Aula 04

Equações Biquadradas, Redutíveis e Irracionais.

EPCAR - 2020

Prof. Ismael Santos

Sumário

1- Introdução ... 3

2 – Equações Biquadradas ... 3

1 - Conceito ... 3

2 – Discussão da Equação Biquadrada ... 7

3 – Equações Redutíveis ao 2º Grau ... 9

3 – Equações Irracionais ... 12

3 – Lista de Questões ... 15

4 – Questões Comentadas ... 26

1- Introdução

Olá, querido aluno!

Agora sim, a matéria começa a ficar mais interessante, rsrsrsrs!!

Os seguintes temas são muito presentes em sua prova, mais especificamente, cai **TODO ANO**. Neste ano, não será diferente, então, foco total! Espero que gostem.

Vamos à nossa aula!

O primeiro dos assuntos é: **Produtos Notáveis.** Tema muito importante para qualquer concurso militar, ainda mais o seu. Desta forma, peço que preste bastante atenção na teoria, além de praticar bastante cada propriedade. Este tópico irá ajudar lá na frente. Não dê mole. Foco total.

2 – Equações Biquadradas

1 - Conceito

Uma equação biquadrada é uma equação da forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad ; \quad a \neq 0$$

Digo já de passagem que não existe uma forma específica de resolução desse tipo de equação, ou seja, teremos que recorrer a nossa querida e famosa Fórmula de Báskara. Se pensarmos em termos de x (variável real), isto não é uma equação do 2º grau, mas é possível fazer o que é chamado de mudança de variável, ou seja, define-se uma outra variável da seguinte maneira: $y = x^2$.

Podemos destacar que, uma equação do 2º grau pode ter até duas raízes reais, já a biquadrada, pode ter até 4 raízes reais.

Usando técnicas de potenciação (elevando ambos os lados ao quadrado), temos: $y^2 = x^4$. Efetuando as devidas substituições teremos uma nova equação chamada de Equação Resolvente. Veja:

$$ay^2 + by + c = 0$$

Cujas soluções são: $y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, agora usando que $y = x^2$ temos as seguintes soluções em x

$$x_1 = \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

01. Resolva $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Comentário:

Fazendo $y = x^2$, temos que $y^2 - 13y + 36 = 0$ (equação resolvente), cujas raízes são:

$$y = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4.1.36}}{2.1} =$$

$$\frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

$$y_1 = \frac{13+5}{2} = 9$$

$$y_2 = \frac{13-5}{2} = 4$$

Logo,

$$\begin{array}{ll} x^2 = 9 & \Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -3 \\ x^2 = 4 & \Rightarrow x_3 = 2; x_4 = -2 \end{array}$$

Conjunto Solução: $S = \{-3, -2, 2, 3\}$

---

02. Resolva $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

Comentário:

$y = x^2 \Rightarrow y^2 - 3y + 4 = 0$ (equação resolvente)

$$y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.(-4)}}{2.1} =$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$y_1 = \frac{3+5}{2} = 4$$

$$y_2 = \frac{3-5}{2} = -1$$

Logo:

$x^2 = 4 \quad \Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -3$

$x^2 = -2 \quad \Rightarrow x_3 \quad x_4 \quad$ *não são números reais*

Conjunto Solução: $S = \{3, -3\}$

---

03. Resolva $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

Comentário:

$y = x^2 \Rightarrow y^2 + 3y + 2 = 0$

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.2}}{2.1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$y_1 = \frac{-3+1}{2} = -1$$

$$y_2 = \frac{-3-1}{2} = -2$$

$$\begin{matrix} x^2 = -1 \\ x^2 = -2 \end{matrix} \Rightarrow x_1 \text{ e } x_2 \text{ não são números reais } ; \ x_3 \text{ e } x_4 \text{ não são números reais}$$

Essa equação não possui soluções reais.

---

04. Resolva $x^4 - x^2 + 5 = 0$

Comentário:

$y = x^2 \Rightarrow y^2 + 3y + 2 = 0$

$$y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.5}}{2.1} =$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-20}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2}$$

Como não existem soluções reais para a equação em y, também não possuímos soluções reais para a equação em x.

---

2 – Discussão da Equação Biquadrada

Pelos exemplos acima, nota-se que o número de raízes depende do valor do descriminante e dos sinais das raízes da equação reduzida.

Lembre-se que os sinais das raízes de uma equação podem ser dados pela soma e produto desta equação.

Valor do Descriminante	Sinais de Soma e Produto	Número de Raízes
$\Delta > 0$	$P > 0$ e $S > 0$	4 raízes reais
$\Delta > 0$	$P > 0$ e $S < 0$	Nenhuma raiz real
$\Delta > 0$	$P < 0$	2 raízes reais
$\Delta < 0$	-------------------	Nenhuma raiz real
$\Delta = 0$	$S > 0$	Duas raízes reais
$\Delta = 0$	$S < 0$	Nenhuma raiz real

A soma das raízes de uma equação biquadrada será sempre ZERO (nula). Pois as raízes são simétricas duas a duas.

O produto de todas as raízes de uma equação biquadrada será sempre: c/a.

A soma dos quadrados das raízes (as duas positivas ou as duas negativas), será sempre da forma: -b/a

3 – Equações Redutíveis ao 2º Grau

Existem outras equações que podem ser reduzidas ao 2º grau quando fazemos substituições adequadas (troca de variável). Essas equações podem ser irracionais ou até mesmo fracionárias.

Nesta parte, temos sempre que os atentar para as limitações das soluções, ou seja, tudo que você encontra para valores das raízes são POSSÍVEIS RAÍZES (candidatas). Temos sempre que nos atentar em testar as possíveis soluções.

---

05. Resolva a equação $x-4\sqrt{x}+3=0$

Comentário:

Primeiramente, notamos que esta equação não pode conter raízes negativas, já que existe um valor de x dentro da raiz quadrada. Isso é o que chamamos de condição de existência da equação. Preste muito atenção nisso: CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA.

Agora, vamos chamar $y=\sqrt{x},$ e teremos $x=y^2.$ Substituindo teremos:

$$y^2-4y+3=0\Rightarrow$$
$$y=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4.1.3}}{2}\Rightarrow$$

$$y=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}$$

$$y=3$$
$$ou$$
$$y=1$$

Mas como $y=\sqrt{x},$ temos $x=9$ ou $x=1$

---

06. Resolva a equação $x^2+x+1=\frac{156}{x^2+x}$

Comentário:

Faça $y=x^2+x,$ logo a equação original será:

$$y+1=\frac{156}{y}\Rightarrow y^2+y-156=0$$

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-156)}}{2}$$

$$y=\frac{-1\pm 25}{2}$$

$$y=12$$
$$ou$$
$$y=-13$$

Agora voltamos às substituições:

$$y=-13\Rightarrow x^2+x=-13$$
$$x^2+x+13=0$$
$$\Delta=1-4.13<0$$

Este caso não gera raízes reais

Ou

$$y=12\Rightarrow x^2+x=12$$
$$x^2+x-12=0$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(-12)}}{2}\Rightarrow$$
$$x=3$$
$$ou$$
$$x=-4$$

---

07. Resolva $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1=0$

Comentário:

Efetuando a multiplicação do primeiro com o último termo e dos dois termos centrais, temos:

$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+1=0$

Uma substituição inteligente neste momento será: $y=x^2-5x+5$

Logo, a equação original será:

$$(y-1)(y+1)+1=0$$
$$y^2-1+1=0$$
$$y=0$$

Substituindo:

$$y=0$$
$$x^2-5x+5=0$$
$$x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$$

3 – Equações Irracionais

São chamadas de equações irracionais as equações que envolvem raízes de algumas de suas variáveis, ou seja, equação que possui dentro de um radical a variável “x”. Podemos destacar alguns exemplos, como:

$$\sqrt{x+4}=0$$
$$\sqrt[3]{2x}=2$$
$$\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=8$$

Observe que, de forma genérica, podemos ter:

$$\sqrt[2n]{f(x)}=g(x)\Rightarrow f(x)\geq 0 \quad g(x)\geq 0$$
$$\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)}\Rightarrow f(x)\geq 0 \quad g(x)\geq 0$$
$$\sqrt[2n+1]{f(x)}=\sqrt[2n+1]{g(x)}\Rightarrow f(x) \quad e \quad g(x) \quad qualquer \quad \sin al$$

Ou seja, quando o índice do radical for par, temos que ter dentro e for a do radial uma condição de existência (não negativo). No entanto, se o índice do radical for ímpar, os termos dentro do radical podem assumir qualquer valor, seja ele positivo ou não positivo.

