

# Gravitação

João Maldonado

*Aula 23*

*ITA 2020*

## SUMÁRIO

Introdução .....	4
1. Leis de Kepler .....	5
1.1. Primeira lei – Lei das órbitas .....	5
1.2. Segunda lei - Lei das áreas .....	6
1.3. Terceira lei – Lei dos períodos .....	7
1.4. Considerações sobre as Leis de Kepler .....	9
2. Lei de Newton - Gravitação universal .....	10
2.1. Lei da gravitação universal .....	10
2.2. Determinação da constante universal da gravitação .....	11
2.3. Terceira lei de Kepler e a lei da gravitação universal .....	12
2.4. Formulação vetorial para a lei da gravitação universal .....	13
2.5. Densidade volumétrica de massa .....	17
3. Lei de Gauss .....	18
4. Campos gravitacionais .....	20
4.1. Distribuição esférica de massa .....	21
4.7. Variação da aceleração gravidade .....	25
5. Potencial gravitacional .....	29
5.1. Potencial gravitacional de uma massa puntiforme .....	29
5.2. Relação entre o potencial e o campo gravitacional no ponto .....	30
5.3. Potencial gerado por um corpo esférico .....	31
6. Energia potencial gravitacional .....	33
6.1. Velocidade de escape .....	36
6.2. Trajetórias .....	38
6.3. Satélites .....	38
7. Trajetória elíptica .....	41
7.1. Momento angular e conservação .....	41
7.2. Corpo em órbita elíptica .....	42
8. Lista de exercícios .....	46
9. Gabarito sem comentários .....	66
10. Lista de exercícios comentada .....	67
11. Considerações finais .....	129



12. Referências bibliográficas .....	130
13. Versão de aula .....	131



## Introdução

Nesta aula estudaremos as leis da gravitação e os principais conceitos que norteiam este ramo da Física.

Esta aula é muito importante para aqueles que desejam ir para o ITA, pois ele gosta deste assunto e cobra em um nível muito elevado.

Fique atento as leis de Kepler e a lei de Newton da gravitação universal. Além disso, se dedique no capítulo sobre energia potencial gravitacional, pois ele é muito importante na resolução de problemas complexos.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



@prof.maldonado



# 1. Leis de Kepler

A gravitação se propõe a estudar a interação de atração entre dois corpos no Universo. Ela foi descoberta por Newton em 1665. A força gravitacional, geralmente, tem magnitude pequena se comparada com as outras forças da natureza. Entretanto, é uma das principais forças, pois rege o nascimento das estrelas e controla o funcionamento do Universo.

## 1.1. Primeira lei – Lei das órbitas

Os planetas se movem ao redor do Sol em uma trajetória elíptica. Nessa trajetória o Sol ocupa um dos focos da elipse e a excentricidade da elipse é dada pela razão  $SO/AO$ .

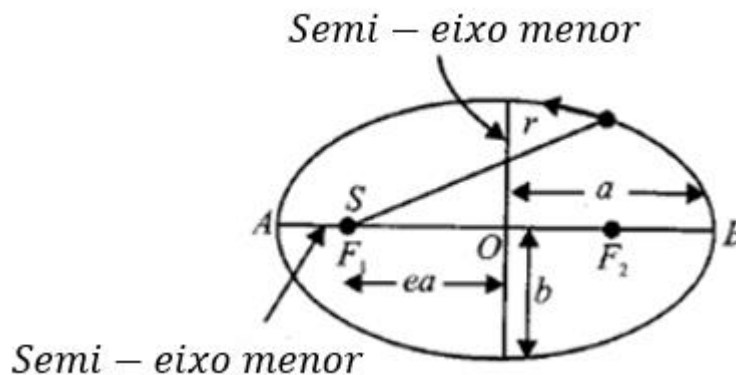


Figura 1: Propriedades de uma elipse.

