sobrejetora.

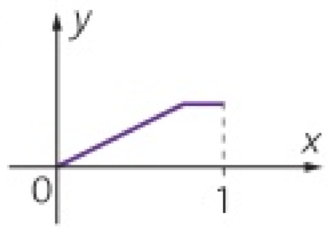
d) *f* é necessariamente uma função injetora.

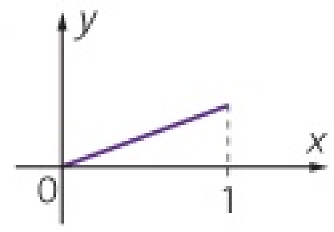
A função é obrigatoriamente sobrejetora, já que o conjunto *P* é formado apenas pelos números de professores das escolas de *E*. A função pode ou não ser injetora, dependendo se há repetição ou não da mesma quantidade de professores em duas escolas ou mais.
Resposta: alternativa **c**.

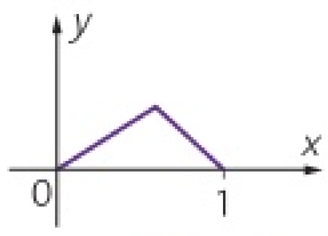
12. (Unifesp) Há funções $y = f(x)$ que possuem a seguinte propriedade: "a valores distintos de *x* correspondem valores distintos de *y*". Tais funções são chamadas injetoras. Qual, dentre as funções cujos gráficos aparecem abaixo, é injetora?

a)


d)


b)


e)


c)


Em um gráfico, a função injetora é aquela que ao se traçar linhas paralelas ao eixo *x*, tais linhas só tocam o gráfico de função em um ponto.
Resposta: alternativa **e**.

13. (Unimontes-MG) Todas as afirmações abaixo são corretas, exceto:

a) Toda função crescente é injetora.

b) Toda função decrescente é injetora.

c) Toda função injetora é crescente.

d) Existem funções injetoras que são decrescentes.

Funções crescentes ou decrescentes são injetoras, pois não há dois valores de *x* para um de *y*.
Resposta: alternativa **c**.

14. (Cefet-PR) Sejam as funções $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + 1$ e $h(x) = f(g(x))$. Então, é correto afirmar que:

a) A inversa da função $h(x)$ é a função $h^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

b) $h(x)$ é crescente no intervalo $[-1, +\infty)$.

c) $h(x)$ é decrescente no intervalo $(-\infty, 1]$.

d) $h(x)$ é uma função par.

e) $h(x)$ é uma função ímpar.

a) $h(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) \Rightarrow h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

b) $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. A função é simétrica em relação ao eixo *Oy* no ponto (0, 1).

c) Errado.

d) Pela definição, a função par é aquela simétrica em relação ao eixo *Oy*. Logo, a **d** está correta.

e) Errado.

Resposta: alternativa **d**.

15. (UFPB) Considere uma função $g: A \to A$, onde $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Sabendo-se que $g(1) = 2$, $g(2) = 1$ e que g possui inversa, então é correto afirmar:

a) $g(x) = x, \forall\, x \in A$

b) $g(3) = 1$ e $g(4) = 2$

c) $g(g(x)) = x, \forall\, x \in A$

d) $g(g(1)) = 2$ e $g(g(2)) = 1$

e) $g(g(x)) = g(x), \forall\, x \in A$

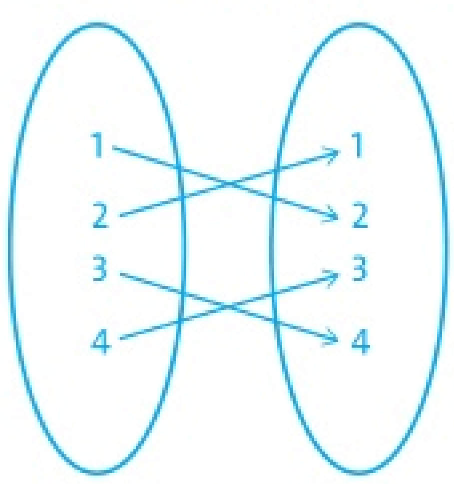
a) $g(1) = 2$ e $g(2) = 1$

b) Não se pode afirmar, pois $g(3) = 3$ ou $g(3) = 4$.

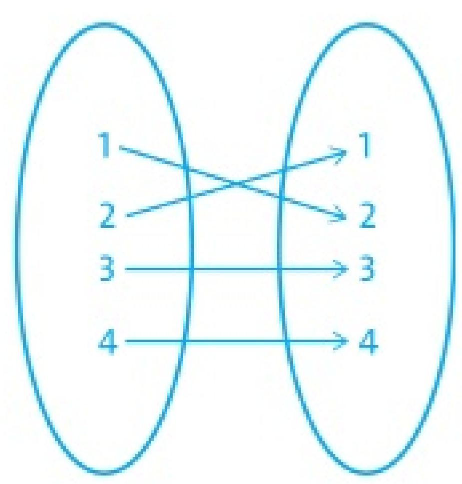
c) A composta $g(g(x)) = g^{-1}(x)$.

d) $g(g(1)) = g(2) = 1$ e $g(g(2)) = g(1) = 2$

e) O correto é $g(g(x)) = x$.



ou



Resposta: alternativa **d**.

17. (Uece) Seja f a função real definida para x real positivo por $f(x) = \sqrt{2x}$. Se definirmos $a_1 = \sqrt{2}$, e para cada número natural $n > 1$, $a_n = f(a_{n-1})$, então o valor de a_4 é:

a) $2^{\frac{1}{16}}$. b) $2^{\frac{5}{16}}$. c) $2^{\frac{13}{16}}$. d) $2^{\frac{15}{16}}$.

$a_2 = f(a_1) = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2^{\frac{3}{2}}}$

$a_3 = f(a_2) = f\left(\sqrt{2^{\frac{3}{2}}}\right) = \sqrt{2\sqrt{2^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{2^{\frac{5}{4}}}$

$a_4 = f(a_3) = f\left(\sqrt{2^{\frac{5}{4}}}\right) = \sqrt{2\sqrt{2^{\frac{5}{4}}}} = \sqrt{2^{\frac{15}{8}}} = 2^{\frac{15}{16}}$

Resposta: alternativa **d**.

16. (UFC-CE) O coeficiente b da função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + bx + 1$, que satisfaz a condição $f(f(-1)) = 3$, é igual a:

a) -3. c) 0. e) 3.

b) -1. d) 1.

$f(f(-1)) = 3 \Rightarrow f(1 - b + 1) = 3 \Rightarrow f(-b + 2) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-b + 2)^2 + b \cdot (-b + 2) + 1 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 - 4b + 4 - b^2 + 2b + 1 = 3 \Rightarrow -2b + 5 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2b = -2 \Rightarrow b = 1$

Resposta: alternativa **d**.

18. (Ufscar-SP) Seja $g: A \to A$ uma função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \text{ é ímpar} \\ \dfrac{x}{2}, \text{ se } x \text{ é par} \end{cases}.$$

Se n é ímpar e $f(f(f(n))) = 5$, a soma dos algarismos de n é igual a:

a) 10. b) 9. c) 8. d) 7. e) 6.

Se x é ímpar, $f(x) = x + 1$ é par.

Se $f(f(f(n))) = 5$, então $f(f(n))$ é par e, portanto, $f(f(n)) = 5 \cdot 2 = 10$.

Temos que $f(n)$ é par pois n é ímpar. Assim:

$f(f(n)) = \dfrac{f(n)}{2} = 10$

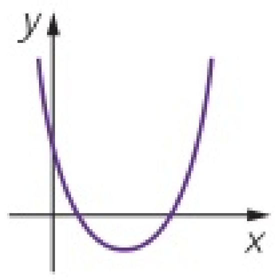
Logo:

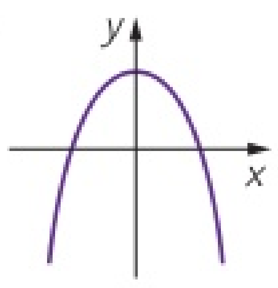
$f(f(n)) = 20 \Rightarrow n + 1 = 20 \Rightarrow n = 19$

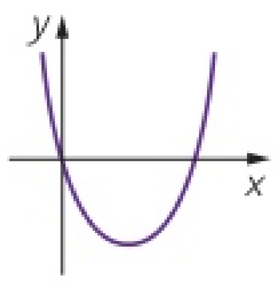
$1 + 9 = 10$

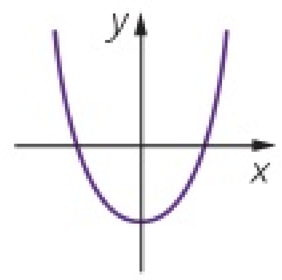
Resposta: alternativa **a**.

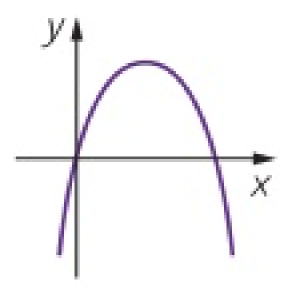
19. (PUC-PR) Sejam $f(x) = x^2 - 2x$ e $g(x) = x - 1$ duas funções definidas em $\mathbb{R}$. Qual dos gráficos melhor representa $f(g(x))$?

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

$f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^2 - 2(x-1) = x^2 - 2x + 1 - 2x + 2 =$
$= x^2 - 4x + 3 \Rightarrow f(g(x)) = x^2 - 4x + 3$

- $\Delta = 16 - 12 = 4$
- $\begin{cases} x' = \dfrac{4-2}{2} = 1 \\ x'' = \dfrac{4+2}{2} = 3 \end{cases}$
- $a > 0 \rightarrow$ concavidade para cima

Resposta: alternativa **a**.

20. (ITA-SP) Sejam as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $f(x) = x^2 - 9$ e $(f \circ g) = x - 6$, em seus respectivos domínios. Então, o domínio A da função g é:

a) $[-3, +\infty[$.

b) $\mathbb{R}$.

c) $[-5, +\infty[$.

d) $]-\infty, -1[\cup [3, +\infty[$.

e) $]-\infty, \sqrt{6}\,]$.

Substituindo x por $g(x)$ na função $f(x)$ e igualando a $f(g(x))$, temos:

$g^2(x) - 9 = x - 6 \Rightarrow g^2(x) = x + 3 \Rightarrow g(x) = \sqrt{x+3}$

O domínio da função g é definido por $x + 3 \geq 0$. Então, $x \geq -3$.
Logo, $D(g) = [-3, +\infty[$.

Resposta: alternativa **a**.

21. (UFC-CE) Considere a função $f(x) = \dfrac{cx}{dx+3}$, definida para todo número real x tal que $dx + 3 \neq 0$, onde c e d são constantes reais. Sabendo que $f(f(x)) = x$ e $f^5(3) = f(f(f(f(f(3))))) = -\dfrac{1}{2}$, podemos afirmar que $c^2 + d^2$ é igual a:

a) 5. b) 25. c) 61. d) 113. e) 181.

- $f^2(x) = f(f(x)) = x$
- $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(x)$
- $f^4(x) = f^3(f(x)) = f(f(x)) = x$
- $f^5(x) = f^4(f(x)) = f(x)$

Logo, $f^5(x) = f^3(x)$. Então:

$f(3) = \dfrac{-3}{5} \Rightarrow \dfrac{c \cdot 3}{d \cdot 3 + 3} = \dfrac{-3}{5} \Rightarrow \dfrac{\cancel{3}c}{\cancel{3}(d+1)} = \dfrac{-3}{5} \Rightarrow 5c = -3d - 3$

$f(f(x)) = x \Rightarrow f(f(3)) = 3 \Rightarrow f\left(\dfrac{-3}{5}\right) = 3 \Rightarrow \dfrac{c \cdot \left(\dfrac{-3}{5}\right)}{d \cdot \left(\dfrac{-3}{5}\right) + 3} = 3 \Rightarrow \left(\dfrac{-3}{5}\right)c \cdot \dfrac{5}{-3d+15} = 3 \Rightarrow \dfrac{-3c}{\cancel{5}} \cdot \dfrac{\cancel{5}}{-3d+15} = 3 \Rightarrow \dfrac{-\cancel{3}c}{-\cancel{3}(d-5)} = 3 \Rightarrow c = 3d - 15$

Então:

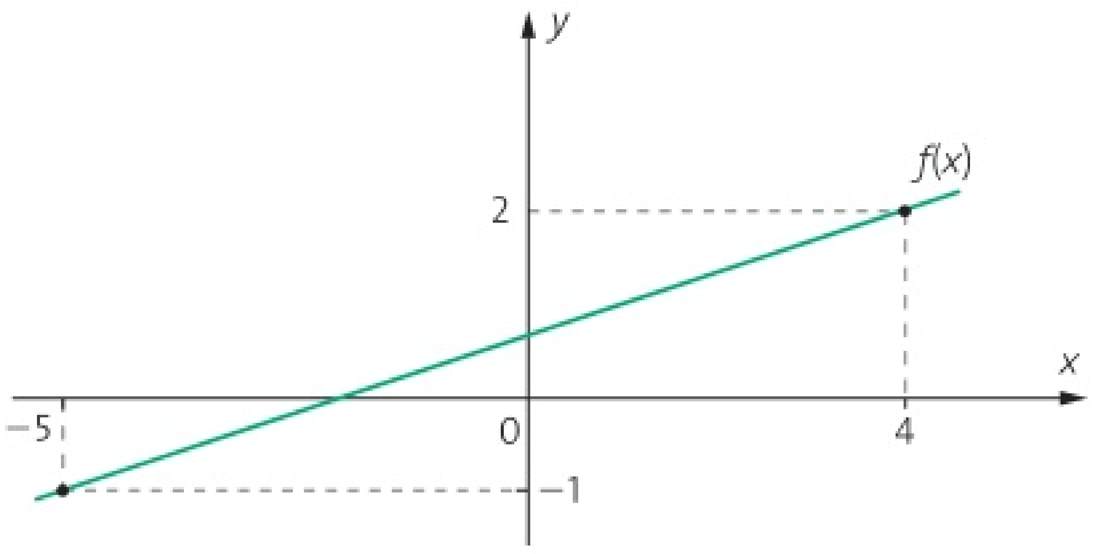
$\begin{cases} c = 3d - 15 \\ 5c = -3d - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \cancel{3d} - 15 \\ 5c = -\cancel{3d} - 3 \end{cases}$
$6c = -18 \Rightarrow c = -3$

Portanto:
$-3 = 3d - 15 \Rightarrow 3d = 12 \Rightarrow d = 4$

Então:
$c^2 + d^2 = 9 + 16 = 25$

Resposta: alternativa **b**.

22. (Ufpel-RS) O gráfico abaixo representa a função $f(x)$.



Construindo no mesmo plano cartesiano as retas que representam as funções $f(x)$ e sua inversa $f^{-1}(x)$, é correto afirmar que o ponto de intersecção dessas retas é:

a) (–2, 0). b) (0, 1). c) (1, 1). d) (5, 5). e) (2, 2).

$f(x)$ é função de primeiro grau e de equação:

$$(-5, -1), (4, 2) \rightarrow \begin{cases} -1 = -5a + b \\ 2 = 4a + b \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = -5a + b \\ -2 = -4a - b \end{cases} \qquad \Rightarrow -1 = \frac{-5}{3} + b \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

$$-3 = -9a \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

Então:

$$f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}f^{-1}(x) + \frac{2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = 3x + 2$$

No ponto $f(x) = f^{-1}(x)$ temos:

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = 3x + 2 \Rightarrow x + 2 = 9x + 6 \Rightarrow x = 1$$

Substituindo $x = 1$ em $f(x)$ vem:

$$f(1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \rightarrow (1, 1)$$

Resposta: alternativa **c**.

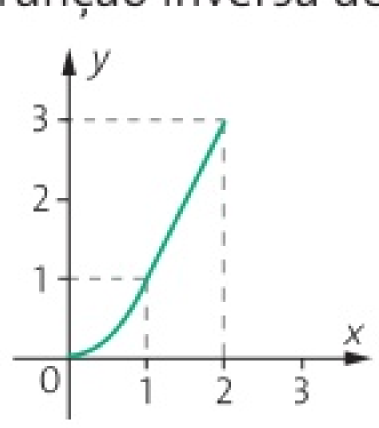
---

23. (UFPB) Considere a função f: $[0, 2] \rightarrow [0, 3]$, definida por:

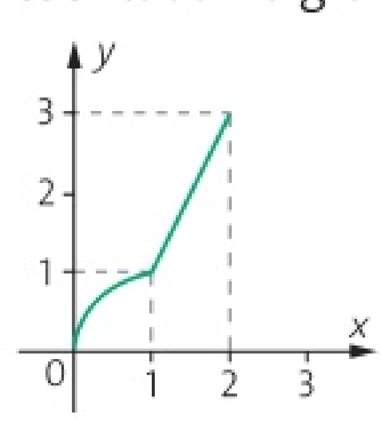
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x - 1, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}.$$

A função inversa de f está melhor representada no gráfico:

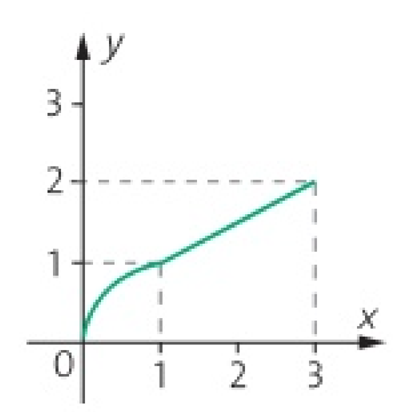
a)



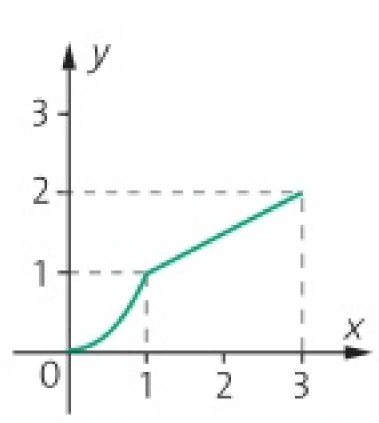
c)



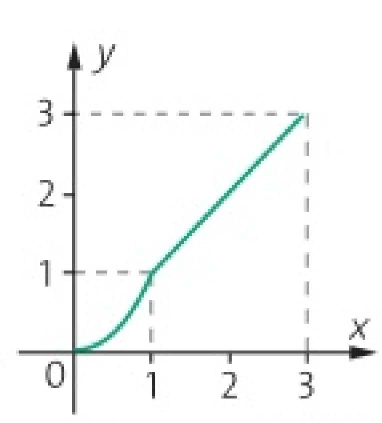
e)



b)



d)



O gráfico da inversa de uma função apresenta simetria em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. O gráfico que representa a função se encontra na letra **a**, enquanto sua inversa está na letra **e**.

Resposta: alternativa **e**.

24. (UEPG-PR) Em relação à função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 4x + 8$ e a sua inversa $f^{-1}(x)$, assinale o que for correto.

01) $f(x)$ é crescente e $f^{-1}(x)$ é decrescente.

02) Os gráficos de $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ são retas paralelas.

04) Os gráficos de $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ são retas perpendiculares.

08) $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 8}{4}$

16) $f(2) \cdot f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = -30$

01) $x = 4f^{-1}(x) + 8 \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x - 8}{4}$

Então, $f^{-1}(x)$ é crescente.

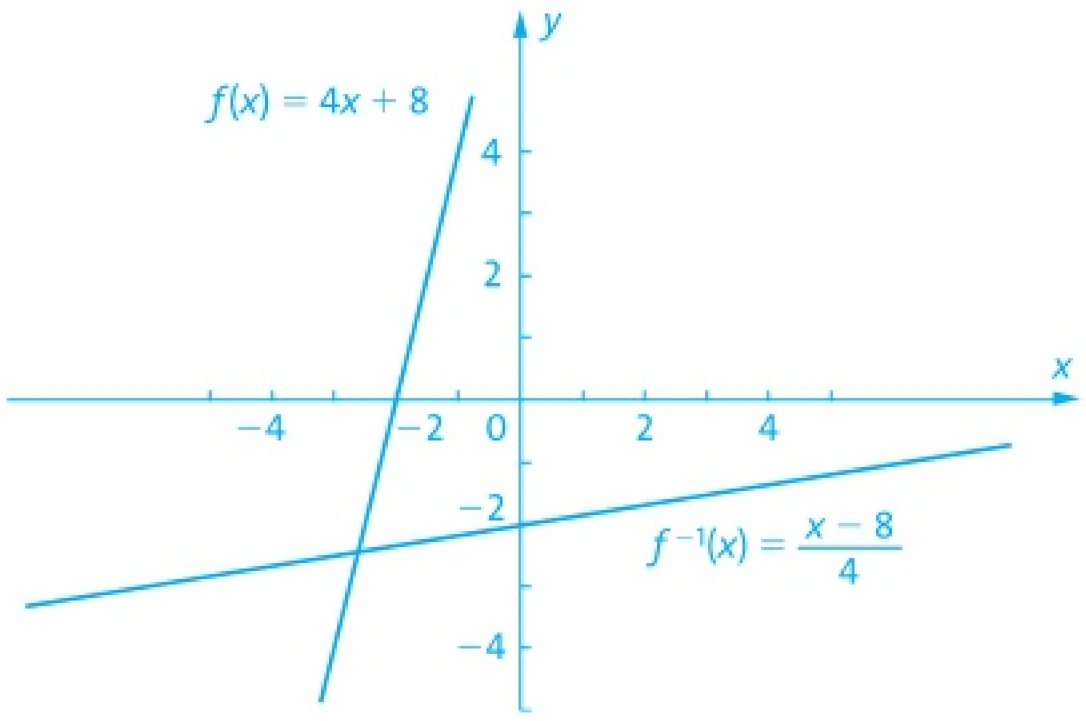
02) Não são retas paralelas, como mostra o gráfico ao lado.

04) Não são retas perpendiculares, como mostra o gráfico ao lado.

08) $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 8}{4}$

16) $f(2) \cdot f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = (8 + 8) \cdot \left(\dfrac{\frac{1}{2} - 8}{4}\right) = 16 \cdot \left(\dfrac{\frac{1}{2} - 8}{4}\right) =$

$= 16 \cdot \left(\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{16}{2}}{4}\right) = 16 \cdot \left(\dfrac{-\frac{15}{2}}{4}\right) = 4 \cdot \left(-\dfrac{15}{2}\right) = -30$



Logo:

$8 + 16 = 24$

Resposta: 24.

25. (UFPB) Sejam f e g funções convenientemente definidas, tais que f é a inversa da g e $f(1) = 2$. Considere a seguinte sequência: $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(g(1))$, $a_3 = f(g(f(1)))$, $a_4 = f(g(f(g(1))))$, ..., $a_{2n} = f(g(f(...f(g(1))...)))$, $a_{2n+1} = f(g(f(...g(f(1))...)))$. Dessa forma, o termo $a_{123456789}$ tem como valor:

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

Se f e g são inversas, então $f(g(x)) = x$. Portanto, $a_3 = a_1$, $a_5 = a_3$, etc.
Logo, todo termo ímpar será igual a 2.
Resposta: alternativa **b**.

FUNÇÃO AFIM

Definição

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função afim** quando existem dois números reais a e b tal que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

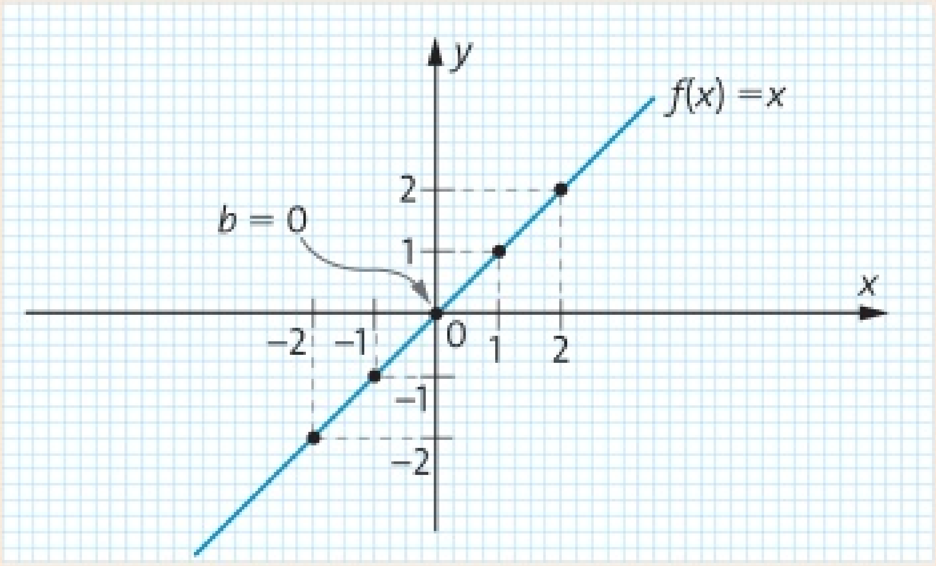
Casos particulares

Identidade

$f(x) = x$

$a = 1$; $b = 0$

Exemplo:

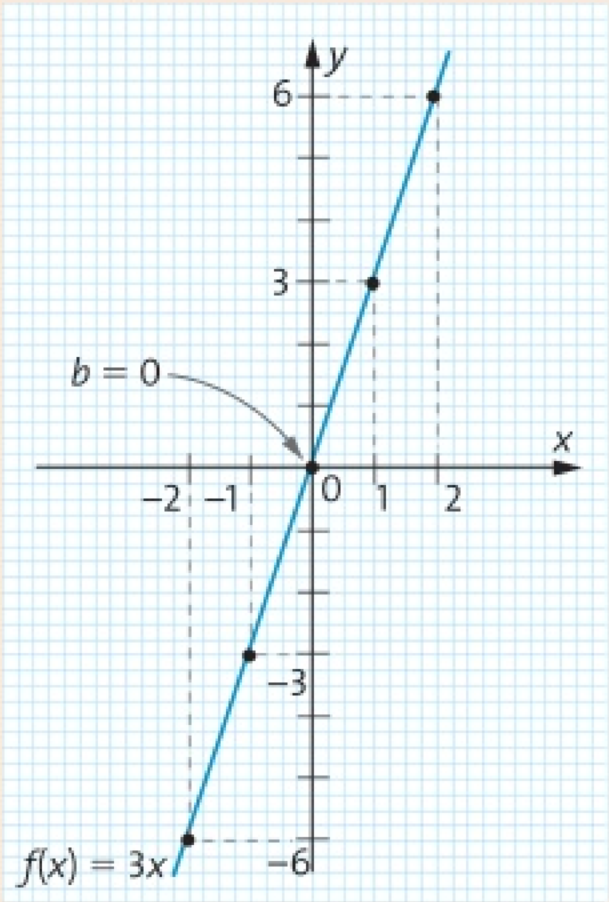


Linear

$f(x) = ax$

$b = 0$

Exemplo:

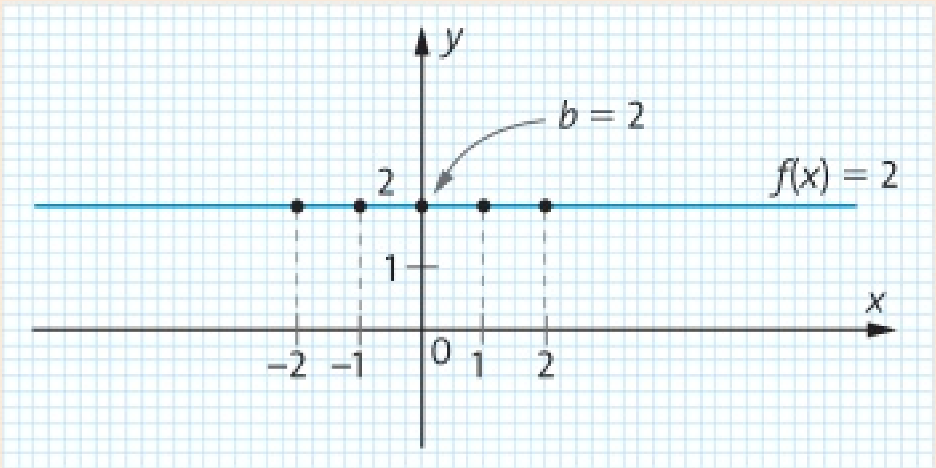


Constante

$f(x) = b$

$a = 0$

Exemplo:

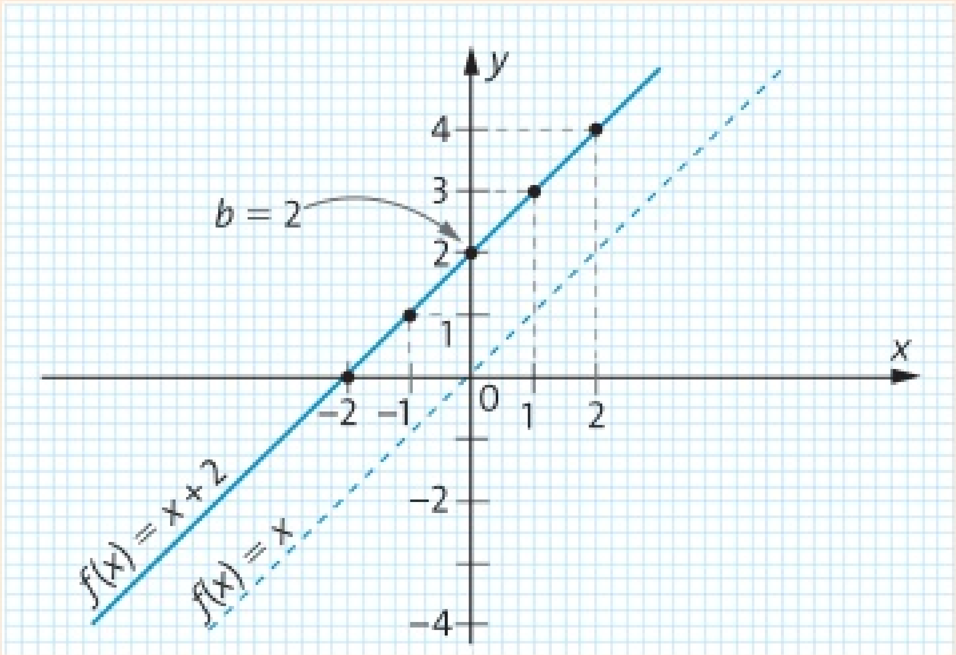


Translação

$f(x) = x + b$

$a = 1$; $b \neq 0$

Exemplo:

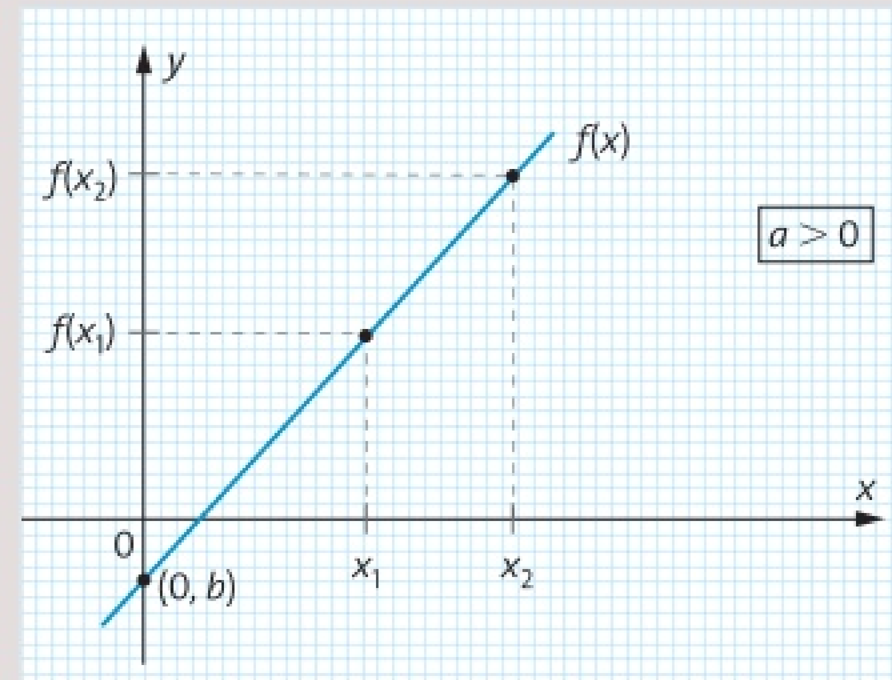


Taxa de variação e zero da função

$$a = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

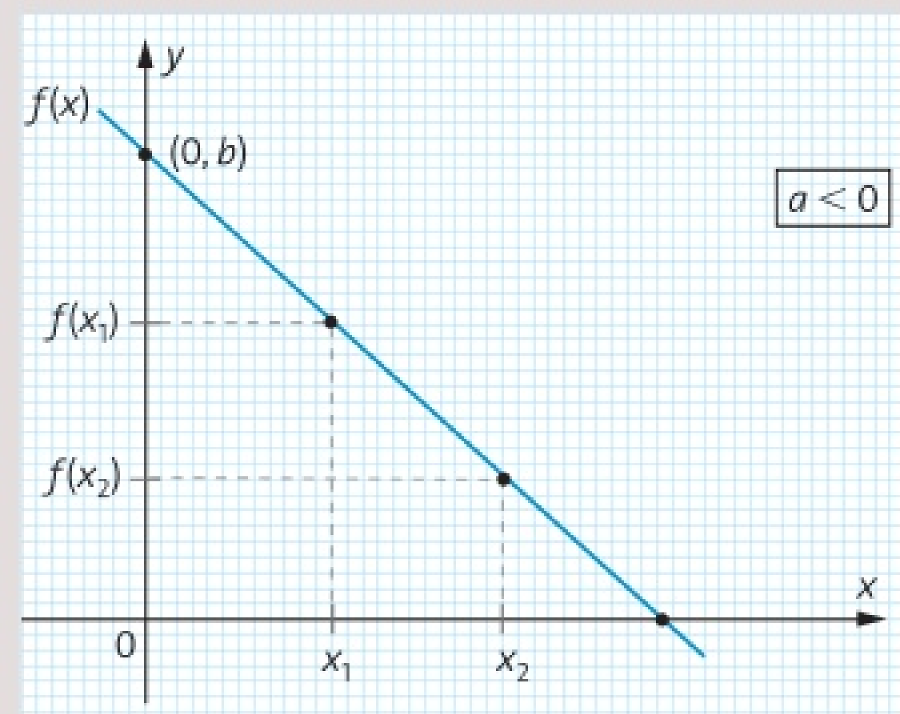
$a > 0$

- f é crescente.
- $x_1 < x_2$ em $A \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ em B.



$a < 0$

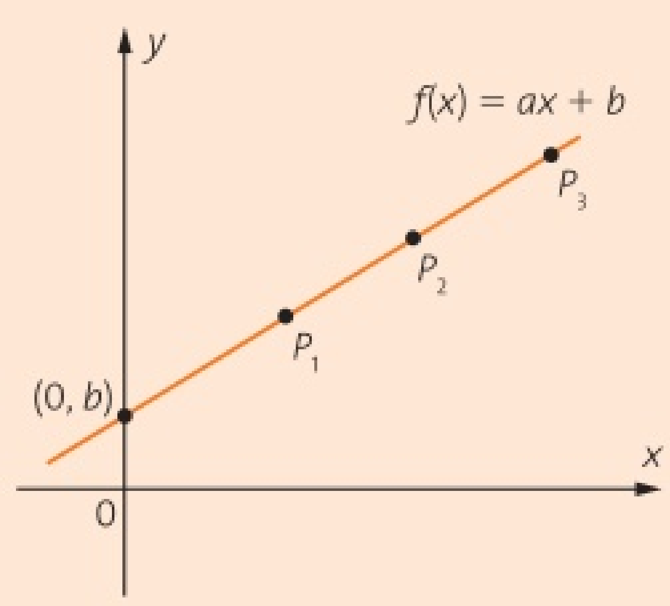
- f é decrescente.
- $x_1 < x_2$ em $A \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ em B.



Representação gráfica

Reta

$ax + b = 0$



- a: coeficiente angular (declividade)
- b: coeficiente linear (valor inicial)

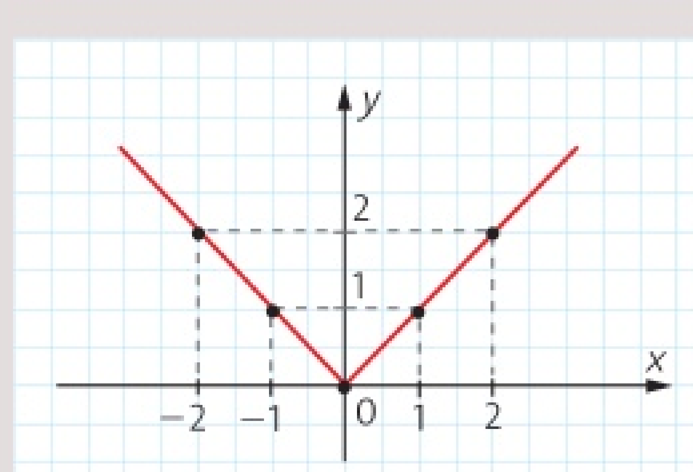
Função poligonal ou afim por partes

Função modular

Denomina-se função modular a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tal que $f(x) = |x|$, ou seja:

$$f = \begin{cases} x, \text{ para } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ para } x < 0 \end{cases}$$

Gráfico da função modular



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}_+$

Exercícios

1. (Faap-SP) A taxa de inscrição num clube de natação é de R$ 150,00 para o curso de 12 semanas. Se uma pessoa se inscreve após o início do curso, a taxa é reduzida linearmente. Calcule quanto uma pessoa pagou ao se inscrever 5 semanas após o início do curso.

a) R$ 62,50 c) R$ 74,50 e) R$ 87,50

b) R$ 50,50 d) R$ 78,50

150 —— 12 semanas

x —— 5 semanas $\Rightarrow x = 62{,}5$

Como a função é linear, podemos fazer a regra de três diretamente com os valores da função.

Resposta: alternativa **a**.

2. (Unicamp-SP) Em uma determinada região do planeta, a temperatura média anual subiu de 13,35 °C em 1995 para 13,8 °C em 2010. Seguindo a tendência de aumento linear observada entre 1995 e 2010, a temperatura média em 2012 deverá ser de:

a) 13,83 °C. c) 13,92 °C.

b) 13,86 °C. d) 13,89 °C.

T	Ano
13,35	1995
13,80	2010
?	2012

$y = ax + b$

$a = \dfrac{13{,}80 - 13{,}35}{2010 - 1995} = \dfrac{0{,}45}{15} \Rightarrow a = 0{,}03$ °C/ano

Em 2012 estará $2 \cdot 0{,}03 = 0{,}06$ °C mais quente do que em 2010.

Assim: 13,8 °C + 0,06 °C = 13,86 °C.

Resposta: alternativa **b**.

3. (UFSM-RS) Da frieza dos números da pesquisa saíram algumas recomendações. Transformadas em políticas públicas, poderiam reduzir a gravidade e as dimensões da tragédia urbana do trânsito.

A primeira é a adoção de práticas que possam reduzir a gravidade dos acidentes.

A segunda recomendação trata dos motociclistas, cuja frota equivale a 10% do total, mas cujos custos correspondem a 19%. O *motoboy* ganha R$ 2,00 por entrega, a empresa, R$ 8,00. É um exército de garotos em disparada.

O pedestre forma o contingente mais vulnerável no trânsito e necessita de maior proteção, diz a terceira recomendação da pesquisa. Entre a 0h e as 18h da quinta-feira, as ambulâncias vermelhas do Resgate recolheram 16 atropelados nas ruas de São Paulo.

PELLIM, Roberto; BIANCARELLI, Aureliano.
Acidentes custam R$ 5,3 bilhões por ano. *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 1º jun. 2003.

Conforme o texto, num dia de trabalho, são necessárias 12 entregas para um *motoboy* receber R$ 24,00. Por medida de segurança, uma empresa limitará a 10 a quantidade de entregas por dia. Como compensação, pagará um adicional fixo de *p* reais ao dia a quem atingir esse limite, porém reduzirá para R$ 1,80 o valor pago por cada entrega. O valor de *p* que manterá inalterada a quantia diária recebida pelo *motoboy*, ou seja, R$ 24,00, será:

a) R$ 5,40. b) R$ 5,60. c) R$ 5,80. d) R$ 6,00. e) R$ 6,20.

Valor da entrega $= \dfrac{24}{12} = 2$ reais

$2 - 1{,}80 = 0{,}2$

$24 = 10 \cdot 1{,}80 + p \Rightarrow p = 6$

Resposta: alternativa **d**.

4. (Cesgranrio-RJ) O valor de um carro novo é de R$ 9 000,00 e, com 4 anos de uso, é de R$ 4 000,00. Supondo que o preço caia com o tempo, segundo uma linha reta, o valor de um carro com 1 ano de uso é:

a) R$ 8 250,00.
b) R$ 8 000,00.
c) R$ 7 750,00.
d) R$ 7 500,00.
e) R$ 7 000,00.

x	y
0	9 000
4	4 000

$a = \dfrac{4\,000 - 9\,000}{4 - 0} = \dfrac{-5\,000}{4} = -1\,250$

Logo, $f(x) = -1\,250x + 9\,000$.

Então:

$f(1) = -1\,250 + 9\,000 = 7\,750$

Resposta: alternativa **c**.

5. (UFPB) Um navio petroleiro sofreu uma avaria no casco e estava derramando óleo que se acumulava no oceano, formando uma mancha circular. Exatamente às 8h do dia em que ocorreu a avaria, verificou-se que o raio da mancha media 20 metros e que, a partir daquele instante, a medida do raio (r), em metros, variava conforme a função $r(t) = 20 + 0{,}2t$, onde t é o tempo decorrido, medido em horas a partir das 8h desse dia. Nesse contexto, é correto afirmar que, exatamente às 18h do mesmo dia, a mancha estava ocupando uma área de:

a) 384π m².
b) 484π m².
c) 474π m².
d) 584π m².
e) 574π m².

8h $\rightarrow r(0)$
18h $\rightarrow r(10)$
Então:
$r(10) = 20 + 0{,}2 \cdot 10 \Rightarrow r(10) = 22$ m
Logo:
$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \cdot 22^2 \Rightarrow A \simeq 484\pi$ m²
Resposta: alternativa **b**.

6. (UFRN) Uma empresa de tecnologia desenvolveu um produto do qual, hoje, 60% das peças são fabricadas no Brasil, e o restante é importado de outros países. Para aumentar a participação brasileira, essa empresa investiu em pesquisa, e sua meta é, daqui a 10 anos, produzir, no Brasil, 85% das peças empregadas na confecção do produto. Com base nesses dados e admitindo-se que essa porcentagem varie linearmente com o tempo contado em anos, o percentual de peças brasileiras na fabricação desse produto será superior a 95% a partir de:

a) 2027.
b) 2026.
c) 2028.
d) 2025.

Ano	%
2013	60
2023	85
?	95

$a = \dfrac{85 - 60}{2023 - 2013} = \dfrac{25}{10} = 2{,}5\%$ ano

$a = \dfrac{95 - 60}{x - 2013} = 2{,}5 \Rightarrow \dfrac{3{,}5}{2{,}5} = x - 2013 \Rightarrow 14 = x - 2013 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2027$

Resposta: alternativa **a**.

7. (UCS-RS) O valor cobrado por uma empresa, em milhões de reais, para construir uma estrada, varia de acordo com o número x de quilômetros de estrada construídos. O modelo matemático para determinar esse valor é uma função polinomial do primeiro grau, cujo gráfico é uma reta que passa pelos pontos de coordenadas (x, y), dadas abaixo.

x	y
0	4
p	5
15	7
18	k

Qual é o valor de $p + k$?

a) 9,4
b) 10,4
c) 11,4
d) 12,6
e) 22,5

• $f(x) = ax + b \Rightarrow 4 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 4$

$7 = 15 \cdot a + b \Rightarrow 7 = 15a + 4 \Rightarrow 3 = 15a \Rightarrow a = \dfrac{1}{5}$

• $f(x) = \dfrac{1}{5}x + 4 \Rightarrow 5 = \dfrac{1}{5}p + 4 \Rightarrow 1 = \dfrac{1}{5}p \Rightarrow p = 5$

• $k = \dfrac{1}{5} \cdot 18 + 4 \Rightarrow k = 7{,}6$

Logo, $k + p = 12{,}6$.
Resposta: alternativa **d**.

8. (UFRN) Ao pesquisar preços para a compra de uniformes, duas empresas, E_1 e E_2, encontraram, como melhor proposta, uma que estabelecia o preço de venda de cada unidade por $120 - \frac{n}{20}$, onde n é o número de uniformes comprados, com o valor por uniforme se tornando constante a partir de 500 unidades.
Se a empresa E_1 comprou 400 uniformes e a E_2, 600, na planilha de gastos, deverá constar que cada uma pagou pelos uniformes, respectivamente:

a) R$ 38 000,00 e R$ 57 000,00.
b) R$ 40 000,00 e R$ 54 000,00.
c) R$ 40 000,00 e R$ 57 000,00.
d) R$ 38 000,00 e R$ 54 000,00.

Sendo p o preço por unidade, temos $p(n) = 120 - \frac{n}{20}$.

- Para E_1:
  $p(400) = 120 - \frac{400}{20} \Rightarrow p(400) = 100$
  400 uniformes $\cdot$ 100 = 40 000 reais
- Para E_2:
  $p(500)$ é o limite de preço
  $p(500) = 120 - \frac{500}{20} \Rightarrow p(500) = 95$
  600 uniformes $\cdot$ 95 = 57 000 reais

Resposta: alternativa **c**.

9. (Uesc-BA) O monitoramento do número de batimentos cardíacos por minuto, relacionando-o com a idade do indivíduo, não só pode evitar enfartes fulminantes como também auxiliar na determinação dos limites a serem respeitados na prática de atividades físicas. A fórmula clássica utilizada na determinação do número máximo de batimentos cardíacos por minuto (bpm), $F_{\text{máx.}} = 220 - i$, em que i é a idade, é bastante controversa, pois pode errar de duas maneiras – os mais jovens podem extrapolar seus limites e os mais velhos ficarem aquém dos que poderiam atingir. Estudos mostraram que se utilizando a fórmula $F = 60 + k(F_{\text{máx.}} - 60)$, em que $55\% \leqslant k \leqslant 70\%$, se pode determinar uma faixa de batimentos cardíacos por minuto dentro da qual é possível conseguir benefícios através dos exercícios, evitando sobrecargas. Nessas condições, um indivíduo com 50 anos de idade pode fazer exercícios físicos, com segurança, dentro da faixa de batimentos por minuto, entre:

01) 108 e 125.
02) 121 e 136.
03) 130 e 142.
04) 138 e 153.
05) 150 e 166.

$F_{\text{máx.}} = 220 - 50 \Rightarrow F_{\text{máx.}} = 170$

- Para $k = 55\%$
  $F_{\text{mín.}} = 60 + 0{,}55 \cdot (170 - 60) \Rightarrow F_{\text{mín.}} = 120{,}5$
- Para $k = 70\%$
  $F_{\text{mín.}} = 60 + 0{,}7 \cdot (170 - 60) \Rightarrow F_{\text{mín.}} = 137$

O indivíduo está em segurança entre 120,5 e 137 batimentos por minuto.

Resposta: alternativa **02**.

10. (Uece) No mundo empresarial é costumeira a realização de análise da evolução patrimonial, do faturamento anual, do volume comercializado e do lucro das empresas, dentre outros segmentos de acompanhamento e controle. A Associação Brasileira do Meio Hoteleiro (ABMH) constatou que o faturamento anual das empresas associadas quase dobrou no período 2006 a 2011, passando de 8 bilhões de reais em 2006 para 15,8 bilhões em 2011. Admitindo-se que a evolução observada ocorreu de forma linear crescente no período analisado, é possível afirmar corretamente que o faturamento anual no ano de 2009, em bilhões de reais, foi de:

a) 11,12. b) 11,80. c) 12,68. d) 13,40.

Ano	Faturamento
2006	8
2011	15,8
2009	?

$y = ax + b$

$a = \frac{15{,}8 - 8}{2011 - 2006} = \frac{7{,}8}{5} = 1{,}56$ bilhão/ano

$2009 - 2006 = 3$ anos

$3 \cdot 1{,}56 = 4{,}68$ bilhões

Logo, em 2009 o faturamento foi de:

$8 + 4{,}68 = 12{,}68$ bilhões

Resposta: alternativa **c**.

11. (FGV-SP) Quando o preço por unidade de certo modelo de telefone celular é R$ 250,00, são vendidas 1 400 unidades por mês. Quando o preço por unidade é R$ 200,00, são vendidas 1 700 unidades mensalmente. Admitindo que o número de celulares vendidos por mês pode ser expresso como função polinomial do primeiro grau do seu preço, podemos afirmar que, quando o preço for R$ 265,00, serão vendidas:

a) 1 290 unidades.
b) 1 300 unidades.
c) 1 310 unidades.
d) 1 320 unidades.
e) 1 330 unidades.

Preço	Celulares
250	1 400
200	1 700
265	x

$a = \frac{1700 - 1400}{200 - 250} = \frac{300}{-50} = -6$ celulares/reais

$a = \frac{x - 1700}{265 - 200} = -6 \Rightarrow x - 1700 = -6 \cdot 65 \Rightarrow x = 1700 - 390 = 1310$

Resposta: alternativa **c**.

12. (UFU-MG) Suponha que, para realizar traduções de textos egípcios para um museu brasileiro, um tradutor X cobre um valor fixo de R$ 440,00, acrescidos de R$ 3,20 por linha traduzida. Por outro lado, um tradutor Y, para executar o mesmo trabalho, cobra um fixo de R$ 800,00, mais R$ 2,30 por linha traduzida. Nessas condições, o número que corresponde à quantidade mínima de linhas a serem traduzidas de modo que o custo seja menor se for realizado pelo tradutor Y é:

a) um quadrado perfeito.

b) divisível por 5.

c) um número ímpar.

d) divisível por 3.

Tradutor X: $f_1(l) = 440 + 3{,}2l$

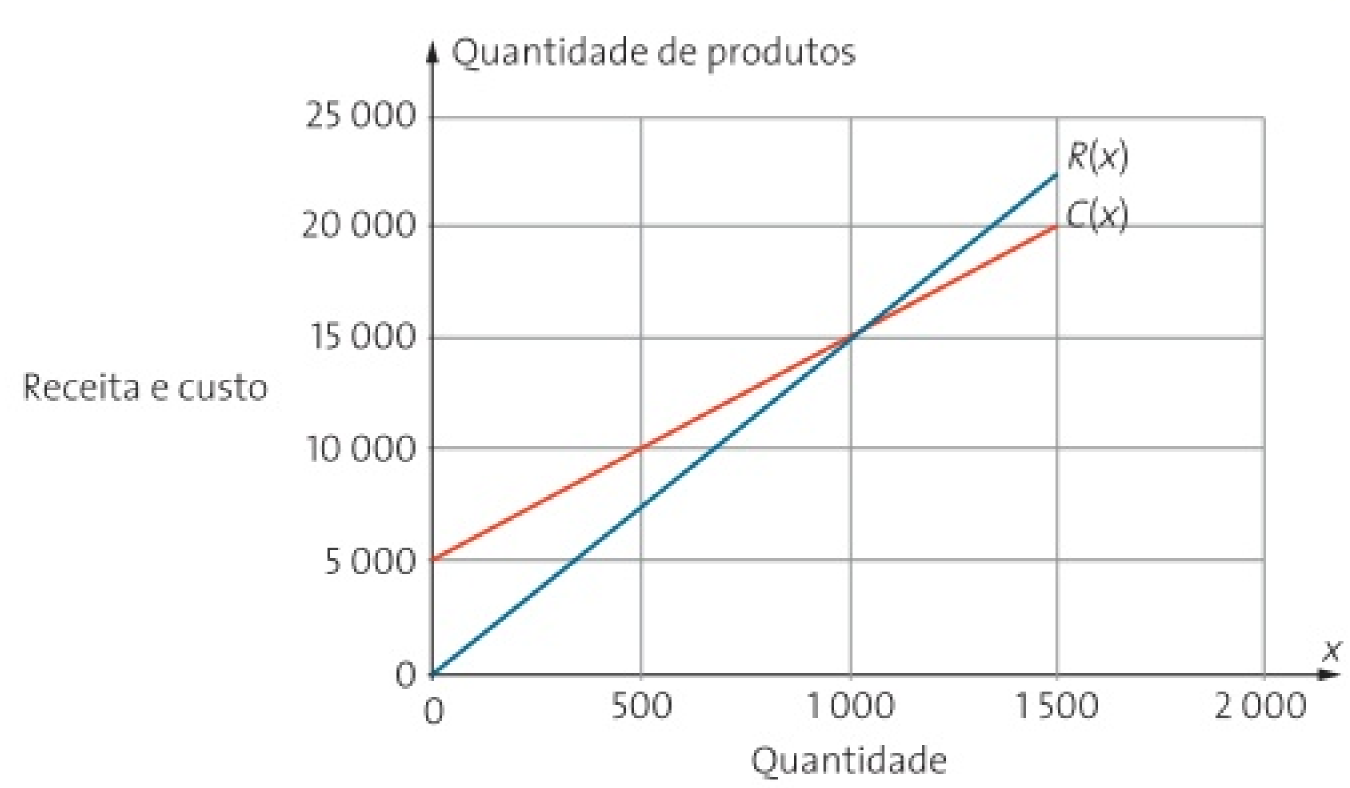
Tradutor Y: $f_2(l) = 800 + 2{,}3l$

$f_1(l) > f_2(l) \Rightarrow 440 + 3{,}2l > 800 + 2{,}3l \Rightarrow 0{,}9l > 360 \Rightarrow l > 400$

Logo, $l = 401$.

Resposta: alternativa **c**.

13. (FGV-SP) Os gráficos ao lado representam as funções receita mensal $R(x)$ e custo mensal $C(x)$ de um produto fabricado por uma empresa, em que x é a quantidade produzida e vendida. Qual o lucro obtido ao se produzir e vender 1 350 unidades por mês?



a) 1 740

b) 1 750

c) 1 760

d) 1 770

e) 1 780

• Receita:

$$a = \frac{15\,000 - 0}{1000 - 0} = 15$$

$R(x) = 15x$

• Custo:

$$a = \frac{15\,000 - 5\,000}{1000 - 0} = 10$$

$C(x) = 10x + 5\,000$

Então:

$L(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow L(1\,350) = 15 \cdot 1\,350 - (10 \cdot 1\,350 + 5\,000) \Rightarrow L(1\,350) = 20\,250 - 18\,500 = 1\,750$

Resposta: alternativa **b**.

14. (IFPE) As escalas de temperatura mais conhecidas são Celsius (°C) e Fahrenheit (°F). Nessas escalas, o ponto de congelamento da água corresponde a 0 °C e 32 °F, e o ponto de ebulição corresponde a 100 °C e 212 °F. A equivalência entre as escalas é obtida por uma função polinomial do 1º grau, ou seja, uma função da forma $f(x) = ax + b$, em que $f(x)$ é a temperatura em grau Fahrenheit (°F) e x a temperatura em grau Celsius (°C). Se em um determinado dia a temperatura no centro do Recife era de 29 °C, a temperatura equivalente em grau Fahrenheit (°F) era de:

a) 84 °F.
b) 84,02 °F.
c) 84,1 °F.
d) 84,12 °F.
e) 84,2 °F.

°C	°F
0	32
100	212

$a = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = 1{,}8$ °F/°C

$f(c) = 32 + 1{,}8c \Rightarrow f(29) = 32 + 1{,}8 \cdot 29 = 84{,}2$

Resposta: alternativa **e**.

15. (Unifor-CE) Damílton foi a uma empresa concessionária de telefonia móvel na qual são oferecidas duas opções de contratos:

I. R$ 90,00 de assinatura mensal e mais R$ 0,40 por minuto de conversação.
II. R$ 77,20 de assinatura mensal e mais R$ 0,80 por minuto de conversação.

Nessas condições, se a fração de minuto for considerada como minuto inteiro, a partir de quantos minutos mensais de conversação seria mais vantajoso para Damílton optar pelo contrato **I**?

a) 25 b) 29 c) 33 d) 37 e) 41

I. $f_1(x) = 0{,}4x + 90$

II. $f_2(x) = 0{,}8x + 77{,}2$

$f_1(x) < f_2(x) \Rightarrow 0{,}4x + 90 < 0{,}8x + 77{,}2 \Rightarrow x > 32$

Resposta: alternativa **c**.

16. (Unisc-RS) Para produzir um objeto, uma firma gasta R$ 2,40 por unidade. Além disso, há uma despesa fixa de R$ 8 000,00, independentemente da quantidade produzida. O preço de venda desse objeto é de R$ 4,00 por unidade. O número de unidades que o fabricante deve vender para não ter lucro nem prejuízo é igual a:

a) 500.
b) 5 000.
c) 5 500.
d) 2 500.
e) 550.

