

Potenciação e Radiciação

POTÊNCIA DE EXPOENTE INTEIRO



Definição

Dados um número real a e um número natural n , com $n > 1$, chama-se de potência de base a e expoente n o número a^n , que é o produto de n fatores iguais a a .

Por definição, temos ainda que $a^0 = 1$ (sendo $a \neq 0$) e $a^1 = a$.

Dessa definição, decorre que:

$$a^2 = a \cdot a, \quad a^3 = a \cdot a \cdot a, \quad a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a, \quad \text{etc.}$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Dados um número real a , não nulo, e um número natural n , chama-se de potência de base a e expoente $-n$ o número a^{-n} , que é o inverso de a^n .

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Propriedades

Se $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}$, então valem as seguintes propriedades:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

RAIZ ENÉSIMA ARITMÉTICA



Definição

Dados um número real não negativo a e um número natural n , $n \geq 1$, chama-se de raiz enésima aritmética de a o número real e não negativo b tal que $b^n = a$.

O símbolo $\sqrt[n]{a}$, chamado radical, indica a raiz enésima aritmética de a . Nele, a é chamado de radicando, e n , de índice.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \quad \text{e} \quad b \geq 0$$

OBSERVAÇÕES

- i) Da definição, decorre $(\sqrt[n]{a^n}) = a$, para todo $a \geq 0$.
- ii) Observemos, na definição dada, que:

Correto	Incorreto
$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{16} = \pm 4$
$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{25}{81}} = \pm \frac{5}{9}$
$\sqrt[3]{-8} = -2$	$\sqrt{0,09} = \pm 0,3$
$\pm\sqrt{49} = \pm 7$	$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{64}} = \pm \frac{6}{8}$

- iii) Devemos estar atentos ao cálculo da raiz quadrada de um quadrado perfeito:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Exemplos:

1º) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$, e não $\sqrt{(-5)^2} = -5$

2º) $\sqrt{x^2} = |x|$, e não $\sqrt{x^2} = x$

No conjunto dos números reais, temos situações distintas conforme n seja par ou ímpar.

- 1) Para n par:

Se $a < 0$, não existe raiz enésima de a .

Exemplo:

$\sqrt{-5}$ não existe no conjunto dos números reais.

Se $a = 0$, a única raiz enésima de a é zero.

Exemplo:

$$\sqrt{0} = 0$$

Se $a > 0$, a única raiz enésima de a é $\sqrt[n]{a}$.

Exemplo:

$$\sqrt{4} = 2$$

2) Para n ímpar:

Qualquer que seja o número real a , existe uma única

raiz enésima, que é indicada por $\sqrt[n]{a}$ (ou $a^{\frac{1}{n}}$, como veremos adiante).

Exemplos:

1º) $\sqrt[3]{-8} = -2$

2º) $\sqrt[3]{1} = 1$

Propriedades

Se $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$\sqrt[n]{a^m} = n \cdot \sqrt[n]{a^{m \cdot p}}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = n \cdot \sqrt[n]{a}$$

Se $b \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \mathbb{N}^*$, temos $b \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot b^n}$.

Exemplos:

1º) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{40}$

2º) $-3\sqrt{2} = -\sqrt{2 \cdot 3^2} = -\sqrt{18}$

Assim, o coeficiente do radical pode ser colocado no radicando, com expoente igual ao índice do radical.

POTÊNCIA DE EXPOENTE RACIONAL

Definição

Dados um número real a (positivo), um número inteiro p e um número natural q ($q \geq 1$), chama-se de potência de base a e expoente $\frac{p}{q}$ a raiz com índice q de a^p .

$$a > 0 \Rightarrow a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} > 0$$

Sendo $\frac{p}{q} > 0$, define-se $0^{\frac{p}{q}} = 0$.

Exemplos:

1º) $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

2º) $3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$

Propriedades

As propriedades a seguir se verificam para as potências de expoente racional.