A excentricidade da elipse é definida por:

$$e = \frac{OS}{a}$$

O corpo que desenvolve a trajetória elíptica apresenta um ponto de menor distância para o corpo (S) que é orbitado. Esse ponto é chamado de Perigeu, representado por A na figura acima. No Perigeu a distância até o corpo (S) é dada por (AS):

$$AS = AO - OS = a(1 - e)$$

$$\boxed{AS = a(1 - e)}$$

Há também um ponto de máxima distância entre o corpo que orbita e o corpo orbitado (S). Esse ponto é chamado de Apogeu e é representado por B na figura acima. No apogeu a distância até o corpo (S) é dada por (BS):

$$BS = AO + OS = a(1 + e)$$

$$\boxed{BS = a(1 + e)}$$





## 1.2. Segunda lei - Lei das áreas

O raio vetor que une o planeta ao Sol percorre áreas iguais em tempos iguais. Em outras palavras, velocidade Areolar do planeta é constante.

### 1.2.1. Velocidade Areolar

A velocidade areolar é dada pela razão entre a área varrida, pelo vetor posição do planeta, pelo tempo gasto. Expressando matematicamente, temos:

$$V_{AREOLAR} = \frac{dA}{dt}$$

Portanto, a lei das áreas expressada matematicamente por:

$$\frac{dA}{dt} = \text{constante}$$

### 1.2.2. Conservação do momento angular

Dizer que a velocidade areolar é constante implica diretamente na conservação do momento angular da órbita. Observe os passos abaixo.

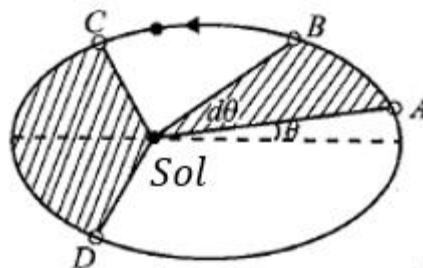


Figura 2: Sistema solar.

$$V_{AREOLAR} = \frac{dA}{dt} = \frac{\frac{1}{2} \cdot r(r \cdot d\theta)}{dt} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \omega$$

Então:

$$\frac{1}{2} \cdot r^2 \omega = \text{constante} \quad \text{ou} \quad mr^2 \omega = \text{constante}$$

O momento de inércia de um corpo esférico é dado por:



$$mr^2 = I$$

Então:

$$mr^2\omega = I \cdot \omega$$

Da igualdade,

$$I \cdot \omega = \text{constante}$$

Conforme vimos, o momento angular de um corpo é definido como:

$$L = I \cdot \omega$$

E, portanto, para o momento angular ( $L$ ) concluímos que:

$$L = \text{constante}$$

Se o momento angular é constante, a todo instante, na órbita, podemos escrever:

$$\boxed{\frac{dL}{dt} = 0}$$

### 1.2.3 Igualdade de razões

A segunda lei de Kepler permite-nos escrever as seguintes expressões:

$$V_{AREOLAR} = \frac{\text{Área Varrida}}{\text{Intervalo de Tempo}} = \text{constante}$$

$$\boxed{\frac{A_1}{\Delta t_1} = \frac{A_2}{\Delta t_2} = \dots = \frac{A_n}{\Delta t_n}}$$

## 1.3. Terceira lei – Lei dos períodos

O período, de movimento do planeta ao redor do sol, ao quadrado é diretamente proporcional ao cubo do semi-eixo maior da elipse percorrida pelo planeta.

Expressando a terceira lei matematicamente, temos:

$$\boxed{T^2 = K \cdot a^3}$$

$T$  – Período de revolução do planeta

$a$  – semi – eixo maior da elipse

$K$  é uma constante de proporcionalidade. Determinaremos seu valor no decorrer deste capítulo.