Sendo L o lucro; R a receita; C o custo, temos:

$L(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow L(x) = 4x - (8\,000 + 2{,}4x) \Rightarrow$

$\Rightarrow L(x) = 4x - 8\,000 - 2{,}4x \Rightarrow L(x) = 1{,}6x - 8\,000$

Como não há lucro, $L = 0$. Então:

$0 = 1{,}6x - 8\,000 \Rightarrow x = 5\,000$ unidades

Resposta: alternativa **b**.

17. (UFMS) Sabe-se que, em certa empresa, a expressão $L(x) = 0{,}25x + 875$ define a variação do lucro L em reais, em relação à venda de x produtos. Partindo de uma venda inicial de 500 produtos, se quisermos que haja um aumento no lucro inicial em 10%, deveremos ter um aumento percentual de quantidade de produtos vendidos, em relação à quantidade inicial, de x%. Então qual é o valor de x?

Sendo $L_1 = 1\,000$ temos:

$1{,}1 \cdot 1\,000 = 0{,}25x + 875 \Rightarrow x = 900$

Então:

$$\left.\begin{array}{lcl} 500 & \text{——} & 100\% \\ 400 & \text{——} & x \end{array}\right. \Rightarrow x = 80\%$$

Resposta: 80.

18. (UFCG-PB) O lucro diário de um laboratório de análises clínicas é dado pela equação $L(x) = 40x - 800$ reais, quando x exames são feitos por dia. Para que o lucro, de um dia para o outro, aumente de R$ 3 000,00 para R$ 4 000,00, o número a mais de exames que devem ser feitos é:

a) 25. b) 20. c) 17. d) 15. e) 206.

$3\,000 = 40x - 800 \Rightarrow x = 95$ exames

$4\,000 = 40x - 800 \Rightarrow x = 120$ exames

Sendo P o valor pedido, temos:

$P = 120 - 95 \Rightarrow P = 25$ exames

Resposta: alternativa **a**.

---

19. (PUC-MG) A receita R, em reais, obtida por uma empresa com a venda de q unidades de certo produto, é dada por $R(q) = 115q$, e o custo C, em reais, para produzir q dessas unidades, satisfaz a equação $C(q) = 90q + 760$. Para que haja lucro, é necessário que a receita R seja maior que o custo C. Então, para que essa empresa tenha lucro, o número mínimo de unidades desse produto que deverá vender é igual a:

a) 28. b) 29. c) 30. d) 31.

$L(q) = R(q) - C(q) \Rightarrow L(q) = 115q - (90q + 760) \Rightarrow L(q) = 25q - 760$

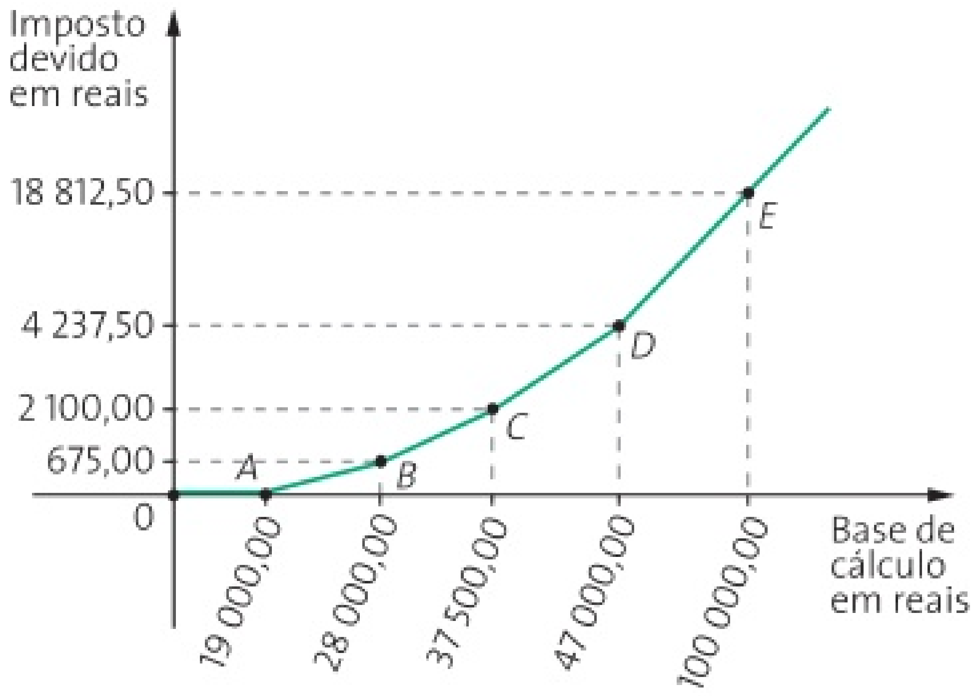
Mas:

$25q - 760 > 0 \Rightarrow q > 30{,}4$ unidades

Logo o número mínimo de unidades desse produto é 31.

Resposta: alternativa **d**.

20. (Fuvest-SP) O imposto de renda devido por uma pessoa física à Receita Federal é função da chamada base de cálculo, que se calcula subtraindo o valor das deduções do valor dos rendimentos tributáveis. O gráfico dessa função, representado na figura, é a união dos segmentos de reta $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e da semirreta $\overrightarrow{DE}$. João preparou sua declaração tendo apurado como base de cálculo o valor de R$ 43 800,00. Pouco antes de enviar a declaração, ele encontrou um documento esquecido numa gaveta que comprovava uma renda tributável adicional de R$ 1 000,00. Ao corrigir a declaração, informando essa renda adicional, o valor do imposto devido será acrescido de:



a) R$ 100,00.
b) R$ 200,00.
c) R$ 225,00.
d) R$ 450,00.
e) R$ 600,00.

Para renda de R$ 43 800,00 o gráfico é o segmento $\overline{CD}$. Assim:

$$a = \frac{4\,237 - 2100}{47000 - 37\,500} = \frac{2\,137}{9\,500}$$

A nova renda aumentada de R$ 1 000,00 ainda permanece no segmento $\overline{CD}$, portanto o aumento no imposto devido é dado por:

$$1\,000 \cdot a = 1\,000 \cdot \frac{2\,137}{9\,500} \simeq 225$$

Resposta: alternativa **c**.

---

21. (ESPM-SP) Um caminhão parte da cidade *A* ao meio-dia e dirige-se à cidade *B* com velocidade constante de 40 km/h, devendo chegar às 6h da tarde desse mesmo dia. Um outro caminhão que saiu às 2h da tarde da cidade *B*, dirigindo-se à cidade *A* com velocidade constante de 60 km/h, deverá encontrar-se com o primeiro, nessa mesma tarde, às:

a) 2h 50min.
b) 3h.
c) 3h 20min.
d) 3h 36min.
e) 3h 42min.

$f(x) = Vx + S_0$

$g(t) = Vt + S_0$

Após 2 horas, o caminhão que parte de *A* já terá andado:

$f(2) = 40 \cdot 2 + 0 \Rightarrow f(2) = 80$

A partir daí a distância entre eles será de:

$f(6) - f(2) = 40 \cdot 6 + 0 - (40 \cdot 2 + 0) = 160$ m

Mas:

$f(t) = g(t) \Rightarrow 40t + 0 = -60t + 160 \Rightarrow 100t = 160 \Rightarrow t = 1{,}6$ h

Logo:

2 h $+ 1{,}6$ h $= 3{,}6$ h $=$ 3h 36min

Resposta: alternativa **d**.

FUNÇÃO QUADRÁTICA

Definição

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se **função quadrática** quando existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $a = 0$.

Zeros da função

Fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Discriminante

$\Delta = b^2 \pm 4ac$

- $\Delta > 0$: $x_1 \neq x_2$
- $\Delta = 0$: $x_1 = x_2$
- $\Delta < 0$: $\nexists\, x \in \mathbb{R}$

Relação entre coeficientes e raízes

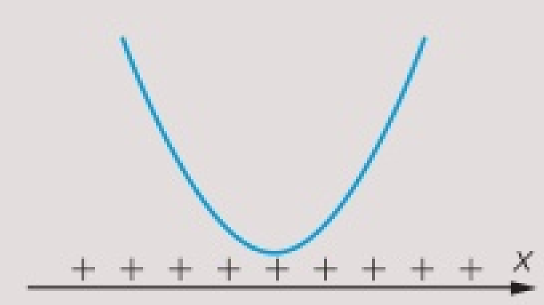
Soma: $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

Produto: $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

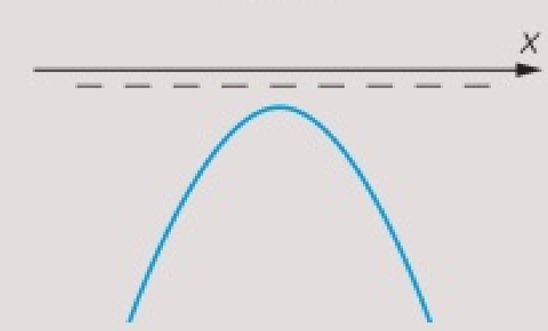
Número de zeros e concavidade

$\Delta < 0$

$a > 0$

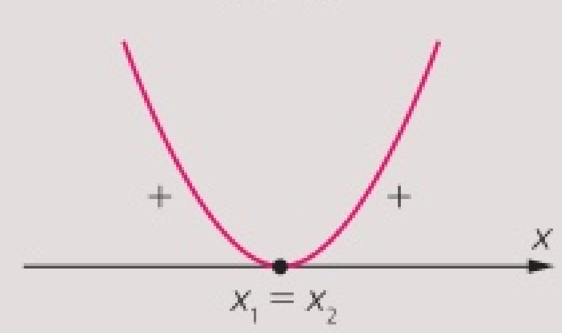


$a < 0$

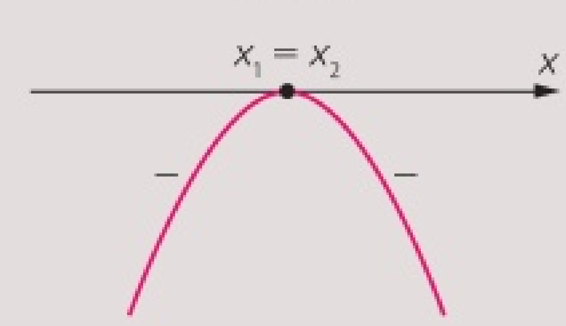


$\Delta = 0$

$a > 0$

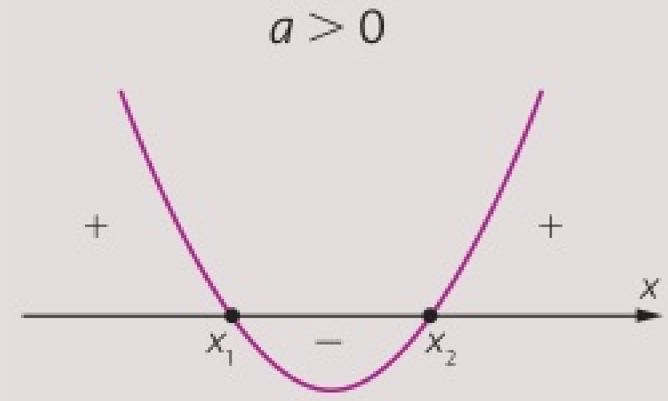


$a < 0$

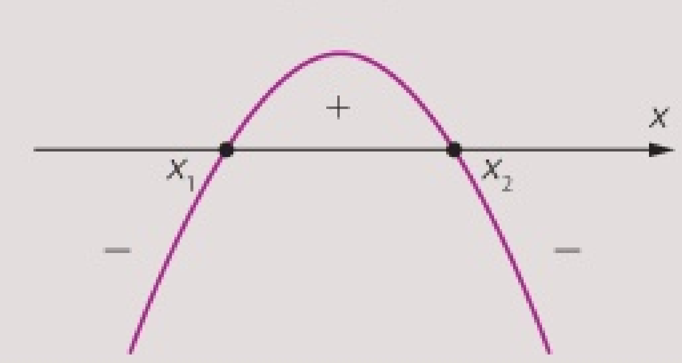


$\Delta > 0$

$a > 0$



$a < 0$



Forma algébrica

Forma canônica

$f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V$

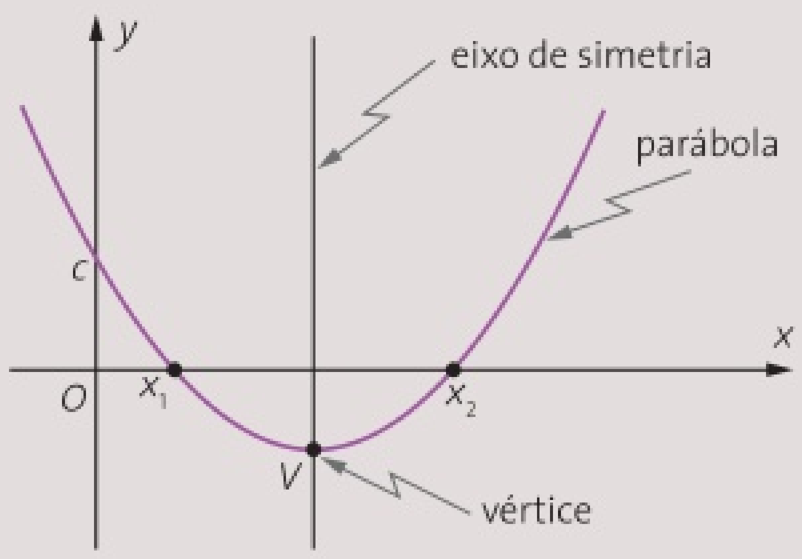
Forma fatorada

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - Sx + P)$

Representação gráfica

Parábola

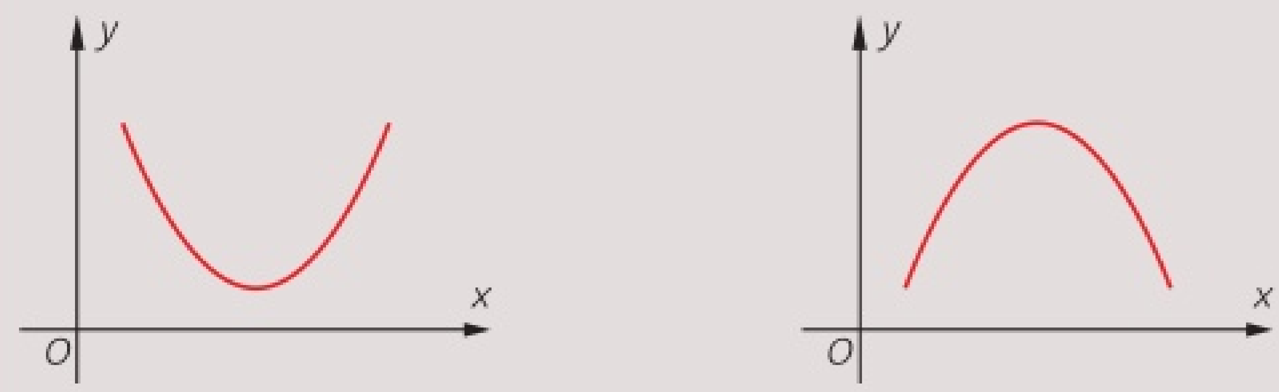
$ax^2 + bx + c = 0$



Parâmetro a

Concavidade da parábola.

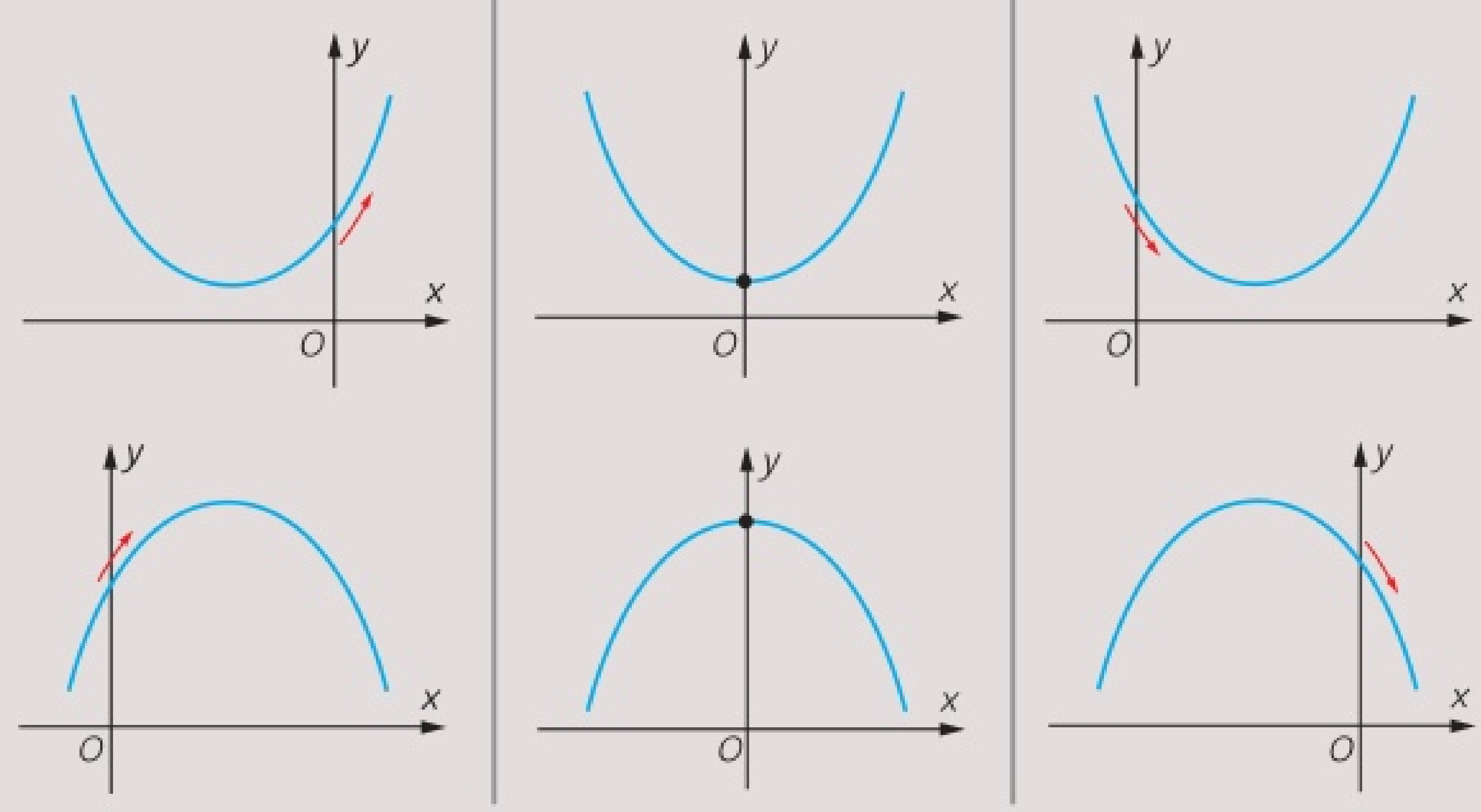
$a < 0$ $\qquad$ $a > 0$



Parâmetro b

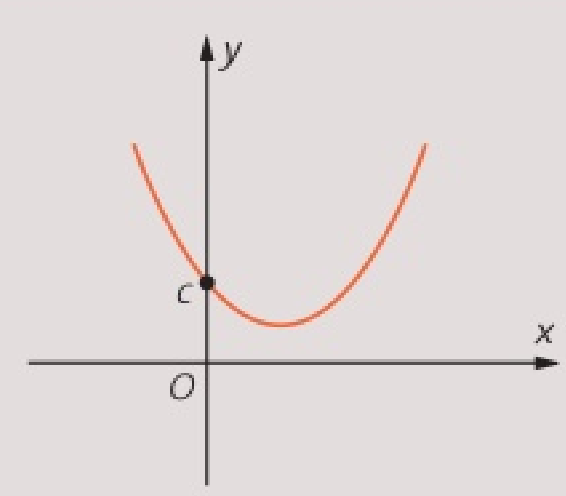
Ramo (crescente ou decrescente) da parábola que intersecta o eixo y.

$b < 0$ $\qquad$ $b = 0$ $\qquad$ $b > 0$



Parâmetro c

Ordenada do ponto onde a parábola intersecta o eixo y $(0, c)$.



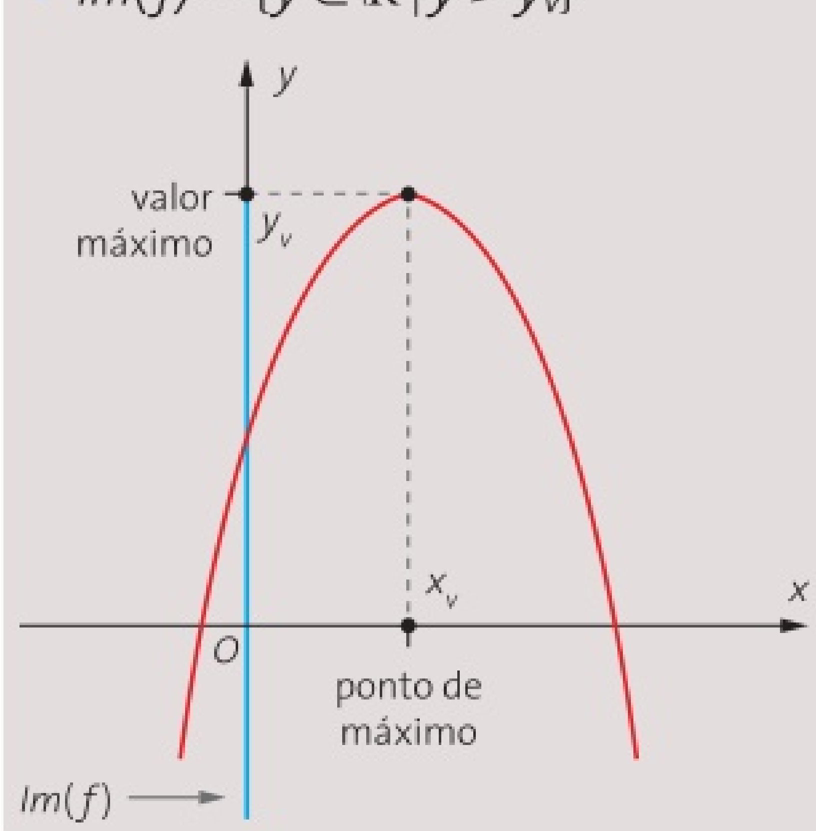
Vértice

$V(x_V, y_V)$

$x_V = -\dfrac{b}{2a}$ $\qquad$ $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$

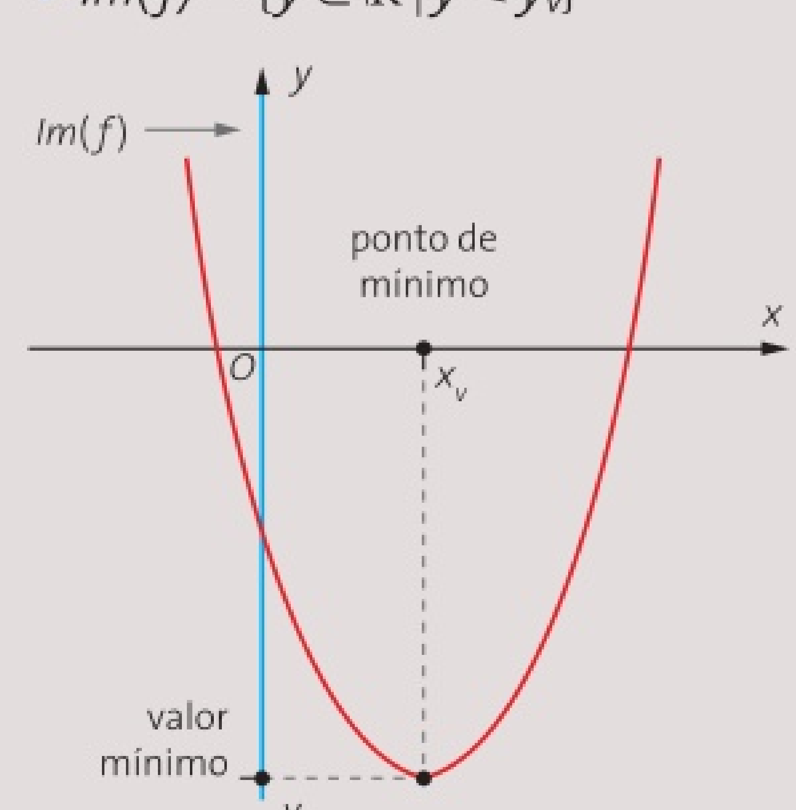
Valor máximo da função

- $a < 0 \Leftrightarrow y_V$ é valor máximo
- $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant y_V\}$



Valor mínimo da função

- $a > 0 \Leftrightarrow y_V$ é valor mínimo
- $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant y_V\}$



Exercícios

1. (UFMG) O valor máximo da função $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ é:

   a) 2. b) 3. c) 4. d) 5. e) 6.

   O valor máximo da função é definido pelo y_V:

   $y_V = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = \frac{-12}{-4} \Rightarrow y_V = 3$

   Resposta: alternativa **b**.

2. (ESPM-RJ) Se α e β são as raízes da equação $x^2 - 219x + 79 = 0$, o valor de $(\alpha + 1) \cdot (\beta + 1)$ é:

   a) 299. c) 243. e) 275.
   b) 211. d) 237.

   $(\alpha + 1)(\beta + 1) = (\alpha\beta) + (\alpha + \beta) + 1$

   $\alpha\beta = \frac{79}{1} = 79$

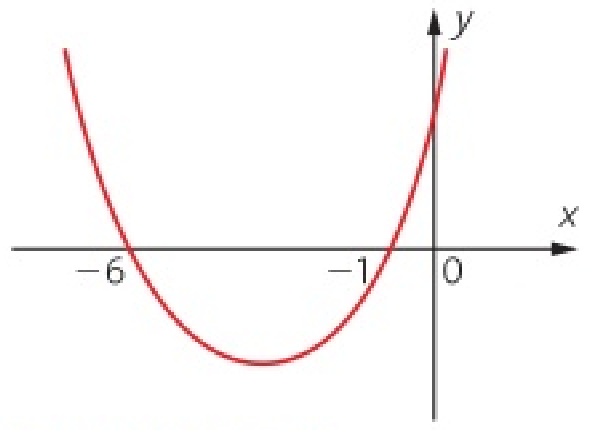
   $\alpha + \beta = \frac{-(-219)}{1} = 219$

   $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 79 + 219 + 1 = 79 + 220 = 299$

   Resposta: alternativa **a**.

3. (Unimontes-MG) A quantidade de números inteiros que satisfaz a inequação $x^2 + 7x < -6$ é:

   a) 6. b) 5. c) 4. d) infinita.



   $x^2 + 7x < -6 \Rightarrow x^2 + 7x + 6 < 0$

   $x^2 + 7x + 6 = 0$

   $\Delta = 49 - 24 = 25$

   $x' = \frac{-7 + 5}{2} = -1$

   $x'' = \frac{-7 - 5}{2} = -6$

   $-1 < x < -6$

   Os números inteiros que satisfazem a inequação são: $-5, -4, -3, -2$.

   Resposta: alternativa **c**.

4. (UFSM-RS) Um laboratório testou a ação de uma droga em uma amostra de 720 frangos. Constatou-se que a lei de sobrevivência do lote de frangos era dada pela relação $v(t) = at^2 + b$, onde $v(t)$ é o número de elementos vivos no tempo t (meses). Sabendo-se que o último frango morreu quando $t = 12$ meses após o início da experiência, a quantidade de frangos que ainda estava viva no 10º mês é:

   a) 80. c) 120. e) 300.
   b) 100. d) 220.

   $v(0) = 720 \Rightarrow b = 720$

   $v(12) = 0 \Rightarrow 144a + 720 = 0 \Rightarrow a = \frac{-720}{144} \Rightarrow a = -5$

   $v(t) = -5t^2 + 720 \Rightarrow v(10) = -5 \cdot 100 + 720 \Rightarrow v(10) = 220$

   Resposta: alternativa **d**.

5. (UFSM-RS) Uma empresa que elabora material para panfletagem (santinhos) tem um lucro, em reais, que é dado pela lei $L(x) = -x^2 + 10x - 16$, onde x é a quantidade vendida em milhares de unidades. Assim, a quantidade em milhares de unidades que deverá vender, para que tenha lucro máximo, é:

a) 9. b) 8. c) 7. d) 6. e) 5.

A quantidade (em milhares) de unidades vendidas para se obter lucro máximo é dada pelo x_V:

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{-2} = 5$

Resposta: alternativa **e**.

6. (PUC-RS) O lucro mensal de uma microempresa é dado pela função $L(x) = -x^2 + 4x - 3$, onde x é a quantidade produzida e vendida e L é expresso em milhares de reais. Assim, o lucro máximo dessa microempresa é _____ reais.

a) 6 000 c) 3 000 e) 1 000

b) 4 000 d) 2 000

O lucro máximo é dado por y_V:

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-4}{-4} = 1$ (em milhar)

Resposta: alternativa **e**.

7. (PUC-MG) O lucro de uma serraria é dado pela função $L(x) = 16x - x^2$ em que x é o número de toras de madeira serradas a cada quatro dias. Com base nessas informações, pode-se afirmar que a serraria obtém o maior lucro quando serra, a cada quatro dias:

a) quatro toras. c) doze toras.

b) oito toras. d) dezesseis toras.

A quantidade de toras serradas a cada quatro dias para se obter lucro máximo é definida pelo x_V:

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-16}{-2} = 8$

Resposta: alternativa **b**.

8. (Uneb-BA) Uma fábrica de equipamentos leves fez um estudo de sua produção e conseguiu uma fórmula, cuja expressão é $C(n) = 0{,}6n^2 - 120n + 10\,000$, para obter o custo C, em reais, em função do número n de peças produzidas. Nessas condições, o custo mínimo, em reais, de produção dessa fábrica é de:

01) 3 500. 03) 4 500. 05) 5 500.

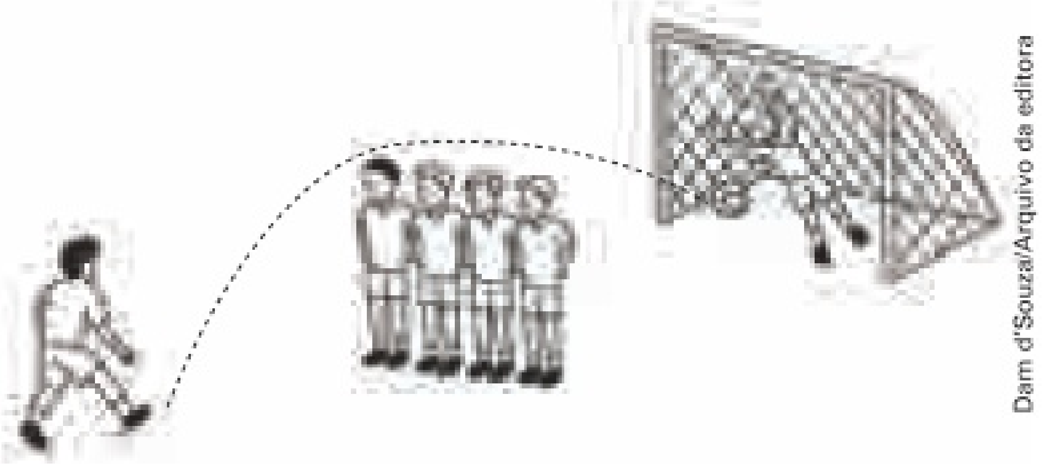
02) 4 000. 04) 5 000.

O custo mínimo é definido pelo y_V:

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{9\,600}{2 \cdot 4} = 4\,000$

Resposta: alternativa **02**.

9. (UFT-TO) Um jogador de futebol, ao bater uma falta com barreira, chuta a bola de forma a encobri-la. A trajetória percorrida pela bola descreve uma parábola para chegar ao gol.



Sabendo-se que a bola estava parada no local da falta no momento do chute, isto é, com tempo e altura iguais a zero. Sabendo-se ainda que, no primeiro segundo após o chute, a bola atingiu uma altura de 6 metros e, cinco segundos após o chute, ela atingiu altura de 10 metros. Pode-se afirmar que após o chute a bola atingiu a altura máxima no tempo igual a:

a) 3 segundos.
b) 3,5 segundos.
c) 4 segundos.
d) 4,5 segundos.
e) 5 segundos.

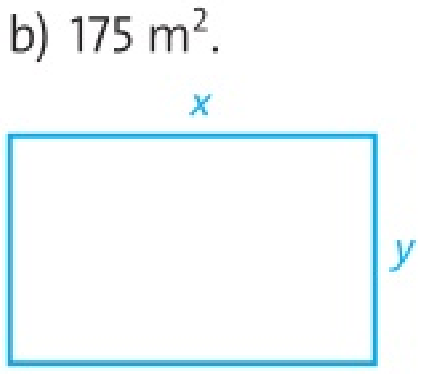
Pode-se montar uma equação da altura em relação ao tempo:
$h(t) = at^2 + bt + c$, com $c = 0$, pois $h(0) = 0$
Substituindo valores, temos:
$h(5) = 10 \Rightarrow 25a + 5b = 10$
$h(1) = 6 \Rightarrow a + b = 6$
Logo:

$$\begin{cases} 25a + 5b = 10 \\ a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25a + 5b = 10 \\ -5a - 5b = -30 \end{cases}$$
$$\overline{20a = -20 \Rightarrow a = -1}$$

$a + b = 6 \Rightarrow -1 + b = 6 \Rightarrow b = 7$
Portanto, a função é $h(x) = -t^2 + 7t$.
O valor de t na altura máxima é x_V:
$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$
Resposta: alternativa **b**.

10. (UFPB) Em seus trabalhos de campo, os botânicos necessitam demarcar áreas de mata onde farão observações. Essas áreas são denominadas **parcelas** e, geralmente, usa-se corda para demarcá-las. Nesse contexto, se uma parcela retangular for demarcada com 60 m de corda, sua área será, no máximo, de:

a) 100 m^2.
b) 175 m^2.
c) 200 m^2.
d) 225 m^2.
e) 300 m^2.



$2x + 2y = 60 \Rightarrow x + y = 30 \Rightarrow y = 30 - x$
$A(x) = x \cdot (30 - x) = -x^2 + 30x$
$\Delta = 900$
Sua área máxima será definida por y_V:
$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-900}{-4} = 225$$
Resposta: alternativa **d**.

11. (UFG-GO) A distância que um automóvel percorre até parar, após ter os freios acionados, depende de inúmeros fatores. Essa distância em metros pode ser calculada aproximadamente pela expressão $\Delta = \frac{V^2}{250\mu}$, onde V é a velocidade em km/h no momento inicial da frenagem e μ é um coeficiente adimensional que depende das características dos pneus e do asfalto. Considere que o tempo de reação de um condutor é de um segundo, do instante em que vê um obstáculo até acionar os freios. Com base nessas informações, e considerando $\mu = 0{,}8$, qual é a distância aproximada percorrida por um automóvel do instante em que o condutor vê um obstáculo, até parar completamente, se estiver trafegando com velocidade constante de 90 km/h?

a) 25,0 m
b) 40,5 m
c) 65,5 m
d) 72,0 m
e) 105,5 m

Substituindo-se os valores dados na questão para encontrar a distância percorrida na frenagem, temos:

$$D = \frac{90^2}{250 \cdot 0{,}8} = \frac{8\,100}{20} = 40{,}5 \text{ m}$$

A seguir, soma-se essa distância à percorrida no segundo anterior à frenagem:

$$D_{\text{antes}} = \frac{90 \cdot 10^3}{3\,600} = \frac{900}{36} = 25$$

$D + d = 40{,}5 + 25 = 65{,}5$

Resposta: alternativa **c**.

---

12. (UCS-RS) A relação entre o lucro, em milhares de reais, de determinada companhia de televisão a cabo e o número x de assinantes é descrita por uma função quadrática L, tal que $L(x) = -x^2 + bx + c$. Sabendo que a companhia será rentável quando tiver entre 12 mil e 84 mil assinantes, identifique a alternativa em que consta o lucro máximo que ela pode atingir e o correspondente número de assinantes que ela deve ter para que isso ocorra.

	Lucro máximo (em milhares de reais)	**Número de assinantes** (em milhares)
a)	1 296	48
b)	1 152	36
c)	1 008	84
d)	1 008	36
e)	1 152	48

A questão pede o y_V e o x_V.
Antes, precisamos descobrir b e c.
$L(x) > 0$, para $12 < x < 84$
$L(12) = L(84) = 0$
Então, 12 e 84 são as raízes de $L(x)$. Logo:

$$\frac{-b}{-1} = 12 + 84 \Rightarrow b = 96$$

$$\frac{c}{-1} = 12 \cdot 84 \Rightarrow c = -1\,008$$

Assim:
$L(x) = -x^2 + 96x - 1\,008$
$\Delta = 9\,216 - 4\,032 = 5\,184$

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-96}{-2} = 48$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-5\,184}{-4} = 1\,296$$

Resposta: alternativa **a**.

13. (Uneb-BA) Uma espécie animal, cuja família inicial era de 200 indivíduos, foi testada num laboratório sob a ação de certa droga e constatou-se que a lei de sobrevivência de tal família obedecia à relação $n(t) = q + pt^2$, na qual $n(t)$ é igual ao número de indivíduos vivos no tempo t, dado em horas desde o início do experimento, p e q parâmetros que dependiam da droga ministrada.
Nessas condições, sabendo-se que a família foi completamente dizimada em 10 horas, pode-se afirmar que o número de indivíduos dessa família que morreu na 6ª hora do experimento foi igual a:

01) 22. 03) 46. 05) 72.
02) 34. 04) 50.

Na questão foram dados $n(0)$ e $n(10)$.
$n(0) = 200 \Rightarrow q = 200$
$n(10) = 200 + 100p = 0 \Rightarrow p = -2$
$n(6) = 200 - 2 \cdot 36 = 128$
$n(5) = 200 - 25 \cdot 2 = 150$
$n(5) - n(6) = 22$
Resposta: alternativa **01**.

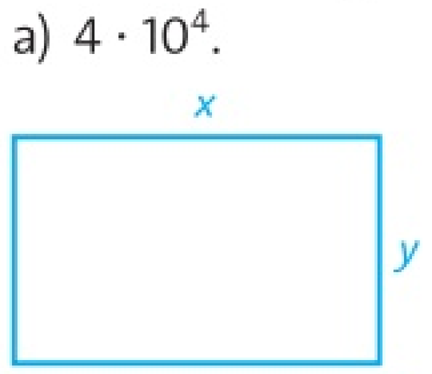
14. (Fameca-SP) Num ônibus intermunicipal, para estimar o lucro L em reais de uma viagem com a ocupação de x passageiros, adotou-se a expressão
$L(x) = (40 - x)(x - 10)$ para $10 < x < 40$. O lucro máximo, em reais, que se pode obter nessa viagem, é:

a) 200. c) 250. e) 650.
b) 225. d) 500.

$L(x) = 40x - 400 - x^2 + 10x \Rightarrow L(x) = -x^2 + 50x - 400$
$\Delta = 2\,500 - 4 \cdot (-1) \cdot (-400) = 2\,500 - 1\,600 = 900$
$y_V = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-900}{-4} = 225$
Resposta: alternativa **b**.

15. (Cesgranrio-RJ) Um tio rico de Joãozinho deixa para ele o terreno que ele escolher dentre suas propriedades. Contudo, Joãozinho deve seguir duas regras para fazer a escolha do terreno: o terreno deve ter forma retangular e plana e o perímetro do mesmo não pode exceder 400 m. Joãozinho acabou escolhendo um terreno que, além de satisfazer as regras impostas, tem a maior área possível. A área, em m^2, do terreno escolhido por Joãozinho é:

a) $4 \cdot 10^4$. b) $1 \cdot 10^4$. c) $4 \cdot 10^3$. d) $1 \cdot 10^3$. e) $4 \cdot 10^2$.



$2x + 2y = 400 \Rightarrow x + y = 200 \Rightarrow y = 200 - x$
$A(x) = x(200 - x) = -x^2 + 200x$
$\Delta = 40\,000$
$y_V = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-40\,000}{-4} = 10\,000$
Resposta: alternativa **b**.

16. (UFPE) Quando o preço do sanduíche é de R$ 4,00, uma lanchonete vende 150 unidades por dia. O número de sanduíches vendidos diariamente aumenta de 5 unidades, a cada diminuição de R$ 0,10 no preço de cada sanduíche. Para qual preço do sanduíche a lanchonete arrecadará o maior valor possível com a venda diária dos sanduíches?

a) R$ 3,10 b) R$ 3,20 c) R$ 3,30 d) R$ 3,40 e) R$ 3,50

Forma-se a função do valor arrecadado em função da quantidade de sanduíches vendidos e de seu preço unitário.

$V(x) = 4 \cdot 150$

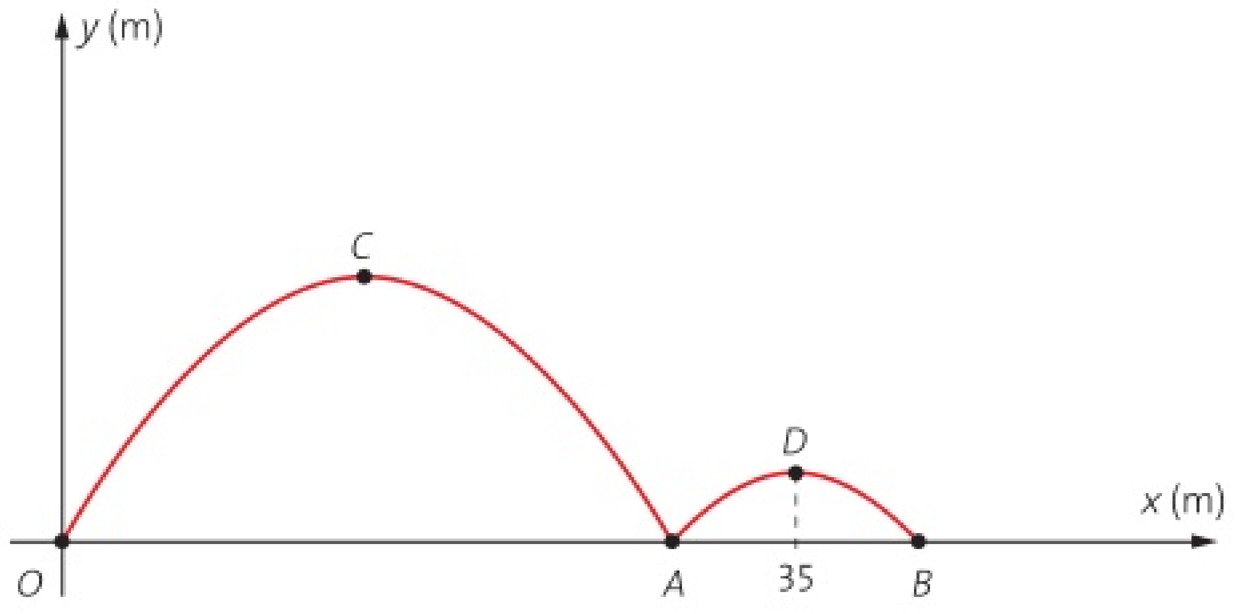
$V(x) = (4 - 0{,}1x)(150 + 5x) \Rightarrow V(x) = 600 + 20x - 15x - 0{,}5x^2 \Rightarrow V(x) = -0{,}5x^2 + 5x + 600$

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{-1} = 5$

Para $x = 5$, o valor unitário do sanduíche é de 3,5 reais.

Resposta: alternativa **e**.

17. (Uerj) Uma bola de beisebol é lançada de um ponto O e, em seguida, toca o solo nos pontos A e B, conforme representado no sistema de eixos ortogonais:



Durante sua trajetória, a bola descreve duas parábolas com vértices C e D.

A equação de uma dessas parábolas é $y = \frac{-x^2}{75} + \frac{2x}{5}$.

Se a abscissa de D é 35 m, a distância do ponto O ao ponto B, em metros, é igual a:

a) 38. b) 40. c) 45. d) 50.

A equação dada na questão corresponde à parábola maior, já que para $x = 0$ temos $y = 0$.

Primeiro, encontramos o valor da abscissa em A:

$\frac{-x^2}{75} = \frac{-2x}{5} \Rightarrow \frac{x}{75} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = 30$

Para $x_V = 35$ entre A e B, sabe-se que o ponto B tem $x_B = 40$.

Resposta: alternativa **b**.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Revisão de potenciação

Propriedades

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $(a : b)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, para $b \neq 0$
- $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

Notação científica

$x = a \cdot 10^n$, para $1 \leqslant a < 10$

Revisão de radiciação

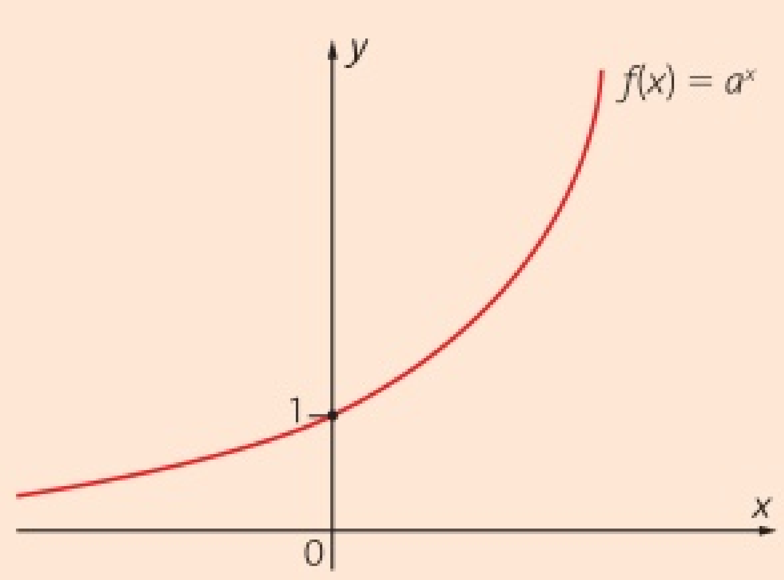
Propriedades

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$ e $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$
- $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n \cdot p]{a^m}$

Definição

Dado um número real a ($a > 0$ e $a \neq 1$), denominamos **função exponencial de base *a*** uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^*$ definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$.

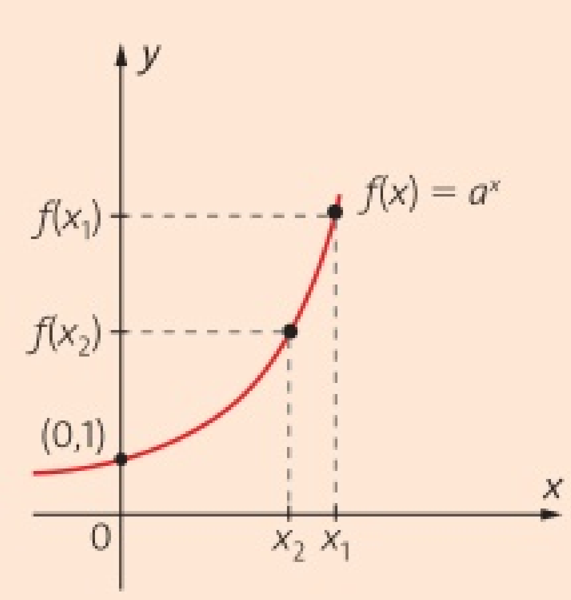
Representação gráfica da função exponencial



- $D(f) = \mathbb{R}$
- $CD(f) = Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

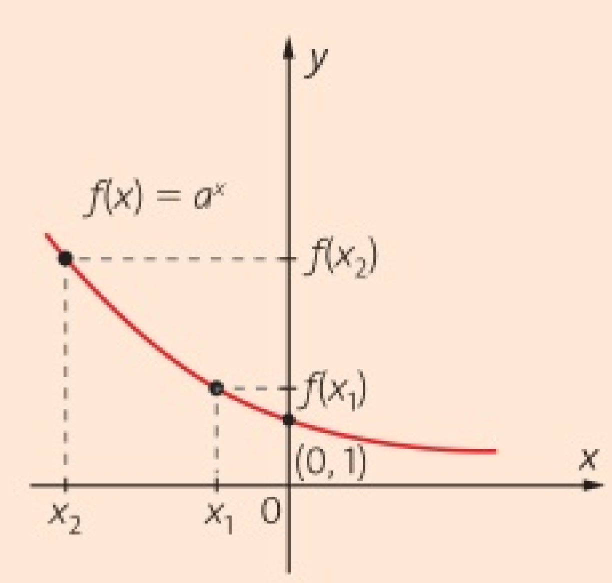
Crescente

- $a > 1$
- $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$



Decrescente

- $0 < a < 1$
- $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$



Equações exponenciais

$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Inequações exponenciais

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 > x_2, \text{ se } a > 1 \\ x_1 < x_2, \text{ se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Exercícios

1. (UEL-PR) Seja a equação exponencial $9^{x+3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$.

Assinale a alternativa que contém a solução da equação exponencial dada.

a) $x = -6$ c) $x = -\frac{5}{6}$ e) $x = 6$

b) $x = -\frac{6}{5}$ d) $x = \frac{5}{2}$

$9^{x+3} = (3^{-3})^x \Rightarrow 3^{2x+6} = 3^{-3x} \Rightarrow -3x = 2x + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5x = 6 \Rightarrow x = -\frac{6}{5}$

Resposta: alternativa **b**.

2. (PUC-RJ) A equação $2^{x^2-14} = \frac{1}{1024}$ tem duas soluções reais. A soma das duas soluções é:

a) -5. c) 2. e) 1 024.

b) 0. d) 14.

$2^{x^2-14} = \frac{1}{1024} \Rightarrow 2^{x^2-14} = 2^{-10} \Rightarrow x^2 - 14 = -10 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Soma $= +2 - 2 = 0$

Resposta: alternativa **b**.

3. (Udesc) Se x é solução da equação $3^{4x-1} + 9^x = 6$, então x^x é igual a:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. c) $\frac{1}{2}$. e) 27.

b) $\frac{1}{4}$. d) 1.

$\frac{3^{4x}}{3^1} + 3^{2x} = 6 \Rightarrow \frac{3^{4x} + 3^{2x} \cdot 3}{3} = 6 \Rightarrow 3^{4x} + 3 \cdot 3^{2x} - 18 = 0$

Fazendo $3^{2x} = y$, temos:

$y^2 + 3y - 18 = 0 \Rightarrow y_1 = 3$ e $y_2 = -4$

Então:

$3^{2x} = 3 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Logo:

$x^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\left(\frac{1}{2}\right)^1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Resposta: alternativa **a**.

4. (UEPB) A solução da equação $\sqrt[x+4]{2^{3x-8}} = 2^{\frac{3x-8}{3}}$ no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é:

a) $x = -2$. c) $x = 0$. e) $x = -1$.

b) $x = 1$. d) $x = 2$.

$\sqrt[x+4]{2^{3x-8}} = 2^{\frac{3x-8}{3}} \Rightarrow 2^{\frac{3x-8}{x+4}} = 2^{\frac{3x-8}{3}} \Rightarrow \frac{3x-8}{x+4} = \frac{3x-8}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 = x + 4 \Rightarrow x = -1$

Resposta: alternativa **e**.

5. (Udesc) O conjunto solução da inequação $\left(\sqrt[3]{2^{(x-2)}}\right)^{x+3} > 4^x$ é:

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 6\}$.
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } x > 1\}$.
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 6\}$.
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 1\}$.
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\sqrt{6} \text{ ou } x > \sqrt{6}\}$.

$\left(\sqrt[3]{2^{(x-2)}}\right)^{x+3} > 4^x \Rightarrow \left(2^{\frac{(x-2)}{3}}\right)^{x+3} > 2^{2x} \Rightarrow 2^{\frac{x^2+x-6}{3}} > 2^{2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x^2+x-6}{3} > 2x \Rightarrow x^2+x-6 > 6x \Rightarrow x^2-5x-6 > 0$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 6\}$.

Resposta: alternativa **c**.

6. (Fatec-SP) Se x é um número real tal que $2^{-x} \cdot 4^x < 8^{x+1}$, então:

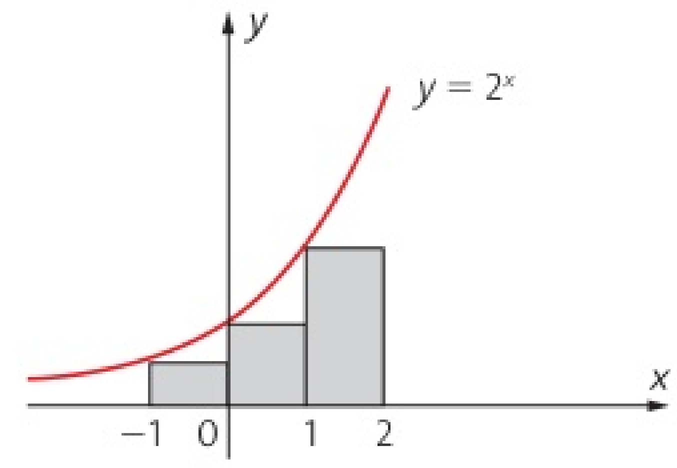
a) $-2 < x < 2$.
b) $x = 1$.
c) $x = 0$.
d) $x < \dfrac{3}{2}$.
e) $x > -\dfrac{3}{2}$.

$2^{-x} \cdot 4^x < 8^{x+1} \Rightarrow 2^{-x} \cdot 2^{2x} < 2^{3x+3} \Rightarrow 2^x < 2^{3x+3} \Rightarrow x < 3x+3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x > -3 \Rightarrow x > -\dfrac{3}{2}$

Resposta: alternativa **e**.

7. (ESPM-SP) A figura abaixo mostra o gráfico da função $f(x) = 2^x$.



A área da região sombreada, formada por retângulos, é igual a:

a) 3,0. b) 3,5. c) 4,0. d) 4,5. e) 5,0.

$A = 1 \cdot \dfrac{1}{2} + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = \dfrac{1}{2} + 1 + 2 = 3{,}5$

Resposta: alternativa **b**.

8. (Uerj) Um imóvel perde 36% do valor de venda a cada dois anos. O valor $V(t)$ desse imóvel em t anos pode ser obtido por meio da fórmula a seguir, na qual V_0 corresponde ao seu valor atual.

$V(t) = V_0 \cdot (0{,}64)^{\frac{t}{2}}$

Admitindo que o valor de venda atual do imóvel seja igual a 50 mil reais, calcule seu valor de venda daqui a três anos.

$V(3) = 50\,000 \cdot (0{,}64)^{\frac{t}{2}} \Rightarrow V(3) = 25\,600$

Resposta: 25 600 reais.

9. (Fuvest-SP) Uma substância radioativa sofre desintegração ao longo do tempo, de acordo com a relação $m(t) = ca^{-kt}$, em que a é um número real positivo, t é dado em anos, $m(t)$ é a massa da substância em gramas e c, k são constantes positivas. Sabe-se que m_0 gramas dessa substância foram reduzidos a 20% em 10 anos. A que porcentagem de m_0 ficará reduzida a massa da substância, em 20 anos?

a) 10% b) 5% c) 4% d) 3% e) 2%

$m(t) = m_0 \cdot a^{-kt} \Rightarrow 0{,}2m_0 = m_0 \cdot a^{-k \cdot 10} \Rightarrow a^{-k \cdot 10} = 0{,}2$

$m(20) = m_0 \cdot a^{-k \cdot 20} \Rightarrow m(20) = m_0 \cdot (a^{-k \cdot 10})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m(20) = m_0 \cdot 0{,}2^2 \Rightarrow m(20) = 0{,}04m_0$

A massa da substância será reduzida em 4%.

Resposta: alternativa **c**.

10. (Unifor-CE) Certa substância radioativa de massa M_0 (no instante $t = 0$) se desintegra (perde massa) ao longo do tempo. Em cada instante $t \geqslant 0$ em segundos, a massa $M(t)$ da substância restante é dada por $M(t) = M_0 \cdot 3^{-2t}$. O tempo transcorrido, em segundos, para que a massa desintegrada da substância seja dois terços da massa inicial M_0 é:

a) 0,5. b) 1. c) 1,5. d) 2. e) 4.

Se desintegra $\frac{2}{3}M_0$, restará $\frac{1}{3}M_0$. Então:

$M(t) = M_0 \cdot 3^{-2t} \Rightarrow \frac{1}{3}M_0 = M_0 \cdot 3^{-2t} \Rightarrow 1 = 3^{-2t+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2t + 1 = 0 \Rightarrow 2t = 1 \Rightarrow t = 0{,}5$ s

Resposta: alternativa **a**.

