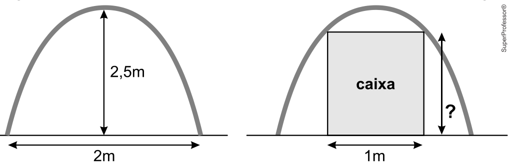
Prof. Gabriel Miranda

1. (Unicamp 2024) Laura é geóloga e está fazendo pesquisa numa caverna cuja entrada tem o formato de uma parábola invertida. Essa entrada, no nível do chão, tem 2m de largura e seu ponto mais alto está a 2,5m do chão, conforme figura a seguir.



Para realizar sua pesquisa, ela precisa entrar na caverna com um equipamento guardado em uma caixa de 1m de largura. Qual é a altura máxima, em metros, que a caixa pode ter para passar pela entrada da caverna?
a) 11/8. b) 13/8. c) 15/8. d) 17/8.

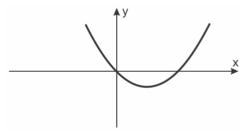
2. (Enem 2023) Analisando as vendas de uma empresa, o gerente concluiu que o montante diário arrecadado, em milhar de real, poderia ser calculado pela expressão $V(x) = \frac{x^2}{4} - 10x + 105$, em que os valores de x representam os dias do mês, variando de 1 a 30.
Um dos fatores para avaliar o desempenho mensal da empresa é verificar qual é o menor montante diário V_0 arrecadado ao longo do mês e classificar o desempenho conforme as categorias apresentadas a seguir, em que as quantidades estão expressas em milhar de real.
- Ótimo: $V_0 \geq 24$
- Bom: $20 \leq V_0 < 24$
- Normal: $10 \leq V_0 < 20$
- Ruim: $4 \leq V_0 < 10$
- Péssimo: $V_0 < 4$

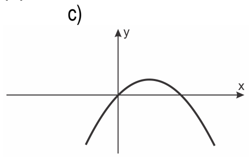
No caso analisado, qual seria a classificação do desempenho da empresa?
a) Ótimo. b) Bom. c) Normal. d) Ruim. e) Péssimo.

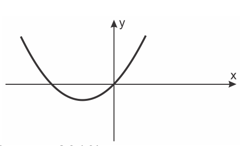
3. (Famerp 2023) Seja $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial do segundo grau, dada por $f(x) = x^2 + mx + p$, com m, $p \in \mathbb{R}$. Se o gráfico dessa função no plano cartesiano, intersecta o eixo x nos pontos de coordenadas (–2, 0) e (4, 0), então, m + p é igual a
a) –10. b) –12. c) –8. d) –6. e) 6.

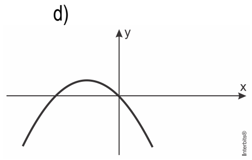
4. (Fuvest 2020) A dona de uma lanchonete observou que, vendendo um *combo* a $R\$ \ 10{,}00$, 200 deles são vendidos por dia, e que, para cada redução de $R\$ \ 1{,}00$ nesse preço, ela vende 100 *combos* a mais. Nessas condições, qual é a máxima arrecadação diária que ela espera obter com a venda desse *combo*?
a) $R\$ \ 2.000{,}00$ b) $R\$ \ 3.200{,}00$ c) $R\$ \ 3.600{,}00$
d) $R\$ \ 4.000{,}00$ e) $R\$ \ 4.800{,}00$

5. (Unicamp 2019) Sejam a e b números reais positivos. Considere a função quadrática $f(x) = x(ax + b)$, definida para todo número real x. No plano cartesiano, qual figura corresponde ao gráfico de $y = f(x)$?

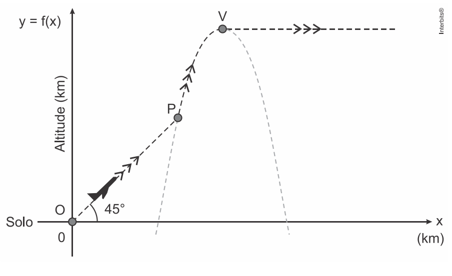
a)


c)


b)


d)


6. (Unesp 2019) Em relação a um sistema cartesiano de eixos ortogonais com origem em $O(0,\ 0)$, um avião se desloca, em linha reta, de O até o ponto P, mantendo sempre um ângulo de inclinação de $45°$ com a horizontal. A partir de P, o avião inicia trajetória parabólica, dada pela função $f(x) = -x^2 + 14x - 40$, com x e $f(x)$ em quilômetros. Ao atingir o ponto mais alto da trajetória parabólica, no ponto V, o avião passa a se deslocar com altitude constante em relação ao solo, representado na figura pelo eixo x.



Em relação ao solo, do ponto P para o ponto V, a altitude do avião aumentou
a) $2{,}5\ km$. b) $3\ km$. c) $3{,}5\ km$. d) $4\ km$. e) $4{,}5\ km$.

7. (Enem 2017) A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

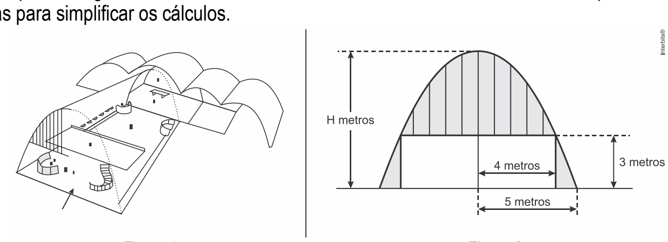


Figura 1 Figura 2

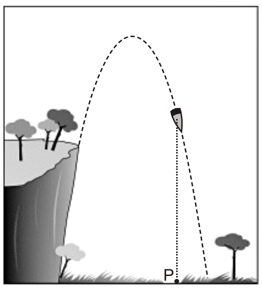
Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?
a) $\frac{16}{3}$ b) $\frac{31}{5}$ c) $\frac{25}{4}$ d) $\frac{25}{3}$ e) $\frac{75}{2}$

8. (Enem 2015) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura ($°C$)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como
a) muito baixa. b) baixa. c) média. d) alta. e) muito alta.

9. (Fuvest 2015) A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura abaixo. O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre $30\ m$ desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de $200\ m$ acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de $10\ m$. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?



a) 60 b) 90 c) 120 d) 150 e) 180

10. (Enem 2013) A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento (t = 0) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39°.
Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?
a) 19,0 b) 19,8 c) 20,0 d) 38,0 e) 39,0

11. (Famema 2023) No plano cartesiano ortogonal, a distância entre os pontos em que a parábola dada pela função $f(x) = \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4$ intersecta os eixos, em unidades de comprimento do plano, é igual a
a) 6. b) 4. c) 5. d) 2. e) 3.

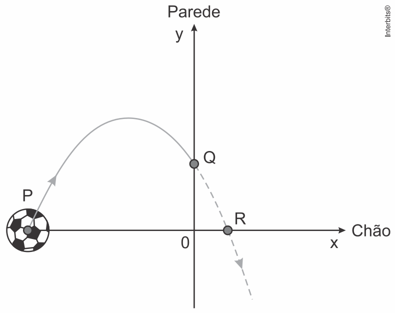
12. (Enem 2022) Ao analisar os dados de uma epidemia em uma cidade, peritos obtiveram um modelo que avalia a quantidade de pessoas infectadas a cada mês, ao

longo de um ano. O modelo é dado por $p(t) = -t^2 + 10t + 24$, sendo t um número natural, variando de 1 a 12, que representa os meses do ano, e p(t) a quantidade de pessoas infectadas no mês t do ano. Para tentar diminuir o número de infectados no próximo ano, a Secretaria Municipal de Saúde decidiu intensificar a propaganda oficial sobre os cuidados com a epidemia. Foram apresentadas cinco propostas (I, II, III, IV e V) com diferentes períodos de intensificação das propagandas:

- I: $1 \le t \le 2$;
- II: $3 \le t \le 4$;
- III: $5 \le t \le 6$;
- IV: $7 \le t \le 9$;
- V: $10 \le t \le 12$.

A sugestão dos peritos é que seja escolhida a proposta cujo período de intensificação da propaganda englobe o mês em que, segundo o modelo, há a maior quantidade de infectados. A sugestão foi aceita.
A proposta escolhida foi a
a) I. b) II. c) III. d) IV. e) V.

13. (Famema 2021) A figura representa, no plano cartesiano, a trajetória de uma bola que foi chutada a partir do ponto $P(-5,\ 0)$, localizado no chão, e seguiu em trajetória parabólica até bater na parede, no ponto $Q(0,\ 2)$. Se não houvesse parede, a bola seguiria sua trajetória até o ponto $R(1,\ 0)$, no chão.



Admitindo-se que a trajetória descrita pela bola é modelada pela função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, então $a + b + c$ é igual a
a) 0. b) 1. c) 0,5. d) 1,5. e) –0,5.

14. (Fuvest 2021) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções dadas por $f(x) = c + x^2$, onde $c \in \mathbb{R}$, e $g(x) = x$, seus gráficos se intersectam quando, e somente quando,
a) $c \le \frac{1}{4}$. b) $c \ge \frac{1}{4}$. c) $c \le \frac{1}{2}$. d) $c \ge \frac{1}{2}$. e) $c \le 1$.

15. (Fuvest 2019) Considere a função polinomial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$
em que $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ e $a \ne 0$. No plano cartesiano xy, a única intersecção da reta $y = 2$ com o gráfico de f é o ponto $(2;\ 2)$ e a intersecção da reta $x = 0$ com o gráfico de f é o ponto $(0;\ -6)$. O valor de $a + b + c$ é
a) -2 b) 0 c) 2 d) 4 e) 6

Gabarito:
Resposta da questão 1: [C]

$$y = a(x+1)(x-1)$$
Utilizando o ponto (0; 2,5), obtemos:
$$2{,}5 = a(0+1)(0-1)$$
$$a = -2{,}5$$
Logo, a equação da parábola é:
$$y = -2{,}5(x+1)(x-1)$$
Portanto, a altura h da caixa vale:
$$h = -2{,}5(0{,}5+1)(0{,}5-1)$$
$$h = -2{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot (-0{,}5)$$
$$\therefore h = 1{,}875\ m = \frac{15}{8}\ m$$
Resposta da questão 2: [D]
$$V_0 = y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$
$$V_0 = -\frac{(-10)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 105}{4 \cdot \frac{1}{4}}$$
$$V_0 = -\frac{100 - 105}{1}$$
$$\therefore V_0 = 5$$
Ou seja, corresponde a um desempenho ruim.
Resposta da questão 3: [A]
Substituindo os pontos dados na função, obtemos:
$$\begin{cases} 0 = (-2)^2 + m \cdot (-2) + p \\ 0 = 4^2 + m \cdot 4 + p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - 2m + p = 0 & (I) \\ 16 + 4m + p = 0 & (II) \end{cases}$$
Fazendo (II) – (I):
$$12 + 6m = 0 \Rightarrow m = -2$$
$$4 - 2 \cdot (-2) + p = 0 \Rightarrow p = -8$$
$$m + p = -10$$
Resposta da questão 4: [C]
$$\begin{aligned} A(x) &= (10 - x)(200 + 100x) \\ &= -100(x+2)(x-10). \end{aligned}$$
O número de reduções que fornece a arrecadação máxima é igual a $\frac{-2+10}{2} = 4$. Em consequência, a resposta é
$$\begin{aligned} A(4) &= -100(4+2)(4-10) \\ &= \text{R\$}\ 3.600{,}00. \end{aligned}$$
Resposta da questão 5: [B]
$$f(x) = a(x-0)\left(x + \frac{b}{a}\right).$$
Sendo a e b reais positivos, podemos concluir que o gráfico de f tem concavidade para cima e intersecta o eixo das abscissas em $x = 0$ e $x = -\frac{b}{a} < 0$.
A resposta é o gráfico da alternativa [B].
Resposta da questão 6: [D]
Desde que a reta $\overleftrightarrow{OP}$ corresponde ao gráfico da função definida por $g(x) = x$, temos
$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow -x^2 + 14x - 40 = x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 13x + 40 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } x = 8. \end{aligned}$$
Logo, é fácil ver que $x_P = 5$ e, assim, vem
$$\begin{aligned} f(x_P) &= f(5) \\ &= -5^2 + 14 \cdot 5 - 40 \\ &= 5\text{km}. \end{aligned}$$
Ademais, a ordenada do ponto V é igual a
$$y_V = -\frac{14^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-40)}{4 \cdot (-1)} = 9km.$$
Em consequência, a resposta é $y_V - y_P = 9 - 5 = 4km$.
Resposta da questão 7: [D]
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$b = 0 \Rightarrow parábola\ simétrica\ ao\ eixo\ y$$
$$f(0) = c = H$$
$$\begin{cases} 0 = a \cdot (5)^2 + H \\ 3 = a \cdot (4)^2 + H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 25a + H \\ -3 = -16a - H \end{cases} \Rightarrow -3 = 9a \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow H = \frac{25}{3}$$
Resposta da questão 8: [D]
Resposta da questão 9: [D]
$$0 = a \cdot 20^2 + 200 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$
Portanto, temos $f(x) = 200 - \frac{x^2}{2}$ e, desse modo, segue que o resultado pedido é
$$f(-10) = 200 - \frac{(-10)^2}{2} = 150\ m.$$
Resposta da questão 10: [D]
$$\begin{aligned} 39 = -\frac{t^2}{4} + 400 &\Leftrightarrow \frac{t^2}{4} = 361 \\ &\Rightarrow t = \sqrt{4 \cdot 361} \\ &\Leftrightarrow t = 38min. \end{aligned}$$
Resposta da questão 11: [C]
Pondo $f(x) = 0$, temos
$$\begin{aligned} \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4 = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}x - 2\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

