DETERMINANTES

GABARITO COMENTADO

1) (**Letra C**) Calculando o determinante e igualando a zero, obteremos:

$$\begin{vmatrix} a & a^3-b^3 & b \\ a & a^3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3a^4+5ab-2a^3b-3a(a^3-b^3)=0$$

$$\Leftrightarrow 3a^4+5ab-2a^3b-3a^4+3ab^3=0 \xLeftrightarrow{\text{Como } ab\neq 0} 5-2a^2+3b^2=0$$

ou seja, $3b^2-2a^2=-5$; portanto, multiplicando a igualdade por -7, temos finalmente que $14a^2-21b^2=\boxed{35}$.

2) (**Letra A**) Primeiro, vamos determinar a matriz $xI-A$:

$$xI-A = x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2 & -1 \\ -4 & x-3 \end{bmatrix}$$

O determinante de $xI-A$ é igual a $(x-2)(x-3)-(-4)(-1)=x^2-5x+2$, cujas raízes são os autovalores de A. A soma e o produto são dados respectivamente por $-\frac{b}{a}=5$ e $\frac{c}{a}=2$.

3) Uma matriz é não inversível se, e só se, seu determinante for nulo. Assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ k & 2 & 0 \\ 1 & k & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 10+4k^2-8-10k=0 \Leftrightarrow 2k^2-5k+1=0 \Leftrightarrow \boxed{k=\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{17}}{4}}$$

4) (**Letra D**) Como a matriz dada é 4x4 e o elemento $a_{11}=1$, é bem interessante usarmos a Regra de Chió:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-0\cdot 2 & 0-0\cdot 2 & 1-(-1)\cdot 2 \\ -1-0\cdot 1 & b-0\cdot 1 & 1-(-1)\cdot 1 \\ 0-0\cdot 0 & 0-0\cdot 0 & 1-(-1)\cdot 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ -1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=ab=24$$

Logo, o determinante pedido é $\begin{vmatrix} \sqrt{b} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{a} \end{vmatrix} = \sqrt{ab}-\sqrt{6}=\sqrt{24}-\sqrt{6}=\boxed{\sqrt{6}}$

5) (**Letra A**) Vamos calcular inicialmente a matriz B, dada por:

$$B = x^T \cdot x = \begin{bmatrix} 2 \\ 13 \\ 65 \end{bmatrix} \cdot [2 \quad 13 \quad 65] = \begin{bmatrix} 2^2 & 13 \cdot 2 & 65 \cdot 2 \\ 13 \cdot 2 & 13 \cdot 13 & 13 \cdot 65 \\ 65 \cdot 2 & 65 \cdot 13 & 65 \cdot 65 \end{bmatrix}$$

Repare que esta última matriz é tal que suas linhas são todas múltiplas da linha $[2 \;\; 13 \;\; 65]$, portanto $\det B = 0$. Logo, afirmamos que:

$$\det 2A^{-1}B^2 = \det(2A^{-1}) \cdot (\det B)^2 = \boxed{0}$$

6) (**Letra A**) Mais uma vez, como o elemento $a_{11} = 1$, é legal usar a Regra de Chió:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 2n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-1 & 1-1 & 1-1 & 1-1 & \dots & 1-1 \\ 1-1 & 5-1 & 1-1 & 1-1 & \dots & 1-1 \\ 1-1 & 1-1 & 7-1 & 1-1 & \dots & 1-1 \\ 1-1 & 1-1 & 1-1 & 9-1 & \dots & 1-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1-1 & 1-1 & 1-1 & 1-1 & \dots & 2n-2 \end{vmatrix}$$

ou seja, na matriz original, o efeito de usar Chió é eliminarmos a 1ª linha e a 1ª coluna, e subtrairmos 1 de cada elemento. Assim, o determinante será igual ao de uma matriz diagonal, que é o produto dos elementos da diagonal principal:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2n-2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (2n-2) = \boxed{\prod_{k=1}^{n-1} 2k}$$

7) (**Letra D**) Como A é matriz triangular, $\det A = a_1 \cdot a_4 \cdot a_6$ (produto dos elementos da diagonal principal). Se $a_4 = 10$ e $\det A = -1000$, então $a_1 \cdot a_6 = -100$. Dado que $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ formam PA, escrevemos que:

$$a_1 \cdot a_6 = -100 \Leftrightarrow (a_4 - 3d)(a_4 + 2d) = -100 \Leftrightarrow (10 - 3d)(10 + 2d) = -100$$

$$\Leftrightarrow -6d^2 - 10d + 200 = 0 \Leftrightarrow d = 5 \; ou \; d = -\frac{20}{3}$$

Como $d > 0$, nos convém $d = 5$. Dado que $a_1 = a_4 - 3d$, então $a_1 = 10 - 3 \cdot 5 = -5$ e assim $\frac{a_1}{d} = -\frac{5}{5} = \boxed{-1}$.