11. (Vunesp-SP) Ambientalistas, após estudos sobre o impacto que possa vir a ser causado à população de certa espécie de pássaros pela construção de um grande conjunto de edifícios residenciais próximo ao sopé da Serra do Japi, em Jundiaí, SP, concluíram que a quantidade de tais pássaros, naquela região, em função do tempo, pode ser expressa, aproximadamente, pela função $P(t) = \dfrac{P_0}{4 - 3 \cdot (2^{-t})}$, onde t representa o tempo, em anos, e P_0 a população de pássaros na data de início da construção do conjunto. Baseado nessas informações, pode-se afirmar que:

a) após 1 ano do início da construção do conjunto, $P(t)$ estará reduzida a 30% de P_0.

b) após 1 ano do início da construção do conjunto, $P(t)$ será reduzida de 30% de P_0.

c) após 2 anos do início da construção do conjunto, $P(t)$ estará reduzida a 40% de P_0.

d) após 2 anos do início da construção do conjunto, $P(t)$ será reduzida de 40% de P_0.

e) $P(t)$ não será inferior a 25% de P_0.

$P(1) = 0{,}4P_0 \rightarrow$ alternativas **a** e **b** estão incorretas.

$P(2) = 0{,}31P_0 \rightarrow$ alternativas **c** e **d** estão incorretas.

De fato, para valores de t muito grandes, 2^{-t} é muito pequeno, mas sempre positivo.

Assim, $4 - 3 \cdot 2^{-t} < 4$ e $P(t) < 0{,}25P_0$.

Resposta: alternativa **e**.

12. (UFV-MG) Para resolver a equação exponencial $4^{2x-2} - 24 \cdot 4^{x-2} + 8 = 0$, Aline tomou o cuidado de inicialmente multiplicar ambos os membros da equação por 16. Tendo resolvido corretamente, Aline encontrou dois números reais cujo produto vale:

a) 5. b) 4. c) 3. d) 2.

$16 \cdot 4^{2x-2} - 16 \cdot 24 \cdot 4^{x-2} + 16 \cdot 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4^2 \cdot 4^{2x-2} - 4^2 \cdot 24 \cdot 4^{x-2} + 128 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4^{2x} - 4^x \cdot 24 + 128 = 0$

Fazendo $4^x = y$ temos $y_1 = 16$; $y_2 = 8$.

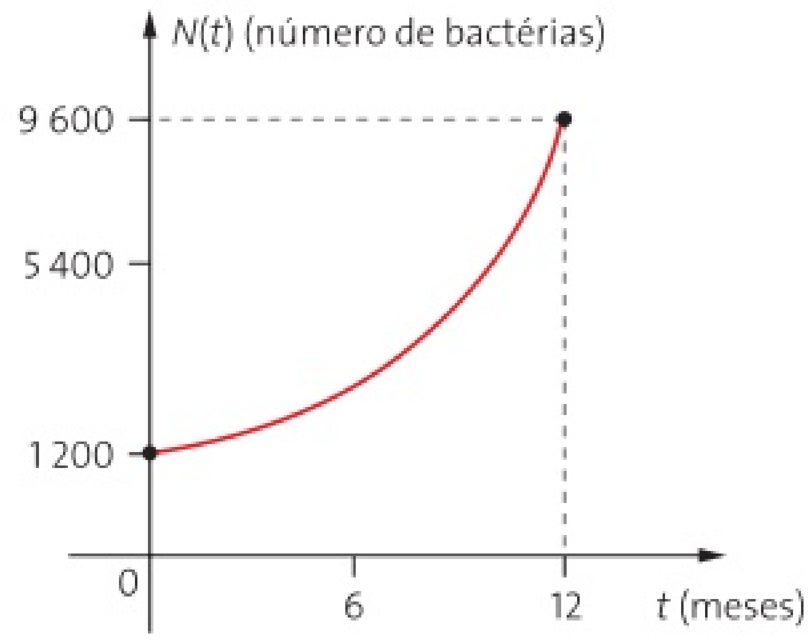
Então:

- $4^x = 16 \Rightarrow 4^x = 4^2 \Rightarrow x_1 = 2$
- $4^x = 8 \Rightarrow 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}$

Produto $= 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$

Resposta: alternativa **c**.

13. (ESCS-DF) Com base em uma pesquisa, obteve-se o gráfico abaixo, que indica o crescimento de uma cultura de bactérias ao longo de 12 meses pela lei de formação representada pela função $N(t) = k \cdot p^t$, onde k e p são constantes reais.



Nas condições dadas, o número de bactérias, após 4 meses, é:

a) 1 800. b) 2 400. c) 3 000. d) 3 200. e) 3 600.

• $1\,200 = k \cdot p^0 \Rightarrow k = 1\,200$

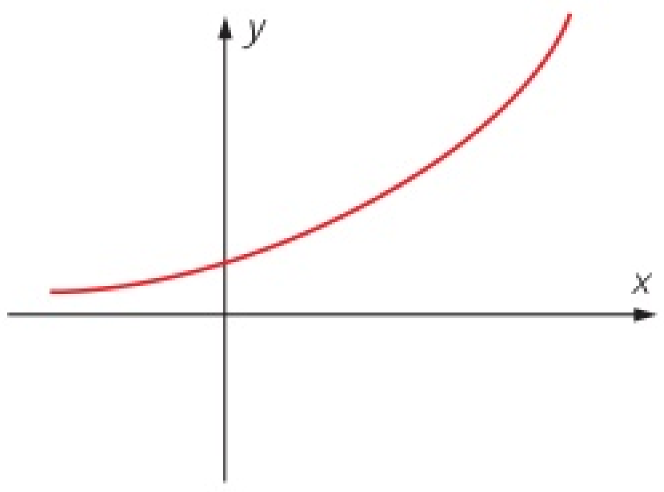
• $9\,600 = 1\,200 \cdot p^{12} \Rightarrow p^{12} = 8 \Rightarrow (p^4)^3 = 8 \Rightarrow p^4 = \sqrt[3]{8} \Rightarrow p^4 = 2$

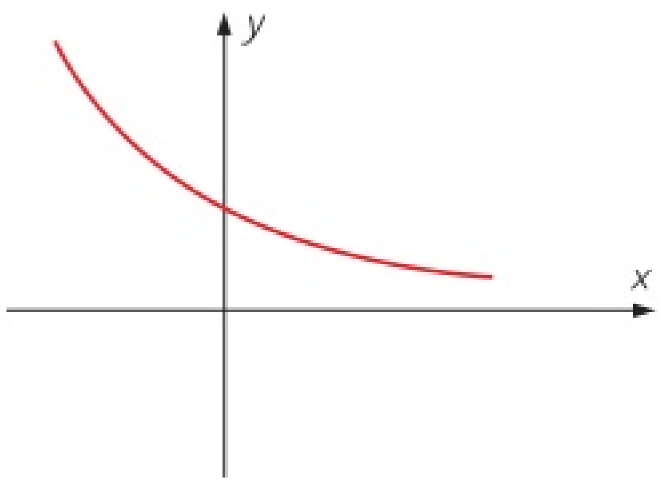
Logo:

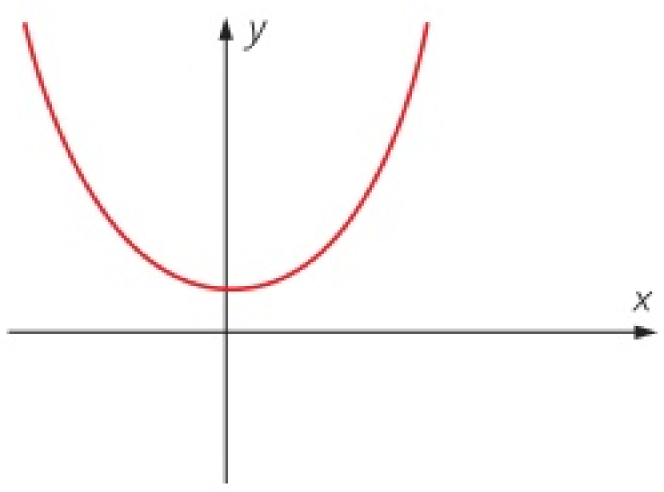
$N(4) = 1\,200 \cdot p^4 \Rightarrow N(4) = 1\,200 \cdot 2 \Rightarrow N(4) = 2\,400$

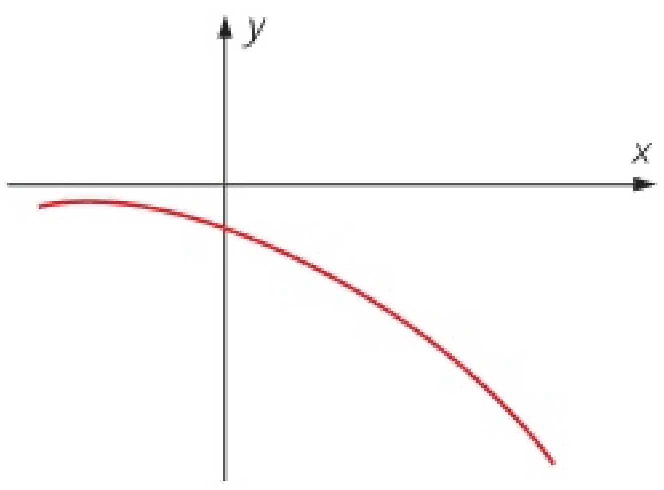
Resposta: alternativa **b**.

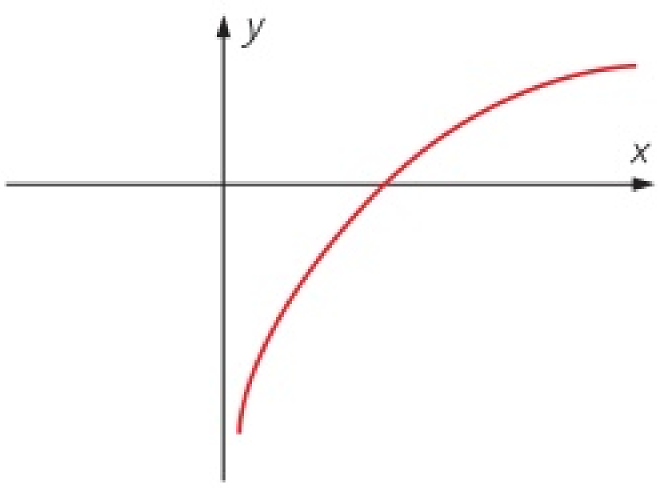
14. (PUC-RS) A função exponencial é usada para representar as frequências das notas musicais.
Dentre os gráficos a seguir, o que melhor representa a função $f(x) = e^x + 2$ é:

a) 

c) 

e) 

b) 

d) 

O gráfico da alternativa **a** é o único característico de uma função exponencial crescente.
Resposta: alternativa **a**.

15. (UCS-RS) Ao estudar o processo de reprodução em uma cultura de bactérias, um grupo de biólogos, a partir de dados experimentais coletados em um determinado período de tempo, concluiu que o número aproximado de indivíduos, N, em função do tempo t em horas, é dado por $N(t) = 50 \cdot 2^{0,3t}$. Dessa forma, a cultura terá 3 200 indivíduos depois de:

a) 12 horas.
b) 20 horas.
c) 15 horas.
d) 23 horas.
e) 18 horas.

$3\,200 = 50 \cdot 2^{0,3t} \Rightarrow 64 = 2^{0,3t} \Rightarrow 2^6 = 2^{0,3t} \Rightarrow 6 = 0,3t \Rightarrow$
$\Rightarrow t = 20$ horas

Resposta: alternativa **b**.

16. (UFPB) A vigilância sanitária, em certo dia, constatou que, em uma cidade, 167 pessoas estavam infectadas por uma doença contagiosa. Estudos mostram que, pelas condições sanitárias e ambientais dessa cidade, a quantidade (Q) de pessoas infectadas por essa doença pode ser estimada pela função $Q(t) = \dfrac{167\,000}{1 + 999 \cdot 3^{\frac{-t}{360}}}$, onde t é o tempo, em dias, contado a partir da data da constatação da doença na cidade. Nesse contexto, é correto afirmar que, 360 dias depois de constatada a doença, o número estimado de pessoas, nessa cidade, infectadas pela doença é de:

a) 520. b) 500. c) 480. d) 460. e) 440.

$$Q(360) = \frac{167\,000}{1 + 999 \cdot 3^{\frac{-360}{360}}} \Rightarrow Q(360) = \frac{167\,000}{1 + 333} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(360) = \frac{167\,000}{334} \Rightarrow Q(360) = 500 \text{ pessoas}$$

Resposta: alternativa **b**.

17. (Cefet-MG) O valor de certo equipamento, comprado por R$ 60 000,00, é reduzido à metade a cada 15 meses. Assim, a equação $V(t) = 60\,000 \cdot 2^{-\frac{t}{15}}$, onde t é o tempo de uso em meses e $V(t)$ é o valor em reais, representa a variação do valor desse equipamento. Com base nessas informações, é correto afirmar que o valor do equipamento após 45 meses de uso será igual a:

a) R$ 3 750,00.
b) R$ 7 500,00.
c) R$ 10 000,00.
d) R$ 20 000,00.

$$V(t) = 60\,000 \cdot 2^{-\frac{t}{15}} \Rightarrow V(45) = 60\,000 \cdot 2^{-\frac{45}{15}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(45) = 60\,000 \cdot 2^{-3} \Rightarrow V(45) = \frac{60\,000}{8} = 7\,500$$

Resposta: alternativa **b**.

18. (Cefet-MG) O valor de um determinado tipo de automóvel desvaloriza x% em relação ao ano anterior, conforme o gráfico seguinte.

O preço inicial do veículo de R$ 30 000,00, após 4 anos, será, aproximadamente:

a) R$ 18 000,00.
b) R$ 18 600,00.
c) R$ 19 200,00.
d) R$ 19 700,00.

$p(t) = p_0 \cdot (0,9)^t \Rightarrow p(4) = 30\,000 \cdot (0,9)^4 \Rightarrow p(4) \simeq 19\,700$

Resposta: alternativa **d**.

19. (UFTM-MG) A espécie de bactéria que causa determinada doença, ao infectar um ser humano, é capaz de duplicar sua população a cada 16 horas. A partir do instante em que o indivíduo toma a primeira dose do antibiótico, porém, a população dessa bactéria passa a se reduzir à metade a cada 24 horas. No dia 1, às 15h 00min, uma pessoa fez um exame que revelou a presença de uma população P_0 dessa bactéria em seu organismo. Num determinado instante, essa pessoa tomou a primeira dose do antibiótico, de forma que, ao repetir o exame no dia 7, às 15h 00min, a população da referida bactéria havia se reduzido para $\frac{P_0}{2}$. A partir desses dados, pode-se concluir que a primeira dose do antibiótico foi administrada a essa pessoa:

a) no dia 3, às 7h 00min.
b) no dia 3, às 15h 00min.
c) no dia 3, às 23h 00min.
d) no dia 4, às 7h 00min.
e) no dia 4, às 15h 00min.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Duplica a cada 16h: } f(t_1) = 2^{\frac{t_1}{16}} \\ \text{Reduz à metade a cada 2h: } f(t_2) = 2^{-\frac{t_2}{24}}\end{array}\right\} \cancel{P_0} \cdot 2^{\frac{t_1}{16}} \cdot 2^{-\frac{t_2}{24}} = 2^{-1}\cancel{P_0} \Rightarrow 2^{\frac{t_1}{16} - \frac{t_2}{24}} = 2^{-1}$$

Como $t_1 + t_2 = 144$ h (6 dias), vem:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 144 \\ \frac{t_1}{16} - \frac{t_2}{24} = -1 \end{cases} \Rightarrow t_1 = 48 \text{ h (2 dias depois)}$$

Resposta: alternativa **b**.

20. (UFABC-SP) Em São Paulo, a lentidão no trânsito é medida em quilômetros. Em uma determinada via de alto fluxo estão sendo realizadas inúmeras obras visando à diminuição dos congestionamentos. Um engenheiro do departamento de trânsito prevê que o número de quilômetros de lentidão no trânsito dessa via irá diminuir segundo a lei $n(t) = n(0) \cdot 4^{-\frac{t}{3}}$, em que $n(0)$ é o número de quilômetros de lentidão no início das obras e $n(t)$ é o número de quilômetros de lentidão existentes t anos depois. O tempo necessário para que o número de quilômetros de lentidão seja reduzido à metade daquele existente no início das obras será igual a:

a) 16 meses.
b) 17 meses.
c) 18 meses.
d) 20 meses.
e) 24 meses.

$$\frac{\cancel{n_0}}{2} = \cancel{n_0} \cdot 4^{-\frac{t}{3}} \Rightarrow 2^{-1} = 2^{-\frac{2t}{3}} \Rightarrow -1 = -\frac{2t}{3} \Rightarrow -3 = -2t \Rightarrow$$

$\Rightarrow t = 1{,}5$ ano $= 18$ meses

Resposta: alternativa **c**.

21. (UFPR) Um importante estudo a respeito de como se processa o esquecimento foi desenvolvido pelo alemão Hermann Ebbinghaus no final do século XIX. Utilizando métodos experimentais, Ebbinghaus determinou que, dentro de certas condições, o percentual P do conhecimento adquirido que uma pessoa retém após t semanas pode ser aproximado pela fórmula $P = (100 - a) \cdot bt + a$, sendo que a e b variam de uma pessoa para outra. Se essa fórmula é válida para um certo estudante, com $a = 20$ e $b = 0{,}5$, o tempo necessário para que o percentual se reduza a 28% será:

a) entre uma e duas semanas.
b) entre duas e três semanas.
c) entre três e quatro semanas.
d) entre quatro e cinco semanas.
e) entre cinco e seis semanas.

$$28 = (100 - 20) \cdot 0{,}5t + 20 \Rightarrow 28 = 80 \cdot 0{,}5t + 20 \Rightarrow$$

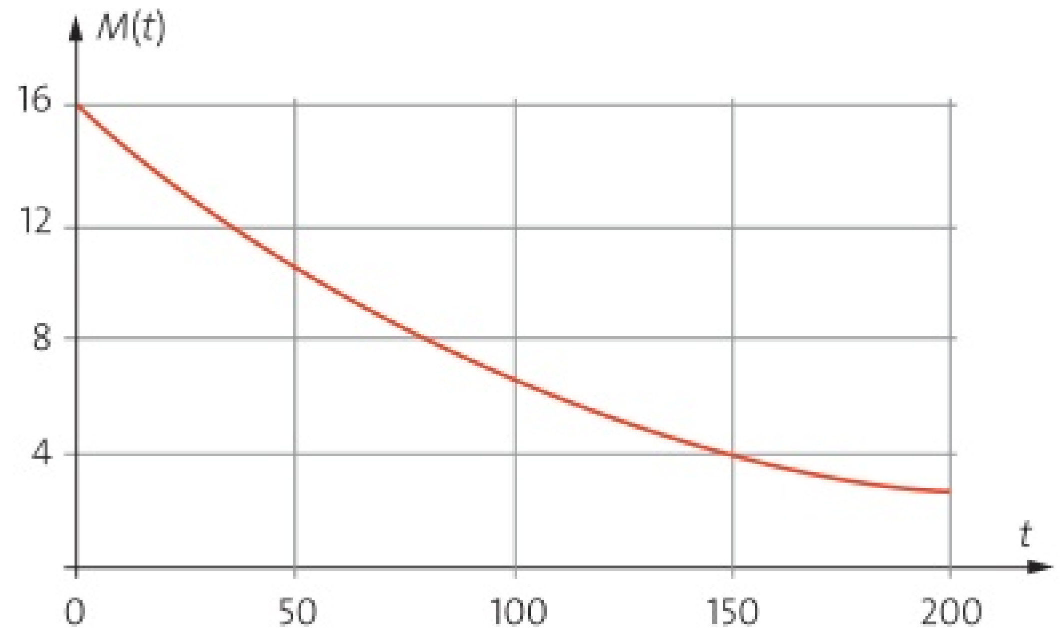
$$\Rightarrow \frac{8}{80} = 0{,}5t \Rightarrow 0{,}1 = 0{,}5t \Rightarrow \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Mas:

$$\frac{1}{16} < \frac{1}{10} < \frac{1}{8} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 < \left(\frac{1}{2}\right)^t < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow 3 < t < 4$$

Resposta: alternativa **c**.

22. (Unicamp-SP) Em uma xícara que já contém certa quantidade de açúcar, despeja-se café. A curva abaixo representa a função exponencial $M(t)$, que fornece a quantidade de açúcar não dissolvido (em gramas), t minutos após o café ser despejado.



Pelo gráfico, podemos concluir que:

a) $M(t) = 2^{\left(4 - \frac{t}{75}\right)}$.
b) $M(t) = 2^{\left(4 - \frac{t}{50}\right)}$.
c) $M(t) = 2^{\left(5 - \frac{t}{50}\right)}$.
d) $M(t) = 2^{\left(5 - \frac{t}{150}\right)}$.

- Para o ponto (0, 16), temos:

$M(0) = 2^{\left(4 - \frac{0}{75}\right)} = 2^4 = 16$

- Para o ponto (150, 4), temos:

$M(150) = 2^{\left(4 - \frac{150}{75}\right)} = 2^2 = 4$

Resposta: alternativa **a**.

23. (Acafe-SC) A Curva de Aprendizagem é um conceito criado por psicólogos que constataram a relação existente entre a eficiência de um indivíduo e a quantidade de treinamento ou experiência possuída por este indivíduo. Um exemplo de Curva de Aprendizagem é dado pela expressão $Q = 1\,512 - 2^{-0,5t + 16}$ em que:
Q = quantidade de peças produzidas mensalmente por um funcionário;
t = meses de experiência.
Em quantos meses um funcionário produzirá 1 000 peças mensalmente?

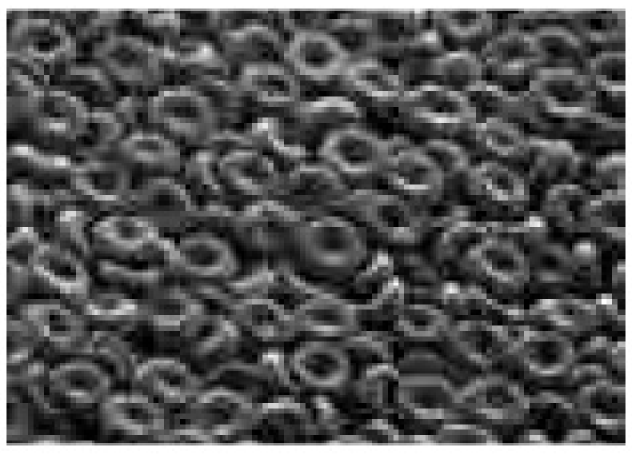
a) 14 meses
b) 12 meses
c) 16 meses
d) 13 meses

$1\,000 = 1\,512 - 2^{-0,5t + 16} \Rightarrow 2^{-0,5t + 16} = 512 \Rightarrow 2^{-0,5t + 16} = 2^9 \Rightarrow$

$\Rightarrow -0,5t + 16 = 9 \Rightarrow 0,5t = 7 \Rightarrow t = \dfrac{7}{0,5} = 14$ meses

Resposta: alternativa **a**.

24. (UEFS-BA) Sabe-se que uma gota de sangue de 1 mm^3 contém, aproximadamente, 5 milhões de glóbulos vermelhos e que uma pessoa de 70 kg tem, aproximadamente, 4,5 litros de sangue. O número de glóbulos vermelhos que essa pessoa tem em seu sangue é expresso por $\alpha \cdot 10^k$, sendo α um número pertencente ao intervalo $[1, 10[$ e k um número inteiro.



UEFS/2011

Disponível em: <http://cadernodeciencias.files.wordpress.com/2010/02/hemacias.jpg>. Acesso em: 18 dez. 2010.

Nessas condições, $\alpha + k$ é igual a:

a) 15,25.
b) 14,25.
c) 13,25.
d) 12,25.
e) 11,25.

Como 1 L = 10^6 mm^3, temos:
$n = 5 \cdot 10^6 \cdot 4,5 \cdot 10^6 \Rightarrow n = 22,5 \cdot 10^{12} = 2,25 \cdot 10^{13}$
Logo, $\alpha = 2,25$ e $k = 13$.
Portanto, $\alpha + k = 15,25$.
Resposta: alternativa **a**.

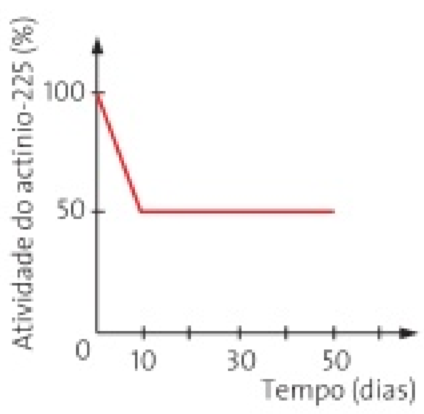
25. (Fatec-SP) Entre as ideias mais excitantes em nanotecnologia está o desenvolvimento de sistemas moleculares inteligentes, capazes de reconhecer proteínas específicas em vírus, como o da Aids, e interferir na sua capacidade de reprodução. Investimentos nesse sentido já estão sendo feitos pela empresa C-Sixty (C60 = fulereno), em Houston, com previsões bastante otimistas que, se concretizadas, conferirão um papel importante à nanotecnologia molecular no combate à Aids.

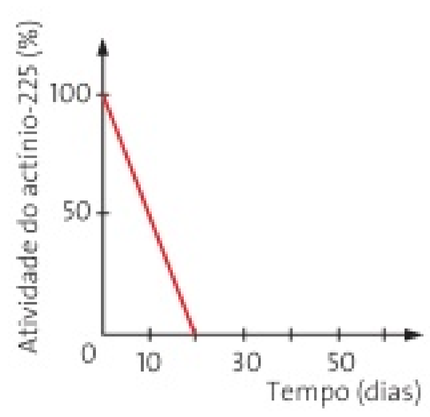
Por meio do encapsulamento de materiais radioativos contendo actínio-225 e proteínas de reconhecimento, têm sido construídas verdadeiras nanobombas capazes de se ligar a células cancerosas e realizar sua destruição. Pesquisas realizadas no Texas mostraram que as cobaias tratadas com as nanocápsulas sobreviveram cerca de 300 dias em comparação com os 43 dias do grupo não tratado.

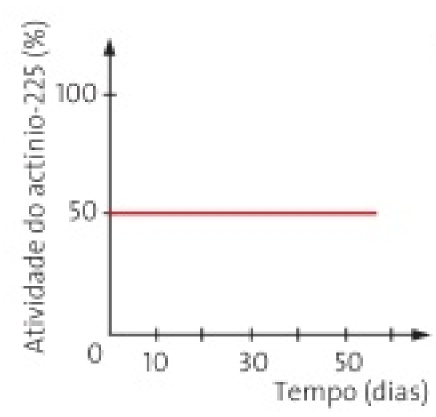
TOMA, H. E. *O mundo nanométrico*: a dimensão do novo século. São Paulo: Oficina de Textos, 2004. p. 39. Adaptado.

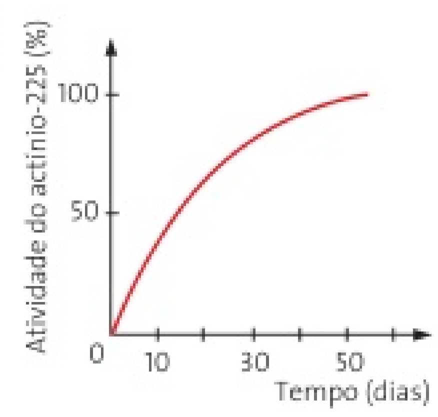
O actínio-225 é obtido artificialmente e tem tempo de meia-vida igual a 10 dias. Isso significa que, a cada 10 dias, a quantidade dessa espécie radioativa em uma amostra cai à metade. Sendo assim, nanobombas contendo uma quantidade x de actínio-225, após 10 dias, passam a conter uma quantidade $\frac{x}{2}$, após mais 10 dias, passa a conter $\frac{x}{4}$ e assim por diante.

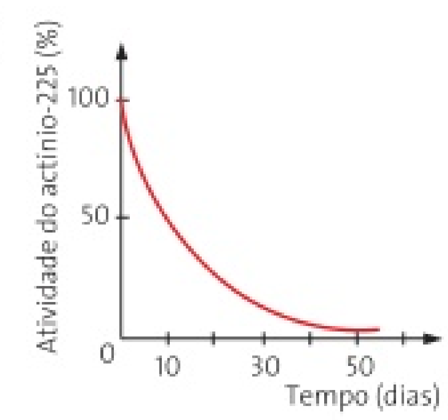
Entre os gráficos representados abaixo, o que mostra a variação da atividade radioativa do actínio-225 em função do tempo, está na alternativa:

a)


b)


c)


d)


e)


O comportamento descrito no texto é típico de uma função exponencial. O único gráfico que representa uma função como essa está na alternativa **e**.

Resposta: alternativa **e**.

26. (PUC-PR) O prazo de validade, V, medido em uma escala de 0% (vencido) a 100% (fresco), de um produto em conserva, segue a seguinte função de tempo, t, em meses: $V = e^{-t}$, $t \geqslant 0$.

Onde: $e = 2{,}7183$

É correto afirmar:

I. Um mês após a produção, $t = 1$, a validade corresponde a 36,79%.

II. Seis meses após a produção, $t = 6$, a validade corresponde a 0,25%.

III. Quanto mais próximo do dia da produção maior o frescor.

a) Somente a alternativa III está correta.

b) As alternativas I e III estão corretas.

c) As três alternativas, I, II e III, estão corretas.

d) As alternativas II e III estão corretas.

e) Nenhuma das alternativas está correta.

I. $V = e^{-1} = 0{,}3679 = 36{,}79\%$

II. $V = e^{-6} = \frac{1}{e^6} = \frac{1}{(2{,}71)^6} = 0{,}0025 = 0{,}25\%$

III. Sim, pois essa é uma função decrescente, já que sua base encontra-se entre 0 e 1.

Resposta: alternativa **c**.

27. (FMJ-SP) A evolução prevista para o número de pessoas infectadas com o vírus A (H1N1), em uma determinada região, é dada por $p = 6\,400 \cdot (1{,}1)^{\frac{t}{12}}$ onde t é o número de dias decorridos após 31/08/2009. O número previsto de pessoas infectadas com esse vírus, nessa região, decorridos 24 dias após 31/08/2009, é:

a) 7 615.

b) 7 744.

c) 7 884.

d) 8 130.

e) 8 518.

$p = 6\,400 \cdot (1{,}1)^{\frac{t}{12}} \Rightarrow p = 6\,400 \cdot (1{,}1)^{\frac{24}{12}} \Rightarrow p = 6\,400 \cdot 1{,}1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 6\,400 \cdot 1{,}21 \Rightarrow p = 7\,744$ pessoas

Resposta: alternativa **b**.

28. (Acafe-SC) A população de pássaros de uma localidade está diminuindo devido à construção de um empreendimento imobiliário naquela região. A lei $P(t) = 3\,125 - 125 \cdot 5^{t-1}$ fornece uma estimativa para o número de pássaros $P(t)$ que permaneceram no local depois de t semanas do início das obras. Sobre essa situação, analise as afirmações a seguir.

I. $P(t)$ representa uma função exponencial crescente, pois a base é positiva (igual a 5) e diferente de 1.

II. Se a obra continuar, em menos de um mês toda a população de pássaros terá se evadido da localidade.

III. Na primeira semana após o início da obra 3 000 pássaros deixaram o local.

IV. Estima-se que antes do início das obras viviam na região 3 100 pássaros.

Todas as afirmações corretas estão em:

a) I — II — III.
b) II — IV.
c) II — III — IV.
d) III — IV.

I. A função $P(t) = 3\,125 - 125 \cdot 5^{t-1}$ é "do tipo" exponencial e a base (5) está multiplicada por um valor negativo (−125), o que torna a função decrescente. (incorreta)

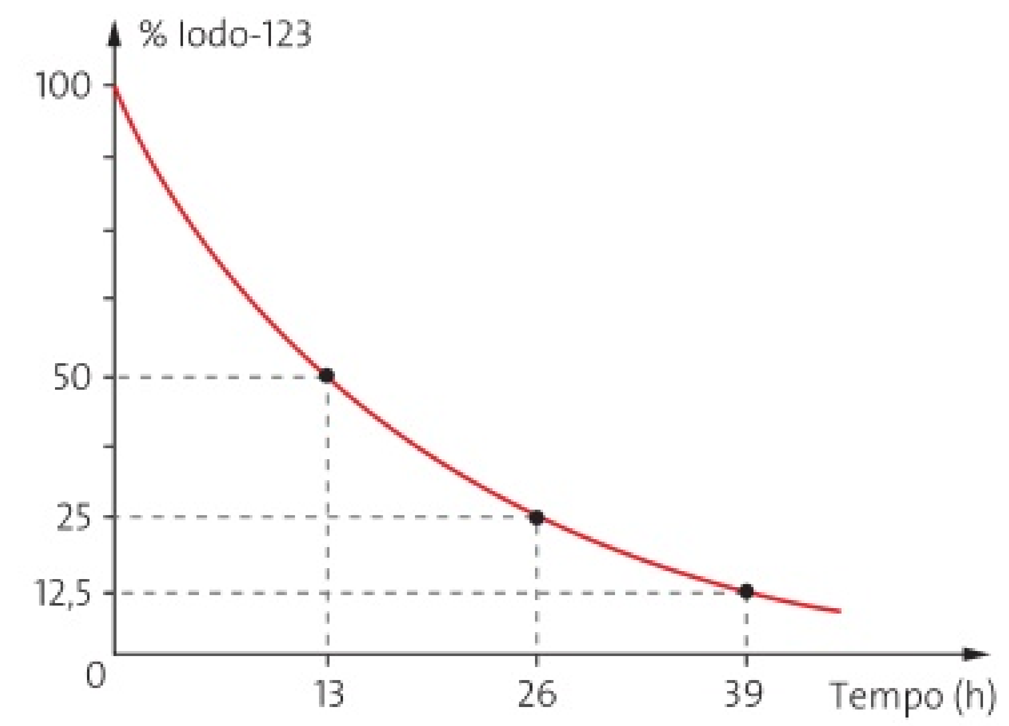
II. $0 = 3\,125 - 125 \cdot 5^{t-1} \Rightarrow 125 \cdot 5^{t-1} = 3\,125 \Rightarrow 5^{t-1} = 25 = 5^2 \Rightarrow t = 3$ semanas (correta)

III. $P(1) = 3\,125 - 125 \cdot 5^0 = 3\,000$ (incorreta)

IV. $P(0) = 3\,125 - 125 \cdot 5^{-1} = 3\,100$ (correta)

Resposta: alternativa **b**.

29. (UFRN) A cintilografia, técnica utilizada para o diagnóstico de doenças, consiste em se introduzir uma substância radioativa no organismo, para se obter a imagem de determinado órgão. A duração do efeito no organismo está relacionada com a meia-vida dessa substância, tempo necessário para que sua quantidade original se reduza à metade. Essa redução ocorre exponencialmente. O Iodo-123, utilizado no diagnóstico de problemas da tireoide, tem meia-vida de 13 horas. Isso significa que, a cada intervalo de 13 horas, a quantidade de Iodo-123 no organismo equivale a 50% da quantidade existente no início desse intervalo, conforme o gráfico ao lado.



Assim, se uma dose de Iodo-123 for ministrada a um paciente às 8h de determinado dia, o percentual da quantidade original que ainda permanecerá em seu organismo, às 16h 30min do dia seguinte, será:

a) maior que 12,5% e menor que 25%.
b) menor que 12,5%.
c) maior que 25% e menor que 50%.
d) maior que 50%.

A partir das 8 horas, $P(t) = P_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{13}}$. Então:

• para 26 h:

$P(26) = P_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow P(26) = 0{,}25 \cdot P_0 \Rightarrow P(26) = 25\%P_0$

• para 39 h:

$P(39) = P_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow P(39) = 0{,}125 \cdot P_0 \Rightarrow P(39) = 12{,}5\%P_0$

O intervalo de tempo pedido é de 32,5 horas, que está entre 26 e 39; portanto, P estará entre 12,5% e 25%.
Resposta: alternativa **a**.

LOGARITMOS

Definição

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

a: base do logaritmo

$a < 0$ e $a \neq 1$

b: logaritmando

$b > 0$

c: logaritmo

Consequências

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^n = n$
- $a \log_a N = N$

Propriedades

- $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$
- $\log_a \left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$
- $\log_a M^N = N \cdot \log_a M$
- $\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$

  Para $N = a$, temos: $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$ ou $\log_b a \cdot \log_a b = 1$
- $\text{colog}_a N = -\log_a N$ ou $\text{colog}_a N = \log_a \dfrac{1}{N}$

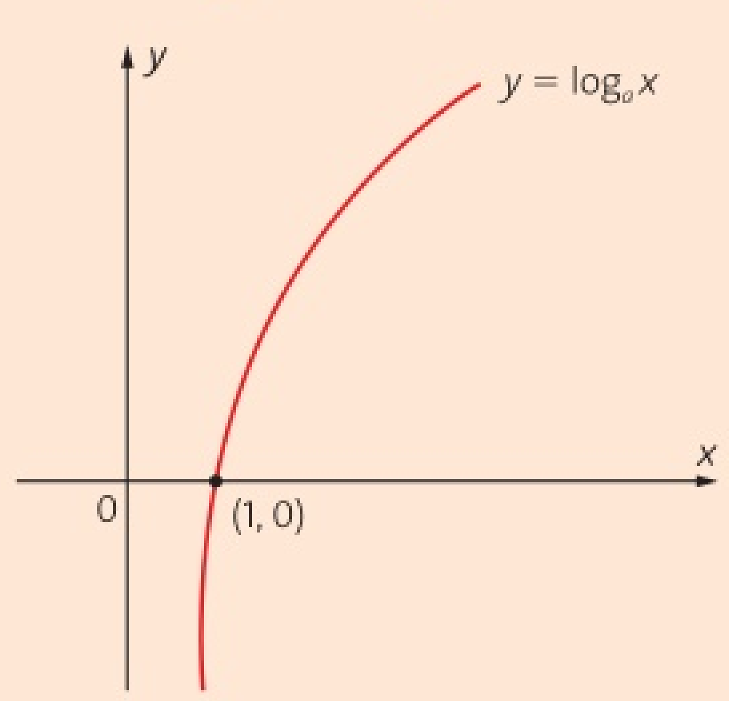
Função logarítmica

Definição

Dado um número real a ($a > 0$ e $a \neq 1$), denomina-se **função logarítmica de base a** uma função f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$ ou $y = \log_a x$.

Observação: A função logarítmica é inversa da função exponencial.

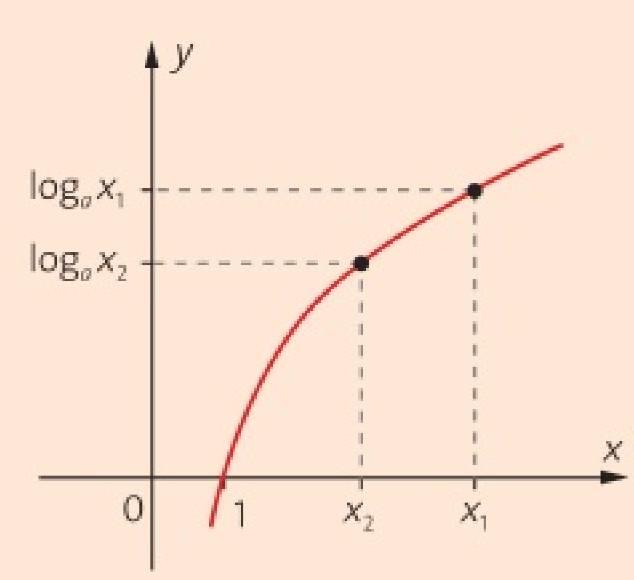
Representação gráfica da função logarítmica



- $D(f) = \mathbb{R}_+^*$
- $CD(f) = Im(f) = \mathbb{R}$

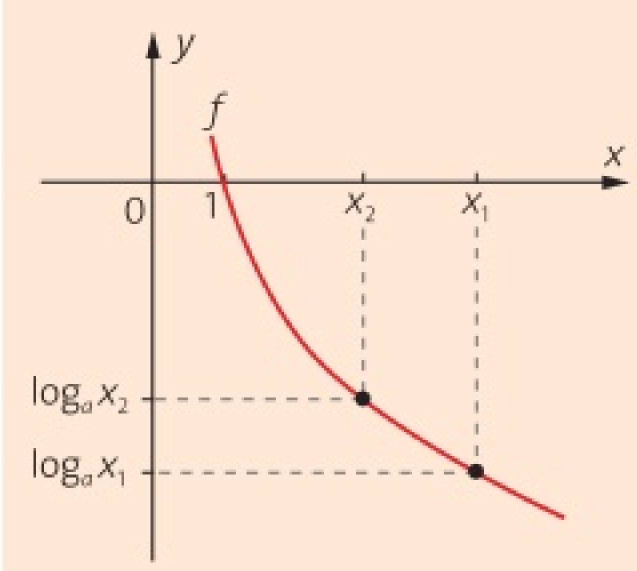
Crescente

- $a > 1$
- $x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$



Decrescente

- $0 < a < 1$
- $x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$



Equações logarítmicas

$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$

Inequações logarítmicas

$$\log_a x > \log_a y \Rightarrow \begin{cases} x > y, \text{ se } a > 1 \\ x < y, \text{ se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Exercícios

1. (UFPR) Sendo $\log 2 = 0,301$ e $\log 7 = 0,845$, qual será o valor de $\log 28$?

a) 1,146
b) 1,447
c) 1,690
d) 2,107
e) 1,107

$\log 28 = \log 4 \cdot 7 = \log 2^2 \cdot 7 = \log 2^2 + \log 7 = 2 \cdot \log 2 + \log 7 =$
$= 2 \cdot 0,301 + 0,845 = 1,447$

Resposta: alternativa **b**.

2. (Fuvest-SP) É correto afirmar que a equação $\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 2) = 2$:

a) não possui solução alguma.
b) possui exatamente 2 soluções cuja soma é 0.
c) possui exatamente 2 soluções cuja soma é -1.
d) possui exatamente 2 soluções cuja soma é 1.
e) possui exatamente 1 solução.

Condições de existência:

1ª) $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

2ª) $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

$\log_2 [(x + 1)(x - 2)] = 2 \Rightarrow \log_2 (x^2 - 2x + x - 2) = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2 (x^2 - x - 2) = 2 \Rightarrow 2^2 = x^2 - x - 2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) \Rightarrow \Delta = 25$

$x = -3$ ou $x = 2$ (não convém, de acordo com a condição de existência)

Portanto, $S = \{3\}$.

Resposta: alternativa **e**.

3. (UPM-SP) Se $\log 16 = a$, então $\log \sqrt[3]{40}$ vale:

a) $\dfrac{a+6}{12}$.
b) $\dfrac{a+2}{6}$.
c) $\dfrac{a+6}{3}$.
d) $\dfrac{a+12}{2}$.
e) $\dfrac{a+2}{3}$.

$\log 16 = a \Rightarrow \log 2^4 = a \Rightarrow 4 \cdot \log 2 = a \Rightarrow \log 2 = \dfrac{a}{4}$

$\log \sqrt[3]{40} = \log 40^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3} \cdot \log 40 = \dfrac{1}{3} \cdot \log 4 \cdot 10 =$

$= \dfrac{1}{3}(\log 4 + \log 10) = \dfrac{1}{3}(\log 2^2 + \log 10) =$

$= \dfrac{1}{3}(2 \cdot \log 2 + \log 10) = \dfrac{1}{3}\left(2 \cdot \dfrac{a}{4} + 1\right) =$

$= \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a}{4} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2a}{12} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2a+4}{12} = \dfrac{a+2}{6}$

Resposta: alternativa **b**.

4. (ESPM-SP) Sendo $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, o valor do $\log_9 160$ é igual a:

a) $\dfrac{4a+b}{2}$.
b) $\dfrac{4a+1}{2b}$.
c) $\dfrac{2a+3b}{2}$.
d) $\dfrac{4b+2}{a}$.
e) $\dfrac{a+1}{3b}$.

$\log_9 160 = \dfrac{\log 160}{\log 9} = \dfrac{\log 16 \cdot 10}{\log 3^2} = \dfrac{\log 2^4 + \log 10}{2 \cdot \log 3} = \dfrac{4a+1}{2b}$

Resposta: alternativa **b**.

5. (UEPB) Para que $\log_{x-3}(6-x)$ esteja definido, devemos ter:

a) $3 \leqslant x \leqslant 6$.
b) $3 < x < 6$.
c) $3 \leqslant x < 6$ e $x \neq 4$.
d) $3 < x < 6$ e $x \neq 4$.
e) $3 \leqslant x < 6$.

$6 - x > 0 \Rightarrow x < 6$
$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$
$x - 3 \neq 1 \Rightarrow x \neq 4$
Logo, $3 < x < 6$ e $x \neq 4$.
Resposta: alternativa **d**.

6. (UPE) Sabendo-se que $2^{4x+3} = 3$ e que $\log 2 = m$ e $\log 3 = n$, é correto afirmar que:

a) $x = \dfrac{n-3m}{4n}$.
b) $x = \dfrac{n-3m}{4m}$.
c) $x = \dfrac{n}{m} - \dfrac{m}{n}$.
d) $x = \dfrac{m}{n} - \dfrac{n}{m}$.
e) $x = 4 + \dfrac{n}{m}$.

$2^{4x+3} = 3 \Rightarrow (4x+3) \cdot \log 2 = \log 3 \Rightarrow 4x + 3 = \dfrac{\log 3}{\log 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x = \dfrac{n}{m} - 3 \Rightarrow 4x = \dfrac{n-3m}{m} \Rightarrow x = \dfrac{n-3m}{4m}$

Resposta: alternativa **b**.

7. (Unisc-RS) Sabendo que $10^{1,176} = 15$, o valor de x que satisfaz à equação $15^x = 1\,000$ é:

a) 1,5.
b) 0,76.
c) 2,551.
d) 0,15.
e) 2,176.

$15^x = 1\,000 \Rightarrow 10^{1,176x} = 10^3 \Rightarrow 1,176x = 3 \Rightarrow x = 2,551$
Resposta: alternativa **c**.

8. (Unimontes-MG) Considere as seguintes afirmações:

I. $\log(6+7) = \log 6 + \log 7$
II. $\log(42 \div 7) = \log 42 - \log 7 = \log 6$
III. $\log 49 = 2 \log 7$
IV. $\log 42 = \log 6 + \log 7$

São corretas apenas as afirmações:

a) II e III.
b) I e II.
c) I, II e III.
d) II, III e IV.

I. Falso, pois:
$\log(6 \cdot 7) = \log 6 + \log 7$
II. Verdadeiro, pois:
$\log(7 \cdot 6) - \log 7 = \log 7 + \log 6 - \log 7 = \log 6$
III. Verdadeiro, pois:
$\log 7^2 = 2 \cdot \log 7$
IV. Verdadeiro, pois:
$\log 42 = \log(6 \cdot 7) = \log 6 + \log 7$
Resposta: alternativa **d**.

9. (PUC-RS) Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, então o valor de x em $8^x = 9$ é:

a) $\frac{2b}{3a}$.
b) $\frac{2a}{3b}$.
c) $\frac{b}{a}$.
d) $\frac{a}{b}$.
e) $\frac{3b}{2a}$.

$8^x = 9 \Rightarrow 2^{3x} = 3^2 \Rightarrow 3x \cdot \log 2 = 2 \cdot \log 3 \Rightarrow 3xa = 2b \Rightarrow x = \frac{2b}{3a}$

Resposta: alternativa **a**.

10. (Vunesp-SP) Se $x \in \mathbb{R}$, $16 = e^{4\ln(x)}$ e $\ln(x)$ é o logaritmo natural de x, então:

a) $x = 4$.
b) $x = 2{,}2$.
c) $x = 10$.
d) $x = 2$.
e) $x = 3$.

$e^{4\ln(x)} = 16 \Rightarrow (e^{\ln(x)})^4 = 16 \Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x = \sqrt[4]{16} \Rightarrow x = 2$

Resposta: alternativa **d**.

11. (UFT-TO) Considere a equação $\log_2 x \cdot \log_2 x - 3 \cdot \log_2 x = 0$, $x > 0$ no conjunto dos números reais. A soma dos valores de x que satisfazem esta equação é:

a) 0.
b) 2.
c) 8.
d) 9.
e) $\frac{2}{3}$.

$(\log_2 x)^2 - 3 \cdot \log_2 x = 0$

Sendo $\log_2 x = y$, temos:

$y^2 - 3y = 0 \Rightarrow y(y - 3) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $y = 3$

Então:

$\log_2 x = 0 \Rightarrow 2^0 = x \Rightarrow x = 1$

ou

$\log_2 x = 3 \Rightarrow 2^3 = x \Rightarrow x = 8$

Logo, soma $= 1 + 8 = 9$.

Resposta: alternativa **d**.

12. (PUC-PR) Sabendo que $\log 20 = 1{,}3$ e $\log 5 = 0{,}7$, é correto afirmar que $\log_5 20$ corresponde a:

a) exatamente 2.
b) exatamente 0,6.
c) maior ou igual a 0,5 e menor que 0,6.
d) um valor entre 1,8 e 1,9.
e) nenhuma das alternativas anteriores.

$\log 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 10} \Rightarrow 0{,}7 = \frac{1}{\log_5 10} \Rightarrow \log_5 10 = \frac{1}{0{,}7}$

Mas:

$\log 20 = \frac{\log_5 20}{\log_5 10} \Rightarrow 1{,}3 = \frac{\log_5 20}{\frac{1}{0{,}7}} \Rightarrow \log_5 20 = \frac{1{,}3}{0{,}7} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_5 20 = 1{,}85$

Resposta: alternativa **d**.

13. (IFMG) Considerando a equação $2^x = 5$ e que $\log 2 = 0{,}3$, o valor mais próximo de x é:

a) 2,2. b) 2,3. c) 2,4. d) 2,5.

$2^x = 5 \Rightarrow x \cdot \log 2 = \log 5 \Rightarrow x \cdot \log 2 = \log \frac{10}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot 0{,}3 = \log 10 - \log 2 \Rightarrow x \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}3 \Rightarrow x = \frac{0{,}7}{0{,}3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2{,}3$

Resposta: alternativa **b**.

14. (Unir-RO) Considere as funções f e g dadas por $f(x) = \log(x)$, para todo x real positivo e $g(x) = \frac{x}{x+1}$, para todo x natural diferente de 0. O valor de x que torna verdadeira a igualdade $f(x) = f(g(1)) + f(g(2)) + f(g(3)) + \ldots + f(g(98)) + f(g(99))$ é:

a) 10^{-3}. c) 10^{-2}. e) 10^{-1}.
b) 10^{-4}. d) 10^{-5}.

$f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + \ldots + f\left(\frac{98}{99}\right) + f\left(\frac{99}{100}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log(x) = \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{2}{3}\right) + \log\left(\frac{3}{4}\right) + \ldots + \log\left(\frac{98}{99}\right) +$

$+ \log\left(\frac{99}{100}\right) \Rightarrow \log(x) = \log\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log(x) = \log 10^{-2} \Rightarrow x = 10^{-2}$

Resposta: alternativa **c**.

15. (Fuvest-SP) O número real a é o menor dentre os valores de x que satisfazem a equação $2\log_2(1 + \sqrt{2}x) - \log_2(\sqrt{2}x) = 3$. Então, $\log_2\left(\frac{2a+4}{3}\right)$ é igual a:

a) $\frac{1}{4}$. b) $\frac{1}{2}$. c) 1. d) $\frac{3}{2}$. e) 2.

$\log_2(1 + \sqrt{2}x)^2 - \log_2(\sqrt{2}x) = 3 \Rightarrow \log_2(1 + 2\sqrt{2}x + 2x^2) - \log_2(\sqrt{2}x) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2\left(\frac{1 + 2\sqrt{2}x + 2x^2}{\sqrt{2}x}\right) = 3 \Rightarrow 2^3 = \frac{1 + 2\sqrt{2}x + 2x^2}{\sqrt{2}x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 8\sqrt{2}x = 1 + 2\sqrt{2}x + 2x^2 \Rightarrow 2x^2 - 6\sqrt{2}x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{6\sqrt{2} + 8}{4} \\ x'' = \dfrac{6\sqrt{2} - 8}{4} \rightarrow \text{menor valor} \end{cases}$$

Então:

$$\log_2\left(\frac{2a+4}{3}\right) = \log_2 \frac{2\left(\frac{6\sqrt{2} - 8}{4}\right) + 4}{3} = \log_2 \frac{3\sqrt{2} - 4 + 4}{3} = \log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_2 2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Resposta: alternativa **b**.

16. (UFPB) Sabemos que o pH de uma solução é definido por $pH = \log\left(\frac{1}{[H^+]}\right)$, onde $[H^+]$ é a concentração de hidrogênio de íons-grama por litro de solução. Se uma determinada solução é tal que $[H^+] = 1{,}0 \cdot 10^{-8}$, então seu pH será:

a) 7.
b) 10^{-8}.
c) 1,0.
d) 8.
e) 6.

Pela definição, temos:

$$pH = \log\left(\frac{1}{10^{-8}}\right) = \log_{10} 10^8 = 8 \log_{10} 10 = 8 \cdot 1 = 8$$

Resposta: alternativa **d**.

17. (UEG-GO) A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que varia de $I = 0$ até $I = 8{,}9$ para o maior terremoto conhecido. I é dada pela fórmula: $I = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$, em que E é a energia liberada no terremoto em quilowatts-hora e $E = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh. Aumentando em uma unidade a intensidade do terremoto, a energia liberada fica multiplicada por um número:

a) no intervalo de 30 a 40.
b) maior que 40.
c) no intervalo de 20 a 30.
d) menor que 20.

$$1 = \frac{2\log\frac{E}{E_0}}{3} \Rightarrow \frac{3}{2} = \log\frac{E}{E_0} \Rightarrow 10^{1,5} = \frac{E}{E_0} \Rightarrow E = 31{,}6E_0$$

Resposta: alternativa **a**.

18. (Vunesp-SP) A expectativa de vida em anos em uma região, de uma pessoa que nasceu a partir de 1900 no ano x ($x \geqslant 1\,900$), é dada por $L(x) = 12(199 \log_{10} x - 651)$. Considerando $\log_{10} 2 = 0{,}3$, uma pessoa dessa região que nasceu no ano 2000 tem expectativa de viver:

a) 48,7 anos.
b) 54,6 anos.
c) 64,5 anos.
d) 68,4 anos.
e) 72,3 anos.

$L(x) = 12(199 \log_{10} x - 651)$

Para $x = 2\,000$, temos:

$L(2\,000) = 12(199 \log_{10} 2\,000 - 651) \Rightarrow$

$\Rightarrow L(2\,000) = 12(199 \log_{10} 2 + \log_{10} 1\,000 - 651) \Rightarrow$

$\Rightarrow L(2\,000) = 12(199 \cdot 0{,}3 + 3 - 651) \Rightarrow L(2\,000) = 68{,}4$

Resposta: alternativa **d**.

19. (Uneb-BA) A magnitude aparente de um astro de brilho B é definida a partir de uma referência B_0 por meio da fórmula $M = \log_a\left(\frac{B}{B_0}\right)$, com a seguinte convenção: "a magnitude aumenta em 5 quando o brilho é dividido por 100". Nessas condições, considerando-se $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, pode-se afirmar que a magnitude aparente da Lua, em que $B = 1{,}2 \times 10^5 B_0$, é igual a:

01) –12,9.
02) –12,7.
03) –12,5.
04) –12,3.
05) –12,1.

Para $B = B_0$, temos $M = \log_a 1 = 0$.

Para $B = \frac{B_0}{100}$, temos $M = 5$. Portanto: $5 = \log_a 10^{-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^5 = 10^{-2} \Rightarrow a = 10^{-\frac{2}{5}}$

Para a Lua, temos:

$$M = \log_{10^{-\frac{2}{5}}} 1{,}2 \cdot 10^5 = \frac{\log 12 + \log 10^4}{\log 10^{-\frac{2}{5}}} =$$

$$= \frac{2\log 2 + \log 3 + 4}{-\frac{2}{5}} = \frac{2 \cdot 0{,}3 + 0{,}48 + 4}{-\frac{2}{5}} = \frac{5{,}08}{-\frac{2}{5}} = -\frac{25{,}4}{2} =$$

$= -12{,}7$

Resposta: alternativa **02**.

20. (UEL-PR) O Iodo-131 é um elemento radioativo utilizado em medicina nuclear para exames de tireoide e possui meia-vida de 8 dias. Para descarte de material contaminado com 1 g de Iodo-131, sem prejuízo para o meio ambiente, o laboratório aguarda que o mesmo fique reduzido a 10^{-6} g de material radioativo. Nessas condições, o prazo mínimo para descarte do material é de:

(Dado: $\log_{10} 2 \simeq 0{,}3$.)

a) 20 dias. c) 140 dias. e) 200 dias.

b) 90 dias. d) 160 dias.