A técnica básica para resolver este tipo de equação é:

- **Isolar o radical em um dos lados da igualdade.**
- **Elevar nos dois lados ao expoente que aparece no radicando.**
- **Elevar, novamente, caso continue algum radical.**
- **Resolver a equação encontrada.**
- **Testar as raízes na equação original.**

Se, ao resolver a equação irracional, encontrarmos uma igualdade, então, a equação terá infinitas soluções, ou seja, qualquer número real fará parte do conjunto solução. Porém, se encontrarmos uma desigualdade, o conjunto solução será vazio.

---

01. Quantas raízes reais tem a equação $\sqrt{x+20}=x$?

a) nenhuma

b) uma

c) duas, as quais são positivas

d) duas, as quais são negativas

e) duas, as quais têm sinais opostos.

Comentário: Fazendo pelo método tradicional, ou seja, resolvendo e testando as raízes, temos:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x+20}=x\\
&x+20=x^2\\
&x^2-x-20=0\\
&x=-4\\
&x=5
\end{aligned}$$

Testando os valores:

$\sqrt{-4+20}=-4$ (falso)

$\sqrt{5+20}=5$ (verdadeiro)

---

02. Qual é a solução, no conjunto dos números reais, da equação $\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}=x$?

a) $x=\dfrac{1}{2}$

b) $x=-1$

c) $x=1$

d) $x=-1$ ou $x=\dfrac{1}{2}$

e) $x=-\dfrac{1}{2}$

Comentário:

Esta equação só fará sentido se o valor que está dentro da raiz for positivo, bem como o valor que está igualado à esta raiz, assim, as raízes devem satisfazer:

$x\geq 0$ e $\dfrac{1-x}{2}\geq 0$

$x\geq 0$ e $1-x\geq 0$

$0\leq x\leq 1$

Agora podemos resolver a equação:

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}}=x$$

$$\frac{1-x}{2}=x^2$$

$$2x^2+x-1=0$$
$$x=-1$$
$$x=\frac{1}{2}$$

Como somente $x=\dfrac{1}{2}$ satisfaz às condições, temos que esta é a única solução.

3 – Lista de Questões

1. (Epcar (Cpcar) 2019) Sobre o conjunto solução, na variável x, $x \in \mathbb{R}$, da equação $x+2=\sqrt{x^2+2\sqrt{4x^2+8x+2}}$, pode-se dizer que

a) é vazio.

b) possui somente um elemento.

c) possui dois elementos de sinais iguais.

d) possui dois elementos de sinais opostos.

---

2. (Utfpr 2018) Assinale a alternativa que apresenta a solução da equação biquadrada $x^4+x^2-6=0$, no conjunto dos números reais.

a) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

b) $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

c) $\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$.

d) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right\}$.

e) $\left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$.

---

3. (Epcar (Cpcar) 2017) Sobre a equação $\frac{2}{x+\sqrt{2-x^2}}+\frac{2}{x-\sqrt{2-x^2}}=x$, respeitando sua validade no universo dos números reais, analise as afirmativas.

I. Possui duas raízes irracionais.

II. Não possui raízes negativas.

III. Possui conjunto solução com um único elemento.

Pode-se afirmar, então, que

a) todas são verdadeiras.

b) apenas a I é falsa.

c) todas são falsas.

d) apenas a III é verdadeira.

---

4. (Pucrj 2017) Sabemos que $(\sqrt{1+c})(\sqrt{1-c})=1.$

Assinale o valor de $c.$

a) 2

b) $\frac{1}{2}$

c) 1

d) 0

e) $\frac{1}{3}$

---

5. (Espm 2017) A soma das raízes da equação $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{6}$ é igual a:

a) 1

b) 4

c) -3

d) 0

e) -1

---

6. (Ifsul 2016) Equações biquadradas é uma equação escrita da seguinte forma geral:

$ax^4+bx^2+c=0.$

Para encontrarmos as suas raízes, é preciso transformá-las em uma equação do segundo grau, que pode ser resolvida pela fórmula de Bhaskara Akaria (matemático que viveu na Índia meados do século XII).

Portanto a soma das raízes da equação $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ é

a) 0

b) -10

c) 2

d) 9

---

7. (Utfpr 2016) Considerando que o valor da raiz positiva da equação $x^4 + 16 = 8x^2$ é numericamente igual a $1/21$ da minha idade, assinale quantos anos tenho.

a) 21.

b) 41.

c) 42.

d) 81.

e) 82.

---

8. (Ifsc 2016) Considerando-se a equação $E = \left(\sqrt[2]{x^2 - 7x + 12} = 2\sqrt{3}\right)$, sendo $U = \mathbb{R}$, é **CORRETO** afirmar que o seu conjunto solução será:

a) $S = \{7\}$.

b) $S = \{0, -7\}$.

c) $S = \{0\}$.

d) $S = \{0, 7\}$.

e) $S = \{2, 3\}$.

---

9. (Ita 2015) Considere a equação $\frac{a}{1-x^2} - \frac{b}{x-1/2} = 5,$ com a e b números inteiros positivos. Das afirmações:

I. Se $a = 1$ e $b = 2,$ então $x = 0$ é uma solução da equação.

II. Se x é solução da equação, então $x \neq \frac{1}{2},$ $x \neq -1$ e $x \neq 1.$

III. $x = \frac{2}{3}$ não pode ser solução da equação.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas II.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

---

10. (Uece 2015) O conjunto das soluções da equação $\sqrt{3x-2} = \sqrt{x} + 2$ é formado por

a) uma única raiz, a qual é um número real.

b) duas raízes reais.

c) duas raízes complexas.

d) uma raiz real e duas complexas.

---

11. (Espm 2014) As soluções da equação $\frac{x+3}{x-1} = \frac{3x+1}{x+3}$ são dois números:

a) primos

b) positivos

c) negativos

d) pares

e) ímpares

---

12. (Utfpr 2014) O conjunto solução S da equação $\sqrt{x+3} = x-3,$ é:

a) $S = \{6\}.$

b) $S = \{1, 6\}.$

c) $S = \{3\}.$

d) $S = \varnothing.$

e) $S = \{4\}.$

---

13. (Col. naval 2014) A solução real da equação $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 5$ é:

a) múltiplo de 3.

b) par e maior do que 7.

c) ímpar e não primo.

d) um divisor de 130.

e) uma potência de 2.

---

14. (Epcar (Cpcar) 2013) A equação $x = \sqrt{3x + a^2 + 3a},$ em que x é a incógnita e $a \in \mathbb{R}$ tal que $a < -3,$ possui conjunto solução S, $S \subset \mathbb{R}.$

Sobre S tem-se as seguintes proposições:

I. Possui exatamente dois elementos.

II. Não possui elemento menor que 2.

III. Possui elemento maior que 3.

Sobre as proposições acima, são verdadeiras

a) apenas I e II.

b) apenas I e III.

c) apenas II e III.

d) I, II e III.

