FRENTE: MATEMÁTICA IV

PROFESSOR: MARCELO MENDES

EAD – ITA

AULA 28

ASSUNTO: TRIÂNGULO DE PASCAL E BINÔMIO DE NEWTON – PARTE 2

Resumo Teórico

TRIÂNGULO DE PASCAL E BINÔMIO DE NEWTON – PARTE 2

Binômio de Newton

Se **x** e **y** são números reais e **n** é um número inteiro positivo, então

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k = \binom{n}{0}x^ny^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^0y^n.$$

Observe que há n + 1 termos no desenvolvimento de $(x + y)^n$.

Exercícios

01. Calcule **m** sabendo-se que $\sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i} = 1023$.

02. Mostre que a soma dos coeficientes de $(x – a)^n$ é zero.

03. A soma $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n}$ é igual a:

a) $n \cdot 2^{n-1}$
b) 2^n
c) $n \cdot 2^n$
d) $(n + 1) \cdot 2^{n+1}$
e) $n \cdot 2^{n+1}$

04. A igualdade $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}7^n + \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}2^m = 64$ é válida para:

a) quaisquer que sejam **n** e **m** naturais positivos.
b) qualquer que seja **n** natural positivo e m = 3.
c) n = 13 e m = 6.
d) **n** ímpar e **m** par.
e) NDA

05. Partindo de $(x + 1)^m \cdot (x + 1)^h = (x + 1)^{m+h}$ e igualando os coeficientes adequados, prove a fórmula de Euler $C_m^0C_h^p + C_m^1C_h^{p-1} + \ldots + C_m^pC_h^0 = C_{m+h}^p$.

06. Sejam **n** natural e **p**, um inteiro não negativo. Então $\sum_{p=0}^{n}(-1)^{p-n} \cdot (-1)^p \cdot (-1)^{n-p} \cdot \binom{n}{p}$ vale:

a) –1
b) 0
c) 1
d) 2
e) NDA

07. Prove que

$$2\cdot 1 = \binom{n}{2} + 3\cdot 2\binom{n}{3} + 4\cdot 3\binom{n}{4} + \ldots + n\cdot(n-1)\binom{n}{n} = n(n-1)\cdot 2^{n-2}$$

08. Sejam $A = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k$ e $B = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}11^k$.

Se $\ell n B - \ell n A = \ell n \frac{6561}{4}$, então **n** é igual a:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 9
e) NDA

Notações: $\binom{n}{k}$ denota a combinação de **n** elementos tomados k a k e ℓnx denota o logaritmo neperiano de **x**.

09. Seja $f(x)=\sum_{n=0}^{20}\frac{20!}{n!(20-n)}x^n$ uma função real de variável real em que **n!** indica o fatorial de n. Considere as afirmações:

I. f(1) = 2;
II. f(–1) = 0;
III. f(–2) = 1.

Podemos concluir que:
a) somente as afirmações I e II são verdadeiras.
b) somente as afirmações II e III são verdadeiras.
c) apenas a afirmação I é verdadeira.
d) apenas a afirmação II é verdadeira.
e) apenas a afirmação III é verdadeira.

10. Encontre $\sum_{k=0}^{49}(-1)^k\binom{99}{2k}$, onde $\binom{n}{j}=\frac{n!}{j!\,(n-j)!}$.

a) -2^{50}
b) -2^{49}
c) 0
d) 2^{49}
e) 2^{50}

11. Partindo de $(x+1)^n \cdot (x+1)^n = (x+1)^{2n}$ e igualando os coeficientes adequados, prove a fórmula de Lagrange $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\ldots+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$.

12.

a) Seja $X=C_8^0-\frac{1}{3}C_8^1+\frac{1}{3^2}C_8^2-\frac{1}{3^3}C_8^3+\ldots+\frac{1}{3^8}C_8^8$, calcule $\sqrt{X}$.
b) Prove que o número $37^{37}+83^{83}$ é divisível por 3.

13. Sejam as somas S_0 e S_1 definidas por

$$S_0=C_n^0+C_n^3+C_n^6+C_n^9+\ldots+C_n^{3\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}$$

$$S_1=C_n^1+C_n^4+C_n^7+C_n^{10}+\ldots+C_n^{3\left\lfloor\frac{n-1}{3}\right\rfloor+1}$$

Calcule os valores de S_0 e S_1 em função de **n**, sabendo que $\lfloor r\rfloor$ representa o maior inteiro menor que ou igual ao número **r**.

Sugestão: utilize o desenvolvimento em binômio de Newton de $\left(1+\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}\right)^n$.

14. Sejam **a** e **b** dois números reais quaisquer e **p**, um número primo. A igualdade $(a\pm b)^p=a^p\pm b^p$ é verificada se:

a) a = b = 1.
b) a e b são primos entre si.
c) b = pa.
d) xp = 0 para todo número real **x**.
e) NDA.

15. A soma dos coeficientes dos termos de ordem ímpar de $(x-y)^n$ é 256. Então, o valor de **n** é:

a) 9
b) 8
c) 7
d) 4
e) NDA

Gabarito

01	02	03	04	05
*	–	A	B	–
06	**07**	**08**	**09**	**10**
B	–	E	B	B
11	**12**	**13**	**14**	**15**
–	–	–	E	A

– Demonstração

01. m = 10

12.
a) 16/81 b) Demonstração

13.

$$S_0=\frac{2^n}{3}+\frac{2}{3}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right);\ S_1=\frac{2^n}{3}-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

Anotações

SUPERVISOR/DIRETOR: MARCELO PENA – AUTOR: MARCELO MENDES
DIG.: Zilmar – REV.: KELLY MOURA