Estratégia Militares

CURSO EXTENSIVO

FÍSICA MODERNA (I)

FÍSICA MODERNA

RELATIVIDADE

Prof. Vinícius Fulconi

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

Apresentação do Professor

Querido aluno(a), seja bem-vindo(a) à nossa primeira aula!

Sou o professor Vinícius Fulconi, tenho vinte e cinco anos e estou cursando Engenharia Aeroespacial no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Irei contar um pouco sobre minha trajetória pessoal, passando pelo mundo dos vestibulares com minhas principias aprovações, até fazer parte da equipe de física do Estratégia Militares.

No ensino médio, eu me comportava como um aluno mediano. No final do segundo ano do ensino médio, um professor me desafiou com a seguinte declaração: *Você nunca vai passar no ITA!* Essa fala do professor poderia ter sido internalizada como algo desestimulador e, assim como muitos, eu poderia ter me apegado apenas ao que negritei anteriormente. Muitos desistiriam! Entretanto, eu preferi negritar e gravar "*Você vai passar no ITA!*

Querido aluno(a), a primeira lição que desejo te mostrar não é nenhum conteúdo de física. Quero que transforme seu sonho em vontade de vencer. Transforme seus medos e incapacidades em desafios a serem vencidos. Haverá muitos que duvidarão de você. O mais importante é você acreditar! Nós do Estratégia Militares acreditamos no seu potencial e ajudaremos você a realizar seu sonho!

Sonhos → **Perseverânça e trabalho duro** → **Realizações**

Após alguns anos estudando para o ITA, usando muitos livros estrangeiros, estudando sem planejamento e frequentando diversos cursinhos do segmento, realizei meu sonho e entrei em umas das melhores faculdades de engenharia do mundo. 😊 Além de passar no ITA, ao longo da minha preparação, fui aprovado no IME, UNICAMP, Medicina (pelo ENEM) e fui medalhista na Olimpíada Brasileira de Física.

Minha resiliência e grande experiência em física, que obtive estudando por diversas plataformas e livros, fez com que eu me tornasse professor de física do Estratégia Militares. Tenho muito orgulho em fazer parte da família Estratégia e hoje, se você está lendo esse texto, também já é parte dela. Como professor, irei te guiar por toda física, alertando sobre os erros que cometi na minha preparação, mostrando os pontos em que obtive êxito e, assim, conseguirei identificar quais são seus pontos fortes e fracos, maximizando seu rendimento e te guiando até à faculdade dos seus sonhos.

Você deve estar se perguntando: O que é necessário para começar esse curso?

ALERTA!

Esse curso exige do candidato apenas **dedicação**, **perseverança** e **vontade de vencer**.

1. FÍSICA MODERNA

Antes de começar nossos estudos de física moderna, vamos dar um breve contexto histórico. Por volta dos anos de 1900, os físicos tinham a confiança de que a física clássica era capaz de descrever a natureza, pois a mecânica de Newton era capaz de explicar a maioria dos fenômenos, assim como a teoria eletromagnética de Maxwell e a termodinâmica de Boltzmann.

Entretanto, existiam alguns problemas ditos como “triviais” para resolver. Em abril de 1900, Lord Kelvin leu na *Royal Institution of Great Britain* em uma conferência denominada “As nuvens do século XIX na teoria dinâmica do calor e da luz”, as seguintes palavras: “a Física é um conjunto perfeitamente harmonioso e essencialmente finalizada, em que há somente duas pequenas nuvens obscuras: o resultado negativo dos experimentos de Michelson-Morley e a catástrofe do ultravioleta da lei de Rayleigh-Jeans”.

Estes resultados não podiam ser explicados pela mecânica clássica. Mal sabia Lord Kelvin que haveria algumas quebras de paradigmas e rapidamente mudaria toda a Física. A solução do experimento de Michelson-Morley daria lugar a teoria especial da relatividade, conforme propôs Einstein em 1905.

A formulação proposta por Einstein mudaria os conceitos de espaço e de tempo absolutos estabelecidos por Newton. Ele mostrou que o espaço e tempo no universo de Newton é na realidade relativos, isto é, dependem do sistema de referência.

Paralelamente, a catástrofe do ultravioleta foi resolvida por Max Planck mediante a uma ideia revolucionária de descontinuidade de energia.

Planck propôs que a energia radiante contínua de Maxwell na verdade se propagava em forma de descontínua, ou seja, em pequenos pacotes chamados quantum de energia.

Assim, as nuvens obscuras de Kelvin vieram a ser solucionadas com o surgimento da teoria da relatividade e a teoria quântica, iniciando o que nós chamamos de Física Moderna.

Neste primeiro capítulo, trabalharemos os conceitos da relatividade de Galileu e suas transformações de referenciais. Em seguida, estudaremos a relatividade restrita proposta por Einstein e suas consequências na dilatação do tempo e na contração do espaço, na dinâmica relativística e na energia.

Depois, estudaremos a radiação de um corpo negro e o método proposto por Planck para resolver a catástrofe do ultravioleta, dando início a teoria quântica da radiação. A partir desta teoria, estudaremos o efeito fotoelétrico que proporcionou a Albert Einstein o prêmio Nobel.

Na última parte desta aula, trabalharemos o efeito Compton, que contribuiu para a demonstração para a natureza quântica da luz. Este efeito é muito importante para a ciência pois ele não pode ser explicado pela natureza ondulatória da luz.

Devido ao fato da luz se comportar como partículas para explicar as observações no efeito Compton, surge a dualidade onda-partícula da luz que é característica da mecânica quântica. Este tratamento corpuscular da luz é fundamental para o entendimento de alguns fenômenos e essa partícula de luz recebe o nome de fóton.

1. PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE DE GALILEU

Quando estudamos cinemática nas nossas primeiras aulas, vimos que as características do movimento mecânico dependem do sistema de referência adotado quando se analisa o movimento, isto é, é relativo.

Por exemplo, se considerarmos como observador (sistema de referência) uma pessoa colocada numa extremidade de um vagão de um trem com velocidade constante, ele verá outros acompanhantes não se moverem. Entretanto, para alguém parado na Terra, as pessoas no interior do vagão estão em movimento. Como para o mesmo fenômeno duas pessoas podem observar fenômenos diferentes? Quem tem razão? Os dois estão corretos pois o movimento é relativo.

Esta propriedade de movimento relativo foi estudada primeiramente por Galileu Galilei, que compreendeu que se os sistemas de referência se movem a velocidade constante, um observador neste sistema não poderia saber se está em repouso ou se encontra em movimento, ao menos que olhe para fora do sistema.

Tudo se passa como o observador estivesse em repouso. Assim, quando viajamos (em um trem, por exemplo) e o móvel se desloca com velocidade constante, sem alterar a direção, podemos almoçar, escrever, fazer embaixadinhas com uma bola, sem nenhuma dificuldade.

Entretanto, as dificuldades surgem quando o trem é acelerado, freado ou mudar a direção, revelando o movimento do sistema.

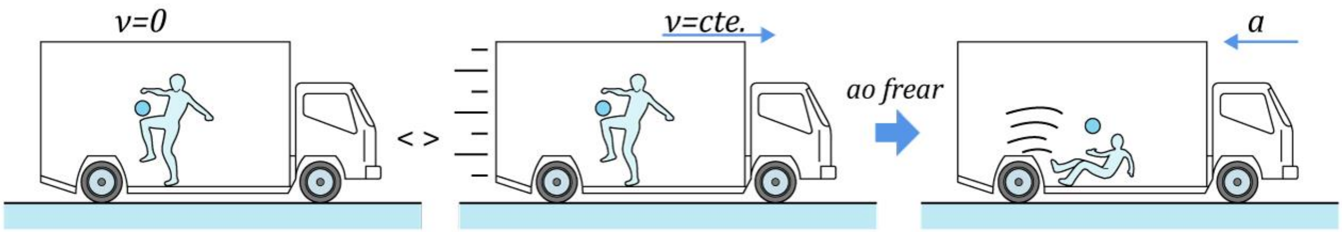


Figura 1: Garoto no interior de um caminhão fazendo embaixadinhas com uma bola.

Como já sabemos, no MRU (movimento retilíneo uniforme) há resultante das forças que atuam no objeto é nula. Uma pessoa (no sistema com MRU) não pode saber se está em repouso ou em movimento, mas no movimento acelerado é capaz de sentir, mostrando que a pessoa se encontra em movimento.

Do exposto se conclui que um sistema com velocidade constante não influi no movimento dos corpos que se encontram nele. Além disso, não se pode distinguir um sistema em repouso de um sistema a velocidade constante. Consequentemente, o sistema que se move a velocidade constante em relação do sistema em repouso pode ser considerado também como um sistema em repouso. Tais sistemas são comumente chamados de referenciais inerciais.

Nestes referenciais, as leis de Newton são válidas. No caso do movimento de rotação da Terra, sua aceleração é baixa e, assim, podemos considerar a Terra como um bom referencial inercial, para uma certa precisão. Caso seja necessário um referencial melhor, podemos utilizar as estrelas ou as galáxias.

A partir das análises, vemos que não existe um repouso absoluto, mas uma infinidade de repousos que se descolocam, uns em relação aos outros, a velocidades constantes diferentes.

Assim, o princípio da relatividade de Galileu diz que:

As leis da mecânica são iguais se permanecemos em repouso ou em movimento com velocidade constante.

Diante deste resultado, vemos que as leis da Física são as mesmas em sistemas com velocidades constantes. Então, para descrever o movimento dos corpos em um novo referencial inercial, basta utilizamos as transformadas de Galileu.

1.1.1. TRANSFORMAÇÃO DE GALILEU

Quando se observa um evento ou fenômeno mecânico como o movimento de um objeto em um referencial inercial, surgem algumas dúvidas: como este fenômeno é observado de outro referencial inercial, que se move relação ao primeiro com uma velocidade $\vec{v}$? Podemos determinar as equações para o novo referencial inercial?

As respostas para estas perguntas são determinadas pelas transformações de Galileu. Para exemplificar essa mudança de referencial inercial, vamos tomar o seguinte exemplo. Considere um sistema S de coordenadas x, y e z, e $S^{'}$ com coordenadas $x^{'}, y^{'}$ e $z^{'}$. Um ônibus escolar se move em relação a S (Terra) com uma velocidade $+v$ e um ponto A em repouso em relação a S (Terra).

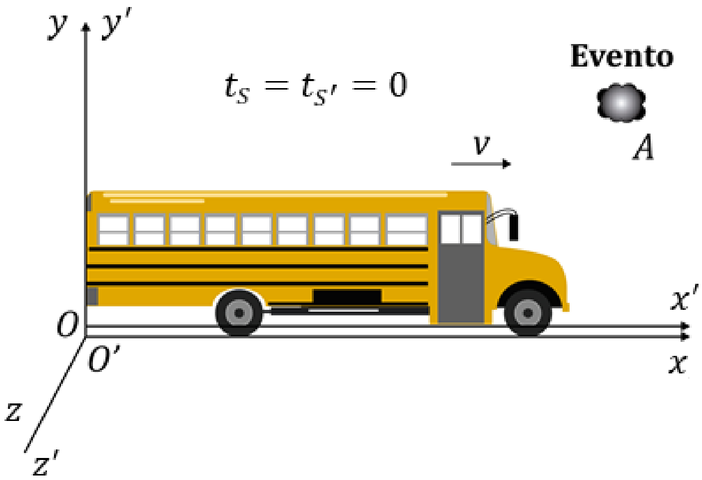


Figura 2: No início, as coordenadas ligadas a Terra coincidem com as coordenadas relacionadas com as do ônibus.

A relação entre as coordenadas do mesmo ponto A, nos dois sistemas indicados, pode ser obtida da seguinte maneira.

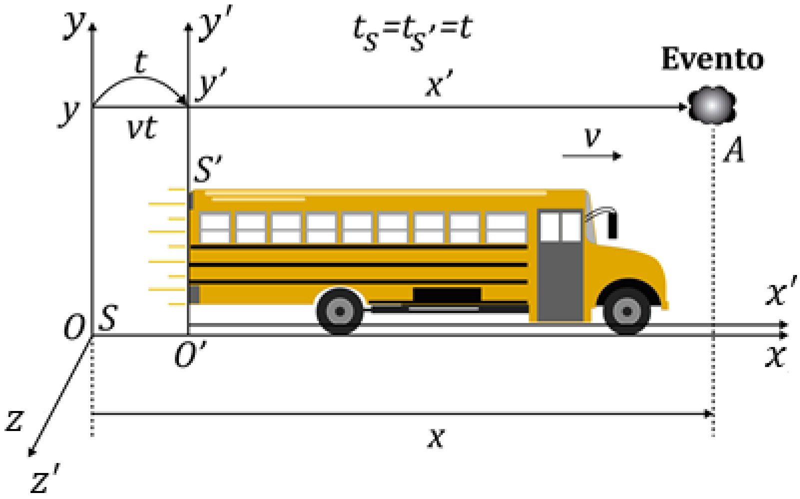


Figura 3: Após um certo intervalo de tempo t, a abscissa (x) ligada a Terra não coincide com a abscissa (x') ligada ao ônibus.

Da figura acima, podemos determinar a transformação direta de Galileu.

$$\begin{cases} x' = x - v \cdot t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

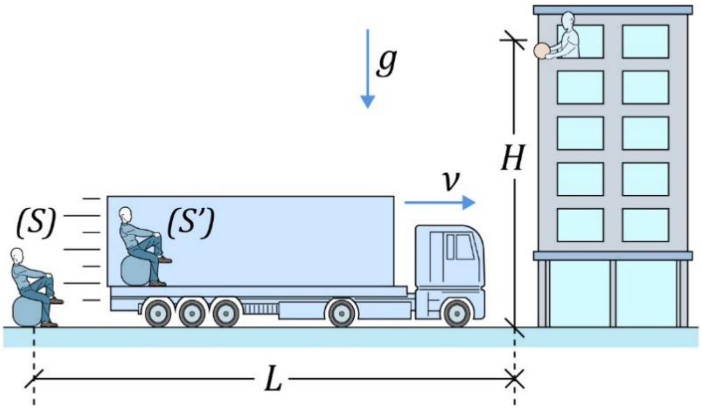
A transformação inversa seria dada por:

$$\begin{cases} x = x' + v \cdot t \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

Observações:

- As dimensões x' e t' são medidas em relação ao sistema S' e as dimensões x e t são medidas em relação ao sistema S.
- A igualdade $t = t'$ mostra que o tempo para ambos os sistemas de referência transcorrem de modo igual, isto é, são iguais.
- Uma forma prática para fazer a transformação inversa é colocar $-v$ em vez de v.

1.
Na figura abaixo, solta-se um objeto de uma altura H de um edifício, calcule a trajetória do objeto em relação a um observador na Terra (S) e em relação a um caminhão (S') que se move com velocidade constante.