Sabendo que a meia-vida é de 8 dias, concluímos que:

$$M(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} \Rightarrow 10^{-6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} \Rightarrow \log 10^{-6} = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6 = -\frac{t}{8} \log 2 \Rightarrow -6 = -\frac{t}{8} \cdot 0{,}3 \Rightarrow t = 160$$

Resposta: alternativa **d**.

21. (PUC-RS) Tales, um aluno do Curso de Matemática, depois de terminar o semestre com êxito, resolveu viajar para a Europa. Tales caminhou muitas vezes sobre a Ponte Carlos, em Praga, para admirar as estátuas que estão espalhadas ao longo da ponte. Para descobrir o número de estátuas existentes sobre a ponte, ele teve que resolver a equação $\log_2 (3x - 30) - \log_2 x = 1$. Concluiu, então, que o número de estátuas é:

a) 31. c) 16. e) 10.

b) 30. d) 15.

$$\log_2 (3x - 30) - \log_2 x = 1 \Rightarrow \log_2 \frac{3x - 30}{x} = \log_2 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3x - 30}{x} = 2 \Rightarrow 3x - 30 = 2x \Rightarrow x = 30$$

Resposta: alternativa **b**.

22. (UCS-RS) Terremotos costumam ser avaliados por sua magnitude e por sua intensidade. A intensidade refere-se aos efeitos das vibrações na superfície terrestre. A magnitude é o valor obtido na escala Richter a partir da amplitude máxima das vibrações do solo a 100 km do epicentro do terremoto.

A expressão $M_1 - M_2 = \log \frac{A_1}{A_2}$, em que log denota o logaritmo decimal, relaciona as magnitudes M_1 e M_2 de dois terremotos com as amplitudes A_1 e A_2 das ondas sísmicas geradas.

Segundo essa expressão, a relação entre as amplitudes A_1 e A_2 das ondas geradas pelos terremotos de magnitudes 9 e 6,3 ocorridos, respectivamente, em 2004 na Indonésia e em abril deste ano na Itália, é dada por:

a) $A_1 = 270A_2$. c) $A_1 = 10^{2,7}A_2$. e) $A_2 = 2{,}7A_1$.

b) $A_1 = 2{,}7A_2$. d) $A_1 = 2{,}7^{10}A_2$.

$$\log_{10} \frac{A_1}{A_2} = 9 - 6{,}3 = 2{,}7 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = 10^{2,7} \Rightarrow A_1 = A_2 \cdot 10^{2,7}$$

Resposta: alternativa **c**.

23. (Vunesp-SP) O brilho de uma estrela percebido pelo olho humano, na Terra, é chamado de magnitude aparente da estrela. Já a magnitude absoluta da estrela é a magnitude aparente que a estrela teria se fosse observada a uma distância padrão de 10 parsecs (1 parsec é aproximadamente $3 \cdot 10^{13}$ km). As magnitudes aparente e absoluta de uma estrela são muito úteis para se determinar sua distância ao planeta Terra. Sendo m a magnitude aparente e M a magnitude absoluta de uma estrela, a relação entre m e M é dada aproximadamente pela fórmula $M = m + 5 \cdot \log_3 (3 \cdot d^{-0,48})$ onde d é a distância da estrela em parsecs. A estrela Rigel tem aproximadamente magnitude aparente 0,2 e magnitude absoluta $-6{,}8$. Determine a distância, em quilômetros, de Rigel ao planeta Terra.

Sendo $m = 0{,}2$ e $M = -6{,}8$, temos:

$$0{,}2 + 5 \cdot \log_3 (3 \cdot d^{-0,48}) = -6{,}8 \Rightarrow 5 \cdot \log_3 (3 \cdot d^{-0,48}) = -7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 (3 \cdot d^{-0,48}) = -\frac{7}{5} \Rightarrow 1 + \log_3 (d^{-0,48}) = -\frac{7}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0{,}48 \log_3 d = -\frac{12}{5} \Rightarrow \log_3 d = \frac{-\frac{12}{5}}{-\frac{48}{100}} \Rightarrow \log_3 d = 5 \Rightarrow d = 3^5$$

Logo:

$3^5 \cdot 3 \cdot 10^{13} = 7{,}29 \cdot 10^{15}$

Resposta: $7{,}29 \cdot 10^{15}$ km.

24. (UFMG) Em uma danceteria, há um aparelho com várias caixas de som iguais. Quando uma dessas caixas é ligada no volume máximo, o nível R de ruído contínuo é de 95 dB.

Sabe-se que:

- $R = 120 + 10 \cdot \log_{10} I_s$, em que I_s é a intensidade sonora, dada em Watt/m^2; e
- a intensidade sonora I_s é proporcional ao número de caixas ligadas.

Seja N o maior número dessas caixas de som que podem ser ligadas, simultaneamente, sem que se atinja o nível de 115 dB, que é o máximo suportável pelo ouvido humano. Então, é correto afirmar que N é:

a) menor ou igual a 25.

b) maior que 25 e menor ou igual a 50.

c) maior que 50 e menor ou igual a 75.

d) maior que 75 e menor ou igual a 100.

- Para 1 caixa e $R = 95$ dB, temos:

$95 = 120 + 10 \cdot \log_{10} I_s \Rightarrow -25 = 10 \cdot \log_{10} I_s \Rightarrow -\frac{25}{10} = \log_{10} I_s \Rightarrow I_s = 10^{-2,5}$

Então, I_s para 1 caixa vale $10^{-2,5}$.

- Para N caixas e $R = 115$, temos:

$115 = 120 + 10 \cdot \log_{10} I_s \Rightarrow -5 = 10 \cdot \log_{10} I_s \Rightarrow -\frac{5}{10} = \log_{10} I_s \Rightarrow I_s = 10^{-0,5}$

Como a intensidade I_s é proporcional ao número de caixas ligadas, temos:

$10^{-0,5} = N \cdot 10^{-2,5} \Rightarrow N = \frac{10^{-0,5}}{10^{-2,5}} \Rightarrow N = 100$

Resposta: alternativa **d**.

25. (UFRN) A escala decibel de som é definida pela seguinte expressão: $B = 10 \log \frac{I}{I_0}$. Nessa expressão, B é o nível do som, em decibéis (dB), de um ruído de intensidade física I, e I_0 é a intensidade de referência associada ao som mais fraco percebido pelo ouvido humano.

De acordo com a expressão dada e a tabela ao lado, pode-se concluir que, em relação à intensidade de uma conversação normal, a intensidade do som de uma orquestra é:

Som	Nível do som em dB
Som mínimo	0
Raspagem de folhas	10
Sussurro	20
Conversação normal	60
Banda de *rock*	80
Orquestra	90
Máximo suportável	120

a) 1 000 vezes superior.

b) 200 vezes superior.

c) 100 vezes superior.

d) 2 000 vezes superior.

$90 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} \Rightarrow 9 = \log_{10} \frac{I_1}{I_0} \Rightarrow 10^9 = \frac{I_1}{I_0} \Rightarrow I_1 = 10^9 I_0$

$60 = 10 \log \frac{I_2}{I_0} \Rightarrow 6 = \log_{10} \frac{I_2}{I_0} \Rightarrow 10^6 = \frac{I_2}{I_0} \Rightarrow I_2 = 10^6 I_0$

Então:

$\frac{I_1}{I_2} = \frac{10^9 I_0}{10^6 I_0} = 10^3 = 1\,000$

Resposta: alternativa **a**.

26. (PUC-MG) As indicações R_1 e R_2 de dois terremotos, na escala Richter, estão relacionadas pela fórmula $R_1 - R_2 = \log_{10} \frac{E_1}{E_2}$, em que E_1 e E_2 medem as respectivas energias, liberadas pelos terremotos em forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Nessas condições, se $R_1 = 8{,}5$ e $R_2 = 7$, é correto afirmar que a razão entre E_1 e E_2, nessa ordem, é igual a:

a) 0,5. b) 1,5. c) $10^{0,5}$. d) $10^{1,5}$.

$R_1 - R_2 = \log_{10} \frac{E_1}{E_2} \Rightarrow 8{,}5 - 7 = \log_{10} \frac{E_1}{E_2} \Rightarrow 1{,}5 = \log_{10} \frac{E_1}{E_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^{1,5} = \frac{E_1}{E_2}$

Resposta: alternativa **d**.

27. (ESPM-SP) Certo tipo de planta tem seu crescimento aproximado pela função $h(x) = \log_3 (x + 1)$, onde x é o número de dias após a germinação e $h(x)$ é a altura da planta em cm. Assim, podemos dizer que a altura dessa planta após 2 anos da germinação será de aproximadamente:

a) 4 cm. c) 6 cm. e) 8 cm.

b) 5 cm. d) 7 cm.

$h(x) = \log_3 (x + 1)$, sendo x o número de dias e h a altura em função de x.

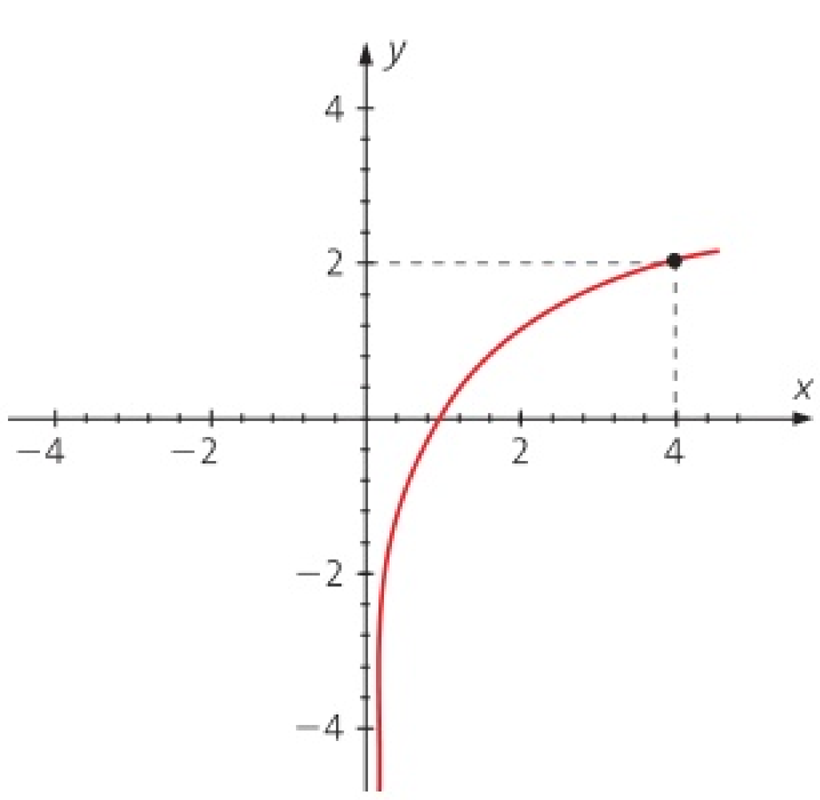
Após 2 anos, temos $x = 720$.

Portanto, $h(720) = \log_3 721$.

Como $\log_3 729 = \log_3 3^6 = 6$, então h será próximo de 6 cm.

Resposta: alternativa **c**.

28. (PUC-SP) A representação



é da função dada por $y = f(x) = \log_a (x)$. O valor de $\log_a (a^3 + 8)$ é:

a) 2. b) 4. c) 6. d) 8. e) 10.

Pelo gráfico, temos:

$f(4) = 2 \Rightarrow \log_a 4 = 2 \Rightarrow a^2 = 4$

Como $a > 0$ e $a \neq 1$, concluímos que $a = 2$.

Assim:

$\log_a (a^3 + 8) = \log_2 (2^3 + 8) = \log_2 16 = 4$

Resposta: alternativa **b**.

29. (UFMT) A magnitude de um terremoto é medida na escala Richter. Considere que as magnitudes M_1 e M_2 de dois terremotos estão relacionadas pela fórmula $M_1 - M_2 = \frac{2}{3} \log \frac{E_1}{E_2}$, onde E_1 e E_2 são as medidas das quantidades de energia liberada pelos terremotos.
Em 1955, ocorreu um terremoto no norte de Mato Grosso e, em 2004, um outro na ilha de Sumatra, na costa da Indonésia, que liberaram as quantidades de energia E_1 e E_2, respectivamente. Admitindo-se que E_1 foi equivalente à milésima parte de E_2 e que o terremoto ocorrido na ilha de Sumatra teve magnitude $M_2 = 9$, qual a magnitude M_1 do terremoto ocorrido no norte de Mato Grosso?

a) 6. b) 5. c) 7. d) 4. e) 3.

$$M_f - 9 = \frac{2}{3} \log \left(\frac{\frac{E_2}{1\,000}}{E_2} \right) \Rightarrow M_f - 9 = \frac{2}{3} \log \left(\frac{1}{1\,000} \right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M_f - 9 = \frac{2}{3} \cdot (-3) \Rightarrow M_f = 7$$

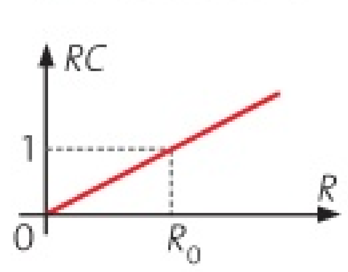
Resposta: alternativa **c**.

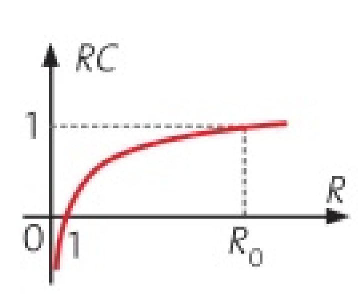
30. (UFRRJ) Ao se estudar o crescimento das palmeiras na cidade de Palmeirópolis constatou-se que a função que descreve esse crescimento em metros, após t anos, é $f(t) = 3^{\log_2 (2t - 1)}$. Quantos anos são necessários para que uma determinada palmeira atinja 27 metros de altura?

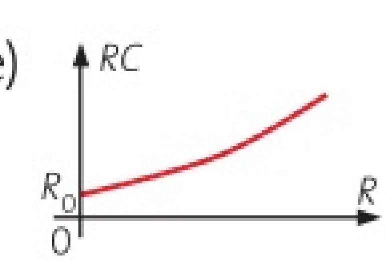
$$27 = 3^{\log_2 (2t - 1)} \Rightarrow 3^3 = 3^{\log_2 (2t - 1)} \Rightarrow 3 = \log_2 (2t - 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2^3 = 2t - 1 \Rightarrow 8 + 1 = 2t \Rightarrow t = 4{,}5$$

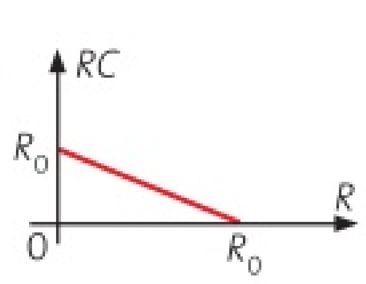
Resposta: 4,5 anos.

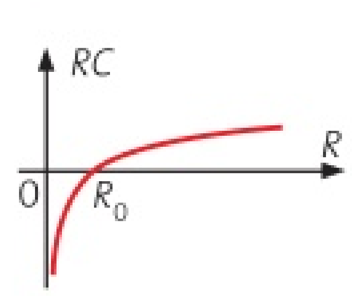
31. (Insper-SP) Escalas logarítmicas são usadas para facilitar a representação e a compreensão de grandezas que apresentam intervalos de variação excessivamente grandes. O *pH*, por exemplo, mede a acidez de uma solução numa escala que vai de 0 a 14; caso fosse utilizada diretamente a concentração do íon H^+ para fazer essa medida, teríamos uma escala bem pouco prática, variando de 0,00000000000001 a 1.
Suponha que um economista, pensando nisso, tenha criado uma medida da renda dos habitantes de um país chamada Renda Comparativa (*RC*), definida por $RC = \log \frac{R}{R_0}$, em que R é a renda, em dólares, de um habitante desse país e R_0 é o salário mínimo, em dólares, praticado no país. (Considere que a notação log indica logaritmo na base 10.)
Dentre os gráficos abaixo, aquele que melhor representa a Renda Comparativa de um habitante desse país em função de sua renda, em dólares:

a)


c)


e)


b)


d)


O gráfico que representa a Renda Corporativa é o de uma função logarítmica. Portanto, $R = R_0$, temos $RC = \log 1 = 0$.
Resposta: alternativa **d**.

32. (UFPB) O movimento de uma bola de golfe é influenciado tanto pela força gravitacional como também pela resistência do ar. Essa força retardadora atua no sentido oposto ao da velocidade da bola. Em um estudo realizado durante uma partida de golfe, observou-se que, quando foi considerada a força de resistência do ar, a distância horizontal $d(t)$, em metros, percorrida por uma bola em função do tempo t, em segundos, a partir do instante em que a bola foi lançada ($t = 0$), era dada por $d(t) = 50(1 - e^{-0,1t})$.

Use: $\ln 2 = 0,7$.

A partir dessas informações, conclui-se que, para que a bola percorra uma distância na horizontal de 25 m, o tempo gasto, a partir do instante do lançamento, é de:

a) 5,0 s. b) 6,6 s. c) 7,0 s. d) 8,5 s. e) 10 s.

$d(t) = 50(1 - e^{-0,1t}) \Rightarrow 25 = 50(1 - e^{-0,1t}) \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - e^{-0,1t} \Rightarrow 2^{-1} = e^{-0,1t} \Rightarrow \ln 2^{-1} = \ln e^{-0,1t} \Rightarrow -1 \cdot \ln 2 = -0,1t \cdot \ln e \Rightarrow -1 \cdot 0,7 = -0,1t \cdot 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow t = 7$

Resposta: alternativa **c**.

33. (UFSM-RS) Um estudo com um grupo de vestibulandos indica que a função $f(t) = 9e^{\frac{-t}{3}} + 1$, com $t \geqslant 0$, é a quantidade do conteúdo de Geometria que um aluno consegue relembrar decorridas t semanas após o estudo. A função g, que expressa o tempo t em função da quantidade de conteúdo que o aluno consegue relembrar, é a inversa da função f e é dada por:

a) $g(x) = \ln\left(\frac{9}{x - 1}\right)^3$.

b) $g(x) = \ln\left(\frac{9}{x - 1}\right)^{\frac{1}{3}}$.

c) $g(x) = \ln\left(\frac{x - 1}{9}\right)^3$.

d) $g(x) = \ln\left(\frac{x - 1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$.

e) $g(x) = \ln\left(\frac{x + 1}{3}\right)$.

Devemos achar a inversa da função y; então:

$y - 1 = 9e^{\frac{-t}{3}} \Rightarrow \frac{y - 1}{9} = e^{\frac{-t}{3}} \Rightarrow \ln\left(\frac{y - 1}{9}\right) = \ln e^{\frac{-t}{3}} \Rightarrow \ln\left(\frac{y - 1}{9}\right) = \frac{-t}{3} \Rightarrow t = \ln\left(\frac{y - 1}{9}\right)^{-3} \Rightarrow t = \ln\left(\frac{9}{y - 1}\right)^3$

Devemos trocar t por y e y por t; logo: $y = \ln\left(\frac{9}{t - 1}\right)^3$. Assim, $f(t) = f(x)$. Então, $y = \ln\left(\frac{9}{x - 1}\right)^3$.

Resposta: alternativa **a**.

34. (UFF-RJ) Sempre que se ouve alguma referência a embates – reais ou imaginários – entre ciência e religião, o nome de Galileu (1564-1642) é invariavelmente invocado. No entanto, J. A. Connor apresenta em seu texto "A Bruxa de Kepler" um pensador que, segundo o autor, teria sido realmente fiel a seus princípios intelectuais, morais e religiosos, muito mais que Galileu: Johannes Kepler (1571-1630). Vivendo em uma parte da Europa dilacerada pelas guerras de religião, sofrendo perseguições por causa da sua fé luterana, Kepler ainda assim revolucionou a compreensão que temos do mundo.


UFF/2008

Adaptado do texto "À Sombra de Galileu", de T. Haddad. *Scientific American*, ano 4, n. 46, março 2006.

Um dos grandes legados de Kepler para a ciência foi a sua terceira lei: "o quadrado do período de revolução de cada planeta é proporcional ao cubo do raio médio da respectiva órbita". Isto é, sendo T o período de revolução do planeta e r a medida do raio médio de sua órbita, esta lei nos permite escrever que: $T^2 = Kr^3$, onde a constante de proporcionalidade K é positiva. Considerando $x = \log(T)$ e $y = \log(r)$, pode-se afirmar que:

a) $y = \dfrac{2x - K}{3}$. b) $y = \dfrac{2x}{3\log K}$. c) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{K}}$. d) $y = \dfrac{2x}{K}$. e) $y = \dfrac{2x - \log K}{3}$.

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{K}} \Rightarrow r = \frac{T^{\frac{2}{3}}}{K^{\frac{1}{3}}}$$

$$y = \log \frac{T^{\frac{2}{3}}}{K^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow y = \log T^{\frac{2}{3}} - \log K^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y = \frac{2}{3}\log T - \frac{1}{3}\log K \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\log K \Rightarrow y = \frac{2x - \log K}{3}$$

Resposta: alternativa **e**.

35. (UEL-PR) O valor de um automóvel (em unidades monetárias) sofre um depreciação de 4% ao ano. Sabendo-se que o valor atual de um carro é de 40 000 unidades monetárias, depois de quantos anos o valor desse carro será de 16 000 unidades monetárias? Use o valor 0,3 para log 2 e o valor 0,48 para log 3.

a) 3. b) 6. c) 10. d) 15. e) 20.

$$16 = 40 \cdot 0{,}96^t \Rightarrow 0{,}4 = 0{,}96^t \Rightarrow \log 0{,}4 = t \cdot \log 0{,}96 \Rightarrow \log\frac{4}{10} = t \cdot \log\frac{96}{100} \Rightarrow t(5 \cdot 0{,}3 + 0{,}48 - 2) = 2 \cdot 0{,}3 - 1 \Rightarrow t(-0{,}02) = -0{,}4 \Rightarrow t = 20$$

Resposta: alternativa **e**.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

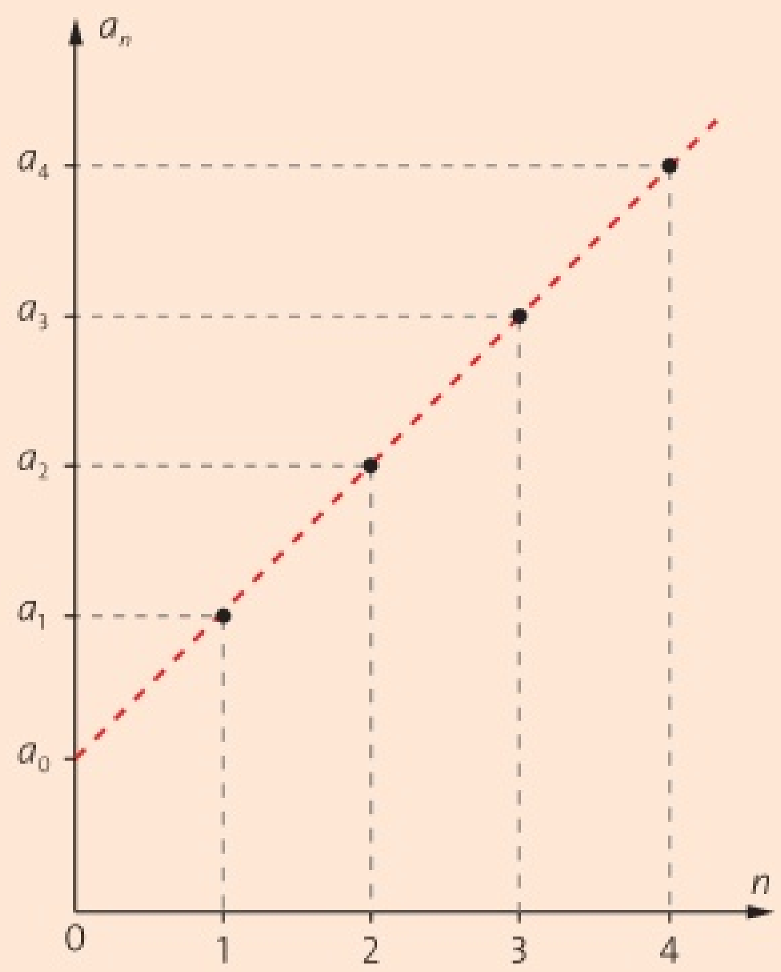
Definição

Sequência de números na qual a diferença (r) entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é constante.

$a_1 \xrightarrow{+r} a_2 \xrightarrow{+r} \dots \xrightarrow{+r} a_n$

Razão: $r = a_n - a_{n-1}$

Classificação e interpretação geométrica



Crescente

$r > 0$

Decrescente

$r < 0$

Constante ou estacionária

$r = 0$

Fórmulas

Termo geral

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ ou $a_n = a_p + (n-p) \cdot r$

Soma dos n primeiros termos

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Observação: $S_1 = a_1$ e $S_n - S_{n-1} = a_n$

Particularidades

Representações especiais

- três termos: $(x - r, x, x + r)$
- cinco termos: $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$

Propriedades

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$

- $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, para $n \geqslant 2$
- $a_{\text{médio}} = \dfrac{a_1 + a_n}{2}$, para n ímpar
- $a_x \cdot a_y = a_p \cdot a_q \Leftrightarrow x + y = p + q$

Exercícios

1. (UFTM-MG) Em uma caixa havia somente moedas de 50 centavos. Foram feitas sucessivas retiradas, sendo 5 moedas na 1ª vez, 10 na 2ª, 15 na 3ª e assim sucessivamente, até não restar nenhuma moeda na caixa, o que ocorreu na 14ª vez. O valor retirado da caixa na última vez foi de:

   a) R\$ 30,00. b) R\$ 31,00. c) R\$ 32,00. d) R\$ 35,00. e) R\$ 36,00.

Temos:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ n = 14 \\ r = 5 \\ a_{14} = ? \end{cases}$$

Então:

$a_{14} = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_{14} = 5 + (14 - 1) \cdot 5 \Rightarrow a_{14} = 5 + 65 \Rightarrow a_{14} = 70$ moedas

Logo:

$70 \cdot 0{,}5 = 35$ reais

Resposta: alternativa **d**.

---

2. (UFU-MG) Os irmãos José e Maria visitam regularmente seu avô Pedro. José visita-o a cada 8 dias e Maria a cada 6 dias, ambos, rigorosamente, sem nunca falharem. Se José e Maria visitaram simultaneamente o avô no primeiro dia do ano de 2004, quantas vezes mais eles fizeram a visita simultânea até o dia 31 de dezembro de 2006?
   Observação: Considere cada ano com 365 dias.

   a) 48 b) 44 c) 46 d) 45

De 1º/1/04 até 31/12/06 são 1 095 dias.

A razão da visita simultânea de João e Maria é o menor múltiplo comum de 8 e 6, ou seja, 24.

Então:

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$1 + (n - 1) \cdot 24 < 1\,095 \Rightarrow 1 + 24n - 24 < 1\,095 \Rightarrow 24n < 1\,118 \Rightarrow n < 46{,}6$

Logo, $n = 46$ (total de visitas).

Portanto, José e Maria fizeram a visita simultânea mais 45 vezes, além da 1ª.

Resposta: alternativa **d**.

3. (UFPB) Na organização de um determinado rali, quanto à quilometragem diária a ser percorrida pelas equipes participantes durante os 20 dias da competição, ficou estabelecida a seguinte regra.

No primeiro dia, as equipes deveriam percorrer 500 km e, nos dias subsequentes, deveriam percorrer 20 km a mais que no dia anterior.

A partir dos dados apresentados, é correto afirmar que uma equipe, para completar a prova, deverá percorrer no mínimo:

a) 14 000 km. b) 13 800 km. c) 13 600 km. d) 13 400 km. e) 13 200 km.

Temos:

$$\begin{cases} a_1 = 500 \\ n = 20 \\ r = 20 \\ a_{20} = ? \end{cases}$$

Então:

$a_{20} = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_{20} = 500 + 19 \cdot 20 \Rightarrow a_{20} = 880$ km

Logo:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{20} = \frac{(500 + 800) \cdot 20}{2} \Rightarrow S_{20} = 13\,800$$

Resposta: alternativa **b**.

4. (Unifor-CE) Na compra a prazo de um aparelho eletrônico, o total pago por Juliana foi de R$ 870,00. A entrada teve valor correspondente a $\frac{1}{5}$ do total, e o restante foi pago em 4 parcelas, cujos valores formaram uma progressão aritmética crescente de razão R$ 30,00. Sendo assim, o valor da última prestação que Juliana vai pagar é:

a) R$ 205,00. b) R$ 210,00. c) R$ 215,00. d) R$ 219,00. e) R$ 220,00.

Juliana pagou R$ 174,00 de entrada. Então:

$870 - 174 = 696$

Logo:

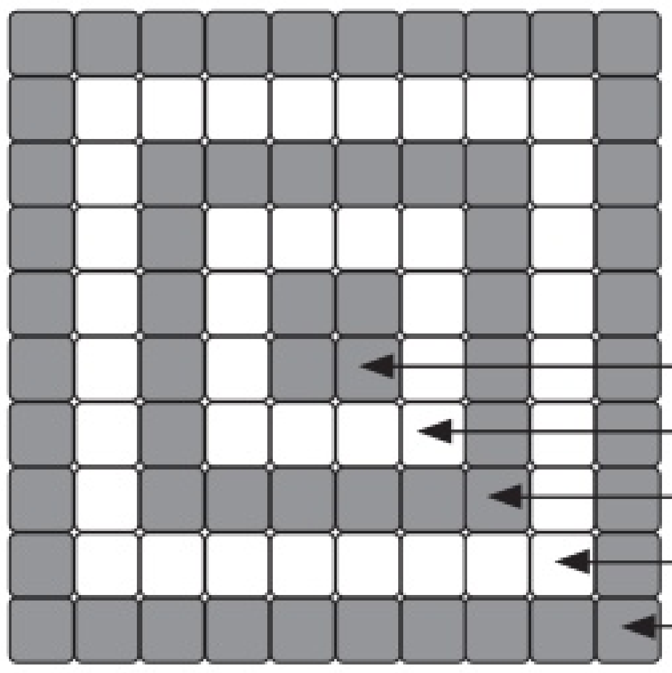
$$S_n = \frac{(a_1 + a_4) \cdot n}{2} \Rightarrow 696 = \frac{(a_1 + a_4) \cdot 4}{2}$$

Mas:

- $a_1 + a_4 = 348 \Rightarrow a_1 = 348 - a_4$
- $a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_4 = 348 - a_4 + 3 \cdot 30 \Rightarrow 2a_4 = 348 + 90 \Rightarrow a_4 = 219$ reais

Resposta: alternativa **d**.

5. (Unicamp-SP) No centro de um mosaico formado apenas por pequenos ladrilhos, um artista colocou 4 ladrilhos cinza. Em torno dos ladrilhos centrais, o artista colocou uma camada de ladrilhos brancos, seguida por uma camada de ladrilhos cinza, e assim sucessivamente, alternando camadas de ladrilhos brancos e cinza, como ilustra a figura ao lado, que mostra apenas a parte central do mosaico.
Observando a figura, podemos concluir que a 10ª camada de ladrilhos cinza contém:



a) 76 ladrilhos.
b) 156 ladrilhos.
c) 112 ladrilhos.
d) 148 ladrilhos.

A 10ª camada cinza será o a_{19} da PA; então:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ n = 19 \\ r = 8 \\ a_{19} = ? \end{cases}$$

Logo:

$a_{19} = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_{19} = 4 + (19 - 1) \cdot 8 \Rightarrow a_{19} = 4 + 144 \Rightarrow a_{19} = 148$ ladrilhos

Resposta: alternativa **d**.

6. (Ufpel-RS) Uma indústria de produtos natalinos encerrou o ano de 2006, com um estoque de 250 peças. Em janeiro de 2007, a indústria concedeu férias coletivas a seus funcionários e a partir de fevereiro recomeçou sua produção. Com base no texto, considerando que essa indústria, em fevereiro, produziu 550 produtos, que a cada mês essa produção cresceu em progressão aritmética e que em novembro de 2007 o estoque passou a ter 26 000 itens, é correto afirmar que o número de peças produzidas em agosto foi de:

a) 2 800.
b) 3 250.
c) 3 500.
d) 13 300.
e) 10 050.

Temos:

$$\begin{cases} \text{fev.} \rightarrow a_1 = 550 \\ \text{nov.} \rightarrow a_{10} = ? \\ S_{10} = 26\,000 - 250 = 25\,750 \\ r = ? \\ \text{ago.} \rightarrow a_{10} = ? \end{cases}$$

Então:

$S_{10} = \dfrac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} \Rightarrow 25\,750 = (550 + a_{10}) \cdot 5 \Rightarrow a_{10} = 4\,600$ peças em novembro

Mas:

$a_{10} = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 4\,600 = 550 + 9r \Rightarrow 9r = 4\,050 \Rightarrow r = 450$

Logo, em agosto, teremos:

$a_7 = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_7 = 550 + (7 - 1) \cdot 450 = 550 + 2\,700 = 3\,250$ peças foram produzidas

Resposta: alternativa **b**.

7. (Uncisal) Quando a CPMF foi adaptada a seu atual formato, uma das metas que deveriam ser atingidas com a injeção maciça de recursos na saúde era erradicar a dengue. Porém, uma década depois, o número de casos registrados da doença cresceu assustadoramente. Suponha que de 1996 a 2006 o número de casos de dengue tenha crescido em uma progressão aritmética de razão r. Sabe-se que $p_1 + p_2 = 384$ mil casos, e que $p_2 + p_3 = 416$ mil casos, sendo p_1 o número de casos registrados em 1996, p_2 o número de casos registrados em 1997, p_3 o número de casos registrados em 1998, e assim sucessivamente. Nessas condições, pode-se afirmar que o número de casos de dengue registrados em 2006 foi:

a) 364 mil. b) 344 mil. c) 328 mil. d) 326 mil. e) 324 mil.

Temos:

$$\begin{cases} p_2 = p_1 + r \\ p_3 = p_1 + 2r \\ 2006 \rightarrow p_{11} \end{cases}$$

Então:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 384 \\ p_2 + p_3 = 416 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 + p_1 + r = 384 \\ p_1 + r + p_1 + 2r = 416 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p_1 + r = 384 \\ 2p_1 + 3r = 416 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2p_1 - r = -384 \\ 2p_1 + 3r = 416 \end{cases}$$

$$2r = 32 \Rightarrow r = 16$$

$$2p_1 + r = 384 \Rightarrow 2p_1 + 16 = 384 \Rightarrow p_1 = 184$$

Logo:

$p_{11} = p_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow p_{11} = 184 + (11 - 1) \cdot 16 \Rightarrow p_{11} = 184 + 160 \Rightarrow p_{11} = 344$ mil casos

Resposta: alternativa **b**.

8. (Unifor-CE) Suponha que, em 15/1/2006, Bonifácio tinha R$ 27,00 guardados em seu cofre, enquanto Valfredo tinha R$ 45,00 guardados no seu e, a partir de então, no décimo quinto dia de cada mês subsequente, as quantias contidas em cada cofre aumentaram segundo os termos de progressões aritméticas de razões R$ 8,00 e R$ 5,00, respectivamente. Considerando que nenhum deles fez qualquer retirada, a quantia do cofre de Bonifácio superou a do Valfredo no mês de:

a) junho. b) julho. c) agosto. d) setembro. e) outubro.

- Para Bonifácio:

  $a_n = 27 + (n - 1) \cdot 8 \Rightarrow a_n = 27 + 8n - 8 \Rightarrow a_n = 19 + 8n$

- Para Valfredo:

  $b_n = 45 + (n - 1) \cdot 5 \Rightarrow b_n = 45 + 5n - 5 \Rightarrow b_n = 40 + 5n$

Então:

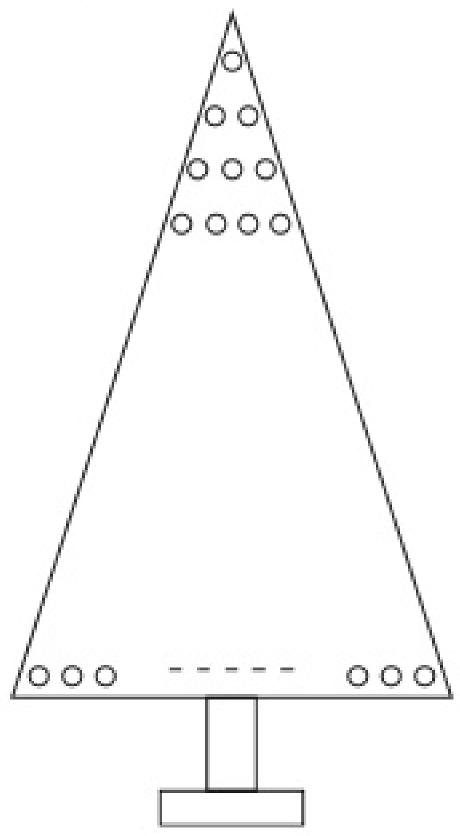
$a_n > b_n \Rightarrow 19 + 8n > 40 + 5n \Rightarrow 3n > 21 \Rightarrow n > 7$

Logo, $n = 8$.

Portanto, em agosto, a quantia do cofre de Bonifácio superou a de Valfredo.

Resposta: alternativa **c**.

9. (Unifor-CE) Para a confecção de uma árvore de Natal estilizada, utilizou-se uma prancha de madeira, em forma triangular, onde foram encaixadas lâmpadas enfileiradas conforme esquematizado na figura abaixo.



A quantidade de lâmpadas utilizadas para a confecção desta árvore foi:

a) 200. b) 460. c) 560. d) 630. e) 700.

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot 10}{2} \Rightarrow S_{35} = \frac{(a_1 + a_{35}) \cdot 35}{2} \Rightarrow S_{35} = \frac{(a_1 + 35) \cdot 35}{2} \Rightarrow S_{35} = 630$ lâmpadas

Resposta: alternativa **d**.

10. (ESPM-SP) Uma campanha de ajuda comunitária arrecadou, no 1º dia, a importância de 120 mil reais; no 2º dia, 160 mil reais; no 3º dia, 200 mil reais e assim por diante, sempre aumentando 40 mil reais a cada dia. O montante da arrecadação atingiu 10 milhões de reais no:

a) 15º dia. b) 12º dia. c) 18º dia. d) 20º dia. e) 22º dia.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 120 + (n - 1) \cdot 40 \Rightarrow a_n = 120 + 40n - 40 \Rightarrow a_n = 80 + 40n$

Então:

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow 10\,000 = \frac{(120 + 80 + 40n) \cdot n}{2} \Rightarrow 20\,000 = (200 + 40n) \cdot n \Rightarrow 40n^2 + 200n - 20\,000 = 0 \Rightarrow n^2 + 5n - 500 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 20$ ou $n = -25$ (não convém)

Portanto, o montante atingiu 10 milhões de reais no 20º dia.

Resposta: alternativa **d**.

11. (Unisc-RS) Um pesquisador foi desafiado a escrever um artigo de dezessete páginas, cada uma com exatamente vinte e cinco linhas. Para isso, no primeiro dia, escreveu as vinte primeiras linhas e, em cada dia seguinte, tantas linhas quantas havia escrito no dia anterior, mais cinco linhas. Quanto tempo esse pesquisador levou para escrever o artigo?

a) 100 dias
b) 81 dias
c) 18 dias
d) 8 dias
e) 10 dias

$a_n = 20 + (n - 1) \cdot 5 \Rightarrow a_n = 20 + 5n - 5 \Rightarrow a_n = 15 + 5n$

Mas:

$S_n = 25 \cdot 17 = 425$ linhas

Então:

$425 = \dfrac{(20 + 15 + 5n) \cdot n}{2} \Rightarrow 850 = (35 + 5n) \cdot n \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 + 7n - 170 = 0 \Rightarrow n = 10$ ou $n = -17$ (não convém)

Portanto, o pesquisador levou 10 dias para escrever o artigo.

Resposta: alternativa **e**.

12. (UPE) Para descarregar os 6 579 contêineres de um navio, realizou-se o seguinte planejamento: no primeiro dia, foram descarregados 300 contêineres, e, nos demais dias, sempre foram descarregados exatamente 7 contêineres a menos que no dia anterior. No último dia, havia 6 contêineres a descarregar. Em quantos dias (contando com o último), o navio foi totalmente descarregado?

a) 43
b) 42
c) 21
d) 22
e) 44

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow 6\,579 = \dfrac{(300 + 6) \cdot n}{2} \Rightarrow 360n = 13\,158 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 43$ dias

Resposta: alternativa **a**.

13. (UFSM-RS) O êxodo rural também está relacionado com a falta de estrutura educacional nas escolas rurais, a qual faz com que crianças em idade escolar tenham de se deslocar diariamente para centros urbanos, a fim de dar continuidade a seus estudos. Essa falta também obriga que jovens migrem para os grandes centros acabando por não retornarem à vida rural. Suponha que um grupo de estudantes tenha que percorrer diariamente 33 km num micro-ônibus e que, devido a obstáculos e paradas para embarques e desembarques, esse percurso seja efetivado do seguinte modo: nos primeiros 15 minutos, ele percorre 5 km e, em cada quarto de hora seguinte, 250 m menos que antes. O tempo que ele leva para efetuar o percurso total é:

a) 1 hora.
b) 1 hora e 30 minutos.
c) 2 horas.
d) 2 horas e 30 minutos.
e) 3 horas.

Temos:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ r = -0{,}25 \\ a_n = ? \\ n = ? \\ t = ? \end{cases}$$

Então:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 5 + (n - 1) \cdot (-0{,}25) \Rightarrow a_n = 5 - 0{,}25n + 0{,}25 \Rightarrow a_n = 5{,}25 - 0{,}25n$

Mas:

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow 33 = \dfrac{(5 + 5{,}25 - 0{,}25n) \cdot n}{2} \Rightarrow 66 = 10{,}25n - 0{,}25n^2 \Rightarrow 0{,}25n^2 - 10{,}25n + 66 = 0 \Rightarrow n^2 - 41n + 264 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 8$ ou $n = 33$

Como $0 < a_n < 33$, então $n = 33$ não convém. Logo, $n = 8$.

Assim, o percurso será feito em 8 quartos de hora.

Logo:

$t = 15 \cdot 8 \Rightarrow t = 120$ min $\Rightarrow t = 2$ h

Resposta: alternativa **c**.

14. (UFU-MG) Uma pessoa iniciou os treinos para participar de uma competição de *duathlon* (prova envolvendo natação e corrida). Essa competição consiste de 9 km de natação e 15 km de corrida. No primeiro dia de treino, ela nada 800 metros e corre 1 200 metros. No segundo dia de treino, ela dobra cada uma destas distâncias. No terceiro dia de treino, ela triplica as distâncias do primeiro dia e assim sucessivamente. Como os treinos são feitos diariamente, qual a quantidade mínima de dias de treino de que essa pessoa necessita para percorrer as duas distâncias da competição em um único dia?

a) 11 dias b) 13 dias c) 10 dias d) 12 dias

- Para natação:
  $9\,000 = 800 + (n-1) \cdot 800 \Rightarrow 9\,000 = 800n \Rightarrow n = 11{,}25$ dias
- Para corrida:
  $15\,000 = 1\,200 + (n-1) \cdot 1\,200 \Rightarrow 15\,000 = 1\,200n \Rightarrow n = 12{,}5$ dias

Para que as duas distâncias das duas modalidades sejam percorridas no mesmo dia, a pessoa necessita de pelo menos 13 dias de treino.

Resposta: alternativa **b**.

15. (PUC-RS) Tales, um aluno do Curso de Matemática, depois de terminar o semestre com êxito, resolveu viajar para a Europa.
O Portão de Brandemburgo, em Berlim, possui cinco entradas, cada uma com 11 metros de comprimento. Tales passou uma vez pela primeira porta, duas vezes pela segunda e assim sucessivamente, até passar cinco vezes pela quinta. Então, ele percorreu quantos metros?

a) 55 b) 66 c) 165 d) 275 e) 330

Temos:

$$\begin{cases} a_1 = 11 \text{ m} \\ a_2 = 22 \text{ m} \\ a_5 = 55 \text{ m} \\ n = 5 \\ S_5 = ? \end{cases}$$

Então:

$$S_5 = \frac{(a_1 + a_5) \cdot n}{2} \Rightarrow S_5 = \frac{(11 + 55) \cdot 5}{2} \Rightarrow S_5 = \frac{330}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow S_5 = 165$ m

Resposta: alternativa **c**.

16. (UFPR) Atribui-se ao matemático De Moivre uma lenda sobre um homem que previu sua própria morte. As condições da previsão estão dentro de uma narrativa que modela grosseiramente vários aspectos da realidade. Por exemplo, dormir 24 horas seguidas equivale a morrer, e assim por diante. A lenda é a seguinte: um homem observou que cada dia dormia 15 minutos a mais que no dia anterior. Se ele fez essa observação exatamente após ter dormido 8 horas, quanto tempo levará para que ele durma 24 horas seguidas, não mais acordando?

Temos:

$$\begin{cases} 15 \text{ min} = 0{,}25 \text{ h} \\ a_1 = 8 \\ r = 0{,}25 \\ n = ? \end{cases}$$

Então:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow 24 = 8 + 0{,}25n - 0{,}25 \Rightarrow$
$\Rightarrow 24 = 7{,}75 + 0{,}25n \Rightarrow 0{,}25n = 16{,}25 \Rightarrow n = 65$

Após o 1º dia (a_1); com 64 dias ele não mais acordará.

Resposta: 64 dias.

17. (UFU-MG) Dois ciclistas estão em fases distintas de preparação. O técnico desses atletas elabora um planejamento de treinamento para ambos, estabelecendo o seguinte esquema:

- ciclista 1: iniciar o treinamento com 4 km de percurso e aumentar, a cada dia, 3 km a mais para serem percorridos;
- ciclista 2: iniciar o treinamento com 25 km de percurso e aumentar, a cada dia, 2 km a mais para serem percorridos.

Sabendo-se que esses ciclistas iniciam o treinamento no mesmo dia e que o término desse treinamento se dá quando os atletas percorrem a mesma distância em um mesmo dia, pode-se afirmar que ao final do treinamento o ciclista 1 percorre uma distância total, em km, de:

a) 781. b) 714. c) 848. d) 915.

c_1: (4; 7; 10; 13; 16; 19; ...)
c_2: (25; 27; 29; 31; 33; ...)

$a_{n_1} = a_{n_2} \Rightarrow 4 + (n-1) \cdot 3 = 25 + (n-1) \cdot 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 + 3n - 3 = 25 + 2n - 2 \Rightarrow n = 22$

Mas:
$a_{22} = 4 + 21 \cdot 3 \Rightarrow a_{22} = 67$

Então:

$$S_{22} = \frac{(4 + 67) \cdot 22}{2} \Rightarrow S_{22} = 781$$

Resposta: alternativa **a**.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

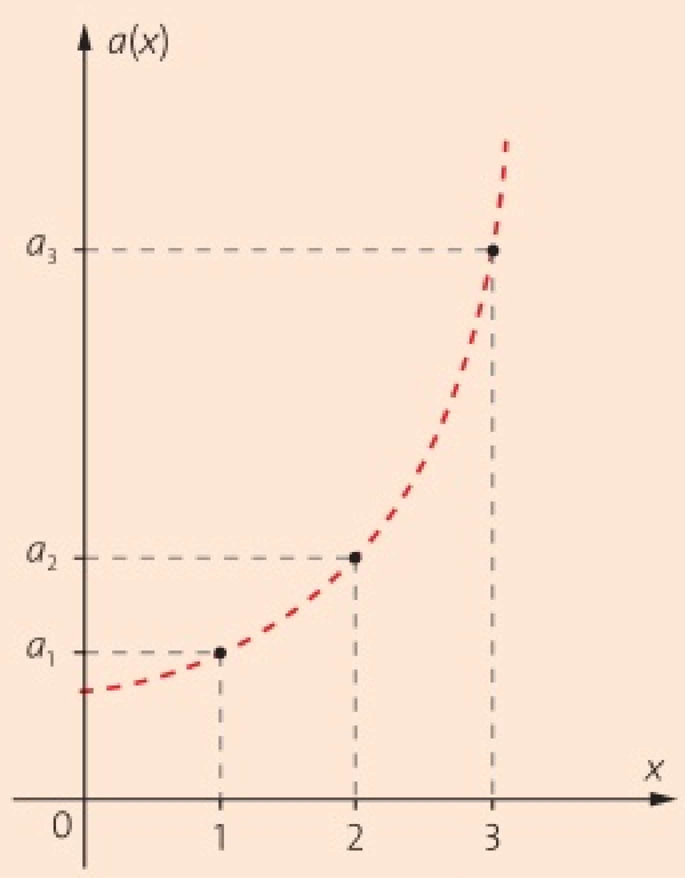
Definição

Sequência de números na qual o quociente (q) da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior é constante.

$a_1 \xrightarrow{\cdot q} a_2 \xrightarrow{\cdot q} \dots \xrightarrow{\cdot q} a_n$

Razão: $q = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

Classificação e interpretação geométrica



Crescente

- termos positivos: $q > 1$
- termos negativos: $0 < q < 1$

Decrescente

- termos positivos: $0 < q < 1$
- termos negativos: $q > 1$

Constante

$q = 1$

Alternante

$q < 1$

Fórmulas

Termo geral

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ou $a_n = a_p \cdot q^{n-p}$

Taxa de crescimento relativo dos termos

$i = \dfrac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}}, a_{n-1} \neq 0$

Soma dos n primeiros termos de uma PG finita

$S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$

Soma dos termos de uma PG infinita

$S_n = \dfrac{a_1}{1-q}, -1 < q < 1$

Particularidades

Representações especiais

- três termos: $\left(\dfrac{x}{q}, x, xq\right)$
- cinco termos: $\left(\dfrac{x}{q^2}, \dfrac{x}{q}, x, xq, xq^2\right)$

Propriedades

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$

- $(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$, para $n \geqslant 2$
- $(a_{\text{médio}})^2 = a_1 \cdot a_n$, para n ímpar
- $a_x \cdot a_y = a_p \cdot a_q \Leftrightarrow x + y = p + q$

Exercícios

1. (UFPB) Cecília jogou na loteria esportiva durante cinco semanas consecutivas, de tal forma que, a partir da segunda semana, o valor apostado era o dobro do valor da semana anterior. Se o total apostado, nas cinco semanas, foi R$ 2 325,00, o valor pago por Cecília, no jogo da primeira semana, foi:

a) R$ 75,00.
b) R$ 85,00.
c) R$ 100,00.
d) R$ 95,00.
e) R$ 77,00.

$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 2\,325 = \frac{a_1(2^5 - 1)}{2 - 1} \Rightarrow 2\,325 = -a_1 + 32a_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 31a_1 = 2\,325 \Rightarrow a_1 = 75$

Resposta: alternativa **a**.

2. (Unipar-PR) Segundo a história da Matemática, o rei ofereceu uma recompensa ao sábio que desenvolveu o jogo de xadrez no seu reino. A recompensa pedida foi que cada casa do tabuleiro fosse preenchida com sementes de trigo, mas dobrando a cada casa. No caso, seria uma PG de primeiro termo 1 e razão igual a 2. Logo o rei desistiu da recompensa e nomeou o sábio como seu conselheiro repleto de honrarias. Isto porque, se a recompensa fosse realmente cumprida, ao final das 64 casas do tabuleiro, a quantidade de grãos de trigo seria da ordem de:

a) $2^{32} - 1$.
b) $2^{64} - 1$.
c) $2^{32} - 2$.
d) $2^{64} - 2$.
e) $2^{128} - 1$.

$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_{64} = \frac{1(2^{64} - 1)}{2 - 1} \Rightarrow S_{64} = 2^{64} - 1$

Resposta: alternativa **b**.

3. (UFRRJ) Uma de nossas mais tradicionais festas juninas é realizada anualmente em Campina Grande, na Paraíba. Nesta festa dança-se a quadrilha, na qual os pares, para formarem o caracol, partem em fila puxados pelo líder, seguindo semicircunferência no sentido anti-horário. A primeira semicircunferência é formada com 20 m de raio, a segunda com raio igual a $\frac{2}{3}$ da primeira, a terceira com raio igual a $\frac{2}{3}$ da segunda, e assim sucessivamente. Ao final, quantos metros serão percorridos pelo líder durante o movimento do caracol?

Temos:

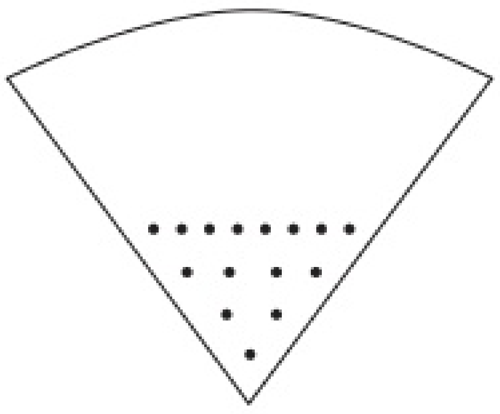
$$\begin{cases} q = \frac{2}{3} \\ a_1 = 20 \text{ m} \\ l_1 = \frac{2\pi \cdot 20}{2} = 20\pi \end{cases}$$

Então:

$$S_n = \frac{l_1}{1 - q} \Rightarrow S_n = \frac{20\pi}{1 - \frac{2}{3}} \Rightarrow S_n = \frac{20\pi}{\frac{1}{3}} \Rightarrow S_n = 60\pi \text{ m}$$

Resposta: 60π m.

4. (UEL-PR) Marlene confecciona leques artesanais com o formato de um setor circular, como representado na figura ao lado.
Para enfeitar os leques, usa pequenas contas brilhantes que dispõe da seguinte maneira: no vértice do leque, primeira fileira, coloca apenas uma conta; na segunda fileira horizontal posterior coloca duas contas; na terceira fileira horizontal coloca quatro, na quarta fileira horizontal dispõe oito contas e assim sucessivamente. Considere que Marlene possui 515 contas brilhantes para enfeitar um leque. Com base nessas informações, é correto afirmar que o número máximo de fileiras completas nesse leque é:



a) 7. b) 8. c) 9. d) 10. e) 11.

Temos a PG (1, 2, 4, 8, ...).

Então:

$515 = \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} \Rightarrow 515 = 2^n - 1 \Rightarrow 2^n = 516 \Rightarrow 2^n = 2^9 \Rightarrow n = 9$ filas completas

Resposta: alternativa **c**.

5. (PUC-RS) Uma bolinha de tênis é deixada cair no chão, de uma altura de 4 m. Cada vez que toca o chão, ela sobe verticalmente a uma altura igual à metade da altura anterior. Mantendo-se esse padrão, a altura alcançada pela bolinha, em metros, após o décimo toque no chão é:

a) $\frac{1}{2\,048}$.
b) $\frac{1}{1\,024}$.
c) $\frac{1}{512}$.
d) $\frac{1}{256}$.
e) $\frac{1}{128}$.

Temos uma PG da forma (4, 2x, 1, ...) com x = 1º toque.

Então:

$q_{11} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ (após o 1º toque) $\Rightarrow q_{11} = 4 \cdot \frac{1}{1024} \Rightarrow q_{11} = \frac{1}{256}$

Resposta: alternativa **d**.

6. (EsPCEx-SP) Um menino, de posse de uma porção de grãos de arroz, brincando com um tabuleiro de xadrez, colocou um grão na primeira casa, dois grãos na segunda casa, quatro grãos na terceira casa, oito grãos na quarta casa e continuou procedendo desta forma até que os grãos acabaram, em algum momento, enquanto ele preenchia a décima casa. A partir dessas informações, podemos afirmar que a quantidade mínima de grãos de arroz que o menino utilizou na brincadeira é:

a) 480.
b) 511.
c) 512.
d) 1 023.
e) 1 024.

9 casas foram preenchidas totalmente. Assim:

$S_9 = \frac{1(2^9 - 1)}{2 - 1} \Rightarrow S_9 = 511$ grãos

Como ele começou a preencher a décima casa, a quantidade mínima é $511 + 1 = 512$.

Resposta: alternativa **c**.

7. (UFPB) Uma porção de certa substância com 512 g de massa será fragmentada da seguinte forma. Na primeira etapa da fragmentação, a porção será dividida em duas partes de massas iguais. A partir da segunda etapa, cada parte obtida na etapa anterior será dividida em duas com massas iguais. Sabendo-se que na fragmentação de cada parte será utilizada uma quantidade de, no máximo, 2 Joules (J) de energia, é correto afirmar que, quando a massa de cada parte for de 2 g, a quantidade total de energia, utilizada em todo o processo de fragmentação, será de no máximo:

a) 498 J. b) 906 J. c) 682 J. d) 824 J. e) 510 J.