Assim, se $a \in \mathbb{R}_+$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, então valem as seguintes propriedades:

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$$

$$\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}}$$

$$(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$$

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}$$

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Para facilitar cálculos, é comum eliminar raízes dos denominadores das frações, através de um processo chamado racionalização.

Por exemplo, ao realizarmos a divisão $\frac{1}{\sqrt{2}}$, como $\sqrt{2}$ é, aproximadamente, 1,41, teremos de efetuar $\frac{1}{1,41}$. Porém, se racionalizarmos a fração dada (multiplicando numerador e denominador por $\sqrt{2}$), teremos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

E, usando a mesma aproximação anterior, ficamos com a divisão $\frac{1,41}{2}$, que é mais simples que a primeira.

De modo geral, para racionalizarmos uma fração com denominador $\sqrt[n]{a^p}$, multiplicamos o numerador e o denominador por $\sqrt[n]{a^{n-p}}$, pois $\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^{n-p}} = \sqrt[n]{a^{p+n-p}} = a$.

Exemplos:

$$1^{\circ}) \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$2^{\circ}) \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{3^5}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{3}$$

Caso apareça, no denominador de uma fração, uma soma de radicais, devemos utilizar os produtos notáveis.

Vejamos alguns exemplos de racionalizações:

Exemplo 1:

Quando o denominador é do tipo $a + b$ ou $a - b$, e a e/ ou b são raízes quadradas, lembrando que

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

devemos multiplicar numerador e denominador por $a - b$ ou $a + b$, respectivamente. Assim:

$$1^{\circ}) \frac{2}{\sqrt{5} + 1} = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$2^{\circ}) \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2}}{5}$$

Exemplo 2:

Quando o denominador é do tipo $(a - b)$ ou $(a + b)$, e um dos dois é uma raiz cúbica, lembrando que

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

devemos multiplicar o numerador e o denominador por $a^2 + ab + b^2$ ou $a^2 - ab + b^2$, respectivamente. Assim:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} \cdot \frac{[(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1^2)]}{[(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1^2)]} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} = \frac{(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1)}{\sqrt[3]{2^3} - 1^3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

- 01.** (UFRGS-RS) A distância que a luz percorre em um ano, chamada ano-luz, é de aproximadamente $38 \cdot 4^5 \cdot 5^{12}$ quilômetros. A notação científica desse número é:
- A) $9,5 \cdot 10^{10}$ C) $9,5 \cdot 10^{12}$ E) $9,5 \cdot 10^{14}$
 B) $0,95 \cdot 10^{12}$ D) $95 \cdot 10^{12}$

- 02.** (CMBH-2020) Qual é o menor valor da soma $X + Y$, de modo que o produto $6^{2X} \cdot 9^2 \cdot 34^Y$ possa ser expresso como uma potência de base 51?
- A) 0 C) 2 E) 4
 B) 1 D) 3

- 03.** (CEFET-MG) O valor da expressão numérica $\frac{(1,25)^2 + 4 \cdot 5^{-1}}{(9 \cdot 9^{-1})^2 - 2(-10)^{-1}}$ é igual a:
- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{6}{5}$

- 04.** (IFSC-SC) Considere a expressão numérica $A = \frac{0,001}{1\,000} + 8^{\frac{2}{3}} + \sqrt{25}$. É correto afirmar que o valor de **A** é:



Disponível em: <pplware.sapo/o-pplware-apresenta-kids>. Acesso em: 10 ago. 2014.

- A) 9 D) 69
 B) 10 E) 9,000001
 C) 81,003

- 05.** (UPF-RS-2018) Considere as afirmações a seguir, em que **a** e **b** são números reais.



- I. $\sqrt{a^2} = a$ III. $\sqrt{a^2 \cdot b^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2}$
 II. $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ IV. $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}}$, $b \neq 0$

- A) Apenas III e IV são verdadeiras.
 B) Apenas IV é verdadeira.
 C) Apenas II é falsa.
 D) Apenas I, II e IV são verdadeiras.
 E) Todas são verdadeiras.