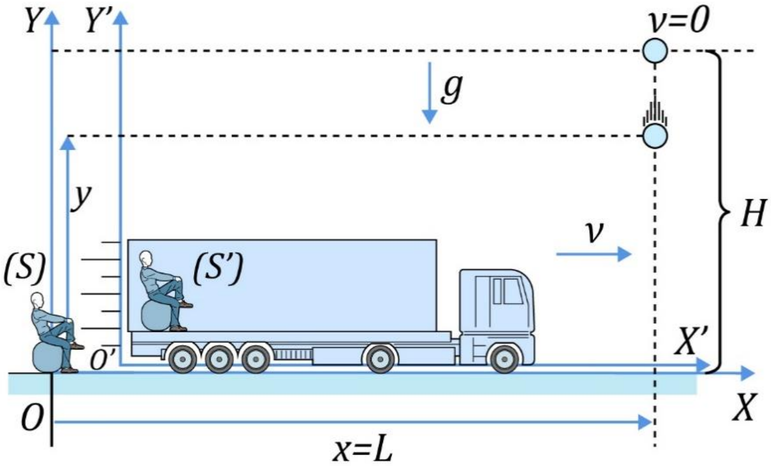


Comentários:

Em relação a Terra, um observador nota que a abscissa (x) da bolinha não se altera, mas a ordenada (y) está se modificando. A partir de um certo tempo t, temos:

$$y = H - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Neste caso, o observador sempre se encontra a uma mesma distância horizontal (x) do objeto e a distância vertical está diminuindo.



Para determinar a trajetória em relação ao caminhão, vamos utilizar a transformada de Galileu:

$$x' = x - v \cdot t \ (eq. 1)$$

Como os sistemas S e S' não se movem na direção vertical, então:

$$y' = y = H - \frac{g \cdot t^2}{2} \ (eq. 2)$$

A partir de (1), podemos encontrar o tempo em função da abscissa x':

$$t = \frac{L - x'}{v}$$

Substituindo este tempo em (2), vem:

$$y' = H - \frac{g}{2}\left(\frac{L - x'}{v}\right)^2$$

$$y' = H - \frac{g}{2v^2}\left(L^2 - 2L \cdot x' + x'^2\right)$$

$$y' = \underbrace{\left(H - \frac{g \cdot L^2}{2v^2}\right)}_{C} + \underbrace{\frac{g \cdot L}{v^2}}_{B} \cdot x' - \underbrace{\frac{g}{2v^2}}_{A} \cdot x'^2$$

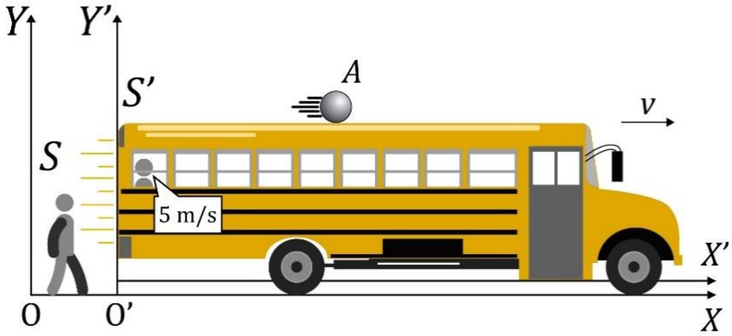
Dessa forma, chegamos na seguinte relação entre x' e y':

$$y' = -A \cdot x'^2 + B \cdot x' + C$$

Assim, pela equação deduzida logo acima, a curva descrita para um observador no caminhão ($S^{'}$) é uma parábola de queda livre.

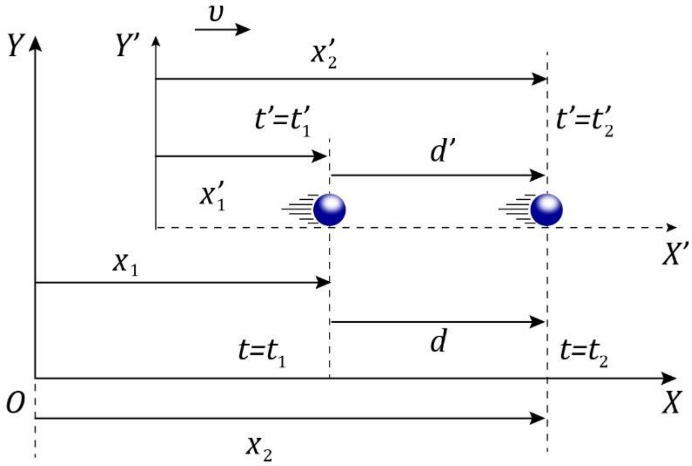
2.

Uma bola A se movimenta com velocidade constante de $\vec{u}^{'} = +5\ m/s$ em relação ao ônibus ($S^{'}$). Determine a sua velocidade $\vec{u}$ em relação à Terra (S), dado que o ônibus possui velocidade constante $\vec{v} = +20\ m/s$ em relação à Terra (S).



Comentários:

Vamos representar os deslocamentos do ônibus, da bola e dos observadores pelos deslocamentos dos eixos, como na figura abaixo.



Por definição, a velocidade do objeto em relação à Terra é dada por:

$$u = \frac{d}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

E em relação ao ônibus é expressa por:

$$u^{'} = \frac{d^{'}}{\Delta t^{'}} = \frac{x_2^{'} - x_1^{'}}{t_2^{'} - t_1^{'}}$$

De acordo com a transformação de Galileu, temos:

$$\begin{cases} x_2^{'} = x_2 - v \cdot t_2 \\ x_1^{'} = x_1 - v \cdot t_1 \\ t_2^{'} - t_1^{'} = t_2 - t_1 \end{cases}$$

Dessa forma, podemos reescrever a velocidade da bola em relação ao ônibus:

$$u^{'} = \frac{(x_2 - v \cdot t_2) - (x_1 - v \cdot t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$u^{'} = \frac{(x_2 - x_1) - v \cdot (t_2 - t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$u^{'} = \underbrace{\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}_{u} - v \cdot \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_1}$$

Note que $\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$ é a velocidade da bola em relação à Terra (u). Portanto:

$$u^{'} = u - v$$

$$\boxed{u = u^{'} + v}$$

Se substituirmos valores, temos:

$$u = 5 + 20 = 25\ m/s$$

$$\boxed{\vec{u} = +25\ m/s}$$

Este resultado mostra que a velocidade de um objeto em relação à Terra (S) é igual à velocidade no referencial $S^{'}$ em relação à Terra (v) mais a velocidade do objeto em relação a $S^{'}$.

$$\boxed{\vec{u}_{Objeto/Terra} = \vec{u}^{'}_{Objeto/Sistema(S^{'})} + \vec{v}_{Sistema\ (S^{'})/Terra}}$$

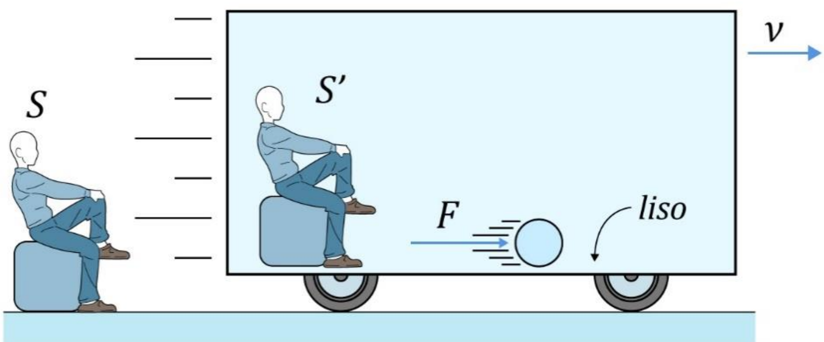
Note que já conhecíamos este resultado, pois vimos ele quando estudamos a cinemática do movimento relativo. Perceba que ao escrever a Terra como um referencial inercial, o resultado encontrado logo acima pode ser generalizado para dois ou mais referenciais inerciais.

3.

Uma bola é acelerada devido a uma força resultante F no sistema S. Calcule o módulo da força resultante $F^{'}$ em relação ao sistema $S^{'}$. Adote que S e $S^{'}$ são referenciais inerciais.

Comentários:

Para ilustrar este problema físico, vamos considerar a bola no interior de um vagão ($S^{'}$), que possui velocidade constante $u_0^{'}$, como na figura abaixo.



De acordo com a figura logo acima, podemos escrever que:

$$u_0 = v + u_0^{'}\ (eq.1)$$

Após um certo intervalo de tempo Δt, as velocidades em ambos os sistemas apresentam um certo incremento. Então, teremos novos valores para as velocidades:

$$\underbrace{(u_0 + \Delta u)}_{u_f} = \underbrace{(u_0^{'} + \Delta u^{'})}_{u_f^{'}} + v\ (eq.2)$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$\underbrace{u_0}_{v+u_0^{'}} + \Delta u = u_0^{'} + \Delta u^{'} + v$$

$$v + u_0' + \Delta u = u_0' + \Delta u' + v$$

$$\boxed{\Delta u = \Delta u^{'}}$$

Este resultado mostra que a variação de velocidade após um certo intervalo de tempo Δt é a mesma nos dois referenciais inerciais. Agora, se dividirmos por $\Delta t = \Delta t'$, vamos obter as acelerações:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\Delta u'}{\Delta t'} \Rightarrow a = a'$$

Com isso, vemos que as acelerações nos dois referenciais inerciais são iguais. Como a massa da bola não muda ao passar de um referencial para outro, então a força em ambos os referenciais terá módulos iguais:

$$a = a' \Rightarrow m \cdot a = m \cdot a' \Rightarrow \boxed{F = F'}$$

Diante disso, podemos dizer que as forças em todos os referenciais inerciais preservam os seus valores, isto é, não alteram suas magnitudes ao passar de um referencial inercial para outro.

Podemos enunciar este resultado da seguinte forma: *as equações que expressão as leis de Newton são invariáveis em relação as transformações de Galileu, o que corresponde ao princípio da relatividade de Galileu.*

Observação: uma outra forma de chegar ao resultado anterior é aplicar a segunda lei de Newton na forma diferencial:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

No segundo referencial inercial, podemos escrever que:

$$F' = m \cdot a' = m \cdot \frac{d^2x'}{dt^2}$$

Aplicando a transformação de Galileu, temos:

$$F' = m \cdot \frac{d^2x'}{dt^2} = m \cdot \frac{d^2(x - v \cdot t)}{dt^2}$$

$$F' = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - \underbrace{\frac{d^2(v \cdot t)}{dt^2}}_{=0}$$

Note que $\frac{d(v \cdot t)}{dt} = v = cte$, logo a segunda derivada deste termo em relação ao tempo é nula ($\frac{dv}{dt} = 0$, pois v é constante no tempo). Portanto:

$$F' = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\boxed{F' = F}$$

É uma forma bem mais rápida de chegar ao mesmo resultado, mas requer conhecimento de Cálculo.

2. O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE E O ELETROMAGNETISMO

Como vimos, na mecânica as forças não alteram seus valores ao passar de um referencial inercial a outro, mas as forças eletromagnéticas podem mudar seus valores ao passar de um referencial inercial a outro? Esta dúvida surgiu logo após Maxwell enunciar as leis fundamentais do eletromagnetismo.

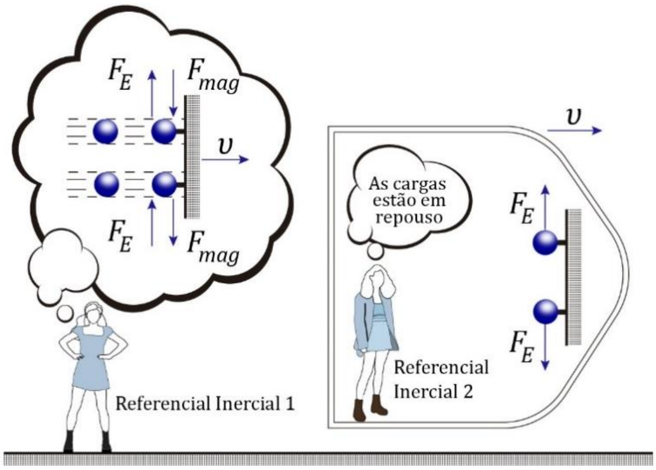


***Figura 4:** Forças eletromagnéticas vista de dois referenciais inerciais. Para a observadora na Terra, as cargas estão em movimento e, por isso, temos uma força magnética. Para a observadora se movendo com a mesma velocidade da carga, não existe força magnética, pois a carga encontra-se em repouso neste referencial.*

Como visto na imagem logo acima, para as observadoras as forças eletromagnéticas que surgem são diferentes, o que violam o princípio da relatividade de Galileu.

Segundo as leis gerais do eletromagnetismo (leis de Maxwell), a velocidade das ondas eletromagnéticas no vácuo é a mesma em todas as direções e igual a $c \cong 3 \cdot 10^8\ m/s$, mas Maxwell não deixou claro qual sistema apresentava este valor.

Então, imaginava-se que deveria ser em relação a um sistema de referências privilegiado: o éter. Observe que era importante encontrar um referencial, pois as leis do eletromagnetismo dependem da velocidade da luz e ao mudar esta, as leis também se alteram.

CURIOSIDADE

3. O ÉTER E A VELOCIDADE DA LUZ

O éter era um meio que se criou para explicar muitos fenômenos físicos não compreendidos. As propriedades do éter serviram de base para Newton explicar a gravitação e para dar consistência na teoria ondulatória da luz, pois se a luz é uma assim como o som, ela requeria um meio para se propagar.

No início, negar a existência do éter era tão absurdo quanto dizer que os navios poderiam navegar pelos oceanos sem precisar de água.

O éter deveria preencher o espaço e ter propriedades que pareciam ser contraditórias, como por exemplo ter uma densidade muito pequena, mas ao mesmo tempo ter uma grande rigidez. Assim, surge a grande dúvida: o éter existe mesmo? Como podemos descobri-lo?

1.3.1. O VENTO ETÉREO

Existiam muitos físicos convictos da existência do éter e dispostos a encontrá-lo. Um deles foi Michelson, quem propôs que o movimento da Terra ao redor do Sol devia criar um movimento aparente do éter, ou seja, o vento etéreo, assim como o movimento de um carro origina um vento aparente, ainda que o próprio ar esteja em repouso.

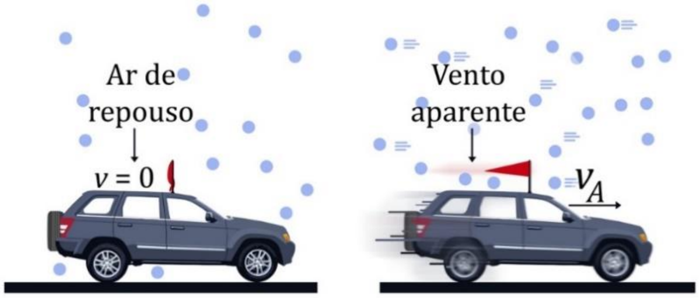


Figura 5: Um observador no interior do carro em movimento dirá que está em repouso e que o ar se move gerando o vento.

Se houvesse o éter, deveria influenciar sobre a velocidade da luz, como um barco (a luz) que viaja a favor ou contra a correnteza (o éter), conforme ilustra as figuras abaixo:

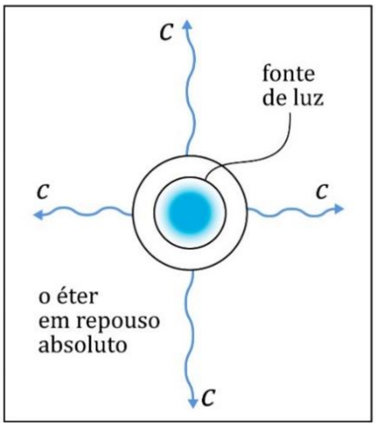
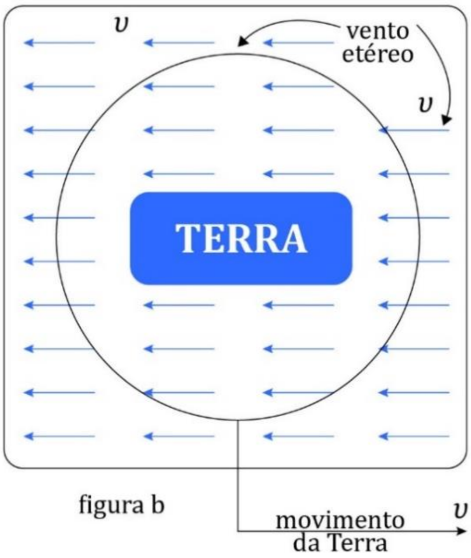


Figura 6: O éter em repouso absoluto não influencia na velocidade da luz, resultando em uma mesma velocidade c para a luz em todas as direções.

Agora, vamos considerar o movimento da Terra no éter gerando o vento etéreo. Em relação à Terra, é o éter que se move com a velocidade da Terra, mas em direção oposta.

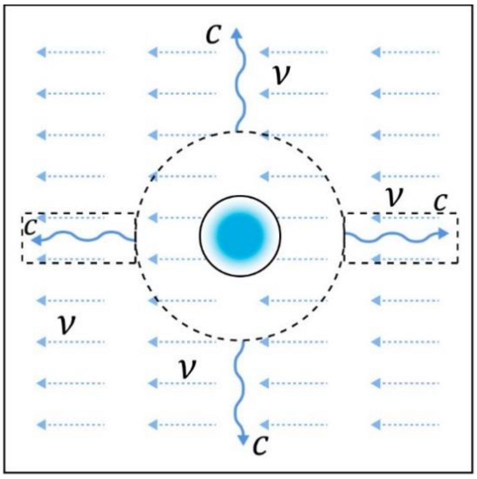


Fazendo a composição do vento etéreo com a velocidade da luz, se a luz emite na direção do movimento terrestre, sua velocidade seria:

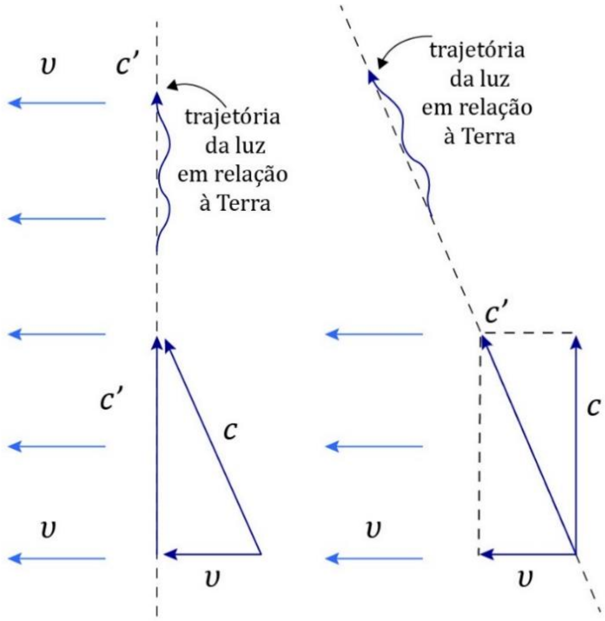
$$c' = c - v$$

Em direção oposta:

$$c' = c + v$$



Dessa forma, a trajetória da luz quando ela forma um certo ângulo com relação a direção do movimento do éter seria representa da seguinte forma:



Note que se $c \gg v$, então seria muito difícil distinguir a velocidade resultante $c^{'}$ da velocidade c. Por isso, os experimentos para obter resultados precisos, os experimentos deveriam ser muito refinados.

1.3.2. O EXPERIMENTO DE MICHELSON E MORLEY

Michelson, em conjunto com Morley, projetaram um experimento para medir a velocidade da luz ($c^{'}$) em relação à Terra, supondo que o movimento relativo do éter não pode ser igual em duas direções distintas.

Eles utilizaram um aparato cuja função é detectar a interferência da luz denominado interferômetro. Para que haja um padrão de interferência, o caminho ótico de dois raios luminosos tem que ser igual.

Se consideramos um sistema onde o éter se encontra em repouso em relação ao observador e a fonte, então o experimento funcionaria da seguinte maneira: um raio luminoso sai da fonte e se dirige a um espelho onde se divide em duas partes. Uma parte é refletida na direção vertical e a outra atravessa o espelho, ambos os raios são refletidos nos espelhos E_1 e E_2, como na figura abaixo:

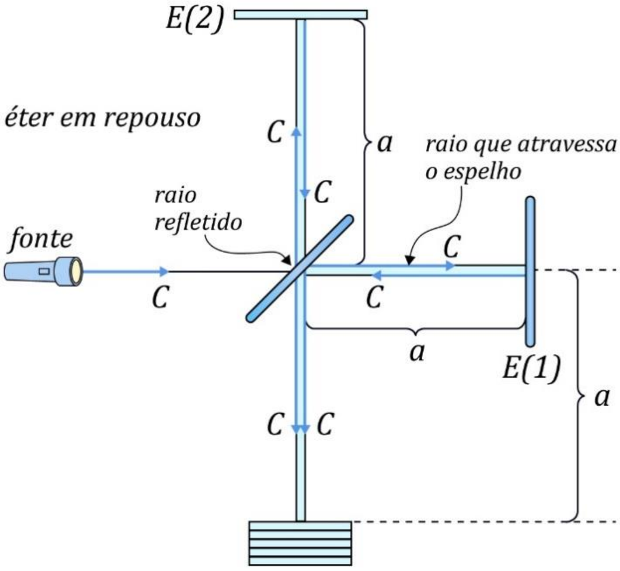


Figura 7: Se o éter está em repouso, a velocidade da luz é a mesma em todas as direções.

O raio refletido no espelho E_1 também é refletido no espelho divisor, mas para baixo. O raio refletido pelo espelho E_2 agora atravessa o espelho divisor, se dirigindo para baixo, como mostrado na figura 7.

Note que ambos os raios percorrem comprimentos iguais $(3a)$. Consequentemente, teremos um padrão de interferência.

Agora, vamos analisar a trajetória dos raios luminosos considerando que o sistema se encontra em movimento em relação à Terra. Neste caso, a suposta existência do éter modificaria a velocidade da luz como indicado na figura a seguir:

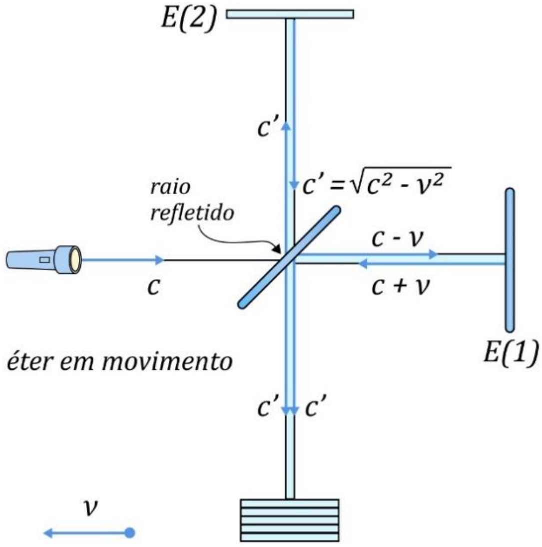


Figura 8: O éter modificando a velocidade da luz.

Perceba que os raios refletidos nos espelhos apresentam diferentes velocidades e sendo os caminhos percorridos iguais, existiria uma defasagem entre eles. Consequentemente, não se formaria um padrão de interferência confirmando a existência do éter.

Contudo, os resultados do experimento mostravam que continuava formando um padrão de interferência. Matematicamente, o experimento consistia em encontrar a relação c/c', mas os cálculos indicavam que, salvo algumas circunstâncias, esta razão sempre era igual a 1 $(c/c' = 1)$.

Diante disso, vemos que o éter não altera a velocidade da luz, então, existe o éter? Se existir o éter deveria estar em repouso em todas as direções e em qualquer referencial inercial. Entretanto, como sabemos que a Terra se move, é impossível que o éter estivesse em repouso. Dessa forma, não deveria existir o éter.

Por outro lado, se não existisse o éter, em qual meio a luz se propaga? Para responder esta pergunta, Albert Einstein criou teorias revolucionárias a respeito de espaço e de tempo, originando uma nova física.

4. O QUE ACONTECE QUANDO VIAJAMOS NA VELOCIDADE DA LUZ

Aos 16 anos, Einstein se questionava como seria as coisas viajando em um raio de luz. Ele utilizava experimentos mentais para dar respostas, pois não havia uma forma dos objetos adquirirem uma velocidade próxima à da luz.

Um destes experimento consistia em viajar em uma nave à velocidade da luz, observando-se em um espelho. Será que Einstein viria a própria imagem no espelho? Esta pergunta era feita sobre este experimento mental e surgiam algumas possibilidades: se a velocidade da luz não depende da fonte, então a luz que sai dele possui velocidade c. Como o espelho também viaja com velocidade c, a luz não poderia alcançar o espelho para refletir a imagem dele e, consequentemente, ele não veria sua imagem.

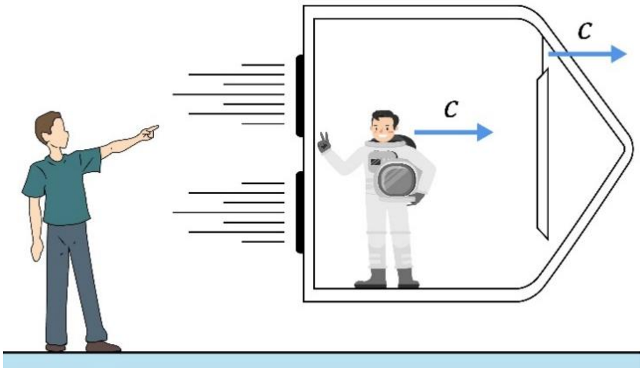


Figura 9: Para uma pessoa na Terra e na nave, a luz que incide e reflete no garoto da nave sai com velocidade c, e não pode chegar ao espelho.

Einstein imaginava que ao encontrar-se em um sistema inercial, tudo deveria ocorrer como na Terra, segundo o princípio da relatividade de Galileu, por isso deveria ver sua imagem.

Para tudo ocorrer como na Terra, a velocidade da luz em relação a nave (u') teria que ser c. Então, para um observador na Terra, segundo a transformação de Galileu, a velocidade da luz em relação a Terra seria:

$$v_s = v_{s'} + u' \ (transformação\ de\ Galileu)$$

Então:

$$v_s = c + c = 2c$$

Segundo o referencial da Terra, a velocidade da luz seria $2c$, o que contradiz as propriedades das ondas.

Observação: uma das propriedades das ondas é que sua velocidade não depende da velocidade da fonte, ela depende apenas das propriedades do meio. Se os observadores se encontram no mesmo meio, para eles a velocidade da luz será igual.

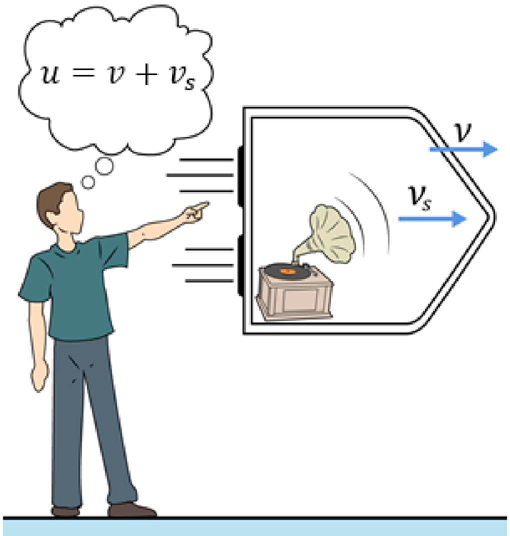


Figura 10: A velocidade do som não é a soma das velocidades.

A velocidade do som v_s não depende da velocidade da fonte (v). Dessa forma, um observador na Terra e outro em uma nave notará que o som tem a mesma rapidez v_s.

5. A PERCEPÇÃO DE EINSTEIN

Einstein estava seguro sobre as propriedades das ondas, a velocidade da luz deve ser igual para observadores colocados em diferentes referenciais. Então, ele propõe que a distância ($d^{'}$) que a luz percorre para o observador em movimento é diferente da distância (d) percorrida pela luz para o observador em repouso. Como a velocidade é $v = \Delta s/\Delta T$, então para que a rapidez seja a mesma, os tempos para cada observador teria que ser diferentes. Matematicamente:

$$c = \frac{d'}{t'} = \frac{d}{t}$$

Em que $d^{'} \neq d \rightarrow t^{'} \neq t$. Diante disso, analisar o comportamento do tempo era a carta coringa.

1.5.1. EVENTOS SIMULTÂNEOS

Os eventos simultâneos se encontram relacionados com o tempo. A ideia de um evento simultâneo, por exemplo, é medir o tempo. Quando chegamos à universidade às 8h da manhã é porque neste exato momento o ponteiro do relógio indicou o número oito.

1.5.2. A RELATIVIDADE DA SIMULTANEIDADE

Outro dos experimentos mentais de Einstein estavam associados com a simultaneidade. Este experimento fundava-se em colocar um observador sentado no centro de um vagão, que se move a velocidade constante (v). Nas partes traseira e dianteira do vagão existem portas que se abrem quando os sensores de luz são ativados.

Um observador no centro do vagão, ao emitir luz por uma fonte, veria que as portas se abrem simultaneamente, pois para ele tudo se passa como se o vagão estivesse em repouso. Consequentemente, a luz percorreria distâncias iguais em tempos iguais.

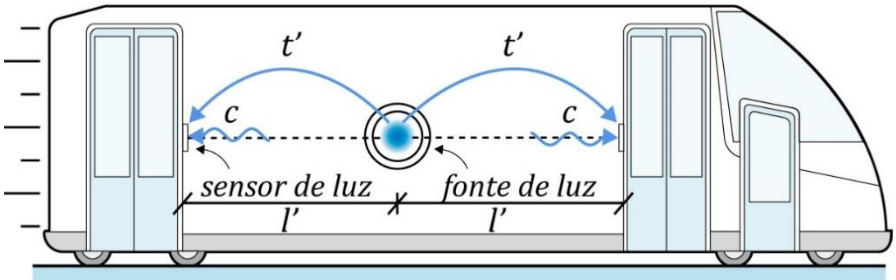


Figura 11: Um observador no centro do vagão está em repouso em relação a ele. Assim, a luz percorrerá distâncias iguais e chegará simultaneamente nas portas, abrindo-as.

Entretanto, para um observador situado na Terra, o raio luminoso que se dirige a porta dianteira do vagão demora mais para chegar a esta porta, já que ela está se afastando do raio, enquanto o raio que em direção da porta traseira leva menos tempo, já que a porta vai de encontro ao raio.

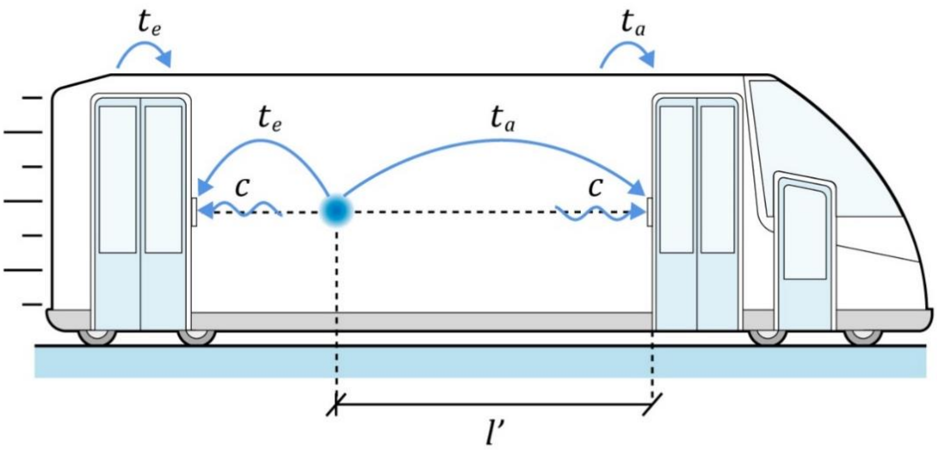


Figura 12: Um observador na Terra perceberá tempos diferentes na abertura das portas.

Com isso, para o observador na Terra primeira se abre a porta traseira e depois a porta dianteira. Portanto, ele dirá que não há simultaneidade.

Diante disso, qual observador tem razão? Os dois! A simultaneidade é relativa. A partir desta afirmação, Einstein deduziu algo revolucionário:

O intervalo de tempo também é relativo, isto é, depende do sistema de referência de onde é medido.

Diante do experimento mental descrito logo acima, Einstein propõe que o observador colocado no trem mediria uma distância d' para o raio luminoso até chegar à porta dianteira e o observador na Terra mediria uma distância maior d para o mesmo raio até chega à porta dianteira, já que leva maior tempo para chegar a porta dianteira.

Com este resultado, percebemos que a medição da distância feita para um sistema em repouso é diferente da medição feita em um sistema em movimento. Um observador colocado no trem mediria o comprimento (espaço) deste com uma régua e esta forma de medir é denominada própria.

Por outro lado, um observador na Terra para medir o comprimento (espaço) do trem teria que marcar, simultaneamente, na linha do trem a posição onde começa e onde finaliza, para fazer a medição com uma régua padrão. Esta forma de medir é denominada imprópria.

Note que o resultado das medições não precisa ser igual, como imaginava Einstein. Assim, podemos dizer que: *o intervalo espacial (espaço) também é relativo, isto é, depende do sistema de referências de onde se mede.*

Perceba que as conclusões aqui são contrárias as da mecânica clássica. Tenha em mente que uma vez definido o tamanho do trem na mecânica clássica, ele sempre terá aquele tamanho, independente do referencial.

Outro exemplo clássico consiste em colocar observadores na Terra, no Sol (hipoteticamente) e em um satélite que se encontra ao dobro da distância entre Terra e Sol.

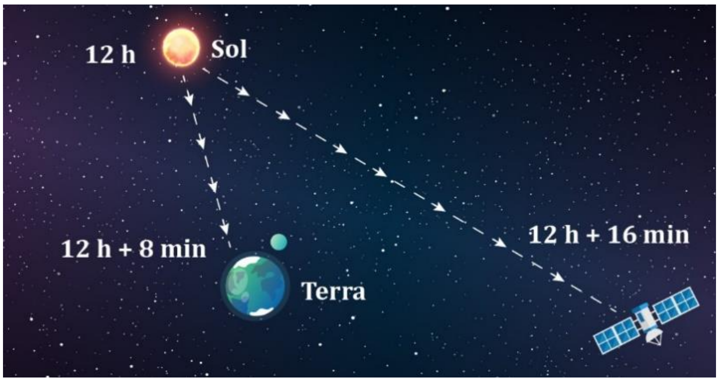


Figura 13: Experimento hipotético que consiste em colocar um observador em cada ponto no espaço.

Vamos considerar que os relógios dos observadores estão todos sincronizados às 12 h. Se algo acontece no Sol às 12 h, então os observadores dirão que o evento ocorreu nesta hora, somente se as interações são simultâneas.

Entretanto, a luz que nos traz a informação do evento demora cerca de 8 minutos para chegar à Terra. Dessa forma, o observador na Terra dirá que o evento ocorreu às 12h e 8 min e aquele que está no satélite dirá que foi às 12 h e 16 min. Então, um mesmo evento acontece em horas diferentes para observadores diferentes.

Portanto, as interações não são instantâneas, como considerava Galileu que considerava a velocidade da luz infinita. Assim, Einstein percebeu que era necessário reformular as transformações de Galileu, alterando o tempo e o espaço absoluto para um tempo e um espaço relativo.

À medida que estudamos as relações entre o espaço e o tempo, mais forte vemos a relação íntima entre essas duas grandezas, conformando uma unidade: as coisas existem em um espaço-tempo. Antes de Einstein, acreditava-se que o espaço e o tempo eram coisas distintas e não tinha uma conexão, esse é um dos motivos da teoria de Einstein ser revolucionária. O tempo deixa de ser absoluto e passa a ser relativo, o tempo e o espaço passam a sofrer dilatação e contração.

Agora, se dois observadores compartilham do mesmo marco de referência, suas medições serão iguais. Por isso, dizemos que eles compartilham da mesma região do espaço-tempo.

Entretanto, se existe movimento relativo entre os observadores, suas medições serão distintas. Contudo, essas diferenças serão mais apreciáveis quando as velocidades dos corpos estão próximas a velocidade da luz (velocidades relativísticas).

Assim, cada observador se encontra em uma região do espaço-tempo. O fator que une as distintas regiões do espaço-tempo é a velocidade da luz.

2. A TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA

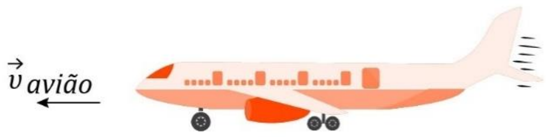
A teoria da relatividade restrita de Einstein reformulou as transformações de Galileu e ampliou o princípio da relatividade de Galileu a todos os fenômenos físicos, incluindo o eletromagnetismo, no qual aparentemente não se cumpria.

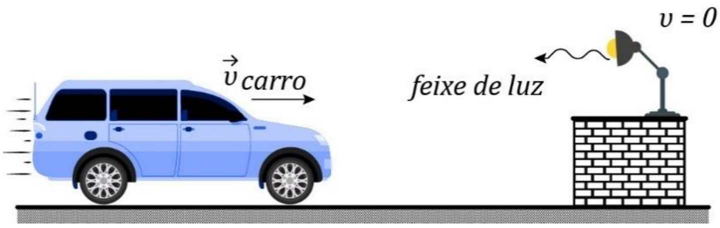
Logo no início, Einstein rejeita a existência do éter, pois os diversos experimentos realizados não detectaram o éter. Devido a esse fato, não existe um repouso absoluto para a luz, sendo a luz uma onda eletromagnética, então não existe o repouso absoluto para os fenômenos eletromagnéticos. Consequentemente, estes são relativos iguais aos movimentos mecânicos.

Diante disso, Einstein enuncia dois postulados para a teoria da relatividade restrita e, a partir deles, advêm as demais conclusões de sua formulação teórica.

- Primeiro postulado: as leis da Física apresentam a mesma forma em todos os referenciais inercial.
  Este postulado mostra que o princípio da relatividade de Galileu deve ser cumprido não apenas para a mecânica, mas para todos os fenômenos físicos. Consequentemente, podemos dizer que:
  a) Todos os sistemas de referência são equivalentes, não existe um referencial inercial preferencial.
  b) Não existe um movimento absoluto, ou seja, todo movimento uniforme é relativo.
- Segundo postulado: a velocidade da luz é uma constante universal, isto é, seu valor no vácuo é igual a c, independente da velocidade da fonte ou do observador.
  Este postulado estabelece que os observadores colocados em referenciais inerciais diferentes, sempre mediram uma velocidade igual a c para a luz.

4.
Considere que uma fonte emite um feixe de luz na Terra, como na figura abaixo. Calcule a velocidade do feixe de luz para um observador colocado em um carro e em um avião, de velocidades iguais a $+50\ m/s$ e $-400\ m/s$, respectivamente, ambas medidas em relação à Terra.





Comentários:

Aplicando a transformada de Galileu, temos que:

$$\vec{u}_S = \vec{v}_{S'} + \vec{u}_{objeto/S'}$$

Em que S representa a Terra e S' os outros referenciais inerciais. A velocidade da luz em relação ao carro é escrita como:

$$\vec{u}_{luz} = \vec{v}_{carro} + \vec{u}_{luz/carro}$$

Substituindo os valores, temos:

$$-c = +v_{carro} + \vec{u}_{luz/carro}$$
$$\vec{u}_{luz/carro} = -(c + v_{carro})$$

Note que:

$c = 3 \cdot 10^8\ m/s$ e $v_{carro} = 50\ m/s$

$$|\vec{u}_{luz/carro}| \approx c$$

Para a velocidade da luz em relação ao avião, temos que:

$$\vec{u}_{luz} = \vec{v}_{avião} + \vec{u}_{luz/avião}$$

Substituindo valores, temos:

$$(-c) = (-v_{avião}) + \vec{u}_{luz/avião}$$
$$\vec{u}_{luz/avião} = -(c - v_{avião})$$

Novamente, temos que:

$c = 3 \cdot 10^8\ m/s$ e $v_{avião} = 50\ m/s$

$$|\vec{u}_{luz/avião}| \approx c$$

Observações:

1) Diante desse exemplo, concluímos que os referenciais inerciais que apresentam uma velocidade v muito pequena quando comparada a velocidade da luz c ($c \gg v$), a velocidade da luz será a mesma em qualquer sistema de referencial inercial. Então, basta fazer a transformada de Galileu.

2) Os corpos que estamos acostumados a ver no nosso dia a dia (automóveis, avião, trem bala etc.), devido à massa que apresentam são difíceis de serem acelerados até que alcancem uma velocidade significantes quando comparada a da luz.

Por outro lado, existem partículas que possuem massas muito pequenas, ou seja, que são fáceis de serem aceleradas e podem alcançar velocidades iguais a $0{,}85c$. Assim, se aplicarmos a transformação de Galileu, teríamos uma velocidade da luz maior que c ($1{,}85c$).

3) A genialidade de Einstein consiste em estabelecer que em relação aos sistemas que alcançam uma velocidade próxima à da luz, esta não se altera, permanecendo o seu valor c. Portanto, a transformação de Galileu não se aplica e deve ser corrigida.

De acordo com o segundo postulado de Einstein, a transformação de Galileu deve ser corrigida. Esta transformação foi feita por Lorentz ante de Einstein, mas ele não possuía embasamento teórico adequado. Contudo, Einstein consegue dar sustento teórico com base nos seus novos conceitos a respeito de espaço e de tempo.

Para Einstein, o tempo para um corpo em movimento se dilata e o seu comprimento se contrai na direção do movimento.

Assim, todos os relógios atrasam quando se encontram em movimento em relação à quando em repouso. A dilatação do tempo não tem nada a ver com o mecanismo do relógio, mas sim com a estrutura do tempo.

7. A DILATAÇÃO DO TEMPO

Vamos considerar o experimento mental de Feynman, que é constituído de um relógio de luz para medir o tempo para um observador colocado em uma nave (S'), com velocidade constante (v) em relação à Terra (S).

Neste experimento, temos um espelho posicionado no teto da nave e no piso é colocado um emissor e um detector de luz que faz um sinal sonoro toda vez que a luz incide nele. Assim, pode-se contabilizar o intervalo de tempo da saída da luz até a sua volta ao detector, emitindo o sinal sonoro (“clic”).

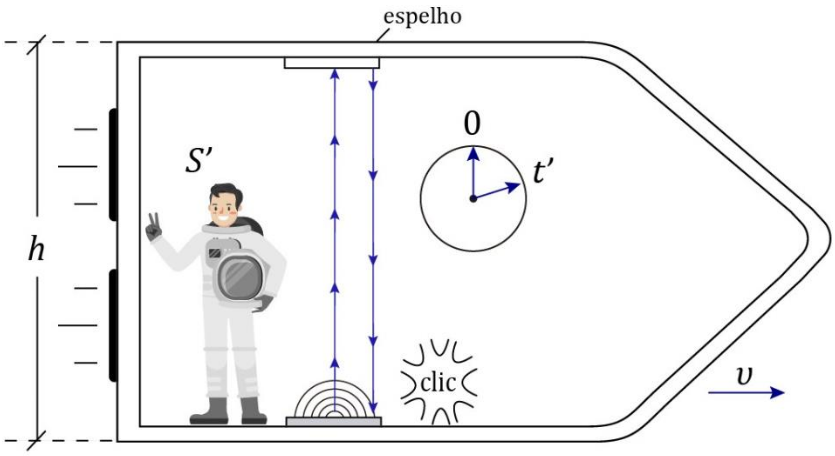


Figura 14: No referencial da nave (S'), o raio de luz descreve uma trajetória vertical, em um intervalo de tempo t' de ida e volta.

Neste experimento, considere que a velocidade da luz (c) é a mesma para qualquer observador. Então, no referencial da temos que:

$$t' = \frac{2h}{c}$$

Observe que a emissão e a recepção da luz se realizam em um mesmo lugar da nave, e que o tempo medido nestas condições é o que chamamos de tempo próprio t'.

Entretanto, para um observador posicionado na Terra (S), a luz parte do emissor e viaja para o teto da nave, percorrendo uma distância $\frac{c \cdot t}{2}$, enquanto a nave avança uma distância $\frac{v \cdot t}{2}$. Consequentemente, a luz desde sua saída do emissor até o retorno (detectado pela emissão do sinal sonoro) gasta um intervalo de tempo t.

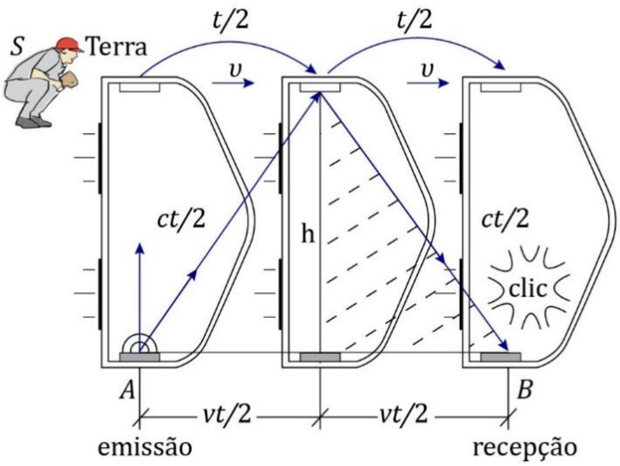


Figura 15: Para um observador na Terra, a emissão (A) ocorre em um ponto diferente da recepção (B).

Da figura logo acima, temos:

$$\left(\frac{c \cdot t}{2}\right)^2 = \left(\frac{v \cdot t}{2}\right)^2 + h^2$$

Resolvendo em t, temos:

$$t = \frac{2h}{c} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

Nestas condições, o tempo medido é denominado tempo impróprio (t). Algebricamente, podemos relacionar os dois tempos da seguinte forma:

$$\boxed{t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

Diante deste resultado, podemos ver que os tempos medidos em dois referenciais inerciais diferente (Terra e nave) são diferentes. Como $v < c$, então:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$$

$$\therefore t > t'$$

Para um observador na Terra (em repouso) um fenômeno em uma nave em momento demora mais que para um observador na nave. Este efeito é chamado de dilatação do tempo.

Por outro lado, se o experimento é realizado na Terra, para um observador nela, o tempo seria próprio ($t^{'}$) e para um observador na nave, o tempo seria impróprio (t). No referencial da nave, tudo se passa como se a nave estivesse em repouso e a terra se move com uma velocidade ($-v$).

Consequentemente, para o observador na nave, na Terra transcorre menos tempo que na nave, nisto que consiste a relatividade do tempo.

É muito comum aparecer o termo adimensional v/c e, por isso, ele é chamado de parâmetro de velocidade, normalmente representado pela letra β, e o termo $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ é denominado fator de Lorentz, geralmente representado pela letra γ. Portanto:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Então, a equação que relaciona os tempos próprio e impróprio é dada por:

$$t = \gamma \cdot t'$$

Note que $\beta < 1$, pois $v < c$ e, consequentemente, $\gamma > 1$, a menos que a velocidade v seja nula. Se plotarmos um gráfico do fator de Lorentz pelo parâmetro de velocidade, temos:

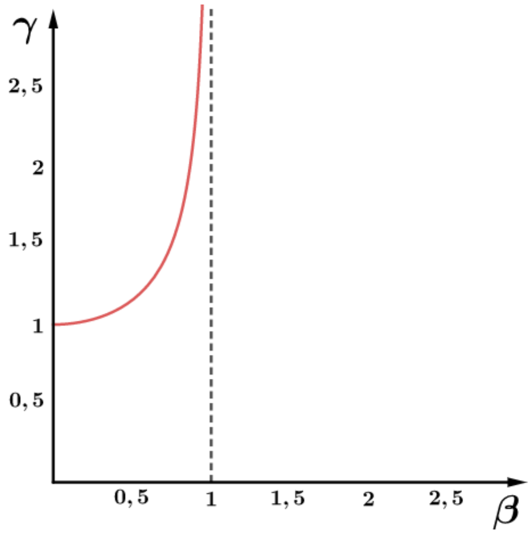


Figura 16: À medida que o parâmetro de velocidade (β) tende a 1,0 (se aproxima da velocidade c), o fator de Lorentz (γ) tende ao infinito. Em contrapartida, quando β torna-se pequeno, γ tende a 1.

A relatividade do tempo é comprovada experimentalmente pela observação de partículas que se originam na alta atmosfera.

2.1.1. AS DUAS DEMONSTRAÇÕES EXPERIMENTAIS DA DILATAÇÃO DO TEMPO

A dilatação do tempo pode ser demonstrada experimentalmente através de dois relógios:

a) Relógios microscópicos: as partículas subatômicas chamadas múons são instáveis. Quando um múon é produzido, ele tem um curto tempo até decair (transformar-se em outras partículas). O tempo de vida do múon é o intervalo de tempo entre a sua produção (primeiro evento) e o decaimento (segundo evento) da partícula. Considerando os múons estacionários e o tempo de vida medido por um relógio estacionário (um relógio de um laboratório, por exemplo), o tempo médio de vida é $2{,}200\ \mu s$.

   Note que se trata de um intervalo de tempo próprio, pois, para cada múon, os dois eventos ocorrem no mesmo ponto do referencial do múon, isto é, na posição do múon. Vamos chamar esse intervalo de tempo próprio por Δt_0 e o referencial em que o intervalo é medido de referencial de repouso do múon.

   Pela teoria da relatividade, caso os múons estivessem se deslocando em relação ao laboratório, haveria uma dilatação do tempo e a medida do tempo de vida realizada, utilizando um relógio do laboratório, deveria ser um valor maior.

   Diante disso, os cientistas mediram o tempo médio de vida dos múons a uma velocidade de $0{,}9994c$ em relação ao relógio do laboratório. Neste caso, o parâmetro de velocidade é dado por:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{0{,}9994c}{c} = 0{,}9994$$

   Logo:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}9994^2}} = 28{,}87$$

   Assim, o tempo de vida medida deveria ser de:

$$t = \gamma \cdot t' = 28{,}87 \cdot 2{,}200 = 63{,}51\ \mu s$$

   Experimentalmente, pode-se verificar esse valor dentro de uma margem de erro estimada.

b) Relógios macroscópicos: em 1977, Joseph Hafele e Richard Keating realizaram um experimento trabalhoso: transportaram quatro relógios atômicos portáteis duas vezes em volta do mundo a bordo de aeronaves comerciais – uma vez de leste para oeste e outra vez de oeste para leste. A finalidade deste experimento era testar a teoria da relatividade de Einstein com relógios macroscópicos.

   No relógio microscópico as previsões de Einstein quanto à dilatação do tempo foram comprovadas, mas os físicos queriam essas confirmações em um relógio de verdade. Isso só foi possível devido à altíssima precisão dos relógios atômicos modernos.

   Hafele e Keating confirmaram as previsões teóricas dentro de uma margem de erro de 10%. Anos mais tarde, foram executados experimentos semelhantes na Universidade de Maryland, mas com maior precisão. Eles verificaram a dilatação do tempo, que estava de acordo com a teoria de Einstein, dentro de uma margem de erro de 1%. Nos dias atuais, é comum levar em consideração a dilatação do tempo causada pela movimentação de relógios atômicos, quando eles são transportados de um local para outro.

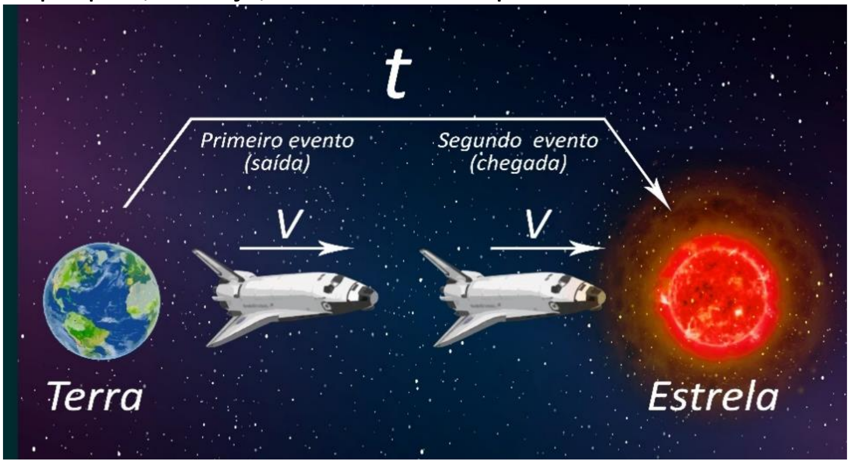
ATENÇÃO
DECORE!

5.

Considere uma nave partindo da Terra com destino à estrela Alfa Centauri. Se o tempo que dura a viagem para um observador na Terra é de 6 anos, qual é o tempo transcorrido para o piloto da nave espacial? Suponha que a nave viaje com velocidade constante de módulo igual a $v = 0{,}75c$, em relação à Terra.

Comentários:

Para um observador na Terra, os eventos ocorrem em lugares diferentes (a partida na Terra e a chegada na estrela). Assim, dizemos que para este observador o tempo é impróprio, ou seja, $t = 6\ anos$. Esquematicamente:

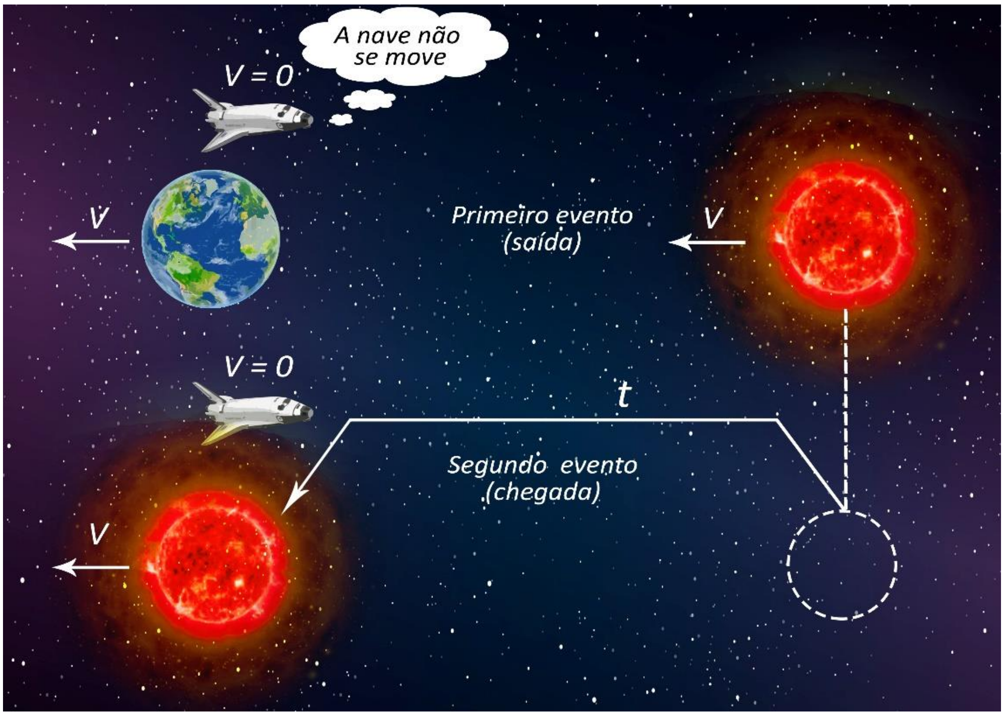


De acordo com o enunciado, tanto o piloto quanto o observador na Terra se encontram em referenciais inerciais, em que um deles se movem em relação ao outro.

Dessa forma, pela teoria da relatividade restrita, os tempos transcorridos para cada observador é relacionado por:

$$t_{impróprio} = \frac{t_{próprio}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Para o piloto a nave não se move, ou seja, a Terra e a estrela se movem com velocidade $-v$ de tal forma que os eventos "saída da Terra" e "chegada na estrela" ocorrem no mesmo local (na nave). Com isso, o piloto mede um tempo próprio (t'). Esquematicamente:



Logo:

$$t_{impróprio} = \frac{t_{próprio}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$t_{próprio} = t_{impróprio} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$t_{próprio} = (6\ anos) \cdot \sqrt{1-\left(\frac{0{,}75c}{c}\right)^2}$$

$$t_{próprio} = 3{,}97\ anos$$

Portanto, para o piloto, a viagem dura somente 3, 97 anos.

6.

No exercício resolvido anteriormente, considere que os observadores são dois gêmeos e que no momento de partida a idade deles era 25 anos. Qual idade eles apresentaram em relação à Terra e à nave quando a nave chega à estrela Alfa Centauri?

Comentários:

Quando a nave chega à estrela, o observador na Terra dirá que seu irmão tem $25 + 6 = 31\ anos$. Mas, para o irmão que está na nave, ele dirá que seu irmão na Terra tem $25 + 3{,}97 = 28{,}97\ anos$. Será que algum deles está errado? Nenhum, ambos têm razão. Lembre-se que o tempo também é relativo.

8. A CONTRAÇÃO DO COMPRIMENTO

Para compreendermos a contração do comprimento, vamos tomar uma nave que possui um detector e um emissor na parte A, e um espelho na extremidade oposto da nave, como na figura abaixo.

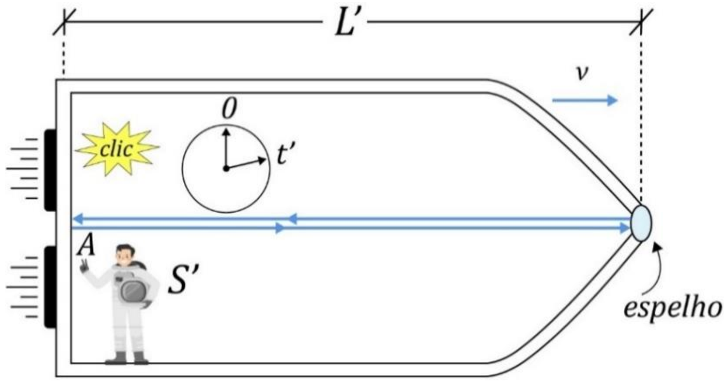


Figura 17: Representação do experimento mental para o entendimento da contração do comprimento.

Para um observador na nave ($S^{'}$), a emissão e a recepção do sinal luminoso acontecem no mesmo lugar da nave, isto é, no ponto A. Dessa forma, para quem está na nave, o tempo é próprio ($t^{'}$), o comprimento também é próprio ($L^{'}$) e a nave não se move. Logo, para o intervalo de um "clic", o pulso de luz deve percorrer $2L'$ e podemos escrever que:

$$t^{'} = \frac{2L^{'}}{c}$$

Por outro lado, para um observador na Terra (S), no intervalo de um "clic" o pulso deve alcançar o espelho (tempo de alcance t_A) e, após a reflexão no espelho, deve encontrar o detector (tempo de encontro t_E), como mostrado nas figuras abaixo:

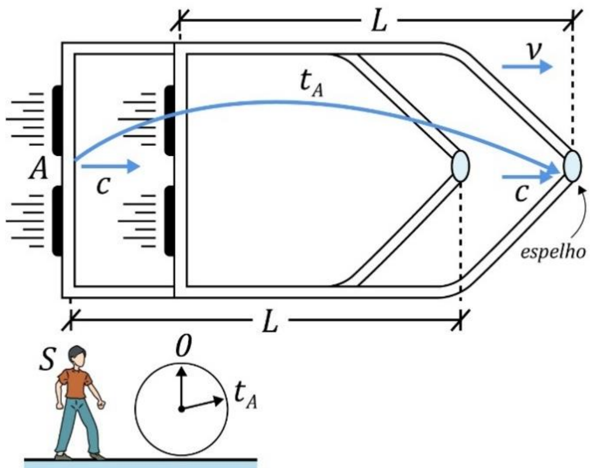


Figura 18: Para um observador no referencial S, a luz leva um tempo t_A até alcançar o espelho.

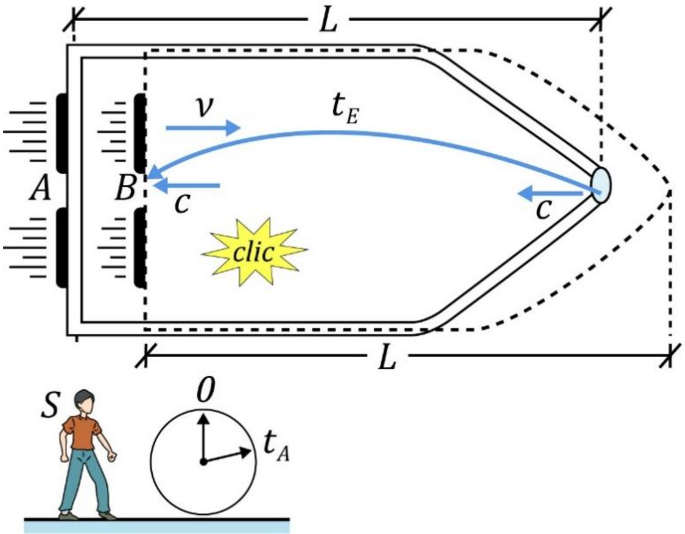


Figura 19: Para um observador no referencial S, a luz leva um tempo t_E até encontrar o receptor que terá se deslocado devido ao movimento da nave.

Neste caso, o tempo para um "clic" é dado por:

$$t = t_A + t_E$$

Note pelas figuras 18 e 19 que para um observador em S a emissão e a recepção do pulso de luz ocorrem em lugares diferentes (na figura 19 representamos pelos pontos A e B). Consequentemente, o tempo e o comprimento serão medições impróprias, relacionados por:

$$t = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v}$$

$$t = \frac{2 \cdot L \cdot c}{c^2 - v^2}$$

$$t = \frac{2 \cdot L \cdot c}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$t = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \underbrace{\frac{2}{c}}_{\frac{t'}{L'}} \cdot L$$

$$t = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{t'}{L'} \cdot L$$

$$\frac{t}{t'} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{L}{L'}$$

Mas da dilatação do tempo, temos:

$$\frac{t}{t'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Logo:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{L}{L'}$$

$$L = \frac{L'}{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{\gamma}}$$

$$\boxed{L = \frac{L'}{\gamma}}$$

Este resultado mostra que os comprimentos medidos em referenciais inerciais diferentes (nave e Terra) são diferentes também. Como $v < c$, isto é, $\gamma > 1$, então:

$$L < L'$$

Portanto, para um observador na Terra (repouso), o comprimento da nave (L) em movimento é menor que aquele medido por um observador que se encontra na nave (L'). Em outras palavras, dizemos que houve uma *contração do comprimento da nave*.

Observações:

- Em geral, a contração do comprimento de um objeto é na direção do seu movimento.
- Para um observador, os objetos que se movem ao seu redor, apresentam comprimentos menores que quando se encontram em repouso.
- Para velocidades muito pequenas quando comparadas com a velocidade da luz ($v \ll c$), os efeitos relativísticos de dilatação do tempo ou de contração do comprimento devem ser desprezados. Note que nesse caso, $\gamma \cong 1$.
- Os efeitos relativísticos são percebidos quando as velocidades são próximas às da luz. Geralmente, estes efeitos são observados nas partículas subatômicas ou em efeitos originados por decaimento de outras partículas ou de colisões entre partículas.

9. A TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

Evidentemente, você deve estar se perguntando como podemos mudar do referencial S para o referencial S' e vice-versa. A resposta para está pergunta é a transformação de Lorentz, lembrando que agora devemos levar em consideração os efeitos relativísticos no tempo e no comprimento. Assim, as transformações de Galileu devem sofrer alguns ajustes.

Para chegarmos nas transformações de Lorentz, vamos considerar dois referenciais inerciais S e S', onde S' se move a velocidade constante (v) em relação a S. No início, as origens das coordenadas são coincidentes.

Representativamente, para um observador em S, temos:

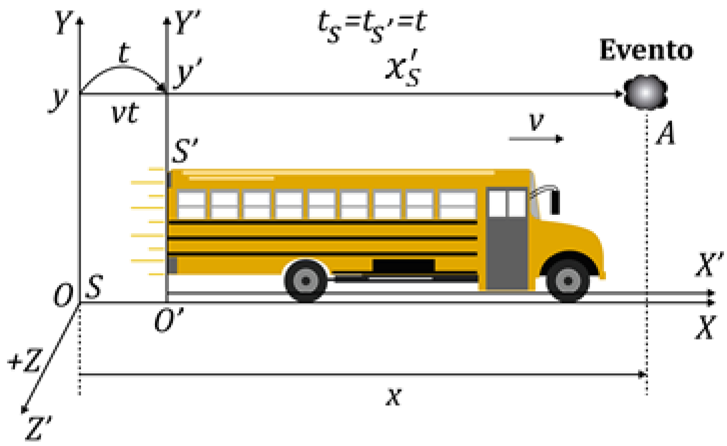


Figura 20: Representação dos referenciais, lembrando que as origens eram comuns. Note que para S' a medida x' é própria e a medida x é imprópria.

Inicialmente, a abscissa x' no referencial S' é uma distância própria, mas para S esta abscissa se encontra em movimento, consequentemente, se trata de uma distância imprópria. Assim, x' visto por S é dado por:

$$x'_S = \frac{x'}{\gamma}$$

Então, a abscissa de A vista por S é dada por:

$$x = v \cdot t + x'_S$$

$$x = v \cdot t + \frac{x'}{\gamma}$$

$$\boxed{x' = \gamma \cdot (x - v \cdot t)}$$

Por outro lado, para um observador em S', temos:

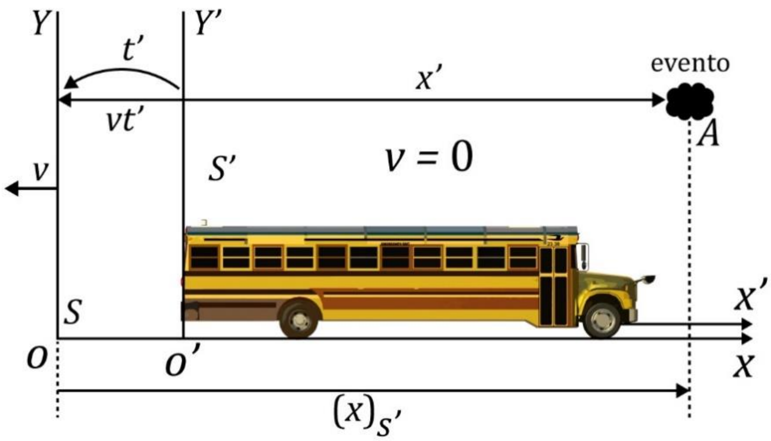


Figura 21: Para S' o sistema S se move com velocidade $-v$ e x' é um comprimento próprio, mas x é uma distância imprópria.

A abscissa A, medido de S (x) agora é uma distância própria, mas para $S^{'}$ está abscissa se encontra em movimento, isto é, ela é uma distância imprópria. Portanto, x visto por $S^{'}$ é dado por:

$$x_S = \frac{x^{'}}{\gamma}$$

Logo, a abscissa de A para $S^{'}$ é igual a:

$$x_S = x^{'} + v \cdot t^{'}$$

$$x^{'} = \frac{x}{\gamma} - v \cdot t^{'}$$

Mas:

$$x^{'} = \gamma \cdot (x - v \cdot t)$$

Portanto:

$$\frac{x}{\gamma} - v \cdot t^{'} = \gamma \cdot (x - v \cdot t)$$

$$t^{'} = \frac{\frac{x}{\gamma} - \gamma(x - v \cdot t)}{v}$$

$$t^{'} = \frac{\gamma\left(\frac{x}{\gamma^2} - x + v \cdot t\right)}{v}$$

Com:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Logo:

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

Portanto:

$$t' = \frac{\gamma\left[x \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - x + v \cdot t\right]}{v}$$

$$t' = \frac{\gamma\left(v \cdot t - x \cdot \frac{v^2}{c^2}\right)}{v}$$

$$t' = \frac{\gamma \cdot v \cdot \left(t - \frac{v \cdot x}{c^2}\right)}{v}$$

$$\boxed{t' = \gamma\left(t - \frac{v \cdot x}{c^2}\right)}$$

Consequentemente, podemos deduzir também x e t a partir de x' e t', de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + v \cdot t') \\ t = \gamma\left(t' + \frac{v \cdot x'}{c^2}\right) \end{cases}$$

Note que para obter essa transformação inversa de Lorentz, basta substituir nas anteriores v por $-v$.

10. A SOMA DAS VELOCIDADES DE LORENTZ

Agora, vamos corrigir a transformação de Galileu para as velocidades, aplicando a transformação de Lorentz.

Para esse fim, vamos determinar a velocidade u de um corpo em relação à Terra (S), conhecendo a velocidade u' em relação a um sistema de referência e a velocidade v do sistema de referência (S') em relação à Terra.

Adote que as origens dos sistemas de referências coincidam em $t = t' = 0$.

Esquematicamente:

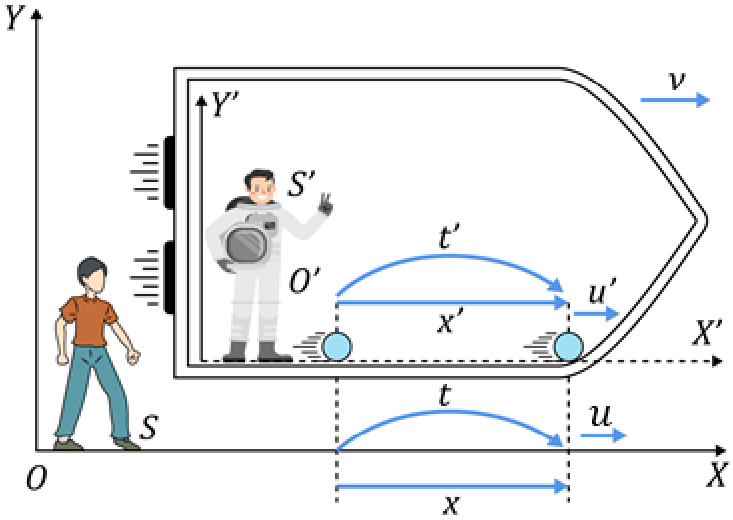


Figura 22: Observadores nos respectivos referenciais.

A velocidade da esfera para o observador em S é dada por:

$$u = \frac{x}{t}$$

A velocidade da esfera para um observador em $S^{'}$ é igual a:

$$u^{'} = \frac{x^{'}}{t^{'}}$$

De acordo com as transformadas inversas de Lorentz, podemos escrever que:

$$u = \frac{\gamma(x' + v \cdot t')}{\gamma\left(t' + \frac{v \cdot x'}{c^2}\right)}$$

Colocando $t^{'}$ em evidência, vem:

$$u = \frac{t' \cdot \left(\frac{x'}{t'} + v\right)}{t' \cdot \left(1 + \frac{v \cdot \frac{x'}{t'}}{c^2}\right)}$$

$$\boxed{u = \frac{u^{'} + v}{1 + \frac{u^{'} \cdot v}{c^2}}}$$

Esta é a transformação de Lorentz para a soma das velocidades. Atenção: esta equação deve ser trabalhada de forma escalar, ou seja, deve ser levado em conta os sinais das velocidades de acordo com as direções dos referenciais.

A partir desta equação, podemos deduzir alguns resultados importantes, como por exemplo, um corpo que se move em relação a uma nave com velocidade da luz c, não pode ter a velocidade como era esperado pela mecânica clássica:

$$u = u' + v$$

$$u = c + v$$

Como vemos, este corpo se moveria a uma velocidade superior a velocidade da luz, contradizendo o segundo postulado de Einstein.

Então, para determinar a velocidade do corpo devemos aplicar a transformação de Lorentz para a soma das velocidades:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u' \cdot v}{c^2}}$$

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{c \cdot v}{c^2}} = \frac{c + v}{\frac{c + v}{c}}$$

$$u = c$$

Este resultado evidencia o segundo postulado de Einstein, isto é, nenhum corpo pode alcançar uma velocidade maior que a da luz.

11. O EFEITO DOPPLER PARA A LUZ

Como vimos nas aulas de ondulatória, se uma ambulância está se aproximando em alta velocidade, nós percebemos um som mais agudo (maior frequência) do que quando ela está se afastando. Conhecemos este fenômeno como efeito Doppler e ele pode ser entendido com base nos movimentos da fonte de ondas, do receptor e do meio no qual as ondas são propagadas.

O efeito Doppler é muito importante para saber se há uma mudança de frequência causada pelo movimento da fonte em relação ao meio ou uma mudança causada pelo movimento do receptor em relação ao meio ou ainda de uma terceira situação estabelecida pela combinação das duas possibilidades anteriores.

Devemos lembrar que a luz não precisa de um meio para se propagar. Assim, é esperado que o efeito Doppler para a luz sofra algumas alterações conforme os princípios da relatividade de Einstein.

Para chegarmos a equação do efeito Doppler para a luz, vamos tomar uma fonte em repouso na origem O' de um sistema S' que emite pulsos de luz de modo periódico. Podemos dizer que dois pulsos são emitidos nos instantes de tempo $t' = 0$ e $t' = T_0$ e recebidos por um receptor em repouso na origem O do sistema S.

Assim, o primeiro pulso é recebido no instante $t = 0$ e, de acordo com os observadores de S, as coordenadas da emissão do segundo pulso são dadas por:

$$x = \gamma \cdot v(x' + v \cdot t) = \frac{v \cdot T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t = \gamma \cdot v \cdot \left(t' + \frac{v \cdot x'}{c^2}\right) = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Lembre-se que o segundo pulso é emitido em $x^{'} = 0$ e $t^{'} = T_0$ para observadores de $S^{'}$. Como o segundo pulso é emitido da posição $x = v \cdot \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ e se propaga com velocidade c, ele será recebido no origem O de S após um intervalo de tempo dado por:

$$\Delta t = \frac{v \cdot T_0}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Com isso, o intervalo de tempo entre a recepção do primeiro pulso em $x = 0$ ($t = 0$) e a recepção do segundo pulso no mesmo ponto $x = 0$ é igual a:

$$T = t + \Delta t = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{v \cdot T_0}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = T_0 \left(\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}\right)^{1/2}$$

Como vimos na cinemática, a frequência é o inverso do período. Dessa forma, em $S^{'}$, a frequência de emissão é dada por $f_0 = 1/T_0$ e em S a frequência de recepção vale:

$$f = \frac{1}{T} = f_0 \left(\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}\right)^{1/2}$$

Note que aqui demonstramos para o caso da fonte se afastar do receptor.

Para facilitar o entendimento do efeito Doppler para a luz, vamos esclarecer alguns pontos:

1) f_0: é a *frequência própria da fonte*, isto é, a frequência medida por um observador em relação ao qual a fonte se encontra em repouso (no nosso caso $S^{'}$).
2) f: a frequência percebida por um observador que está se movendo com velocidade radial v em relação à fonte.
3) Podemos ter duas possibilidades:
    a) Fonte e detector se afastando:

    $$f = f_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

    Em que $\beta = v/c$, com v sendo a velocidade radial relativa entre fonte e observador.
    b) Fonte e detector se aproximando:

    $$f = f_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

    Em que $\beta = v/c$, com v sendo a velocidade radial relativa entre fonte e observador.

