MÚLTIPLOS E DIVISORES

Passamos uma boa parte do colégio estudando a tabuada. A tabuada está ligada aos múltiplos de um número.

Um número será múltiplo de outro quando o primeiro for o resultado da multiplicação entre o segundo e algum número natural qualquer.

$M(n)$ é a notação para o conjunto dos múltiplos de um número n qualquer.

Pela definição acima, dados os números m e n, dizemos que n é múltiplo de m se existir um número natural k tal que:

$$n = m \,.\, k$$

Por exemplo, podemos dizer que o 50 é múltiplo de 5, pois o número natural 10 multiplicado por 5 tem o 50 como resultado:

$$50 = 5 \times 10$$

Neste exemplo temos n=50, m=5 e k = 10.

Podemos escrever os múltiplos de um número na notação de conjunto, por exemplo:

$$\mathrm{M}(2) = \{0,2,4,6, 8,10,12,14,16,18, 20, 22, 24,\ldots.\}$$

é o conjunto de todos os números que são múltiplos do número dois.

Algumas observações podem ser feitas em relação aos múltiplos:

- Zero é múltiplo de todos os números.
- Todo número inteiro é múltiplo de si mesmo.

  Exemplos: 4 ×1 = 4 (4 é múltiplo de 4), 14 ×1 = 14 (14 é múltiplo de 14). Isso decorre do fato de que 1 é o elemento neutro da multiplicação.
- Se o número n é múltiplo de m, então a divisão de n por m é exata.

  Exemplo: Como 50 é múltiplo de 5, 50 ÷ 5 = 10, com resto zero.
- A soma ou subtração de dois múltiplos de um número n é igual a um número que também é múltiplo de n.

Exemplo: 24 e 16 são múltiplos de 4, somando-os temos: 24 + 16 = 40, que também é múltiplo de 4 pois 4 ×10 = 40.

Agora que já falamos de múltiplos, podemos falar de divisores:

Um número será divisor de outro quando a divisão do segundo pelo primeiro for exata.

$D(n)$ é a notação para o conjunto dos divisores de um número n qualquer.

Por exemplo, o conjunto dos números divisores do número 8 é:

$$D(8) = \{1,2,4,8\}.$$

Perceba pelos exemplos acima que o conjunto dos múltiplos de um número é um conjunto infinito. Por outro lado, o conjunto dos divisores de um número é um conjunto finito.

Algumas observações podem ser feitas em relação aos divisores:

- O número 1 é divisor de qualquer número.
- O zero nunca será divisor, já que não existe divisão por zero.
- O próprio número será sempre o seu maior divisor.

Existem alguns casos em que o número admite exatamente dois divisores: o número 1 e ele mesmo. Neste caso, esses números são chamados de **números primos**.

Exemplo: 2 é um número primo, pois só é possível dividi-lo por 1 e por ele mesmo. Isso acontece também com o 3. Já o 4 não é um número primo pois além de ser possível dividi-lo por 1 e por 4, podemos dividi-lo por 2.

O conjunto dos números primos é: {2,3,5,7,11,13,17,19,23,...}.

O número 1 **não** é número primo.

Perceba que o conjunto dos números primos é infinito e para saber se um número é primo usamos o seguinte processo: dividimos esse número pelos números primos menores que ele até que tenhamos divisão exata (neste caso, o número de interesse não será primo) ou até que tenhamos uma divisão em que o quociente seja menor que o divisor e resto diferente de zero (neste caso o número é um número primo).

Exemplos:

1) 29 é número primo

Pelo processo descrito acima temos:

$$29 \div 2 = 2 \cdot 14 + 1$$

Como o quociente (14) é maior que o divisor (2) o processo continua para o próximo primo:

$$29 \div 3 = 3 \cdot 9 + 2$$

Como o quociente (9) é maior que o divisor (3) o processo continua para o próximo primo:

$$29 \div 5 = 5 \cdot 5 + 4$$

Como o quociente (5) é igual ao divisor (5) o processo continua para o próximo primo:

$$29 \div 7 = 7 \cdot 4 + 1$$

Como agora o quociente (4) é menor que o divisor (7) e o resto é diferente de zero (1), segue que 29 é um número primo.

2) 213 não é um número primo

Pelo processo descrito acima temos:

$$213 \div 2 = 2 \cdot 106 + 1$$

Como o quociente (106) é maior que o divisor (2), o processo continua para o próximo primo:

$$213 \div 3 = 3 \cdot 71 + 0 = 3 \cdot 71$$

Como a divisão deu exata, conclui-se que 213 não é um número primo.

Observação: Um número que não é primo é chamado de **número composto**.

DECOMPOSIÇÃO EM FATORES PRIMOS

Todo número inteiro positivo maior que 1 pode ser decomposto num produto de números (fatores) primos, com esta decomposição sendo única.

Mas afinal, o que significa um produto de fatores primos e como se decompõe um número?

Um produto de números primos significa uma multiplicação entre eles.

Exemplos:

$$2 \times 2$$

$$2 \times 5 \times 7$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3$$

Agora comecemos a pensar na decomposição de um número. Comecemos pensando no número 50. Ele pode ser escrito como o produto entre 5 e 10 ou, também, como produto entre 2 e 25. Ou seja:

$$50 = 5 \times 10$$

$$50 = 2 \times 25$$

Note que nos dois casos o resultado do produto é o mesmo, o número 50 apenas foi **reescrito** de duas outras formas. Porém, estes dois produtos não são compostos somente por números primos. O 10 e o 25 podem ser reescritos de outra forma:

$$10 = 2 \times 5$$

$$25 = 5 \times 5 = 5^2$$

Sendo assim, substituindo o 10 e o 25 nos produtos anteriores temos:

$$50 = 5 \times 2 \times 5 = 2 \cdot 5^2$$

$$50 = 2 \times 5 \times 5 = 2 \cdot 5^2$$

Utilizamos as propriedades de potências para escrever a decomposição de um número de forma mais compacta. Perceba que não importa de qual forma ocorra a decomposição, no final ela é única.

Nos interessa agora saber como fazer a decomposição no caso de números maiores. Sendo assim, para decompor um número em fatores primos, vamos dividir o número de interesse apenas por números primos, começando pelo menor número primo que seja possível dividir, até que só seja possível dividir por 1.

Por exemplo, vamos decompor o número 224:

224	2
112	2
56	2
28	2
14	2
7	7
1	

Observe que começamos dividindo por 2, e seguimos assim até onde foi possível. Após, foi preciso encontrar o próximo número primo e dividir. Sendo assim, o número 224 quando fatorado pode ser escrito da seguinte forma:

$$224 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 2^5 \times 7$$

Podemos utilizar o mesmo processo de fatoração para encontrar os **divisores de um número**. Para exemplificar tal processo, considere o número 224 do exemplo acima.

Passamos um traço vertical no lado direito da decomposição e colocamos o número 1 na linha acima, conforme imagem abaixo:

		1
224	2	
112	2	
56	2	
28	2	
14	2	
7	7	
1		

Depois, pegamos cada fator primo na decomposição e multiplicamos pelos números na linha acima dele e colocamos na parte da direita da mesma linha o resultado da multiplicação:

		1
224	2	2
112	2	4
56	2	8
28	2	16
14	2	32
7	7	7, 14, 28, 56,112, 224
1		

Perceba que quando trocamos do número 2 para o número 7, foi necessário multiplicar o 7 por todos os números nas linhas acima dele.

Com isso, temos que os divisores do número 224 são:

$$D(224) = \{1,2,4,7,8,14,16,28,32,56,112,224\}$$

Ainda, podemos nos utilizar da decomposição em fatores primos para encontrar a **quantidade de divisores de um número**.

Pegando o número 224 como exemplo, temos que sua decomposição é dada por:

$$224 = 2^5 \cdot 7^1$$

Consequentemente, sua quantidade de divisores é:

$$(5+1) \cdot (1+1) = 6 \cdot 2 = 12$$

Note que na listagem acima, existem exatamente 12 divisores no conjunto.

Ou seja, para encontrarmos a **quantidade de divisores de um número**, decompomos esse número em seus fatores primos e escrevemos essa decomposição em forma de potência. Depois, pegamos cada expoente e somamos em uma unidade, por fim, multiplicamos esses valores.

A decomposição de um número em seus fatores primos é utilizada quando estamos interessados em encontrar o mínimo múltiplo comum ou o máximo divisor comum entre dois ou mais números.

MMC (MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM)

O mínimo múltiplo comum entre dois ou mais números, mais conhecido como MMC, é o menor múltiplo diferente de zero que seja comum a todos os números.

Podemos encontrar o MMC através da listagem dos múltiplos de cada número. Este método funciona para números pequenos, mas fica inviável para números grandes.

Por exemplo, para saber o MMC entre 4 e 5, listamos os múltiplos de cada número e comparamos até encontrarmos o menor múltiplo em comum:

$$M(4) = \{0,4,8,12,16,20,24,28,32,\ldots\}$$

$$M(5) = \{0,5,10,15,20,25,30,35,\ldots\}$$

Note que o zero foi excluído e, assim, o MMC entre 4 e 5 é o número 20. Neste caso escrevemos MMC(4,5) = 20.

Observação: o MMC é sempre **maior** que os números dados.

MDC (MÁXIMO DIVISOR COMUM)

Assim como temos um mínimo múltiplo comum entre dois ou mais números, temos também um máximo divisor comum entre eles:

O máximo divisor comum entre dois ou mais números, mais conhecido como MDC, é o maior divisor diferente de um que seja comum a todos os números.

Assim como no MMC, podemos também encontrar o MDC através da listagem dos divisores de cada número. Novamente, este método é bom para números pequenos, mas fica inviável para números grandes.

Por exemplo, se quisermos descobrir o MDC entre 30 e 24, vamos pegar os divisores deles e compará-los, até encontrarmos o maior divisor em comum:

$$D(30) = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$$
$$D(24) = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$$

Neste caso, percebendo que o 1 foi deixado de lado, o 6 será o MDC entre 30 e 24. Neste caso escrevemos MDC(24,30) = 6.

Observações:

- O MDC é sempre **menor** que os números dados.
- Se o único divisor comum entre os números for o 1, os números são chamados de **números primos entre si**.

DECOMPOSIÇÃO ISOLADA E DECOMPOSIÇÃO SIMULTÂNEA

Dados dois ou mais números quaisquer, também é possível encontrar o MMC e/ou o MDC entre esses dois números pela decomposição desses números em fatores primos.

Decomposição Isolada

Na decomposição isolada, pegamos cada número isoladamente e o decompomos em seus fatores primos. O MMC e o MDC desses números são encontrados da seguinte forma:

Para o MMC, pegam-se **todos** os fatores primos que aparecem nas decomposições de todos os números com o **maior expoente**. Já, para o MDC, pegam-se **apenas** os fatores primos que aparecem nas decomposições de **todos** os números **simultaneamente**, com o **menor expoente**.

Exemplo: Encontre o MMC e o MDC entre 120,108 e 90.

Pela decomposição em fatores primos de cada número temos:

$$120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$
$$108 = 2^2 \cdot 3^3$$
$$90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$

Sendo assim, pelo visto acima temos:

$$MMC(120,108,90) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 1.080$$
$$MDC(120,108,90) = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

DECOMPOSIÇÃO SIMULTÂNEA

Na decomposição simultânea fazemos a fatoração dos números ao mesmo tempo, da seguinte forma:

No caso do MMC, para o número primo entrar na fatoração, basta que ele divida **pelo menos um** dos números a serem fatorados. Caso algum número não seja divisível pelo fator primo, repete-se tal número na linha de baixo e continua-se a fatoração. Fatoramos até que todos os números se tornem 1. Para encontrar o MMC, multiplicam-se todos os números primos da decomposição. Já, no caso do MDC, colocamos na decomposição simultânea **apenas os números primos que dividem todos os números simultaneamente**. Fatoramos até que os números no final sejam primos entre si. Para encontrar o MDC, multiplicam-se todos os números primos da decomposição.

Exemplo: Encontre o MMC e o MDC entre 100, 75 e 25

MMC:

100, 75, 25	2
50,75,25	2
25,75,25	3
25,25,25	5
5,5,5	5
1,1,1	

MDC:

100,75,25	5
20,15,5	5
4,3,1	

$MMC(100,75,25) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$

$MDC(100,75,25) = 5^2 = 25$

ANOTAÇÕES