- 06.** (IFSC-SC) O valor correto da expressão numérica $E = (10^{-2}) \cdot (10^3) : (10^{-4}) + (8 \cdot 8^{-1}) + 10^{-4}$ é



- A) 58,0001. D) 8.
 B) 8,000001. E) 80.
 C) 100001,0001.

04. (Enem) U682 A cor de uma estrela tem relação com a temperatura em sua superfície. Estrelas não muito quentes (cerca de 3 000 K) nos parecem avermelhadas. Já as estrelas amarelas, como o Sol, possuem temperatura em torno dos 6 000 K; as mais quentes são brancas ou azuis porque sua temperatura fica acima dos 10 000 K. A tabela apresenta uma classificação espectral e outros dados para as estrelas dessas classes.

Estrelas da sequência principal

Classe espectral	Temperatura	Luminosidade	Massa	Raio
O5	40 000	$5 \cdot 10^5$	40	18
B0	28 000	$2 \cdot 10^4$	18	7
A0	9 900	80	3	2,5
G2	5 770	1	1	1
M0	3 480	0,06	0,5	0,6

(Temperatura em Kelvin. Luminosidade, massa e raio, tomando o Sol como unidade.)

Disponível em: <<http://www.zenite.nu>>. Acesso em: 01 maio 2010 (Adaptação).

Se tomarmos uma estrela que tenha temperatura 5 vezes maior que a temperatura do Sol, qual será a ordem de grandeza de sua luminosidade?

- A) 20 000 vezes a luminosidade do Sol.
- B) 28 000 vezes a luminosidade do Sol.
- C) 28 850 vezes a luminosidade do Sol.
- D) 30 000 vezes a luminosidade do Sol.
- E) 50 000 vezes a luminosidade do Sol.

05. (Enem) Um dos grandes problemas da poluição dos mananciais (rios, córregos e outros) ocorre pelo hábito de jogar óleo utilizado em frituras nos encanamentos que estão interligados com o sistema de esgoto. Se isso ocorrer, cada 10 litros de óleo poderão contaminar 10 milhões (10^7) de litros de água potável.

MANUAL de etiqueta. Parte integrante das revistas *Veja* (ed. 2 055), *Claudia* (ed. 555), *National Geographic* (ed. 93) e *Nova Escola* (ed. 208) (Adaptação).

Suponha que todas as famílias de uma cidade descartem os óleos de frituras através dos encanamentos e consumam 1 000 litros de óleo em frituras por semana. Qual seria, em litros, a quantidade de água potável contaminada por semana nessa cidade?

- A) 10^2
- B) 10^3
- C) 10^4
- D) 10^5
- E) 10^9

06. (Enem) KGAZ No depósito de uma biblioteca, há caixas contendo folhas de papel de 0,1 mm de espessura e, em cada uma delas, estão anotados 10 títulos de livros diferentes. Essas folhas foram empilhadas formando uma torre vertical de 1 m de altura. Qual a representação, em potência de 10, correspondente à quantidade de títulos de livros registrados nesse empilhamento?

- A) 10^2
- B) 10^4
- C) 10^5
- D) 10^6
- E) 10^7

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP



GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei _____ Errei _____

- 01. C
- 02. B
- 03. D
- 04. E
- 05. A
- 06. C
- 07. D
- 08. E

Propostos

Acertei _____ Errei _____

- 01. B
- 02. $\frac{\sqrt{2}}{5}$
- 03. E
- 04. E
- 05. D
- 06. C
- 07. C
- 08. E
- 09. D
- 10. C
- 11. D
- 12. B
- 13. B
- 14. B
- 15. A
- 16. E
- 17. A

Seção Enem

Acertei _____ Errei _____

- 01. D
- 02. B
- 03. B
- 04. A
- 05. E
- 06. C



Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %