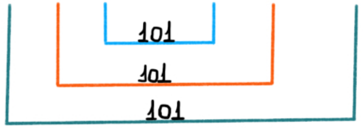
Considerações importantes:

- PA de 3 termos: $(x - r, x, x + r)$

Somar os números naturais de 1 a 100.

$(1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad 98 \quad 99 \quad 100)$



→ Propriedade dos termos equidistantes de uma PA.

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}$$

→ fórmula para a soma dos termos de uma PA.

---

1. Calcule a soma dos 25 termos iniciais da P.A. (1, 7, 13, ...).

$S_{25} = ?$

$a_1 = 1$

$a_n = a_{25} = ?$

$n = 25$

$r = a_2 - a_1 = 7 - 1 = 6$

Para calcularmos a soma dos 25 termos iniciais desta PA, precisamos do termo a_{25}. Vamos usar a fórmula do termo geral de uma PA:

$$\rightarrow \overset{\rightarrow a_{25}}{a_n} = \underset{1}{\underset{\downarrow}{a_1}} + (\underset{25}{\underset{\downarrow}{n}} - 1) . \underset{6}{\underset{\downarrow}{r}}$$

$$a_{25} = 1 + (25 - 1) . 6 \longrightarrow a_{25} = 1 + 24 . 6 \longrightarrow \underline{a_{25} = 145}$$

Agora podemos descobrir a soma:

$$S_{25} = (a_1 + a_{25}) . \frac{n}{2} \longrightarrow S_{25} = (1 + 145) . \frac{25}{2}$$

$S_{25} = \frac{\overset{73}{\cancel{146}} \cdot 25}{\cancel{2}} \longrightarrow \boxed{S_{25} = 1825}$

---

2. Obtenha a soma dos 12 primeiros termos da P.A. (6, 14, 22, ...).

$S_{12} = ?$

$a_1 = 6$

$a_{12} = ?$

$n = 12$

$r = 14 - 6 = 8$

Primeiro precisamos encontrar o a_{12}

$a_{12} = a_1 + (n-1) \cdot r$

$a_{12} = 6 + (12-1) \cdot 8 \longrightarrow a_{12} = 6 + 11 \cdot 8$

$a_{12} = 6 + 88 \longrightarrow \underline{a_{12} = 94}$

Logo, a soma é

$S_{12} = (a_1 + a_{12}) \cdot \frac{n}{2} \longrightarrow S_{12} = (6 + 94) \cdot \frac{12}{2}$

$S_{12} = 100 \cdot 6 \longrightarrow \underline{S_{12} = 600}$

---

3. Qual é o 23° elemento da P.A. de razão 3 em que a soma dos 30 termos iniciais é 255?

$S_{30} = 255$

$a_1 = ?$

$a_{23} = ?$

$n = 23$

$r = 3$

Vamos ver quanto vale a_1:

$S_{30} = (a_1 + \overset{29r + a_1}{a_{30}}) \cdot \frac{n}{2} \longrightarrow 255 = a_1 + 29r + a_1 \cdot \frac{30}{2}$

$\frac{255}{15} = 29\overset{r = 3}{r} + 2a_1 \longrightarrow 17 = 29 \cdot 3 + 2a_1$

$17 - 87 = 2a_1 \longrightarrow a_1 = -\frac{70}{2} \longrightarrow \underline{a_1 = -35}$

Então, a_{23} vale:

$a_{23} = a_1 + (n-1) \cdot r \longrightarrow a_{23} = -35 + (23-1) \cdot 3$

$a_{23} = -35 + 22.3 \longrightarrow a_{23} = -35 + 66 \longrightarrow \boxed{a_{23} = 31}$

---

4. Uma progressão aritmética de 9 termos tem razão 2 e soma de seus termos igual a 0. Determine o sexto termo da progressão.