---

15. (Espm 2013) A solução da equação $\frac{x-2}{x+1}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x^2-1}$ pertence ao intervalo:

a) [−3, −1[

b) [−1, 1[

c) [1, 3[

d) [3, 5[

e) [5, 7[

---

16. (Epcar (Cpcar) 2012) O conjunto solução da equação $-x+\sqrt{7+\frac{x}{2}}=-14$ está contido em

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 10 < x < 18\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 17 < x < 25\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 24 < x < 32\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 31 < x < 39\}$

---

17. (Utfpr 2012) A equação irracional $\sqrt{9x-14}=2$ resulta em x igual a:

a) –2.

b) –1.

c) 0.

d) 1.

e) 2.

---

18. (Col. naval 2011) Dois números reais não simétricos são tais que a soma de seus quadrados é 10 e o quadrado de seu produto é 18. De acordo com essas informações, a única opção que contém pelo menos um desses dois números é:

a) $\{x \in \Re \mid -1 \leq x \leq 1\}$

b) $\{x \in \Re \mid 1 \leq x \leq 3\}$

c) $\{x \in \Re \mid 3 \leq x \leq 5\}$

d) $\{x \in \Re \mid 5 \leq x \leq 7\}$

e) $\{x \in \Re \mid 7 \leq x \leq 9\}$

---

19. (Pucrj 2008) O número de soluções da equação x = $\sqrt{(6 - x)}$, com x > 0, é igual a:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

---

20. (Cftce 2007) As raízes da equação $\sqrt{x+2} = \sqrt{3x-5} - 1$ são respectivamente:

a) 2 e 5

b) 3 e 7

c) 2 e 6

d) 7

e) 7 e 9

---

21. (CN 2011) No conjunto dos números reais, o conjunto solução da equação $\sqrt[4]{(2x+1)^4} = 3x+2$

(A) é vazio.

(B) é unitário.

(C) possui dois elementos.

(D) possui três elementos.

(E) possui quatro elementos.

---

22. (CN 2012) A quantidade de soluções reais e distintas da equação $3x^3 - \sqrt{33x^3 + 97} = 5$ é

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 5

(E) 6

---

23. A soma das duas maiores raízes da equação $81x^4 - 45x^2 + 4 = 0$ é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

---

24. O produto das duas maiores raízes da equação $(x^4 + a^4) - (x^2 - a^2) = 2a \cdot (a^2 + ax^2 - x^2)$, onde $0 < a < 1$, é igual a:

a) a^2

b) $a - a^2$

c) $-(a - 1)^2$

d) $(a - 1)^2$

e) $a + a^2$

---

25. (AFA 1998) A solução da equação $3 + 3^{1,5}x^{0,5} = \sqrt{48x}$ é

a) 3^{-1}

b) $3^{-\frac{1}{2}}$

c) $3^{\frac{1}{2}}$

d) 3

26. (AFA 1999) O número de raízes reais da equação $x^2-2x-13=5\sqrt{x^2-2x-7}$ é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 4

27. (CMRJ 2003) A respeito da equação $\sqrt{x+1}=x$, é verdadeiro afirmar que:

a) possui uma só raiz real, que pertence ao intervalo $]0,2[$.

b) possui uma só raiz real, que pertence ao intervalo $[2,+\infty[$.

c) possui duas raízes reais, cuja soma é 1.

d) possui duas raízes reais, cujo produto é um número racional.

e) possui duas raízes reais simétricas.

28. (CMRJ 2006) Sabendo-se que $\frac{x^2+y^2+2x+2xy+2y-15}{x+y-3}=13$, determine $x+y$.

a) 3

b) 5

c) 7

d) 8

e) 11

29. (CMRJ 2012) Resolvendo a equação $x^2-6x+9=4\sqrt{x^2-6x+6}$, encontramos para soma das raízes inteiras o valor:

(A) 6

(B) 7

(C) 8

(D) 9

(E) 10

30. (EPCAR 2000) Em $\mathbb{R}$, o produto dos elementos do conjunto verdade da equação $x^4-5a^2x^2+4a^4=0$ na variável x, em que $a\in\mathbb{R}_+^*$, é

a) $-4a^4$

b) $16a^8$

c) $4a^4$

d) $2a^4$

---

31. (EPCAr 2001) Resolvendo em $\mathbb{R}$ a equação $(1+x)(1-x)=\sqrt{1-x^2}$, tem-se que o conjunto solução S

a) é subconjunto dos naturais.

b) apresenta algum número irracional.

c) possui duas de suas raízes opostas.

d) tem raízes cujo produto é igual a 1.

---

32. (EPCAr 2002) O produto das raízes da equação $7+\sqrt{x^2-1}=x^2$ é

a) –50

b) –10

c) –5

d) 50

---

33. (EPCAr 2003) Analise as proposições abaixo classificando-as em V (verdadeira) ou F (falsa).

I) Considerando $m \leq -1$ ou $m \geq 1$, ao resolver a equação $my^2-(1+m^2)y+m=0$ encontra-se $y=m^{-1}$ ou $y=m$.

II) Existem dois valores reais distintos de x que satisfazem a equação $3+\sqrt{2x^2-4x+9}=2x$.

III) A equação $\sqrt{\frac{x^4-1}{15}}=1$ tem duas raízes reais cujo produto é -4.

Tem-se

a) V F V

b) V V V

c) F F F

d) F V F

---

34. (EPCAr 2004) O número que expressa a medida da diagonal de um quadrado é a menor raiz positiva da equação $\sqrt{x^2-1}-2x^2+2=0$. A área desse quadrado é, em unidade de área, igual a

a) 0,5

b) 1

c) 2

d) 2,5

---

35. (EPCAr 2005) Resolvendo-se a equação $\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}=2$, encontra-se um número

a) par
b) primo
c) divisor de 81
d) múltiplo de 7

---

36. (EPCAr 2008) Sabendo-se que existem as raízes quadradas expressas na equação (I), de variável x, dada por $\sqrt{x+a}-\sqrt{x}=\sqrt{a}$, $a\in\mathbb{R}$, e que a é a menor raiz da equação (II) dada por $x^2-x=0$, então, pode-se afirmar que o conjunto solução da equação (I) é

a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{R}_+$
c) $\mathbb{R}^*$
d) $\mathbb{R}_+^*$

---

37. (EPCAr 2010) A média aritmética das raízes da equação $\sqrt{a+x}=\sqrt{a}+\sqrt{a-x}$, na incógnita x, $a\in\mathbb{Q}_+^*$, é um número

a) irracional positivo.
b) primo ímpar.
c) múltiplo de 12.
d) divisor par de 30.

---

38. (EPCAr 2011) Se $a\in\mathbb{R}_+^*$ é raiz da equação na incógnita **y**, $\sqrt{1-\sqrt{y^4-y^2}}=y-1$, então

a) $0<a<1$
b) $1<a<\frac{3}{2}$
c) $\frac{3}{2}<a<2$
d) $2<a<\frac{5}{2}$

---

39. (EPCAr 2012) O conjunto solução da equação $-x+\sqrt{7+\frac{x}{2}}=-14$ está contido em

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 10 < x < 18\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 17 < x < 25\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 24 < x < 32\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 31 < x < 39\}$

---

40. (EPCAr 2013) A equação $x=\sqrt{3x+a^2+3a}$, em que x é a incógnita e $a \in \mathbb{R}$ tal que $a < -3$, possui conjunto solução S, $S \subset \mathbb{R}$. Sobre S tem-se as seguintes proposições:

I) Possui exatamente dois elementos.

II) Não possui elemento menor que 2.

III) Possui elemento maior que 3.

Sobre as proposições acima, são verdadeiras

a) apenas I e II.

b) apenas I e III.

c) apenas II e III.

d) I, II e III.

---

4 – Questões Comentadas

1. (Epcar (Cpcar) 2019) Sobre o conjunto solução, na variável x, $x \in \mathbb{R}$, da equação $x+2=\sqrt{x^2+2\sqrt{4x^2+8x+2}}$, pode-se dizer que

a) é vazio.

b) possui somente um elemento.

c) possui dois elementos de sinais iguais.

d) possui dois elementos de sinais opostos.

Comentário:

$$x+2=\sqrt{x^2+2\sqrt{4x^2+8x+2}} \Leftrightarrow (x+2)^2=x^2+2\sqrt{4x^2+8x+2} \Rightarrow X^2+4X+4=x^2+2\sqrt{4x^2+8x+2}$$

$$\Rightarrow 2x+2=\sqrt{4x^2+8x+2} \Rightarrow (2x+2)^2=\sqrt{4x^2+8x+2}^{\,2} \Rightarrow 4x^2+4x+4=4x^2+8x+2 \Rightarrow 4=2 \text{ (absurdo!)}$$

Portanto, o conjunto solução é vazio.

Gabarito: A

---

2. (Utfpr 2018) Assinale a alternativa que apresenta a solução da equação biquadrada $x^4+x^2-6=0$, no conjunto dos números reais.

a) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

b) $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

c) $\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$.

d) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right\}$.

e) $\left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$.

Comentário:

$$x^4+x^2-6=0$$

Considerando $x^2=y$, temos:

$$y^2 - y - 6 = 0$$
$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$$
$$\Delta = 25$$
$$y = \frac{-1 \pm 5}{2}$$
$$y = \frac{-1+5}{2} = 2 \text{ ou } y = \frac{-1-5}{2} = -3$$

Fazendo $x^2 = y,$ temos:

$x^2 = -3$ (x não é real)
$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Gabarito: C

---

3. (Epcar (Cpcar) 2017) Sobre a equação $\frac{2}{x+\sqrt{2-x^2}} + \frac{2}{x-\sqrt{2-x^2}} = x,$ respeitando sua validade no universo dos números reais, analise as afirmativas.

I. Possui duas raízes irracionais.

II. Não possui raízes negativas.

III. Possui conjunto solução com um único elemento.

Pode-se afirmar, então, que

a) todas são verdadeiras.

b) apenas a I é falsa.

c) todas são falsas.

d) apenas a III é verdadeira.

Comentário:

Condição de Existência:

$$\begin{cases} x + \sqrt{2-x^2} \neq 0 \\ x - \sqrt{2-x^2} \neq 0 \\ 2 - x^2 > 0 \end{cases}$$

Resolvendo a equação, temos:

$$\frac{2}{x+\sqrt{2-x^2}}+\frac{2}{x-\sqrt{2-x^2}}=x\Rightarrow$$

$$\frac{2\cdot\left(x-\sqrt{2-x^2}\right)+2\cdot\left(x+\sqrt{2-x^2}\right)}{\left(x+\sqrt{2-x^2}\right)\cdot\left(x-\sqrt{2-x^2}\right)}=\frac{x\cdot\left(x+\sqrt{2-x^2}\right)\cdot\left(x-\sqrt{2-x^2}\right)}{\left(x+\sqrt{2-x^2}\right)\cdot\left(x-\sqrt{2-x^2}\right)}\Rightarrow$$

$$\frac{4x}{\left(x+\sqrt{2-x^2}\right)\cdot\left(x-\sqrt{2-x^2}\right)}=\frac{2x^3-2z}{\left(x+\sqrt{2-x^2}\right)\cdot\left(x-\sqrt{2-x^2}\right)}\Rightarrow$$

$$2x^3-6x=0\Rightarrow 2x\cdot\left(x^3-3\right)=0\Rightarrow x=0\ \text{ ou }\ x=\pm\sqrt{3}$$

Considerando $x=0,$ a condição de existência é verificada, mas para $x=\pm\sqrt{3}$ a condição $2-x^2>0$ não é verificada, pois $2-\left(\pm\sqrt{3}\right)^2<0.$

Logo, o conjunto solução desta equação será dado por: $S=\{0\}.$

Estão corretas as afirmações [II] e [III]. Apenas a [I] é falsa.

Gabarito: B

---

4. (Pucrj 2017) Sabemos que $(\sqrt{1+c})(\sqrt{1-c})=1.$

Assinale o valor de $c.$

a) 2

b) $\frac{1}{2}$

c) 1

d) 0

e) $\frac{1}{3}$

Comentário:

De $\sqrt{1+c}$ e $\sqrt{1-c}$,

$1+c \geq 0$ e $1-c \geq 0$, ou seja, $c \geq -1$

De $\left(\sqrt{1+c}\right)\cdot\left(\sqrt{1-c}\right)=1$,

$$\sqrt{(1+c)\cdot(1-c)}=1$$
$$\sqrt{1^2-c^2}=1$$
$$1-c^2=1$$
$$c^2=0$$
$$c=0$$

Gabarito: D

---

5. (Espm 2017) A soma das raízes da equação $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{6}$ é igual a:

a) 1

b) 4

c) -3

d) 0

e) -1

Comentário:

Sendo $x \neq -1$ e $x \neq 0$, temos

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{6} \Rightarrow 6(x+1)-6x=x(x+1)$$
$$\Leftrightarrow x^2+x-6=0.$$

Portanto, pelas Relações de Girard, segue que o resultado é -1.

Gabarito: E

6. (Ifsul 2016) Equações biquadradas é uma equação escrita da seguinte forma geral:

$ax^4 + bx^2 + c = 0.$

Para encontrarmos as suas raízes, é preciso transformá-las em uma equação do segundo grau, que pode ser resolvida pela fórmula de Bhaskara Akaria (matemático que viveu na Índia meados do século XII).

Portanto a soma das raízes da equação $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ é

a) 0

b) -10

c) 2

d) 9

Comentário:

Pelas Relações de Girard:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} = -\frac{0}{1} = 0$$

Ou ainda:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$
$$x^2 = y$$
$$y^2 - 10y + 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 1 \rightarrow x = \pm 1 \\ y = 9 \rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

Gabarito: A

7. (Utfpr 2016) Considerando que o valor da raiz positiva da equação $x^4 + 16 = 8x^2$ é numericamente igual a $1/21$ da minha idade, assinale quantos anos tenho.

a) $21.$

b) $41.$

c) 42.

d) 81.

e) 82.

Comentário:

$$x^4+16=8x^2 \to x^4-8x^2+16=0$$
$$x^2=y \to y^2-8y+16=0 \to y=x^2=4 \to x=\pm 2$$
$$2=\frac{\text{idade}}{21} \to \text{idade}=42$$

Gabarito: C

---

8. (Ifsc 2016) Considerando-se a equação $E=\left(\sqrt[2]{x^2-7x+12}=2\sqrt{3}\right)$, sendo $U=\mathbb{R}$, é **CORRETO** afirmar que o seu conjunto solução será:

a) $S=\{7\}$.

b) $S=\{0,-7\}$.

c) $S=\{0\}$.

d) $S=\{0,7\}$.

e) $S=\{2,3\}$.

Comentário:

$$\sqrt{x^2-7x+12}=2\sqrt{3} \Rightarrow \left(\sqrt{x^2-7x+12}\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-7x+12=12 \Rightarrow x^2-7x=0 \Rightarrow x=0 \text{ ou } x=7$$

Portanto, $S=\{0,7\}$.

Gabarito: D

---

9. (Ita 2015) Considere a equação $\frac{a}{1-x^2}-\frac{b}{x-1/2}=5,$ com a e b números inteiros positivos. Das afirmações:

I. Se $a=1$ e $b=2,$ então $x=0$ é uma solução da equação.

II. Se x é solução da equação, então $x \neq \frac{1}{2},$ $x \neq -1$ e $x \neq 1.$

III. $x=\frac{2}{3}$ não pode ser solução da equação.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas II.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

Comentário:

[I] Verdadeira. Fazendo $a=1,$ $b=2$ e $x=0,$ temos:

$$\frac{1}{1}-\frac{2}{0-\frac{1}{2}}=1+4=5$$

[II] Verdadeira. Determinando a condição de existência para uma raiz, temos:

$$1-x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \text{ e } x \neq -1$$

$$x-\frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

[III] Verdadeira. Fazendo $x=\frac{2}{3},$ temos:

$$\frac{a}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}-\frac{b}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=5$$

$$\frac{a}{\frac{5}{9}}-\frac{b}{\frac{1}{6}}=5$$

$$\frac{9a}{5}-6b=5$$

$$9a-30b=25$$

$$3\cdot(3a-10b)=25$$

Como a e b são números inteiros, concluímos que 25 é múltiplo de 3, o que é um absurdo.

Portanto, $\frac{2}{3}$ não pode ser raiz dessa equação.

Gabarito: E

---

10. (Uece 2015) O conjunto das soluções da equação $\sqrt{3x-2}=\sqrt{x}+2$ é formado por

a) uma única raiz, a qual é um número real.

b) duas raízes reais.

c) duas raízes complexas.

d) uma raiz real e duas complexas.

Comentário:

Tem-se que

$$\begin{aligned}\sqrt{3x-2}=\sqrt{x}+2 &\Rightarrow 3x-2=x+4\sqrt{x}+4\\ &\Rightarrow x-3=2\sqrt{x}\\ &\Rightarrow x^2-10x+9=0\\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=9.\end{aligned}$$

Substituindo na equação original, concluímos que apenas $x=9$ é solução. Portanto, a equação possui uma única raiz, a qual é um número real.

Gabarito: A

---

11. (Espm 2014) As soluções da equação $\frac{x+3}{x-1}=\frac{3x+1}{x+3}$ são dois números:

a) primos

b) positivos

c) negativos

d) pares

e) ímpares

Comentário:

Tem-se que:

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{x-1}=\frac{3x+1}{x+3} &\Leftrightarrow x^2+6x+9=3x^2-3x+x-1\\ &\Leftrightarrow x^2-4x-5=0\\ &\Leftrightarrow x=5 \text{ ou } x=-1.\end{aligned}$$

Portanto, as soluções da equação são dois números ímpares.

Gabarito: E

---

12. (Utfpr 2014) O conjunto solução S da equação $\sqrt{x+3}=x-3,$ é:

a) $S=\{6\}.$

b) $S=\{1, 6\}.$

c) $S=\{3\}.$

d) $S=\varnothing.$

e) $S=\{4\}.$

Comentário:

$$\sqrt{x+3}^2=(x-3)^2$$
$$x+3=x^2-6x+9$$
$$x^2-7x+6=0$$

Logo, x = 1 ou x = 6.

Verificação:

x = 1: $\sqrt{1+3} = -2$ (não convém)

x = 6: $\sqrt{6+3} = 3$ (convém)

Logo, o conjunto solução da equação é $S = \{6\}$.

Gabarito: A

13**.** (Col. naval 2014) A solução real da equação $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 5$ é:

a) múltiplo de 3.

b) par e maior do que 7.

c) ímpar e não primo.

d) um divisor de 130.

e) uma potência de 2.

Comentário:

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 5$$
$$\sqrt{x+4} = 5 - \sqrt{x-1}$$
$$\left(\sqrt{x+4}\right)^2 = \left(5 - \sqrt{x-1}\right)^2$$
$$x + 4 = 25 - 10 \cdot \sqrt{x+1} + x - 1$$
$$10 \cdot \sqrt{x+1} = 20$$
$$\sqrt{x+1} = 2$$
$$x = 1 = 4$$
$$x = 5$$

Portanto, é correta a alternativa [D], um divisor de 130.

Gabarito: D

14. (Epcar (Cpcar) 2013) A equação $x=\sqrt{3x+a^2+3a}$, em que x é a incógnita e $a \in \mathbb{R}$ tal que $a<-3$, possui conjunto solução S, $S \subset \mathbb{R}$.

Sobre S tem-se as seguintes proposições:

I. Possui exatamente dois elementos.

II. Não possui elemento menor que 2.

III. Possui elemento maior que 3.

Sobre as proposições acima, são verdadeiras

a) apenas I e II.

b) apenas I e III.

c) apenas II e III.

d) I, II e III.

Comentário:

Condição: $x \geq 0$

$$x=\sqrt{3x+a^2+3a} \Rightarrow x^2=3x+a^2+3\cdot a \Rightarrow x^2-3x-\left(a^2+3\cdot a\right)=0$$

Resolvendo a equação na incógnita x, temos: $x=\dfrac{3\pm 2a+3}{2}\left\langle\begin{array}{l} x=a+3 \\ x=-a \end{array}\right.$

Como a + 3 < 0, concluímos que x = –a é a única solução possível.

Portanto, o conjunto solução possui apenas uma solução x = –a, contrariando a afirmação I.

Para a < –3, temos –a maior que 3; logo, as afirmações II e III estão corretas.

Gabarito: C

15. (Espm 2013) A solução da equação $\frac{x-2}{x+1}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x^2-1}$ pertence ao intervalo:

a) [−3, −1[

b) [−1, 1[

c) [1, 3[

d) [3, 5[

e) [5, 7[

Comentário:

Sendo $U=\mathbb{R}-\{-1,1\}$ o conjunto universo das soluções, vem

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x+1}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x^2-1} &\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-1)+3}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+1+x}{(x-1)(x+1)}\\ &\Rightarrow x^2-3x+5=2x+1\\ &\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\\ &\Rightarrow x=4.\end{aligned}$$

Portanto, $4\in[3,5[$.

Gabarito: D

16. (Epcar (Cpcar) 2012) O conjunto solução da equação $-x+\sqrt{7+\frac{x}{2}}=-14$ está contido em

a) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,10<x<18\}$

b) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,17<x<25\}$

c) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,24<x<32\}$

d) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,31<x<39\}$

Comentário:

$-x+\sqrt{7+\frac{x}{2}}=-14\Rightarrow\sqrt{7+\frac{x}{2}}=x-14\Rightarrow 7+\frac{x}{2}=(x-14)^2=7+\frac{x}{2}=x^2-28x+196\Rightarrow$
$2x^2-57x+378=0$

Resolvendo a equação, temos: x = 18 ou x = 10,5 ão convém, pois 10,5 – 14 < 0).

Portanto, o conjunto {18} está contido em $\{x\in\mathbb{R}\,|\,17<x<25\}$.

Gabarito: B

17. (Utfpr 2012) A equação irracional $\sqrt{9x-14}=2$ resulta em x igual a:

a) –2.

b) –1.

c) 0.

d) 1.

e) 2.

Comentário:

$\sqrt{9x-14}=2\Rightarrow 9x-14=4\Rightarrow 9x=18\Rightarrow x=2.$

Verificação:

$\sqrt{9\cdot 2-14}=2(V).$

Logo, x = 2 é solução da equação.

