TRIGONOMETRIA EM UM TRIÂNGULO QUALQUER

12

As propriedades estudadas no capítulo anterior são válidas somente para os triângulos retângulos. Neste capítulo vamos apresentar as propriedades válidas para quaisquer triângulos.

As razões trigonométricas estabelecidas para os ângulos agudos também são definidas para os outros tipos de ângulos. Tal estudo será iniciado no capítulo 14 deste volume.

Porque trataremos de triângulos obtusângulos, inclusive, apresentaremos os senos e cossenos de ângulos suplementares.

Ângulos suplementares

Senos de dois ângulos suplementares

Os valores dos senos de dois ângulos suplementares coincidem, isto é:

$$\boxed{\operatorname{sen}(180^\circ - x) = \operatorname{sen} x}$$

sendo *x* a medida de um ângulo de um triângulo.

Por exemplo, sendo $x = 45^\circ$, temos:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim:

$$\operatorname{sen}(180^\circ - x) = \operatorname{sen}(180^\circ - 45^\circ) = \operatorname{sen} 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Cossenos de dois ângulos suplementares

Os valores dos cossenos de dois ângulos suplementares diferem apenas no sinal, ou seja:

$$\boxed{\cos(180^\circ - x) = -\cos x}$$

sendo *x* a medida de um ângulo de um triângulo.

Ainda, sendo $x = 45^\circ$, temos:

$$\cos x = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim:

$$\cos(180^\circ - x) = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

observação

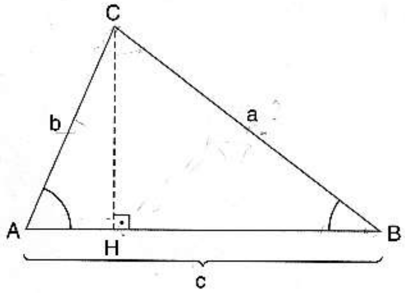
Para o caso particular de $x = 90^\circ$, temos $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$ e $\cos 90^\circ = 0$.

Lei dos senos ou teorema dos senos

Em todo triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles.

Demonstração:

- Seja o triângulo ABC, acutângulo, e $\overline{CH}$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.



$$\left.\begin{array}{l}\triangle CAH\text{: sen } \hat{A} = \dfrac{CH}{b} \Rightarrow CH = b \text{ sen } \hat{A} \\ \triangle CBH\text{: sen } \hat{B} = \dfrac{CH}{a} \Rightarrow CH = a \text{ sen } \hat{B}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

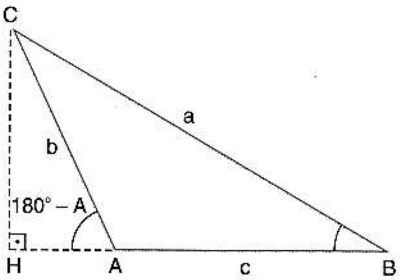
$$\Rightarrow b \text{ sen } \hat{A} = a \text{ sen } \hat{B} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}}$$

Procedendo de modo análogo: $\dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}}$

Podemos escrever, então:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

- Seja o triângulo ABC, obtusângulo em $\hat{A}$, e $\overline{CH}$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.



$$\left.\begin{array}{l}\triangle CAH\text{: sen } (180^\circ - \hat{A}) = \dfrac{CH}{b} = \text{sen } \hat{A} \Rightarrow \\ \Rightarrow CH = b \text{ sen } \hat{A} \\ \triangle CBH\text{: sen } \hat{B} = \dfrac{CH}{a} \Rightarrow CH = a \text{ sen } \hat{B}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

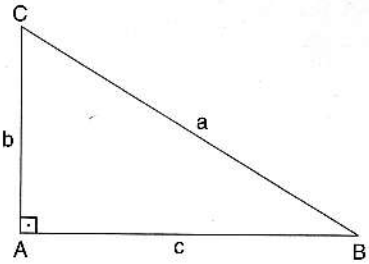
$$\Rightarrow b \text{ sen } \hat{A} = a \text{ sen } \hat{B} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}}$$

Procedendo de modo análogo: $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}}$

Podemos escrever, então:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

- Seja o triângulo ABC, retângulo. Temos:



$$\left.\begin{array}{l}\text{sen } \hat{B} = \dfrac{b}{a} \Rightarrow a = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} \\ \text{sen } \hat{C} = \dfrac{c}{a} \Rightarrow a = \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

Por outro lado, temos: sen $\hat{A}$ = sen $90^\circ = 1$ e

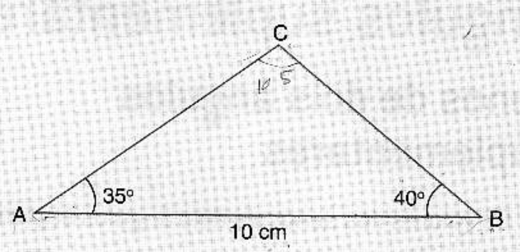
$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

Como pudemos perceber nos três casos, em qualquer triângulo ABC temos:

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}}$$

exemplo 1

No triângulo ABC da figura abaixo, vamos determinar as medidas de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.



$\hat{C} = 180^\circ - (35^\circ + 40^\circ) = 105^\circ$

sen $\hat{C}$ = sen 105° = sen $75^\circ = 0{,}96593$

Pela lei dos senos, podemos escrever:

$$\frac{AC}{\text{sen } 40^\circ} = \frac{BC}{\text{sen } 35^\circ} = \frac{AB}{\text{sen } 105^\circ}$$

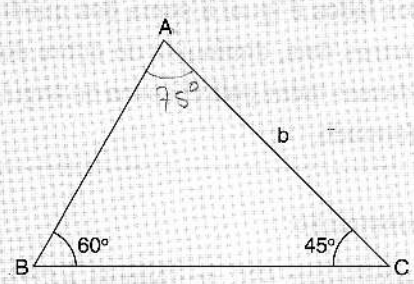
$$\frac{AC}{0{,}64279} = \frac{BC}{0{,}57358} = \frac{10}{0{,}96593} = 10{,}352$$

$AC = 10{,}352 \cdot 0{,}64279 \cong 6{,}65$ cm e

$BC = 10{,}352 \cdot 0{,}57358 \cong 5{,}94$ cm

exemplo 2

As medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do triângulo abaixo podem ser expressas em função da medida do terceiro lado.



Pela lei dos senos:

$$\frac{b}{\text{sen } 60°} = \frac{AB}{\text{sen } 45°} = \frac{BC}{\text{sen } 75°}$$

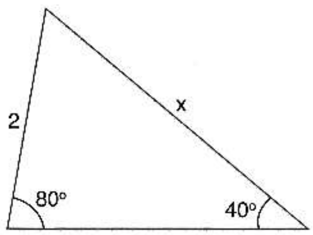
$$AB = \underbrace{\frac{\text{sen } 45°}{\text{sen } 60°}}_{0{,}816} \cdot b \quad \text{e} \quad BC = \underbrace{\frac{\text{sen } 75°}{\text{sen } 60°}}_{1{,}115} \cdot b$$

exercícios

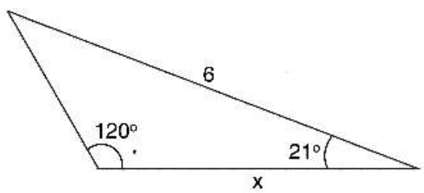
1. Num triângulo ABC são dados $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = 45°$ e $AB = 8$ cm. Determine o comprimento de $\overline{AC}$.

2. Em cada caso, determine o comprimento x.

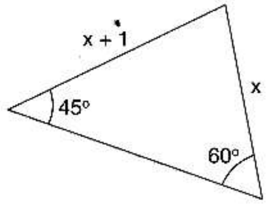
a)



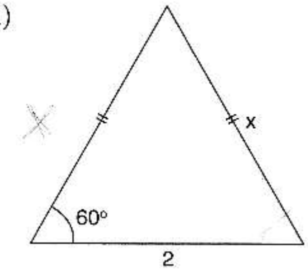
b)



c)

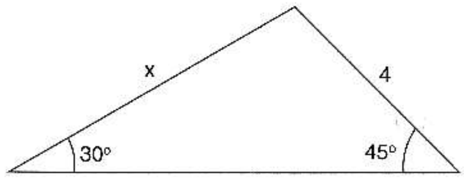


d)

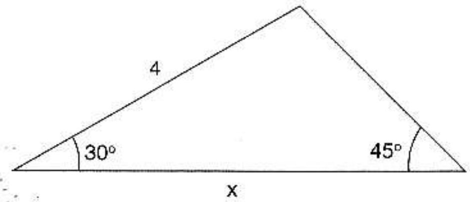


3. Determine a medida x em cada caso.

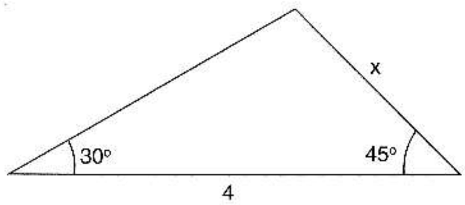
a)



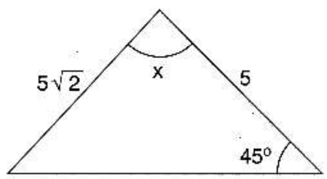
b)



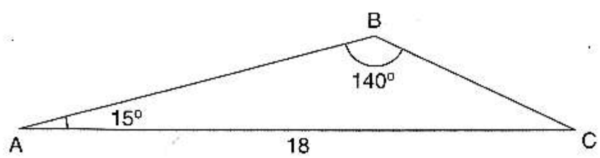
c)



4. Determine a medida do ângulo x.

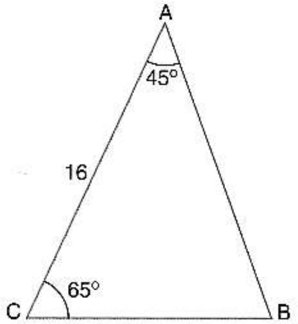


5. No triângulo ABC da figura, determine as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

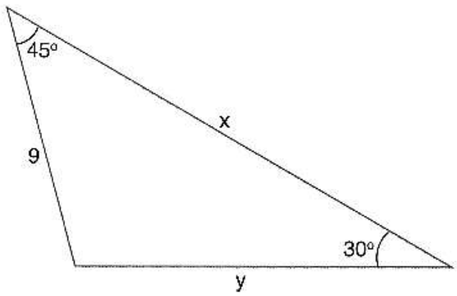


6. Encontre os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo ABC, em que $\hat{A} = 15°$, $\text{sen } \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen } \hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Em seguida, determine a medida de $\overline{AB}$, sendo $AC = 5$ cm.

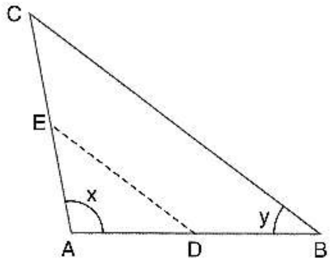
7. Determine a medida de $\overline{AB}$.



8. Dado sen $75° = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, determine x e y na figura abaixo.



9. (Vunesp-SP) Cinco cidades, *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, são interligadas por rodovias conforme mostra a figura.



A rodovia $\overline{AC}$ tem 40 km, a rodovia $\overline{AB}$ tem 50 km, os ângulos *x*, entre $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, e *y*, entre $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, são tais que sen $x = \dfrac{3}{4}$ e sen $y = \dfrac{3}{7}$.

Deseja-se construir uma nova rodovia ligando as cidades *D* e *E* que, dada a disposição destas cidades, será paralela a $\overline{BC}$.

a) Use a lei dos senos para determinar quantos quilômetros tem a rodovia $\overline{BC}$.

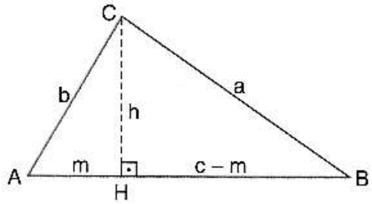
b) Sabendo que $\overline{AD}$ tem 30 km, determine quantos quilômetros terá a rodovia $\overline{DE}$.

Lei dos cossenos ou teorema dos cossenos

Em todo triângulo, o quadrado de qualquer um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois, diminuída do dobro do produto desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.

Demonstração:

- Seja o triângulo ABC, acutângulo, e CH = h a medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$.



$$\left.\begin{array}{l}\triangle BCH: a^2 = h^2 + (c-m)^2 \\ \triangle ACH: h^2 = b^2 - m^2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2cm + m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$$

Mas $m = b \cos \hat{A}$.

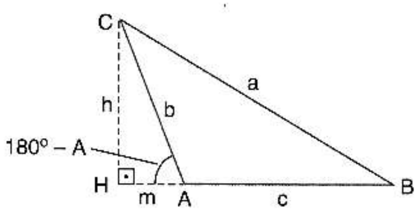
Assim, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.

Analogamente, podemos escrever:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \quad \text{e}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

- Seja o triângulo ABC, obtusângulo em $\hat{A}$, e CH = h a medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$.



$$\left.\begin{array}{l}\triangle BCH: a^2 = h^2 + (c+m)^2 \\ \triangle ACH: h^2 = b^2 - m^2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 + 2cm + m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$$

Mas $m = b \cos (180° - \hat{A}) = b\,(-\cos \hat{A}) = -b \cos \hat{A}$.

Assim, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.

Analogamente, podemos escrever:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \quad \text{e}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

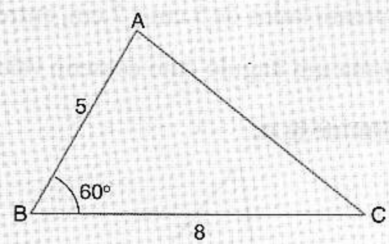
- No caso de o triângulo ABC ser retângulo (em $\hat{A}$, por exemplo), como $\cos 90^\circ = 0$, verifica-se a igualdade $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90^\circ$, que se reduz à expressão do teorema de Pitágoras. Para cada um dos dois ângulos agudos do triângulo (*b* e *c*) caberia uma demonstração análoga à primeira.

Como pudemos perceber nos três casos, em qualquer triângulo ABC temos:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{aligned}}$$

exemplo 3

Um triângulo possui um ângulo de 60° compreendido entre lados de 5 cm e 8 cm.



Podemos determinar a medida do lado $\overline{AC}$ usando a lei dos cossenos:

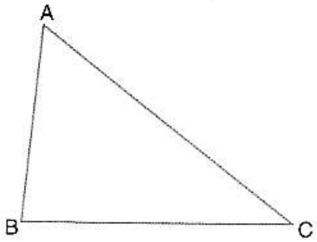
$$b^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ$$

$$b^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 49 \Rightarrow b = 7$$

Assim, o terceiro lado do triângulo mede 7 cm.

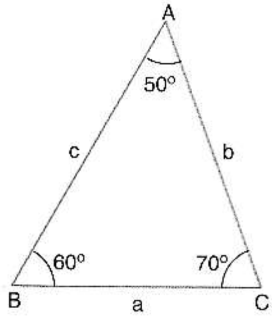
Vale relembrar duas importantes propriedades acerca dos triângulos:

- Em todo triângulo, a soma das medidas de dois lados supera a medida do outro lado (desigualdade triangular).



$$BC < AB + AC$$
$$AC < AB + BC$$
$$AB < AC + BC$$

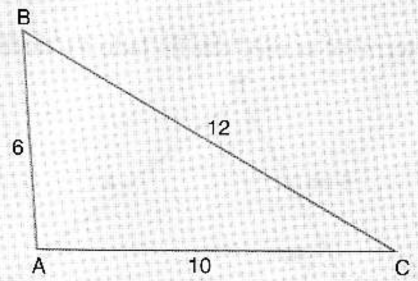
- Em todo triângulo, ao maior (ou menor) lado opõe-se o maior (ou menor) ângulo, e vice-versa.



$$a < b < c$$

exemplo 4

Observe a figura a seguir:



Podemos determinar as medidas dos ângulos desse triângulo ABC usando inicialmente a lei dos cossenos, escolhendo um lado:

$$12^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos \hat{A}$$

$$\cos \hat{A} = -\frac{1}{15} \text{ e } A \cong 94^\circ$$

Para apurar a medida do ângulo $\hat{B}$:

$$10^2 = 6^2 + 12^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \cos \hat{B}$$

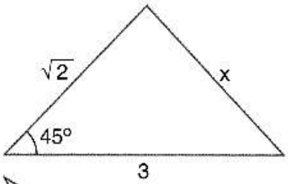
$$144 \cos \hat{B} = 80 \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{5}{9} \text{ e } \hat{B} \cong 56^\circ$$

(Também nesse momento poderíamos ter utilizado a lei dos senos.)

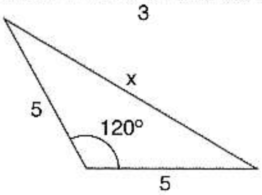
Finalmente: $\hat{C} = 30^\circ$, por diferença.

10. Calcule o valor de x em cada caso:

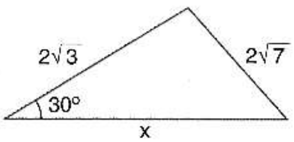
a)



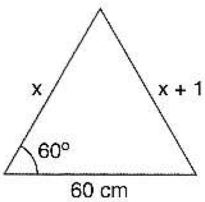
b)



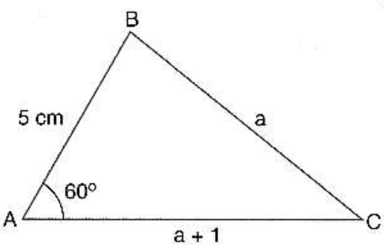
c)



d)



11. Determine as medidas do lado a e do ângulo $\hat{B}$.



12. Classifique, quanto aos lados e quanto aos ângulos, um triângulo em que se forma, entre lados de 4 cm e de 6 cm, um ângulo cujo cosseno vale $\frac{1}{3}$.

13. Classifique, quanto aos lados e quanto aos ângulos, um triângulo que possui ângulos cujos cossenos valem:

a) $-\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{4}$

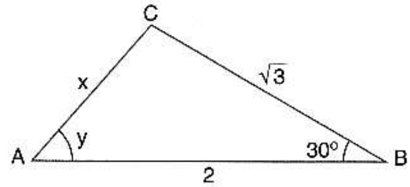
b) 0,342 e 0,766

c) $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

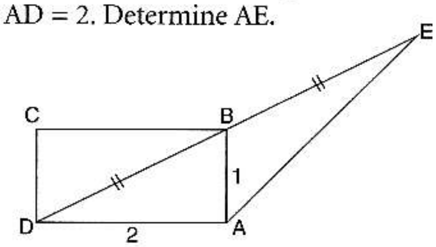
14. Determine a medida do terceiro lado de um triângulo, sabendo que entre os lados de 12 cm e 10 cm forma-se um ângulo cujo cosseno vale $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

15. Ache o menor lado do triângulo que possui lados medindo 7 cm e 8 cm, com o ângulo compreendido entre eles apresentando seno igual a $\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

16. Encontre os valores de x e y na figura. O que pode ser dito sobre o triângulo ABC?

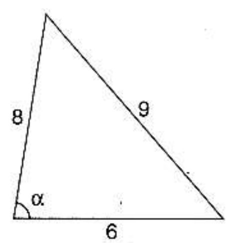


17. (UF-MG) Na figura, B é o ponto médio do segmento $\overline{DE}$ e ABCD é um retângulo de lados DC = 1 e AD = 2. Determine AE.

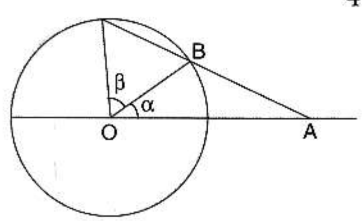


18. Ache a medida do menor lado de um triângulo que possui lados de 5 cm e 7 cm, entre os quais se forma um ângulo cujo cosseno vale $\frac{3}{5}$.

19. Determine tg α.



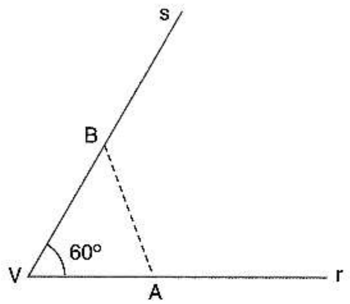
20. (Fuvest-SP) Na figura abaixo, O é o centro da circunferência de raio 1, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é secante a ela, o ângulo β mede 60° e sen $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.



a) Determine sen $O\hat{A}B$ em função de AB.

b) Calcule AB.

21. (Vunesp-SP) A figura abaixo mostra duas semirretas, r e s, de mesmo vértice V, formando um ângulo de 60°. Os pontos $A \in r$ e $B \in s$ são arbitrários, diferentes de V.



a) Explique por que os ângulos do triângulo $A\hat{V}B$ estão em progressão aritmética.
b) Se os lados de um triângulo medem 3 cm, 7 cm e 8 cm, mostre que seus ângulos estão em progressão aritmética.

22. Mostre que é obtusângulo o triângulo que possui um lado medindo $(1 + \sqrt{3})$ cm e um ângulo de 15°, ao qual se opõe um lado unitário.

23. Um triângulo possui um ângulo de 30°, compreendido entre lados de $\sqrt{2}$ cm e $\sqrt{3}$ cm. Determine as medidas do outro lado e dos outros ângulos.

testes de vestibulares

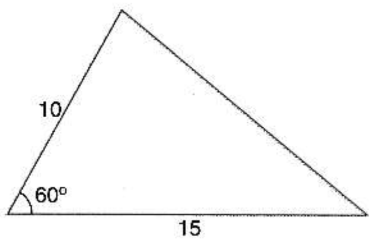
1. (UF-PR) Calcule o seno do maior ângulo de um triângulo cujos lados medem 4, 6 e 8 metros.

a) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{4}$

2. (U. F. Juiz de Fora-MG) Dois lados de um triângulo medem 8 m e 10 m e formam um ângulo de 60°. O terceiro lado desse triângulo mede:

a) $2\sqrt{21}$ m d) $2\sqrt{51}$ m
b) $2\sqrt{31}$ m e) $2\sqrt{61}$ m
c) $2\sqrt{41}$ m

3. (U. F. Viçosa-MG) Dois lados de um terreno de forma triangular medem 15 m e 10 m, formando um ângulo de 60°, conforme a figura abaixo:



O comprimento do muro necessário para cercar o terreno, em metros, é:

a) $5(5 + \sqrt{15})$ d) $5(5 + \sqrt{11})$
b) $5(5 + \sqrt{5})$ e) $5(5 + \sqrt{7})$
c) $5(5 + \sqrt{13})$

4. (Mackenzie-SP) Num retângulo de lados 1 cm e 3 cm, o seno do menor ângulo formado pelas diagonais é:

a) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{5}$
b) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{3}{5}$
c) $\frac{4}{5}$

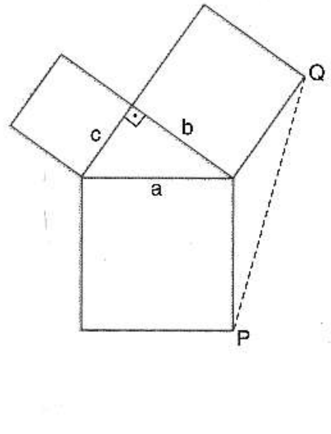
5. (U. F. São Carlos-SP) Se os lados de um triângulo medem x, $x + 1$ e $x + 2$, então, para qualquer x real e maior que 1, o cosseno do maior ângulo interno desse triângulo é igual a:

a) $\frac{x}{x+1}$ c) $\frac{x+1}{x+2}$ e) $\frac{x-3}{2x}$
b) $\frac{x}{x+2}$ d) $\frac{x-2}{3x}$

6. (Cefet-MG) ABCD é um paralelogramo com lados AB e AD medindo 10 cm e 6 cm, respectivamente, e ângulo $B\hat{A}D$ de 60°. O comprimento da diagonal AC, em cm, é:

a) 13 c) 16 e) $2\sqrt{19}$
b) 14 d) $8\sqrt{3}$

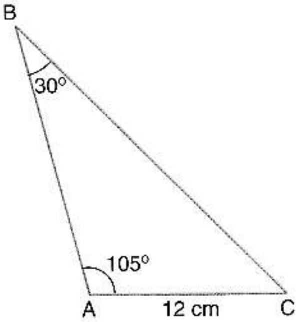
7. (UF-RS) Sobre os lados de um triângulo retângulo constroem-se quadrados, conforme mostra a figura abaixo:



Sendo a a medida da hipotenusa, b e c as medidas dos catetos, a distância entre P e Q é igual a:

a) $\sqrt{a^2 + b^2}$
b) $\sqrt{2a^2 + b^2}$
c) $\sqrt{a^2 + 2b^2}$
d) $\sqrt{3a^2 + b^2}$
e) $\sqrt{a^2 + 3b^2}$

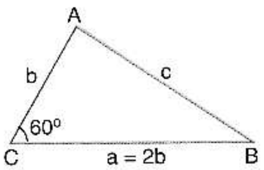
8. (Mackenzie-SP) Três ilhas, A, B e C, aparecem num mapa em escala 1:10 000, como na figura abaixo:



Das alternativas, a que melhor aproxima a distância entre as ilhas A e B é:

a) 1,7 km
b) 1,4 km
c) 2,3 km
d) 1,9 km
e) 2,1 km

9. (FEI-SP) Em um triângulo ABC os lados opostos aos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são, respectivamente, a e b, tais que $a = 2b$.

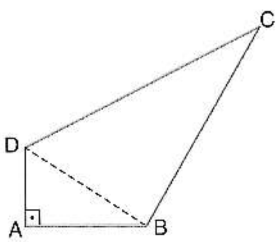


Sabendo que o ângulo $\hat{C}$ mede 60° e que $\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, assinale a alternativa correta:

a) $\hat{A} = 105°$ e $\hat{B} = 15°$
b) $\hat{A} = 30°$ e $\hat{B} = 90°$
c) $\hat{A} = 90°$ e $\hat{B} = 30°$
d) $\hat{A} = 45°$ e $\hat{B} = 75°$
e) $\hat{A} = 75°$ e $\hat{B} = 45°$

10. (UF-SE) No quadrilátero ABCD da figura abaixo, tem-se que:

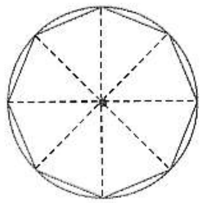
- ângulo $B\hat{A}D$ é reto;
- BD = 3 cm e CD = 6 cm;
- $B\hat{D}C = 60°$;
- a tangente de $A\hat{D}B$ é o dobro da tangente de $A\hat{B}D$.



Utilize as informações dadas para analisar as afirmações seguintes.

a) $AB = \sqrt{6}$ cm
b) O seno de um dos ângulos agudos no triângulo ABD é igual a $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
c) $BC = 3\sqrt{3}$ cm
d) O perímetro do quadrilátero ABCD é igual a $(6\sqrt{6} + 4\sqrt{3})$ cm.
e) $AC = \sqrt{33 + \sqrt{6}}$ cm

11. (Unifor-CE) Na figura abaixo tem-se um octógono regular inscrito em uma circunferência de raio 2 cm.



O perímetro desse octógono, em centímetros, é igual a:

a) $16\sqrt{2}$
b) $32\sqrt{2}$
c) $32\sqrt{1 - \sqrt{2}}$
d) $16\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
e) $16\sqrt{4 - \sqrt{2}}$

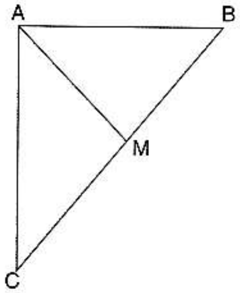
12. (Fatec-SP) Em um paralelogramo ABCD, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ medem, respectivamente, $x\sqrt{2}$ cm e x cm e θ é o ângulo agudo formado por esses lados. Se a diagonal maior mede $2x$ cm, então o ângulo θ é tal que:

a) $\cos \theta = \frac{\sqrt{14}}{4}$
b) $\text{sen } \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$
c) $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\text{sen } \theta = \frac{1}{2}$
e) $\text{tg } \theta = \sqrt{7}$

13. (UF-PI) Num triângulo retângulo um dos catetos mede 4 cm e a bissetriz do ângulo reto mede $\sqrt{2}$ cm. Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo:

a) A medida da hipotenusa é $\frac{4\sqrt{10}}{3}$ cm.
b) A medida do outro cateto é $\frac{4}{3}$ cm.
c) O triângulo é isósceles.
d) A soma das medidas dos catetos é $\frac{19}{4}$ cm.

14. (Cefet-MG) Na figura abaixo, o triângulo ABC é retângulo em $\hat{A}$ e $\overline{AM}$ é bissetriz do ângulo $\hat{A}$.



Se AC = 3 e AM = $\sqrt{2}$, a medida da hipotenusa $\overline{BC}$ é:

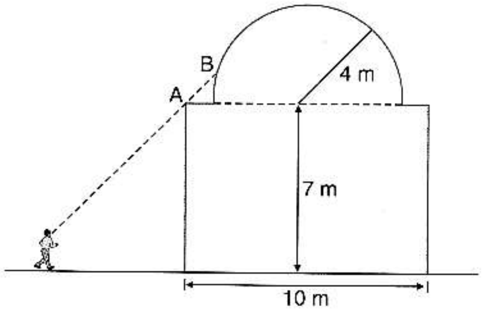
a) $3\sqrt{2}$

b) $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

c) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

15. (U. F. Juiz de Fora-MG) Uma mesquita possui uma abóbada semi-esférica de 4 m de raio, cujo centro dista 7 m do chão e 5 m das paredes laterais. A figura abaixo representa um corte em perfil, em que um menino, afastado 6 m da parede lateral, mirando em *A*, vê o ponto *B* na abóbada.



Considerando-se os olhos do menino a 1 m do chão e desprezando-se a espessura das paredes para o cálculo, a altura do ponto *B* ao chão é:

a) $\dfrac{21 - \sqrt{7}}{2}$ m

b) $\dfrac{19 - \sqrt{7}}{2}$ m

c) $\dfrac{17 - \sqrt{7}}{2}$ m

d) $\dfrac{8 + \sqrt{7}}{2}$ m

e) 8 m

desafios

1. (IME-RJ) Um quadrilátero convexo ABCD está inscrito em um semicírculo de diâmetro *d*. Sabe-se que AB = BC = a, AD = d e CD = b, com *a*, *b* e *d* não nulos. Demonstre que $d^2 = bd + 2a^2$.

2. Um triângulo possui um lado de 10 cm e as medidas dos ângulos formando uma progressão aritmética de razão 10°. Qual é a maior medida possível para um lado do triângulo? E a menor?

Tabela de razões trigonométricas

Ângulo (graus)	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo (graus)	Seno	Cosseno	Tangente
1	0,01745	0,99895	0,01746	46	0,71934	0,69466	1,03553
2	0,03490	0,99939	0,03492	47	0,73135	0,68200	1,07237
3	0,05234	0,99863	0,05241	48	0,74314	0,66913	1,11061
4	0,06976	0,99756	0,06993	49	0,75471	0,65606	1,15037
5	0,08716	0,99619	0,08749	50	0,76604	0,64279	1,19175
6	0,10453	0,99452	0,10510				
7	0,12187	0,99255	0,12278	51	0,77715	0,62932	1,23499
8	0,13917	0,99027	0,14054	52	0,78801	0,61566	1,27994
9	0,15643	0,98769	0,15838	53	0,79864	0,60182	1,32704
10	0,17365	0,98481	0,17633	54	0,80903	0,58779	1,37638
				55	0,81915	0,57358	1,42815
11	0,19087	0,98163	0,19438	56	0,82904	0,55919	1,48256
12	0,20791	0,97815	0,21256	57	0,83867	0,54464	1,53986
13	0,22495	0,97437	0,23087	58	0,84805	0,52992	1,60033
14	0,24192	0,97030	0,24933	59	0,85717	0,51504	1,66428
15	0,25882	0,96593	0,26795	60	0,86603	0,50000	1,73205
16	0,27564	0,96126	0,28675				
17	0,29237	0,95630	0,30573	61	0,87462	0,48481	1,80405
18	0,30902	0,95106	0,32492	62	0,88295	0,46947	1,88073
19	0,32557	0,94552	0,34433	63	0,89101	0,45399	1,96261
20	0,34202	0,93969	0,36397	64	0,89879	0,43837	2,05030
				65	0,90631	0,42262	2,14451
21	0,35837	0,93358	0,38386	66	0,91355	0,40674	2,24604
22	0,37461	0,92718	0,40403	67	0,92050	0,39073	2,35585
23	0,39073	0,92050	0,42447	68	0,92718	0,37461	2,47509
24	0,40674	0,91355	0,44523	69	0,93358	0,35837	2,60509
25	0,42262	0,90631	0,46631	70	0,93969	0,34202	2,74748
26	0,43837	0,89879	0,48773				
27	0,45399	0,89101	0,50953	71	0,94552	0,32557	2,90421
28	0,46947	0,88295	0,53171	72	0,95106	0,30902	3,07768
29	0,48481	0,87462	0,55431	73	0,95630	0,29237	3,27085
30	0,50000	0,86603	0,57735	74	0,96126	0,27564	3,48741
				75	0,96593	0,25882	3,73205
31	0,51504	0,85717	0,60086	76	0,97030	0,24192	4,01078
32	0,52992	0,84805	0,62487	77	0,97437	0,22495	4,33148
33	0,54464	0,83867	0,64941	78	0,97815	0,20791	4,70463
34	0,55919	0,82904	0,67451	79	0,98163	0,19087	5,14455
35	0,57358	0,81915	0,70021	80	0,98481	0,17365	5,67128
36	0,58779	0,80903	0,72654				
37	0,60182	0,79864	0,75355	81	0,98769	0,15643	6,31375
38	0,61566	0,78801	0,78129	82	0,99027	0,13917	7,11537
39	0,62932	0,77715	0,80978	83	0,99255	0,12187	8,14435
40	0,64279	0,76604	0,83910	84	0,99452	0,10453	9,51436
				85	0,99619	0,08716	11,43010
41	0,65606	0,75471	0,86929	86	0,99756	0,06976	14,30070
42	0,66913	0,74314	0,90040	87	0,99863	0,05234	19,08110
43	0,68200	0,73135	0,93252	88	0,99939	0,03490	28,63630
44	0,69466	0,71934	0,96569	89	0,99985	0,01745	57,29000
45	0,70711	0,70711	1,00000				