Para planetas que orbitam um mesmo corpo, a constante de proporcionalidade  $K$  é a mesma. Assim, podemos efetuar algumas igualdades. Se  $N$  planetas distintos orbitam um mesmo corpo, podemos escrever:



$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} = \frac{T_3^2}{R_3^3} = \dots = \frac{T_N^2}{R_N^3}$$

Para o sistema solar, por exemplo:

$$\frac{T_{Terra}^2}{R_{Terra}^3} = \frac{T_{Mercúrio}^2}{R_{Mercúrio}^3} = \frac{T_{Marte}^2}{R_{Marte}^3} = \dots = \frac{T_{Netuno}^2}{R_{Netuno}^3}$$

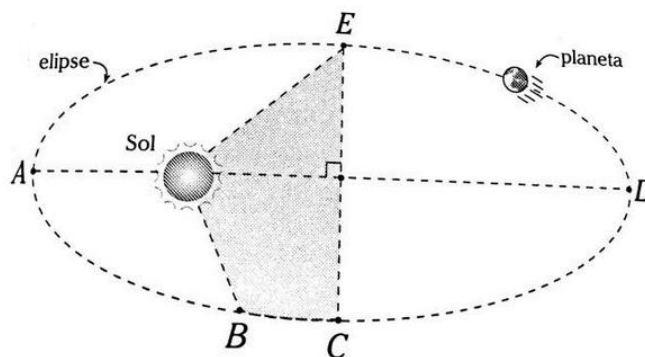
Essa sequência de igualdades é válida, pois os planetas acima orbitam o mesmo corpo (Sol).

ATENÇÃO  
DECORE!



1.

A figura abaixo mostra um planeta que orbita o sol com período de 40 meses. Se ele demora 12 meses para ir do ponto D ao ponto E e 12 meses para ir do ponto B ao ponto C, determine a área da região sombreada. A área da elipse é S.



**Comentário:**

Podemos associar a segunda Lei de Kepler ao exercício:

$$\frac{Area}{\Delta t} = constante \Rightarrow \frac{S}{40 \text{ dias}} = \frac{\frac{S}{4} + A_1}{12 \text{ dias}} = \frac{A_2 - A_1}{12 \text{ dias}}$$

As áreas são:

$A_1$  – Área correspondente ao triângulo de vértices (Sol, E, Centro da elipse)

$A_2$  – Parte inferior hachurada de vértices (Sol, Centro da elipse, B, C)

A área total hachurada é dada por:  $A_1 + A_2$

Da expressão

$$\frac{S}{40 \text{ dias}} = \frac{\frac{S}{4} + A_1}{12} \Rightarrow A_1 = \frac{S}{20}$$

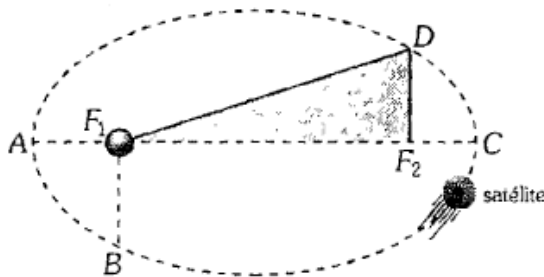
$$A = A_1 + A_2 = \frac{S}{4} + 3A_1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{2S}{5}}$$





2.

Um satélite gira ao redor de um planeta P localizado no ponto  $F_1$ , com período de 18 meses. Se o tempo para ir de A até B é de 1 mês e de C até D é de 3 meses, calcule a razão entre área do triangulo hachurado (A) e a área total da elipse (S).



**Comentário:**

Novamente podemos associar a segunda Lei de Kepler:

$$\frac{Area}{\Delta t} = constante \Rightarrow \frac{X}{1\ mes} = \frac{x + A}{3\ meses} = \frac{S}{18\ meses}$$

Resolvendo o sistema de equações temos:

$$\boxed{\frac{A}{S} = \frac{1}{9}}$$

3.

Dois satélites (1) e (2) orbitam um planeta com trajetórias circulares, cujos raios se relacionam com  $R_1 = 4R_2$ . Se o período do satélite (2) é de 50 dias, quantos dias demoram para o satélite (1) dar um quarto de volta?

