o anglo resolve

É trabalho pioneiro.
Prestação de serviços com tradição de confiabilidade.
Construtivo, procura colaborar com as Bancas Examinadoras em sua tarefa de não cometer injustiças.
Didático, mais do que um simples gabarito, auxilia o estudante no processo de aprendizagem, graças a seu formato: reprodução de cada questão, seguida da resolução elaborada pelos professores do Anglo.
No final, um comentário sobre as disciplinas.

a prova de Matemática do ITA dezembro de 2006

O Instituto Tecnológico de Aeronáutica — ITA — é uma escola de engenharia mundialmente conhecida.
Com o mesmo zelo com que trata seus excelentes cursos (Engenharia Aeronáutica, Engenharia Mecânica Aeronáutica, Engenharia de Infra-Estrutura Aeronáutica, Engenharia Elétrica e Engenharia de Computação), trata seu vestibular, que é realizado em 4 dias:

1º dia: FÍSICA, com 20 questões de múltipla escolha e 10 questões dissertativas.

2º dia: PORTUGUÊS, com 20 questões de múltipla escolha, 5 questões dissertativas e uma redação, e INGLÊS, com 20 questões de múltipla escolha.

3º dia: MATEMÁTICA, com 20 questões de múltipla escolha e 10 questões dissertativas.

4º dia: QUÍMICA, com 20 questões de múltipla escolha e 10 questões dissertativas.

A prova de Inglês é eliminatória e não entra na classificação final.
Em Matemática, Física e Química, as questões de múltipla escolha equivalem a 50% do valor da prova, e a parte dissertativa, aos outros 50%.
Na prova de Português, as questões de múltipla escolha equivalem a 40% do valor da prova; as dissertativas, a 20% e a Redação, a 40%.
Só é corrigida a parte dissertativa dos 650 melhores classificados nas questões de múltipla escolha.
Serão considerados aprovados nos exames de escolaridade os candidatos que obtiverem nota igual ou superior a 40 (na escala de 0 a 100) e média igual ou superior a 50 (na escala de 0 a 100).
A nota final é a média aritmética das provas de Matemática, Física, Química e Português.

Código: 83580106

MATEMÁTICA

NOTAÇÕES

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
i: unidade imaginária; $i^2 = -1$
$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
$\bar{z}$: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$
Re z: parte real de $z \in \mathbb{C}$
Im z: parte imaginária de $z \in \mathbb{C}$
$\binom{n}{p}$: número de combinações de n elementos tomados p a p.
mdc(j, k): máximo divisor comum dos números inteiros j e k.
$n(X)$: número de elementos de um conjunto finito X.
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos ortogonais.

Questão 1

Se A, B, C forem conjuntos tais que

$$n(A \cup B) = 23,\ n(B - A) = 12,\ n(C - A) = 10,$$
$$n(B \cap C) = 6 \text{ e } n(A \cap B \cap C) = 4,$$

então $n(A)$, $n(A \cup C)$, $n(A \cup B \cup C)$, nesta ordem,

A) formam uma progressão aritmética de razão 6.
B) formam uma progressão aritmética de razão 2.
C) formam uma progressão aritmética de razão 8, cujo primeiro termo é 11.
D) formam uma progressão aritmética de razão 10, cujo último termo é 31.
E) não formam uma progressão aritmética.

Resolução

I) Como $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$ e $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ temos:

$$\begin{cases} n(B) - n(A \cap B) = 12 & (1) \\ n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 23 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2) temos:
$n(A) + 12 = 23 \quad \therefore \quad n(A) = 11.$

II) Como $n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C)$ e
$n(C - A) = n(C) - n(A \cap C)$ temos:
$n(A \cup C) = n(A) + n(C - A) \ \therefore$
$n(A \cup C) = 11 + 10 \quad \therefore \quad n(A \cup C) = 21$

III) Como
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
$n(A \cup B \cup C) = n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n(A \cap C) + n(A) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
$n(A \cup B \cup C) = n(B - A) + n(C - A) + n(A) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
$n(A \cup B \cup C) = 12 + 10 + 11 - 6 + 4$
$n(A \cup B \cup C) = 31$
Assim $n(A)$, $n(A \cup C)$ e $n(A \cup B \cup C)$ formam, nesta ordem, uma Progressão Aritmética de razão 10 e último termo 31.

Resposta: D

Questão 2

Seja A um conjunto com 14 elementos e B um subconjunto de A com 6 elementos. O número de subconjuntos de A com um número de elementos menor ou igual a 6 e disjuntos de B é

A) $2^8 - 9$.
B) $2^8 - 1$.
C) $2^8 - 2^6$.
D) $2^{14} - 2^8$.
E) 2^8.

Resolução

Do enunciado, existem 8 elementos de A que não são elementos de B. Com esses 8 elementos, o número de subconjuntos pedido é:

$$\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} = 2^8 - \begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\8\end{pmatrix}$$

$$= 2^8 - 1 - 8$$
$$= 2^8 - 9$$

Resposta: A

Questão 3

Considere a equação:

$$16\left(\frac{1 - ix}{1 + ix}\right)^3 = \left(\frac{1 + i}{1 - i} - \frac{1 - i}{1 + i}\right)^4.$$

Sendo x um número real, a soma dos quadrados das soluções dessa equação é

A) 3.
B) 6.
C) 9.
D) 12.
E) 15.

Resolução

$$16\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)^3 = \left(\frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^4 \quad \therefore \quad 16\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)^3 = (2\,i)^4$$

$$\therefore \quad \frac{(1-ix)^3}{(1+ix)^3} = 1 \quad \therefore \quad (1+ix)^3 - (1-ix)^3 = 0$$

$\therefore \quad 6ix + 2i^3x^3 = 0 \quad \therefore \quad 2ix(3 + i^2x^2) = 0$

$\therefore \quad 2ix(3 - x^2) = 0$

$x = 0$

ou

$x^2 = 3 \quad \therefore \quad x = \pm\sqrt{3}$

A soma dos quadrados das soluções é

$$0^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 6$$

Resposta: B

Questão 4

Assinale a opção que indica o módulo do número complexo

$$\frac{1}{1 + i\,cotg\,x},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

A) $|\cos x|$
B) $(1 + \text{sen}\,x)/2$
C) $\cos^2 x$
D) $|\text{cossec}\,x|$
E) $|\text{sen}\,x|$

Resolução

$$\left|\frac{1}{1+i\cot g\,x}\right| = \frac{1}{|1+i\cot g\,x|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1^2 + \cot g^2 x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\text{cosec}^2 x}}$$

$$= \frac{1}{|\text{cosec}\,x|}$$

$$= |\text{sen}\,x|$$

Resposta: E

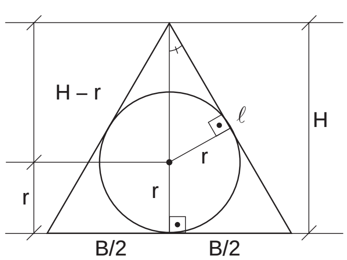
Questão 5

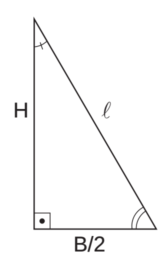
Considere: um retângulo cujos lados medem B e H, um triângulo isósceles em que a base e a altura medem, respectivamente, B e H, e o círculo inscrito neste triângulo. Se as áreas do retângulo, do triângulo e do círculo, nesta ordem, formam uma progressão geométrica, então B/H é uma raiz do polinômio