$S_9 \overset{=S_n}{=} 0$

$a_1 = ?$

$\overset{=a_9}{a_n} = ?$

$r = 2$

$n = 9$

Primeiro vamos usar a fórmula da soma para descobrir a_1:

$$S_9 = (a_1 + \overset{8r + a_1}{a_9}) . \frac{n}{2} \longrightarrow (a_1 + 8.\overset{2}{r} + a_1) . \frac{9}{2} \xrightarrow{\times} 0$$

$$(2a_1 + 8.2).9 \xrightarrow[\div]{} 0 \longrightarrow 2a_1 + 16 = 0$$

$$2a_1 = -16 \longrightarrow \boxed{a_1 = -8}$$

Agora com a_1, podemos descobrir o sexto termo:

$$a_6 = a_1 + (n-1).r \longrightarrow a_6 = -8 + (6-1).2$$

$$a_6 = -8 + 10 \longrightarrow \boxed{a_6 = 2}$$

---

5. O primeiro termo de uma progressão aritmética é -10 e a soma dos oito primeiros termos 60. Determine a razão.

Temos: $S_n = 60$; $a_1 = -10$; $n = 8$

Então: $S_n = (a_1 + a_n) . \frac{n}{2}$

$$60 = (-10 + a_n) . \frac{8}{2} \longrightarrow 60 = (-10 + a_1) . 4$$

$$\frac{60}{4} = -10 + a_n \longrightarrow a_n = 15 + 10 \longrightarrow a_n = 25$$

Lembrando que, neste caso, $a_n = a_8$

Então:

$$a_8 = a_1 + (n-1).r$$

$$25 = -10 + (8-1).r \longrightarrow 25 + 10 = 7.r$$

$$7r = 35 \longrightarrow r = \frac{35}{7} \longrightarrow \boxed{r = 5}$$

6. A soma dos vinte primeiros termos de uma progressão aritmética é -15. Calcule a soma do sexto termo dessa P.A. com o décimo quinto termo.

Pela soma dos termos:

$$S_{20} = (a_1 + a_{20}).\frac{n}{2} \longrightarrow -15 = (a_1 + a_{20}).\frac{20}{2}$$

$$-15 = (a_1 + a_{20}).10 \longrightarrow {}^{*}\underline{a_1 + a_{20} = -1,5}$$

* Veja que podemos usar a propriedade de termos equidistantes de uma PA, pois:

$$\underbrace{a_6 + a_{15}}_{a_{21}} = \underbrace{a_1 + a_{20}}_{a_{21}}$$

Com isso, sabemos que $\underline{a_6 + a_{15} = -1,5}$

7. Numa progressão aritmética limitada em que o $\underset{a_1}{\underline{\text{1° termo é 3}}}$ e o $\underset{a_n}{\underline{\text{último}}}$ $\underline{\text{31}}$, $\underset{S_n}{\underline{\text{a soma de seus termos é 136}}}$. Determine o número de termos dessa progressão.

Veja que a única incógnita neste caso é o "n".

Então:

$$S_n = (a_1 + a_n).\frac{n}{2} \longrightarrow 136 = (3 + 31).\frac{n}{2}$$

$$136 = \frac{\overset{17}{\cancel{34}}.n}{\cancel{2}} \longrightarrow n = \frac{136}{17} \longrightarrow \underline{n = 8 \text{ termos}}$$

---

8. Quantos termos devem ser somados na P.A. (- 5, -1, 3, ...), a partir do 1° termo, para que a soma seja 1590?

Veja que temos:

$$PA\ (\underset{\overset{\downarrow}{a_1}}{-5}, -1, 3 \ldots)$$

$$r = 3-(-1) = 4 \quad , \quad \underline{r = 4}$$

Queremos saber $\underline{n}$ termos para que a soma = 1590

Temos que: $a_n = a_1 + (n-1).r$

E: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n).n}{2}$

Vamos substituir a a_n na fórmula da soma, pois n será nossa única incógnita.

