“Hei de vencer.”

Arthur Riedel

SUMÁRIO

COORDENADAS NO PLANO E DISTÂNCIA ENTRE PONTOS

1. INTRODUÇÃO

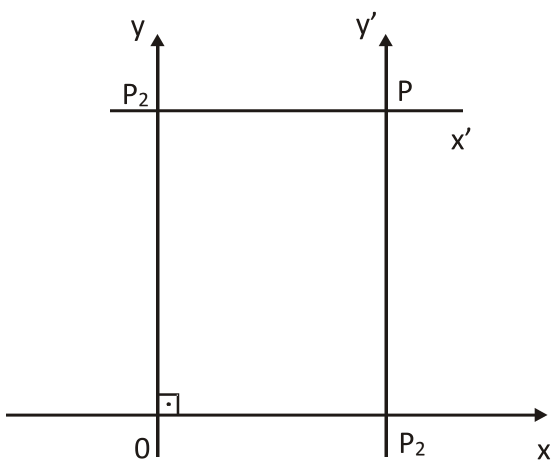
Algumas das utilidades são: atribuir um significado geométrico a fatos de natureza numérica, como o comportamento de uma função real e resolver problemas de Geometria Plana e Espacial.

Os problemas de Geometria Analítica são resolvidos através de coordenadas, equações e processos algébricos.

2. O PONTO NO PLANO

2.1. COORDENADAS CARTESIANAS

Sejam os eixos Ox e Oy, perpendiculares em O. Eles determinam um plano (π). Consideremos um ponto qualquer P, $P \in (\pi)$ e tracemos por ele as retas (x') paralela a Ox e (y') paralela a Oy. Chamemos P_1 e P_2, respectivamente, as intersecções de (y') com o eixo Ox e de (x') com o eixo Ox.



O e P_1 determinam o segmento orientado $\overline{OP_1}$ cuja medida algébrica é a abscissa do ponto P.

$$\overline{OP_1} = x_P$$

Oe P_2 determinam o segmento orientado $\overline{OP_2}$ cuja medida algébrica é a ordenada do ponto P.

$$\overline{OP_2} = y_P$$

Os números reais x_P e y_P constituem um par ordenado que determina a posição do ponto P no plano (π). São as coordenadas do ponto P.

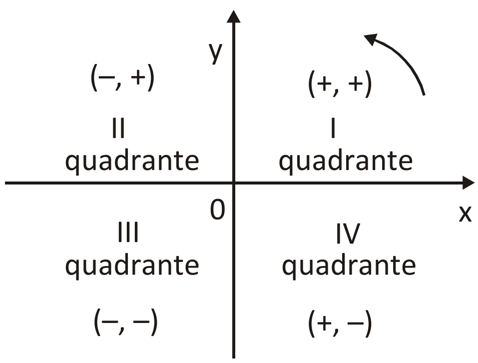
O plano (π) é denominado plano cartesiano e os eixos Ox e Oy que o determinam são os eixos cartesianos, sendo o eixo Ox o eixo das abscissas e Ou o eixo das ordenadas.

xOy indica o sistema de eixos cartesianos ortogonais (ou ortogonais, ou retangulares).

O ponto O é a origem do sistema.

2.2. QUADRANTES

Os eixos cartesianos determinam 4 regiões distintas no plano cartesiano, os quadrantes.

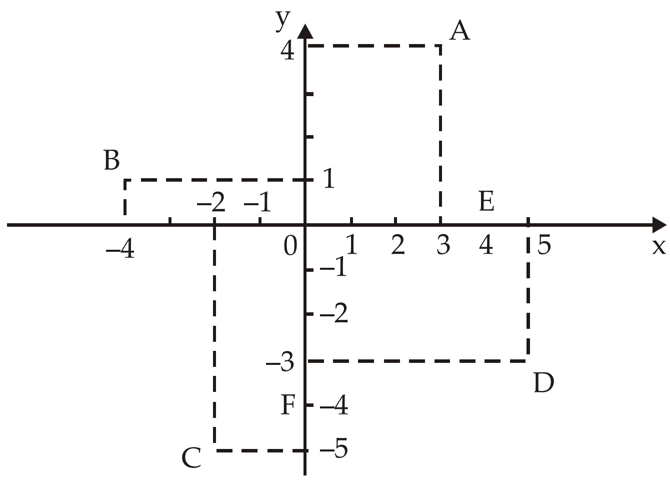


Verificamos facilmente que existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos pontos P do plano e o conjunto dos pares ordenados (x_P, y_P).