A) $\pi^3x^3 + \pi^2x^2 + \pi x - 2 = 0.$
B) $\pi^2x^3 + \pi^3x^2 + x + 1 = 0.$
C) $\pi^3x^3 - \pi^2x^2 + \pi x + 2 = 0.$
D) $\pi x^3 - \pi^2x^2 + 2\pi x - 1 = 0.$
E) $x^3 - 2\pi^2x^2 + \pi x - 1 = 0.$

Resolução

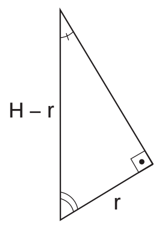
Do enunciado temos:





$$\ell^2 = H^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2$$

$$\ell = \frac{\sqrt{4H^2 + B^2}}{2}$$



Por semelhança temos:

$$\frac{r}{\frac{B}{2}} = \frac{H - r}{\frac{\sqrt{4H^2 + B^2}}{2}} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{H \cdot B}{B + \sqrt{4H^2 + B^2}}$$

temos ainda: $PG\left(B \cdot H, \frac{B \cdot H}{2}, \pi r^2\right)$ com razão $\frac{1}{2}$.

logo: $\frac{B \cdot H}{2} \cdot \frac{1}{2} = \pi\left(\frac{H \cdot B}{B + \sqrt{4H^2 + B^2}}\right)^2 \Rightarrow 2B \cdot \sqrt{4H^2 + B^2} + 4H^2 + 2B^2 = 4\pi \cdot H \cdot B$

Dividindo por 2HB, vem: $\sqrt{4 + \left(\frac{B}{H}\right)^2} + 2 \cdot \frac{H}{B} + \frac{B}{H} = 2\pi$

Chamando $\frac{B}{H} = x$, temos: $\sqrt{4x^2 + x^4} + 2 + x^2 = 2\pi \cdot x \quad \Rightarrow$

$\sqrt{4x^2 + x^4} = 2\pi x - (x^2 + 2)$ elevando ambos os lados ao quadrado, vem:

$4x^2 + \cancel{x^4} = 4\pi^2x^2 - 4\pi x(x^2 + 2) + \cancel{x^4} + 4x^2 + 4 \quad \Rightarrow$

$\pi x^3 - \pi^2x^2 + 2\pi x - 1 = 0$

Resposta: D

Questão 6

Se as medidas dos lados de um triângulo obtusângulo estão em progressão geométrica de razão r, então r pertence ao intervalo

A) $(0, (1 + \sqrt{2})/2)$.

B) $\left((1 + \sqrt{2})/2, \sqrt{(1 + \sqrt{5})/2}\right)$.

C) $\left(\sqrt{(1 + \sqrt{5})/2}, (1 + \sqrt{5})/2\right)$.

D) $\left((1 + \sqrt{5})/2, \sqrt{2 + \sqrt{2}/2}\right)$.

E) $\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}/2}, (2 + \sqrt{3})/2\right)$.

Resolução

As medidas dos lados desse triângulo podem ser representadas por $\frac{a}{r}$, a e ar, em que $a > 0$ e $r > 0$.

Podemos afirmar que $r \neq 1$, pois, com $r = 1$, o triângulo seria equilátero.
Resta-nos estudar dois casos
1º caso: $0 < r < 1$

Neste caso, a maior medida é $\frac{a}{r}$ e temos $\frac{a}{r} < a + ar$ e $\left(\frac{a}{r}\right)^2 > a^2 + (ar)^2$.

De $\frac{a}{r} < a + ar$, temos:

$$\frac{1}{r} < 1 + r$$

$$r^2 + r - 1 > 0 \quad \therefore \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2} < r < 1 \quad (1)$$

De $\left(\frac{a}{r}\right)^2 > a^2 + (a \cdot r)^2$, temos:

$$\frac{1}{r^2} > 1 + r^2$$

$$r^4 + r^2 - 1 < 0$$

$$0 < r^2 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \therefore \quad 0 < r < \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \quad (2)$$

De (1) e (2), temos $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < r < \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

2º caso: $r > 1$

Neste caso, a maior medida é ar e temos $ar < a + \frac{a}{r}$ e $(ar)^2 > a^2 + \left(\frac{a}{r}\right)^2$.

De $ar < a + \frac{a}{r}$, temos:

$$r < 1 + \frac{1}{r}$$

$$r^2 - r - 1 < 0 \quad \therefore \quad 1 < r < \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad (3)$$

De $(ar)^2 > a^2 + \left(\frac{a}{r}\right)^2$, temos:

$$r^2 > 1 + \frac{1}{r^2}$$

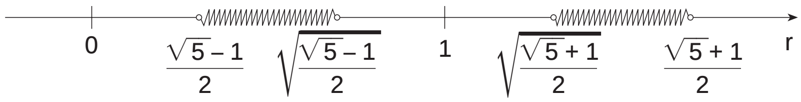
$$r^4 - r^2 - 1 > 0$$

$$r^2 > \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \therefore \quad r > \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \quad (4)$$

De (3) e (4), temos $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}} < r < \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Resumindo, sendo A o conjunto dos possíveis valores de r, temos:

$$A = \left\{ r \in \mathbb{R} : \frac{\sqrt{5}-1}{2} < r < \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} < r < \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right\}$$



Como A não está contido em qualquer um dos intervalos indicados nas alternativas, a questão não apresenta alternativa correta.

Sem resposta

Questão 7

Sejam x, y e z números reais positivos tais que seus logaritmos numa dada base k são números primos satisfazendo

$$\log_k(xy) = 49,$$
$$\log_k(x/z) = 44.$$

Então, $\log_k(xyz)$ é igual a

A) 52.
B) 61.
C) 67.
D) 80.
E) 97.

Resolução

- De $\log_k x + \log_k y = 49$, temos:

  Se $\log_k x = 2$, então $\log_k y = 47$.

  De $\log_k x = 47$, então $\log_k y = 2$.

  Se $\log_k x = -2$, então $\log_k y = 51$, que não é um número primo.

  Se $\log_k x$ for um número primo ímpar e diferente de 47, então $\log_k y$ será um número par diferente de 2 e diferente de -2; nesse caso, $\log_k y$ não será um número primo.
- De $\log_k x - \log_k z = 44$ e $\log_k x = 2$, temos $\log_k z = -42$, que não é um número primo.
- De $\log_k x - \log_k z = 44$ e $\log_k x = 47$, temos $\log_k z = 3$, que é um número primo.

  Portanto $\log_k x = 47$, $\log_k y = 2$, $\log_k z = 3$ e $\log_k x + \log_k y + \log_k z = 52$, ou seja, $\log_k(xyz) = 52$.

Resposta: A

Questão 8

Sejam x e y dois números reais tais que e^x, e^y e o quociente

$$\frac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y\sqrt{5}}$$

são todos racionais. A soma x + y é igual a

A) 0.
B) 1.
C) $2\log_5 3$.
D) $\log_5 2$.
E) $3\log_e 2$.

