Segunda Lista de Preparação para a XLI IMO
e XV Olimpíada Ibero-americana de Matemática
Nível III

▸ EXERCÍCIO 1

(Exercício 5, primeira lista, corrigido) Dado um triângulo acutângulo ABC, seja D o ponto médio do arco BC do circuncírculo de ABC, não contendo A. Os pontos que são simétricos a D com relação à reta BC e com relação ao centro do circuncírculo são denotados E e F, respectivamente. Finalmente, seja K o ponto médio do segmento EA. Demonstre que

(a) a circunferência que passa pelos pontos médios dos lados do triângulo ABC também passa por K;

(b) a reta passando por K e pelo ponto médio do segmento BC é perpendicular a AF.

▸ EXERCÍCIO 2

Encontre todos os números primos p, q para os quais pq divide $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$

▸ EXERCÍCIO 3

Dado o triângulo ABC com bissetrizes BM e CN ($M \in AC$, $N \in AB$). A semi-reta $\overrightarrow{MN}$ intercepta o circuncírculo de $\triangle ABC$ no ponto D. Prove que

$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{CD}$$

▸ EXERCÍCIO 4

Encontre o menor inteiro positivo K tal que todo subconjunto com K elementos de $\{1, 2, \ldots, 50\}$ contém dois elementos distintos a, b tais que $a + b$ divide ab.

▸ EXERCÍCIO 5

Dado um inteiro $n \geqslant 2$, encontre o valor mínimo de

$$\frac{x_1^5}{x_2 + x_3 + \cdots + x_n} + \frac{x_2^5}{x_3 + \cdots + x_n + x_1} + \cdots + \frac{x_n^5}{x_1 + \cdots + x_{n-1}}$$

para números reais positivos $x_1, \ldots, x_n$ satisfazendo a condição $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

▸ EXERCÍCIO 6

Prove que, para todo inteiro positivo n, existe um polinômio com coeficientes inteiros cujos valores em $1, 2, \ldots, n$ são diferentes potências de 2.

▸ EXERCÍCIO 7

Determine os inteiros $N \geqslant 3$ para os quais existem N pontos no plano, não estando três em uma mesma reta, tais que cada triângulo formado por 3 vértices do fecho convexo deste conjunto de pontos contém exatamente um dos pontos em seu interior.

▸ EXERCÍCIO 8

Sejam AA_1, BB_1, CC_1 as alturas de um triângulo acutângulo ABC e O um ponto arbitrário no interior do triângulo $A_1B_1C_1$. Denotamos: M e N os pés das perpendiculares desenhadas de O até as retas AA_1 e BC, respectivamente; P e Q, de O até as retas BB_1 e CA, respectivamente; R e S, de O até as retas CC_1 e AB, respectivamente. Prove que as retas MN, PQ, RS são concorrentes.

▸ EXERCÍCIO 9

Encontre todas as funções $f\colon Z \longrightarrow Z$ tais que $f(1) = 1$ e

$$f(m+n) \cdot \Big(f(m) - f(n)\Big) = f(m-n) \cdot \Big(f(m) + f(n)\Big)$$

para quaisquer m e n em Z.

Natal fora de época: prazo de entrega de 3 semanas.