**Comentário:**

O problema é um clássico da terceira lei de Kepler. Pela terceira lei, temos:

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^2} \Rightarrow \frac{T_1^2}{(4R_2)^3} = \frac{50^2}{R_2^2}$$
$$T_1 = 400\ dias$$

Para um quarto de volta:

$$\boxed{t = 100\ dias}$$



## 1.4. Considerações sobre as Leis de Kepler

As leis de Kepler não são aplicáveis apenas para o Sistema Solar, mas também para satélites, sistemas binários e até mesmo para sistemas complexos de galáxias.



As leis de Kepler foram obtidas empiricamente (leis baseadas na observação) e foram formuladas a partir do estudo das observações do astrônomo Tycho Brahe. Em 1605, Kepler notou que essas observações obedeciam a três leis matemáticas e então propôs as “Três leis de Kepler”.

A explicação para o comportamento dos planetas veio mais tarde com Isaac Newton. Estudaremos a seguir a Teoria da gravitação Universal proposta por Newton.



## 2. Lei de Newton - Gravitação universal

Isaac Newton publicou em 1687, em sua obra “*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*”, a lei que descreve a gravitação universal.

Newton propôs que a gravidade é um campo criado por corpos que possuem “massa”. Essa gravidade mantém todos os objetos celestes atrelados e só depende do corpo que a cria.

A veracidade dessa lei proposta por Newton pode-se ser evidenciada em alguns fenômenos da natureza, observáveis ao longo da humanidade. Alguns deles são:

- A rotação da Terra ao redor do Sol ou a rotação da Lua ao redor da Terra.
- O acontecimento e previsão dos eclipses solares e lunares.
- O fenômeno das marés.
- As estações do ano e suas peculiaridades.

Veremos a seguir a formulação matemática para a Lei da Gravitação Universal.

### 2.1. Lei da gravitação universal

Quaisquer dois corpos no universo se atraem com uma força proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional à distância entre seus centros de gravidade ao quadrado.

Considere o corpo A de massa  $m_A$  e um corpo B de massa  $m_B$  separados por uma distância  $r$ . Os corpos se atraem com uma força  $F_G$ . Pela lei da gravitação universal temos:

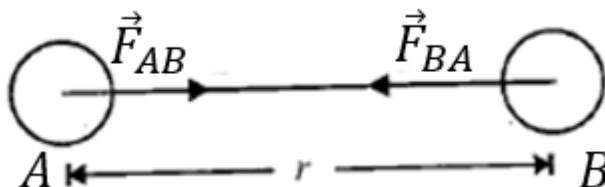


Figura 3: Interação entre dois corpos.

$$F_G = \frac{G \cdot m_A \cdot m_B}{r^2}$$



A constante de proporcionalidade ( $G$ ) para a equação acima é chamada de constante universal da gravitação.

A primeira pessoa a determinar seu valor foi Henry Cavendish em 1797. A seguir veremos o experimento feito por Cavendish para determinação de  $G$ .

## 2.2. Determinação da constante universal da gravitação

### 2.2.1. Determinação por Henry Cavendish

Em 1797 (um século depois da lei de Newton), Henry Cavendish iniciou seus experimentos com a balança de torção. Duas pequenas massas são fixadas nas pontas de uma barra suspensa por um fio. Essas pequenas massas podem se deslocar. Duas outras massas (bolas maiores) são mantidas fixas nas proximidades das massas menores.

A força de interação gravitacional provocará um deslocamento da massa menor em direção à massa maior. Este deslocamento causará uma torção no fio que sustenta a barra. A distância entre as massas no equilíbrio é  $d$ . A medida do ângulo de torção permite a determinação da constante da gravitação universal ( $G$ ), presente na lei da gravitação universal de Newton. Assim, mede-se o ângulo de torção e encontra-se  $\theta$ .