Resolução

Como $\dfrac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y\sqrt{5}}$ é racional, existem p inteiro e q inteiro não nulo, tais que:

$$\frac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y\sqrt{5}} = \frac{p}{q} \qquad \therefore \qquad qe^x - 2q\sqrt{5} = 4p - pe^y\sqrt{5} \quad (1)$$

Além disso e^x e e^y são racionais. Assim, a afirmação (1) é verdadeira se e somente se:

$$\begin{cases} qe^x = 4p \\ -2q = -pe^y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{p}{q} = \dfrac{e^x}{4} \\ \dfrac{p}{q} = \dfrac{2}{e^y} \end{cases}$$

Logo, $\dfrac{e^x}{4} = \dfrac{2}{e^y} \quad \therefore \quad e^{x+y} = 8$

$$\therefore \quad x + y = \log_e 8$$
$$x + y = 3\log_e 2$$

Resposta: E

Questão 9

Seja Q(z) um polinômio do quinto grau, definido sobre o conjunto dos números complexos, cujo coeficiente de z^5 é igual a 1. Sendo $z^3 + z^2 + z + 1$ um fator de Q(z), Q(0) = 2 e Q(1) = 8, então, podemos afirmar que a soma dos quadrados dos módulos das raízes de Q(z) é igual a

A) 9.
B) 7.
C) 5.
D) 3.
E) 1.

Resolução

Como o coeficiente de z^5 é 1 e $z^3 + z^2 + z + 1$ é fator de Q(z) do quinto grau, esse polinômio pode ser representado por:

$Q(z) \equiv (z^2 + az + b)(z^3 + z^2 + z + 1)$, em que a e b são constantes.

- De Q(0) = 2 temos:
  $(b)(1) = 2 \quad \therefore \quad b = 2$
- De Q(1) = 8 temos:
  $(1 + a + 2)(1 + 1 + 1 + 1) = 8 \quad \therefore \quad a = -1$

  Assim, $Q(z) = (z^2 - z + 2)(z^3 + z^2 + z + 1)$.

  As raízes de Q(z) são dadas pelas raízes das equações $z^2 - z + 2 = 0$ e $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

  Resolvendo-se $z^2 - z + 2 = 0$, vem:

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i \quad \text{e} \quad z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

  Resolvendo-se $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, vem:

  $z^2(z + 1) + 1(z + 1) = 0$
  $(z + 1)(z^2 + 1) = 0$
  $z = -1;\ z = i$ e $z = -i$

  A soma dos quadrados dos módulos das raízes é

$$\left|-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i\right|^2 + \left|-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i\right|^2 + |-1|^2 + |i|^2 + |-i|^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1 + 1 + 1 = 7$$

Resposta: B

Questão 10

Sendo c um número real a ser determinado, decomponha o polinômio $9x^2 - 63x + c$, numa diferença de dois cubos

$$(x + a)^3 - (x + b)^3.$$

Neste caso, $|a + |b| - c|$ é igual a

A) 104.
B) 114.
C) 124.
D) 134.
E) 144.

Resolução

Do enunciado, temos a igualdade:

$$9x^2 - 63x + c = (x + a)^3 - (x + b)^3$$
$$9x^2 - 63x + c = x^3 + 3x^2 \cdot a + 3 \cdot xa^2 + a^3 - x^3 - 3x^2b - 3xb^2 - b^3$$
$$9x^2 - 63x + c = (3a - 3b)x^2 + (3a^2 - 3b^2)x + a^3 - b^3$$

Assim,

$$\begin{cases} 3a - 3b = 9 \\ 3a^2 - 3b^2 = -63 \\ a^3 - b^3 = c \end{cases} \qquad \begin{cases} a - b = 3 \\ (a + b)(a - b) = -21 \\ a^3 - b^3 = c \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, temos $a = -2$, $b = -5$, $c = 117$.
Logo $|-2 + |-5| - 117| = |-114| = 114$.

Resposta: B

Questão 11

Sobre a equação na variável real x,

$$|\,|\,|\,x - 1\,| - 3\,| - 2\,| = 0,$$

podemos afirmar que

A) ela não admite solução real.
B) a soma de todas as suas soluções é 6.
C) ela admite apenas soluções positivas.
D) a soma de todas as soluções é 4.
E) ela admite apenas duas soluções reais.

Resolução

$|\,|\,|\,x - 1\,| - 3\,| - 2\,| = 0$
$|\,|\,x - 1\,| - 3\,| - 2 = 0$
$|\,|\,x - 1\,| - 3\,| = 2$

temos duas possibilidades:

(I) $|\,x - 1\,| - 3 = 2 \quad \therefore \quad |\,x - 1\,| = 5$, ou seja:

$$\begin{matrix} x - 1 = 5 & & x - 1 = -5 \\ \therefore\ x = 6 & \text{ou} & \therefore\ x = -4 \end{matrix}$$

(II) $|x - 1| - 3 = -2 \quad \therefore \quad |x - 1| = 1$, ou seja:

$$\begin{matrix} x - 1 = 1 & \text{ou} & x - 1 = -1 \\ \therefore\ x = 2 & & x = 0 \end{matrix}$$

A soma de todas as soluções é: $-4 + 0 + 2 + 6 = 4$

Resposta: D

Questão 12

Determine quantos números de 3 algarismos podem ser formados com 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, satisfazendo à seguinte regra: O número não pode ter algarismos repetidos, exceto quando iniciar com 1 ou 2, caso em que o 7 (e apenas o 7) pode aparecer mais de uma vez. Assinale o resultado obtido.

A) 204
B) 206
C) 208
D) 210
E) 212

Resolução

Do enunciado, ou os números têm 3 algarismos distintos, ou o número é 177, ou o número é 277.
Assim:

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{}\boxed{}\boxed{} & & \text{(177 ou 277)} & & \\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow & & & & \\ 7\cdot 6\cdot 5 & + & 2 & = & 212 \end{array}$$

Resposta: E

Questão 13

Seja x um número real no intervalo $0 < x < \pi/2$. Assinale a opção que indica o comprimento do menor intervalo que contém todas as soluções da desigualdade

$$\frac{1}{2}tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sqrt{3}\left(\cos^2\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)\sec(x)\geqslant 0.$$

A) $\pi/2$
B) $\pi/3$
C) $\pi/4$
D) $\pi/6$
E) $\pi/12$

Resolução

$$\frac{1}{2}\,tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sqrt{3}\left(\cos^2\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)\sec x\geqslant 0.$$

$$\frac{1}{2}\cdot \text{cotg}\,x-\sqrt{3}\cdot\frac{2\cos^2\frac{x}{2}-1}{2}\cdot\sec x\geqslant 0 \quad (2)$$

$$\text{cotg}\,x-\sqrt{3}\cdot\cos x\cdot\frac{1}{\cos x}\geqslant 0 \quad\therefore\quad \text{cotg}\,x\geqslant\sqrt{3}\quad\therefore\quad \frac{1}{\text{tg}\,x}\geqslant\sqrt{3}$$

No intervalo $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ temos:

$$\text{tg}\,x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}\quad\therefore\quad 0 < x\leqslant\frac{\pi}{6}$$

Assim, o comprimento do menor intervalo que contém todas as soluções é $\dfrac{\pi}{6}$.

