O ANGLO RESOLVE

É trabalho pioneiro.
Prestação de serviços com tradição de confiabilidade.
Construtivo, procura colaborar com as Bancas Examinadoras em sua tarefa árdua de não cometer injustiças.
Didático, mais do que um simples gabarito, auxilia o estudante em seu processo de aprendizagem.

A PROVA DE MATEMÁTICA DO ITA

O Instituto Tecnológico de Aeronáutica — ITA — é uma escola de engenharia mundialmente conhecida.
Com o mesmo zelo com que trata seus excelentes cursos (Engenharia Aeronáutica, Engenharia Mecânica Aeronáutica, Engenharia de Infra-Estrutura, Engenharia Elétrica e Engenharia de Computação), trata seu vestibular.
De forma inteligente, em 4 dias de prova, tem conseguido selecionar os candidatos mais aptos.

Matemática

*As questões de **01 a 15 não devem ser resolvidas no caderno de soluções**. Para respondê-las, marque a opção escolhida para cada questão na **folha de leitura óptica** e também **na última página do caderno de soluções**.*

IR é o conjunto dos números reais.
A^c denota o conjunto complementar de $A \subset IR$ em IR.
A^T é a matriz transposta da matriz A.
(a, b) representa o par ordenado.

$[a, b] = \{x \in IR;\ a \leqslant x \leqslant b\}$, $]a, b[= \{x \in IR;\ a < x < b\}$.
$[a, b[= \{x \in IR;\ a \leqslant x < b\}$, $]a, b] = \{x \in IR;\ a < x \leqslant b\}$.

QUESTÃO 01
Resposta: D

Se $a \in IR$ é tal que $3y^2 - y + a = 0$ tem raiz dupla, então a solução da equação

$$3^{2x+1} - 3^x + a = 0$$

é:

A) $\log_2 6$
B) $-\log_2 6$
C) $\log_3 6$
D) $-\log_3 6$
E) $1 - \log_3 6$

RESOLUÇÃO:

Sendo y_0 a raiz dupla da equação $3y^2 - y + a = 0$, temos:

$$y_0 + y_0 = \frac{1}{3} \therefore 2y_0 = \frac{1}{3} \therefore y_0 = \frac{1}{6}$$

Na equação $3^{2x+1} - 3^x + a = 0$, substituindo 3^x por y, temos $3y^2 - y + a = 0$, cuja raiz é $\frac{1}{6}$.

Logo, $3x = \frac{1}{6} \quad \therefore \quad x = \log_3 \frac{1}{6} \quad \therefore \quad x = \log_3 6^{-1}$

$\therefore x = -\log_3 6$

QUESTÃO 02
Resposta: B

O valor da soma a + b para que as raízes do polinômio $4x^4 - 20x^3 + ax^2 - 25x + b$ estejam em progressão aritmética de razão 1/2 é:

A) 36
B) 41
C) 26
D) –27
E) –20

RESOLUÇÃO:

Sendo x_1, x_2, x_3 e x_4 as raízes do polinômio $4x^4 - 20x^3 + ax^2 - 25x + b$, então

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{2}$$

$$x_3 = x_1 + 1$$

$$x_4 = x_1 + \frac{3}{2}$$

Daí, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{20}{4}$

$$\therefore x_1 + x_1 + \frac{1}{2} + x_1 + 1 + x_1 + \frac{3}{2} = 5 \quad \therefore \quad x_1 = \frac{1}{2}$$

Logo, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$ e $x_4 = 2$.

Se 1 é raiz, então P(1) = 0, ou seja,

$$4 - 20 + a - 25 + b = 0 \quad \therefore \quad a + b = 41.$$

QUESTÃO 03
Resposta: C

Se $z = 1 + i\sqrt{3}$, $z \cdot \overline{w} = 1$ e $\alpha \in [0, 2\pi]$ é um argumento de $z \cdot w$, então α é igual a:

A) $\frac{\pi}{3}$

B) π

C) $\frac{2\pi}{3}$

D) $\frac{5\pi}{3}$

E) $\frac{3\pi}{2}$

RESOLUÇÃO:

Os argumentos principais de $z = 1 + i\sqrt{3}$ e $z\overline{w} = 1$ são, respectivamente, $\frac{\pi}{3}$ e 0.

Como o argumento de $z\overline{w}$ é a soma dos argumentos de z e $\overline{w}$, temos: $\frac{\pi}{3} + \varphi = 0 \therefore \varphi = -\frac{\pi}{3}$; logo o argumento de $\overline{w}$ é $\frac{5\pi}{3}$.

Como w e $\overline{w}$ são conjugados, então seus afixos são simétricos em relação ao eixo das partes reais; logo o argumento de w é $\frac{\pi}{3}$.

Assim o argumento de zw é $\frac{2\pi}{3}$.