A partir da constante de torção  $K$ , da distância  $l$  entre as massas ( $m$ ) e da massa maior  $M$ , Cavendish determinou  $G$  da seguinte maneira:

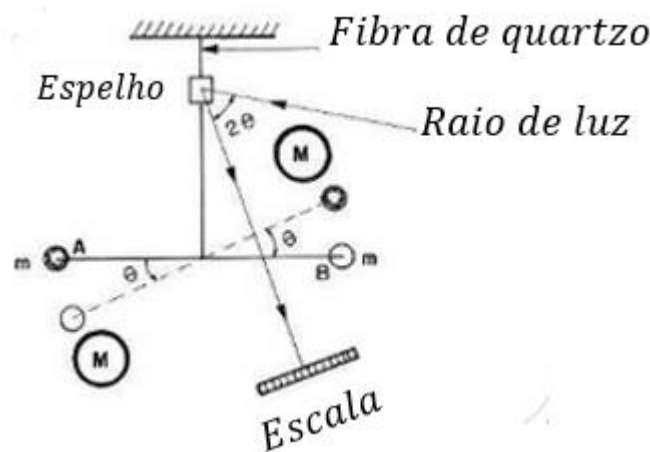


Figura 4: Desenho esquemático do experimento de Cavendish.

A força gravitacional causa um torque na fibra de quartzo:

$$\tau_{FG} = F_G \cdot \frac{l}{2} + F_G \cdot \frac{l}{2} = \frac{G \cdot M \cdot m}{d^2} \cdot l$$

O torque de torção da fibra é:

$$\tau_{Fibra} = K \cdot \theta$$

$K$  – constante de torção

Para que ocorra o equilíbrio, os torques devem ser iguais:

$$\tau_{Fibra} = \tau_{FG} \Rightarrow K \cdot \theta = \frac{G \cdot M \cdot m}{d^2} \cdot l$$

$$\boxed{G = \frac{K \cdot \theta \cdot d^2}{M \cdot m \cdot l}}$$

Na época, Cavendish encontrou o valor  $G = 6,74 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{Kg^2}$ , que difere apenas em 1% para o valor correto conhecido atualmente.

### 2.2.2. Valor da atual e análise dimensional da constante

Atualmente o valor da constante universal da gravitação é um valor conhecido e determinado com grande precisão pelos cientistas.

Nas unidades do SI, seu valor é aproximadamente

$$G \cong 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{Kg \cdot s^2}$$

Fazendo a transformação para o sistema  $M, L$  e  $T$ , podemos encontrar a dimensional de  $G$ :

$$[G] = \left[ \frac{m^3}{Kg \cdot s^2} \right] = M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}$$
$$[G] = M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}$$

## 2.3. Terceira lei de Kepler e a lei da gravitação universal

A lei da gravitação universal pode ser obtida através da terceira de lei de Kepler e da primeira lei de Newton.

Considere um planeta de massa  $m$  que orbita uma estrela de massa  $M$  em uma órbita circular de raio  $R$ . O planeta sofre ação da força gravitacional,

$$F_G = \frac{G \cdot m \cdot M}{R^2}$$

que por sua vez é a resultante centrípeta do movimento circular realizado. O período desse movimento é dado por  $T$ .

$$R_{CPT} = \frac{m \cdot v^2}{R} = \frac{m \cdot (\omega \cdot R)^2}{R} = m \cdot (\omega)^2 \cdot R = m \cdot \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot R$$

Realizando a igualdade:

$$F_G = R_{CPT}$$
$$\frac{G \cdot m \cdot M}{R^2} = m \cdot \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot R$$
$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}}$$



Comparando a terceira Lei de Kepler e o resultado encontrado logo acima, percebemos que a constante de proporcionalidade para a terceira lei de Kepler é:

$$K = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$$

Na verdade essa constante é uma constante aproximada, que ocorre quando  $M \gg m$ . Veja que consideramos que o raio é igual ao eixo maior da elipse, o que é uma aproximação. A constante real pode ser obtida utilizando-se de cálculos que fogem do escopo desse curso e vale:

$$K = \frac{4\pi^2}{G \cdot (M + m)}$$

Conclui-se, portanto, que a lei da Gravitação Universal comprova as leis propostas por Kepler. Além disso, podemos encontrar o valor da constante de proporcionalidade enunciada na terceira lei de Kepler.