Resposta: D

Questão 14

Assinale a opção que indica a soma dos elementos de $A \cup B$, sendo:

$$A = \left\{ x_k = sen^2\left(\frac{k^2\pi}{24}\right) : k = 1,2 \right\} \text{ e}$$

$$B = \left\{ y_k = sen^2\left(\frac{(3k+5)\pi}{24}\right) : k = 1,2 \right\}.$$

A) 0
B) 1
C) 2
D) $\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right) / 3$
E) $\left(2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right) / 3$

Resolução

Do enunciado,

$$A = \left\{ \text{sen}^2 \frac{\pi}{24}, \text{sen}^2 \frac{\pi}{6} \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ \text{sen}^2 \frac{\pi}{3}, \text{sen}^2 \frac{11\pi}{24} \right\}$$

Como A e B são disjuntos, a soma dos elementos de $A \cup B$ é:

$$S = \text{sen}^2 \frac{\pi}{24} + \text{sen}^2 \frac{\pi}{6} + \text{sen}^2 \frac{\pi}{3} + \text{sen}^2 \frac{11\pi}{24}$$

Lembrando de arcos complementares, podemos escrever:

$$S = \text{sen}^2 \frac{\pi}{24} + \cos^2 \frac{\pi}{24} + \text{sen}^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} \quad \therefore \quad S = 2$$

Resposta: C

Questão 15

Sejam $A = (a_{jk})$ e $B = (b_{jk})$, duas matrizes quadradas $n \times n$, onde a_{jk} e b_{jk} são, respectivamente, os elementos da linha j e coluna k das matrizes A e B, definidos por $a_{jk} = \binom{j}{k}$ quando $j \geqslant k$, $a_{jk} = \binom{k}{j}$ quando $j < k$ e

$$b_{jk} = \sum_{p=0}^{jk} (-2)^p \binom{jk}{p}.$$

O traço de uma matriz quadrada (c_{jk}) de ordem $n \times n$ é definido por $\Sigma_{p=1}^{n} c_{pp}$. Quando n for ímpar, o traço de $A + B$ é igual a

A) $\dfrac{n(n-1)}{3}$.
B) $\dfrac{(n-1)(n+1)}{4}$.
C) $\dfrac{(n^2 - 3n + 2)}{(n-2)}$.
D) $\dfrac{3(n-1)}{n}$.
E) $\dfrac{(n-1)}{(n-2)}$.

Resolução

Seja C = A + B. Como $\mathrm{tr}(C) = \Sigma_{p=1}^{n} c_{pp}$, temos:

$\mathrm{tr}(C) = \Sigma_{p=1}^{n} (a_{pp} + b_{pp})$

Do enunciado:

$$a_{pp} = \binom{p}{p}$$

$$b_{pp} = \Sigma_{p=0}^{p^2} \binom{p^2}{p} (-2)^p = \Sigma_{p=0}^{p^2} \binom{p^2}{p} 1^{p^2-p} \cdot (-2)^p = (1-2)^{p^2} = (-1)^{p^2}$$

Assim:

$\mathrm{tr}(C) = \Sigma_{p=1}^{n} a_{pp} + \Sigma_{p=1}^{n} b_{pp}$

$\mathrm{tr}(C) = \Sigma_{p=1}^{n} 1 + \Sigma_{p=1}^{n} (-1)^{p^2}$

Quando n é ímpar, $\Sigma_{p=1}^{n} (-1)^{p^2} = -1$. Assim:

$$\mathrm{tr}(C) = n - 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{(n-2)} = \frac{n^2 - 3n + 2}{n-2}$$

Resposta: C

Questão 16

Considere no plano cartesiano xy o triângulo delimitado pelas retas 2x = y, x = 2y e x = –2y + 10. A área desse triângulo mede

A) $\frac{15}{2}$.

B) $\frac{13}{4}$.

C) $\frac{11}{6}$.

D) $\frac{9}{4}$.

E) $\frac{7}{2}$.

Resolução

Sejam A, B e C os vértices desse triângulo.
Temos:

$$\begin{cases} 2x = y \\ x = 2y \end{cases} \quad \therefore \quad x = 0 \text{ e } y = 0 \quad \therefore \quad A(0, 0)$$

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x = y \end{cases} \quad \therefore \quad x = 2 \text{ e } y = 3 \quad \therefore \quad B(2, 4)$$

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ x = 2y \end{cases} \quad \therefore \quad x = 5 \text{ e } y = \frac{5}{2} \quad \therefore \quad B\left(5, \frac{5}{2}\right)$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & \frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix} = -15$$

$$\text{Área (ABC)} = \frac{1}{2} |-15| = \frac{15}{2}$$

Resposta: A

Questão 17

Sejam A: (a, 0), B: (0, a) e C: (a, a), pontos do plano cartesiano, em que a é um número real não nulo. Nas alternativas abaixo, assinale a equação do lugar geométrico dos pontos P: (x, y) cuja distância à reta que passa por A e B, é igual à distância de P ao ponto C.

A) $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay + 3a^2 = 0$

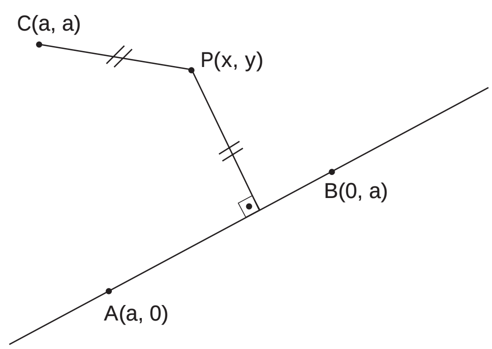
B) $x^2 + y^2 + 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$

C) $x^2 + y^2 - 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$

D) $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$

E) $x^2 + y^2 + 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$

Resolução



$$\left.\begin{array}{l} m_{AB} = \dfrac{a - 0}{0 - a} = -1 \\ A(a, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} y - 0 = -1(x - a) \\ x + y - a = 0\ (\overleftrightarrow{AB}) \end{array}$$

$$d_{P,\,\overleftrightarrow{AB}} = d_{PC}$$

$$\frac{|x + y - a|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{(x - a)^2 + (y - a)^2}$$

Elevando ao quadrado:

$x^2 + y^2 + a^2 + 2xy - 2ax - 2ay = 2(x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2ay + a^2)$

$x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay + 3a^2 = 0$

Resposta: A

Questão 18

Seja P_n um polígono regular de n lados, com $n > 2$. Denote por a_n o apótema e por b_n o comprimento de um lado de P_n. O valor de n para o qual valem as desigualdades

$$b_n \leqslant a_n \quad e \quad b_{n-1} > a_{n-1},$$

pertence ao intervalo

A) $3 < n < 7$.

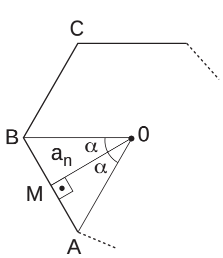
B) $6 < n < 9$.

C) $8 < n < 11$.