Quando a massa de cada parte for 2 g, teremos 256 partes. Assim, a última fragmentação foi de 128 partes.

$128 = 1 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} = 2^7 \Rightarrow n = 8$

Então:

$S_8 = \dfrac{1(2^8 - 1)}{2 - 1} \Rightarrow S_8 = 256 - 1 \Rightarrow S_8 = 255$

Como cada fragmentação vale 2 J, temos:

$2 \cdot 255 = 510$ J

Resposta: alternativa **e**.

8. (PUC-SP) Considere que em julho de 1986 foi constatado que era despejada uma certa quantidade de litros de poluentes em um rio e que, a partir de então, essa quantidade dobrou a cada ano. Se hoje a quantidade de poluentes despejados nesse rio é de 1 milhão de litros, há quantos anos ela era de 250 mil litros?

a) Nada se pode concluir, já que não é dada a quantidade despejada em 1986.
b) Seis.
c) Quatro.
d) Dois.
e) Um.

$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow 1\,000\,000 = 250\,000 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 4 = 2^{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^2 = 2^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 2 \Rightarrow n = 3$

Então:

$a_1 \rightarrow$ hoje

$a_2 \rightarrow$ 1 ano atrás

$a_3 \rightarrow$ 2 anos atrás

Resposta: alternativa **d**.

9. (Unemat-MT) Lança-se uma bola, verticalmente de cima para baixo, da altura de 4 metros. Após cada choque com o solo, ela recupera apenas $\dfrac{1}{2}$ da altura anterior.

A soma de todos os deslocamentos (medidos verticalmente) efetuados pela bola até o momento de repouso é:

a) 12 m. b) 6 m. c) 8 m. d) 4 m. e) 16 m.

- Descidas: 4, 2, 1, ...

$S_1 = \dfrac{4}{1 - \dfrac{1}{2}} = 8$

- Subidas: 2, 1, ...

$S_2 = \dfrac{2}{1 - \dfrac{1}{2}} = 4$

Portanto, a soma dos deslocamentos é igual a:

$8 + 4 = 12$ m

Resposta: alternativa **a**.

10. (Uneb-BA) Com o objetivo de arrecadar fundos para uma instituição beneficente, foi organizada uma exposição de obras de arte por um determinado período, cobrando-se de cada visitante um certo valor de entrada. No primeiro dia, foram arrecadados R$ 1 900,00 e, até o sexto dia de exposição, os valores diários arrecadados cresceram segundo uma PA de razão $r = 100$. A partir do sexto dia, esses valores decresceram segundo uma PG de razão $q = \frac{1}{2}$. Sabendo-se que o valor total arrecadado excedeu a R$ 15 000,00, pode-se afirmar que a exposição durou, pelo menos:

01) 10 dias. 02) 11 dias. 03) 12 dias. 04) 14 dias. 05) 15 dias.

• PA

$a_6 = a_1 + 5r \Rightarrow a_6 = 1\,900 + 500 = 2\,400$

Então:

$S_6 = \frac{(1\,900 + 2\,400) \cdot 6}{2} \Rightarrow S_6 = 12\,900$

• PG

$a_1 = 1\,200$ (7º dia)

$a_2 = 600$

⋮

Então:

$15\,000 - 12\,900 = 2\,100$

$2\,100 - 1\,200 = 900$

$900 - 600 = 300$

$300 - 300 = 0$

Logo, no 5º dia, a arrecadação total foi de 15 000.

Portanto, no 10º dia, excedeu a 15 000.

Resposta: alternativa **01**.

---

11. (Uesc-BA) Desde Pitágoras, que estudou a geração dos sons, sabe-se que duas cordas vibrantes cujos comprimentos estão na proporção de 1 para 2 produzem o mesmo tom. Uma corda de 61,41 m deve ser cortada em 11 pedaços, de modo que cada novo pedaço obtido tem o dobro do comprimento do pedaço anterior. O comprimento do maior pedaço será igual a:

01) 30,72 m. 02) 29,25 m. 03) 28,72 m. 04) 23,42 m. 05) 21,41 m.

Temos:

$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 61{,}41 = \frac{a_1 \cdot (2^{11} - 1)}{2 - 1} \Rightarrow 61{,}41 = 2\,048a_1 - a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{61{,}41}{2\,047} = 0{,}03$ m

Logo:

$a_{11} = 0{,}03 \cdot 2^{10} \Rightarrow a_{11} = 0{,}03 \cdot 1\,024 \Rightarrow a_{11} = 30{,}72$ m

Resposta: alternativa **01**.

12. (FGV-SP) Um veículo vai da cidade *A* até a cidade *B*. A cada hora de viagem, o motorista reduz a velocidade pela metade instantaneamente. Qual deve ser a distância entre as duas cidades, sabendo que o veículo iniciou a viagem com velocidade de 128 km/h e demorou 5 horas e 30 minutos para chegar?

a) 248 km
b) 246 km
c) 256 km
d) 250 km
e) 252 km

Temos:
1ª hora: 128 km
2ª hora: 64 km
Logo:

$$S_n = \frac{128 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow S_n = 256 \cdot \left(1 - \frac{1}{32}\right) \Rightarrow S_n = 248 \text{ km em 5 horas}$$

Assim, na 6ª hora, temos:

$$a_6 = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 4 \text{ km/h}$$

Portanto, ele percorre 2 km em $\frac{1}{2}$ hora.

Soma: $248 + 2 = 250$ km
Resposta: alternativa **d**.

13. (Ufop-MG) Uma folha de papel tem 0,3 milímetro de espessura. Deseja-se formar uma pilha constituída de folhas desse tipo do seguinte modo: coloca-se um folha sobre o piso horizontal; depois duas folhas sobre a primeira; depois quatro sobre as anteriores; depois oito; depois dezesseis; e assim por diante, sempre colocando-se sobre a pilha o dobro do número de folhas que tinha sido colocado na vez anterior. Se esse procedimento se repetisse por trinta vezes, a altura da pilha seria da ordem:

a) da altura de uma mesa de jantar.
b) da altura de uma casa.
c) da altura de um prédio.
d) de centenas de quilômetros.

Temos uma PG na forma (2, 4, 8, 16, ...).

$$S_{30} = \frac{2(2^{30} - 1)}{2 - 1} \Rightarrow S_{30} = \frac{2 \cdot 2^{30} - 2}{1} \Rightarrow S_{30} = 2^{31} - 2 \Rightarrow S_{30} \simeq 2^{31} \text{ folhas} \Rightarrow S_{30} \simeq 2 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \text{ folhas} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{30} \simeq 2 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}3 \text{ mm} \Rightarrow S_{30} \simeq 600 \text{ km}$$

Resposta: alternativa **d**.

14. (UFSM-RS) Uma fábrica vendia 12 camisetas por mês para certa rede de academias desde janeiro de um determinado ano. Devido ao verão, essa venda foi triplicada a cada mês, de setembro a dezembro. O total de camisetas vendidas nesse quadrimestre e a média de vendas, por mês, durante o ano, foram, respectivamente:

a) 1 536 e 128. b) 1 440 e 128. c) 1 440 e 84. d) 480 e 84. e) 480 e 48.

- Janeiro a agosto: 12 camisetas por mês $\to 12 \cdot 8 = 96$
- Setembro a dezembro:

$$\begin{cases} a_1 = 36 \\ n = 4 \\ q = 3 \end{cases}$$

$$S_4 = \frac{36 \cdot (1 - 3^4)}{1 - 3} \Rightarrow S_4 = 1\,440$$

Logo, o total vendido no ano foi de:

$1\,440 + 96 = 1\,536$

Portanto, a média de vendas foi de:

$\frac{1536}{12} = 128$ camisetas por mês

Resposta: alternativa **b**.

15. (UFPE) João marcou um encontro com Maria às 20h. Como Maria não chegou às 20h, João decidiu esperar por um intervalo t_1 de trinta minutos; em seguida, por um período adicional de $t_2 = \frac{t_1}{3}$ minutos, depois por um período de $t_3 = \frac{t_2}{3}$ minutos, e assim por diante, com cada período adicional igual a um terço do período anterior. Se Maria não foi ao encontro, quanto tempo João esperou? (Indique o valor mais próximo.)

a) 35 minutos
b) 40 minutos
c) 45 minutos
d) 50 minutos
e) 55 minutos

Temos uma PG na forma (30 min, 10 min, ...).

Assim:

$$S_n = \frac{30}{1 - \frac{1}{3}} \Rightarrow S_n = 30 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow S_n = 45$$

Resposta: alternativa **c**.

16. (Udesc) Em um processo de desintegração atômica em cadeia, a primeira desintegração é de 3 átomos em um segundo. A cada segundo que passa a desintegração é sempre o quádruplo da anterior; logo, o tempo em segundos que leva para desintegrar 12 288 átomos é:

a) 9 segundos.
b) 6 segundos.
c) 8 segundos.
d) 12 segundos.
e) 7 segundos.

Temos uma PG na forma (3, 12, 48, ...).

Assim:

$12\,288 = 3 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow 4\,096 = 4^{n-1} \Rightarrow 4^6 = 4^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 7$

Resposta: alternativa **e**.

17. (Uesc-BA) Um colégio promoveu uma Olimpíada Interna de Matemática cuja prova consistiu de dez questões, numeradas de um a dez, que poderiam ser resolvidas em qualquer ordem e que foram pontuadas de acordo com as seguintes regras:

- a cada questão não resolvida, resolvida de forma parcial ou totalmente incorreta foi atribuído valor 0;
- à resolução correta da questão um foi atribuído o valor 1;
- à resolução correta da questão dois foi atribuído o valor 2;
- à resolução correta da questão três foi atribuído o valor 4;
- à resolução correta da questão quatro foi atribuído o valor 8, e assim sucessivamente, até a questão dez.

Nessas condições, pode-se afirmar que um participante da Olimpíada que obteve um total de 213 pontos resolveu corretamente:

a) seis questões, das quais apenas uma é de numeração ímpar.

b) seis questões, das quais apenas uma é de numeração par.

c) cinco questões, das quais apenas uma é de numeração ímpar.

d) cinco questões, das quais apenas uma é de numeração par.

e) três questões de numeração par e três questões de numeração ímpar.

O valor de cada questão equivale à PG (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...).
Se o participante fez 213 pontos, ele acertou as questões:

- de 128 pontos: $213 - 128 = 85$
- de 64 pontos: $85 - 64 = 21$
- de 16 pontos: $21 - 16 = 5$
- de 4 pontos: $5 - 4 = 1$
- de 1 ponto

Portanto, ele acertou a 1ª, 3ª, 5ª, 7ª e 8ª questões.
Resposta: alternativa **d**.

18. (Udesc) Um biólogo, ao estudar uma cultura bacteriológica, constatou que cada uma delas, ao atingir determinado tamanho, se dividia em nove bactérias. Supondo que em uma cultura há $2 \cdot 3^4$ dessas bactérias e que cada uma delas se divide em nove, dando origem à primeira geração, e que cada bactéria dessa geração se divide em nove, dando origem à segunda geração, e assim por diante, ter-se-á $2 \cdot 3^{22}$ bactérias na:

a) 9ª geração.

b) 18ª geração.

c) 6ª geração.

d) 17ª geração.

e) 10ª geração.

Temos uma PG na forma $(2 \cdot 3^4, \underbrace{18 \cdot 3^4}_{1^a \text{ geração}}, ...)$.

$2 \cdot 3^{22} = 2 \cdot 3^4 \cdot 9^{n-1} \Rightarrow 9^{n-1} = 3^{18} \Rightarrow 3^{2n-2} = 3^{18} \Rightarrow 2n - 2 = 18 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 10$

Logo:

$n = 2 \rightarrow$ 1ª geração
$n = 3 \rightarrow$ 2ª geração
⋮
$n = 10 \rightarrow$ 9ª geração

Resposta: alternativa **a**.

19. (IFMG) Na manhã de segunda-feira uma empresa começou sua produção de iogurte do seguinte modo: adicionou a um litro de iogurte, já pronto, três litros de leite. Após 24 horas, havia 4 litros de iogurte, que foram novamente misturados a uma parte proporcional de leite para dar sequência à produção. Se a empresa continuou esse processo, então, na manhã de sexta-feira, o total de litros de iogurte obtidos foi de:

a) 4^5.
b) 4^6.
c) 2^8.
d) 2^9.

A produção de iogurte segue a PG $(1, 2^2, 2^4, 2^6, 2^8)$; portanto, foram obtidos 2^8 litros de iogurte.
Resposta: alternativa **c**.

20. (Fuvest-SP) A espessura de uma folha de estanho é 0,01 cm. Forma-se uma pilha de folhas colocando-se duas na primeira vez e em cada vez sucessiva tantas quantas já foram colocadas anteriormente. Repetindo-se a operação 40 vezes, a altura da pilha final seria mais próxima:

a) da altura de um poste de iluminação.
b) da distância do Rio a São Paulo.
c) da altura de um prédio de 40 andares.
d) de mais de duas vezes a circunferência da Terra.
e) nenhuma das anteriores.

Temos uma PG na forma (1, 2, 4, 8, ...).

Assim:

$S_{41} = \dfrac{1(2^{41} - 1)}{2 - 1} \Rightarrow S_{41} = \dfrac{2^{41} - 1}{1} \Rightarrow S_{41} = 2^{41} - 1 \Rightarrow S_{41} \simeq 2^{40} \Rightarrow S_{41} \simeq (2^{10})^4 \Rightarrow S_{41} \simeq (10^3)^4 \Rightarrow S_{41} \simeq 10^{12}$ folhas $\Rightarrow S_{41} \simeq 10^{12} \cdot 10^{-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{41} = 10^{10}$ cm $\Rightarrow S_{41} = 10^8$ m $\Rightarrow S_{41} = 10^5$ km $\Rightarrow S_{41} = 10\,000$ km

A circunferência da Terra é de cerca de 40 000 km; portanto, S_{41} é maior do que 2 vezes a circunferência da Terra.

Resposta: alternativa **d**.

---

21. (UEL-PR) Você tem um dinheiro a receber em pagamentos mensais. Se você recebesse R$ 100,00 no primeiro pagamento e, a partir do segundo pagamento, você recebesse R$ 150,00 a mais do que no pagamento anterior, receberia todo o dinheiro em 9 pagamentos. Porém, se o valor do primeiro pagamento fosse mantido, mas, a partir do segundo pagamento, você recebesse o dobro do que recebeu no mês anterior, em quantos pagamentos receberia todo o dinheiro?

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

• Cálculo do total da PA:

$$\begin{cases} a_1 = 100 \\ r = 150 \\ n = 9 \\ S_9 = ? \end{cases}$$

$a_9 = 100 + 8 \cdot 150 = 1\,300$

$S_9 = \dfrac{(a_1 + a_9) \cdot n}{2} \Rightarrow S_9 = \dfrac{(100 + 1\,300) \cdot 9}{2} \Rightarrow S_9 = \dfrac{1\,400 \cdot 9}{2} \Rightarrow S_9 = 700 \cdot 9 \Rightarrow S_9 = 6\,300$

• Cálculo do total da PG:

$$\begin{cases} a_1 = 100 \\ r = 2 \\ n = ? \\ S_n = 6\,300 \end{cases}$$

$S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 6\,300 = \dfrac{100 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} \Rightarrow 100(2^n - 1) = 6\,300 \Rightarrow 100 \cdot 2^n - 100 = 6\,300 \Rightarrow 100 \cdot 2^n = 6\,400 \Rightarrow 2^n = 64 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^n = 2^6 \Rightarrow n = 6$

Resposta: alternativa **b**.

22. (UFPE) Uma epidemia de ratos propaga-se da seguinte forma: cada rato infectado contamina 3 (três) outros ratos no período de uma semana. Quantas semanas, após a contaminação do primeiro rato, serão necessárias para que uma população de $2^{20} = (1\,048\,576)$ ratos esteja contaminada?

- Semana 1 $\rightarrow$ (1, 4, 16, ...)
- Semana 2:
  $20^{20} = 1 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow 20^{20} = 2^{2n-2} \Rightarrow 20 = 2n - 2 \Rightarrow 2n = 22 \Rightarrow$
  $\Rightarrow n = 11$

Entre 11 termos há o intervalo de 10 semanas.

Resposta: 10 semanas.

23. (Ufes) Admita que em uma população de indivíduos portadores do HIV e também do bacilo de Koch, mas que ainda não desenvolveram a tuberculose, pelo menos 10% dos indivíduos desenvolvem tuberculose ao final de 1 ano. Se essa população tinha inicialmente 10 000 indivíduos e, ao final de *n* anos, exatamente 3 439 indivíduos desenvolveram tuberculose, então o valor inteiro máximo possível de *n* é:

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

- $t = 1$: 10 000 $\rightarrow$ 1 000 infectados
- $t = 2$: 9 000 $\rightarrow$ 900 infectados
- $t = 3$: 8 100 $\rightarrow$ 810 infectados
- $t = 4$: 7 290 $\rightarrow$ 729 infectados

Assim:

$1\,000 + 900 + 810 + 729 = 3\,439$

Logo, $n = 4$ anos.

Resposta: alternativa **d**.

24. (UFGD-MS) Pafúncio estava cavando um poço, num terreno em que a dificuldade aumenta juntamente com a profundidade, de modo que ele conseguia, a cada dia, cavar apenas um terço do que havia cavado no dia anterior. No último dia cavou apenas um centímetro. O menor número de dias para cavar, pelo menos 10 metros, é:

a) 9. b) 7. c) 5. d) 6. e) 8.

Temos:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \text{ cm} \\ q = 3 \end{cases}$$

$S = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow -2\,000 = \dfrac{1 \cdot (1-3^n)}{1-3} \Rightarrow 3^n = 2\,001$ (mais próximo e maior é 2 187)

Logo:

$3^n = 2\,187 \Rightarrow n = 7$

Resposta: alternativa **b**.

25. (Udesc) Se os números reais, *x*, *y* e *z* formarem, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão 10^x pode-se afirmar que log (*xyz*) é igual a:

a) $\log(3x) + 3\log(x)$.
b) $3x + \log(3)$.
c) $3x + 3\log(x)$.
d) $x^3 + \log(x^3)$.
e) $x^3 + \log(3x^3)$.

Considere a PG $\left(\dfrac{y}{10^x}, y, y \cdot 10^x\right)$ sendo $y = x \cdot 10^x$. Então:

$\log\left(\dfrac{x}{q} \cdot y \cdot yq\right) = \log y^3 = 3\log y = 3\log x \cdot 10^x =$

$= 3(\log x + \log 10^x) = 3(\log x + x\log 10) =$

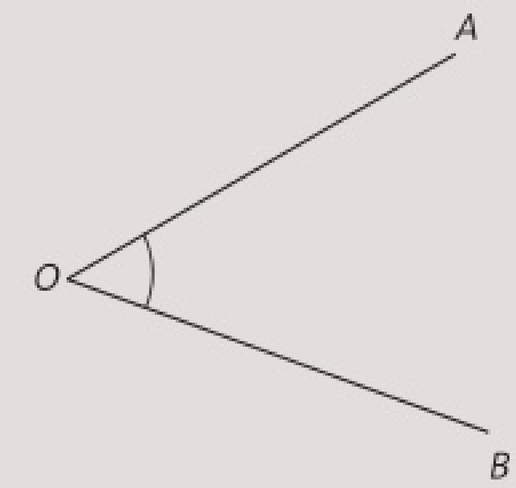
$= 3(\log x + x) = 3\log x + 3x$

Resposta: alternativa **c**.

ÂNGULOS

Definição

Figura plana formada por duas semirretas de mesma origem.



Classificação em relação às medidas

Ângulo raso
Medida: 180°.

Ângulo agudo
Medida: entre 0° e 90°.

Ângulo reto
Medida: 90°.

Ângulo obtuso
Medida: entre 90° e 180°.

Classificação em relação a outros ângulos

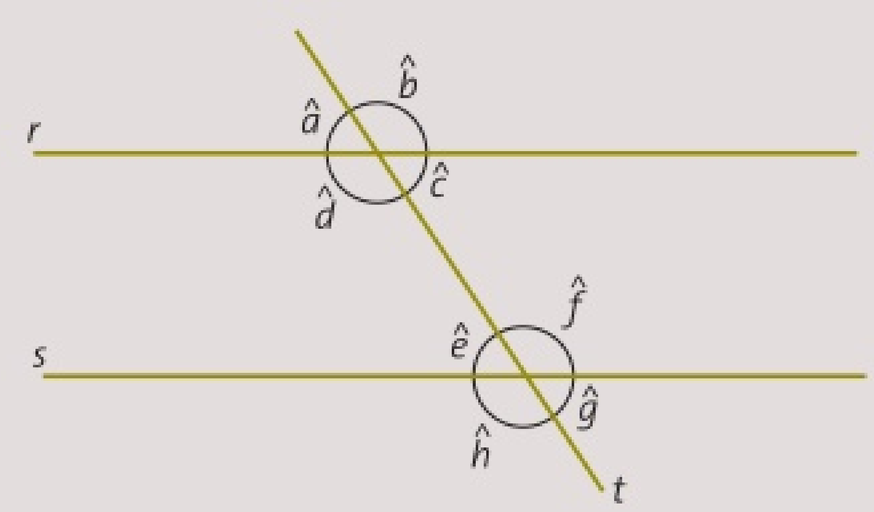
Ângulos congruentes
- Par de ângulos que têm mesma medida.
- Símbolo: $\cong$

Ângulos complementares
Par de ângulos cuja soma das medidas é 90°.

Ângulos suplementares
Par de ângulos cuja soma das medidas é 180°.

Ângulos adjacentes
Ângulos que possuem um lado comum e as regiões determinadas por eles não têm mais pontos comuns.

Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal



r e s: retas paralelas

t: reta transversal

$\hat{a}$ e $\hat{c}$: ângulos opostos pelo vértice

$\hat{a}$ e $\hat{e}$: ângulos correspondentes

$\hat{a}$ e $\hat{g}$: ângulos alternos externos

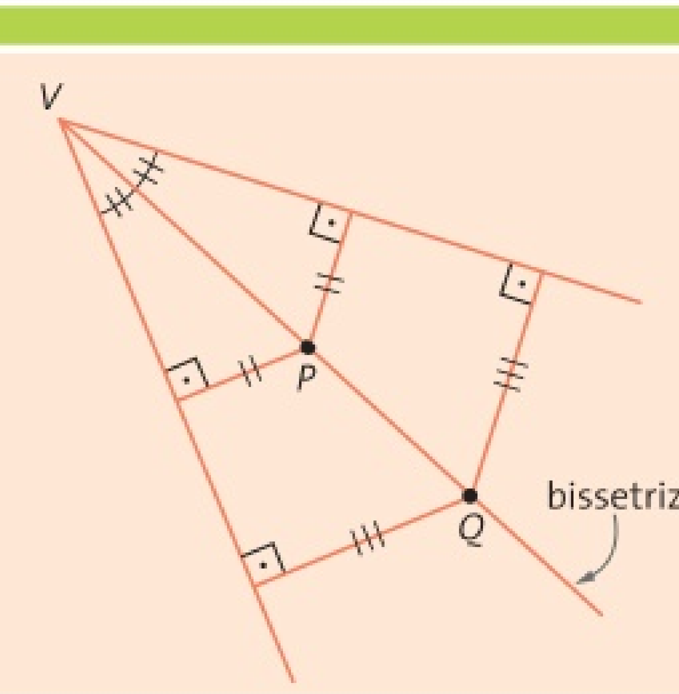
$\hat{c}$ e $\hat{e}$: ângulos alternos internos

$\hat{c}$ e $\hat{f}$: ângulos colaterais internos

$\hat{a}$ e $\hat{h}$: ângulos colaterais externos

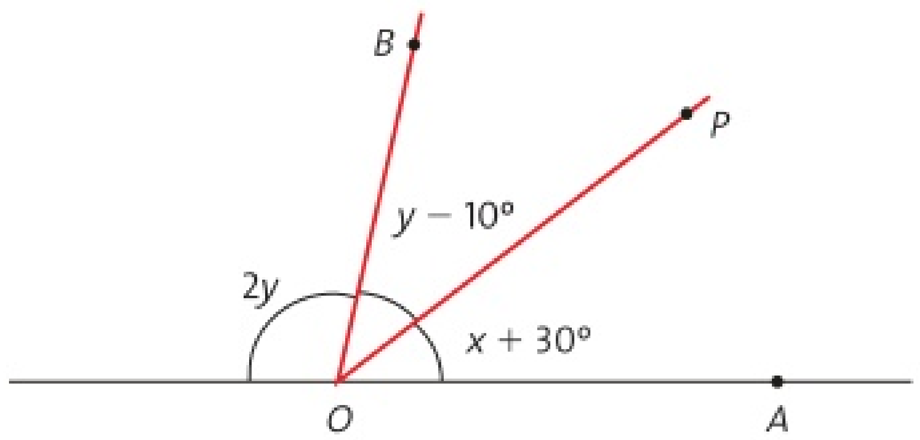
Bissetriz

- Lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes dos lados do ângulo considerado.
- Divide o ângulo em dois ângulos congruentes.



Exercícios

1. (IFSC) Na figura abaixo, $\overline{OP}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$. Determine o valor de x e y.



a) $x = 13$ e $y = 49$
b) $x = 15$ e $y = 35$
c) $x = 12$ e $y = 48$
d) $x = 17$ e $y = 42$
e) $x = 10$ e $y = 50$

$y - 10 = x + 30 \Rightarrow y = x + 40$

$2y + y - 10 + x + 30 = 180 \Rightarrow 2(x + 40) + x + 40 - 10 + x + 30 = 180 \Rightarrow 80 + 2x + 2x + 60 = 180 \Rightarrow 4x = 40 \Rightarrow x = 10$

Logo, $y = 50$.

Resposta: alternativa **e**.

2. (IFCE) Dois ângulos são suplementares. Os $\frac{2}{3}$ do maior excedem os $\frac{3}{4}$ do menor em 69°. Determine os ângulos.

$y + x = 180 \Rightarrow y = 180 - x$

$\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y + 69 \Rightarrow \frac{8x}{12} = \frac{9y + 828}{12} \Rightarrow 8x = 9y + 828 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x = 9(180 - x) + 828 \Rightarrow 8x = 1\,620 - 9x + 828 \Rightarrow$

$\Rightarrow 17x = 2\,448 \Rightarrow x = 144$

Logo, $y = 36$.

Resposta: 36° e 144°.

3. (PUC-PR) Dois ângulos complementares A e B, sendo $A < B$, têm medidas na razão de 13 para 17. Consequentemente, a razão da medida do suplemento do ângulo A para o suplemento do ângulo B vale:

a) $\frac{43}{47}$.
b) $\frac{17}{13}$.
c) $\frac{13}{17}$.
d) $\frac{119}{48}$.
e) $\frac{47}{43}$.

$\frac{A}{B} = \frac{13}{17} \Rightarrow \frac{90 - B}{B} = \frac{13}{17} \Rightarrow 13B = 1\,530 - 17B \Rightarrow$

$\Rightarrow 30B = 1\,530 \Rightarrow B = 51$

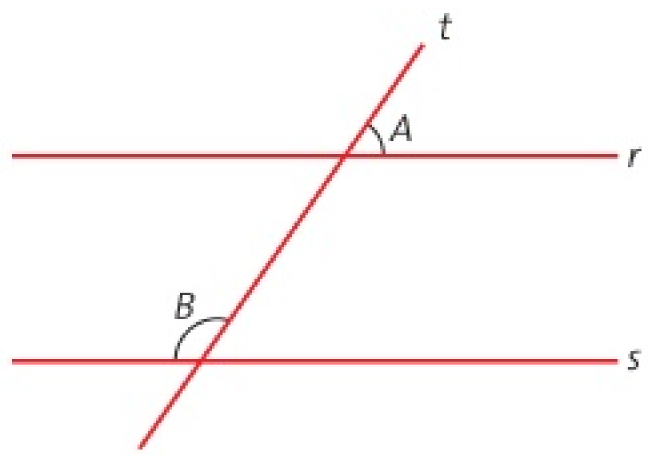
Logo, $A = 39$.

Então, a razão procurada é:

$\frac{180 - 39}{180 - 51} = \frac{141}{129} = \frac{47}{43}$

Resposta: alternativa **e**.

4. (Cesgranrio-RJ) As retas *r* e *s* da figura são paralelas cortadas pela transversal *t*.



Se o ângulo B é o triplo de A, então $B - A$ vale:

a) 90°. b) 85°. c) 80°. d) 75°. e) 60°.

$B = 3A$

$B + A = 180 \Rightarrow 4A = 180 \Rightarrow A = 45$

Então, $B = 135$.

Logo, $B - A = 90$.

Resposta: alternativa **a**.

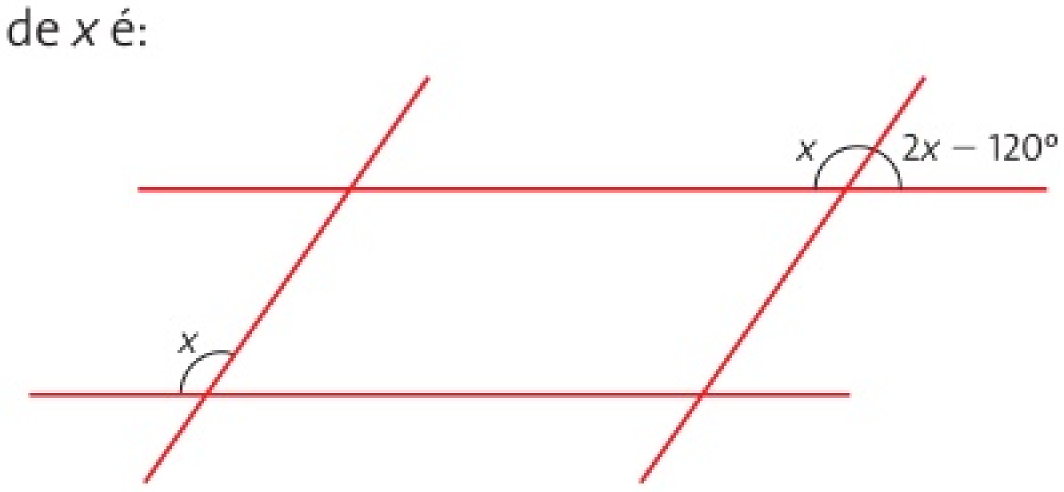
5. (Fatec-SP) O dobro da medida do complemento de um ângulo aumentado de 40° é igual à medida do seu complemento. Qual a medida do ângulo?

$2(90 - A) + 40 = 90 - A \Rightarrow 180 - 2A + 40 = 90 - A \Rightarrow$

$\Rightarrow -A = -130 \Rightarrow A = 130$.

Resposta: 130°.

6. (UFPB) Na figura abaixo, sendo $r \mathbin{/\!/} s$ e $u \mathbin{/\!/} v$, o valor de x é:



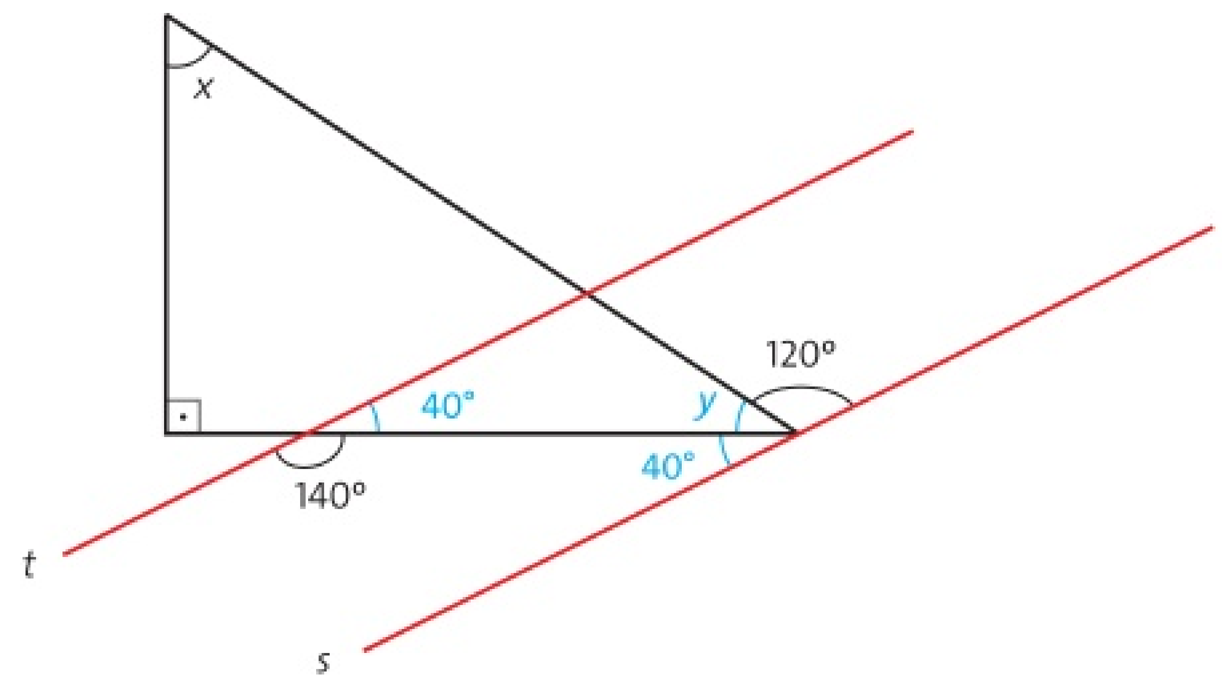
a) 80°. c) 100°. e) 152°.

b) 95°. d) 135°.

$x + 2x - 120 = 180 \Rightarrow 3x = 300 \Rightarrow x = 100$

Resposta: alternativa **c**.

7. (Fuvest-SP) As retas t e s são paralelas.



A medida do ângulo x, em graus, é:

a) 30. b) 40. c) 50. d) 60. e) 70.

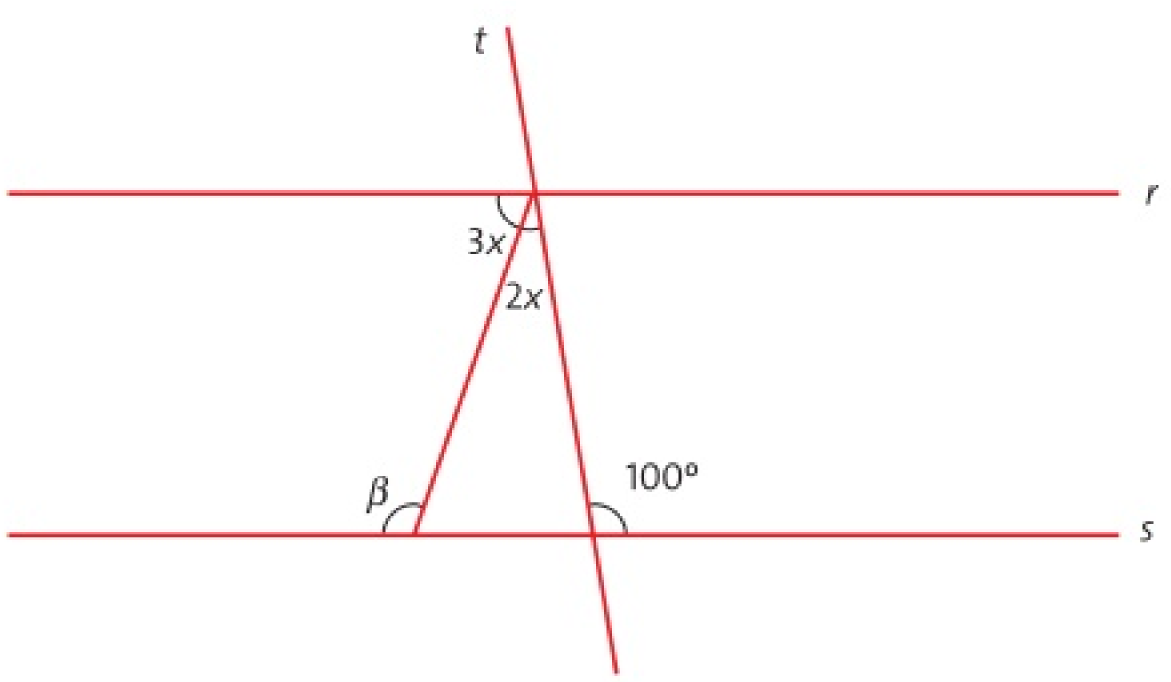
$y + 120 + 40 = 180 \Rightarrow y = 20$

Mas:

$x + y + 90 = 180 \Rightarrow x = 70$

Resposta: alternativa **e**.

8. (UEPB) As retas paralelas r e s são cortadas pela reta t como mostra a figura abaixo.



A medida do ângulo β é:

a) 120°. b) 100°. c) 140°. d) 130°. e) 110°.

$3x + 2x = 100 \Rightarrow 5x = 100 \Rightarrow x = 20$

$2 \cdot 20 + 80 + 180 - \beta = 180 \Rightarrow \beta = 120$

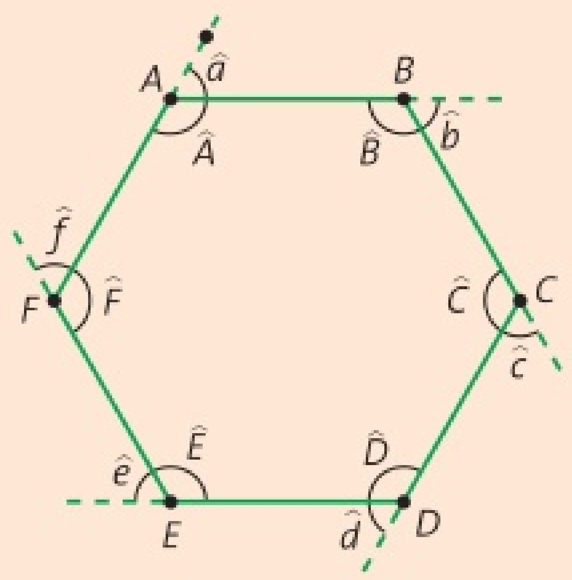
Resposta: alternativa **a**.

POLÍGONOS

Definição

Linha fechada formada apenas por segmentos de reta que não se cruzam no mesmo plano.

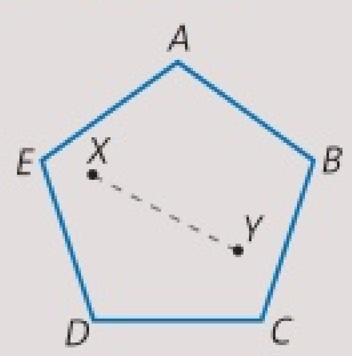
Elementos



- Vértices: A, B, C, D, E e F.
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$.
- Diagonais: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$ e $\overline{DF}$.
- Ângulos
  internos: formados por dois lados consecutivos contidos na região interna do polígono.
  externos: formados por um lado e pelo prolongamento do lado consecutivo a ele.

Classificação

Convexo



$\overline{XY}$ está inteiramente contido na região limitada pelo polígono $ABCDE$.

- Diagonais: $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$
- Soma dos ângulos internos: $S_i = (n-2) \cdot 180°$
- Soma dos ângulos externos: $S_e = 360°$

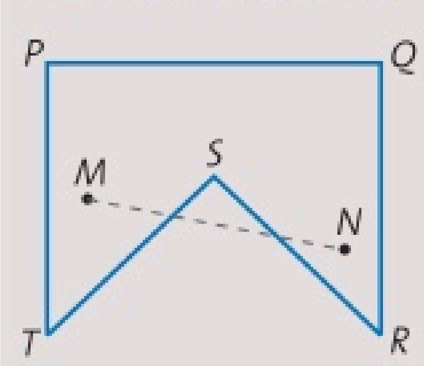
Observação: Em qualquer polígono convexo, o número de vértices, lados, ângulos internos e ângulos externos é o mesmo.

Polígono convexo regular

Todos os lados e ângulos internos são congruentes.

- Ângulo interno: $a_i = \dfrac{S_i}{n} = \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$
- Ângulo externo: $a_e = \dfrac{S_e}{n} = \dfrac{360°}{n}$
- $a_e + a_i = 180°$

Não convexo



$\overline{MN}$ **não** está inteiramente contido na região limitada pelo polígono $PQRST$.

Triângulos

Definição

Polígono que possui:

- três lados;
- três vértices;
- três ângulos internos (cuja soma das medidas é 180°).

Pontos notáveis

Baricentro

Encontro das medianas e centro de gravidade do triângulo.

Incentro

Encontro das bissetrizes internas e centro da circunferência inscrita no triângulo.

Ortocentro

Ponto de encontro das retas que contêm as alturas.

Circuncentro

Ponto de encontro das mediatrizes dos lados e centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Classificação em relação aos ângulos

- Acutângulo: três ângulos agudos.
- Retângulo: dois ângulos agudos e um reto.
- Obtusângulo: dois ângulos agudos e um obtuso.

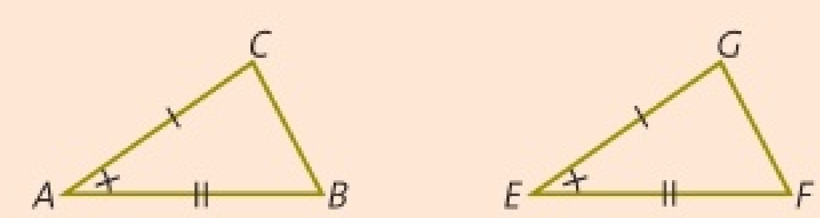
Classificação em relação aos lados

- Equilátero: três lados de mesma medida.
- Isósceles: dois lados de mesma medida.
- Escaleno: três lados de medidas diferentes entre si.

Congruência de triângulos

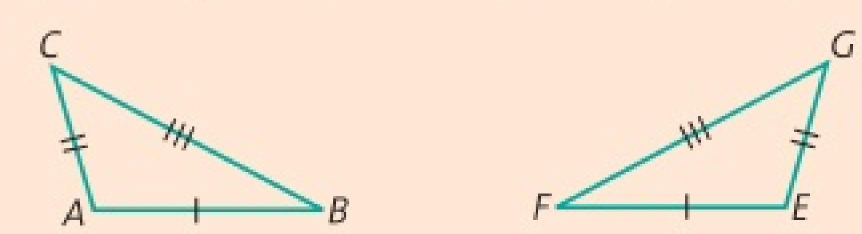
LAL (Lado, Ângulo, Lado)

Dois lados congruentes e o ângulo formado por eles congruente.



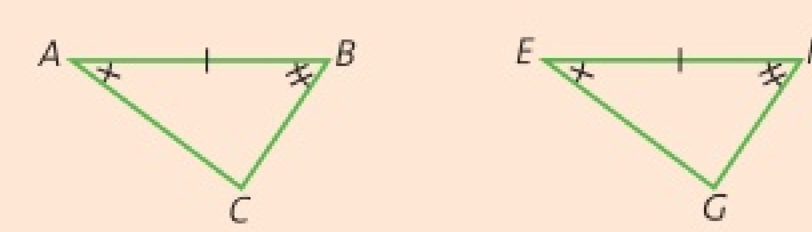
LLL (Lado, Lado, Lado)

Três lados congruentes.



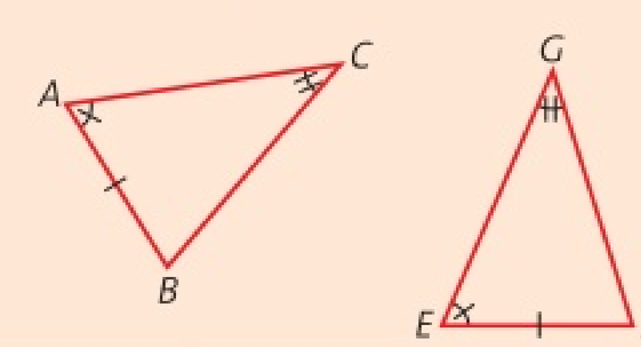
ALA (Ângulo, Lado, Ângulo)

Dois ângulos congruentes e o lado compreendido entre eles congruente.



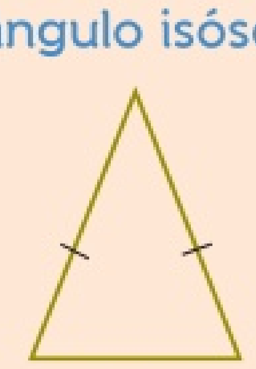
LAA_o (Lado, Ângulo, Ângulo oposto)

Um lado congruente, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado congruente.



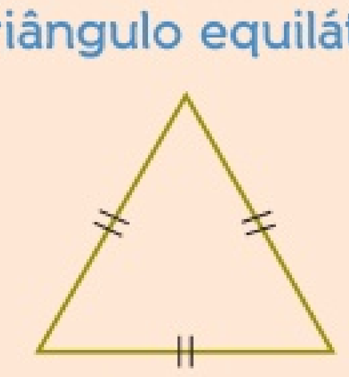
Propriedades

Triângulo isósceles



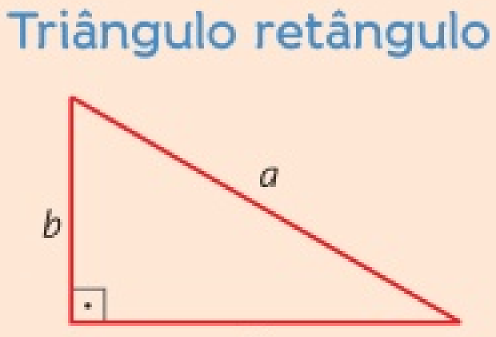
Os ângulos da base têm a mesma medida.

Triângulo equilátero



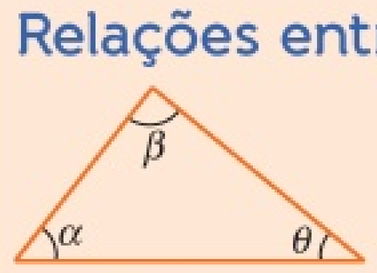
Os três ângulos internos têm a mesma medida (60°).

Triângulo retângulo

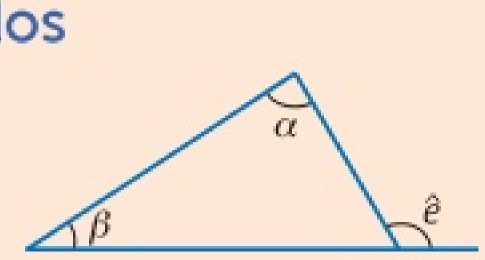


Teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$).

Relações entre os ângulos



$\alpha + \beta + \theta = 180°$



$\hat{e} = \alpha + \beta$

Quadriláteros

Definição

Polígono que possui:

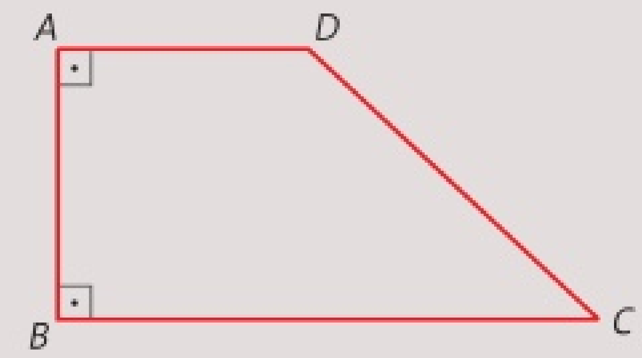
- quatro lados;
- quatro vértices;
- quatro ângulos internos (cuja soma das medidas é 360°);
- duas diagonais.

Trapézio

Quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos (base maior e base menor).

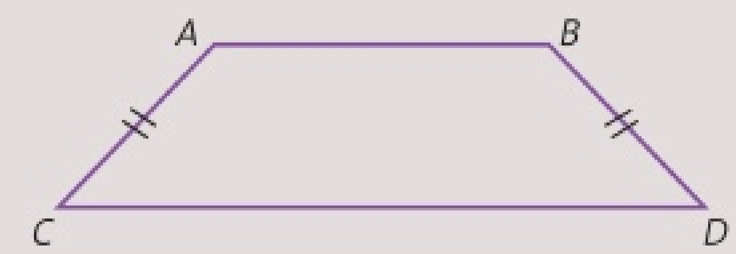
Trapézio retângulo

- Possui dois ângulos retos.
- Um de seus lados não paralelos é perpendicular às duas bases.



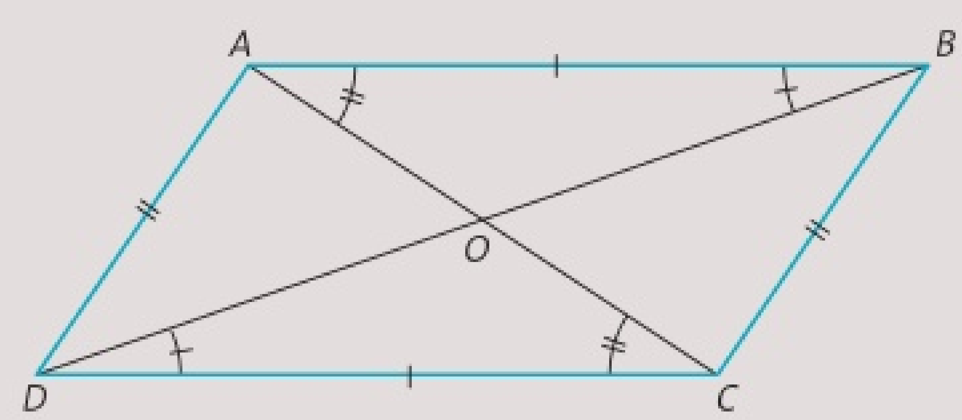
Trapézio isósceles

Possui os dois lados não paralelos congruentes.



Paralelogramo

Quadrilátero que possui dois pares de lados paralelos.

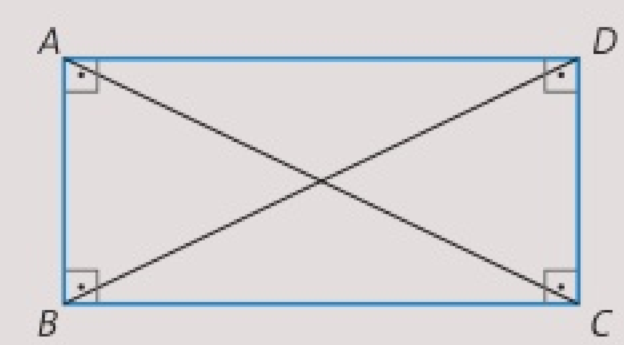


Propriedades

- Ângulos opostos são congruentes e ângulos não opostos são suplementares.
- Lados opostos são congruentes.
- As diagonais se intersectam em seus pontos médios.

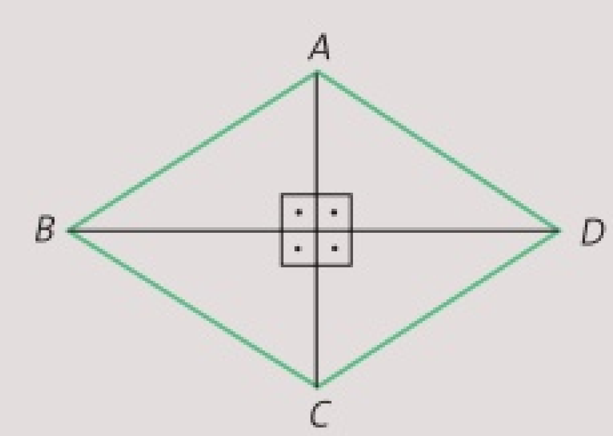
Retângulo

- Possui quatro ângulos congruentes (90°).
- As diagonais são congruentes e bissetrizes dos ângulos internos.



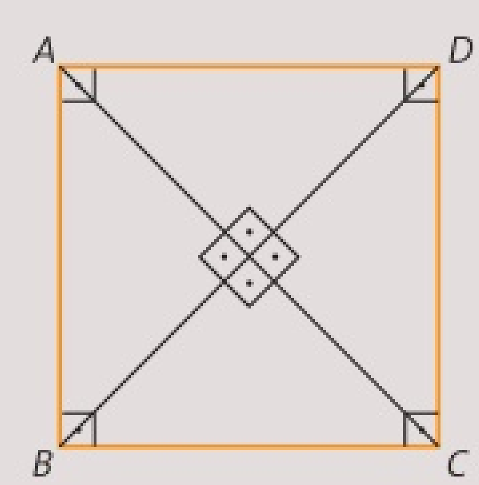
Losango

- Possui quatro lados congruentes.
- As diagonais são perpendiculares e bissetrizes dos ângulos internos.



Quadrado

Possui os quatro lados e os quatro ângulos congruentes.



Exercícios

1. (Vunesp-SP) O número de diagonais de um polígono convexo de x lados é dado por $N(x) = \frac{x^2 - 3x}{2}$. Se o polígono possui 9 diagonais, seu número de lados é:

a) 10. b) 9. c) 8. d) 7. e) 6.

$\frac{x^2 - 3x}{2} = 9 \Rightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \Rightarrow x = 6$ ou $x = -3$ (não convém)

Resposta: alternativa **e**.

2. (UPM-SP) Os ângulos externos de um polígono regular medem 20°. Então, o número de diagonais desse polígono é:

a) 90. b) 104. c) 119. d) 135. e) 152.

$A_e = \frac{360}{n} \Rightarrow 20 = \frac{360}{n} \Rightarrow n = 18$

Mas:

$d = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow d = \frac{18(18-3)}{2} \Rightarrow d = 135$

Resposta: alternativa **d**.

3. (Unifesp) A soma de $n - 1$ ângulos internos de um polígono convexo de n lados é 1 900°. O ângulo remanescente mede:

a) 120°. b) 105°. c) 95°. d) 80°. e) 60°.

O produto $(n - 2) \cdot 180°$ é sempre um múltiplo de 180°, pois n é inteiro. Assim, temos que o menor múltiplo de 180°, maior do que 1 900° é 1 980°. Logo:

$1\,980° = 1\,900° + \alpha \Rightarrow \alpha = 80°$

Resposta: alternativa **d**.

4. (UEPB) Sejam as afirmações:

( ) Os ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.
( ) As bissetrizes dos ângulos opostos de um paralelogramo são paralelas.
( ) O quadrado é, ao mesmo tempo, paralelogramo, retângulo e losango.

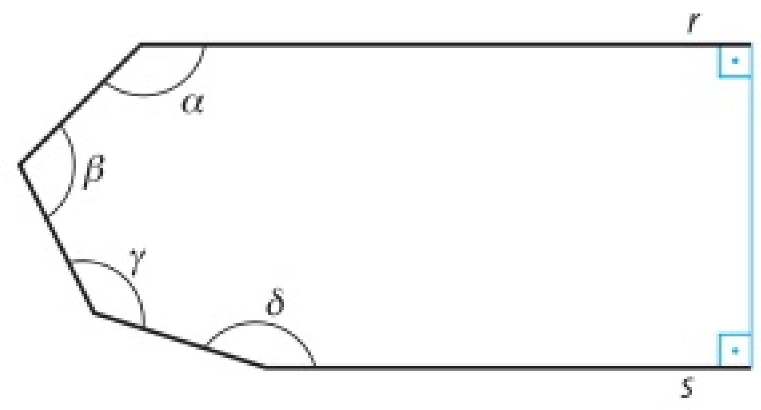
Associando-se verdadeiro (V) ou falso (F) às afirmativas acima, teremos:

a) V – V – V.
b) V – F – V.
c) F – F – F.
d) V – V – F.
e) F – V – V.

(V) Os ângulos consecutivos são suplementares.
(V) São paralelas as bissetrizes dos ângulos opostos.
(V) O quadrado é um quadrilátero que é paralelogramo, retângulo e losango.

Resposta: alternativa **a**.

5. (Ufes)



Na figura acima, as retas *r* e *s* são paralelas. A soma $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ das medidas dos ângulos indicados na figura é:

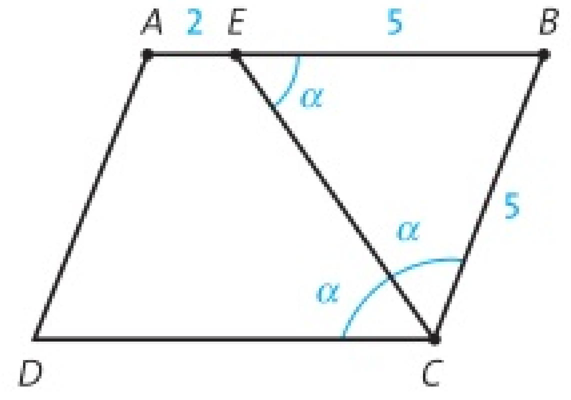
a) 180°. b) 270°. c) 360°. d) 480°. e) 540°.

$S_i = (n - 2) \cdot 180 \Rightarrow S_i = (6 - 2) \cdot 180 \Rightarrow S_i = 720°$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta + 90 + 90 = 720° \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 540°$

Resposta: alternativa **e**.

