Primeira Lista de Preparação para a XLI IMO
e XV Olimpíada Ibero-americana de Matemática
Nível III

▸ **EXERCÍCIO 1**

Determine o número de termos distintos da seqüência finita $\lfloor k^2/1998 \rfloor$, onde $k = 1, 2, \ldots, 1997$. ($\lfloor x \rfloor$ denota a parte inteira de x.)

▸ **EXERCÍCIO 2**

Se $n \geqslant 2$ é inteiro e $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n+1}$ são números reais, prove que

$$\sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_2} + \sqrt[n]{a_3} - \cdots - \sqrt[n]{a_{2n}} + \sqrt[n]{a_{2n+1}} < \sqrt[n]{a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{2n} + a_{2n+1}}$$

▸ **EXERCÍCIO 3**

Sejam S o conjunto de todos os pontos interiores e sobre o bordo do $\triangle ABC$ e T um ponto pertencente ao interior do $\triangle ABC$. Mostre que $S - \{T\}$ pode ser representado como uma união de segmentos disjuntos. (Um segmento contém ambas suas extremidades.)

▸ **EXERCÍCIO 4**

Prove que a equação $y^2 = x^5 - 4$ não possui soluções inteiras.

▸ **EXERCÍCIO 5**

Dado um triângulo acutângulo ABC, seja D o ponto médio do arco BC do circuncírculo de ABC, não contendo A. Os pontos que são simétricos a D com relação à reta BC e com relação ao centro do circuncírculo são denotados E e F, respectivamente. Finalmente, seja K o ponto médio do segmento EF. Demonstre que

(a) a circunferência que passa pelos pontos médios dos lados do triângulo ABC também passa por K;

(b) a reta passando por K e pelo ponto médio do segmento BC é perpendicular a AF.

▸ **EXERCÍCIO 6**

Sejam $p > 2$ um número primo tal que 3 divide $p - 2$ e

$$S = \{y^2 - x^3 - 1 \mid x, y \text{ são inteiros e } 0 \leqslant x, y \leqslant p - 1\}$$

Demonstre que no máximo $p - 1$ elementos de S são divisíveis por p.

▸ **EXERCÍCIO 7**

Sejam ABC um triângulo acutângulo e M, N e P os pés das perpendiculares a partir do baricentro G do triângulo até os lados AB, BC e CA, respectivamente. Mostre que

$$\frac{4}{27} < \frac{\text{área}\, MNP}{\text{área}\, ABC} \leqslant \frac{1}{4}$$

▸ **EXERCÍCIO 8**

Seja $0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$ uma seqüência não decrescente de inteiros não negativos tal que para todo k, $k \geqslant 0$, o número de termos da seqüência que são menores ou iguais a k é finito, digamos y_k. Prove que, para todos inteiros positivos m, n,

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant n} x_i + \sum_{0 \leqslant j \leqslant m} y_j \geqslant (n+1)(m+1)$$