8) (**Letra A**) Em problemas deste tipo, envolvendo equações com determinantes, usamos diversas vezes estas duas propriedades, supondo A e B matrizes quadradas de mesma ordem n:

$$\det(kA) = k^n \det(A)$$

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Reescrevendo a igualdade apresentada, temos:

$$2^3 (\det M)^2 - \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 (\det M)^3 = \frac{2}{9} \cdot 3^3 (\det M)$$

Como M é inversível, $\det M \neq 0$ e por isso podemos simplificar a igualdade:

$$8 \det M - 2(\det M)^2 = 6 \Leftrightarrow (\det M)^2 - 4 \det M + 3 = 0 \Leftrightarrow \det M = 1 \text{ ou} \det M = 3$$

Assim, $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det M} = 1 \text{ ou} \frac{1}{3}$.

9) (**Letra D**) Uma igualdade um tanto quanto óbvia mas muito poderosa é:

$$\boxed{I = A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A}$$

para qualquer matriz A inversível. Esta igualdade diz que a matriz identidade sempre pode ser escrita como o produto de uma matriz por sua inversa. Vamos usar esse fato no problema. Veja:

$$\det(I + C^{-1}A) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \det(A^{-1}A + C^{-1}A) = \det\big((A^{-1} + C^{-1})A\big)$$
$$= \det(A^{-1} + C^{-1}) \cdot \det A = \frac{1}{3}$$

Como $\det A = 5$, então $\det(A^{-1} + C^{-1}) = \frac{1}{15}$. Portanto:

$$\det B = \det(3(A^{-1} + C^{-1})^T) = 3^n \det(A^{-1} + C^{-1}) = \frac{3^n}{15} = \boxed{\frac{3^{n-1}}{5}}$$

10)(**Letra D**) Este é um exemplo de problema em que não se calcula propriamente o determinante; em vez disso, usamos propriedades envolvendo proporção de linhas, trocas de linhas e combinação linear de linhas. Veja que o segundo determinante é, em relação ao primeiro, obtido pelas seguintes alterações:

- troque a 1ª e a 3ª colunas de posição no primeiro determinante, obtendo:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & a \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 2 & 0 & -1 & c \end{vmatrix}$$

- Multiplique a última linha por 3:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & a \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 6 & 0 & -3 & 3c \end{vmatrix}$$

-Troque a última linha por ela mais a 3ª:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & a \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 7 & -1 & 0 & b+3c \end{vmatrix}$$

Cada troca de linhas faz o determinante trocar de sinal, cada multiplicação de uma fila por um número faz o determinante ficar multiplicado por este número, e a troca de uma fila por ela mais um múltiplo de outra paralela não altera o determinante. Logo:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & a \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 7 & -1 & 0 & b+3c \end{vmatrix} = \boxed{-210}$$

11)(**Letra A**) Analisando cada alternativa, temos:

I. (Verdadeira) Como A é de ordem 3, $\det 3A = 3^2 \det A = 36 \Leftrightarrow \det A = 4$. Dividir uma fila por 2 e multiplicar outra por 4 é efetivamente multiplicar o determinante por 2, logo o valor deste último determinante será 8.

II. (Falsa) $\det N^T = 96 \Leftrightarrow \det N = 96$. Como $\det M = \frac{3}{2}$ e $N = aM$, então $\det N = a^3 \det M = \frac{3a^3}{2} = 96 \Leftrightarrow a^3 = 64 \Leftrightarrow a = 4$.

III. (Verdadeira) Multiplique a 1ª linha de A por a, a 2ª linha de A por b e a 3ª linha de A por c:

$$A = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = abc \cdot A$$

Agora, coloque abc em evidência da 1ª coluna:

$$\begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = abc \cdot B$$

Logo, $abc \cdot A = abc \cdot B \Leftrightarrow A = B$.