$$1590 = \frac{[-5 + (-5 + (n-1).4)].n}{2}$$

×

$$3180 = [-5 + (-5 + 4n - 4)].n$$

$$3180 = [-5 + (-9 + 4n)].n \nearrow \text{está multiplicando}$$

$$3180 = -5n - 9n + 4n^2$$

$$\underbrace{4n^2 - 14n - 3180}_{\text{equação do 2° grau}} \rightsquigarrow \text{resolvemos por Bháskara}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \longrightarrow x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4.4.(-3180)}}{2.4}$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 50880}}{8} \longrightarrow x = \frac{14 \pm \sqrt{51076}}{8}$$

$$\begin{tikzcd}
 & x_1 = -\frac{212}{8} = -26{,}5 \\
x = \frac{14 \pm 226}{8} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & x_2 = \frac{240}{8} = 30
\end{tikzcd}$$

Como valor negativo não pode ser considerado, $\boxed{n = 30}$

---

9. Determine uma P.A. de 60 termos em que a soma dos 59 primeiros é 12 e a soma dos 59 últimos é 130.

Temos uma PA de $n = 60$

- Soma dos 59 primeiros $= S_1$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{59} = 12$$

- Soma dos 59 últimos $= S_2$

$$a_2 + a_3 + \dots + a_{60} = 130$$

Vamos montar um sistema com as duas sentenças e fazer $S_2 - S_1$.

$$\begin{array}{rl}
S_2 \dashrightarrow & a_2 + a_3 + \dots a_{60} = 130 \\
- \quad S_1 \dashrightarrow & a_1 + a_2 + \dots + a_{59} = 12 \\
\hline
 & -a_1 + a_{60} = 118
\end{array}$$

$\longrightarrow$ Veja que os termos iguais se eliminam

$a_{60} \downarrow$ pela fórmula do termo geral:

$$a_n = a_{60} = a_1 + (n-1).r$$

$$\hookrightarrow a_{60} = a_1 + (60-1).r \rightarrow \underbrace{a_{60} = a_1 - 59.r}_{\text{vamos substituir na equação abaixo}}$$

$-a_1 + a_{60} = 118 \longrightarrow -\cancel{a_1} + \cancel{a_1} - 59.r = 118$

$59.r = 118 \longrightarrow r = \frac{118}{59} \longrightarrow \boxed{r = 2}$

Sabemos que a soma dos termos é:

$\underline{130 + a_1} = 12 + a_{60}$ vamos escolher um deles.

$\underbrace{130 + a_1}_{S_n} = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \longrightarrow a_n = a_{60} = a_1 + 59.r$

$a_{60} = a_1 + 118$

$130 + a_1 = \frac{(a_1 + a_1 + 118).\cancel{60}^{30}}{\cancel{2}}$

$130 + a_1 = (2a_1 + 118).30 \longrightarrow 60a_1 + 3540 = 130 + a_1$

$60a_1 - a_1 = 130 - 3540 \longrightarrow 59a_1 = -3410$

$$\boxed{a_1 = -\frac{3410}{59}}$$

---

10. Qual é a soma dos múltiplos positivos de 5 formados por 3 algarismos?

Veja que são apenas números formados por 3 algarismos, logo:

O primeiro é o número 100 $\longrightarrow a_1 = 100$

O último é o número 995 $\longrightarrow a_n = 995$

Como são apenas múltiplos de 5, temos uma de razão $= 5$, pois deverá ter a sequência:

PA (100, 105, 110 ... 995)

Para calcularmos a soma precisamos do número de termos (n) dessa PA. Pela fórmula do termo geral podemos descobrir:

$$a_n = a_1 + (n-1).r \longrightarrow 995 = 100 + (n-1).5$$

$$995 - 100 = 5n - 5 \longrightarrow 885 + 5 = 5n$$

$$890 = 5n \longrightarrow n = \frac{890}{5} \longrightarrow \underline{n = 180}$$

Agora podemos descobrir a soma:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \longrightarrow S_n = \frac{(100+995).\overset{90}{\cancel{180}}}{\cancel{2}}$$

$$S_n = 1095 . 90 \longrightarrow \boxed{S_n = 98550}$$