6. (Udesc) No paralelogramo *ABCD*, conforme mostra a figura abaixo, o segmento $\overline{CE}$ é a bissetriz do ângulo $D\hat{C}B$.



Sabendo que $AE = 2$ e $AD = 5$, então o valor do perímetro do paralelogramo *ABCD* é:

a) 26. b) 16. c) 20. d) 22. e) 24.

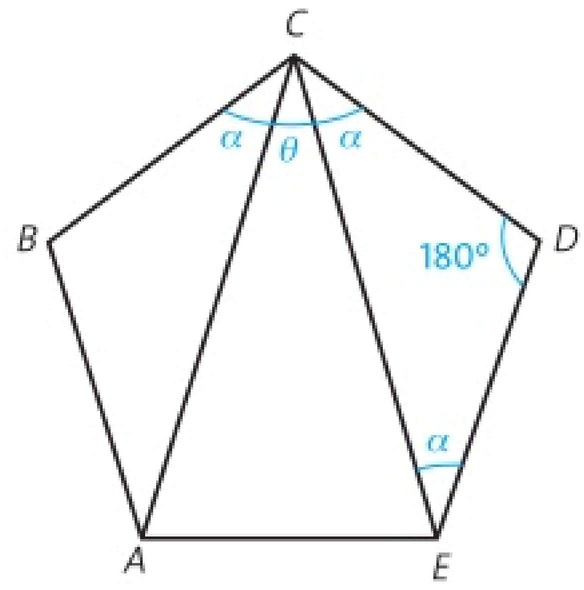
Da figura, temos que $B\hat{E}C = E\hat{C}D$ (alternos internos).

Portanto, o $\triangle EBC$ é isósceles. Logo, $EB = CB = 5$.

Assim, o perímetro é: $5 + 7 + 5 + 7 = 24$.

Resposta: alternativa **e**.

7. (PUC-RJ) Considere o pentágono regular *ABCDE*.



Quanto vale o ângulo $A\hat{C}E$?

a) 24°. b) 30°. c) 36°. d) 40°. e) 45°.

Ângulo interno do pentágono: $\frac{540°}{5} = 108°$

Logo:

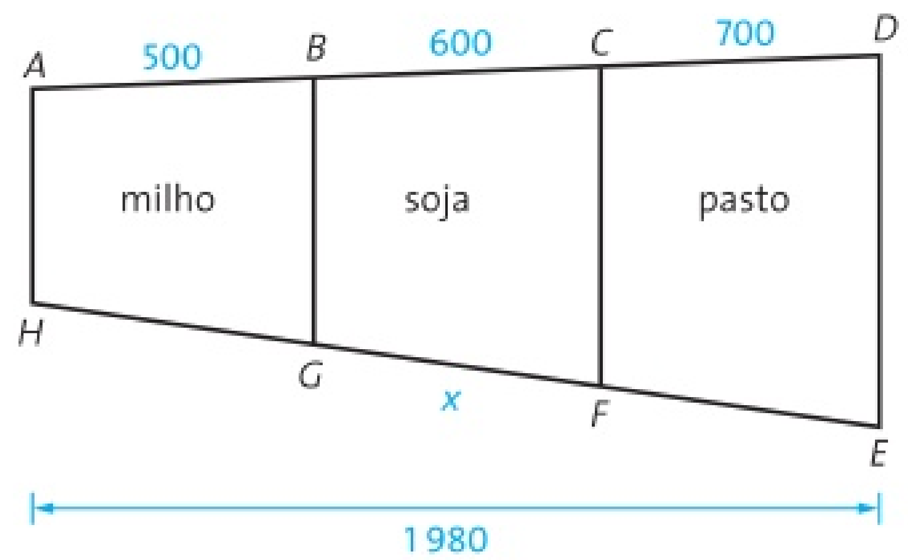
$2\alpha + 108 = 180 \Rightarrow 2\alpha = 72 \Rightarrow \alpha = 36°$

Mas:

$2\alpha + \theta = 108° \Rightarrow 72° + \theta = 108° \Rightarrow \theta = 36°$

Resposta: alternativa **c**.

8. (Etec-SP) Para melhorar a qualidade do solo, aumentando a produtividade do milho e da soja, em uma fazenda é feito o rodízio entre essas culturas e a área destinada ao pasto. Com essa finalidade, a área produtiva da fazenda foi dividida em três partes conforme a figura.



Considere que:

— os pontos A, B, C e D estão alinhados;

— os pontos H, G, F e E estão alinhados;

— os segmentos $\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ e $\overline{DE}$ são, dois a dois, paralelos entre si;

— $AB = 500$ m, $BC = 600$ m, $CD = 700$ m e $HE = 1\,980$ m.

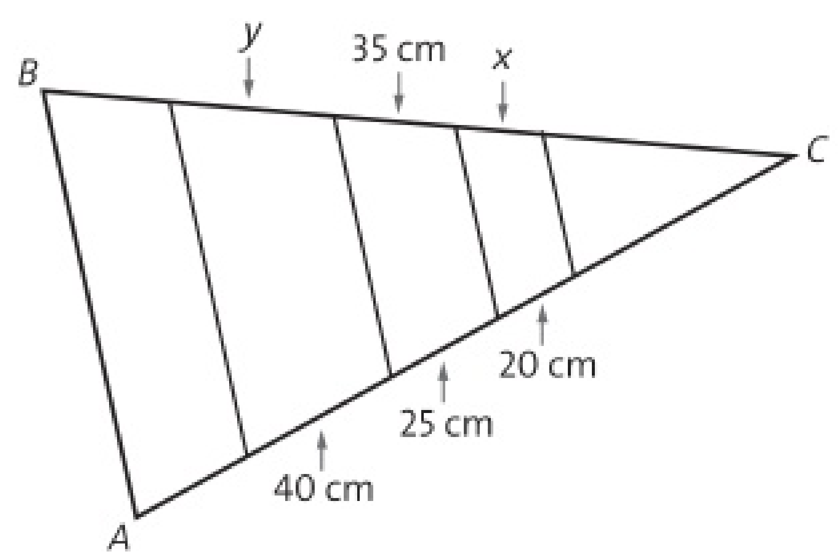
Nessas condições, a medida do segmento $\overline{GF}$ é, em metros:

a) 665. b) 660. c) 655. d) 650. e) 645.

$\frac{600}{x} = \frac{1800}{1980} \Rightarrow 3x = 1\,980 \Rightarrow x = 660$

Resposta: alternativa **b**.

9. (IFPR) O jardineiro do Sr. Artur fez um canteiro triangular composto por folhagens e flores onde as divisões são todas paralelas à base $\overline{AB}$ do triângulo ABC, conforme a figura.



Sendo assim, as medidas x e y dos canteiros de flores são, respectivamente:

a) 30 cm e 50 cm.

b) 28 cm e 56 cm.

c) 50 cm e 30 cm.

d) 56 cm e 28 cm.

e) 40 cm e 20 cm.

$\frac{x}{20} = \frac{35}{25} \Rightarrow 25x = 700 \Rightarrow x = 28$

$\frac{y}{35} = \frac{40}{25} \Rightarrow 25y = 1\,400 \Rightarrow y = 56$

Resposta: alternativa **b**.

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Polígonos semelhantes

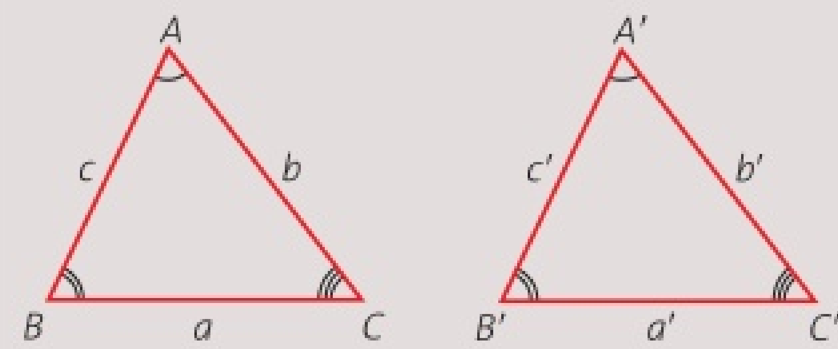
Possuem todos os lados correspondentes proporcionais e todos os ângulos correspondentes congruentes.

Definição

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem:

- os três ângulos ordenadamente congruentes;
- os lados homólogos proporcionais.

Relações



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A'} \\ \hat{B} \cong \hat{B'} \\ \hat{C} \cong \hat{C'} \end{cases}$$

Razão de semelhança

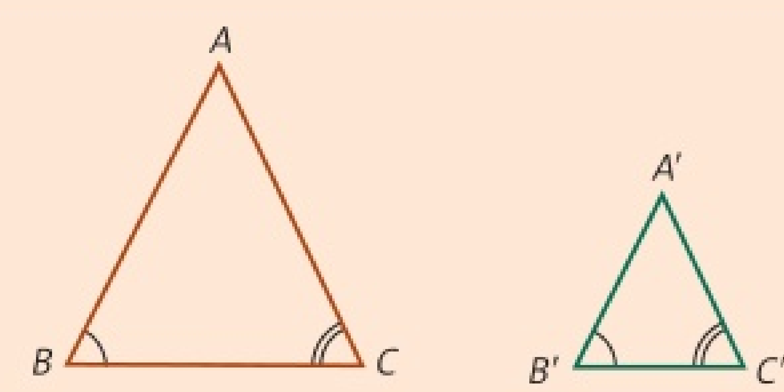
$$\frac{a}{c'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Casos

Critério AA (Ângulo, Ângulo)

Dois ângulos congruentes.

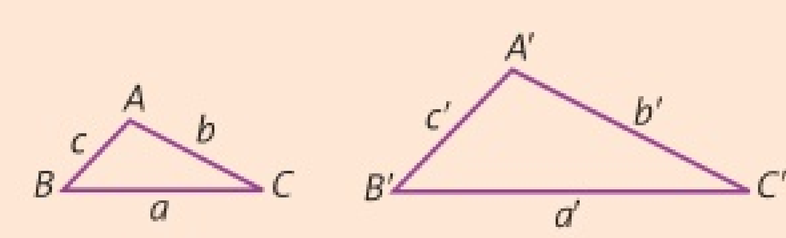
$$\left.\begin{matrix} \hat{B} \cong \hat{B'} \\ \hat{C} \cong \hat{C'} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



Critério LLL (Lado, Lado, Lado)

Três lados proporcionais.

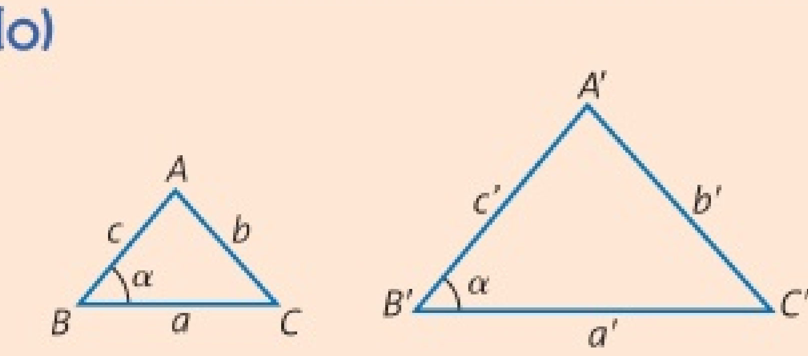
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



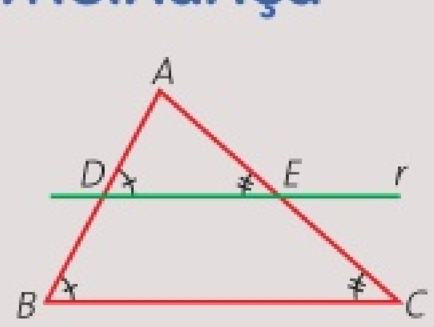
Critério LAL (Lado, Ângulo, Lado)

Dois lados proporcionais e o ângulo formado por eles congruente.

$$\left.\begin{matrix} \hat{B} \cong \hat{B'} \\ \dfrac{c}{a'} \cong \dfrac{a}{a'} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



Teorema fundamental da semelhança

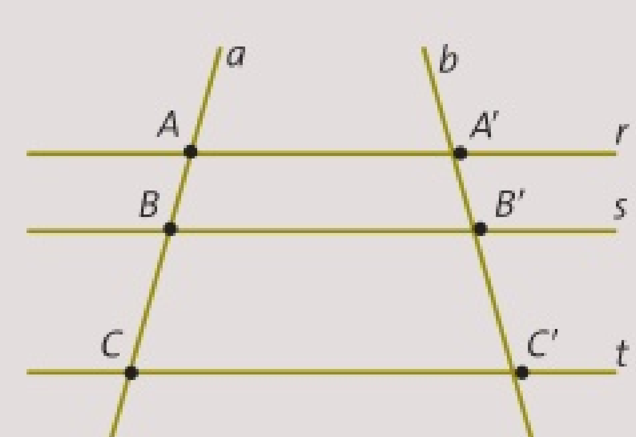


$r \mathbin{//} \overline{BC} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$

Teorema de Tales

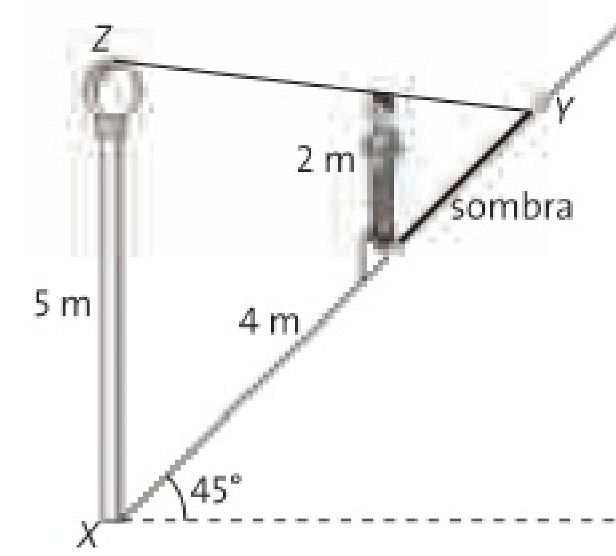
Um feixe de paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} \text{ ou } \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$



Exercícios

1. (Vunesp-SP) Uma estátua de 2 metros de altura e um poste de 5 metros de altura estão localizados numa ladeira de inclinação igual a 45°, como mostra a figura. A distância da base do poste à base da estátua é 4 metros, e o poste tem uma lâmpada acesa na extremidade superior.
Adotando $\sqrt{2} = 1{,}41$ e sabendo que tanto o poste quanto a estátua estão na vertical, calcule:
a) o comprimento aproximado da sombra da estátua projetada sobre a ladeira;
b) a área do triângulo XYZ indicado na figura.

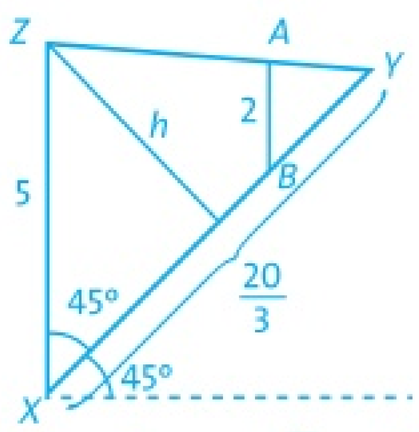


Dam d'Souza/Arquivo da editora

a) Como $\triangle ZXY \sim \triangle ABY$, temos:

$$\frac{BY}{BY + 4} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5BY = 2BY + 8 \Rightarrow 3BY = 8 \Rightarrow BY = \frac{8}{3} \Rightarrow BY \simeq 2{,}67 \text{ cm}$$

Resposta: 2,67 cm.

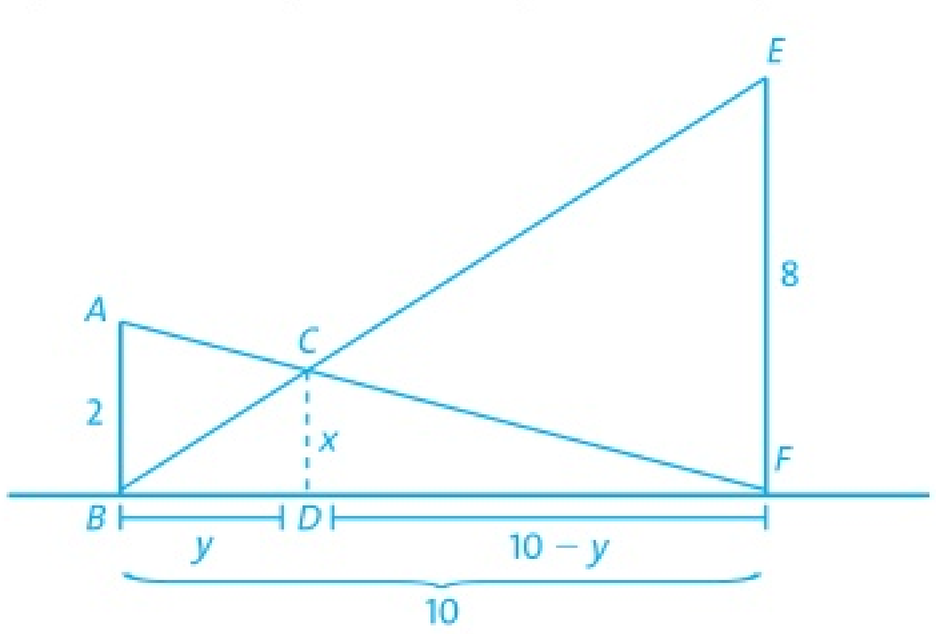
b) 

$$\text{sen } 45° = \frac{h}{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{5} \Rightarrow h = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ m}$$

$$A = \frac{20}{3} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{3} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{25\sqrt{2}}{3} \Rightarrow A = \frac{25 \cdot 1{,}41}{3} \Rightarrow A = 11{,}75 \text{ m}^2$$

Resposta: 11,75 m².

2. (PUC-SP) Dois mastros verticais, com alturas de 2 m e 8 m, têm suas bases fixadas em um terreno plano, distantes 10 m uma da outra. Se duas cordas fossem esticadas, unindo o topo de cada mastro com a base do outro, a quantos metros da superfície do terreno ficaria a intersecção das cordas?
a) 2,4 b) 2,2 c) 2 d) 1,8 e) 1,6



$\triangle EFB \sim \triangle CDB$, temos:

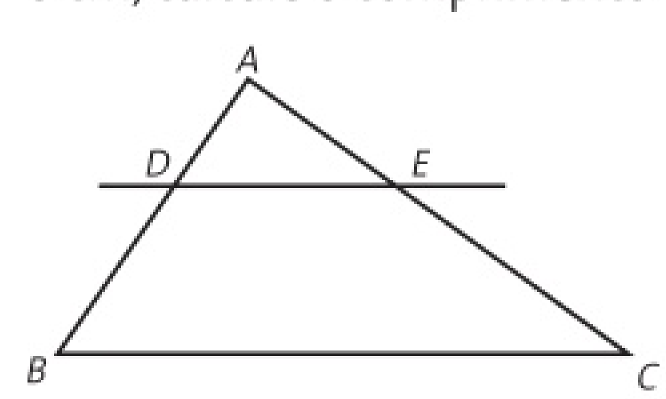
$$\frac{x}{y} = \frac{8}{10} \Rightarrow 10x = 8y \Rightarrow y = \frac{10x}{8} = \frac{5x}{4}$$

Mas $\triangle ABF \sim \triangle CDF$, então:

$$\frac{x}{10 - y} = \frac{2}{10} \Rightarrow 5x = 10 - y \Rightarrow 5x = 10 - \frac{5x}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 20x = 40 - 5x \Rightarrow 25x = 40 \Rightarrow x = \frac{8}{5} \Rightarrow x = 1{,}6 \text{ m}$$

Resposta: alternativa **e**.

3. (UEG-GO) Sobre o lado $\overline{AB}$ de um triângulo ABC, marca-se um ponto D e por ele traça-se uma paralela ao lado $\overline{BC}$, que determina sobre o lado $\overline{AC}$ o ponto E. Sabendo-se que o lado $\overline{AB}$ mede 15 cm, que a razão entre os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{DB}$ é $\frac{2}{3}$ e que o segmento $\overline{AE}$ mede 8 cm, calcule o comprimento do segmento $\overline{CE}$.



$$\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3} \Rightarrow AD = \frac{2DB}{3}$$

$$AD + DB = 15 \Rightarrow \frac{2DB}{3} + DB = 15 \Rightarrow 5DB = 45 \Rightarrow DB = 9$$

Logo, $AD = 6$.

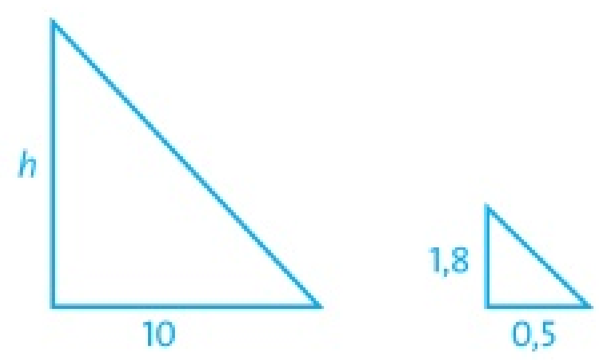
Portanto:

$$\frac{6}{9} = \frac{8}{CE} \Rightarrow CE = 12 \text{ cm}$$

Resposta: 12 cm.

4. (UEL-PR) Para medir a altura de um edifício, um engenheiro utilizou o seguinte procedimento: mediu a sombra do prédio obtendo 10,0 metros. Em seguida, mediu sua própria sombra que resultou em 0,5 metro. Sabendo que sua altura é de 1,8 metro, ele pôde calcular a altura do prédio, obtendo:

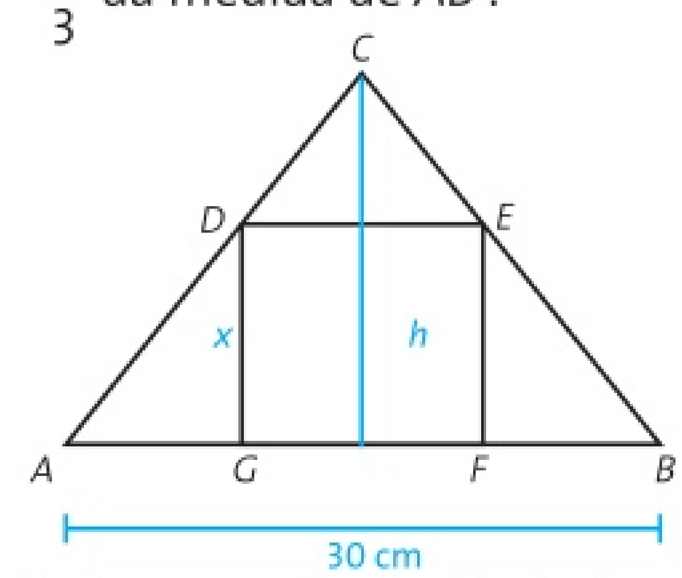
a) 4,5 metros.
b) 10,0 metros.
c) 18,0 metros.
d) 36,0 metros.
e) 45,0 metros.



$\frac{h}{1,8} = \frac{10}{0,5} \Rightarrow 0,5h = 18 \Rightarrow h = 36$

Resposta: alternativa **d**.

5. (Unioeste-PR) Em um triângulo ABC é possível inscrever um quadrado $DEFG$ conforme ilustra a figura a seguir. A base do triângulo, $\overline{AB}$, mede 30 cm. A medida da altura do triângulo relativa à base equivale a $\frac{2}{3}$ da medida de $\overline{AB}$.



Sobre o quadrado citado é correto afirmar que:

a) $EF + FG = 20$ cm.
b) a diagonal mede $8\sqrt{2}$ cm.
c) a área é igual a 121 cm^2.
d) o perímetro é igual a 48 cm.
e) os lados medem 15 cm.

$h = \frac{2 \cdot 30}{3} = 20$

Então:

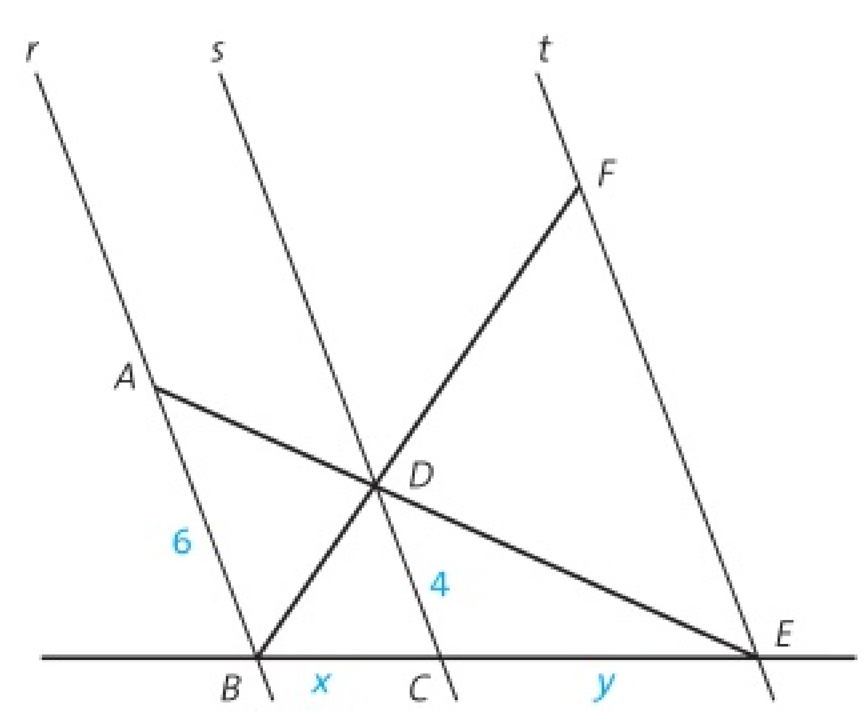
$\frac{x}{20} = \frac{\left(15 - \frac{x}{2}\right)}{15} \Rightarrow 3x = 4\left(15 - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow 3x = 60 - 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x = 60 \Rightarrow x = 12$ cm

Logo, $4x = 48$ cm.

Resposta: alternativa **d**.

6. (Unifei-MG) As retas r, s e t da figura ao lado são paralelas. O segmento $\overline{AB}$ mede 6 cm e o segmento $\overline{CD}$ mede 4 cm. Quanto mede o segmento $\overline{EF}$?



Pelo critério AA, temos que os triângulos ABE e DCE são semelhantes. Assim, considerando x e y as medidas dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CE}$ respectivamente, temos:

$\frac{4}{6} = \frac{y}{x + y} \Rightarrow 6y = 4x + 4y \Rightarrow y = 2x$ (I)

Também, pelo critério AA, são semelhantes os triângulos BCD e BEF, então:

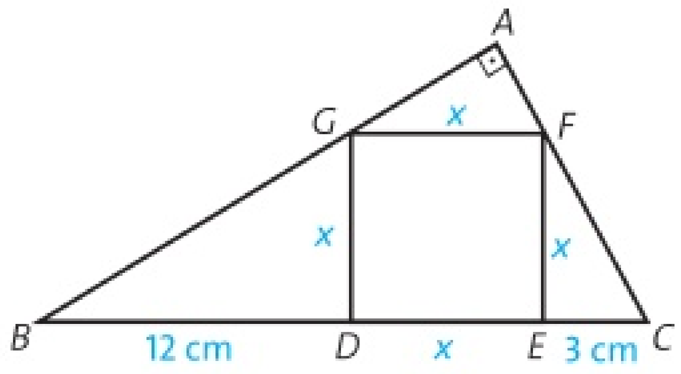
$\frac{EF}{4} = \frac{x + y}{x} \Rightarrow EF = \frac{4x + 4y}{x}$ (II)

Portanto, substituindo (I) em (II), temos:

$EF = \frac{4x + 4 \cdot (2x)}{x} \Rightarrow EF = \frac{12x}{x} \Rightarrow EF = 12$

Resposta: 12 cm.

7. (Unimontes-MG) Na figura abaixo, o quadrado *DEFG* está inscrito no triângulo *ABC*.



Sendo $BD = 12$ cm e $CE = 3$ cm, é correto afirmar que o perímetro do quadrado *DEFG* é igual a:

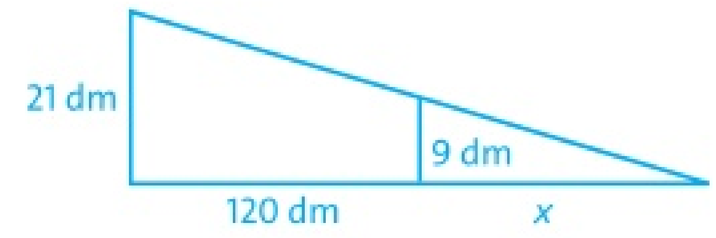
a) 30 cm.
c) 20 cm.
b) 18 cm.
d) 24 cm.

$\frac{12}{x} = \frac{x}{3} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$

Logo, o perímetro será igual a 24 cm.

Resposta: alternativa **d**.

9. (Vunesp-SP) Uma bola de tênis é sacada de uma altura de 21 dm, com alta velocidade inicial e passa rente à rede, a uma altura de 9 dm.
Desprezando-se os efeitos do atrito da bola com o ar e do seu movimento parabólico, considere a trajetória descrita pela bola como sendo retilínea e contida num plano ortogonal à rede. Se a bola foi sacada a uma distância de 120 dm da rede, a que distância da mesma, em metros, ela atingirá o outro lado da quadra?

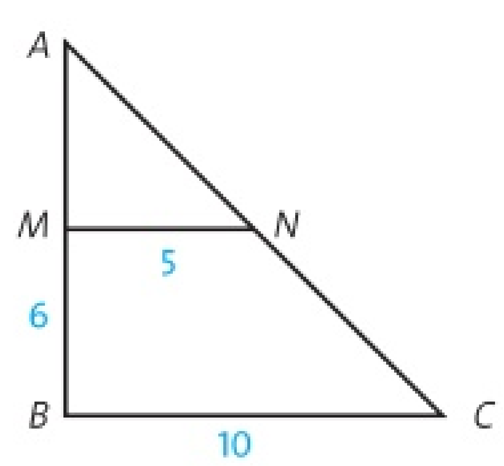


$\frac{9}{x} = \frac{21}{120 + x} \Rightarrow 21x = 1\,080 + 9x \Rightarrow 12x = 1\,080 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 90 \text{ dm} \Rightarrow x = 9 \text{ m}$

Resposta: 9 m.

8. (Ufac) Na figura abaixo, *ABC* é um triângulo, e os segmentos de reta $\overline{BC}$ e $\overline{MN}$ são paralelos.



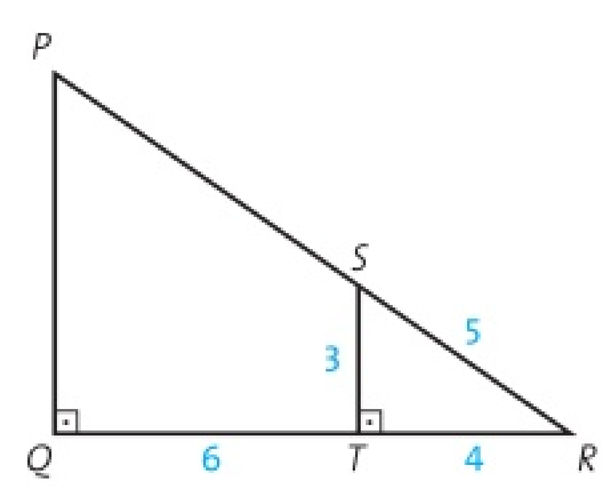
Dado que $BC = 10$, $MN = 5$ e $MB = 6$, a medida do segmento *AM* é:

a) 9.
b) 6.
c) 5.
d) 7.
e) 10.

$\frac{AM}{5} = \frac{AM + 6}{10} \Rightarrow 2AM = AM + 6 \Rightarrow AM = 6$

Resposta: alternativa **b**.

10. (Etec-SP) A figura representa os triângulos retângulos *PQR* e *STR*, sendo $RS = 5$ cm, $ST = 3$ cm e $QT = 6$ cm.



A medida do cateto $\overline{PQ}$, em centímetros, é:

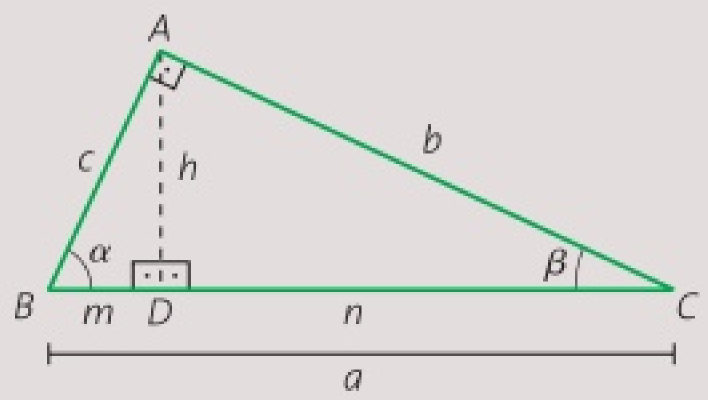
a) 7,5.
b) 8,2.
c) 8,6.
d) 9,0.
e) 9,2.

$\frac{PQ}{10} = \frac{3}{4} \Rightarrow PQ = \frac{15}{2} \Rightarrow PQ = 7{,}5 \text{ cm}$

Resposta: alternativa **a**.

TRIÂNGULO RETÂNGULO

Representação e elementos



Lados
- $\overline{BC}$: hipotenusa (medida a)
- $\overline{AC}$: cateto (medida b)
- $\overline{AB}$: hipotenusa (medida c)

Projeções
- $\overline{BD}$: projeção do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa (medida m)
- $\overline{CD}$: projeção do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa (medida n)
- $\overline{AD}$: altura relativa à hipotenusa (medida h)

Ângulos
- $\hat{A}$: reto (90°)
- α e β: agudos e complementares

Relação entre os lados

Teorema de Pitágoras
$a^2 + b^2 = c^2$

Razões trigonométricas

- $\text{sen } \alpha = \cos \beta = \dfrac{b}{a}$
- $\cos \alpha = \text{sen } \beta = \dfrac{c}{a}$
- $\text{tg } \alpha = \text{cotg } \beta = \dfrac{b}{c}$

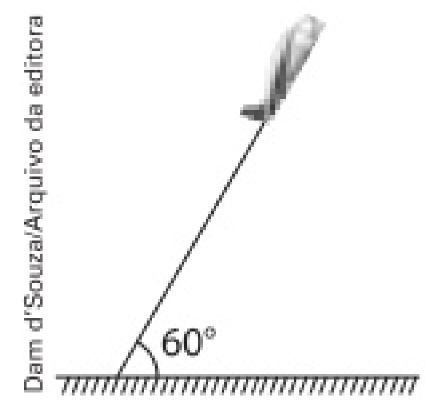
Ângulos notáveis

	30°	**45°**	**60°**
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Relações métricas
- $b^2 = an$
- $c^2 = am$
- $h^2 = mn$
- $ah = bc$

Exercícios

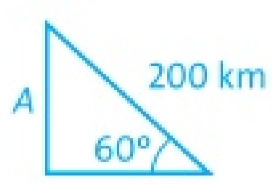
1. (Uneb-BA) Se um avião decola formando um ângulo de 60° com a horizontal e viaja em linha reta a uma velocidade de 400 km/h, então, após meia hora de voo, a altitude desse avião é de:



01) $50\sqrt{3}$ km. 02) $60\sqrt{3}$ km. 03) $75\sqrt{3}$ km. 04) $90\sqrt{3}$ km. 05) $100\sqrt{3}$ km.

1 h ——— 400 km

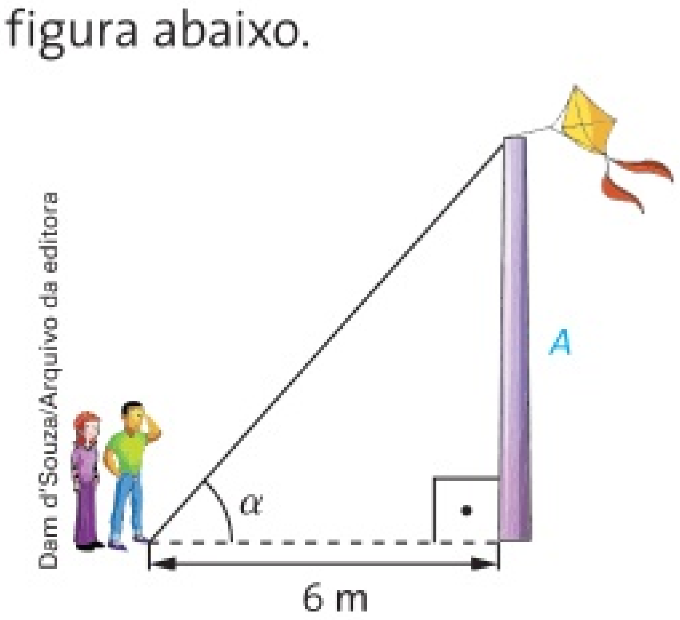
$\frac{1}{2}$ h ——— x $\Rightarrow x = 200$ km



$\text{sen } 60° = \frac{A}{200} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{A}{200} \Rightarrow A = 100\sqrt{3}$

Resposta: alternativa **05**.

2. (UFPB) Ao empinar uma pipa, João percebeu que estava a uma distância de 6 m do poste onde a pipa engalhou. Maria notou que a tangente do ângulo α formado entre a linha da pipa e a rua era $\frac{4}{3}$, como mostra a figura abaixo.



A altura do poste é:

a) 4,5 m.
b) 7,5 m.
c) 9 m.
d) 6 m.
e) 8 m.

$\text{tg } \alpha = \frac{4}{3}$ (I)

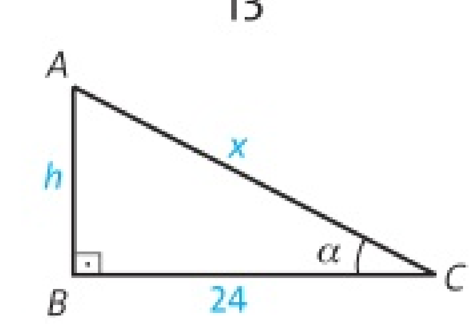
$\text{tg } \alpha = \frac{A}{6}$ (II)

Igualando (I) e (II):

$\frac{4}{3} = \frac{A}{6} \Rightarrow A = 8$ m

Resposta: alternativa **e**.

3. (Unicap-PE) Determine o comprimento do lado $\overline{AB}$, no triângulo retângulo representado pela figura abaixo, onde $BC = 24$ e $\cos \alpha = \frac{12}{13}$.



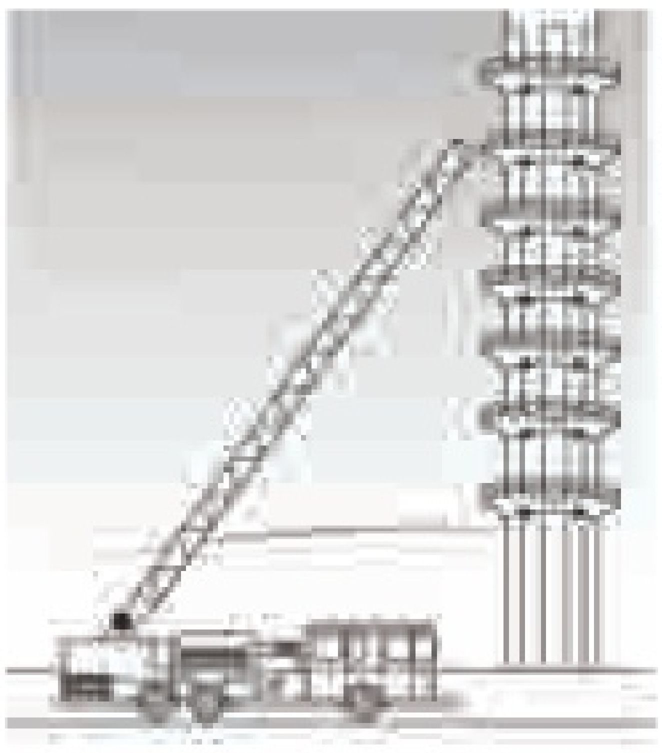
$\cos \alpha = \frac{24}{x} \Rightarrow \frac{12}{13} = \frac{24}{x} \Rightarrow x = 26$ m

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (26)^2 = (h)^2 + (24)^2 \Rightarrow h = 10$

Resposta: 10.

4. (Unifor-CE) O Edifício Joelma tornou-se conhecido nacional e internacionalmente quando, em fevereiro de 1974, um incêndio provocou a morte de 188 pessoas. Foi inaugurado em 1971 e continha vinte e cinco andares, sendo dez de garagens. Hoje é denominado Edifício Praça da Bandeira. Suponha que cada andar tem 2 metros de altura e um carro de bombeiro tenha se posicionado em frente ao prédio incendiado.

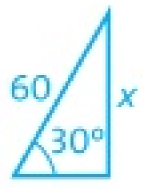
Imagem disponível em: <www.rived.mec.gov.br>. Acesso em: 1/11/2010.



Dam d'Souza/Arquivo da editora

Se a inclinação máxima da escada é 30° e o seu tamanho máximo é 60 m, qual será o último andar alcançado pela escada?

a) 5º andar
b) 7º andar
c) 8º andar
d) 10º andar
e) 15º andar



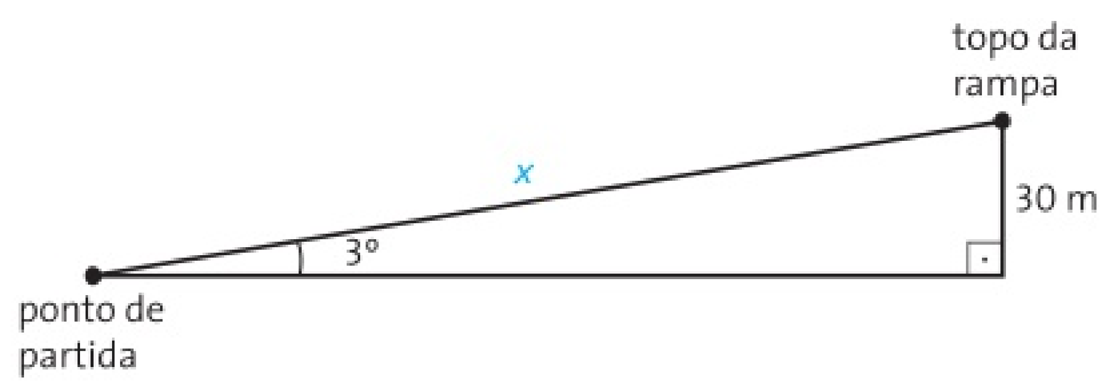
$\text{sen } 30° = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{60} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30 \text{ m}$

Mas x é a altura máxima. Então:

$\left.\begin{array}{lcl} 50 \text{ m} & \text{———} & 25 \text{ andares} \\ 30 \text{ m} & \text{———} & N \end{array}\right\} \Rightarrow N = 15º \text{ andar}$

Resposta: alternativa **e**.

5. (Vunesp-SP) Um ciclista sobe, em linha reta, uma rampa com inclinação de 3 graus a uma velocidade constante de 4 metros por segundo. A altura do topo da rampa em relação ao ponto de partida é 30 m.



Use a aproximação sen 3° = 0,05 e responda: O tempo, em minutos, que o ciclista levou para percorrer completamente a rampa é:

a) 2,5.
b) 7,5.
c) 10.
d) 15.
e) 30.

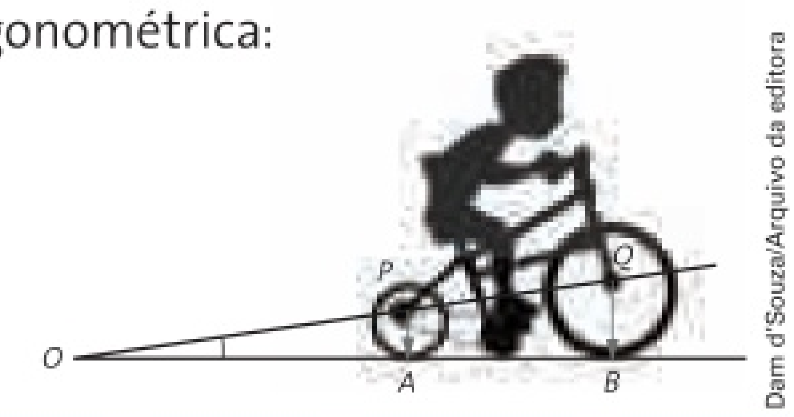
$\text{sen } 3° = 0{,}05 \Rightarrow \frac{30}{x} = 0{,}05 \Rightarrow x = 600 \text{ m}$

$\left.\begin{array}{lcl} 4 \text{ m} & \text{———} & 1 \text{ s} \\ 600 \text{ m} & \text{———} & y \end{array}\right\} \Rightarrow y = 150 \text{ s}$

$\left.\begin{array}{lcl} 1 \text{ min} & \text{———} & 60 \text{ s} \\ z & \text{———} & 150 \text{ s} \end{array}\right\} \Rightarrow z = 2{,}5 \text{ min}$

Resposta: alternativa **a**.

6. (Uerj) Observe a bicicleta e a tabela trigonométrica:



Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249

Os centros das rodas estão a uma distância $\overline{PQ}$ igual a 120 cm e os raios $\overline{PA}$ e $\overline{QB}$ medem, respectivamente, 25 cm e 52 cm. De acordo com a tabela, o ângulo $A\hat{O}P$ tem o seguinte valor:

a) 10°. b) 12°. c) 13°. d) 14°.

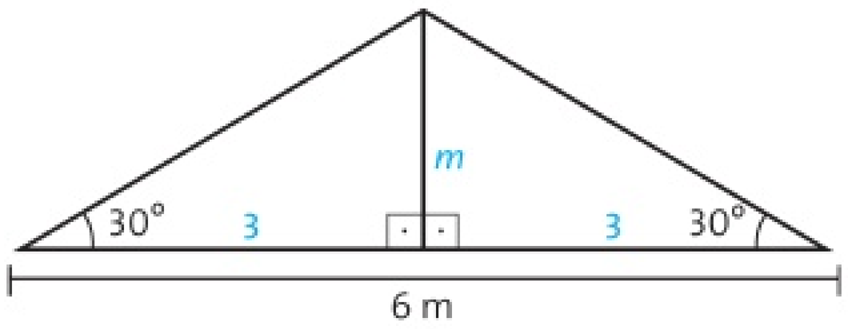
Ao se traçar um segmento de reta paralelo ao segmento $\overline{AB}$ indicado, é possível identificar um ângulo θ correspondente ao ângulo $A\hat{O}P$.
O triângulo PTQ é retângulo e os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{TQ}$ medem, respectivamente, 120 cm e 27 (52 − 25) cm.

Portanto, temos que:

$\text{sen } \theta = \dfrac{27}{120} \Rightarrow \text{sen } \theta = 0{,}225 \Rightarrow \theta = 13°$

Resposta: alternativa **c**.

7. (UFT-TO) Para que o telhado de uma casa possa ser construído deve-se levar em consideração alguns fatores de dimensionamento, dentre os quais as especificações relacionadas com a largura e o ângulo de elevação do telhado, conforme exemplo ilustrado na figura a seguir:



De acordo com as informações anteriormente indicadas no exemplo ilustrado, a medida da elevação do telhado é: (Considere duas casas decimais após a vírgula e tg 30° = 0,58.)

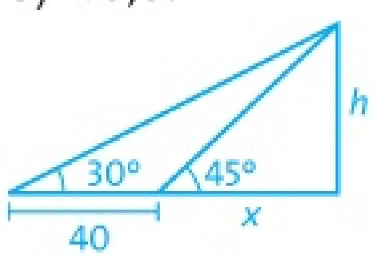
a) 0,90 m. b) 1,74 m. c) 1,80 m. d) 3,00 m. e) 3,48 m.

$\text{tg } 30° = 0{,}58 \Rightarrow \dfrac{m}{3} = 0{,}58 \Rightarrow m = 1{,}74$

Resposta: alternativa **b**.

8. (Vunesp-SP) Uma pessoa, no nível do solo, observa o ponto mais alto de uma torre vertical, à sua frente, sob o ângulo de 30°. Aproximando-se 40 metros da torre, ela passa a ver esse ponto sob o ângulo de 45°. A altura aproximada da torre, em metros, é:

a) 44,7.
b) 48,8.
c) 54,6.
d) 60,0.
e) 65,3.



$\text{tg } 30° = \dfrac{h}{40 + x}$ (I)

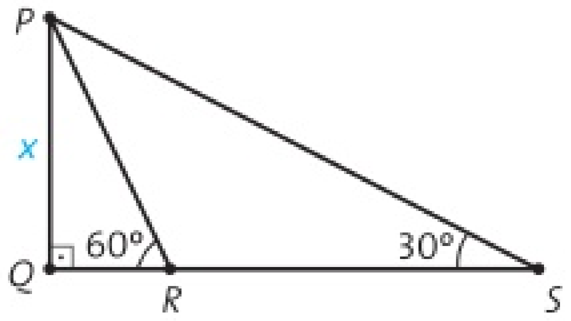
$\text{tg } 45° = \dfrac{h}{x} \Rightarrow 1 = \dfrac{h}{x} \Rightarrow h = x$ (II)

Substituindo (II) em (I), temos:

$\text{tg } 30° = \dfrac{h}{40 + h} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{h}{40 + h} \Rightarrow h = 54{,}4 \simeq 54{,}6$

Resposta: alternativa **c**.

9. (UFPE) Considere os triângulos retângulos *PQR* e *PQS* da figura a seguir.



Se $RS = 100$, quanto vale $\overline{PQ}$?

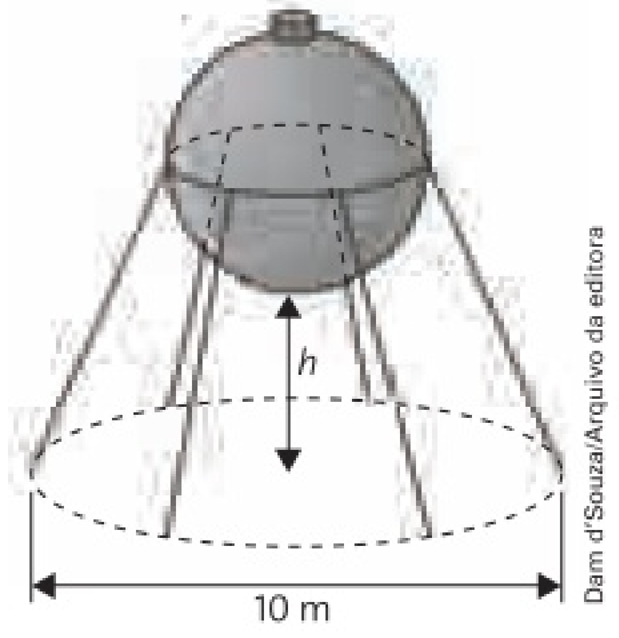
a) $100\sqrt{3}$
b) $50\sqrt{3}$
c) 50
d) $50\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
e) $25\sqrt{3}$

Como o triângulo *PQS* é isósceles, temos que $PR = 100$ m. Logo:

$\text{sen } 60° = \dfrac{x}{100} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x}{100} \Rightarrow x = 50\sqrt{3}$

Resposta: alternativa **b**.

10. (ESPM-SP) Um reservatório de água é constituído por uma esfera metálica oca de 4 m de diâmetro, sustentada por colunas metálicas inclinadas de 60° com o plano horizontal e soldadas à esfera ao longo do seu círculo equatorial, como mostra o esquema abaixo.



Sendo $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$, a altura *h* da esfera em relação ao solo é aproximadamente igual a:

a) 2,40 m.
b) 2,80 m.
c) 3,20 m.
d) 3,40 m.
e) 3,60 m.

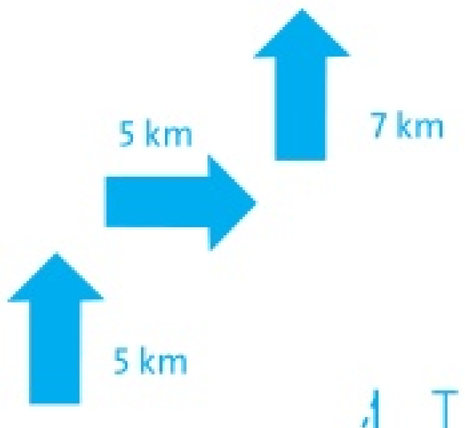
$\text{tg } 60° = \dfrac{h + 2}{3} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{h + 2}{3} \Rightarrow 3\sqrt{3} - 2 = h \Rightarrow$

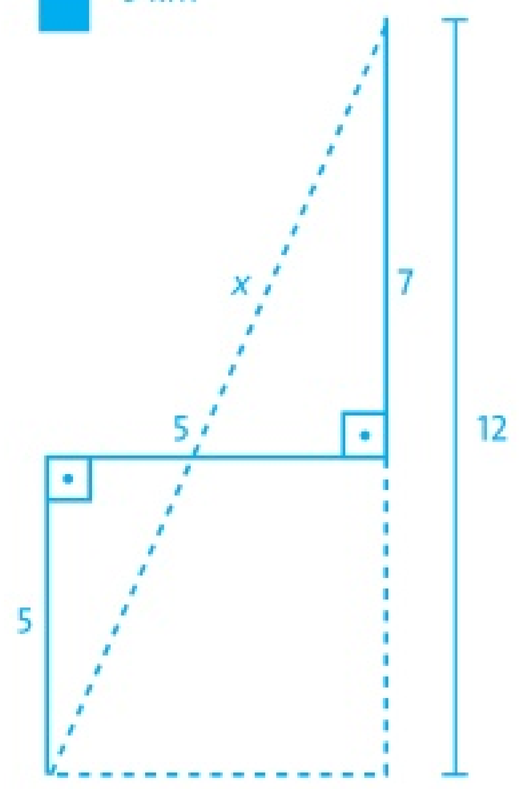
$\Rightarrow h = 3{,}19 \simeq 3{,}2$

Resposta: alternativa **c**.

11. (EEWB-MG) Uma pessoa caminhou 5 km para o norte, 5 km para o leste e 7 km para o norte, novamente. A que distância ela está do seu ponto de partida?

a) 5 km
b) 13 km
c) 20 km
d) 27 km





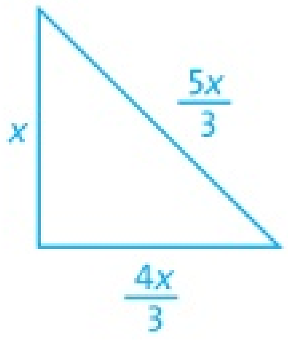
$x^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow x^2 = 144 + 25 \Rightarrow x^2 = 169 \Rightarrow x = 13$

Resposta: alternativa **b**.

12. (Unemat-MT) Em um triângulo retângulo, a hipotenusa é $\frac{5}{3}$ do tamanho do cateto menor. O cateto maior tem tamanho igual a $\frac{4}{3}$ do cateto menor. Sendo 60 cm o perímetro desse triângulo, sua área será de:

a) 135 cm². b) 120 cm². c) 150 cm². d) 100 cm². e) 187,5 cm².

Considerando o cateto menor com medida x, temos:



$$\frac{5x}{3} + \frac{4x}{3} + x = 60 \Rightarrow 4x = 60 \Rightarrow x = 15 \text{ cm}$$

Logo:

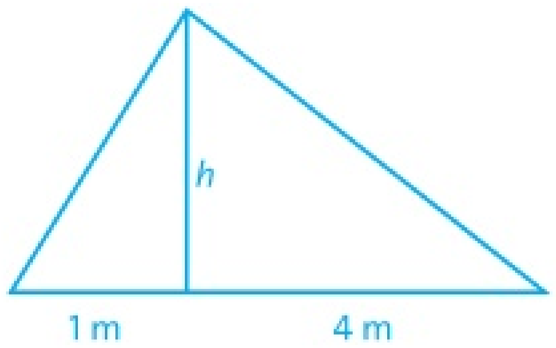
$$A = \frac{\frac{4x}{3} \cdot x}{2} \Rightarrow A = \frac{4x^2}{3} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{2x^2}{3} \Rightarrow A = \frac{2(15)^2}{3} \Rightarrow A = \frac{2 \cdot 225}{3} \Rightarrow A = 2 \cdot 75 \Rightarrow A = 150 \text{ cm}^2$$

Resposta: alternativa **c**.

---

13. (Ifal) Num triângulo retângulo, as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 4 m e 1 m, respectivamente. Calcule a área desse triângulo.

a) 5 cm² b) 50 cm² c) 50 000 cm² d) 50 dm² e) 5 dm²



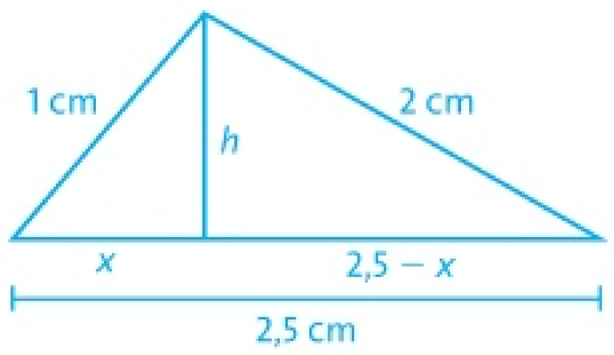
$$h^2 = 4 \cdot 1 \Rightarrow h = 2$$

$$A = \frac{5 \cdot 2}{2} \Rightarrow A = 5 \text{ m}^2 \Rightarrow A = 5 \cdot 10^4 \text{ cm}^2 \Rightarrow A = 50\,000 \text{ cm}^2$$

Resposta: alternativa **c**.

14. (FGV-SP) Um triângulo tem lados medindo 1 cm, 2 cm e 2,5 cm. Seja h a medida da altura relativa ao maior lado. O valor de h^2 expresso em cm^2 é, aproximadamente, igual a:

a) 0,54. b) 0,56. c) 0,58. d) 0,60. e) 0,62.



$$\begin{cases} 2^2 = (2{,}5 - x)^2 + h^2 \\ 1^2 = x^2 + h^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^2 = 4 - (2{,}5 - x)^2 \\ h^2 = 1 - x^2 \end{cases}$$

Então:

$$1 - x^2 = 4 - (2{,}5 - x)^2 \Rightarrow 1 - x^2 = 4 - 6{,}25 + 5x - x^2 \Rightarrow 5x = 3{,}25 \Rightarrow x = \frac{325}{500} \Rightarrow x = 0{,}65 \text{ cm}$$

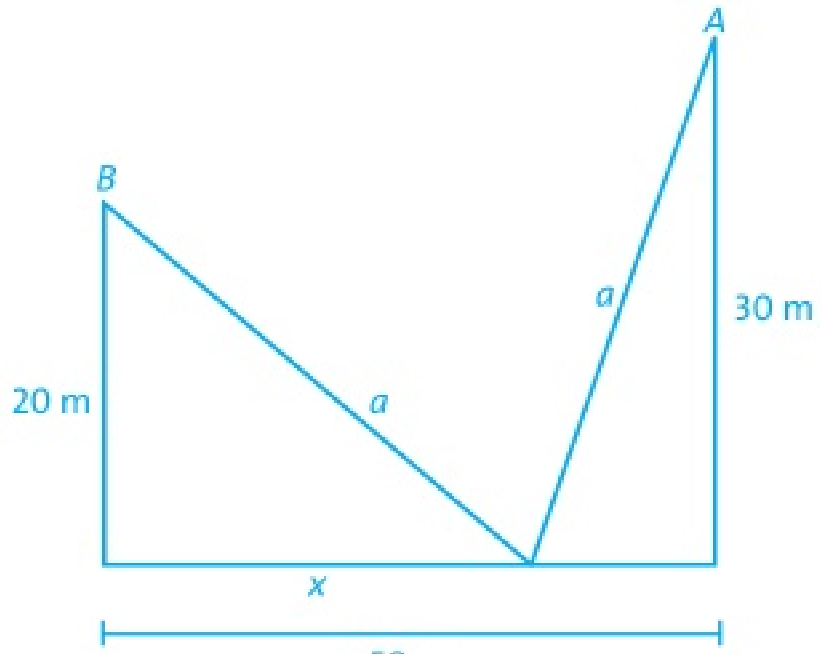
Substituindo na segunda equação, temos:

$$1 - (0{,}65)^2 = h^2 \Rightarrow h^2 = 0{,}5775 \Rightarrow h^2 \simeq 0{,}58$$

Resposta: alternativa **c**.

15. (UEPB) Entre dois edifícios A e B de alturas 30 m e 20 m respectivamente, deverá ser instalado um hidrante. Sabendo que a distância entre os edifícios é de 50 m e que as distâncias entre o hidrante e os topos dos dois edifícios devem ser rigorosamente iguais, a distância entre o hidrante e o edifício B é igual a:

a) 40 m. b) 35 m. c) 20 m. d) 25 m. e) 30 m.



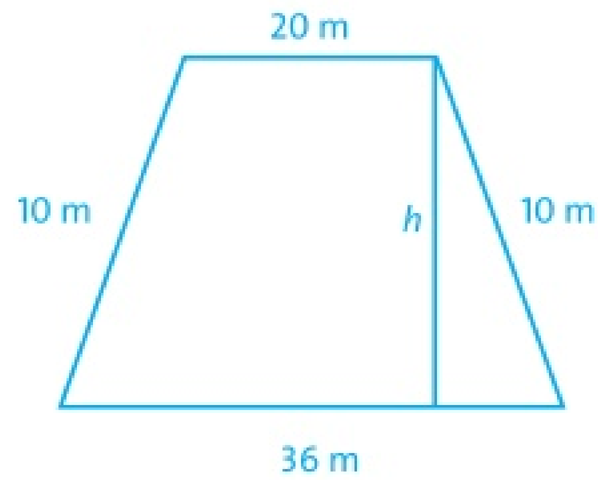
$$\begin{cases} a^2 = 20^2 + x^2 \\ a^2 = 30^2 + (50 - x)^2 \end{cases}$$

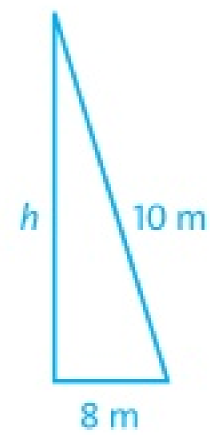
$$400 + x^2 = 900 + 2\,500 - 100x + x^2 \Rightarrow 100x = 3\,000 \Rightarrow x = 30$$

Resposta: alternativa **e**.

16. (FGV-SP) As bases de um trapézio isósceles medem 20 m e 36 m, e a soma das medidas dos lados não paralelos é 20 m. A medida da altura desse trapézio é:

a) 6 m. c) 8 m. e) 10 m.
b) 3 m. d) 4 m.



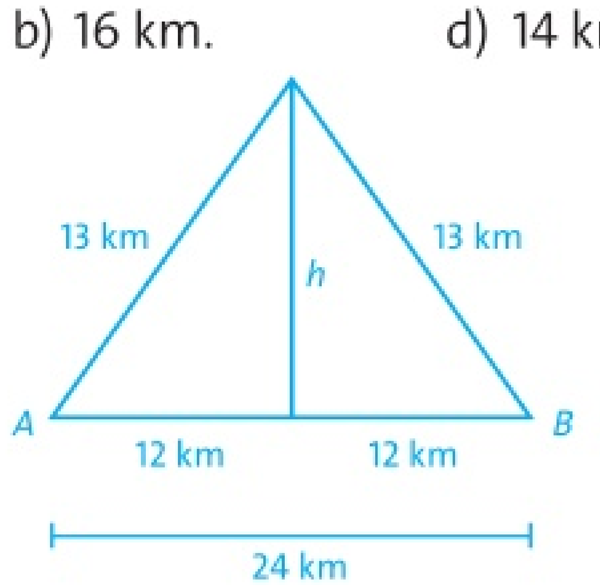


$10^2 = 8^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 36 \Rightarrow h = 6$ m

Resposta: alternativa **a**.

17. (UFPB) Duas cidades, *A* e *B*, estão interligadas por uma rodovia reta que mede 24 km. O lixo recolhido dessas cidades é depositado em um aterro sanitário distante, em linha reta, 13 km de ambas as cidades. O acesso a esse aterro, a partir da rodovia que liga as duas cidades, é feito por uma estrada, também reta, que cruza essa rodovia perpendicularmente.
Com base nessas informações, é correto afirmar que para ir de uma dessas cidades até o aterro, fazendo todo o percurso pela rodovia e pela estrada de acesso, é necessário percorrer no mínimo:

a) 17 km. c) 15 km. e) 13 km.
b) 16 km. d) 14 km.



$13^2 = 12^2 + h^2 \Rightarrow 169 = 144 + h^2 \Rightarrow h^2 = 25 \Rightarrow h = 5$ km
distância $= 12 + 5 \Rightarrow h = 17$ km

Resposta: alternativa **a**.

18. (IFSC) O lado de um quadrado mede $\sqrt{2}$ cm. Quanto mede sua diagonal?

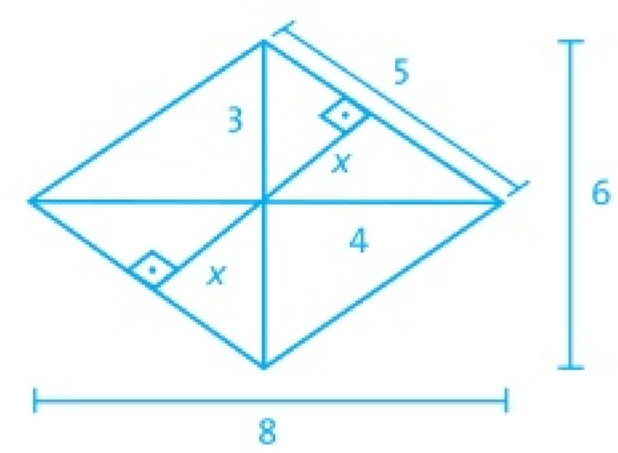
a) 2 cm c) $\sqrt{6}$ cm e) $2\sqrt{2}$ cm
b) $\sqrt{3}$ cm d) $2\sqrt{3}$ cm

$d = \ell\sqrt{2} \Rightarrow d = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow d = 2$

Resposta: alternativa **a**.

19. (Uece) Em um losango cujas diagonais medem 6 m e 8 m, a distância, em metros, entre dois lados paralelos é:

a) 4,2. b) 4,4. c) 4,6. d) 4,8.



Utilizando a relação métrica $ah = bc$, temos:
$5 \cdot x = 3 \cdot 4 \Rightarrow x = \dfrac{12}{5} = 2,4$
A distância entre os dois lados paralelos será:
$d = 2x \Rightarrow d = 4,8$

Resposta: alternativa **d**.

20. (Ufes) Petróleo capixaba: óleo leve bom para *diesel*

É o óleo descoberto em Golfinho (figura 1), que começará, em fase de teste, a ser produzido nos próximos meses. Esse óleo é importante porque é usado para produzir *diesel*, derivado do petróleo que o Brasil ainda importa por produzir óleo mais pesado. A falta, até agora, do óleo leve, é que não permite a autossuficiência. Como o Brasil tem muito óleo pesado, exporta gasolina barata e compra *diesel* caro. Além da ampliação da produção em terra, com novas tecnologias, e da entrada em produção do campo de Golfinho, no litoral de Aracruz, foram viabilizadas outras obras:

1) Estação Fazenda Alegre

É um marco no tratamento de óleo pesado, cuja produção nos campos maduros foi viabilizada pela utilização dos equipamentos para injeção de vapor.

2) Terminal Norte Capixaba

Receberá o óleo pesado de Fazenda Alegre e o óleo leve de Golfinho, separadamente, para serem embarcados nos navios que estão ancorados na monoboia.

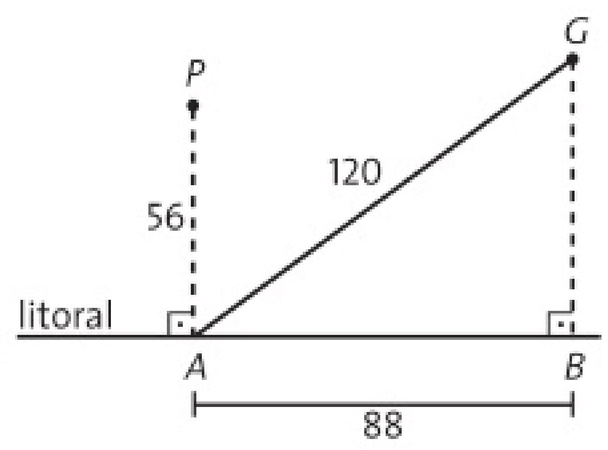
3) Polo de Gás

- Viabilizado a partir da produção de gás do Campo de Peroá, que começa neste semestre.
- Outra planta receberá o gás de Golfinho, a partir do próximo ano.
- No polo poderá ser produzido gás de cozinha e gás natural.
- A Petrobras já construiu o gasoduto de 56 km de Peroá até o Polo de gás e construirá outro, de 120 km, de Golfinho até o mesmo polo.

A Gazeta. 10/7/2005. Modificado.

Figura 1

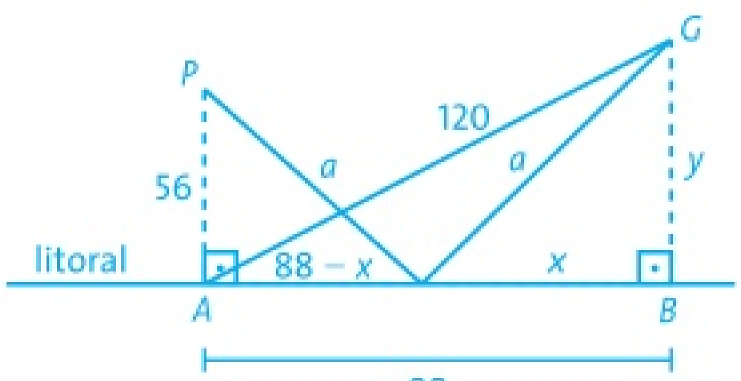
Figura 2



Os campos de petróleo de Peroá (P) e Golfinho (G) distam, respectivamente, 56 km e 120 km de um ponto A do litoral, o qual estamos supondo retilíneo (veja a figura 2). Os pontos A e B são os pontos do litoral que estão mais próximos, respectivamente, dos campos P e G. A distância do ponto A ao ponto B é de 88 km. Deseja-se construir no litoral um polo de gás que fique situado à mesma distância dos campos P e G.

Nessas condições, pode-se afirmar que o polo de gás deve ficar situado a:

a) 74 km de A e a 14 km de B.
b) 64 km de A e a 24 km de B.
c) 44 km de A e a 44 km de B.
d) 24 km de A e a 64 km de B.
e) 14 km de A e a 64 km de B.



Primeiro calculamos y:

$120^2 = y^2 + 88^2 \Rightarrow y^2 = 6\,656$

Mas:

$$\begin{cases} a^2 = 56^2 + (88 - x)^2 \\ a^2 = 6\,656 + x^2 \end{cases}$$

$3\,136 + 7\,744 - 176x + x^2 = 6\,656 + x^2 \Rightarrow 10\,900 - 176x = 6\,656 \Rightarrow 176x = 4\,244 \Rightarrow x = 24{,}1$

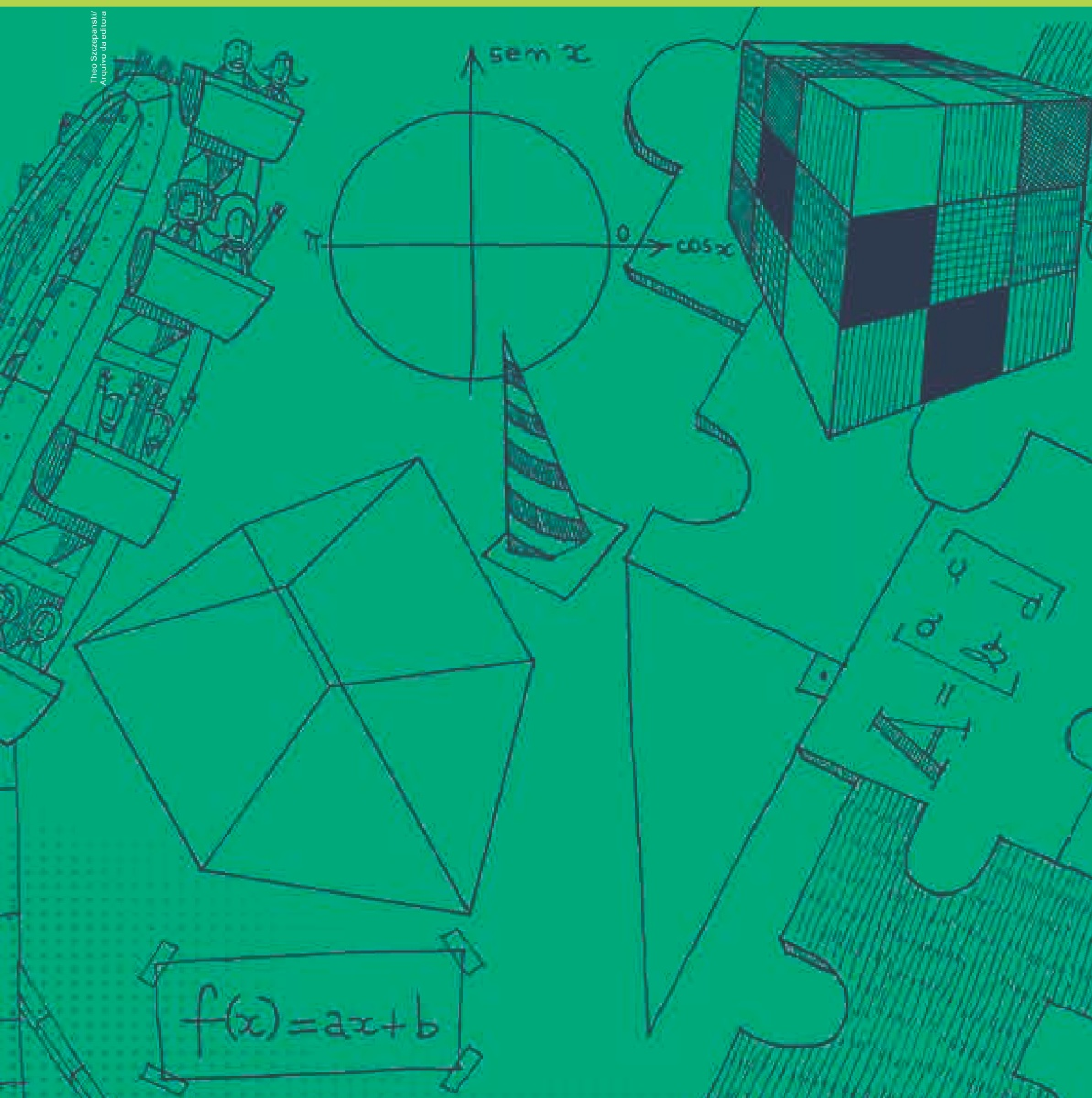
Portanto:

- distância até A: $88 - 24{,}1 = 63{,}9$ km
- distância até B: 24 km

Resposta: alternativa **b**.

Desafio

Theo Szczepanski/ Arquivo da editora



1. (OBM) Sejam a, b reais positivos tais que $\frac{a + 2b}{b} = \frac{a + b}{a}$. O valor de $\frac{(a + b)^2}{ab}$ é:

a) 4.
b) $3 + \sqrt{3}$.
c) $2 + \sqrt{2}$.
d) $2 + \sqrt{5}$.
e) 5.

$\frac{a + 2b}{b} = \frac{a + b}{a} \Rightarrow a^2 + 2ab = ab + b^2 \Rightarrow b^2 - a^2 = ab$

Mas:

$\frac{(a + b)^2}{ab} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2}{ab} + 2$

Então:

$(b^2 + a^2)^2 - 4a^2b^2 = (b^2 - a^2)^2 \Rightarrow (b^2 + a^2)^2 - 4a^2b^2 = (ab)^2 \Rightarrow (b^2 + a^2)^2 = 5a^2b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{5}\,ab$

Portanto:

$\frac{(a + b)^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2}{ab} + 2 = \frac{\sqrt{5}\,ab}{ab} + 2 = 2 + \sqrt{5}$

Resposta: alternativa **d**.

---

2. (OBM) Determine $x + y$, onde x e y são reais, sabendo que $x^3 + y^3 = 9$ e $xy^2 + x^2y = 6$.

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ xy^2 + x^2y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 9 \\ xy(y + x) = 6 \end{cases}$

Fazendo as mudanças de variáveis, $x + y = a$ e $xy = b$, temos:

$(x + y)^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 - 2b$

Então:

$\begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 9 \\ xy(x + y) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(a^2 - 3b) = 9 \\ ba = 6 \end{cases}$

Assim:

$a(a^2 - 3b) = 9 \Rightarrow a^3 - 3ab = 9 \Rightarrow a^3 - 3 \cdot 6 = 9 \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = \sqrt[3]{27} = 3$

Logo:

$x + y = a \Rightarrow x + y = 3$

Resposta: alternativa **c**.

3. (OBM) Qual é o valor da expressão
$20\,112\,011^2 + 20\,112\,003^2 - 16 \cdot 20\,112\,007$?

a) $2 \cdot 0\,112\,007^2$
b) $2 \cdot 20\,112\,003^2$
c) $2 \cdot 20\,112\,007$
d) $2 \cdot 20\,112\,003$
e) $2 \cdot 20\,112\,011^2$

Fazendo $20\,112\,007 = x$, temos:

- $20\,112\,003 = x - 4$
- $20\,112\,011 = x + 4$

Assim:

$20\,112\,011^2 + 20\,112\,003^2 - 16 \cdot 20\,112\,007 =$
$= (x + 4)^2 + (x - 4)^2 - 16 \cdot x =$
$= x^2 + 8x + 16 + x^2 - 8x + 16 - 16x =$
$= 2x^2 - 16x + 32 = 2(x^2 - 8x + 16) = 2(x - 4)^2 =$
$= 2 \cdot 20\,112\,003^2$

Resposta: alternativa **b**.

4. (OBM) Se x e y são inteiros positivos tais que $x(x + 2 + 4 + 6 + ... + 4\,024) = 2\,013^y$, qual é o valor de y?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

$$2 + 4 + 6 + ... + 4\,024 = \frac{2\,012 \cdot (2 + 4\,024)}{2} = 2\,012 \cdot 2\,013$$

Portanto:

$x(x + 2 + 4 + 6 + ... + 4\,024) = 2\,013^y \Rightarrow x(2\,012 \cdot 2\,013) = 2\,013^y$

Como x e y são inteiros positivos, a igualdade ocorre se, e somente se, o primeiro membro for uma potência de 2 013. Então, se $x = 2\,103$, temos:

$x(2\,012 \cdot 2\,013) = 2\,013^y \Rightarrow 2\,013 \cdot (2\,013 + 2\,012 \cdot 2\,013) = 2\,013^y \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\,013 \cdot [2\,013 \cdot (1 + 2\,012)] = 2\,013^y \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\,013 \cdot [2\,013 \cdot 2\,013] = 2\,013^y \Rightarrow 2\,013^3 = 2\,013^y \Rightarrow y = 3$

Resposta: alternativa **c**.

5. (OBM) Os 61 aprovados em um concurso, cujas notas foram todas distintas, foram distribuídos em duas turmas, de acordo com a nota obtida no concurso: os 31 primeiros foram colocados na Turma *A* e os 30 seguintes na Turma *B*. As médias das duas turmas no concurso foram calculadas. Depois, no entanto, decidiu-se passar o último colocado da Turma *A* para a Turma *B*.

Com isso:

a) a média da turma *A* melhorou, mas a da *B* piorou.
b) a média da turma *A* piorou, mas a da *B* melhorou.
c) as médias de ambas as turmas melhoraram.
d) as médias de ambas as turmas pioraram.
e) as médias das turmas podem melhorar ou piorar, dependendo das notas dos candidatos.

O último colocado da turma *A* tem maiores notas do que qualquer um dos alunos da turma *B* e, ao mesmo tempo, menores do que qualquer um dos outros alunos da turma *A*. Portanto, ao levarmos o último colocado da turma *A* para a Turma *B*, sua média aumentará, porque o aluno transferido tem notas maiores do que aqueles que já estavam na turma *B*. Da mesma forma, a média das notas da turma *A* aumentará, pois ao retirarmos o aluno com notas menores, permanecerão apenas aqueles que possuem notas maiores.

Resposta: alternativa **c**.

6. (OBM) Seja $N = \{0, 1, 2, ...\}$ e considere a função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$ e, para todo natural $n \geqslant 1$, satisfaz as seguintes condições:

I. $f(3n) = 3 \cdot f(n) + 1$;
II. $f(3n + 1) = 3 \cdot f(n) + 2$;
III. $f(3n + 2) = 3 \cdot f(n)$.

Então $f(2\,012)$ é igual a:

a) 101. b) 102. c) 103. d) 104. e) 105.

De acordo com as propriedades da função f citadas no enunciado, temos:

- $f(2\,012) = f(3 \cdot 670 + 2) = 3f(670) = 3 \cdot (3f(223) + 2) = 9f(223) + 6$
- $f(223) = 3f(74) + 2 = 9f(24) + 2 = 27f(8) + 11 = 81f(2) + 11 = 11$

Portanto:

$f(2\,012) = 9 \cdot 11 + 6 = 105$

Resposta: alternativa **e**.

7. (OBM) Seja $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Considere uma função $f: S \to S$ definida pela tabela a seguir:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	8	3	5	7	2	9	6	1	4

Qual é o menor valor inteiro positivo de n para o qual $\underbrace{f(f(\dots f}_{n \text{ vezes}}(x))) = x$ para todo $x \in S$?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 12 e) 24

Analisando o número de vezes que devemos aplicar a função f a um elemento $a \in S$ até que a imagem seja o próprio $a \in S$, temos:

- Para o elemento 1: $f(1) = 8 \Rightarrow f(f(1)) = f(8) = 1$. Foi necessário aplicar f 2 vezes.
- Para o elemento 2: $f(2) = 3 \Rightarrow f(f(2)) = f(3) = 5 \Rightarrow f(f(f(2))) = f(5) = 2$. Foi necessário aplicar f 3 vezes.

Portanto:

- Para o elemento 3: 3 vezes.
- Para o elemento 4: 4 vezes.
- Para o elemento 5: 3 vezes.
- Para o elemento 6: 4 vezes.
- Para o elemento 7: 4 vezes.
- Para o elemento 8: 2 vezes.
- Para o elemento 9: 4 vezes.

Logo, se tivermos f aplicada um múltiplo do número de vezes necessárias para que a imagem de cada um dos elementos de $a \in S$ seja o próprio elemento $a \in S$, voltaremos a $a \in S$. Assim, o valor desejado é um múltiplo do número de vezes que f foi aplicada. Portanto, o menor valor de n para o qual isso ocorre é $n = \text{mmc}(2, 3, 4) = 12$.

Resposta: alternativa **d**.

---

8. (OBM) A função f associa a cada real x o menor elemento do conjunto $\left\{x + 1, \frac{15 - x}{2}\right\}$. O valor máximo de $f(x)$ é:

a) 4. b) 5. c) $\frac{11}{2}$. d) $\frac{16}{3}$. e) $\frac{19}{4}$.

Pelo enunciado, $f(x) = \text{mín.}\left\{x + 1, \frac{15 - x}{2}\right\}$. Então:

$$\begin{cases} x + 1 < \frac{15 - x}{2} \Rightarrow 2x + 2 < 15 - x \Rightarrow 3x < 13 \Rightarrow x < \frac{13}{3} \\ x + 1 > \frac{15 - x}{2} \Rightarrow 2x + 2 > 15 - x \Rightarrow 3x > 13 \Rightarrow x > \frac{13}{3} \end{cases}$$

Portanto, $f(x) = \text{mín.}\left\{x + 1, \frac{15 - x}{2}\right\} = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \leqslant \frac{13}{3} \\ \frac{15 - x}{2}, \text{ se } x > \frac{13}{3} \end{cases}$.

A igualdade ocorre para $x = \frac{13}{3}$ e para este valor de x a função f assume o seu valor máximo, pois para $x < \frac{13}{3}$ a função f é crescente e para $x > \frac{13}{3}$ a função f é decrescente. Assim, o valor máximo de f é:

$$f\left(\frac{13}{3}\right) = \frac{13}{3} + 1 = \frac{16}{3}$$

Resposta: alternativa **d**.

9. (OBM) Seja f uma função real que tem as seguintes propriedades:

Para todos x, y reais, $f(x + y) = x + f(y)$; $f(0) = 2$.

Quanto vale $f(2000)$?

a) 0
b) 2
c) 1 998
d) 2 000
e) 2 002

Fazendo $y = 0$ em $f(x + y) = x + f(y)$, temos:

$f(x + 0) = x + f(0) \Rightarrow f(x) = x + 2 \Rightarrow f(2\,000) = 2\,002$

Resposta: alternativa **e**.

10. (OBM) Seja f uma função real de variável real que satisfaz a condição: $f(x) + 2f\left(\dfrac{2\,002}{x}\right) = 3x$ para $x > 0$.

O valor de $f(2)$ é igual a:

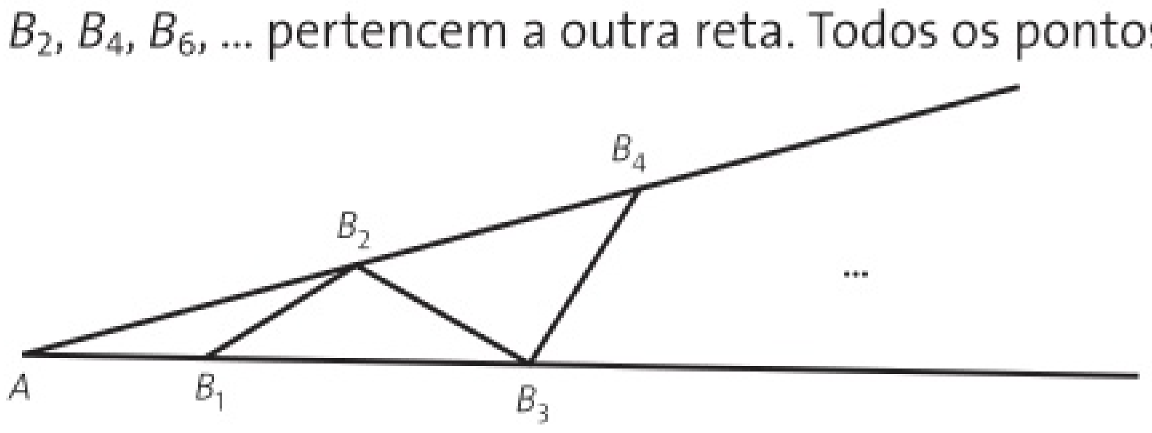
a) 1 000.
b) 2 000.
c) 3 000.
d) 4 000.
e) 6 000.

Fazendo $x = 2$ e $x = 1\,001$ em $f(x) + 2f\left(\dfrac{2\,002}{x}\right) = 3x$, obtemos:

$$\begin{cases} f(2) + 2f(1001) = 6 \\ f(1001) + 2f(2) = 3\,003 \end{cases} \Rightarrow f(2) = 2\,000$$

Resposta: alternativa **b**.

11. (OBM) Na figura a seguir, $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = ... = B_{n-1}B_n$. Os pontos $B_1, B_3, B_5, ...$ pertencem a uma reta e os pontos $B_2, B_4, B_6, ...$ pertencem a outra reta. Todos os pontos $B_1, B_2, B_3, ... B_n$ são distintos.



Sabendo que o ângulo $B_1\hat{A}B_2$ mede 1°, qual é o maior valor possível de n?

a) 6.
b) 7.
c) 10.
d) 90.
e) n pode ser arbitrariamente grande.

$A\hat{B}_2B_1 = 1°$, $B_2\hat{B}_1B_3 = A\hat{B}_3B_2 = 2°$, $A\hat{B}_4B_3 = 3°$. Assim, $A\hat{B}_nB_{n-1} = (n-1)°$. Mas, no triângulo $B_nB_{n-1}B_{n-2}$, temos:

$B_{n-1}\hat{B}_{n-2}B_n = A\hat{B}_n\,B_{n-1} = (n-1)°$

Portanto:

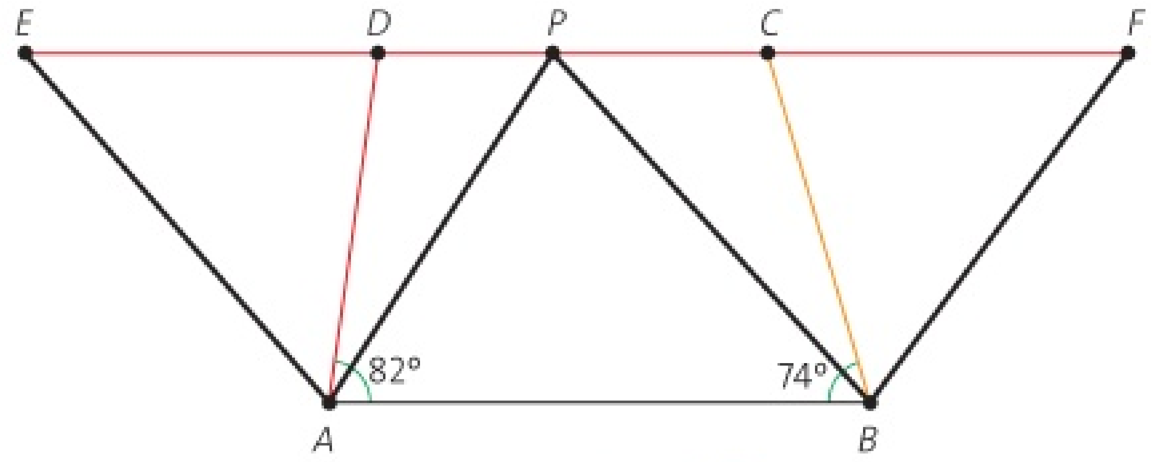
$(2n - 2)8 < 180° \Rightarrow n < 91$

Logo, o maior valor possível de n é 90.

Resposta: alternativa **d**.

12. (OBM) No trapézio $ABCD$, com $\overline{AB}$ paralelo a $\overline{CD}$, o ângulo $B\hat{A}D$ mede 82° e o ângulo $A\hat{B}C$ mede 74°. Suponha que exista um ponto P sobre o lado $\overline{CD}$ tal que $AD + DP = PC + CB = AB$. Quanto mede o ângulo $A\hat{P}B$?

a) 76° b) 77° c) 78° d) 79° e) 80°



Como os pontos E e F pertencem à reta $\overleftrightarrow{CD}$, temos que $DE = DA$ e $CB = CF$.

Considere:
- $PC + CB = AB$;
- $AD + DP = AB$.

Então:

$EP = PF = AB$

Mas $\overline{CD}$ é paralelo a $\overline{AB}$; logo, $EPAB$ e $PFAB$ são paralelogramos.

Assim, $A\hat{D}E = 82°$.

Como $\triangle ADE$ é isósceles de base $\overline{AE}$ então $D\hat{E}A = P\hat{B}A = 49°$.

Analogamente, $\triangle FCB$ isósceles e $F\hat{C}B = 74°$, então $P\hat{F}B = P\hat{A}B = 53°$. Portanto:

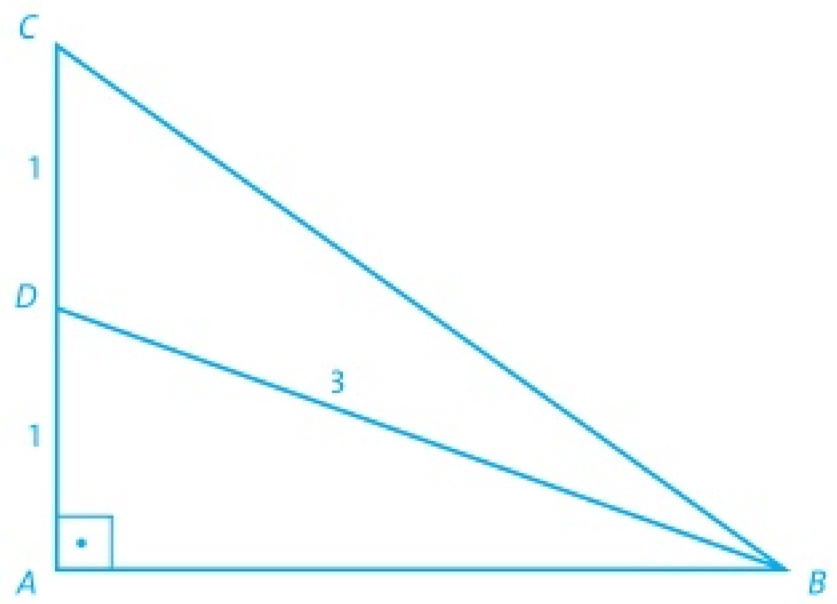
$A\hat{P}B = 180° - 49° - 53° = 78°$

Resposta: alternativa **c**.

13. (OBM) Seja ABC um triângulo retângulo em A. Seja D o ponto médio de AC. Sabendo que $BD = 3DC$ e que $AC = 2$, a hipotenusa do triângulo é:

a) $\sqrt{7}$. b) $2\sqrt{2}$. c) 3. d) $\sqrt{10}$. e) $2\sqrt{3}$.

D é ponto médio de $\overline{AC}$. Logo, $AD = DC = 1$ e $AC = 2$.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo DAB, temos:

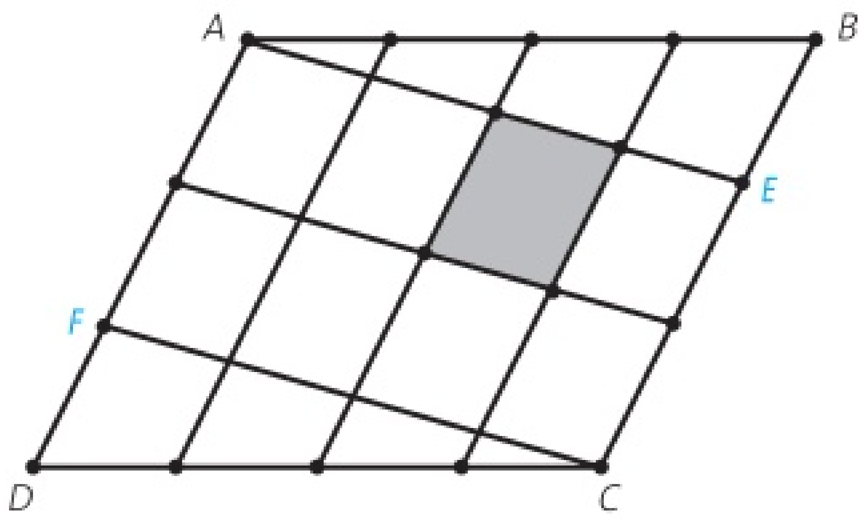
$AB^2 = 3^2 - 1^2 = 8$

Mas:

$BC^2 = 2^2 + AB^2 = 4 + 8 = 12 \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$

Resposta: alternativa **e**.

14. (OBM) Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ do paralelogramo *ABCD* foram divididos em 4 segmentos iguais. Os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ foram divididos em 3 segmentos iguais. Os pontos de divisão foram conectados como indica a figura abaixo.



Se a área de *ABCD* é 84, determine a área sombreada.

a) 1 b) 3 c) 4 d) 7 e) 12

Temos que $AF = \frac{2}{3} AD$.

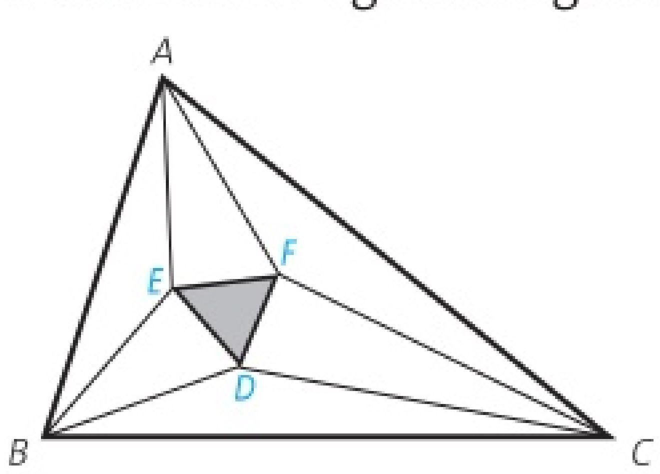
Tomando as bases $\overline{AF}$ e $\overline{AD}$, concluímos que os paralelogramos *AECF* e *ABCD* têm a mesma altura. Portanto:

$A_{ACE} = \frac{2}{3} \cdot 84 = 56$

Como o paralelogramo *AECF* está dividido em oito paralelogramos iguais, a medida da área sombreada é $\frac{1}{8} \cdot 56 = 7$.

Resposta: alternativa **d**.

15. (OBM) O teorema de Morley diz que, ao traçarmos as retas que dividem cada ângulo interno de um triângulo *ABC* em três ângulos iguais, obtemos um triângulo equilátero chamado triângulo de Morley de *ABC*, como o que está destacado na figura a seguir:



Qual é a medida do lado do triângulo de Morley de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2?

a) $2\sqrt{2} - \sqrt{6}$ b) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ c) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ d) $2 - \sqrt{3}$ e) $2\sqrt{3} - \sqrt{6}$

Pelo teorema de Morley, temos que $E\hat{D}F = 60°$. Considere também:

- $E\hat{D}B = F\hat{D}C$
- $B\hat{D}C = 150°$

Logo, $D\hat{B}C = D\hat{C}B = 15°$.

Assim, $E\hat{D}B = 75°$; portanto, o triângulo *BED* é retângulo em *E*.

Como a hipotenusa $\overline{BC}$ do triângulo *ABC* é igual a $2\sqrt{2}$ e traçando a altura relativa à base do triângulo isósceles *BDC*, temos que $BD = \frac{\sqrt{2}}{\cos 15°}$.
Então, no triângulo *BED*, temos:

$ED = BD \cdot \text{sen } 15°$

Portanto:

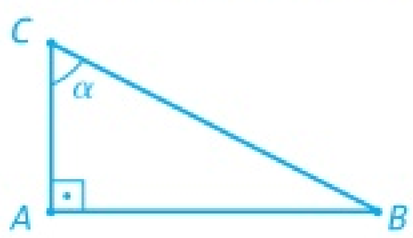
$ED = \sqrt{2} \text{ tg } 15° = \sqrt{2}(2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}$

Resposta: alternativa **a**.

16. (OBM) As cidades Aópolis, Beópolis e Ceópolis são ligadas por estradas retas. Sabe-se a estrada que liga Aópolis e Beópolis é perpendicular à estrada que liga Aópolis e Ceópolis. Rubens mora em Beópolis e tem um compromisso em Ceópolis. Todavia, a estrada que liga Beópolis a Ceópolis está interditada, de modo que Rubens é obrigado a fazer o trajeto Beópolis-Aópolis-Ceópolis. Para chegar ao compromisso na hora certa, Rubens trafega com uma velocidade 24% maior do que trafegaria se utilizasse a estrada interditada. Se α é o menor ângulo do triângulo determinado pelas três estradas, então:

a) $0 < \text{tg}\,\alpha < \frac{1}{6}$.
b) $\frac{1}{6} < \text{tg}\,\alpha < \frac{1}{5}$.
c) $\frac{1}{5} < \text{tg}\,\alpha < \frac{1}{4}$.
d) $\frac{1}{4} < \text{tg}\,\alpha < \frac{1}{3}$.
e) $\frac{1}{3} < \text{tg}\,\alpha < 1$.

Considere *A*: cidade Aópolis; *B*: cidade Beópolis; *C*: cidade Ceópolis.



Para chegar na hora certa, os trajetos devem ser realizados em tempos iguais. Assim:

$$\frac{AB + AC}{1{,}24v} = \frac{BC}{v} \Rightarrow AB + AC = 1{,}24\,BC = \frac{31}{25}\,BC$$

Como o triângulo *ABC* é retângulo em *A*, de acordo com o teorema de Pitágoras, temos que $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Mas: $(AB + AC)^2 = (1{,}24BC)^2 \Rightarrow AB^2 + 2AB \cdot AC + AC^2 = 1{,}24^2\,(AB^2 + AC^2) \Rightarrow \frac{336}{25^2}\,AB^2 - 2AB \cdot AC + \frac{336}{25^2}\,AC^2 = 0$

Dividindo a última equação por AC^2 e supondo que $\alpha = A\hat{C}B$ é o menor ângulo do triângulo *ABC*.

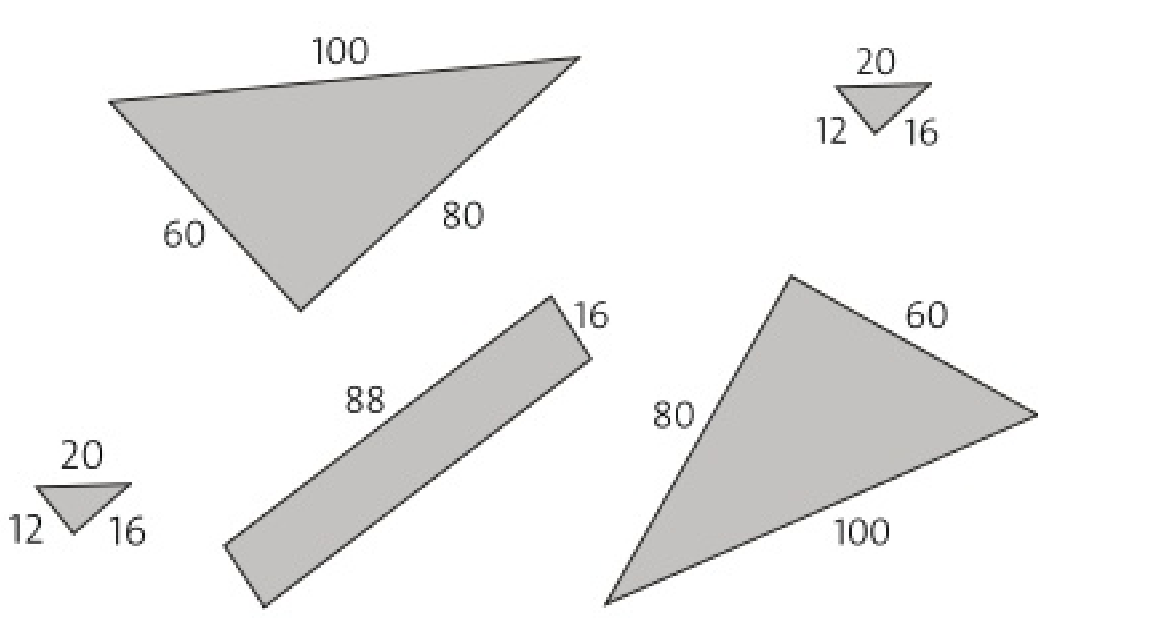
$$x = \text{tg}\,\alpha = \frac{AB}{AC} \text{ e } \frac{168}{25^2}\,x^2 - x + \frac{168}{25^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{24}$$

Então:

$$\frac{1}{4} < \frac{7}{24} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{4} < \text{tg}\,\alpha < \frac{1}{3}$$

Resposta: alternativa **d**.

17. (OBM) Abaixo estão representados quatro triângulos retângulos e um retângulo, bem como suas medidas.



Juntando todas essas figuras, podemos construir um quadrado. O lado desse quadrado irá medir:

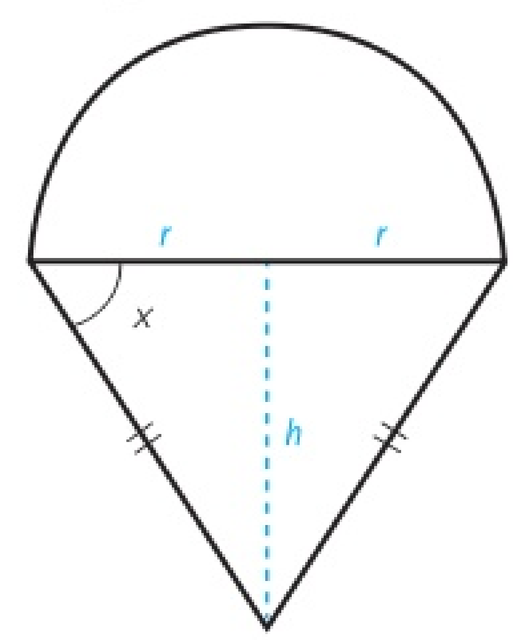
a) 88 cm.
b) 100 cm.
c) 60 cm.
d) 96 cm.
e) 80 cm.

A soma das áreas das cinco peças corresponde à área do quadrado que será montado com elas. Supondo que esse quadrado tenha lado medindo *x*, temos:

$$x^2 = 2 \cdot \frac{12 \cdot 16}{2} + 2 \cdot \frac{60 \cdot 80}{2} + 88 \cdot 16 \Rightarrow x^2 = 6\,400 \Rightarrow x = 80$$

Resposta: alternativa **e**.

18. (OBM) A ilustração abaixo mostra um semicírculo e um triângulo isósceles de mesma área. Qual é o valor de tg *x*?



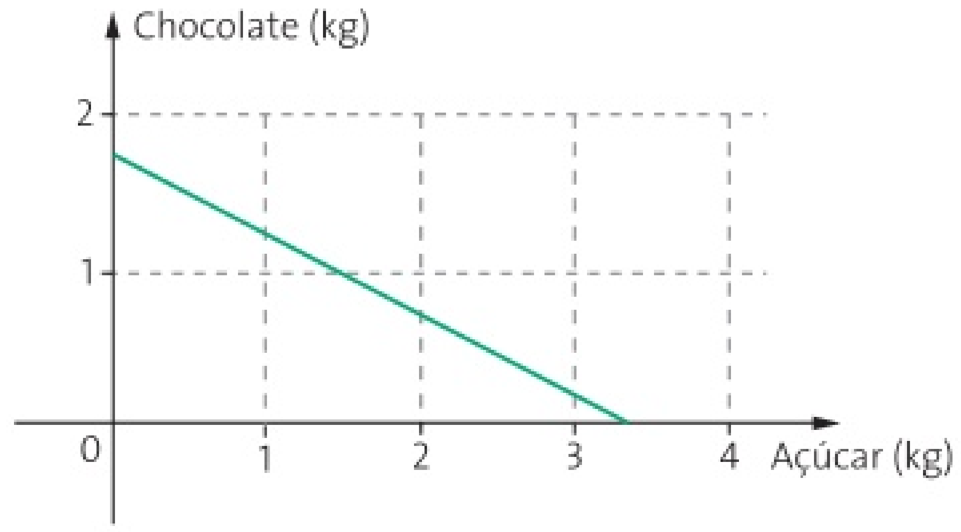
a) 1
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$
d) $\frac{2}{\pi}$
e) $\frac{\pi}{2}$

Pelo enunciado, o semicírculo e o triângulo possuem a mesma área, portanto:

$$\frac{1}{2}\,\pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h \Rightarrow \pi r = 2h \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{tg}\,x = \frac{\pi}{2}$$

Resposta: alternativa **e**.

19. (Obmep) Iara gastou R$ 10,00 para comprar açúcar e chocolate. A relação entre as quantidades desses ingredientes que podem ser compradas com essa quantia é dada pelo gráfico ao lado. Qual das seguintes afirmativas é verdadeira, independentemente das quantidades compradas?

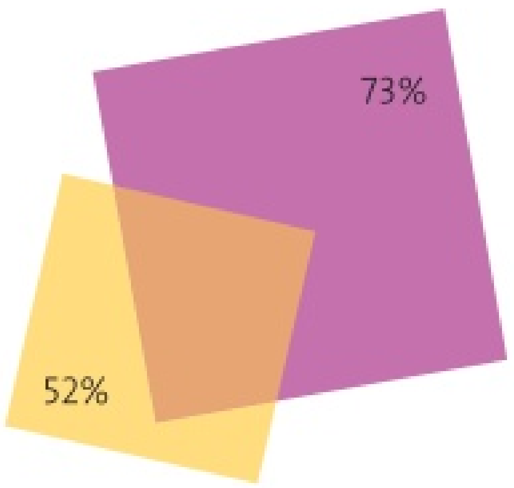


a) Iara comprou mais açúcar do que chocolate.
b) Iara comprou quantidades diferentes de açúcar e chocolate.
c) Iara gastou mais em chocolate do que em açúcar.
d) O preço de um quilo de chocolate é maior que o preço de um quilo de açúcar.
e) Iara comprou duas vezes mais chocolate do que açúcar.

A reta dada intersecta o eixo horizontal num ponto de abscissa maior do que 3 e ordenada menor do que 2. Assim, com R$ 10,00 Iara pode comprar um pouco mais do que 3 kg de açúcar ou um pouco menos do que 2 kg de chocolate, pois o quilo do chocolate custa mais que $\frac{10}{2} = 5$ reais e o quilo de açúcar menos que $\frac{10}{3} = 3{,}3$ reais.

Resposta: alternativa **d**.

20. (Obmep) Dois quadrados de papel se sobrepõem como na figura. A área não sobreposta do quadrado menor corresponde a 52% da área desse quadrado e a área não sobreposta do quadrado maior corresponde a 73% da área desse quadrado.



Qual é a razão entre os lados do quadrado menor e do quadrado maior?

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{7}$ e) $\frac{4}{5}$

Sejam x e y, respectivamente, as medidas dos lados do quadrado menor e do maior. A região comum corresponde a 48% da área do quadrado menor e a 27% do quadrado maior. Assim:

$$0{,}48x^2 = 0{,}27y^2 \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{0{,}27}{0{,}48} \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$$

Resposta: alternativa **a**.

21. (Obmep) Qual é o 21º termo da sequência abaixo?
(1 ; 2 + 3; 4 + 5 + 6; 7 + 8 + 9 + 10; 11 + 12 + 13 + 14 + 15; ...)

O primeiro termo é a soma de uma parcela, o segundo termo é a soma de duas parcelas; o terceiro termo, a soma de três parcelas; ... até o termo que queremos, o 21º, que será a soma de 21 parcelas.

$a_1 = 1$
$a_2 = 2 + 3$
$a_3 = 4 + 5 + 6$
$a_4 = 7 + 8 + 9 + 10$
$\vdots$

Considerando a sequência formada pelos primeiros termos das somas que constituem os termos da sequência original, temos (1, 2, 4, 7, ...).

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 7, \ldots$

Precisamos saber qual o 21º termo desta sequência, que corresponde ao 1º termo da soma de 21 números naturais consecutivos que determinam o termo a_{21}. Portanto:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 - x_1 = 1 \\ x_3 - x_2 = 2 \\ x_4 - x_3 = 3 \\ \ldots \\ x_{21} - x_{20} = 20 \end{cases}$$

Adicionando membro a membro estas últimas igualdades, temos:

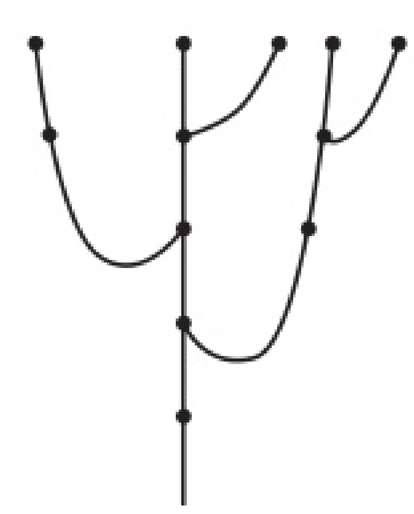
$x_{21} = 1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 20 = 211.$

Assim:

$a_{21} = 211 + 212 + 213 + 231 = 4\,641.$

Resposta: 4 641.

22. (Obmep) A árvore de Emília (ao lado) cresce de acordo com a seguinte regra: após 2 semanas do aparecimento de um galho, esse mesmo galho produz um novo galho a cada semana, e o galho original continua a crescer.
A árvore tem 5 galhos depois de 5 semanas, como mostra a figura. Quantos galhos, incluindo o galho principal a árvore terá no final de 8 semanas?



Seja x_n o número de galhos presentes na árvore após n semanas contadas desde o início. De acordo com o enunciado, após 2 semanas aparece um galho, ou seja, $x_2 = 1$. Na semana seguinte este galho produz mais um galho, fazendo com que haja 2 galhos e portanto $x_3 = 2$. De acordo com o enunciado, o número de galhos na $(n+1)$-ésima semana será igual ao número de galhos que existiam na n-ésima semana, mais os galhos novos.
Mas os galhos novos nascem dos galhos que têm pelo menos duas semanas (durante aquela semana), isto é, nasce um galho novo para cada galho que existia na semana $n - 1$, matematicamente, $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$.

Como $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$, temos:

- $x_4 = x_3 + x_2 = 2 + 1 = 3$
- $x_5 = x_4 + x_3 = 3 + 2 = 5$
- $x_6 = x_5 + x_4 = 5 + 3 = 8$
- $x_7 = x_6 + x_5 = 8 + 5 = 13$
- $x_8 = x_7 + x_6 = 13 + 8 = 21$

Resposta: 21 galhos.

Observação: A sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n$ obtida é a famosa sequência de Fibonacci.

23. (OMRN) Seja f uma função satisfazendo a equação $f(x) + 1\,995 \cdot f(2 - x) = (x - 1)^5$. Então, o valor de $f(0)$ é:

a) 0.

b) $\dfrac{1}{1996}$.

c) $-\dfrac{1}{1996}$.

d) $-\dfrac{1}{1995}$.

e) $\dfrac{1}{1994}$.