IV. (Falsa) Veja que $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$, que só será igual a $A^2 - B^2$ se A e B comutarem.

12)(**Letra C**) Montando a matriz M, temos:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1+1 & 2-1+1 \\ 1-2+1 & 2-2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, vamos verificar o que acontece com as potências de M:

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Indutivamente, podemos ver que $M^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}$, porque esta hipótese é verdadeira para $n = 1$ e, supondo válida para n, temos para $n+1$ que:

$$M^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2(n+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{n} M^k - n\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = M + M^2 + M^3 + \cdots + M^n - \begin{bmatrix} n & 0 \\ n & n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n & 0 \\ n & n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n & 2+4+6+\cdots+2n \\ 0 & n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n & 0 \\ n & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n(n+1) \\ -n & 0 \end{bmatrix}$$

O determinante desta última matriz é 252, portanto:

$$n^2(n+1) = 252 = 6^2 \cdot 7 \Leftrightarrow \boxed{n = 6}$$

13)Em problemas como este, é muito interessante lembrarmos como calcular a inversa de uma matriz A a partir de sua adjunta clássica A^*, definida como sendo a matriz transposta dos cofatores dos elementos de A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$$

Se queremos o elemento a_{23}^{-1} (ou seja, o elemento da 2ª linha e 3ª coluna da inversa de A), iremos olhar para o cofator do elemento a_{32} de A, uma vez que na inversa fazemos a transposição da matriz de cofatores. Assim:

$$a_{23}^{-1} = \frac{1}{\det A}(\text{cof}\, a_{32}) = \frac{1}{3+4-6-24}\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\3 & 1\end{vmatrix} = \boxed{-\frac{11}{23}}$$

14)(**Letra A**) Analisando cada afirmativa:

I. (Verdadeira) Se tanto A quanto sua inversa são matrizes cujas entradas são números inteiros, veja que a definição de determinante é uma soma de produtos de entradas da matriz, logo neste caso o determinante tanto de A quanto de sua inversa serão números inteiros. Ora, sabemos que $A \cdot A^{-1} = I$ e, portanto, $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$. A única forma de um produto de inteiros ser igual a 1 é se cada fator for 1 ou -1. Logo, $|\det A| = 1$.

II. (Falsa) Tome como contraexemplo a matriz $A = \begin{bmatrix}1 & 7\\1 & 6\end{bmatrix}$. Sua inversa é dada por $A^{-1} = \begin{bmatrix}-6 & 7\\1 & -1\end{bmatrix}$ e sua transposta é $A^T = \begin{bmatrix}1 & 1\\7 & 6\end{bmatrix}$, e $A^T \neq A^{-1}$.

III. (Falsa) Use o mesmo contraexemplo anterior: $\begin{bmatrix}1 & 7\\1 & 6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-6 & 7\\1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5 & 14\\2 & 5\end{bmatrix}$, que não é diagonal.

15)(**Letra E**) Analisando cada afirmativa:

I. (Falsa) Tome como contraexemplo as matrizes $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix}$. Veja que $AB = \begin{bmatrix}19 & 22\\43 & 50\end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix}23 & 34\\31 & 46\end{bmatrix}$, porém ambas são inversíveis.

II. (Falsa) Tome como contraexemplo as matrizes $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix}2 & 2\\-1 & -1\end{bmatrix}$. Veja que $AB = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix}4 & 8\\-2 & -4\end{bmatrix}$.

III. (Falsa) Aplicando o operador determinantes na igualdade, temos:

$$\det(A^T) = \det(-A^2) \Leftrightarrow \det A = (-1)^n \cdot (\det A)^2$$

Como $\det A \neq 0$, temos que $\det A = \frac{1}{(-1)^n}$, que será 1 se n for par e -1 se n for ímpar.

16)(**Letra B**) Montando a matriz 2021x2021, teremos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Usando a Regra de Chió, teremos um novo determinante 2020x2020:

$$\begin{vmatrix} 0-1\cdot 1 & 1-1\cdot 1 & \dots & 1-1\cdot 1 \\ 1-1\cdot 1 & 0-1\cdot 1 & \dots & 1-1\cdot 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 1-1\cdot 1 & 1-1\cdot 1 & \dots & 0-1\cdot 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

que é uma matriz diagonal, logo seu determinante é $(-1)^{2020} = \boxed{1}$