QUESTÃO 04
Resposta: A

O número complexo

$$z = \frac{1 - \cos a}{\operatorname{sen} a \cos a} + i\,\frac{1 - 2\cos a + 2\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} 2a}, \quad a \in \left]0, \pi/2\right[$$

tem argumento $\pi/4$. Neste caso, a é igual a:

A) $\frac{\pi}{6}$

B) $\frac{\pi}{3}$

C) $\frac{\pi}{4}$

D) $\frac{\pi}{5}$

E) $\frac{\pi}{9}$

RESOLUÇÃO:

Se o argumento de $z = \frac{1 - \cos a}{\operatorname{sen} a \cos a} + i \cdot \frac{1 - 2\cos a + 2\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} 2a}$ é $\frac{\pi}{4}$, então podemos afirmar que $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$. Assim,

$$\frac{1 - \cos a}{\operatorname{sen} a \cos a} = \frac{1 - 2\cos a + 2\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} 2a}$$

$$\frac{2(1 - \cos a)}{\cancel{\operatorname{sen} 2a}} = \frac{1 - 2\cos a + 2\operatorname{sen} a}{\cancel{\operatorname{sen} 2a}}$$

$$2 - \cancel{2\cos a} = 1 - \cancel{2\cos a} + 2\operatorname{sen} a$$

$$2\operatorname{sen} a = 1 \quad \therefore \quad \operatorname{sen} a = \frac{1}{2}$$

Logo, $a = \frac{\pi}{6}$ ou $a = \frac{5\pi}{6}$ (não convém, pois $a \in \left]0, \pi/2\right[$)

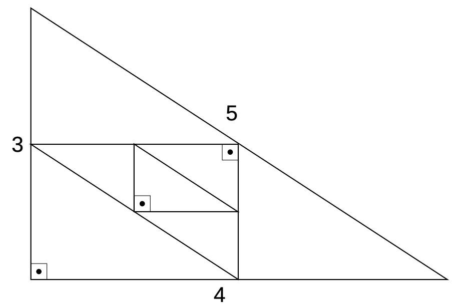
Portanto, $a = \frac{\pi}{6}$.

QUESTÃO 05
Resposta: A

Um triângulo tem lados medindo 3, 4 e 5 centímetros. A partir dele, constrói-se uma seqüência de triângulos do seguinte modo: os pontos médios dos lados de um triângulo são os vértices do seguinte. Dentre as alternativas abaixo, o valor em centímetros quadrados que está mais próximo da soma das áreas dos 78 primeiros triângulos assim construídos, incluindo o triângulo inicial, é:

A) 8
B) 9
C) 10
D) 11
E) 12

RESOLUÇÃO:



A partir do segundo triângulo, a razão de semelhança de um triângulo para o anterior é $\frac{1}{2}$ e, portanto, a razão entre as áreas é $\frac{1}{4}$.

Se considerarmos a progressão geométrica infinita na qual o primeiro termo é a área do triângulo inicial, ou seja, 6, e a razão é $\frac{1}{4}$, a soma S das áreas dos infinitos triângulos será:

$$S = \frac{6}{1 - \frac{1}{4}}, \text{ ou seja, } S = 8.$$

Assim, a soma das áreas dos 78 primeiros triângulos construídos será menor que 8. Logo, dentre as alternativas, o valor que está mais próximo dessa soma é 8.

QUESTÃO 06
Resposta: B

Sabendo que é de 1024 a soma dos coeficientes do polinômio em x e y, obtido pelo desenvolvimento do binômio $(x + y)^m$, temos que o número de arranjos sem repetição de m elementos, tomados 2 a 2, é:

A) 80
B) 90
C) 70
D) 100
E) 60

RESOLUÇÃO:

Do enunciado: $(1 + 1)^m = 1024 \quad \therefore \quad 2^m = 2^{10} \therefore m = 10$

Assim: $A_{10,2} = 10 \cdot 9 = 90$

QUESTÃO 07
Resposta: E

A respeito das combinações

$$a_n = \binom{2n}{n} \quad e \quad b_n = \binom{2n}{n-1}$$

temos que, para cada n = 1, 2, 3, ..., a diferença $a_n - b_n$ é igual a:

A) $\frac{n!}{n+1} a_n$

B) $\frac{2n}{n+1} a_n$

C) $\frac{n}{n+1} a_n$

D) $\frac{2}{n+1} a_n$

E) $\frac{n}{n+1} a_n$

RESOLUÇÃO:

$$a_n = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$$

$$b_n = \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!} = \frac{n \cdot (2n)!}{n \cdot (n-1)!\,(n+1) \cdot n!} = \frac{n}{(n+1)} \cdot \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{n}{n+1} \cdot a_n$$

Assim:

$$a_n - b_n = a_n - \frac{n}{n+1} \cdot a_n = a_n \cdot \frac{\cancel{n} + 1 - \cancel{n}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot a_n$$

QUESTÃO 08
Resposta: E

Sejam A e B matrizes n × n, e B uma matriz simétrica. Dadas as afirmações:

(I) $AB + BA^T$ é simétrica.
(II) $(A + A^T + B)$ é simétrica.
(III) ABA^T é simétrica.

temos que:

A) apenas (I) é verdadeira.
B) apenas (II) é verdadeira.
C) apenas (III) é verdadeira.
D) apenas (I) e (III) são verdadeiras.
E) todas as afirmações são verdadeiras.