D) $10 < n < 13$.

E) $12 < n < 15$.

Resolução



$AB = b_n$

$AM = \dfrac{b_n}{2}$

n: número de lados

$$\text{tg}\alpha = \frac{AM}{MO} = \frac{\frac{b_n}{2}}{a_n} = \frac{1}{2} \qquad \text{(supondo } b_n = a_n\text{)}$$

$$\text{tg}2\alpha = \frac{2\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

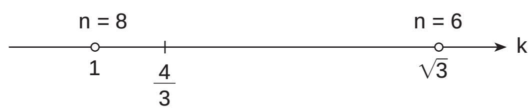
Logo, $b_n \leqslant a_n \Leftrightarrow \text{tg}2\alpha \leqslant \frac{4}{3}$

Com n = 8, temos $2\alpha = 45º$ e, portanto, $\text{tg}2\alpha = 1 < \frac{4}{3}$ (I)

Com n = 6, temos $2\alpha = 60º$ e, portanto, $\text{tg}2\alpha = \sqrt{3} > \frac{4}{3}$ (II)

Seja $\text{tg}2\alpha = k$, para n = 7.

Observemos que $45º < 2\alpha < 60º$ e, portanto, $1 < \text{tg}2\alpha < \sqrt{3}$



1) Se $k < \frac{4}{3}$, então, $b_7 < a_7$ e $b_6 > a_6$ e, então, n = 7.

2) Se $k > \frac{4}{3}$, então, $b_8 < a_8$ e $b_7 > a_7$ e, então, n = 8. O valor de n, pedido, será 8.

Concluímos que $6 < n < 9$.

Resposta: B

Questão 19

Sejam P_1 e P_2 octógonos regulares. O primeiro está inscrito e o segundo circunscrito a uma circunferência de raio R. Sendo A_1 a área de P_1 e A_2 a área de P_2, então a razão $\frac{A_1}{A_2}$ é igual a

A) $\sqrt{\frac{5}{8}}$.

B) $\frac{9\sqrt{2}}{16}$.

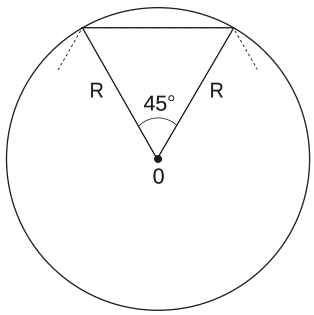
C) $2\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

D) $\frac{\left(4\sqrt{2} + 1\right)}{8}$.

E) $\frac{\left(2 + \sqrt{2}\right)}{4}$.

Resolução

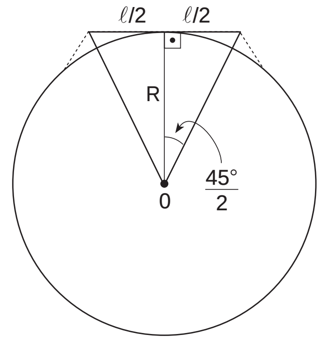
Polígono P_1



$$A_1 = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \text{sen}45^\circ$$

$$\therefore \quad A_1 = R^2 \cdot 2\sqrt{2}$$

Polígono P_2



$$tg45^\circ = \frac{2tg\left(\frac{45^\circ}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{45^\circ}{2}\right)}$$

$$1 = \frac{2tg\left(\frac{45^\circ}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{45^\circ}{2}\right)} \quad \therefore \quad tg\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{2} - 1$$

$$tg\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \frac{\ell/2}{R} \;\therefore\; \sqrt{2} - 1 = \frac{\ell/2}{R} \;\therefore\; \ell = 2R(\sqrt{2} - 1)$$

$$A_2 = 8 \cdot \frac{\ell \cdot R}{2} \;\therefore\; A_2 = 8 \cdot \frac{2R(\sqrt{2} - 1) \cdot R}{2}$$

$$\therefore\; A_2 = 8R^2(\sqrt{2} - 1)$$

Logo, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{R^2\, 2\sqrt{2}}{8R^2(\sqrt{2} - 1)} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$

Resposta: E

Questão 20

Considere uma pirâmide regular de base hexagonal, cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm. Secciona-se a pirâmide por um plano paralelo à base, obtendo-se um tronco de volume igual a 1 cm^3 e uma nova pirâmide. Dado que a razão entre as alturas das pirâmides é $\frac{1}{\sqrt{2}}$, a altura do tronco, em centímetros, é igual a

A) $\frac{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}{4}$

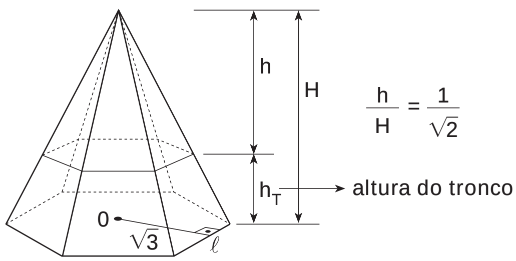
B) $\frac{\left(\sqrt{6} - \sqrt{3}\right)}{3}$.

C) $\frac{\left(3\sqrt{3} - \sqrt{6}\right)}{21}$.

D) $\dfrac{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}{6}$.

E) $\dfrac{\left(2\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{22}$.

Resolução



1) $\dfrac{h}{H}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ \therefore\ \dfrac{h-H}{H}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\ \therefore\ \dfrac{H-h}{H}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

Logo: $\dfrac{h_T}{H}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\ \therefore\ h_T=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}H\quad(1)$

2) Sendo V e v, respectivamente, os volumes da pirâmide e da nova pirâmide, temos:

$$\frac{h}{H}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \therefore\ \frac{v}{V}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\ \therefore\ \frac{v}{V}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Daí: $\dfrac{v-V}{V}=\dfrac{1-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\ \therefore\ \dfrac{V-v}{V}=\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$

Como V – v é o volume do tronco, temos:

$$\frac{1}{V}=\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\ \therefore\ V=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$$

Sendo ℓ a aresta da base da pirâmide, temos:

$$\frac{\ell\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\ \therefore\ \ell=2$$

A área da base da pirâmide é $6\cdot\dfrac{2^2\sqrt{3}}{4}$, ou seja, $6\sqrt{3}$

Logo, $\dfrac{1}{3}\cdot 6\sqrt{3}\cdot H=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}\ \therefore\ H=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}(2\sqrt{2}-1)}$

Substituindo o valor de H em (1), vem:

$$h_T=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}(2\sqrt{2}-1)}\ \therefore\ h_T=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{21}$$

Resposta: C

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.

Questão 21

Determine o conjunto C, sendo A, B e C conjuntos de números reais tais que

$A \cup B \cup C = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + x \geqslant 2\}$,

$A \cup B = \{x \in \mathbb{R}: 8^{-x} - 3 \cdot 4^{-x} - 2^{2-x} > 0\}$,

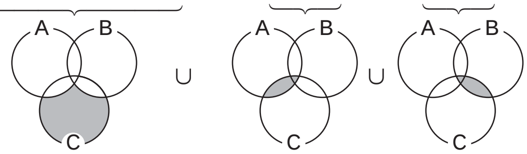
$A \cap C = \{x \in \mathbb{R}: \log(x + 4) \leqslant 0\}$,

$B \cap C = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leqslant 2x + 7 < 2\}$.