Assim, o ponto A tem sua posição definida no plano cartesiano (π) pelo par ordenado (3, 4) e indicamos por A(3, 4) e lemos ponto A de coordenadas cartesianas 3 e 4.

Da mesma forma os pontos B, C e D.

B(–4, 1), C(–2, –5) e D(5, –3)



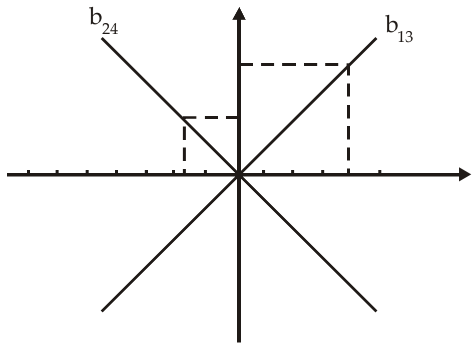
Um ponto pertencente ao eixo das abscissas tem ordenada nula.

Se pertencente ao eixo das ordenadas tem abscissa nula, e na origem ambas as coordenadas são nulas, x = y = 0.

Um ponto pertencente à bissetriz do 1º e 3º quadrantes tem coordenadas iguais e quando pertencente à bissetriz dos quadrantes Pares tem coordenadas simétricas.

$$b_{1,3} = \{P(x, x) \mid x \in R\}$$

$$b_{2,4} = \{P(x, -x) \mid x \in R\}$$



Um ponto pertencente à bissetriz do 1º e 3º quadrantes tem coordenadas iguais e quando pertencente à bissetriz dos quadrantes Pares tem coordenadas simétricas.

$$b_{1,3} = \{P(x, x) \mid x \in R\}$$

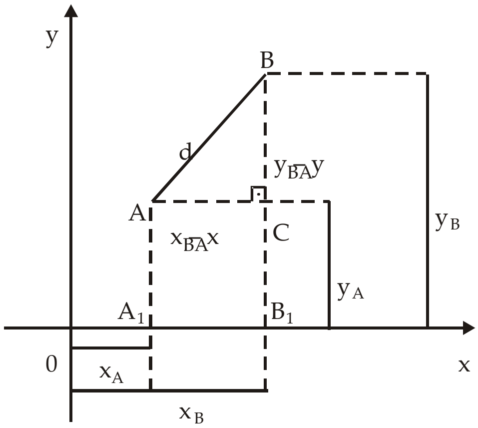
$$b_{2,4} = \{P(x, -x) \mid x \in R\}$$

2.3. DISTÂNCIA DE DOIS PONTOS

Sejam os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ referidos num sistema de eixos cartesianos ortogonais.

Procuremos a distância *d* entre dois pontos.

Do triângulo ABC tiramos $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$



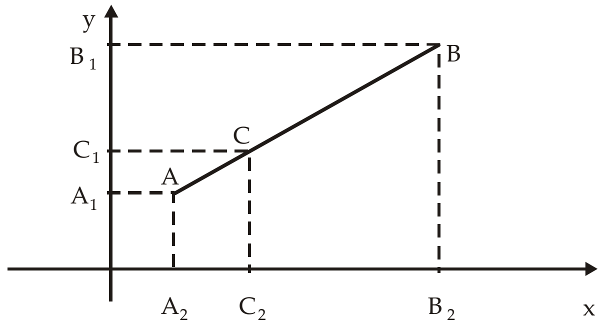
3. RAZÃO DE SECÇÃO

3.1. RAZÃO DE SECÇÃO DE UM SEGMENTO POR UM PONTO

Sejam os pontos $A \neq B \neq C$ colineares. Chamamos razão de secção do segmento $\overrightarrow{AB}$ pelo ponto C ao número real r, razão entre as medidas algébricas dos segmentos $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB}$.

$$r = (ABC) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

Tomemos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$.