RESOLUÇÃO:

Do enunciado temos que $B^T = B$.
Assim:

(I) é verdadeira. De fato:

$$\begin{aligned}(AB + BA^T)^T &= (AB)^T + (BA^T)^T \\ &= BA^T + AB \\ &= AB + BA^T\end{aligned}$$

(II) é verdadeira. De fato:

$$\begin{aligned}(A + A^T + B)^T &= A^T + A + B^T \\ &= A^T + A + B \\ &= A + A^T + B\end{aligned}$$

(III) é verdadeira. De fato:

$$\begin{aligned}(ABA^T)^T &= AB^TA^T \\ &= ABA^T\end{aligned}$$

QUESTÃO 09
Resposta: A

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix}$$

A soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa de A *é:*

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

RESOLUÇÃO:

Seja $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & e & i & m \\ b & f & j & n \\ c & g & k & p \\ d & h & l & q \end{bmatrix}$ a matriz inversa de A.

Temos que:

$$A \cdot A^{-1} = I_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & e & i & m \\ b & f & j & n \\ c & g & k & p \\ d & h & l & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então,

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ a + 2b + 3c + 4d = 0 \\ a + 4b + 9c + 16d = 0 \\ a + 8b + 27c + 64d = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação resulta que a soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa de A é 1.

QUESTÃO 10
Resposta: C

Sendo α e β os ângulos agudos de um triângulo retângulo, e sabendo que $sen^2 2\beta - 2\cos 2\beta = 0$, então sen α é igual a:

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B) $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$

C) $\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$

D) $\frac{\sqrt[4]{8}}{4}$

E) zero

RESOLUÇÃO:

$$\text{sen}^2 2\beta - 2\cos 2\beta = 0$$
$$4\,\text{sen}^2\beta \cdot \cos^2\beta - 2(2\cos^2\beta - 1) = 0$$
$$4\,\text{sen}^2\beta \cdot \cos^2\beta - 4\cos^2\beta + 2 = 0$$
$$-4\cos^2\beta\,(1 - \text{sen}^2\beta) + 2 = 0$$
$$-4\cos^4\beta + 2 = 0 \quad \therefore \quad \cos^4\beta = \frac{1}{2}$$

Como β é agudo: $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \dfrac{\sqrt[4]{8}}{2}$.

Como o triângulo é retângulo, $\alpha + \beta = 90^\circ$ e $\text{sen}\,\alpha = \cos\beta$.

Assim: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt[4]{8}}{2}$

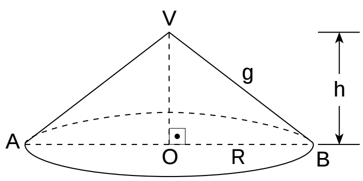
QUESTÃO 11
Resposta: B

O raio da base de um cone circular reto é igual à média aritmética da altura e a geratriz do cone. Sabendo-se que o volume do cone é $128\pi\,m^3$, temos que o raio da base e a altura do cone medem, respectivamente, em metros:

A) 9 e 8
B) 8 e 6
C) 8 e 7
D) 9 e 6
E) 10 e 8

RESOLUÇÃO:

Considere a figura seguinte:



h … medida da altura do cone
R … medida do raio da base do cone
g … medida da geratriz do cone

Do enunciado temos que $R = \dfrac{h + g}{2}$, ou seja, $g = 2R - h$ (1).

Aplicando-se o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo VOB, resulta que $g^2 = h^2 + R^2$ (2).
De (1) e (2) temos:

$$(2R - h)^2 = h^2 + R^2$$
$$4R^2 - 4Rh + h^2 = h^2 + R^2$$
$$3R^2 - 4Rh = 0$$

$R \cdot (3R - 4h) = 0$ → $3R - 4h = 0 \quad \therefore \quad h = \dfrac{3R}{4}$ (3)

ou

→ $R = 0$ (não convém)

Como o volume do cone é 128π, devemos ter $\dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h = 128\pi$, ou seja, $\dfrac{1}{3} \cdot R^2 \cdot h = 128$ (4).

De (3) e (4) resulta que:

$\dfrac{1}{3} \cdot R^2 \cdot \dfrac{3}{4}R = 128$, ou seja, $R^3 = 512$. Logo, $R = 8$.

Substituindo-se $R = 8$ na relação (3), resulta $h = 6$.