Resolução

Note que:

$C = \underbrace{[(A \cup B \cup C) - (A \cup B)]} \cup \underbrace{[A \cap C]} \cup \underbrace{[B \cap C]}$



$A \cup B \cup C$:

De $x^2 + x \geqslant 2$, temos $x^2 + x - 2 \geqslant 0$ e, portanto $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 1$.

$A \cup B$:

De $8^{-x} - 3 \cdot 4^{-x} - 2^2 \cdot 2^{-x} > 0$ e $2^{-x} = t$, temos:

$t^3 - 3t^2 - 4t > 0$

$(t^2 - 3t - 4)t > 0$

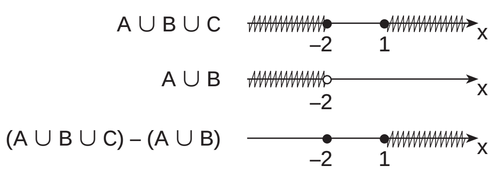
$t^2 - 3t - 4 > 0$ (pois $t > 0$)

$t < -1$ ou $t > 4$

$t > 4$ (pois $t > 0$)

$2^{-x} > 2^2$

$-x > 2 \quad \therefore \quad x < -2$



(1)

$A \cap C$:

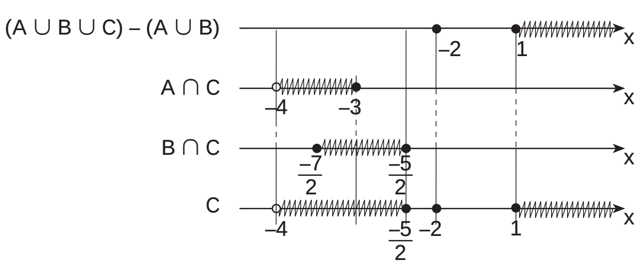
De $\log(x + 4) \leqslant 0$, temos:

$0 < x + 4 \leqslant 1$ e, portanto, $-4 < x \leqslant -3$.

$B \cap C$:

De $0 \leqslant 2x + 7 < 2$, temos:

$-7 \leqslant 2x < -5$ e, portanto, $\dfrac{-7}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{-5}{2}$.



Resposta: $\{x \in \mathbb{R} / -4 < x \leqslant -\dfrac{5}{2}$ ou $x = -2$ ou $x \geqslant 1\}$

Questão 22

Determine o conjunto A formado por todos os números complexos z tais que

$$\frac{\bar{z}}{z-2i} + \frac{2z}{\bar{z}+2i} = 3 \text{ e } 0 < |z-2i| \leqslant 1.$$

Resolução

Sendo $w = \dfrac{z}{\bar{z}+2i}$, temos $\bar{w} = \dfrac{\bar{z}}{z-2i}$.

Assim, de $\dfrac{\bar{z}}{z-2i} + \dfrac{2z}{\bar{z}+2i} = 3$, temos:

$\bar{w} + 2w = 3$

$\bar{w} + w + w = 3$

$2R_e(w) + w = 3 \quad \therefore \quad w \in \mathbb{R}$

De $w \in \mathbb{R}$, temos $R_e(w) = w$ e, portanto, $2w + w = 3 \quad \therefore \quad w = 1$.

Temos $\dfrac{z}{\bar{z}+2i} = 1$ e $z = \bar{z} + 2i$

Sendo $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$x + yi = x - yi + 2i$

$2yi = 2i \quad \therefore \quad y = 1$ e $z = x + i$

De $0 < |z - 2i| \leqslant 1$, temos:

$0 < |x + i - 2i| \leqslant 1$

$0 < |x - i| \leqslant 1$

$0 < \sqrt{x^2+1} \leqslant 1 \quad \therefore \quad x = 0$ e $z = 0 + i$

Resposta: A = {i}

Questão 23

Seja k um número inteiro positivo e $A_k = \{j \in \mathbb{N}: j \leqslant k \text{ e } mdc(j, k) = 1\}$.
Verifique se $n(A_3)$, $n(A_9)$, $n(A_{27})$ e $n(A_{81})$, estão ou não, nesta ordem, numa progressão aritmética ou geométrica. Se for o caso, especifique a razão.

Resolução

A_3 é o conjunto de todos os números naturais j, $j \leqslant 3$, tais que j e 3 sejam primos entre si.

Logo, $A_3 = \{0, 1, 2, 3\} - \{0, 3\} = \{1, 2\}$

$n(A_3) = 4 - 2 \quad \therefore \quad n(A_3) = 2$

A_9 é o conjunto de todos os números naturais j, $j \leqslant 9$, tais que j e 9 sejam primos entre si.

Logo, $A_9 = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\} - \{0, 3, 6, 9\}$

$n(A_9) = 10 - 4 \quad \therefore \quad n(A_9) = 6$

Analogamente, temos:

$A_{27} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 27\} - \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27\}$

$n(A_{27}) = 28 - 10 \quad \therefore \quad n(A_{27}) = 18$

$A_{81} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 81\} - \{0, 3, 6, \dots, 3 \cdot 27\}$

$n(A_{81}) = 82 - 28 \quad \therefore \quad n(A_{81}) = 54$

Resposta: A seqüência (2, 6, 18, 54) é uma progressão geométrica de razão 3.

Questão 24

Considere a equação:

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x.$$

a) Para que valores do parâmetro real p a equação admite raízes reais?
b) Determine todas essas raízes reais.

Resolução

$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$ (1)

Dessa igualdade, temos as condições:

$x \geqslant 0$ (adição de raízes quadradas)

$x^2 - 1 \geqslant 0$ (radicando de uma raiz quadrada)

$x^2 - p \geqslant 0$ (radicando de uma raiz quadrada)

Logo, podemos afirmar que $x \geqslant 1$. (2)

De (1), temos $\sqrt{x^2 - p} = x - 2\sqrt{x^2 - 1}$. (3)

Dessa igualdade, resulta $x - 2\sqrt{x^2 - 1} \geqslant 0$, ou seja, $x \geqslant 2\sqrt{x^2 - 1}$.