Gabarito: E

18. (Col. naval 2011) Dois números reais não simétricos são tais que a soma de seus quadrados é 10 e o quadrado de seu produto é 18. De acordo com essas informações, a única opção que contém pelo menos um desses dois números é:

a) $\{x\in\Re\,|\,-1\le x\le 1\}$

b) $\{x \in \Re | 1 \le x \le 3\}$

c) $\{x \in \Re | 3 \le x \le 5\}$

d) $\{x \in \Re | 5 \le x \le 7\}$

e) $\{x \in \Re | 7 \le x \le 9\}$

Comentário:

Sejam a e b dois números reais não simétricos.

De acordo com as informações do enunciado, obtemos o sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ (a \cdot b)^2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ b^2 = \dfrac{18}{a^2} \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} a^2 + \frac{18}{a^2} = 10 &\Rightarrow a^4 - 10a^2 + 18 = 0 \\ &\Rightarrow (a^2 - 5)^2 = 7 \\ &\Rightarrow a^2 = 5 \pm \sqrt{7} \\ &\Rightarrow a = \pm\sqrt{5 \pm \sqrt{7}}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} b^2 = \frac{18}{a^2} \Rightarrow b^2 &= \frac{18}{5 \pm \sqrt{7}} \cdot \frac{5 \mp \sqrt{7}}{5 \mp \sqrt{7}} = \frac{18(5 \mp \sqrt{7})}{18} \\ &\Rightarrow b = \pm\sqrt{5 \pm \sqrt{7}}. \end{aligned}$$

Como $\sqrt{7} \cong 2{,}6$, $\pm\sqrt{5+\sqrt{7}} \cong \pm\sqrt{5+2{,}6} \cong \pm\sqrt{7{,}6}$ e $\pm\sqrt{5-\sqrt{7}} \cong \pm\sqrt{5-2{,}6} \cong \pm\sqrt{2{,}4}$, então

$$\begin{aligned} &\sqrt{1} < \sqrt{2{,}4} < \sqrt{4} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{2{,}4} < 2, \\ &-\sqrt{4} < -\sqrt{2{,}4} < -\sqrt{1} \Leftrightarrow -2 < -\sqrt{2{,}4} < -1, \\ &\sqrt{4} < \sqrt{7{,}6} < \sqrt{9} \Leftrightarrow 2 < \sqrt{7{,}6} < 3 \text{ e} \\ &-\sqrt{9} < -\sqrt{7{,}6} < -\sqrt{4} \Leftrightarrow -3 < -\sqrt{7{,}6} < -2. \end{aligned}$$

Portanto, como $\sqrt{2{,}4}$ e $\sqrt{7{,}6} \in 1 \le x \le 3,$ segue que a opção correta é a (b).

Gabarito: B

19. (Pucrj 2008) O número de soluções da equação x = $\sqrt{(6 - x)}$, com x > 0, é igual a:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Comentário:

$$x^2 = 6 - x \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -3 \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ x = 2 \end{array} \right.$$

Gabarito: B

20. (Cftce 2007) As raízes da equação $\sqrt{x+2} = \sqrt{3x-5} - 1$ são respectivamente:

a) 2 e 5

b) 3 e 7

c) 2 e 6

d) 7

e) 7 e 9

Comentário:

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{3x-5} - 1$$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos;

$$x+2=3x-5-2\cdot\sqrt{3x-5}+1$$
$$2\cdot\sqrt{3x-5}=2x-6$$
$$\sqrt{3x-5}=x-3$$

Elevando ao quadrado novamente, temos:

$$3x-5=x^2-6x+9$$
$$x^2-6x+9-3x+5=0$$
$$x^2-9x+14=0$$

Resolvendo a equação temos $x=2$ ou $x=7$.

Verificação:

$$x=2\Rightarrow\sqrt{2+2}=\sqrt{3\cdot 2-5}-1\Rightarrow 2=0(\text{falso})$$
$$x=7\Rightarrow\sqrt{7+2}=\sqrt{7\cdot 3-5}-1\Rightarrow 3=3(\text{verdadeiro})$$

Portanto 7 é a única raiz desta equação.

Gabarito: D

---

21. (CN 2011) No conjunto dos números reais, o conjunto solução da equação $\sqrt[4]{(2x+1)^4}=3x+2$
(A) é vazio.
(B) é unitário.
(C) possui dois elementos.
(D) possui três elementos.
(E) possui quatro elementos.

Comentário:

$$\sqrt[4]{(2x+1)^4}=3x+2\Leftrightarrow|2x+1|=3x+2$$

Se $x<-\frac{1}{2}$, então

$$|2x+1|=3x+2\Leftrightarrow-(2x+1)=3x+2\Leftrightarrow x=-\frac{3}{5}$$

Se $x\geq-\frac{1}{2}$, então

$$|2x+1|=3x+2\Leftrightarrow 2x+1=3x+2\Leftrightarrow x=-1$$

(não convém).

Logo, o conjunto solução da equação é $S=\left\{-\frac{3}{5}\right\}$ que é um conjunto unitário.

Gabarito: B

---

22. (CN 2012) A quantidade de soluções reais e distintas da equação $3x^3-\sqrt{33x^3+97}=5$ é

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 5

(E) 6

Comentário:

$$3x^3-\sqrt{33x^3+97}=5 \Leftrightarrow \sqrt{33x^3+97}=3x^3-5$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{33x^3+97}\right)^2=\left(3x^3-5\right)^2 \ \wedge \ 3x^3-5\geq 0$$

A condição $3x^3-5\geq 0 \Leftrightarrow x^3\geq \frac{5}{3}$ será verificada no final.

$$\Leftrightarrow 33x^3+97=9x^6-30x^3+25 \Leftrightarrow x^6-7x^3-8=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^3=-1 \ \vee \ x^3=8$$

Como $x^3\geq\frac{5}{3}$, então $x^3=8 \Leftrightarrow x=2$.

Logo, há apenas uma solução real.

Gabarito: A

---

23. A soma das duas maiores raízes da equação $81x^4-45x^2+4=0$ é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Comentário:

$$81x^4-45x^2+4=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{45\pm\sqrt{2025-4\cdot 81\cdot 4}}{2\cdot 81}=\frac{45\pm 27}{162}$$
$$x^2=\frac{72}{162}=\frac{4}{9}\Rightarrow x=\pm\frac{2}{3}$$
$$x^2=\frac{18}{162}=\frac{1}{9}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{3}$$

Logo, a soma das duas maiores raízes da equação é $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$.

Gabarito: A

---

24. O produto das duas maiores raízes da equação $(x^4+a^4)-(x^2-a^2)=2a\cdot(a^2+ax^2-x^2)$, onde 0 < a < 1, é igual a:

a) a^2

b) $a-a^2$

c) $-(a-1)^2$

d) $(a-1)^2$

e) $a+a^2$

Comentário:

$$\begin{aligned}
&(x^4+a^4)-(x^2-a^2)=2a\cdot(a^2+ax^2-x^2)\\
&\Leftrightarrow x^4+a^4-x^2+a^2=2a^3+2a^2x^2-2ax^2\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow x^4-(2a^2-2a+1)x^2+(a^4-2a^3+a^2)=0\\
&\Leftrightarrow x^4-\left[a^2+(a^2-2a+1)\right]x^2+a^2(a^2-2a+1)=0\\
&\Rightarrow x^2=a^2\Rightarrow x=\pm a\\
&\Rightarrow x^2=(a-1)^2\Rightarrow x=\pm(a-1)
\end{aligned}$$

Como $0<a<1$, as duas maiores raízes da equação são a e $1-a$, e seu produto é $a\cdot(1-a)=a-a^2$.