QUESTÃO 12
Resposta: B

De dois polígonos convexos, um tem a mais que o outro 6 lados e 39 diagonais. Então, a soma total dos números de vértices e de diagonais dos dois polígonos é igual a:

A) 63
B) 65
C) 66
D) 70
E) 77

RESOLUÇÃO: Seja P_1 um polígono convexo de n ($n \geqslant 3$) lados cujo número de diagonais d_1 é dado por

$$d_1 = \frac{n\,(n-3)}{2} \quad (1).$$

Considere um polígono convexo P_2 com n + 6 lados.

O número de diagonais d_2 do polígono P_2 é tal que $d_2 = \dfrac{(n+6)\cdot(n+6-3)}{2}$, ou seja,

$$d_2 = \frac{(n+6)\,(n+3)}{2} \quad (2).$$

Do enunciado, $d_2 = d_1 + 39$ (3).

De (1), (2) e (3) resulta:

$$\frac{(n+6)\cdot(n+3)}{2} = \frac{n\cdot(n-3)}{2} + 39 \;\therefore\; n = 5$$

Sendo n = 5, o polígono P_1 tem 5 lados e 5 diagonais e o polígono P_2 tem 11 lados e 44 diagonais.
Como para todo polígono convexo o número de lados é igual ao número de vértices, a soma pedida é 5 + 5 + 11 + 44, ou seja, 65.

QUESTÃO 13
Resposta: E

Seja o ponto A = (r, 0), r > 0. O lugar geométrico dos pontos P = (x, y) tais que é de $3r^2$ a diferença entre o quadrado da distância de P a A e o dobro do quadrado da distância de P à reta y = – r, é:

A) uma circunferência centrada em (r, –2r) com raio r.
B) uma elipse centrada em (r, –2r) com semi-eixos valendo r e 2r.
C) uma parábola com vértice em (r, –r).
D) duas retas paralelas distando $r\sqrt{3}$ uma da outra.
E) uma hipérbole centrada em (r, –2r) com semi-eixos valendo r.

RESOLUÇÃO: Do enunciado, considere a diferença a seguir.

$$\left(\sqrt{(x-r)^2 + (y-0)^2}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{|y+r|}{\sqrt{1^2+0^2}}\right)^2 = 3r^2, \text{ onde } r > 0.$$

Temos que:

$$(x-r)^2 + y^2 - 2(y+r)^2 = 3r^2$$

Desenvolvendo-se e agrupando-se convenientemente, vem:

$$(x-r)^2 - (y+2r)^2 = r^2$$

Dividindo-se ambos os membros da igualdade por r^2, resulta:

$$\frac{(x-r)^2}{r^2} - \frac{(y+2r)^2}{r^2} = 1$$

Esta equação representa uma hipérbole centrada em (r, –2r), com semi-eixos valendo r.

QUESTÃO 14
Resposta: B

Sejam X, Y e Z subconjuntos próprios de IR, não-vazios.
Com respeito às afirmações:

(I) $X \cap \{[Y \cap (X \cup Y)^c] \cup [X \cup (X^c \cap Y^c)^c]\} = X$.
(II) Se $Z \subset X$ então $(Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^c \cap Y)] = X \cup Y$.
(III) Se $(Z \cup Y)^c \subset Z$ então $Z^c \subset X$.

temos que:

A) apenas (I) é verdadeira.
B) apenas (I) e (II) são verdadeiras.
C) apenas (I) e (III) são verdadeiras.
D) apenas (II) e (III) são verdadeiras.
E) todas são verdadeiras.

RESOLUÇÃO: (I) Seja $A = X \cap \{[Y \cap (X \cap Y)^c] \cup [X \cup (X^c \cap Y^c)^c]\}$
Como, para todo X e Y, $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$ e $(X^c \cap Y^c)^c = X \cup Y$, temos que:
$A = X \cap \{[Y \cap (X^c \cap Y^c)] \cup [X \cup (X \cup Y)]\}$

Das propriedades comutativa e associativa da intersecção e da união podemos afirmar que:

$A = X \cap \{[X^c \cap (Y \cap Y^c)] \cup [(X \cup X) \cup Y]\}$

Sendo $Y \cap Y^c = \varnothing$ e $X \cup X = X$, temos:

$A = X \cap \{[X^c \cap \varnothing] \cup [X \cup Y]\}$

Como $X^c \cap \varnothing = \varnothing$, temos $A = X \cap \{\varnothing \cup [X \cup Y]\}$.

Como $\varnothing \cup [X \cup Y] = X \cup Y$, temos $A = X \cap \{X \cup Y\}$, ou seja, $A = X$.

Logo, $X \cap \{[Y \cap (X \cap Y)^c] \cup [X \cup (X^c \cap Y^c)^c]\} = X$ e, portanto, a afirmação (I) é verdadeira.

(II) Seja $B = (Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^c \cap Y)]$.

Temos, então, que $B = (Z \cup Y) \cup [(X \cup Z^c) \cap (X \cup Y)]$.

Como $Z \subset X$, temos que $X \cup Z^c = \mathbb{R}$ e $B = (Z \cup Y) \cup [\mathbb{R} \cap (X \cup Y)]$.