Como $x \geqslant 1$, temos as proposições equivalentes:

$x^2 \geqslant 4(x^2 - 1)$

$x^2 \geqslant 4x^2 - 4$

$4 \geqslant 3x^2 \quad \therefore \quad x^2 \leqslant \frac{4}{3}$. (4)

De (2), (3) e (4), temos as proposições equivalentes:

$$\left(\sqrt{x^2 - p}\right)^2 = \left(x - 2\sqrt{x^2 - 1}\right)^2$$

$x^2 - p = x^2 - 4x\sqrt{x^2 - 1} + 4(x^2 - 1)$

$4x\sqrt{x^2 - 1} = 4x^2 + p - 4$

Seja $p - 4 = 4q$. (5)

Temos as proposições equivalentes:

$4x\sqrt{x^2 - 1} = 4x^2 + 4q$

$x\sqrt{x^2 - 1} = x^2 + q$. (6)

Dessa igualdade, resulta a condição:

$x^2 + q \geqslant 0$, ou seja, $q \geqslant -x^2$. (7)

De (6) e (7), temos as proposições equivalentes:

$$\left(x\sqrt{x^2 - 1}\right)^2 = \left(x^2 + q\right)^2$$

$x^4 - x^2 = x^4 + 2qx^2 + q^2$

$-2qx^2 - x^2 = q^2$

$-x^2(2q + 1) = q^2$. (8)

Dessa igualdade, podemos concluir que

$2q + 1 < 0$, ou seja, $q < \frac{-1}{2}$. (9)

De (8) e (9), temos $x^2 = \frac{-q^2}{2q+1}$. (10)

De (2), (9) e (10), temos:

$$\frac{-q^2}{2q+1} \geqslant 1$$
$$-q^2 \leqslant 2q + 1$$
$$0 \leqslant q^2 + 2q + 1$$
$$0 \leqslant (q + 1)^2 \quad \text{(verificada para todo q, } q \in \mathbb{R}\text{)}$$

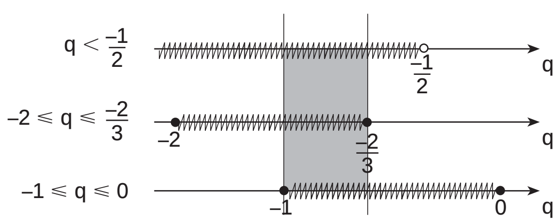
De (4), (9) e (10), temos:

$$\frac{-q^2}{2q+1} \leqslant \frac{4}{3}$$
$$-3q^2 \geqslant 8q + 4$$
$$3q^2 + 8q + 4 \leqslant 0 \quad \therefore \quad -2 \leqslant q \leqslant \frac{-2}{3}. \qquad (11)$$

De (7), (9) e (10), temos:

$$q \geqslant -\frac{-q^2}{2q+1}$$
$$2q^2 + q \leqslant q^2$$
$$q^2 + q \leqslant 0 \quad \therefore \quad -1 \leqslant q \leqslant 0. \qquad (12)$$

Das condições (9), (11) e (12), temos:



Logo, temos $-1 \leqslant q \leqslant \frac{-2}{3}$. (13)

a) De (13) e (5), temos:

$$-1 \leqslant q \leqslant \frac{-2}{3}$$

$$-4 \leqslant 4q \leqslant \frac{-8}{3}$$

$$-4 \leqslant p - 4 \leqslant \frac{-8}{3}$$

$$0 \leqslant p \leqslant \frac{4}{3}$$

Resposta: $0 \leqslant p \leqslant \frac{4}{3}$

b) De (5) e (10), temos:

$$x^2 = \frac{-q^2}{2q+1} \text{ e } q = \frac{p-4}{4}$$

$$x^2 = \frac{-\frac{(p-4)^2}{16}}{\frac{p-4}{2}+1}$$

$$x^2 = \frac{-(p-4)^2}{8(p-4)+16}$$

$$x^2 = \frac{(p-4)^2}{16-8p} \quad \therefore \quad x^2 = \frac{(p-4)^2}{4(4-2p)}$$

De (2), temos $x \geqslant 1$ e, portanto,

$$x = \frac{|p-4|}{2\sqrt{4-2p}}$$

Como $0 \leqslant p \leqslant \frac{4}{3}$, temos $x = \frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$

Resposta: Sendo S o conjunto solução, temos:

$$0 \leqslant p \leqslant \frac{4}{3} \Rightarrow S = \left\{\frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}\right\}$$

$$p < 0 \text{ ou } p > \frac{4}{3} \Rightarrow S = \{\ \}$$

Questão 25

Sendo x, y, z e w números reais, encontre o conjunto solução do sistema

$$\log[(x+2y)(w-3z)^{-1}] = 0,$$
$$2^{x+3z} - 8 \cdot 2^{y-3z+w} = 0,$$
$$\sqrt[3]{2x+y+6z-2w} - 2 = 0.$$

Resolução

Do sistema dado, resultam os seguintes sistemas equivalentes:

$$\begin{cases} \frac{x+2y}{w-3z} = 1 \\ 2^{x+3z} = 2^3 \cdot 2^{y-3z+w} \\ 2x+y+6z-2w = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y = w-3z, \quad w-3z \neq 0 \\ x+3z = 3+y-3z+w \\ 2x+y+6z-2w = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - w = 0 & \times\ -1 \quad \times\ -2 \\ x - y + 6z - w = 3 \\ 2x + y + 6z - 2w = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - w = 0 \\ -3y + 3z = 3 & (\div -3) \\ -3y = 8 & (\div -3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = w \\ y - z = -1 \\ y = \dfrac{-8}{3} \end{cases}$$

$$y - z = -1$$

$$\frac{-8}{3} - z = -1$$

$$\frac{-8}{3} + 1 = z \quad \therefore \quad z = \frac{-5}{3}$$

$$x + 2y + 3z = w$$

$$x - \frac{16}{3} - \frac{15}{3} = w \quad \therefore \quad x = w + \frac{31}{3}$$

Das condições $w - 3z \neq 0$ e $z = \dfrac{-5}{3}$, temos $w \neq -5$.

Portanto, a quádrupla (x, y, z, w) é solução do sistema se, e somente se, ela é da forma $\left(\alpha + \dfrac{31}{3}, \dfrac{-8}{3}, \dfrac{-5}{3}, \alpha\right)$, em que α é um número real diferente de –5.

Resposta: $V = \left\{\left(\alpha + \dfrac{31}{3}, \dfrac{-8}{3}, \dfrac{-5}{3}, \alpha\right), \text{com } \alpha \in \mathbb{R} - \{-5\}\right\}$

Questão 26

Dentre 4 moças e 5 rapazes deve-se formar uma comissão de 5 pessoas com, pelo menos, 1 moça e 1 rapaz. De quantas formas distintas tal comissão poderá ser formada?

Resolução

Do enunciado, para ter, pelo menos, uma moça e um rapaz, a comissão formada só não pode ter cinco rapazes. Assim:

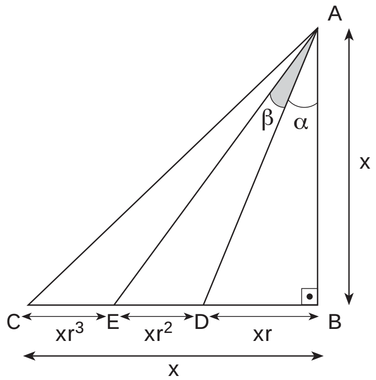
$$C_{9,5} - C_{5,5} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} - 1 = 125$$

Resposta: 125.

Questão 27

Considere um triângulo isósceles ABC, retângulo em B. Sobre o lado $\overline{BC}$, considere, a partir de B, os pontos D e E, tais que os comprimentos dos segmentos $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EC}$, nesta ordem, formem uma progressão geométrica decrescente. Se β for o ângulo $E\hat{A}D$, determine $\operatorname{tg}\beta$ em função da razão r da progressão.

Resolução



Seja α o ângulo DÂC.