Vale ressaltar que a frequência e o comprimento de onda estão relacionados pela equação fundamental da ondulatória:

$$c = \lambda \cdot f$$

Portanto, a frequência é inversamente proporcional ao comprimento de onda. Diante disso, se o observador está se afastando da fonte, o comprimento de onda medida é maior que o comprimento de onda próprio (frequência percebida é menor, já que $\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} < 1$). Essa variação no comprimento de onda é conhecida como *desvio para o vermelho*. Vale ressaltar que o comprimento de onda medido não corresponde ao da cor vermelha, mas porque o vermelho é a cor do espectro da luz visível com maior comprimento de onda.

Em contra partida, se o observador está se aproximando da fonte (frequência percebida é maior, pois $\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > 1$), então o comprimento de onda medido é menor que o comprimento de onda próprio. Essa variação no comprimento de onda é denominada de *desvio para o azul*, pois o azul corresponde a cor do espectro visível com o menor comprimento de onda.

2.5.1. O EFEITO DOPPLER PARA VELOCIDADES MUITO MENORES QUE A DA LUZ

Em velocidades muito menores quando comparadas com a velocidade da luz ($v \ll c$), isto é, $\beta \ll 1$, o termo $\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ pode ser manipulado utilizando a aproximação $(1+x)^n \approx 1 + nx$, quando $x \ll 1$.

$$(1-\beta)^{\frac{1}{2}}(1+\beta)^{-\frac{1}{2}} \cong \left(1 - \frac{1}{2}\beta\right)\left(1 - \frac{1}{2}\beta\right) = 1 - \beta + \frac{1}{4}\beta^2$$

Portanto, para a fonte se afastando do detector, com $\beta \ll 1$, temos que:

$$f = f_0\left(1 - \beta + \frac{1}{4}\beta^2\right)$$

Em muitos casos, como $\frac{\beta^2}{4}$ é muito menor que os demais termos, é comum desprezá-lo. Vale ressaltar que os radares da polícia utilizam o efeito Doppler para medir a velocidade dos automóveis. Para isso, o aparelho emite um feixe de micro-ondas com uma certa frequência própria f_0 muito bem conhecida.

Assim, um carro que se aproxima reflete o feixe que é captado pelo detector do instrumento de radar. Baseado no efeito Doppler, a frequência recebida pelo instrumento é maior que f_0, neste caso de aproximação fonte/observador. Assim, o aparelho compara a frequência recebida com f_0 e, através de um cálculo computacional, determina a velocidade do veículo.

2.5.2. O EFEITO DOPPLER NA ASTRONOMIA

Além da aplicação do efeito Doppler para a identificação das velocidades dos automóveis, ele também é muito aplicado em observações astronômicas de estrela, galáxias e outras fontes de luz para determinar a velocidade das fontes.

Quando uma estrela está em repouso em relação a nós, podemos detectar a luz emitida pela estrela na sua frequência própria f_0. Se a estrela se aproxima ou se afasta, a frequência da luz detectada por um observador em outro referencial pode ser maior ou menor devido ao movimento relativo entre fonte e observador.

O deslocamento Doppler é devido apenas ao movimento radial da estrela (movimento ao longo da reta suporte que liga fonte (estrela) ao observador. Por isso, para calcular a frequência detectada pelo observador devemos decompor a velocidade da fonte na direção na radial, isto é, decompor a velocidade na direção da reta suporte que une observador à fonte.

No caso da velocidade radial v de uma fonte luminosa ser muito pequena (o que implica $\beta \ll 1$), podemos suprir o termo β^2 e a equação que fornece a frequência percebida pelo observador é dada por:

$$f = f_0(1-\beta)$$

Vale ressaltar que neste caso estamos considerando a fonte se afastando do observador. Se a fonte estivesse se aproximando do observador, temos $f = f_0(1+\beta)$.

Além de trabalhar com frequências, é comum em medições astronômicas utilizarmos comprimento de onda. Para isso, basta aplicar a equação fundamental da ondulatória ($c = \lambda \cdot f$). Então:

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}(1-\beta)$$

$$\lambda = \lambda_0(1-\beta)^{-1}$$

Aplicando novamente nossa aproximação $(1+x)^n \approx 1 + nx$, quando $x \ll 1$, temos:

$$\lambda = \lambda_0(1+\beta)$$

De onde tiramos o valor de β:

$$\beta = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$

Lembrando que $\beta = v/c$, em que v é a velocidade radial da fonte luminosa e denotando $\lambda - \lambda_0 = |\Delta\lambda|$, podemos determinar v:

$$\boxed{v = \frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} \cdot c}$$

Em que v é a velocidade radial da fonte luminosa em relação ao observador, com $v \ll c$.

O termo $\Delta\lambda$ é denominado deslocamento Doppler em comprimentos de onda da fonte de luz. O uso do módulo na equação logo acima é porque estamos apenas interessados no valor absoluto da velocidade. Assim, podemos aplicar está equação quando a fonte está se aproximando ou quando está se afastando do observador. Lembrando que ela é válida apenas para $v \ll c$.

2.5.3. O EFEITO DOPPLER TRANSVERSAL

Considere uma situação em que uma fonte S passa ao largo de um detector D, como mostrado na figura logo abaixo.

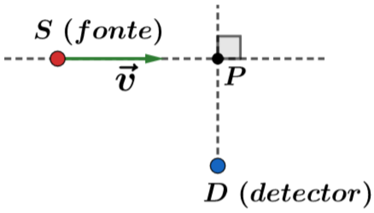


Figura 23: Representação de uma fonte S passando ao largo de um detector D.

Neste caso, a frequência detectada no ponto D da luz emitida pela fonte no momento em que ela passa por P é dada por:

$$f = f_0\sqrt{1-\beta^2}$$

Esta equação é conhecida como efeito Doppler transversal. Note que esse efeito não é previsto pela teoria clássica. Para velocidades baixas, isto é, $\beta \ll 1$, podemos aplicar novamente a aproximação $(1+x)^n \approx 1+nx$, com $x \ll 1$:

$$f = f_0(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f \cong f_0\left(1-\frac{1}{2}\beta^2\right)$$

Devido ao efeito Doppler transversal, um policial poderia determinar a velocidade de um carro apontando perpendicularmente o radar à trajetória do veículo. Entretanto, como β é muito pequeno e o efeito Doppler transversal é proporcional a β^2, o efeito é tão pequeno que não pode ser medido pelo radar da polícia. Por isso, os policiais procuram alinhar o radar com a trajetória do automóvel para medir uma velocidade mais precisa.

O efeito Doppler transversal é uma consequência direta da dilatação do tempo. Lembrando que o período é o inverso da frequência, podemos escrever que:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \cdot T_0$$

Em que T_0 é o período próprio da fonte.

12. DINÂMICA RELATIVÍSTICA

De acordo com o segundo postulado de Einstein, não há nada mais rápido que a luz. Diante disso, o que aconteceria se acelerarmos um corpo mediante a ação permanente de uma força?

A medida que o corpo é acelerado pela força, sua velocidade também está aumentando. Em um primeiro momento, somos levados a acreditar que o corpo poderá ter uma velocidade superior à da luz.

Entretanto, isto é impossível, pois com o aumento da velocidade, a aceleração deverá diminuir gradativamente, de tal modo que não dá tempo para a velocidade do corpo chegar próximo a velocidade da luz c. Mas, como é possível haver uma força permanente e ainda assim uma diminuição na aceleração?

Da mecânica clássica, sabemos que a inércia é uma grandeza ligada a massa do corpo: quanto maior a massa, menor é a aceleração. Portanto, podemos dizer que a aceleração diminui devido a um aumento da inércia do corpo. Assim, para que a força aplicada ao corpo continue sendo a mesma, ao aumentar a massa, devemos notar uma diminuição na aceleração do corpo. Esquematicamente, temos:

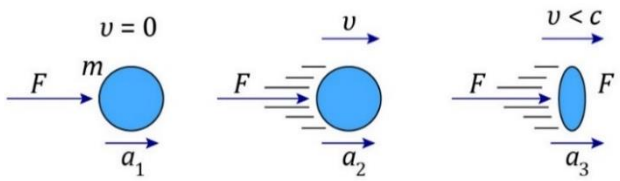


Figura 24: Quando um corpo é acelerado continuamente, em um certo instante, a massa M do corpo aumenta tanto que ele deixa de acelerar.

Para estabelecer uma relação entre a massa e a velocidade do sistema aplicando a conservação do momento linear, considerando choque perfeitamente elástico entre duas esferas de mesma massa de repouso (m_0) e que elas são lançadas com velocidades ($u_0 \ll c$) perpendiculares ao movimento das naves que se movem ao paralelamente, com velocidade v em relação à Terra, conforme figura abaixo:

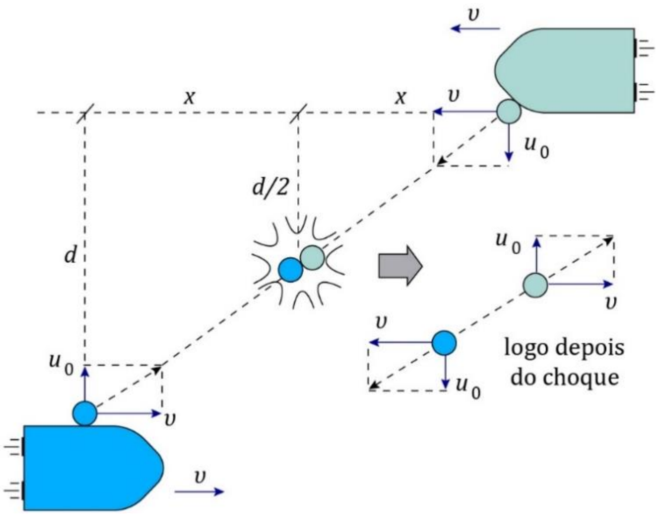


Figura 25: Para um observador fixado no Terra as esferas percorrem trajetórias retilíneas antes e depois da colisão, conservando a quantidade de movimento.

Note que as distâncias verticais que as esferas percorrem até o choque são iguais. Além disso, as distâncias não mudam para os observadores na nave pois elas são perpendiculares ao movimento.

Agora, vamos analisar a colisão para o referencial S'. Neste referencial, a pequena esfera apresenta apenas movimento vertical e como a velocidade u_0 é muito pequena, sua massa continuará sendo m_0 e o tempo transcorrido é o tempo próprio t'.

Por outro lado, a esfera lançada da outra nave apresenta velocidades nas direções horizontal e vertical, sua velocidade não é pequena. Consequentemente, a componente vertical da velocidade será $u \neq u_0$ e sua massa $m \neq m_0$. Além disso, o tempo transcorrido para esta esfera medida para S' é um tempo impróprio t. Esquematicamente:

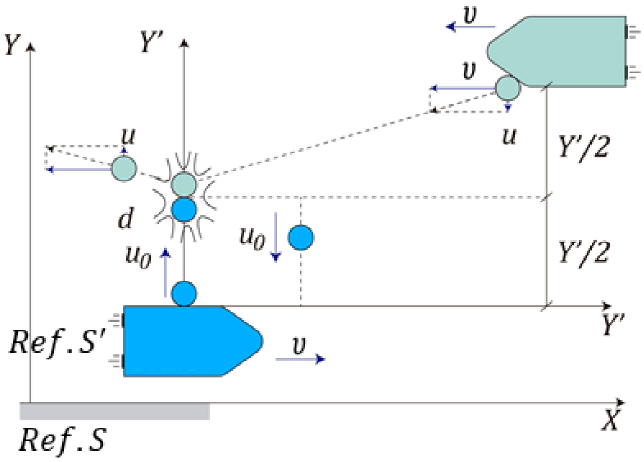


Figura 26: Para alguém em S' a quantidade de movimento se conserva nas direções horizontal e vertical.

Aplicando a conservação da quantidade de movimento na direção vertical, temos:

$$\vec{Q}_{antes_y} = \vec{Q}_{final_y}$$

$$m_0 \cdot u_0 - m \cdot u = -m_0 \cdot u_0 + m \cdot u$$

$$m \cdot u = m_0 \cdot u_0$$

$$m \cdot \frac{\frac{y'}{2}}{t} = m_0 \cdot \frac{\frac{y'}{2}}{t'}$$

$$m = \frac{t}{t'} \cdot m_0$$

Mas, da dilatação do tempo, temos:

$$\frac{t}{t'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma$$

Portanto:

$$\boxed{m = \gamma \cdot m_0}$$

Com este resultado, podemos ver que a massa aumenta à medida que a velocidade do corpo cresce ($\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} > 1$).

2.6.1. MOMENTO RELATIVÍSTICO

Como foi visto na mecânica clássica, se observadores em diferentes referenciais inerciais, a lei de conservação do momento é obedecida em todos os referenciais.

Entretanto, na teoria da relatividade restrita, o momento linear sofrerá um ajuste. Se definirmos o momento linear $\vec{p}$ de uma partícula como o produto $m \cdot \vec{v}$, vamos verificar que o momento não é o mesmo antes e depois da colisão para observadores localizados na maioria dos referenciais inerciais.

Seja uma partícula com velocidade constante v no sentido positivo do eixo x. Segundo a mecânica clássica, o módulo da quantidade de movimento é dado por:

$$p = m \cdot v = m \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Na qual Δx é a distância percorrida pela partícula durante Δt. Agora, para encontrar uma expressão relativística para a quantidade de movimento, vamos começar com uma nova definição:

$$p = m \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t_0}$$

Em que Δx também é a distância percorrida pela partícula segundo um observador externo, mas Δt_0 é o intervalo de tempo necessário para percorrer Δx, não segundo o observador externo, mas de acordo com um observador que esteja se movendo com a partícula.

Devido ao fato de a partícula estar em repouso em relação ao observador que acompanha a partícula, o intervalo de tempo medido por esse observador é próprio (Δt_0). Lembrando da dilatação do tempo, $\Delta t_{impróprio} = \gamma \cdot \Delta t_{próprio}$, então:

$$p = m \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t_0} = m \cdot \underbrace{\frac{\Delta x}{\Delta t}}_{v} \cdot \underbrace{\frac{\Delta t}{\Delta t_0}}_{\gamma}$$

$$p = \gamma \cdot m \cdot v \ (momento\ relatívistico)$$

Perceba que a única diferença entre a abordagem clássica e a relativística é apenas o fator de Lorentz (γ). Contudo, essa pequena diferença é muito importante, pois ao contrário da teoria clássica, o momento relativístico aumenta sem limite quando v se aproxima da velocidade da luz.

Vetorialmente, o momento relativístico é expresso por:

$$\boxed{\vec{p} = \gamma \cdot m \cdot \vec{v}}$$

Quando a velocidade é muito pequena quando comparada com a da luz, temos que $\gamma \to 1$ e o momento relativístico se reduz à abordagem clássica, isto é, $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$.

2.6.2. ENERGIA RELATIVÍSTICA

De acordo com a teoria da relatividade restrita, a 2ª Lei de Newton pode ser generalizada para:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{p}) = \frac{d}{dt}(\gamma \cdot m_0 \cdot \vec{v})$$

Escrita dessa forma, a 2ª Lei de Newton pode ser utilizada para deduzir a lei de conservação do momento relativístico. Quando a força externa $\vec{F}$ é nula, $\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \vec{v}$ deve ser constante. Em outras palavras, na ausência de forças externas, o momento relativístico é conservado.