Gabarito: B

---

25. (AFA 1998) A solução da equação $3+3^{1,5}x^{0,5}=\sqrt{48x}$ é

a) 3^{-1}

b) $3^{-\frac{1}{2}}$

c) $3^{\frac{1}{2}}$

d) 3

Comentário:

$$\begin{aligned}
&3+3^{1,5}x^{0,5}=\sqrt{48x}\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow 3+3\sqrt{3}\cdot\sqrt{x}=4\sqrt{3}\cdot\sqrt{x}\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \sqrt{3}\cdot\sqrt{x}=3\Leftrightarrow\sqrt{x}=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=3
\end{aligned}$$

Gabarito: D

---

26. (AFA 1999) O número de raízes reais da equação $x^2-2x-13=5\sqrt{x^2-2x-7}$ é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 4

Comentário:

$$\sqrt{x^2-2x-7}=y\geq 0\Rightarrow x^2-2x-7=y^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x-13=y^2-6$$
$$x^2-2x-13=5\sqrt{x^2-2x-7}\Leftrightarrow y^2-6=5y\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y^2-5y-6=0\Leftrightarrow \cancel{y=-1}\text{ ou } y=6$$
$$\sqrt{x^2-2x-7}=6\Leftrightarrow x^2-2x-7=36\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x-43=0\Leftrightarrow x=1\pm 2\sqrt{11}$$

Logo, a equação possui duas raízes reais.

Gabarito: C

---

27. (CMRJ 2003) A respeito da equação $\sqrt{x+1}=x$, é verdadeiro afirmar que:

a) possui uma só raiz real, que pertence ao intervalo $]0,2[$.

b) possui uma só raiz real, que pertence ao intervalo $[2,+\infty[$.

c) possui duas raízes reais, cuja soma é 1.

d) possui duas raízes reais, cujo produto é um número racional.

e) possui duas raízes reais simétricas.

Comentário:

$$\sqrt{x+1}=x\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}\right)^2=x^2\ \wedge\ x+1\geq 0\ \wedge\ x\geq 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+1=x^2\ \wedge\ x\geq 0\Leftrightarrow x^2-x-1=0\ \wedge\ x\geq 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\ \wedge\ x\geq 0\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\in\left]0,2\right[$$

Gabarito: A

---

28. (CMRJ 2006) Sabendo-se que $\frac{x^2+y^2+2x+2xy+2y-15}{x+y-3}=13$, determine $x+y$.

a) 3

b) 5

c) 7

d) 8

e) 11

Comentário:

Condição de existência: $x+y-3\neq 0 \Leftrightarrow x+y\neq 3$

$$\frac{x^2+y^2+2x+2xy+2y-15}{x+y-3}=13 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2+2(x+y)-15=13(x+y)-39 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^2-11(x+y)+24=0$$

Efetuando a substituição $z=x+y$, resulta a equação $z^2-11z+24=0 \Leftrightarrow z=3 \vee z=8$.

Assim, $x+y=3$ ou $x+y=8$, mas pela condição de existência $x+y\neq 3$, portanto $x+y=8$.

Gabarito: D

---

29. (CMRJ 2012) Resolvendo a equação $x^2-6x+9=4\sqrt{x^2-6x+6}$, encontramos para soma das raízes inteiras o valor:

(A) 6

(B) 7

(C) 8

(D) 9

(E) 10

Comentário:

Vamos fazer a substituição

$$\sqrt{x^2-6x+6}=y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+6=y^2 \;\wedge\; x^2-6x+6\geq 0$$

Assim, temos:

$$x^2-6x+9=4\sqrt{x^2-6x+6} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y^2+3=4y \Leftrightarrow y^2-4y+3=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y=1 \vee y=3$$

Retornando a substituição, vem:

$$y=1 \Rightarrow x^2-6x+6=1^2 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=5$$
$$y=3 \Rightarrow x^2-6x+6=3^2 \Leftrightarrow x^2-6x-3=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2}=3\pm 2\sqrt{3}\notin\mathbb{Z}$$

Logo, a soma das raízes inteiras é $1+5=6$.

Gabarito: A

---

30. (EPCAR 2000) Em $\mathbb{R}$, o produto dos elementos do conjunto verdade da equação $x^4-5a^2x^2+4a^4=0$ na variável x, em que $a\in\mathbb{R}_+^*$, é

a) $-4a^4$

b) $16a^8$

c) $4a^4$

d) $2a^4$

Comentário:

$x^4 - 5a^2x^2 + 4a^4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = a^2 \ \vee \ x^2 = 4a^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \pm a \ \vee \ x = \pm 2a$

O conjunto verdade é $V = \{-2a, -a, a, 2a\}$, cujo produto dos elementos é $(-2a)\cdot(-a)\cdot a \cdot 2a = 4a^4$.

Como todas as raízes são reais, esse produto poderia ser obtido aplicando a relação de Girard na equação original $(-1)^4 \cdot \frac{4a^4}{1} = 4a^4$.

Gabarito: C

---

31. (EPCAr 2001) Resolvendo em $\mathbb{R}$ a equação $(1+x)(1-x) = \sqrt{1-x^2}$, tem-se que o conjunto solução S

a) é subconjunto dos naturais.

b) apresenta algum número irracional.

c) possui duas de suas raízes opostas.

d) tem raízes cujo produto é igual a 1.

Comentário:

$(1+x)(1-x) = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow (1-x^2)^2 = 1-x^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (1-x^2)(1-x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x^2(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = \pm 1$

$S = \{-1, 0, 1\}$

Portanto, o conjunto solução S possui duas de suas raízes opostas.

Gabarito: C

---

32. (EPCAr 2002) O produto das raízes da equação $7 + \sqrt{x^2 - 1} = x^2$ é

a) –50

b) –10

c) –5

d) 50

Comentário:

$7+\sqrt{x^2-1}=x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=x^2-7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-1=(x^2-7)^2 \ \wedge \ x^2-7\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-1=x^4-14x^2+49 \ \wedge \ x^2\geq 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4-15x^2+50=0 \ \wedge \ x^2\geq 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2=5 \ \vee \ x^2=10) \ \wedge \ x^2\geq 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=10 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{10}$

$S=\{-\sqrt{10},\sqrt{10}\}$

Portanto, o produto das raízes da equação é $(-\sqrt{10})\cdot\sqrt{10}=-10$.

Gabarito: B

---

33. (EPCAr 2003) Analise as proposições abaixo classificando-as em V (verdadeira) ou F (falsa).

I) Considerando $m\leq -1$ ou $m\geq 1$, ao resolver a equação $my^2-(1+m^2)y+m=0$ encontra-se $y=m^{-1}$ ou $y=m$.

II) Existem dois valores reais distintos de x que satisfazem a equação $3+\sqrt{2x^2-4x+9}=2x$.

III) A equação $\sqrt{\dfrac{x^4-1}{15}}=1$ tem duas raízes reais cujo produto é -4.

Tem-se

a) V F V

b) V V V

c) F F F

d) F V F

Comentário:

I) VERDADEIRA

Como $m\leq -1$ ou $m\geq 1$, então $m\neq 0$.

$my^2-(1+m^2)y+m=0 \Leftrightarrow y^2-\left(\dfrac{1}{m}+m\right)y+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{m}=m^{-1} \ \vee \ y=m$

II) FALSA

$3+\sqrt{2x^2-4x+9}=2x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-4x+9}=2x-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x+9=(2x-3)^2 \ \wedge \ 2x-3\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x+9=4x^2-12x+9 \ \wedge \ x\geq \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-4x=0 \ \wedge \ x\geq \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=0 \ \vee \ x=4) \ \wedge \ x\geq \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x=4$

$S=\{4\}$

Portanto, existe um único valor real que satisfaz a equação.