O feixe de paralelas A_1A, C_1C e B_1B determina, sobre as retas AB e OY e o feixe de retas paralelas A_2A, C_2C e B_2B, determina sobre as retas AB e OX segmentos proporcionais, então

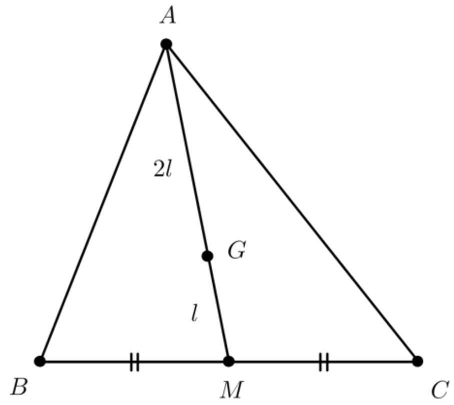
$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{C_1B_1}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A}.$$

Portanto as coordenadas (x, y) do ponto que divide o segmento compreendido por $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ segundo a razão r:

$\frac{P_1P}{PP_2} = r$ são dadas pelas fórmulas: $x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$, $y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$.

4. BARICENTRO

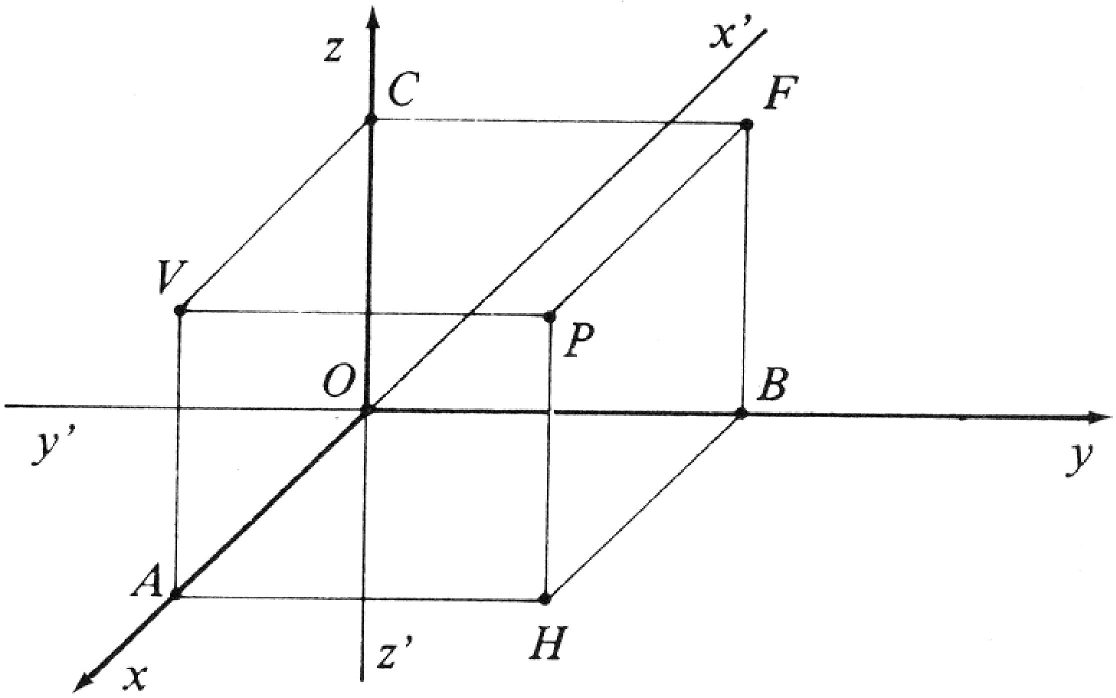
O baricentro de um triângulo é o ponto de concurso de suas medianas. Ele divide cada mediana na razão $2:1$.



$$\boxed{x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}}$$

5. PONTO NO ESPAÇO

Dado um ponto P do espaço, sua posição fica determinada plenamente em relação ao sistema através de suas distâncias PF, PV e PH aos 3 panos coordenados ou pelas projeções destas distâncias sobre os eixos coordenados, respectivamente, AO, OB e OC.