Da figura, temos:

$$\begin{cases} tg(\alpha + \beta) = \dfrac{xr^2 + xr}{x} = r^2 + r \\[2ex] tg\alpha = \dfrac{xr}{x} = r \end{cases}$$

Assim:

$$tg\beta = tg[(\alpha + \beta) - \alpha] = \frac{tg(\alpha + \beta) - tg\alpha}{1 + tg(\alpha + \beta)tg\alpha} = \frac{r^2 + r - r}{1 + (r^2 + r)r}$$

$$\therefore \quad tg\beta = \frac{r^2}{1 + r^3 + r^2}$$

Temos ainda que: $x = xr + xr^2 + xr^3$

$\therefore \quad r^3 + r^2 = 1 - r$

Substituindo:

$$tg\beta = \frac{r^2}{1 + 1 - r} \quad \therefore \quad tg\beta = \frac{r^2}{2 - r}$$

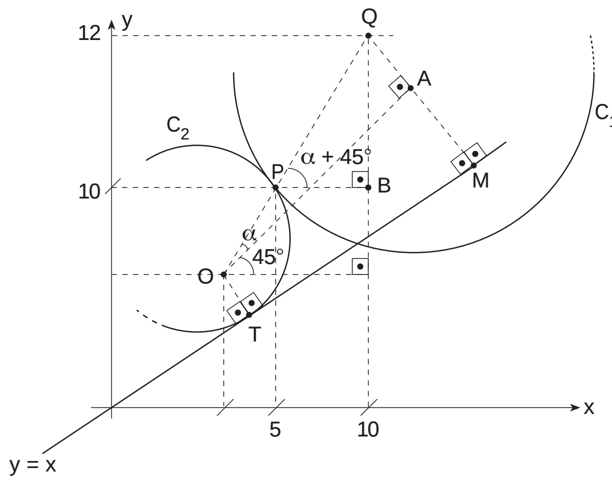
Resposta: $tg\beta = \dfrac{r^2}{2 - r}$

Questão 28

Considere, no plano cartesiano xy, duas circunferências C_1 e C_2, que se tangenciam exteriormente em P : (5, 10). O ponto Q : (10, 12) é o centro de C_1. Determine o raio da circunferência C_2, sabendo que ela tangencia a reta definida pela equação x = y.

Resolução

Sendo OP = OT = r o raio de C_2, do enunciado, temos:



O segmento QM é dado por: $QM = \dfrac{|10 - 12|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$.

Como AM = OT, temos $AQ = \sqrt{2} - r$. (1)

No triângulo PQB, temos $PB^2 + QB^2 = PQ^2 \therefore PQ^2 = 5^2 + 2^2 \therefore PQ = \sqrt{29}$ e, portanto, $OQ = \sqrt{29} + r$. (2)

Ainda:

$$tg(\alpha + 45º) = \frac{2}{5} \therefore \frac{tg\alpha + 1}{1 - tg\alpha} = \frac{2}{5} \therefore tg\alpha = -\frac{3}{7} \therefore \cos\alpha = -\frac{7}{3}sen\alpha$$

Da Relação Fundamental:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \therefore sen^2\alpha + \left(-\frac{7}{3}sen\alpha\right)^2 = 1 \therefore sen\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{58}}. \quad (3)$$

No triângulo AOQ:

$$sen\alpha = \frac{AQ}{OQ}. \text{ De (1) e (2), temos } sen\alpha = \frac{\sqrt{2} - r}{\sqrt{29} + r}. \quad (4)$$

De (3) e (4), temos:

$$\frac{\sqrt{2} - r}{\sqrt{29} + r} = \frac{3}{\sqrt{58}} \therefore r = \frac{-\sqrt{29}}{3 + \sqrt{58}} \text{ (N/C) ou } \frac{\sqrt{2} - r}{\sqrt{29} + r} = -\frac{3}{\sqrt{58}} \therefore r = \frac{5\sqrt{29}}{\sqrt{58} - 3}$$

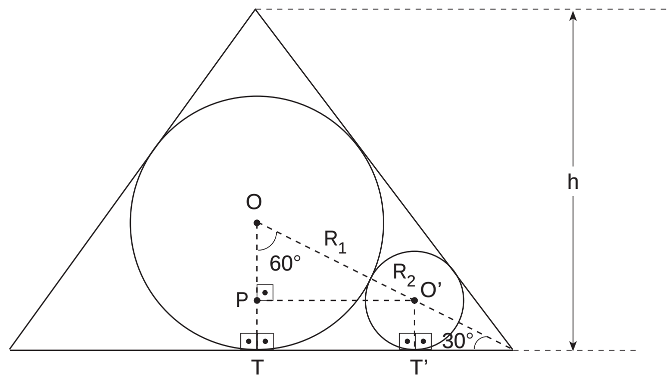
Resposta: $r = \dfrac{5\sqrt{29}}{\sqrt{58} - 3}$

Questão 29

Seja C_1 uma circunferência de raio R_1 inscrita num triângulo equilátero de altura h. Seja C_2 uma segunda circunferência, de raio R_2, que tangencia dois lados do triângulo internamente e C_1 externamente. Calcule $(R_1 - R_2)/h$.

Resolução

Do enunciado, temos a figura:



Da figura, temos OT = R_1, O'T' = R_2 e OO' = $R_1 + R_2$.

Como OP = OT – PT e PT = O'T', temos OP = $R_1 - R_2$.

No triângulo OPO':

$$\cos 60^o = \frac{OP}{OO'} \quad \therefore \quad \frac{1}{2} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \quad \therefore \quad R_1 = 3R_2 \quad \therefore \quad R_2 = \frac{R_1}{3} \qquad (1)$$

Sendo OT o apótema do triângulo equilátero, temos $OT = \frac{h}{3} \quad \therefore \quad R_1 = \frac{h}{3}$. (2)

De (1) e (2), temos $R^2 = \frac{h}{9}$. Assim:

$$\frac{R_1 - R_2}{h} = \frac{\frac{h}{3} - \frac{h}{9}}{h} = \frac{2}{9}.$$

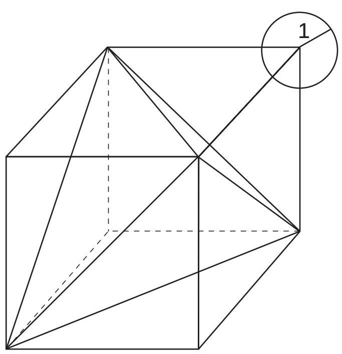
Resposta: $\frac{2}{9}$.

Questão 30

Os quatro vértices de um tetraedro regular, de volume 8/3cm^3, encontram-se nos vértices de um cubo. Cada vértice do cubo é centro de uma esfera de 1cm de raio. Calcule o volume da parte do cubo exterior às esferas.

Resolução

Do enunciado, temos a figura,



$$V_{TETRAEDRO} = a^3 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot a}{2} \cdot a = \frac{a^3}{3}$$

$$\text{Assim } \frac{a^3}{3} = \frac{8}{3} \quad \therefore \quad a = 2$$

$$V_{PEDIDO} = 2^3 - 8 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = 8 - \frac{4}{3}\pi = \frac{24 - 4\pi}{3}$$

Resposta: $\frac{24 - 4\pi}{3}$cm^3

COMENTÁRIO

Uma prova bem elaborada, com excessão da questão 6, que não apresentou alternativa correta.