$B = (Z \cup Y) \cup [X \cup Y]$

Das propriedades associativa e comutativa da união temos $B = (X \cup Z) \cup (Y \cup Y)$.

Como $Z \subset X$, temos que $X \cup Z = X$ e, como $Y \cup Y = Y$, $B = X \cup Y$.

Logo, se $Z \subset X$, então $(Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^c \cap Y)] = X \cup Y$ e, portanto, a afirmação (II) é verdadeira.

(III) Podemos mostrar, por meio de um exemplo, que a afirmação “se $(X \cup Y)^c \subset Z$, então $Z^c \subset X$” é falsa. Consideremos os números reais distintos a e b e os conjuntos $X = \mathbb{R} - \{a\}$, $Y = \mathbb{R} - \{b\}$ e $Z = \mathbb{R} - \{a\}$.

Nessas condições, temos:

$X \cup Y = \mathbb{R}$

$(X \cup Y)^c = \varnothing \qquad \therefore \qquad (X \cup Y)^c \subset Z$

Sendo $Z = \mathbb{R} - \{a\}$, temos $Z^c = \{a\}$ e, portanto, $Z^c \not\subset X$.

QUESTÃO 15
Resposta: E

Se $f:]0, 1[\to \mathbb{R}$ é tal que, $\forall x \in]0, 1[$,

$$|f(x)| < \frac{1}{2} \quad e \quad f(x) = \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$$

então a desigualdade válida para qualquer n = 1, 2, 3, ... e $0 < x < 1$ é:

A) $|f(x)| + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{2^n} \leqslant |f(x)| \leqslant \frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{2^{n+1}} < |f(x)| < \frac{1}{2}$

D) $|f(x)| > \frac{1}{2^n}$

E) $|f(x)| < \frac{1}{2^n}$

RESOLUÇÃO:

Primeiramente, devemos observar que, se $x \in]0, 1[$, então $\frac{x}{2} \in]0, 1[$ e $\frac{x+1}{2} \in]0, 1[$. Nas condições do enunciado, podemos concluir, ainda, que, se existir um número natural k, tal que $|f(x)| < \frac{1}{2^k}$, para todo real x, $x \in]0, 1[$, então $|f(x)| < \frac{1}{2^{k+1}}$. Vejamos:

Temos que $\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| < \frac{1}{2^k}$, pois $\frac{x}{2} \in]0, 1[$.

$\left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| < \frac{1}{2^k}$, pois $\frac{x+1}{2} \in]0, 1[$.

Logo, $\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| < 2 \cdot \frac{1}{2^k}$.

Como $|a + b| \leqslant |a| + |b|$, temos:

$$\left|f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| < 2 \cdot \frac{1}{2^k}$$

e $$\left|\frac{1}{4}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)\right| < \frac{1}{2^{k+1}}$$

Portanto, $|f(x)| < \frac{1}{2^{k+1}}$.

Finalmente, como é dado que $|f(x)| < \frac{1}{2^1}$, podemos afirmar, pelo Princípio da Indução Finita, que $|f(x)| < \frac{1}{2^n}$, para qualquer n do conjunto $\mathbb{N}^*$.

As questões de ***16 a 25 devem ser resolvidas no caderno de soluções****. Marque também as opções escolhidas para essas questões na* ***folha de leitura óptica*** *e no quadro que se encontra* ***na última página do caderno de soluções****.*

QUESTÃO 16
Resposta: D

Considere as funções

$$f(x) = \frac{5 + 7^x}{4} \quad , \quad g(x) = \frac{5 - 7^x}{4} \quad e \quad h(x) = \operatorname{arctg} x$$

Se a é tal que $h(f(a)) + h(g(a)) = \pi/4$, então $f(a) - g(a)$ vale:

A) 0

B) 1

C) $\frac{7}{4}$

D) $\frac{7}{2}$

E) 7

RESOLUÇÃO:

$h(f(a)) = \alpha \therefore \operatorname{arctg}(f(a)) = \alpha \therefore \operatorname{tg}\alpha = f(a)$

$h(g(a)) = \beta \therefore \operatorname{arctg}(g(a)) = \beta \therefore \operatorname{tg}\beta = g(a)$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta} = 1 \qquad \therefore \qquad \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 1 - \operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta$$

Substituindo-se:

$$\frac{5 + \cancel{7^a}}{4} + \frac{5 - \cancel{7^a}}{4} = 1 - \frac{25 - 7^{2a}}{16}$$

$$40 = 16 - 25 + 7^{2a} \;\therefore\; 7^{2a} = 7^2 \;\therefore\; a = 1$$

Assim:

$$f(a) - g(a) = f(1) - g(1) = 3 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$$

QUESTÃO 17
Resposta: D

O conjunto de todos os valores de m para os quais a função

$$f(x) = \frac{x^2 + (2m + 3)x + (m^2 + 3)}{\sqrt{x^2 + (2m + 1)x + (m^2 + 2)}}$$

está definida e é não-negativa para todo x real é:

A) $\left[\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right[$

B) $\left]\frac{1}{4}, \infty\right[$

C) $\left]0, \frac{7}{4}\right[$

D) $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$

E) $\left]\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right[$

RESOLUÇÃO:

Devemos ter as duas seguintes condições:

(I) $x^2 + (2m + 3)x + (m^2 + 3) \geqslant 0$ para todo x real.