Fazendo $x = 0$ e $x = 2$ em $f(x) + 1\,995 \cdot f(2 - x) = (x - 1)^5$, obtemos:

$$\begin{cases} f(0) + 1\,995 \cdot f(2) = -1 \\ f(2) + 1\,995 \cdot f(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(0) = \frac{1}{1994}$$

Resposta: alternativa **e**.

24. (OMRN) Determine inteiros positivos m e n tais que $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{2\,009}$.

Decompondo 2 009 em fatores primos, $2\,009 = 7^2 \cdot 41$. Assim:

$\sqrt{2\,009} = \sqrt{7^2 \cdot 41} = 7\sqrt{41} = 6\sqrt{41} + \sqrt{41} =$

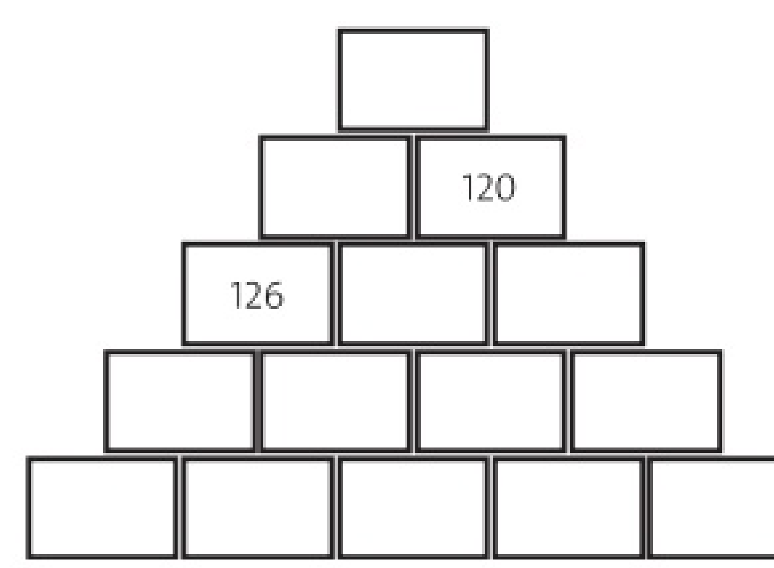
$= \sqrt{6^2 \cdot 41} + \sqrt{41} = \sqrt{1\,476} + \sqrt{41}$

Resposta: $m = 1\,467$ e $n = 41$.

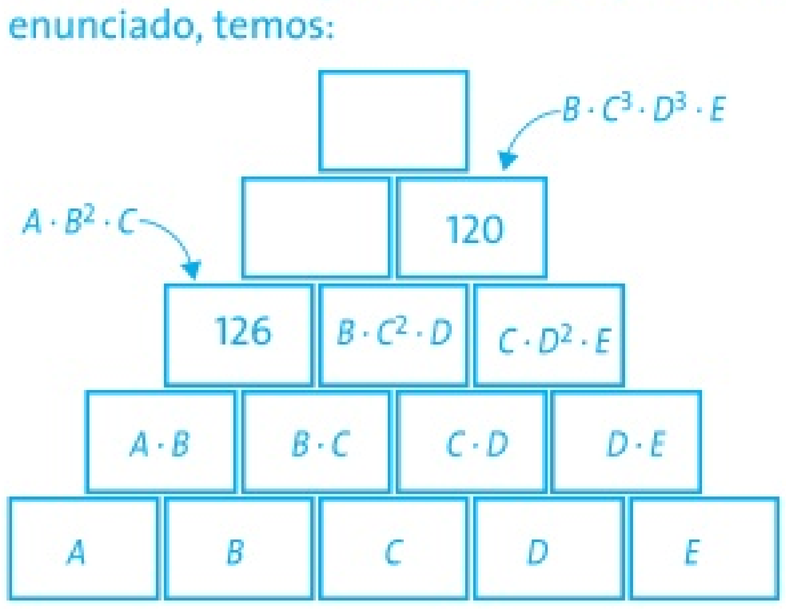
Observação: Outras soluções poderiam ser obtidas das seguintes formas:

- $\sqrt{2\,009} = \sqrt{7^2 \cdot 41} = 7\sqrt{41} = 5\sqrt{41} + 2\sqrt{41} =$
  $= \sqrt{5^2 \cdot 41} + \sqrt{2^2 \cdot 41} = \sqrt{1025} + \sqrt{164}$
- $\sqrt{2\,009} = \sqrt{7^2 \cdot 41} = 7\sqrt{41} = 4\sqrt{41} + 3\sqrt{41} =$
  $= \sqrt{4^2 \cdot 41} + \sqrt{3^2 \cdot 41} = \sqrt{656} + \sqrt{369}$

25. (OCM-PB) Uma pirâmide é formada por pedras com números naturais, cada uma delas se apoia sobre duas outras com exceção das pedras da base que estão apoiadas no chão. Dizemos que a pirâmide é multiplicativa quando o número escrito em cada pedra corresponde ao produto dos dois números que se encontram escritos nas pedras imediatamente abaixo dela. Por exemplo, se duas pedras vizinhas (numa mesma linha horizontal) tiverem os números 5 e 6, a pedra acima que nelas se apoia terá o número $30 = 5 \cdot 6$. Conhecidos os números indicados na figura ao lado e sabendo que nas pedras da base nenhum deles é maior do que 12, identifique, na figura, todos os números que faltam para completar a pirâmide multiplicativa.



Preenchendo os tijolos da base da pirâmide com as incógnitas A, B, C, D e E, e os demais utilizando a regra de preenchimento citada no enunciado, temos:



Como $126 = 2 \cdot 32 \cdot 7$ e o número 7 só aparece na decomposição do 126, temos que $A = 7$, visto que é menor do que 12.
O número 5 aparece apenas na decomposição do 120, logo $E = 5$.
B tem expoente 2, em 126, e 1, em 120, logo $B = 3$.
Já C, tem expoente 3 em 120 e 1 em 126, logo $C = 2$.
Finalmente, $D = 1$.
Portanto, o preenchimento da pirâmide multiplicativa é:

26. (OMRN) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as seguintes condições:

I. $|f(a) - f(b)| \leqslant |a - b|, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

II. $f(f(f(0))) = 0$

Mostre que $f(0) = 0$.

$|f(0)| = |f(0) - 0| \geqslant |f(f(0)) - f(0)| = |f(f(f(0))) - f(f(0))| = |0 - f(f(0))| = |-f(f(0))| = |f(f(0))| \Rightarrow |f(0)| \geqslant |f(f(0))|$

Mas:

$|f(f(0))| = |f(f(0)) - 0| \geqslant |f(f(f(0))) - f(0)| = |0 - f(0)| = |-f(0)| = |f(0)| \Rightarrow |f(f(0))| \geqslant |f(0)|$

Portanto:

$|f(0)| \geqslant |f(f(0)|$ e $|f(f(0))| \geqslant |f(0)| \Rightarrow |f(f(0))| = |f(0)| \Rightarrow f(f(0)) = f(0)$ ou $f(f(0)) = -f(0)$

Assim:

- $f(f(0) = f(0) \Rightarrow 0 = f(f(f(0)) = f(f(0)) = f(0)$
- $f(f(0)) = -f(0) \Rightarrow |f(0)| = |f(0) - 0| \geqslant |f(f(0)) - f(0)| = |-f(0) - f(0)| = |-2f(0)| = |2f(0)| \Rightarrow |f(0)| \geqslant 2|f(0)| \Rightarrow |f(0)| \leqslant 0$

Mas $|f(0)| \geqslant 0$. Assim:

$|f(0)| \geqslant 0$ e $|f(0)| \leqslant 0 \Leftrightarrow |f(0)| = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

27. (OPM-PB) Mostre que a equação $2^x + 3^x = 6^x$ tem uma única solução real que pertence ao intervalo (0, 1).

Dividindo-se ambos os membros da equação $2^x + 3^x = 6^x$ por 6^x, obtemos:

$$\frac{2^x + 3^x}{6^x} = \frac{6^x}{6^x} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$$

Agora, podemos considerar duas funções reais:

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$;
- $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 1$.

Assim, resolver a equação $\left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$ equivale a determinar os valores de x para os quais as funções f e g coincidem. Note que f é uma função decrescente de x que se aproxima de 0 quando x vai para mais infinito e cresce acima de qualquer valor fixado quando x vai para menos infinito, enquanto g é uma função constante.

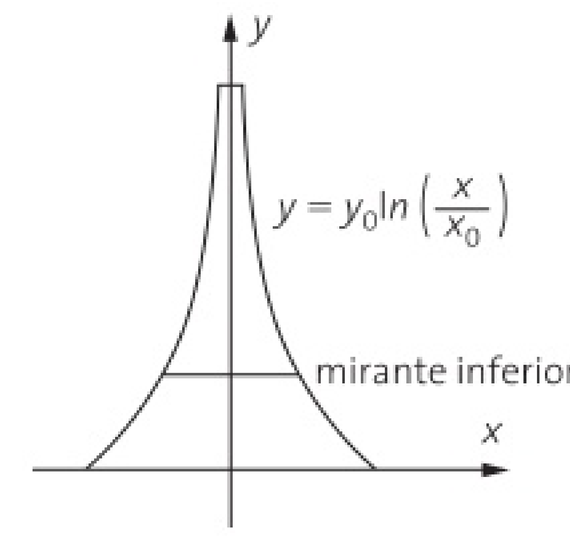
Como f e g são funções contínuas, seus gráficos só podem intersectar-se num único ponto, que pertence ao intervalo (0, 1). Logo:

$x < 0 \to f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x > 1$

e

$x > 1 \to f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$

28. (OPM-SP) O perfil da Torre Eiffel é aproximadamente igual à curva $y = -y_0 ln\left(\dfrac{x}{x_0}\right)$, onde $2x$ é a largura da Torre à altura y e x_0 e y_0 são constantes (observe que a equação acima representa somente a curva que está à direita; a curva da esquerda é a simétrica da direita em relação ao eixo Oy).



Sabe-se que o mirante inferior, a 45 metros de altura, tem 66 metros de largura e que a Torre Eiffel, no solo, tem 120 metros de largura (valores aproximados).

a) Calcule x_0 e y_0.

b) Supondo que o topo da torre tem 2,2 metros de largura, calcule a altura da Torre Eiffel.

Observação: Você pode querer usar as aproximações $e^{-4} = \dfrac{11}{600}$ e $e^{-\frac{3}{5}} = \dfrac{11}{20}$.

a) De acordo com os dados do enunciado, os pontos de coordenadas cartesianas (33, 45) e (60, 0) pertencem à curva de equação cartesiana $y = -y_0 \ln\left(\dfrac{x}{x_0}\right)$. Assim:

$$y = -y_0 \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \Rightarrow \begin{cases} 45 = -y_0 ln\left(\dfrac{33}{x_0}\right) \\ 0 = -y_0 ln\left(\dfrac{60}{x_0}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ln\left(\dfrac{33}{x_0}\right) = -\dfrac{45}{y_0} \\ ln\left(\dfrac{60}{x_0}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{60}{x_0} = 1 \Rightarrow x_0 = 60 \end{cases}$$

Mas:

$$\ln\left(\frac{33}{x_0}\right) = -\frac{45}{y_0} \Rightarrow y_0 = -\frac{45}{\ln\left(\dfrac{33}{x_0}\right)} = -\frac{45}{ln\left(\dfrac{33}{60}\right)} = -\frac{45}{ln\, e^{-\frac{3}{5}}} = -\frac{45}{-\dfrac{3}{5}} = 75$$

Resposta: $x_0 = 60$; $y_0 = 75$.

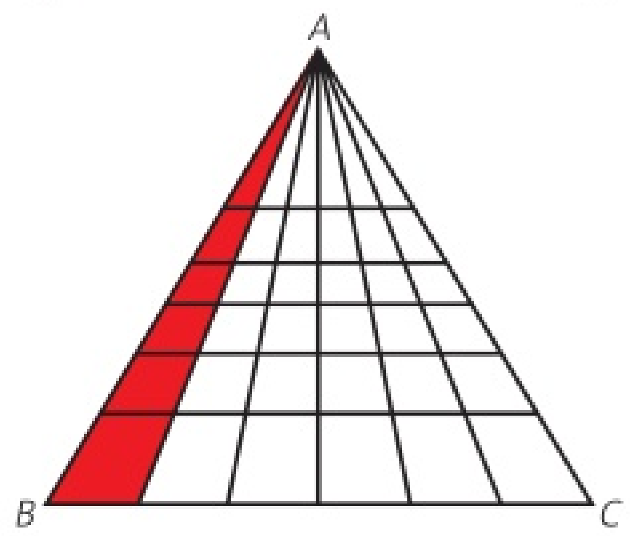
b) Como $x_0 = 60$ e $y_0 = 75$, segue que a curva que representa o perfil da Torre Eiffel tem equação cartesiana $y = -75 ln\left(\dfrac{x}{60}\right)$. Mas, como o topo da torre tem 2,2 m de largura, segue que o ponto $P(1 \cdot 1, h)$, onde h representa a altura da torre, pertence à curva $y = -75 ln\left(\dfrac{x}{60}\right)$. Portanto:

$$y = -75 ln\left(\frac{x}{60}\right) \Rightarrow h = -75 ln\left(\frac{1{,}1}{60}\right) = -75 ln\left(\frac{11}{600}\right) = -75 ln\, e^{-4} = -75 \cdot (-4) = 300$$

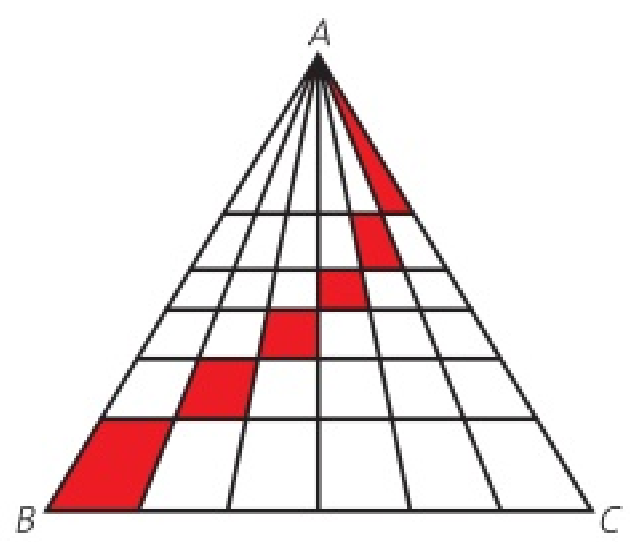
Resposta: 300 m.

29. (OPM-SP) Um triângulo equilátero ABC de lado 6 cm teve sua base $\overline{BC}$ dividida em 6 partes iguais, como nas figuras a seguir. Todos os segmentos horizontais são paralelos à base $\overline{BC}$.

a) Determine a área da região pintada. Justifique sua resposta.



b) Determine a soma das áreas das regiões pintadas. Justifique sua resposta.

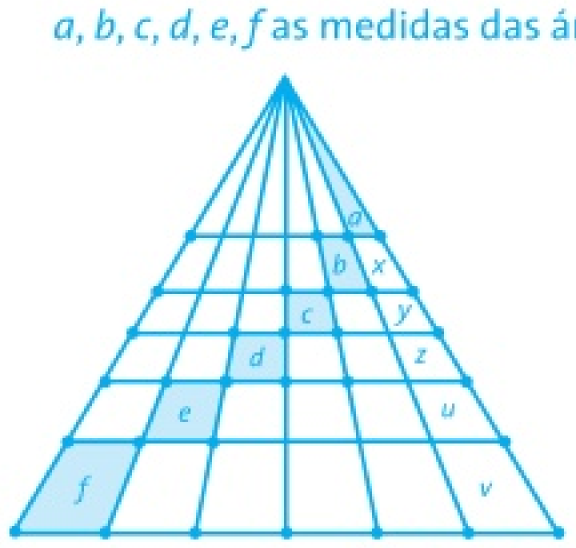


a) A área de um triângulo equilátero de lado medindo 6 cm é $\frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ cm². Como a base do triângulo foi dividida em 6 partes iguais, o triângulo pintado de vermelho tem a mesma altura do triângulo original e $\frac{1}{6}$ de sua área. Portanto:

$\frac{1}{6} \cdot 9\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

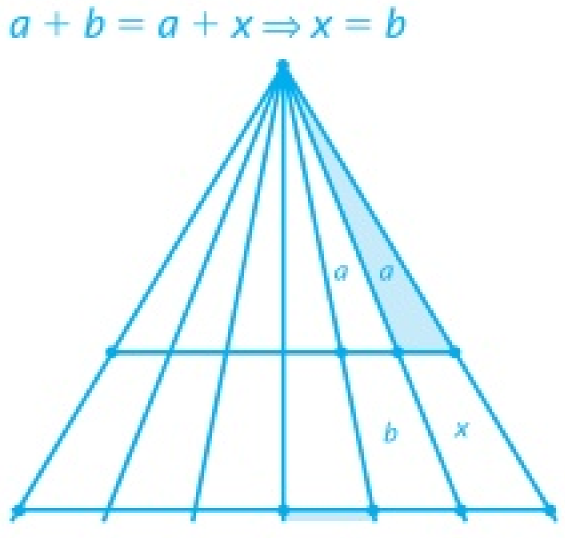
Resposta: $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm².

b) Em cada linha, a região pintada de vermelho possui a mesma área que cada uma das regiões vizinhas em uma mesma linha. Considerando a, b, c, d, e, f as medidas das áreas indicadas na figura abaixo:



Vamos mostrar, por exemplo, que $x = b$. As demais igualdades, $y = c$, $z = d$, $u = e$ e $v = f$, podem ser obtidas de modo completamente análogo, utilizando os triângulos apropriados. Assim, os dois triângulos da figura abaixo indicados pela letra a possuem a mesma área, pois possuem a mesma base e a mesma altura. Por esse mesmo motivo,

$a + b = a + x \Rightarrow x = b$



"Transferindo" todas as áreas vermelhas para um mesmo triângulo (ou o da extrema esquerda ou o da extrema direita), temos que a soma das áreas das figuras pintadas de vermelho, assim como no item **a**, corresponde a $\frac{1}{6}$ da área total do triângulo original. Portanto:

$\frac{1}{6} \cdot 9\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

Resposta: $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm².

30. (OPM-SP) No número 5 da revista *Eureka*, da SBM, à página 6, veio a seguinte nota:
O maior número primo conhecido é $2^{6\,972\,594} - 1$, que tem 2 098 960 dígitos e foi descoberto em 1/6/1999 por Nayan Hafratwala, um participante do GIMPS, um projeto cooperativo para procurar primos de Mersenne.

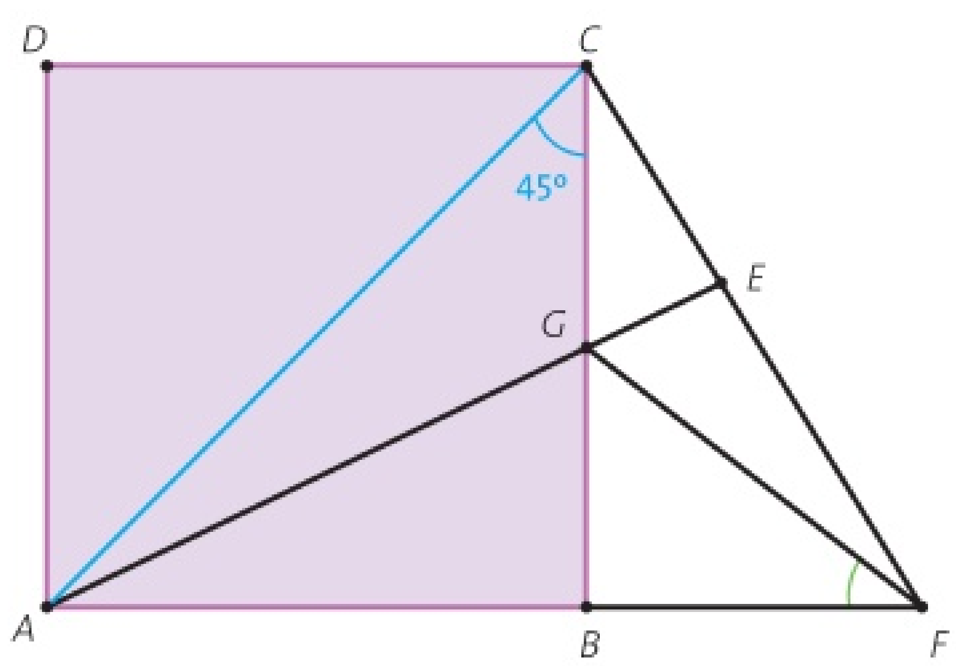
a) Mostre que se um número inteiro positivo N tem k algarismos, então $k - 1 \leqslant \log N < k$.

b) A partir das informações anteriores, determine um valor aproximado de log 2. (Apresente sua resposta com cinco casas decimais depois da vírgula.)

a) Se um número inteiro N tem k algarismos, $10^{k-1} \leqslant N < 10^k$.
Aplicando logaritmo decimal nos três membros desta última desigualdade, temos:
$10^{k-1} \leqslant N < 10^k \Rightarrow \log (10^{k-1}) \leqslant \log N < \log (10^k) \Rightarrow k - 1 \leqslant \log N < k$

b) Como (de acordo com o enunciado) $2^{6\,972\,594} - 1$, tem 2 098 960 dígitos, temos:
$2\,098\,960 - 1 \leqslant \log (2^{6\,972\,594} - 1) < 2\,098\,960 \Rightarrow 2\,098\,959 \leqslant \log (2^{6\,972\,594} - 1) < 2\,098\,960$
Portanto, a parte inteira de $\log (2^{6\,972\,594} - 1)$ é 2 098 959.
Mas:
$\log (2^{6\,972\,594} - 1) \approx \log 2^{6\,972\,594} = 6\,972\,594 \cdot \log 2$
Assim:
$6\,972\,594 \cdot \log 2 \approx 2\,098\,959 \Rightarrow \log 2 \approx 0{,}30102$
Resposta: 0,30102.

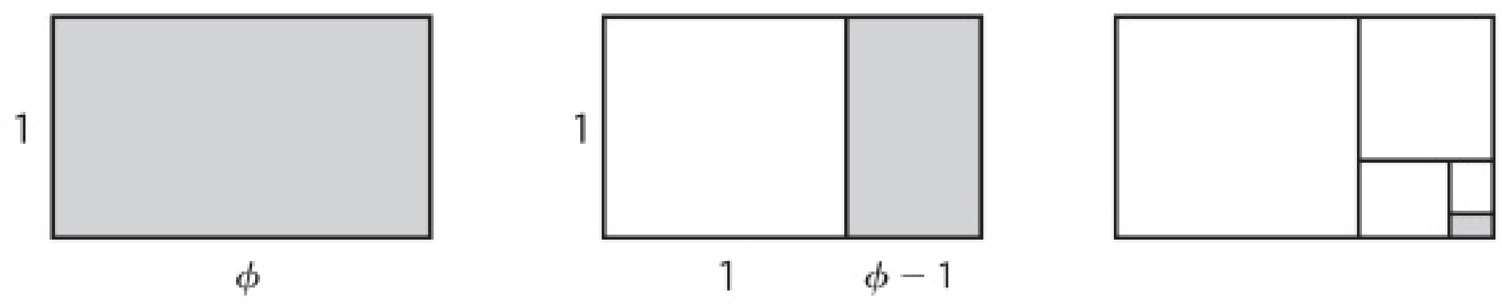
31. (OMCS) Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado. Sabendo que $\overline{AE} \perp \overline{CF}$. Determine a medida do ângulo $B\hat{F}G$.



Temos que $\overline{BC}$ e $\overline{AE}$ são alturas e que G é ortocentro do triângulo ACF. Portanto, o prolongamento de $\overline{FG}$ intersecta $\overline{AC}$ perpendicularmente. Logo, $B\hat{F}G = 45°$.
Resposta: 45°.

32. (OMRN) Um retângulo de ouro é um retângulo de dimensões $1 \times \phi$, onde $\phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ é a conhecida razão áurea.

Este tipo de retângulo goza da propriedade de que ele pode ser dividido num quadrado e num retângulo semelhante ao retângulo original. Este processo continua infinitamente conforme ilustra a figura abaixo:



Diante do exposto, mostre que $1 + \dfrac{1}{\phi^2} + \dfrac{1}{\phi^4} + \dfrac{1}{\phi^6} + ... = \phi$.

$\left(1, \dfrac{1}{\phi^2}, \dfrac{1}{\phi^4}, \dfrac{1}{\phi^6}, ...\right)$ é uma progressão geométrica infinita com primeiro termo igual a 1 e razão $q = \dfrac{1}{\phi^2}$, $0 < q < 1$, pois $\phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} > 1$.

Lembrando que a soma dos infinitos termos de uma série geométrica infinita com primeiro termo a_1 e com razão q tal que $|q| < 1$ é dada por $S = \dfrac{a_1}{1-q}$, temos:

$$1 + \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^4} + \frac{1}{\phi^6} + ... = \frac{1}{1 - \frac{1}{\phi^2}} = \frac{\phi^2}{\phi^2 - 1}$$

Mas, de acordo com o enunciado, o segundo retângulo sombreado é semelhante ao primeiro, o que equivale a dizer que as medidas dos seus lados são proporcionais, ou seja:

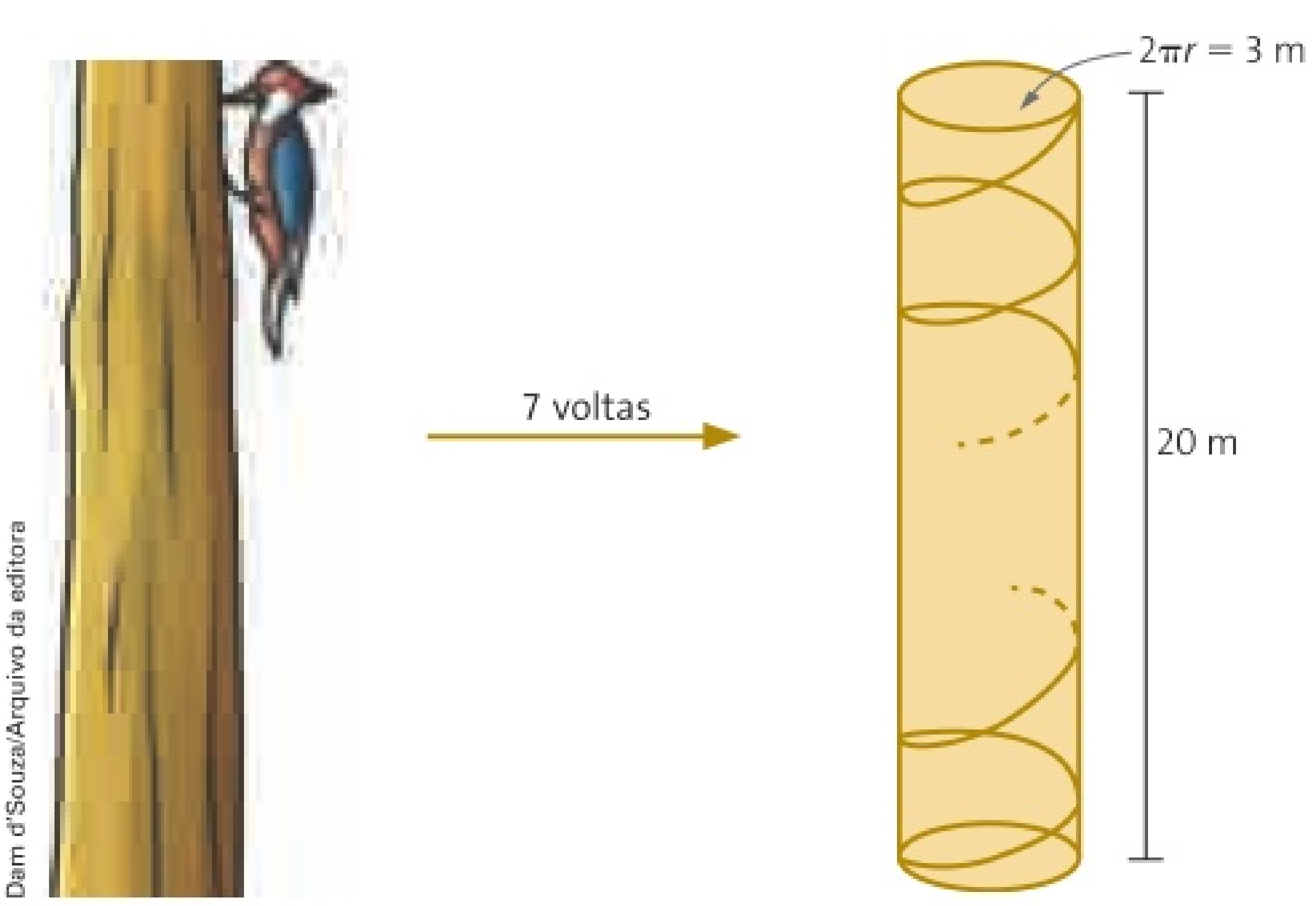
$$\frac{\phi - 1}{1} = \frac{1}{\phi} \Rightarrow \phi^2 - \phi = 1 \Rightarrow \phi^2 - 1 = \phi$$

Portanto:

$$1 + \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^4} + \frac{1}{\phi^6} + ... = \frac{1}{1 - \frac{1}{\phi^2}} = \frac{\phi^2}{\phi^2 - 1} = \frac{\phi^2}{\phi} = \phi$$

---

33. (OMEG) Um pica-pau marca a bicadas seu caminho descendo o tronco de uma árvore, começando 20 metros acima do nível do solo. O pássaro segue uma trajetória em espiral (hélice cilíndrica) e dá a volta sete vezes na circunferência de 3 metros [de comprimento] da árvore. Determine a distância total percorrida pelo pica-pau.



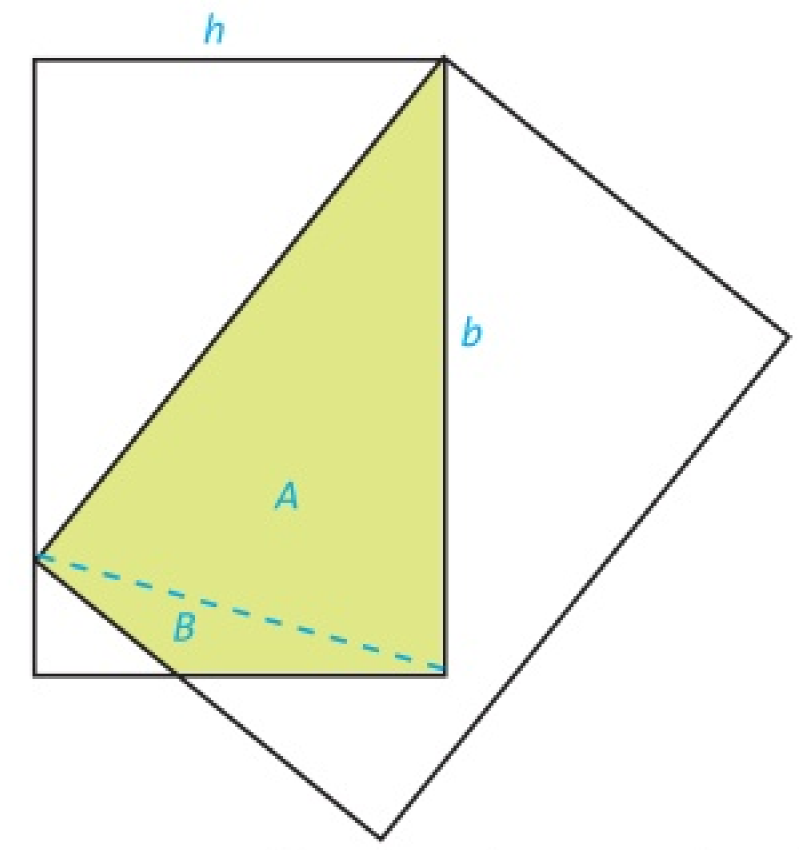
Dam d'Souza/Arquivo da editora

Imagine a árvore como um cilindro reto e a espiral descrita pelo pica-pau como uma linha desenhada sobre a superfície do cilindro. Se planificássemos a superfície lateral desse cilindro, a espiral planificada seria uma das diagonais de um retângulo de lados 20 m e 21 m (7×3).
Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$\sqrt{20^2 + 21^2} = 29$

Resposta: 29 m.

34. (OMRN) O professor Paulinho deixou desatentamente sobre uma mesa dois exemplares do livro "OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RN" de modo que um dos exemplares cobre parcialmente a capa do outro, conforme ilustra a figura da esquerda representada a seguir.



Considerando que os exemplares possuem o formato perfeitamente retangular, descubra, justificando a sua resposta, se a medida da área da região comum às capas, que está representada sombreada na figura da direita, é maior, menor ou igual à metade da medida da área total da capa de cada um dos exemplares.

Sendo b e h os comprimentos dos dois lados do retângulo que representa a capa de um dos livros, segue que a área de uma das capas é $S = b \cdot h$. A área da região comum às duas capas é $A + B$. Mas:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{S}{2}$$

Como $B > 0$, temos:

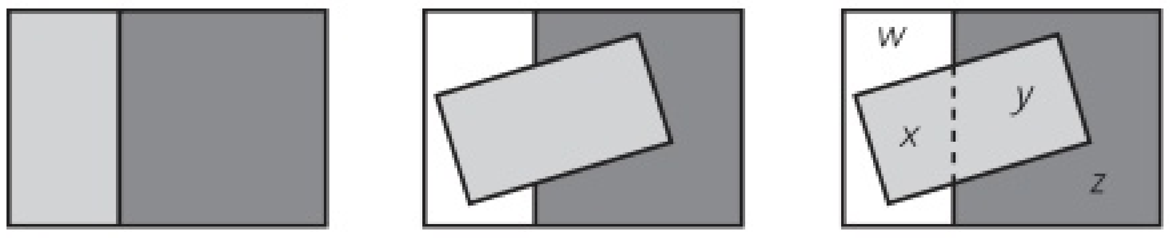
$$A + B = \frac{S}{2} + B > \frac{S}{2}$$

Portanto, a área comum às duas capas é maior do que a área total da capa de um dos exemplares do livro.

Resposta: Maior.

---

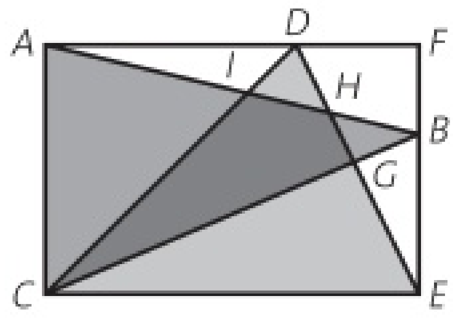
35. (OPM-SP) Um fato relativamente simples sobre áreas e que muitas vezes ajuda a resolver problemas complexos é o Teorema dos Carpetes:



Colocamos dois carpetes em um dormitório. Se a soma das áreas dos carpetes é igual à área do dormitório, então a área da intersecção dos carpetes é igual à área da região não coberta por carpetes.

a) Utilizando a notação dada pela figura, isto é, w é a região branca, z é a região cinza escuro, e a região cinza claro é composta pelas regiões x e y, sendo que a região y é a intersecção dos carpetes, prove o Teorema dos Carpetes, ou seja, prove que $y = w$.

b) Na figura a seguir, $ACEF$ é um retângulo. Prove que a área mais escura (quadrilátero $CGHI$) é igual à soma das três áreas brancas.



a) Sejam S e s as áreas dos dois carpetes. Por hipótese, $S + s$ é igual a área da sala. Mas:
$S = y + z$ e $s = x + y$.
Assim:
$A_{sala} = S + s \Leftrightarrow x + w + y + z = y + z + x + y \Leftrightarrow w = y$

b) As áreas dos triângulos ABC e CDE são iguais à metade da área do retângulo $ACEF$ (pois cada um deles tem a mesma base e a mesma altura do retângulo $ACEF$).
Assim, a soma das áreas destes dois triângulos é igual à área total do retângulo $ACEF$. Logo, pelo Teorema dos Carpetes, a área da região coberta simultaneamente pelos dois carpetes (região de intersecção) é igual à área da região que não está coberta pelos dois (área da região branca).

36. (IMTOT) Calcule a soma:

$$S = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{2\,005}}}}} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{2\,005}}}}}}$$

Perceba que a expressão $1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{2\,005}}}}$ é comum às duas frações da soma pedida.

Portanto, consideramos:

$$a = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{2005}}}}$$

Logo:

$$S = \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{2\,005}}}}} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{2\,005}}}}}} = \frac{1}{1+a} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a}} = \frac{1}{1+a} + \frac{a}{1+a} = \frac{1+a}{1+a} = 1$$

Resposta: 1.

37. (USAMO) Seja $f(x) = \dfrac{2}{4^x + 2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule o valor da expressão:

$$S = f\left(\frac{1}{2\,001}\right) + f\left(\frac{2}{2\,001}\right) + f\left(\frac{3}{2\,001}\right) + \ldots + f\left(\frac{2\,000}{2\,001}\right).$$

Sendo $f(a) + f(1 - a) = 1, \forall\, a \in \mathbb{R}$ e $f(x) = \dfrac{2}{4^x + 2}$, temos:

$$f(a) + f(1-a) = \frac{2}{4^a + 2} + \frac{2}{4^{1-a} + 2} = \frac{2}{4^a + 2} + \frac{2}{\frac{4}{4^a} + 2} = \frac{2}{4^a + 2} + \frac{2 \cdot 4^a}{4 + 2 \cdot 4^a} = \frac{2}{4^a + 2} + \frac{2 \cdot 4^a}{2(4^a + 2)} = \frac{2}{4^a + 2} + \frac{4^a}{4^a + 2} =$$
$$= \frac{4^a + 2}{4^a + 2} = 1$$

Então:

$$\frac{2\,000}{2\,001} = 1 - \frac{1}{2\,001},\ \frac{1999}{2\,001} = 1 - \frac{2}{2\,001}, \ldots,\ \frac{1001}{2\,001} = 1 - \frac{1000}{2\,001}$$

Finalmente a soma $S = f\left(\frac{1}{2\,001}\right) + f\left(\frac{2}{2\,001}\right) + f\left(\frac{3}{2\,001}\right) + \ldots + f\left(\frac{2\,000}{2\,001}\right)$ tem 2 000 parcelas que podem ser agrupadas de duas em duas em que a soma dá 1. Logo:

$$S = f\left(\frac{1}{2\,001}\right) + f\left(\frac{2}{2\,001}\right) + f\left(\frac{3}{2\,001}\right) + \ldots + f\left(\frac{2\,000}{2\,001}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \left[f\left(\frac{1}{2\,001}\right) + f\left(\frac{2\,000}{2\,001}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2\,001}\right) + f\left(\frac{1999}{2\,001}\right)\right] + \ldots + \left[f\left(\frac{1000}{2\,001}\right) + f\left(\frac{1001}{2\,001}\right)\right] \Rightarrow$$

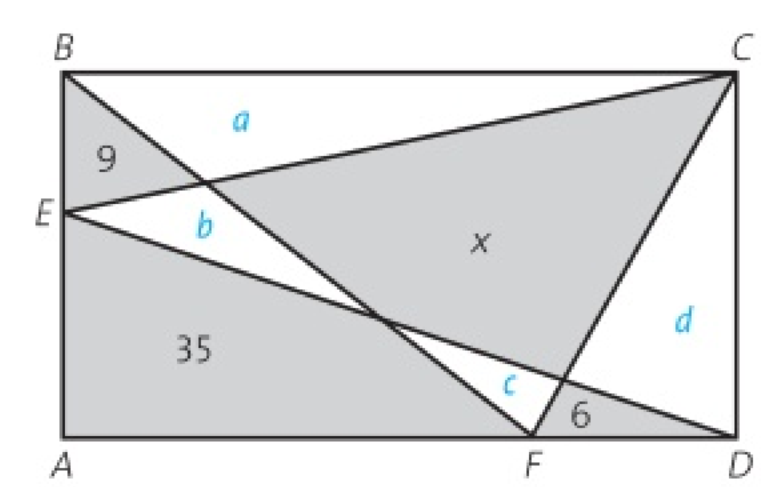
$$\Rightarrow S = \left[f\left(\frac{1}{2\,001}\right) + f\left(1 - \frac{1}{2\,001}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2\,001}\right) + f\left(1 - \frac{2}{2\,001}\right)\right] + \ldots + \left[f\left(\frac{1000}{2\,001}\right) + f\left(1 - \frac{1000}{2\,001}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{1\,000 \text{ parcelas}} = 1\,000$$

Resposta: $S = 1\,000$

---

38. (CruxMathematicorum-Canadá) Os segmentos $\overline{DE}$, $\overline{CE}$, $\overline{BF}$ e $\overline{CF}$ dividem o retângulo $ABCD$ em regiões menores. Quatro destas regiões, dois triângulos e dois quadriláteros, estão hachuradas na figura ao lado. As medidas das áreas das regiões hachuradas são 9, 35, 6 e x. Determine o valor de x.



Considerando a área $A_{ABCD} = S$, temos:

- $A_{CDE} = \dfrac{A_{ABCD}}{2} = \dfrac{S}{2} \Rightarrow b + x + d = \dfrac{S}{2}$ (1)

  Pois o triângulo CDE e o retângulo $ABCD$ possuem a mesma base e a mesma altura.

- $A_{BCF} = \dfrac{A_{ABCD}}{2} = \dfrac{S}{2}$

  Pois o triângulo BCF e o retângulo $ABCD$ possuem a mesma base e a mesma altura.

Então:

$$\underbrace{A_{BCF}}_{\frac{S}{2}} + A_{ABF} + A_{CDF} = A_{ABCD} \Rightarrow A_{ABF} + A_{CDF} = \frac{S}{2} \Rightarrow 9 + b + 35 + 6 + d = \frac{S}{2} \text{ (2)}$$

Portanto, de (1) e (2), concluímos:

$$\begin{cases} b + x + d = \dfrac{S}{2} \\ 9 + b + 35 + 6 + d = \dfrac{S}{2} \end{cases} \Rightarrow b + x + d = 9 + b + 35 + 6 + d \Rightarrow x = 50$$

Observação: Pelo Teorema dos Carpetes (exercício 35), se os carpetes forem os $\triangle BFC$ e $\triangle CDE$, cuja soma de suas áreas é a área do retângulo $ABCD$, é imediato que:
$x = 9 + 35 + 6 = 50$
Resposta: $x = 50$.

39. (RPM) Determine todos os números naturais m e n tais que $2^8 + 2^{11} + 2^m = n^2$.

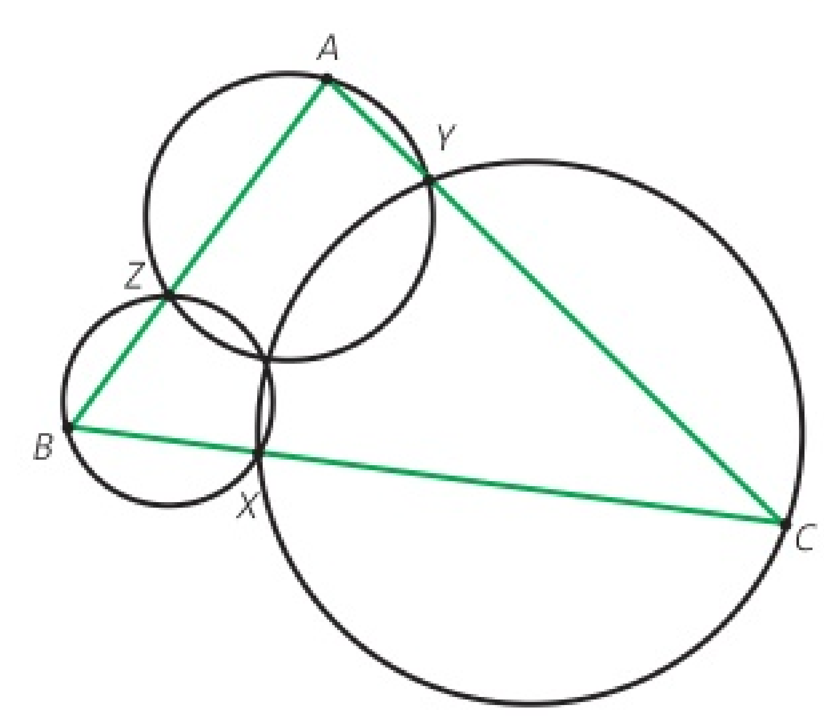
$2^8 + 2^{11} + 2^m = n^2 = (2^4)^2 + 2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 + 2^m = n^2$

O único valor de m para que o primeiro membro seja um quadrado perfeito é $m = 12$. Então:

$(2^4)^2 + 2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 + 2^{12} = n^2 \Rightarrow (2^4 + 2^6)^2 = n^2 \Rightarrow n = 2^4 + 2^6 = 80$, pois $n > 0$.

Resposta: $m = 12$ e $n = 80$.

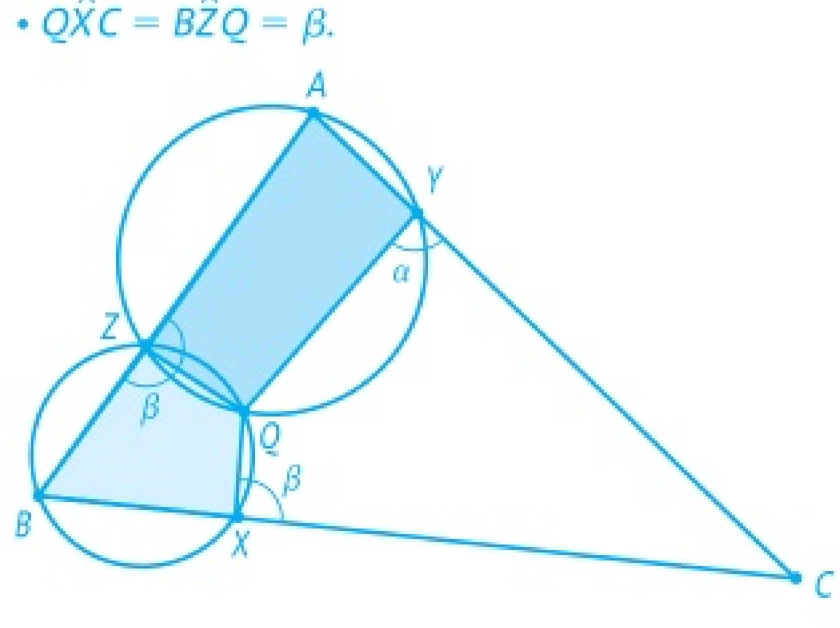
40. (RPM) Considere um triângulo ABC e pontos X, Y e Z nos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, tais que A, B, C, X, Y e Z são todos distintos entre si. Mostre que as circunferências circunscritas aos triângulos AYZ, BZX e CXY têm um ponto em comum.



Seja Q o ponto de intersecção das circunferências circunscritas aos triângulos AYZ e BXZ, vamos provar que a circunferência circunscrita ao triângulo CXY também passa por esse ponto, que é comum às três circunferências.

Os quadriláteros $AZQY$ e $BXQZ$ são inscritíveis, portanto:

- $Q\hat{Y}C = A\hat{Z}Q = \alpha$.
- $Q\hat{X}C = B\hat{Z}Q = \beta$.



Como $\alpha + \beta = 180°$, o quadrilátero $XCYQ$ é inscritível e, portanto, a circunferência circunscrita ao triângulo CXY também passa pelo ponto Q, que é comum às circunferências circunscritas aos triângulos AYZ, BZX e CXY. (Esse ponto é conhecido na literatura como Ponto de Miquel do triângulo ABC).

Respostas

Vestibular em foco

Conjuntos

1. b
2. d
3. e
4. c
5. a
6. d
7. b
8. d
9. b
10. c
11. d
12. e
13. d

Funções

1. a
2. b
3. e
4. c
5. c
6. b
7. e
8. e
9. d
10. c
11. c
12. e
13. c
14. d
15. d
16. d
17. d
18. a
19. a
20. a
21. b
22. c
23. e
24. 24
25. b

Função afim

1. a
2. b
3. d
4. c
5. b
6. a
7. d
8. e
9. 02
10. c
11. c
12. c
13. b
14. e
15. c
16. b
17. 80
18. a
19. d
20. c
21. d

Função quadrática

1. b
2. a
3. c
4. d
5. e
6. e
7. b
8. 02
9. b
10. d
11. c
12. a
13. 01
14. b
15. b
16. e
17. b

Função exponencial

1. b
2. b
3. a
4. e
5. c
6. e
7. b
8. 25 600 reais
9. c
10. a
11. e
12. c
13. b
14. a
15. b
16. b
17. b
18. d
19. b
20. c
21. c
22. a
23. a
24. a
25. e
26. c
27. b
28. b
29. a

Logaritmos

1. b
2. e
3. b
4. b
5. d
6. b
7. c
8. d
9. a
10. d
11. d
12. d
13. b
14. c
15. b
16. d
17. a
18. d
19. 02
20. d
21. b
22. c
23. $7{,}29 \cdot 10^{15}$ km
24. d

25. a
26. d
27. c
28. b
29. c
30. 4,5 anos
31. d
32. c
33. a
34. e
35. e

Progressão aritmética

1. d
2. d
3. b
4. d
5. d
6. b
7. b
8. c
9. d
10. d
11. e
12. a
13. c
14. b
15. c
16. 64 dias
17. a

Progressão geométrica

1. a
2. b
3. 60π m
4. c
5. d
6. c
7. e
8. d
9. a
10. 01
11. 01
12. d
13. d
14. b
15. c
16. e
17. d
18. a
19. c
20. d
21. b
22. 10 semanas
23. d
24. b
25. c

Ângulos

1. e
2. 36° e 144°
3. e
4. a
5. 130°
6. c
7. e
8. a

Polígonos

1. e
2. d
3. d
4. a
5. e
6. e
7. c
8. b
9. b

Semelhança de triângulos

1. 11,75 m^2
2. e
3. 12 cm
4. d
5. d
6. 12 cm
7. d
8. b
9. 9 m
10. a

Triângulo retângulo

1. 05
2. e
3. 10
4. e
5. a
6. c
7. b
8. c
9. b
10. c
11. b
12. c
13. c
14. c
15. e
16. a
17. a
18. a
19. d
20. b

Desafio

1. d
2. c
3. b
4. c
5. c
6. e
7. d
8. d
9. e
10. b
11. d
12. c
13. e
14. d
15. a
16. d
17. e
18. e
19. d
20. a
21. 4 614
22. 21 galhos
23. e
24. $m = 1\,467$ e $n = 41$
28. a) $x_0 = 60$; $y_0 = 75$
    b) 300 m
29. a) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$
    b) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$
30. 0,30102
31. 45°
33. 29 m
34. Maior
36. 1
37. $S = 1\,000$
38. $x = 50$
39. $m = 12$ e $n = 80$

Significado das siglas

Acafe-SC	Associação Catarinense das Fundações Educacionais (Santa Catarina)
Cefet-MG	Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Cefet-PR	Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná
Cesgranrio-RJ	Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio (Rio de Janeiro)
Cone Sul	Olimpíada de Matemática do Cone Sul
Crux Mathematicorum-Canadá	Crux Mathematicorum (Cruz dos matemáticos)
EEWB-MG	Escola de Enfermagem de Wenceslau Braz (Minas Gerais)
Emescam-ES	Escola Superior de Ciências da Santa Casa de Misericórdia de Vitória (Espírito Santo)
ESCS-DF	Escola Superior de Ciências da Saúde (Distrito Federal)
EsPCEx-SP	Escola Preparatória de Cadetes do Exército (São Paulo)
ESPM-RJ	Escola Superior de Propaganda e Marketing (Rio de Janeiro)
ESPM-SP	Escola Superior de Propaganda e Marketing (São Paulo)
Etec-SP	Escola Técnica Estadual (São Paulo)
Faap-SP	Fundação Armando Álvares Penteado (São Paulo)
Fameca-SP	Faculdade de Medicina de Catanduva (São Paulo)
Fatec-SP	Faculdade de Tecnologia (São Paulo)
FEI-SP	Centro Universitário da Faculdade de Engenharia Industrial (São Paulo)
FGV-SP	Fundação Getúlio Vargas (São Paulo)
FMJ-SP	Faculdade de Medicina de Jundiaí (São Paulo)
Fuvest-SP	Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)
Ifal	Instituto Federal de Alagoas
IFCE	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
IFMG	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais
IFPE	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco
IFPR	Instituto Federal do Paraná
IFSC	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina
IMTOT	International Mathematics Tournament of the Towns (Torneio Internacional de Matemática das Cidades)
Insper-SP	Instituto de Ensino e Pesquisa (São Paulo)
ITA-SP	Instituto Tecnológico de Aeronáutica (São Paulo)
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
Obmep	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OCM-PB	Olimpíada Campinense de Matemática (Paraíba)
OMCS	Olimpiada Matemática del Cono Sur (Olimpíada de Matemática do Cone Sul)
OMEG	Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás
OMRN	Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte
OPM-PB	Olimpíada Pessoense de Matemática (Paraíba)
OPM-SP	Olimpíada Paulista de Matemática (São Paulo)
PUC-MG	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC-PR	Pontifícia Universidade Católica do Paraná
PUC-RJ	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC-RS	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUC-SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
RPM	Revista do Professor de Matemática
UCS-RS	Universidade de Caxias do Sul (Rio Grande do Sul)
Udesc	Universidade do Estado de Santa Catarina
Uece	Universidade Estadual do Ceará
UEFS-BA	Universidade Estadual de Feira de Santana (Bahia)
UEG-GO	Universidade Estadual de Goiás
UEL-PR	Universidade Estadual de Londrina (Paraná)
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba

UEPG-PR	Universidade Estadual de Ponta Grossa (Paraná)
Uerj	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Uesc-BA	Universidade Estadual de Santa Cruz (Bahia)
UFABC-SP	Universidade Federal do ABC (São Paulo)
Ufac	Universidade Federal do Acre
UFC-CE	Universidade Federal do Ceará
UFCG-PB	Universidade Federal de Campina Grande (Paraíba)
Ufes	Universidade Federal do Espírito Santo
UFF-RJ	Universidade Federal Fluminense (Rio de Janeiro)
UFG-GO	Universidade Federal de Goiás
UFGD-MS	Universidade Federal da Grande Dourados (Mato Grosso do Sul)
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFMS	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFMT	Universidade Federal de Mato Grosso
Ufop-MG	Universidade Federal de Ouro Preto (Minas Gerais)
UFPA	Universidade Federal do Pará
UFPB	Universidade Federal da Paraíba
Ufpel-RS	Universidade Federal de Pelotas (Rio Grande do Sul)
UFPR	Universidade Federal do Paraná
UFRRJ	Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Ufscar-SP	Universidade Federal de São Carlos (São Paulo)
UFSM-RS	Universidade Federal de Santa Maria (Rio Grande do Sul)
UFT-TO	Universidade Federal do Tocantins
UFTM-MG	Universidade Federal do Triângulo Mineiro (Minas Gerais)
UFU-MG	Universidade Federal de Uberlândia (Minas Gerais)
UFV-MG	Universidade Federal de Viçosa (Minas Gerais)
Unaerp-SP	Universidade de Ribeirão Preto (São Paulo)
Uncisal	Universidade Estadual de Ciências da Saúde de Alagoas
Uneb-BA	Universidade do Estado da Bahia
Unemat-MT	Universidade do Estado de Mato Grosso
Unicamp-SP	Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)
Unicap-PE	Universidade Católica de Pernambuco
Unifei-MG	Universidade Federal de Itajubá (Minas Gerais)
Unifesp	Universidade Federal de São Paulo
Unifor-CE	Fundação Edson Queiroz Universidade de Fortaleza (Ceará)
Unimontes-MG	Universidade de Montes Claros (Minas Gerais)
Unioeste-PR	Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Unipar-PR	Universidade Paranaense (Paraná)
Unir-RO	Universidade Federal de Rondônia
Unisc-RS	Universidade de Santa Cruz do Sul (Rio Grande do Sul)
Unit-SE	Universidade Tiradentes (Sergipe)
UPE	Universidade de Pernambuco
UPM-SP	Universidade Presbiteriana Mackenzie (São Paulo)
USAMO	USA Mathematical Olympiad (Olimpíada de Matemática dos Estados Unidos da América)
Vunesp-SP	Fundação para o Vestibular da Unesp (São Paulo)

PROJETO
MÚLTIPLO

Os Cadernos de Estudo do **Projeto Múltiplo** foram elaborados para auxiliar o estudante a revisar os conteúdos abordados e verificar sua aprendizagem, trazendo quadros-resumo dos principais assuntos e centenas de questões de vestibulares e de olimpíadas. Na área de Língua Portuguesa, as questões de vestibulares são seguidas da seção "O desafio da redação".

ISBN 978-850816750-0
9 788508 167500

editora ática