## 2.4. Formulação vetorial para a lei da gravitação universal

### 2.4.1. Formulação matemática

Considere dois pontos massivos A e B de massa  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente. Os pontos estão separados por uma distância  $r$ .

Consideremos as seguintes convenções:

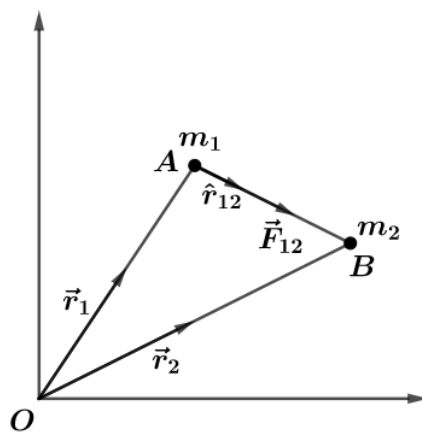


Figura 5: Representação vetorial da força gravitacional.

- $\hat{r}_{12}$  – versor de A até B.
- $\vec{F}_{12}$  – força gravitacional exercida pelo corpo B sobre o corpo A.

A força gravitacional  $\vec{F}_{12}$  é dada por:

$$\vec{F}_{12} = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \cdot \vec{r}_{12}$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$



## 2.4.2. Características gerais

De acordo com a lei de gravitação universal, a força gravitacional entre dois corpos no universo:

- Independe da natureza do meio que eles estão.
- Independe da presença de outros corpos.
- Independe da natureza e tamanho dos corpos.
- Formam pares ação-reação.
- É uma força central e atua ao longo da linha que liga os centros de gravidade dos dois corpos.
- É uma força conservativa.

ATENÇÃO  
DECORE!



4.

A massa de Júpiter é  $1,9 \cdot 10^{27} \text{ Kg}$  e a do Sol é  $1,99 \cdot 10^{30} \text{ Kg}$ . A distância entre o Sol e Júpiter é de  $7,8 \cdot 10^{11} \text{ m}$ . Dado:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{Kg} \cdot \text{s}^2}$ .

a) Calcule a força gravitacional entre Júpiter e o Sol.

b) Assumindo que Júpiter se move em trajetória circular, calcule a velocidade linear de Júpiter.

**Comentário:**

a) Pela expressão Lei da gravitação universal de Newton, temos:

$$F_G = \frac{G \cdot m_A \cdot m_B}{r^2}$$
$$F_G = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,9 \cdot 10^{27} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \text{ Kg}}{(7,8 \cdot 10^{11})^2}$$

$$F_G = 4,15 \cdot 10^{23} \text{ N}$$

b) A força gravitacional entre o Sol e Júpiter é a resultante centrípeta no movimento circular.

$$F_G = \frac{m \cdot v^2}{R} = \frac{1,9 \cdot 10^{27} \cdot v^2}{7,8 \cdot 10^{11}} = 4,15 \cdot 10^{23}$$

$$v \cong 1,3 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

5.

A força gravitacional entre dois corpos de massa  $m$  e  $M$  é  $F$ . Se a distância que separa os corpos é reduzida pela metade e troca-se o corpo de massa  $m$  por outro de massa  $2m$ , qual é a nova força  $F'$  entre os novos corpos?



**Comentário:**

Antes da mudança da distância e da troca dos corpos, tínhamos:

$$F = \frac{G \cdot m \cdot M}{r^2}$$

Após as mudanças:

$$F' = \frac{G \cdot 2m \cdot M}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = 8 \cdot \frac{G \cdot m \cdot M}{r^2}$$

$$\boxed{F' = 8F}$$

**6.**

Inicialmente, duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  estão afastadas infinitamente. Determine a velocidade de relativa de aproximação das partículas, quando a distância entre elas for  $R$ .