Nesta condição: $\Delta \leqslant 0$

$(2m + 3)^2 - 4(m^2 + 3) \leqslant 0$

$\therefore \quad 4m^2 + 12m + 9 - 4m^2 - 12 \leqslant 0 \quad \therefore \quad m \leqslant \frac{1}{4}$

(II) $x^2 + (2m + 1)x + (m^2 + 2) > 0$ para todo x real.

Nesta condição: $\Delta < 0$

$(2m + 1)^2 - 4(m^2 + 2) < 0$

$4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 8 < 0 \therefore m < \frac{7}{4}$

De (I) e (II) resulta $m \leqslant \frac{1}{4}$.

QUESTÃO 18
Resposta: C

A parte imaginária de $((1 + \cos 2x) + i \operatorname{sen} 2x)^k$, k inteiro positivo, x real, é

A) $2 \cdot \operatorname{sen}^k x \cdot \cos^k x$

B) $\operatorname{sen}^k x \cdot \cos^k x$

C) $2^k \cdot \operatorname{sen} kx \cdot \cos^k x$

D) $2^k \cdot \operatorname{sen}^k x \cdot \cos^k x$

E) $\operatorname{sen} kx \cdot \cos^k x$

RESOLUÇÃO:

$$(1 + \cos 2x + i \operatorname{sen} 2x)^k = (\cancel{1} + 2\cos^2 x - \cancel{1} + i\, 2 \operatorname{sen} x \cos x)^k =$$
$$= (2 \cos x\, (\cos x + i \operatorname{sen} x))^k = 2^k \cdot \cos^k x\, (\cos kx + i \operatorname{sen} kx) =$$
$$= 2^k \cos^k x \cos kx + i\, 2^k \cdot \cos^k x \cdot \operatorname{sen} kx$$

A parte imaginária é $2^k \cdot \operatorname{sen} kx \cdot \cos^k x$.

QUESTÃO 19
Resposta: A

O polinômio com coeficientes reais

$$P(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

tem duas raízes distintas, cada uma delas com multiplicidade 2, e duas de suas raízes são 2 e i. Então, a soma dos coeficientes é igual a:

A) –4

B) –6

C) –1

D) 1

E) 4

RESOLUÇÃO:

Indiquemos as cinco raízes da equação por x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5. Como há duas raízes distintas, cada uma delas com multiplicidade 2, podemos escrever:

$x_1 = r$, $x_2 = s$, $x_3 = r$, $x_4 = s$ e $x_5 = t$, com $r \neq s$, $r \neq t$ e $s \neq t$.

Como os coeficientes da equação são todos reais, a quantidade de raízes imaginárias é um número par. Como i é raiz, seu conjugado (–i) também é raiz.

Além disso, o número 2 é raiz.

Suponhamos que r = 2. Nesse caso, teríamos $\{i, -i\} \subset \{s, s, t\}$, o que é absurdo, pois haveria, então, um número ímpar de raízes imaginárias. Analogamente, também chegamos ao absurdo com s = 2.

Com r = i, ou s = i, e t = 2, obtemos as raízes: i, –i, i, –i e 2.

Logo, $P(x) = (x - i)(x + i)(x - i)(x + i)(x - 2)$.

A soma dos coeficientes de P(x) é dada por $P(1) = (1 - i)(1 + i)(1 - i)(1 + i)(1 - 2)$.

$P(1) = -4$

Portanto, a soma dos coeficientes de P(x) é – 4.

QUESTÃO 20
Resposta: A

Seja $m \in IR$, $m > 0$. Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x - (\log_4 m)y + 5z = 0 \\ (\log_2 m)x + y - 2z = 0 \\ x + y - (\log_2 m^2)z = 0 \end{cases}$$

O produto dos valores de m para os quais o sistema admite solução não-trivial é:

A) 1

B) 2

C) 4

D) 8

E) $2 \log_2 5$

RESOLUÇÃO: Devemos ter D = 0, onde:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -(\log_4 m) & 5 \\ \log_2 m & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -(\log_2 m^2) \end{vmatrix}$$

Ou seja, $(\log_2 m)^3 - 2\log_2 m + 1 = 0$.

Fazendo $\log_2 m = t$, vem $t^3 - 2t + 1 = 0$.