Logo, a parábola intersecta o eixo das abscissas no ponto $(3,\ 0)$.
Como o termo independente da lei de f é 4, segue que a parábola intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0,\ 4)$.
Os pontos de interseção da parábola com os eixos coordenados e a origem do sistema de eixos cartesianos são os vértices de um triângulo retângulo de catetos 3 e 4. Desse modo, podemos concluir que a hipotenusa desse triângulo mede 5 e a resposta segue de imediato. Com efeito, trata-se do triângulo retângulo pitagórico de lados $3,\ 4$ e 5.
Resposta da questão 12: [C]
Escrevendo a lei de p na forma canônica, vem
$$\begin{aligned} p(t) &= -t^2 + 10t + 24 \\ &= 49 - (t-5)^2. \end{aligned}$$
Assim, é fácil ver que, para $t = 5$, $p(t)$ assume o seu valor máximo.
Como $5 \in [5,\ 6]$, segue que a proposta escolhida foi a III.
Resposta da questão 13: [A]
Sendo $P = (-5,\ 0)$ e $R = (1,\ 0)$ os pontos de interseção da parábola com o eixo das abscissas, podemos concluir que os zeros de f são $x_1 = -5$ e $x_2 = 1$. Logo, como $Q = (0,\ 2)$ pertence à parábola, vem
$$\begin{aligned} f(0) = a \cdot (0^2 - (-5+1) \cdot 0 + (-5) \cdot 1) &\Leftrightarrow -5a = 2 \\ &\Leftrightarrow a = -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$
$$f(1) = -\frac{2}{5} \cdot (1^2 + 4 \cdot 1 - 5) = 0.$$
Resposta da questão 14: [A]
Pondo $f(x) = g(x)$, temos
$$\begin{aligned} c + x^2 = x &\Leftrightarrow x^2 - x + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - c. \end{aligned}$$
Os gráficos de f e de g se intersectam se, e somente se, a equação acima possuir raízes reais. Logo, sabendo que $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0$ para todo x real, devemos ter $\frac{1}{4} - c \ge 0$, ou seja, $c \le \frac{1}{4}$.
Resposta da questão 15: [B]

Desde que $y = 2$ é uma reta horizontal, podemos concluir que o vértice da parábola correspondente ao gráfico de f é o ponto $(2,\ 2)$. Logo, tomando a forma canônica de f e sendo $f(0) = -6$, temos
$$-6 = a \cdot (0-2)^2 + 2 \Leftrightarrow a = -2.$$
Portanto, segue que a resposta é
$$\begin{aligned} a + b + c &= f(1) \\ &= (-2) \cdot (1-2)^2 + 2 \\ &= 0. \end{aligned}$$