**Comentário:**

A força gravitacional de atração das partículas é:

$$F = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{x^2}$$

A aceleração da partícula  $m_1$  é:

$$a_1 = \frac{F}{m_1} = \frac{G \cdot m_2}{x^2}$$

Analogamente, a aceleração da partícula  $m_2$  é:

$$a_2 = -\frac{G \cdot m_1}{x^2}$$

A aceleração relativa entre as partículas é dada por:

$$a = a_1 - a_2 = \frac{G \cdot (m_1 + m_2)}{x^2}$$

Se a velocidade relativa entre os corpos é  $v$ :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -v$$

O sinal negativo mostra que a distância entre as partículas diminui com o tempo.

$$a = -v \frac{dv}{dx} = \frac{G \cdot (m_1 + m_2)}{x^2}$$

Integrando os dois lados:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{G \cdot (m_1 + m_2)}{x}$$

Para  $x = R$ :



$$v = \sqrt{\frac{2G \cdot (m_1 + m_2)}{R}}$$

**OBS:** A solução acima é um tanto quanto complicada. Nos tópicos seguintes, veremos a resolução desta mesma questão usando o conceito de energia potencial gravitacional. Veremos com a resolução ficará extremamente elegante 😊.

## 7. (ITA-2018)

Quatro corpos pontuais, cada qual de massa  $m$ , atraem-se mutuamente devido à interação gravitacional. Tais corpos encontram-se nos vértices de um quadrado de lado  $L$  girando em torno do seu centro com velocidade angular constante. Sendo  $G$  a constante de gravitação universal, o período dessa rotação é dado por:

### Comentário:

O centro de rotação dessas partículas é centro de gravidade do sistema. Assim, o centro de rotação é centro do quadrado.

Considere as forças que atuam em uma única partícula. Decompondo essas forças na direção do centro do quadrado temos:

$$F_R = 2 \cdot F \cdot \cos 45^\circ + F'$$
$$F_R = 2 \cdot \frac{G \cdot m^2}{L^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{G \cdot m^2}{(L\sqrt{2})^2} = \frac{G \cdot m^2}{2 \cdot L^2} (2\sqrt{2} + 1)$$

A força resultante é a força centrípeta do movimento:

$$F_R = \frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot \omega^2 \cdot R = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot L \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{G \cdot m^2}{2 \cdot L^2} (2\sqrt{2} + 1)$$
$$T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot L^3 \sqrt{2}}{G \cdot m \cdot (2\sqrt{2} + 1)} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot L^3 \cdot \sqrt{2} \cdot (2\sqrt{2} - 1)}{G \cdot m \cdot (2\sqrt{2} + 1) \cdot (2\sqrt{2} - 1)} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot L^3 \cdot (4 - \sqrt{2})}{G \cdot m \cdot 7}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L^3 \cdot (4 - \sqrt{2})}{7 \cdot G \cdot m}}$$







## 2.5. Densidade volumétrica de massa

A densidade de um corpo pode ser determinada pela razão de sua massa pelo volume. Considere um corpo esférico de massa  $M$  e raio  $R$ .

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{4\pi \cdot \frac{R^3}{3}}$$

$$\rho = \frac{3 \cdot M}{4 \cdot \pi \cdot R^3}$$

Considere agora a porção esférica de raio  $x$ , interna a um corpo de massa  $M$  e raio  $R$ , mostrada abaixo:



Figura 6: Corpo esférico.

Faremos duas análises para o cálculo da massa interna da porção esférica.

### 2.5.1. Densidade constante

Para um corpo que tenha densidade constante, podemos encontrar a massa de qualquer porção esférica interna de raio  $x$  fazendo:

$$\rho = \text{constante} = \frac{M}{4\pi \cdot \frac{R^3}{3}} = \frac{m(x)}{4\pi \cdot \frac{x^3}{3}}$$

$$m(x) = \frac{x^3}{R^3} \cdot M$$

ATENÇÃO  
DECORE!



8.

Um planeta esférico tem massa  $M$  e raio  $R$ . Uma porção esférica concêntrica de raio  $x = R/2$  é retirada deste planeta. Calcule a massa restante ( $m'$ ) se a densidade do planeta é

a) constante e igual a  $\rho_0$ .