$t^3 - t^2 + t^2 - 2t + 1 = 0$

$t^2\,(t - 1) + (t - 1)^2 = 0$

$(t - 1)\,(t^2 + t - 1) = 0$

A equação $t^3 + 0t^2 - 2t + 1 = 0$ apresenta 3 raízes reais, pois o discriminante de $t^2 + t - 1 = 0$ é positivo.

Indicando essas raízes por t_1, t_2, e t_3, temos que $t_1 + t_2 + t_3 = 0$.

Como $\log_2 m = t$, há 3 valores de m:

$m_1 = 2^{t_1}$, $m_2 = 2^{t_2}$ e $m_3 = 2^{t_3}$.

Logo, $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 2^{t_1 + t_2 + t_3} = 2^0$ e, portanto, $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 1$.

QUESTÃO 21
Resposta: D

Considere os números de 2 a 6 algarismos distintos formados utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos destes números são ímpares e começam com um dígito par?

A) 375
B) 465
C) 545
D) 585
E) 625

RESOLUÇÃO:

2 algarismos: primeiro algarismo 2, 4, 8; último algarismo 1, 5, 7

$3 \cdot 3 = 9$

ou

3 algarismos: primeiro algarismo 2, 4, 8; último algarismo 1, 5, 7

$3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$

ou

4 algarismos: primeiro algarismo 2, 4, 8; último algarismo 1, 5, 7

$3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 108$

ou

5 algarismos: primeiro algarismo 2, 4, 8; último algarismo 1, 5, 7

$3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 216$

ou

6 algarismos: primeiro algarismo 2, 4, 8; último algarismo 1, 5, 7

$3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 216$

Assim, pelo Princípio da Adição, temos: 9 + 36 + 108 + 216 + 216 = 585 números.

QUESTÃO 22
Resposta: C

Sendo dado

$$\ln\left(2\sqrt{4}\,\sqrt[3]{6}\,\sqrt[4]{8}\,\dots\,\sqrt[n]{2n}\right) = a_n \qquad e \qquad \ln\left(\sqrt{2}\,\sqrt[3]{3}\,\sqrt[4]{4}\,\dots\,\sqrt[2n]{2n}\right) = b_n$$

então,

$$\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \frac{\ln 5}{5} + \dots + \frac{\ln 2n}{2n}$$

é igual a:

A) $a_n - 2b_n$
B) $2a_n - b_n$
C) $a_n - b_n$
D) $b_n - a_n$
E) $a_n + b_n$

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} \ell n2 + \ell n\sqrt{4} + \ell n\sqrt[3]{6} + \ell n\sqrt[4]{8} + \ldots + \ell n\sqrt[n]{2n} = a_n \\ \ell n\sqrt{2} + \ell n\sqrt[3]{3} + \ell n\sqrt[4]{4} + \ell n\sqrt[5]{5} + \ldots + \ell n\sqrt[2n]{2n} = b_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell n2 + \dfrac{\ell n4}{2} + \dfrac{\ell n6}{3} + \dfrac{\ell n8}{4} + \ldots + \dfrac{\ell n\,(2n)}{n} = a_n \\ \dfrac{\ell n2}{2} + \dfrac{\ell n3}{3} + \dfrac{\ell n4}{4} + \dfrac{\ell n5}{5} + \ldots + \dfrac{\ell n\,(2n)}{2n} = b_n \end{cases} \quad -$$

$$\frac{\ell n2}{2} - \frac{\ell n3}{3} + \frac{\ell n4}{4} - \frac{\ell n5}{5} + \ldots + \frac{\ell n\,(2n)}{n} = a_n - b_n$$

Note que:

- a_n é a soma de n parcelas da forma $\ell n\sqrt[p]{2p}$, com $p \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
- b_n é a soma de (2n – 1) parcelas da forma $\ell n\sqrt[p]{p}$, com $p \in \{2, 3, 4, \ldots, 2n\}$.

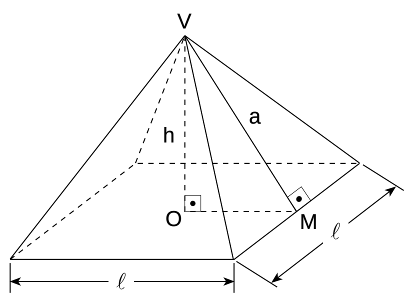
QUESTÃO 23
Resposta: C

A razão entre a área da base de uma pirâmide regular de base quadrada e a área de uma das faces é 2. Sabendo que o volume da pirâmide é de 12 m^3*, temos que a altura da pirâmide mede (em metros):*

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

RESOLUÇÃO:

Considere a figura seguinte.



ℓ ... medida do lado do quadrado
a ... medida do apótema da pirâmide
h ... medida da altura da pirâmide

Do enunciado temos que $\dfrac{\ell^2}{\frac{1}{2}\cdot \ell \cdot a} = 2$, ou seja, $\ell = a$ (1).

Aplicando-se o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, resulta $a^2 = h^2 + \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2$ (2).

De (1) e (2) vem $\ell^2 = \dfrac{4}{3}h^2$ (3).

Como o volume da pirâmide é 12, devemos ter $\dfrac{1}{3}\cdot \ell^2 \cdot h = 12$ (4).

De (3) e (4) temos:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot h^2 \cdot h = 12,\ \text{ou seja, } h^3 = 27.\ \text{Logo, } h = 3.$$

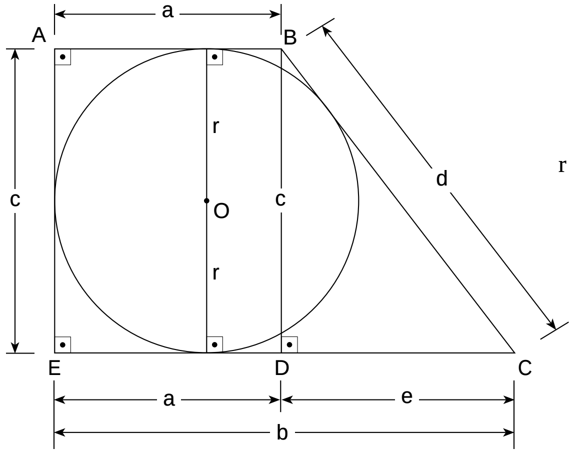
QUESTÃO 24
Resposta: C

Num trapézio retângulo circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a 18 cm e a diferença dos dois outros lados é igual a 2 cm. Se r é o raio da circunferência inscrita e a é o comprimento do menor lado do trapézio, então a soma a + r (em cm) é igual a:

A) 12
B) 11
C) 10
D) 9
E) 8

RESOLUÇÃO:

Considere a figura seguinte.



r ... medida do raio

Do enunciado temos que a + b = 18 (1) e d – c = 2 (2).
Como o trapézio é circunscritível, d + c = 18 (3).

De (2) e (3) temos o sistema $\begin{cases} d - c = 2 \\ d + c = 18 \end{cases}$, onde d = 10 e c = 8.

Como 2r = c, vem 2r = 8, ou seja, r = 4.
No triângulo retângulo BDC, pelo teorema de Pitágoras, temos $e^2 + c^2 = d^2$, ou seja, $e^2 + 8^2 = 10^2$.
Logo, e = 6.
Sendo e = 6 e sabendo-se que b – a = e, vem b – a = 6 (4).

De (1) e (4) temos o sistema $\begin{cases} a + b = 18 \\ b - a = 6 \end{cases}$, onde a = 6 e b = 12.

Então, a soma a + r é 6 + 4, ou seja, 10.

QUESTÃO 25
Resposta: D

O coeficiente angular da reta tangente à elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

no primeiro quadrante e que corta o eixo das abcissas no ponto P = (8, 0) é:

A) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

B) $-\frac{1}{2}$

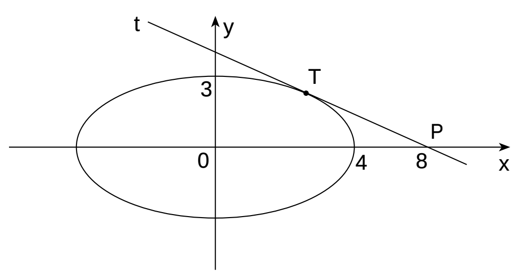
C) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

D) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

E) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

RESOLUÇÃO:

A elipse tem centro na origem (0, 0), semi-eixo maior igual a 4 e semi-eixo menor igual a 3. Temos a figura:



O coeficiente angular *m* pedido é um número negativo.
A equação da reta tangente à elipse que tem coeficiente angular m e que passa pelo ponto P (8,0) é

$$y - 0 = m(x - 8), \text{ ou seja, } y = mx - 8m.$$

Temos o sistema:

$$\begin{cases} y = mx - 8m & (1) \\ 9x^2 + 16y^2 = 144 & (2) \end{cases}$$

Substituindo-se (1) em (2), vem:

$$9x^2 + 16(mx - 8m)^2 = 144$$

Desenvolvendo e agrupando, temos:

$$(16m^2 + 9)x^2 - 256m^2x + 16(64m^2 - 9) = 0$$

Para que a reta seja tangente à elipse, devemos ter $\Delta = 0$, ou seja:

$$65536m^4 - 64[1024m^4 + 432m^2 - 81] = 0, \text{ isto é,}$$

$$432m^2 = 81$$

$$m^2 = \frac{81}{432} \begin{cases} \longrightarrow m = \dfrac{\sqrt{3}}{4} & \text{(não convém)} \\ \quad \text{ou} & \\ \longrightarrow m = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} & \end{cases}$$

Logo, o coeficiente angular pedido é $-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Comentário

Uma prova bem elaborada e abrangente, com enunciados claros e precisos, como já é tradição nos exames do ITA.

Certamente esta prova selecionará os candidatos mais bem preparados.

Incidência