AO = BH = CV=PF = x (abscissa)

OB = AH = CF = PV = y (ordenada)

OC = BF = AV = PH = z (cota)

As fórmulas vistas para o ponto no plano podem ser utilizadas no espaço, acrescentando mais uma coordenada.

5.1. DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

5.2. BARICENTRO

$$\boxed{x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}}$$

1. Determine o perímetro do triângulo de vértices A(1, -1), B(5, 2) e C(-7, -3).

2. Demonstre analiticamente que as diagonais de um retângulo são congruentes.

3. O jogo da velha tradicional consiste em um tabuleiro quadrado dividido em 9 partes, no qual dois jogadores, alternadamente, vão colocando peças (uma a cada jogada). Ganha o jogo aquele que alinhar, na horizontal, na vertical ou na diagonal, três de suas peças.
Uma versão chamada JOGO DA VELHA DE DESCARTES, em homenagem ao criador da geometria analítica, René Descartes, consiste na construção de um subconjunto do plano cartesiano, no qual cada jogador, alternadamente, anota as coordenadas de um ponto do plano. Ganha o jogo aquele que primeiro alinhar três de seus pontos. A sequência abaixo é o registro da sequência das jogadas de uma partida entre dois jogadores iniciantes, em que um anotava suas jogadas com a cor preta e o outro, com a cor cinza. Eles desistiram da partida sem perceber que um deles havia ganhado.

$$\big((1,1),(2,3),(2,2),(3,3),(4,3),(1,3),(2,1),(3,1),(3,2),(4,2)\big).$$

Com base nessas informações, é correto afirmar que o jogador que ganhou a partida foi o que anotava sua jogada com a cor

a) cinza, em sua terceira jogada.
b) preta, em sua terceira jogada.
c) cinza, em sua quarta jogada.
d) preta, em sua quarta jogada.

4. Ache as coordenadas do ponto de interseção das medianas do retângulo de vértices

$$A(-1, 4, 7),\ B(4, 8, -3) \text{ e } C(-6, 0, 5).$$

5. O baricentro do triângulo ABC é o ponto $G(3, 3)$. Determine os 3 vértices deste triângulo, sabendo-se que os pontos médios de 2 de seus lados são os pontos $M(-3, 4)$ e $N(7, 3)$.

6. Num determinado instante t as posições de duas partículas P e Q são dadas por (1+2t ,1+t) e (4+t ,-3 +6t). As partículas se chocam?

7. Determine as coordenadas do ponto equidistante dos vértices A(-1, 2), B(6, 3) e C(0, -5) do triângulo ABC.

8. Determine a natureza do quadrilátero ABCD, sendo A(-2, 6), B(0, 2), C(4, 0) e D(2, 4).

9. Um hexágono regular possui dois vértices opostos de coordenadas $(a, -b)$ e (b, a). A área desse hexágono é:

a) $\frac{3}{4}(a^2 + b^2)$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2)$

c) $\frac{3\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2)$

d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2)$

e) $\frac{3}{2}(a^2 + b^2)$

10. Um ponto está situado a igual distância dos pontos $(3,5)$ e $(-2,4)$, e a sua distância ao eixo dos y é o dobro da sua distância ao eixo dos x. Sabendo que esse ponto não está no primeiro quadrante, suas coordenadas são:

a) $\left(\frac{14}{11},\frac{7}{11}\right)$

b) $\left(\frac{14}{11},-\frac{7}{11}\right)$

c) $\left(-\frac{14}{9},\frac{7}{9}\right)$

d) $\left(\frac{14}{9},-\frac{7}{9}\right)$

e) $\left(\frac{7}{9},-\frac{14}{9}\right)$

11. Sabendo que a mediana de Euler de um quadrilátero é o segmento que une os pontos médios de suas diagonais, o comprimento da mediana de Euler do quadrilátero ABCD de vértices $A(1,1)$, $B(-2,3)$, $C(-3,-4)$ e $D(3,-1)$ é:

a) $\frac{\sqrt{34}}{2}$

b) $\sqrt{34}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\sqrt{2}$

e) $\sqrt{17}$

12. Os catetos AC e AB de um triângulo retângulo estão sobre os eixos de um sistema cartesiano. Se M = (–1, 3) for o ponto médio da hipotenusa BC, é correto afirmar que a soma das coordenadas dos vértices desse triângulo é igual a:

a) –4

b) –1

c) 1

d) 4

13. Sejam A (0, 3), C(–2, 5) os vértices opostos de um quadrado. Encontre as coordenadas dos dois vértices restantes.

14. Uma partícula se move de tal modo que as suas distâncias aos pontos (3, 4) e (5, –2) são sempre iguais. Determine a equação que descreve o lugar geométrico deste ponto.

15. A área de um quadrado que tem A = (4,8) e B = (–2,2) como vértices opostos é:

a) 36

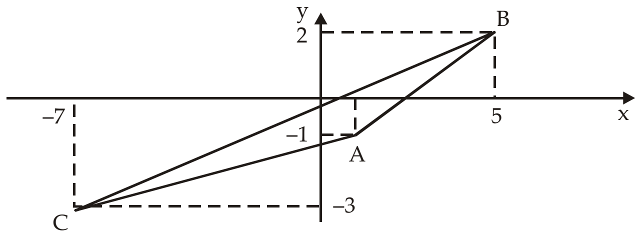
b) 20

c) 18

d) 16

1.

A medida do perímetro do triângulo é $2p = d_{AB} + d_{BC} + d_{CA}$.



Determinemos as medidas dos lados:

$d_{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

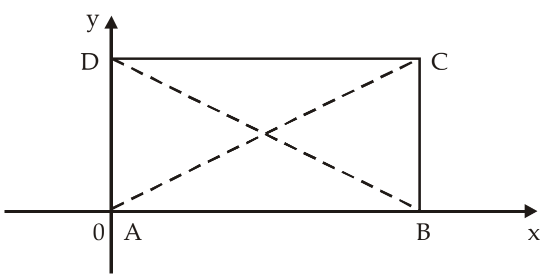
$d_{BC} = \sqrt{(-7-5)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{144+25} = 13$

$d_{CA} = \sqrt{(1+7)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

Então, $2p = 18 + 2\sqrt{17}$.

2.

Consideremos o retângulo ABCD, sendo os vértices os pontos A(0, 0), B(b, 0), C(b, c) e D(0, c).



Determinemos d_{AC} e d_{BD}:

$$d_{AC} = \sqrt{(b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{b^2 + c^2} \quad ①$$

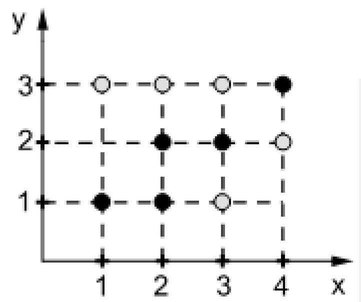
e

$$d_{BD} = \sqrt{(0-b)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{b^2 + c^2} \quad ②$$

①= ② $\Rightarrow d_{AC} = d_{BD} \Rightarrow$ méd. (AC) = méd. (BD).

3.

Considere a figura.



De acordo com a sequência de jogadas apresentada, podemos concluir que o jogador que ganhou a partida foi o que anotava sua jogada com a cor cinza, em sua terceira jogada, ou seja, na jogada $(1, 3)$.

4.

O encontro das medianas do triângulo é seu baricentro, logo

$$x_G = \frac{-1+4-6}{3} = -1,\ y_G = \frac{4+8+0}{3} = 4,$$

$$z_G = \frac{7-3+5}{3} = 3 \Rightarrow G(-1, 4, 3).$$

5.

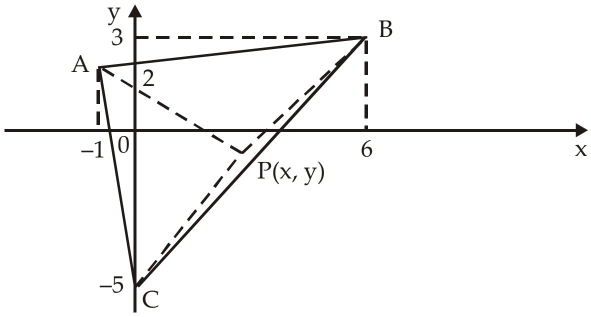
Resposta: $(-1, 5)$; $(-5, 3)$ e $(15, 1)$.

6.

As trajetórias se P e Q se interceptam no ponto (5,3) . P passa por esse ponto no instante t =2 e Q no instante t = 1 .Logo , elas não se chocam.

7.

Nota: Este ponto é o circuncentro do triângulo – centro da circunferência circunscrita ao triângulo.



Seja P(x, y) o ponto procurado.

Das condições do problema $\Rightarrow d_{AP} = d_{BP} = d_{CP}$

Determinemos estas distâncias

$d_{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}$, $d_{BP} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-3)^2}$ e $d_{CP} = \sqrt{(x-0)^2 + (y+5)^2}$.

Igualando 2 a 2 e elevando ambos os membros ao quadrado $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-6)^2 + (y-3)^2 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-0)^2 + (y+5)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 + 10y + 25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 14x + 2y = 40 \\ 2x - 14y = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x + y = 20 \\ x - 7y = 10 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2^{a} \times (-7) \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2^{a} \times (-7) \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} 7x + y = 20 \\ -7x + 49y = -70 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} 50y = -50 \Rightarrow y = -1$$

e em x – 7y = 10 $\Rightarrow$ x + 7 = 10 $\Rightarrow$ x = 3 portanto P(3, -1)

8.

Determinemos as medidas dos lados AB, BC, CD e DA.

$$d_{AB} = \sqrt{(0+2)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$d_{CD} = \sqrt{(2-4)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$d_{DA} = \sqrt{(-2-2)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

Os quatro lados são congruentes, podendo o quadrilátero ser quadrado ou losango. Verifiquemos através das suas diagonais AC e BD.

$$d_{AC} = \sqrt{(4+2)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$$

$$d_{BD} = \sqrt{(2-0)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

O quadrilátero é um losango.

9.

$$d_{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \sqrt{(a+b)^2 + (a-b)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}.$$

esta distância vale duas vezes o lado do hexágono.

$$S_{HEXÁGONO} = 3\frac{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{3}}{4}$$

RESPOSTA: C

10.

RESPOSTA: D

11.

RESPOSTA: A

12.

RESPOSTA: D

13.

Seja B ou D (h, k), então AB = BC e $AC^2 = AB^2 + BC^2$

Onde obtemos

$$(h-0)^2+(k-3)^2=(h+2)^2+(k-5)^2$$

$$(0+2)^2+(3-5)^2=(h-0)^2+(k-3)^2+(h+2)^2+(k-5)^2$$

Ou simplificando, essas relações tornam-se

$$h-k=-5, h^2+k^2+2h-8k+15=0$$

Ou colocando h = k – 5 na segunda relação, temos

$$(k-5)^2+k^2+2(k-5)-8k+15=0$$

Ou $k^2-8k+15=0 \Rightarrow k=3, k=5$

Quando k = 3, h – 3 = - 5, h = - 5 + 3, h = 2.

Quando k = 5, h = 5 – 5 = 0.

Assim, B e D são (- 2, 3) e (0, 5)

14.

$$(x-3)^2+(y-4)^2=(x-5)^2+(y+2)^2 \Leftrightarrow$$
$$-6x+9-8y+16=-10x+25+4y+4 \Leftrightarrow$$
$$4x-12y=4 \Leftrightarrow x-2y=1.$$

15.

A medida da diagonal do quadrado é dada pela distância entre os pontos A e B.

$$d_{AB}{}^2=(4-(-2))^2+(8-2)^2=72=(l\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 2l^2=76 \Leftrightarrow l^2=36.$$

RESPOSTA: A