A energia cinética K é igual ao trabalho efetuado por uma força para acelerar a partícula desde o repouso até a velocidade v, ou seja:

$$K = \int_{v=0}^{v} F dx = \int \frac{dp}{dt} dx = \int d(m \cdot v) \frac{dx}{dt} = \int (mdv + vdm)v$$

Ou ainda:

$$K = \int_{v=0}^{v} (m \cdot vdv + v^2 dm)$$

Lembrando que as variáveis m e v se relacionam por:

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot m_0$$

Então:

$$m^2 - m^2 \cdot \frac{v^2}{c^2} = m_0^2 \Rightarrow m^2 \cdot c^2 = m^2 \cdot u^2 + m_0^2 \cdot c^2$$

Quando diferenciamos esta equação, obtemos:

$$2m \cdot c^2 \cdot dm = m^2 \cdot 2v \cdot dv + v^2 \cdot 2m \cdot dm$$

Dividindo por $2m$ dos dois lados, vem:

$$m \cdot v \cdot dv + v^2 \cdot dm = c^2 \cdot dm$$

Note que a equação que acabamos de deduzir é justamente o integrando da equação de K, portanto:

$$K = \int_{v=0}^{v} c^2 dm = c^2 \int_{m=m_0}^{m} dm = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2$$

Perceba que os limites de integração foram alterados na mudança de variáveis. Lembrando que para a partícula em repouso ($v = 0$), sua massa é a massa de repouso m_0 e para a partícula com velocidade v, sua massa é a massa relativística m.

Diante disso, vemos que a expressão da energia cinética possui dois termos: o primeiro depende da velocidade da partícula ($m = m_0 \cdot \gamma$) e o segundo termo ($m_0 \cdot c^2$) não depende de v. Por isso, o termo $m_0 \cdot c^2$ é chamado de *energia de repouso* ou apenas *energia própria* E_0 da partícula:

$$E_0 = m_0 \cdot c^2$$

A equação $K = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2$ pode ser utilizada para definir a energia total E de uma partícula livre da seguinte forma:

$$E = K + m_0 \cdot c^2 = m \cdot c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2$$

Note que podemos comparar a energia total com a energia de repouso:

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \underbrace{m_0 \cdot c^2}_{E_0}$$

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \cdot E_0$$

Para velocidades baixas, a energia cinética relativística se reduz ao modelo clássico. Para isso, basta utilizar a expansão binomial:

$$(1+x)^n = 1 + n \cdot x + n \cdot (n-1) \cdot \frac{x^2}{2} + \cdots$$

Aplicando a expansão binomial no fator de Lorentz $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$, temos:

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \cdots$$

Como $\frac{v}{c} \ll 1$, podemos desprezar os termos maiores que $\left(\frac{v}{c}\right)^2$:

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

Logo, a energia cinética seria escrita como:

$$K = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$$

$$K = m_0 \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = m_0 \cdot c^2 \left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right]$$

$$K = m_0 \cdot c^2 \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 - 1\right]$$

$$K = m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}$$

$$\boxed{K = \frac{m_0 v^2}{2}}$$

Note que pela equação da energia cinética relativística ($K = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2$), se $v \to c$, então $K \to \infty$. Em outras palavras, como $K = \int_{v=0}^{v} F dx$, seria necessário um trabalho infinito sobre a partícula para acelerá-la até a velocidade da luz. Mais uma vez temos c desempenhando um papel de limitante para a velocidade.

Uma expressão muito utilizada é relacionar a energia relativística e o momento relativístico. Para isso, vamos apenas fazer um trabalho algébrico subtraindo os quadrados das energias total e de repouso:

$$(m\cdot c^2)^2-(m_0\cdot c^2)^2=\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot c^2\right)^2-(m_0\cdot c^2)^2$$

$$(m\cdot c^2)^2-(m_0\cdot c^2)^2=(m_0\cdot c^2)^2\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}-1\right)=(m_0\cdot c^2)^2\left(\frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$$

$$(m\cdot c^2)^2-(m_0\cdot c^2)^2=c^4\cdot\frac{v^2}{c^2}\cdot\left(\frac{m_0^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$$

$$(m\cdot c^2)^2-(m_0\cdot c^2)^2=c^2\cdot v^2\cdot\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2$$

$$(m\cdot c^2)^2-(m_0\cdot c^2)^2=c^2\cdot v^2\cdot m^2$$

Lembrando que $p=m\cdot v$, vem:

$$(m\cdot c^2)^2-(m_0\cdot c^2)^2=p^2\cdot c^2=(p\cdot c)^2$$

Portanto:

$$\boxed{E^2=(p\cdot c)^2+E_0^2}$$

Em que $E_0=m_0\cdot c^2$ é a energia de repouso da partícula. Esta equação que acabamos de deduzir é muito importante na solução de problemas de relatividade que envolvem energias e momentos de partículas. Um artifício mnemônico para lembrar esta equação é construir um triângulo retângulo da seguinte forma:

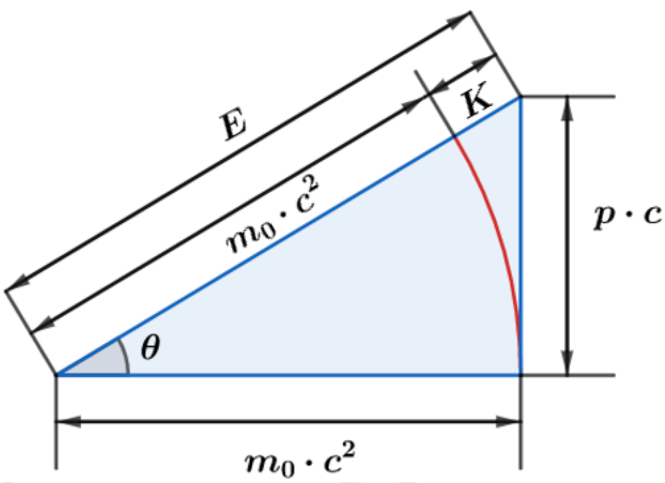


Figura 27: Triângulo bizurado para lembrar das relações das energias relativísticas.

Vamos calcular o $sen\ \theta$ e o $\cos\theta$ neste triângulo:

$$sen\ \theta = \frac{p \cdot c}{E} = \frac{p \cdot c}{\gamma \cdot E_0} = \frac{\gamma \cdot m_0 \cdot v \cdot c}{\gamma \cdot m_0 \cdot c^2} = \frac{v}{c} = \beta$$

Ou seja:

$$\boxed{sen\ \theta = \beta}$$

Para o $\cos\theta$, temos:

$$\cos\theta = \frac{m \cdot c^2}{E} = \frac{m_0 \cdot c^2}{\gamma \cdot E_0} = \frac{m_0 \cdot c^2}{\gamma \cdot m_0 \cdot c^2}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{1}{\gamma}}$$

7.
A energia de repouso de um próton é de $938\ MeV$. Se a sua energia cinética também for $938\ MeV$, determine o seu momento e a sua velocidade.

Comentários:
Inicialmente, vamos determinar o seu momento. Para isso, demos calcular a energia total por:

$$E = K + E_0$$

Mas a energia cinética é igual a energia de repouso, portanto:

$$E = E_0 + E_0 = 2E_0$$

Além disso, sabemos que:

$$E^2 = (p \cdot c)^2 + E_0^2$$

Então:

$$(2E_0)^2 = (p \cdot c) + E_0$$
$$(p \cdot c)^2 = 3E_0^2$$
$$p \cdot c = \sqrt{3} \cdot E_0$$
$$p \cong 1625\ MeV/c$$

Podemos utilizar a relação entre a energia total e energia de repouso para a determinação da velocidade do próton:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2E_0$$

$$\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 2^2 \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{v = \frac{\sqrt{3}}{2}c}$$

2.6.3. TRANSFORMAÇÕES DO MOMENTO, ENERGIA, MASSA E FORÇA.

Vamos apresentar as relações que transformação os valores do momento, energia, massa e força de um referencial S, em valores correspondentes num referencial S' que se move com velocidade constante v, em relação a S, ao longo do eixo comum x, x'.

Não vamos demonstrar os resultados, pois acreditamos que não é necessário para o nosso curso.

Para o momento linear, podemos escrever que a transformação é dada por:

$$\begin{cases} p_x^{'} = \gamma\left(p_x - \frac{v \cdot E}{c^2}\right) \\ p_y^{'} = p_y \\ p_z^{'} = p_z \end{cases}$$

Em que E é a energia total ($E = K + E_0$) e p representa o momento linear nas respectivas direções. Além disso, a nova energia total no referencial $S^{'}$ é dada por:

$$E^{'} = \gamma(E - v \cdot p_x)$$

Vale lembrar que:

$$x^{'} = \gamma(x - v \cdot t) \text{ e } t^{'} = \gamma\left(t - x \cdot \frac{v}{c^2}\right)$$

Resumidamente, podemos montar o seguinte quadro:

$x^{'} = \gamma(x - v \cdot t)$	$p_x^{'} = \gamma\left(p_x - E \cdot \frac{v}{c^2}\right)$
$t^{'} = \gamma\left(t - x \cdot \frac{v}{c^2}\right)$	$\frac{E^{'}}{c^2} = \gamma\left(\frac{E}{c^2} - p_x \cdot \frac{v}{c^2}\right)$

Note que existe uma interdependência entre o momento linear e a energia. Como vemos no quadro acima, é uma consequência natural das leis de conservação. Se a energia e o momento são conservados numa interação, do ponto de vista de um observador num referencial inercial, então para qualquer outro observador inercial eles também são conservados.

Além disso, se o momento é conservado, então a energia também deve ser conservada.

Finalmente, para obter as transformações para a força, vamos partir de suas componentes em S e S':

$$F_x = \frac{d}{dt}(m \cdot v_x); F_y = \frac{d}{dt}(m \cdot v_y); F_z = \frac{d}{dt}(m \cdot v_z)$$

$$F'_x = \frac{d}{dt}(m' \cdot v'_x); F'_y = \frac{d}{dt}(m' \cdot v'_y); F'_z = \frac{d}{dt}(m' \cdot v'_z)$$

Como a dedução completa para as transformações da força é algebricamente complicada, vamos apenas apresentar o resultado. As componentes da força nos dois referenciais se relacionam da seguinte forma:

$$F_x = \frac{F'_x + \left(\frac{v}{c^2}\right)\vec{v}' \cdot \vec{F}'}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}}; F_y = \frac{F'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v'_x v}{c^2}\right)}; F_z = \frac{F'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v'_x v}{c^2}\right)}$$

Em que as relações inversas são dadas por:

$$F'_x = \frac{F_x - \left(\frac{v}{c^2}\right)\vec{v} \cdot \vec{F}}{1 - \frac{v_x v}{c^2}}; F'_y = \frac{F_y}{\gamma\left(1 - \frac{v_x v}{c^2}\right)}; F'_z = \frac{F_z}{\gamma\left(1 - \frac{v_x v}{c^2}\right)}$$

Lembrando que:

$$\begin{cases} \vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \\ \vec{v}' = v'_x\hat{i} + v'_y\hat{j} + v'_z\hat{k} \\ \vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \\ \vec{F}' = F'_x\hat{i} + F'_y\hat{j} + F'_z\hat{k} \end{cases}$$

Note que resultado maravilhoso, quando $\frac{v}{c} \ll 1$, estamos no limite newtoniano, ou seja, o termo $1 \pm \frac{v_x v}{c^2} \cong 1$. Portanto, estas equações se reduzem a $\vec{F} = \vec{F}'$, como o previsto pela teoria da mecânica clássica.

Apenas como título de curiosidade, após os postulados da teoria da relatividade especial, as coordenadas espaciais e temporais são mutuamente dependentes quando medidas em diferentes referenciais inerciais.

Assim, o tempo t passa a ser uma quarta coordenada com a mesma importância que as coordenadas espaciais x, y e z, num contexto relativístico quadridimensional, denominado espaço-tempo. A geometria do espaço-tempo não é a geometria euclidiana do espaço tridimensional, mas uma geometria lorentziana quadridimensional.

2.6.4. PARTÍCULA SEM MASSA

Como vimos anteriormente, surgiu o termo quadrado da energia de repouso ($E_0^2 = (m_0 \cdot c^2)^2$) e, matematicamente, pode assumir valores positivos, negativos ou nulos. Até aqui assumiu-se apenas valores positivos para essa grandeza.

Entretanto, o caso em que a expressão assume um valor negativo, surge na física de partículas no estudo de partículas e antipartículas. Neste momento, vamos analisar o caso de $E_0^2 = (m_0 \cdot c^2)^2 = 0$, isto é, $m_0 = 0$.

Perceba que isso não faz sentido do ponto de vista clássico, já que a energia cinética $E = \frac{1}{2} m_0 v^2$ e o momento $p = m_0 \cdot v$ anulam para $m_0 = 0$. Segundo a mecânica clássica, um objeto sem massa não se distingui do vazio absoluto, pois não possui nem energia nem momento. Entretanto, do ponto de vista relativístico, ao se tornar nula a massa ($m_0 = 0$), temos que:

$$E^2 = (p \cdot c)^2 + \left(\underbrace{m_0}_{0} \cdot c^2\right)^2$$

$$\therefore \boxed{E = p \cdot c}$$

Além disso, pelas definições de energia e de momento relativísticos, temos:

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2; p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v$$

$$\frac{p \cdot c}{E} = \frac{\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v \cdot c}{\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2} = \frac{v}{c}$$

Mas, $E = p \cdot c$, logo:

$$v = c$$

Este resultado mostra que todo corpo cuja massa é nula deve se mover com velocidade da luz. Reciprocamente, uma partícula cuja velocidade é c tem, necessariamente, a massa nula e sua energia é dada por $E = p \cdot c$.

De acordo com observações experimentais, podemos comprovar a existência de partículas com $m_0 = 0$. As teorias atuais sugerem a existência de ao menos três dessas partículas, sendo o fóton a mais famosa delas (partícula associada à radiação eletromagnética).

Note que o segundo postulado de Einstein não deixa a existência de uma transformada de Lorentz para o referencial de repouso da luz, pois essa se move com velocidade c em relação a todos os referenciais inerciais. Por isso, não faz sentido o termo massa de repouso para a luz.

Outra partícula de massa nula muito importante para a Física é o neutrino. Os resultados mais recentes sugerem um limite superior para a massa do neutrino da ordem de $0{,}07\ eV/c^2$, mostrando que os neutrinos se movem com velocidade ligeiramente menor que a da luz.

Uma terceira partícula de massa nula é o gráviton. Tais partículas são responsáveis pela "transmissão" das forças gravitacionais. Elas desempenham para a gravidade o mesmo papel que os fótons para o eletromagnetismo. Atualmente, não existe nenhum experimento que afirma a existência dos grávitons.

Considerações finais

Querido aluno(a),

Se as dúvidas persistirem, não se esqueça de acessar o Fórum de Dúvidas! Responderei suas dúvidas o mais rápido possível!

Você também pode me encontrar nas redes sociais! 😊

Conte comigo,

Vinícius Fulconi

@viniciusfulconi

vinicius.fulconi