III) VERDADEIRA

$\sqrt{\dfrac{x^4-1}{15}}=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^4-1}{15}=1 \Leftrightarrow x^4=16=2^4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

$S=\{-2,2\}$

Portanto, a equação possui duas raízes reais cujo produto é $(-2)\cdot 2=-4$.

Gabarito: A

---

34. (EPCAr 2004) O número que expressa a medida da diagonal de um quadrado é a menor raiz positiva da equação $\sqrt{x^2-1}-2x^2+2=0$. A área desse quadrado é, em unidade de área, igual a

a) 0,5
b) 1
c) 2
d) 2,5

Comentário:

$$\sqrt{x^2-1}-2x^2+2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=2(x^2-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2-1)=4(x^2-1)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2-1)[4(x^2-1)-1]=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2-1)(4x^2-5)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1 \vee x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Portanto, a menor raiz positiva é $x=1$.

A área do quadrado em função da sua diagonal é $S=\frac{d^2}{2}=\frac{1^2}{2}=0,5 \text{ u.a}$.

Gabarito: A

---

35. (EPCAr 2005) Resolvendo-se a equação $\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}=2$, encontra-se um número

a) par
b) primo
c) divisor de 81
d) múltiplo de 7

Comentário:

Condição de existência:

$$x+4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -4$$
$$x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4$$
$$\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+4}\neq\sqrt{x-4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+4\neq x-4 \Leftrightarrow 4\neq -4 \quad (V)$$

Portanto, a condição de existência resultante é $x\geq 4$.

Na equação original, vamos dividir o numerador e o denominador da fração do lado esquerdo por $\sqrt{x-4}$.

$$\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}=2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\frac{x+4}{x-4}}+1}{\sqrt{\frac{x+4}{x-4}}-1}=2$$

Fazendo $\sqrt{\frac{x+4}{x-4}}=y$, temos:

$\frac{y+1}{y-1}=2 \Leftrightarrow y+1=2y-2 \Leftrightarrow y=3$.

Retornando a substituição, vem:

$\sqrt{\frac{x+4}{x-4}}=3 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x-4}=9 \Leftrightarrow x+4=9x-36 \Leftrightarrow x=5$

$S=\{5\}$

Portanto, a raiz da equação é um número primo.

Gabarito: B

---

36. (EPCAr 2008) Sabendo-se que existem as raízes quadradas expressas na equação (I), de variável x, dada por $\sqrt{x+a}-\sqrt{x}=\sqrt{a}$, $a\in\mathbb{R}$, e que a é a menor raiz da equação (II) dada por $x^2-x=0$, então, pode-se afirmar que o conjunto solução da equação (I) é

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R}_+$

c) $\mathbb{R}^*$

d) $\mathbb{R}_+^*$

Comentário:

(II) $x^2-x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1 \Rightarrow a=0$

(I) $\sqrt{x+a}-\sqrt{x}=\sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{x}-\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow 0=0 \wedge x\geq 0$

Logo, o conjunto solução é $S=\mathbb{R}_+$.

Gabarito: B

---

37. (EPCAr 2010) A média aritmética das raízes da equação $\sqrt{a+x}=\sqrt{a}+\sqrt{a-x}$, na incógnita x, $a\in\mathbb{Q}_+^*$, é um número

a) irracional positivo.

b) primo ímpar.

c) múltiplo de 12.

d) divisor par de 30.

Comentário:

$$\sqrt{a+x}=\sqrt{a}+\sqrt{a-x}\Leftrightarrow\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}=\sqrt{a}$$
$$\Leftrightarrow a+\cancel{x}+\cancel{a}-\cancel{x}-2\sqrt{a^2-x^2}=\cancel{a}\ \wedge\ a+x>a-x\geq 0$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2-x^2}=a\ \wedge\ a\geq x>0$$
$$\Leftrightarrow 4a^2-4x^2=a^2\ \wedge\ a\geq x>0$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{3a^2}{4}\ \wedge\ a\geq x>0$$
$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{a\sqrt{3}}{2}\ \wedge\ a\geq x>0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Como $a\in\mathbb{Q}_+^*$, então a média aritmética das raízes $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ é um número irracional positivo.

Gabarito: A

---

38. (EPCAr 2011) Se $a\in\mathbb{R}_+^*$ é raiz da equação na incógnita **y**, $\sqrt{1-\sqrt{y^4-y^2}}=y-1$, então

a) $0<a<1$

b) $1<a<\frac{3}{2}$

c) $\frac{3}{2}<a<2$

d) $2<a<\frac{5}{2}$

Comentário:

$$\sqrt{1-\sqrt{y^4-y^2}}=y-1\Rightarrow 1-\sqrt{y^4-y^2}=y^2-2y+1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{y^4-y^2}=2y-y^2\Rightarrow y^4-y^2=4y^2-4y^3+y^4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4y^3-5y^2=0\Leftrightarrow y^2(4y-5)=0\Leftrightarrow y=0\text{ ou }y=\frac{5}{4}$$

Testando as raízes encontradas na equação original, concluímos que $y=\frac{5}{4}$, ou seja, $a=\frac{5}{4}$ que satisfaz $1<a<\frac{3}{2}$.

Gabarito: B

---

39. (EPCAr 2012) O conjunto solução da equação $-x+\sqrt{7+\frac{x}{2}}=-14$ está contido em

a) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,10<x<18\}$

b) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,17<x<25\}$

c) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,24<x<32\}$

d) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,31<x<39\}$

Comentário:

$$-x+\sqrt{7+\frac{x}{2}}=-14 \Leftrightarrow \sqrt{7+\frac{x}{2}}=x-14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{7+\frac{x}{2}}\right)^2=(x-14)^2 \ \wedge\ 7+\frac{x}{2}\geq 0 \ \wedge\ x-14\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 7+\frac{x}{2}=x^2-28x+196 \ \wedge\ x\geq -14 \ \wedge\ x\geq 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-57x+378=0 \ \wedge\ x\geq 14$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{57\pm\sqrt{(-57)^2-4\cdot 2\cdot 378}}{2\cdot 2}=\frac{57\pm 15}{4} \ \wedge\ x\geq 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=10{,}5 \ \vee\ x=18) \ \wedge\ x\geq 14$$

$$\Leftrightarrow x=18 \Leftrightarrow S=\{18\}\subset\{x\in\mathbb{R}\,|\,17<x<25\}$$

Gabarito: B

---

40. (EPCAr 2013) A equação $x=\sqrt{3x+a^2+3a}$, em que x é a incógnita e $a\in\mathbb{R}$ tal que $a<-3$, possui conjunto solução S, $S\subset\mathbb{R}$. Sobre S tem-se as seguintes proposições:

I) Possui exatamente dois elementos.

II) Não possui elemento menor que 2.

III) Possui elemento maior que 3.

Sobre as proposições acima, são verdadeiras

a) apenas I e II.

b) apenas I e III.

c) apenas II e III.

d) I, II e III.

Comentário:

Condições de existência iniciais: $x\geq 0$ e $3x+a^2+3a\geq 0$

$$x=\sqrt{3x+a^2+3a} \Leftrightarrow x^2=3x+a^2+3a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x-a(a+3)=0 \Leftrightarrow x=a+3 \ \vee\ x=-a$$

Como $a<-3 \Leftrightarrow a+3<0$, portanto $x=a+3<0$ não satisfaz às condições de existência.

Analisando a solução $x=-a$, observamos que $x=-a>0$ e $3x+a^2+3a=3\cdot(-a)+a^2+3a=a^2\geq 0$. Portanto, a solução $x=-a$ é uma solução válida e $S=\{-a\}$, que possui um único elemento $-a>3$.

Logo, as proposições verdadeiras são apenas (II) e (III).

Gabarito: C