**Comentário:**

a)

Para o caso da densidade constante temos:

$$m\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{\left(\frac{R}{2}\right)^3}{R^3} \cdot M = \frac{M}{8}$$

Assim, a massa restante é  $M - \frac{M}{8}$

$$m' = \frac{7M}{8}$$

INDO MAIS  
FUNDO!



### 3. Lei de Gauss

Considere uma superfície fechada  $S$ , denominada Gaussiana. Dentro desta superfície há uma massa interna ( $m_{int}$ ).

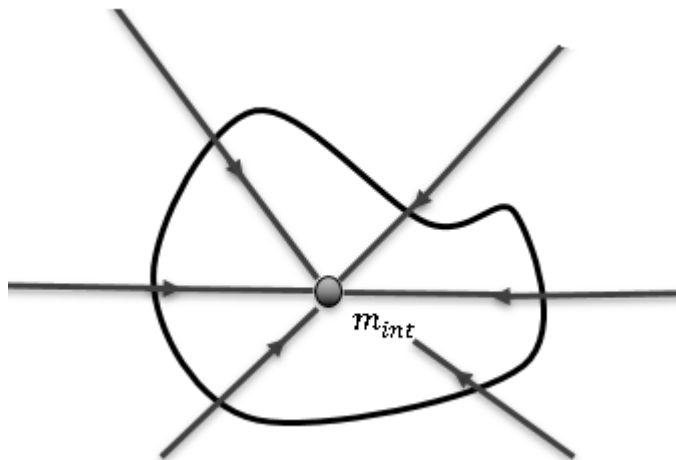


Figura 7: Campo gravitacional de um corpo qualquer.



De forma análoga ao campo elétrico, um campo gravitacional pode ser representado por linhas de forças.

As linhas gravitacionais sempre estão entrando na superfície Gaussiana, pois em gravitação as forças são sempre atrativas. Considere o campo gravitacional atuando na superfície da Gaussiana. Chamaremos esse campo de  $g$ . Analisando uma pequena porção da superfície acima:

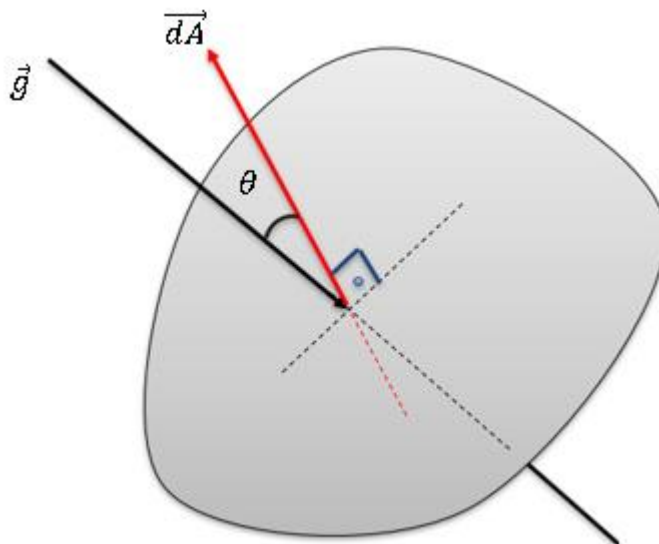


Figura 8: Campo e vetor área.

O fluxo que atravessa essa superfície é dado por:

$$d\Phi = |\vec{g}| \cdot |d\vec{A}| \cdot \cos\theta$$

A lei de Gauss para a gravitação diz:

$$\oint d\Phi = \frac{m_{int}}{C}$$

O termo “C” é uma constante que vale  $\left(-\frac{1}{4\pi \cdot G}\right)$ . Assim, reescrevendo:

$$\oint |\vec{g}| \cdot |d\vec{A}| \cdot \cos\theta = \frac{m_{int}}{C}$$

Transformando em o termo integrante em produto escalar:

$$\boxed{\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -m_{int} \cdot 4\pi \cdot G}$$

A expressão acima é conhecida como lei de Gauss para a gravitação. Na aula de eletrostática, vimos que a lei de Gauss para a elétrica é praticamente idêntica.

Não precisamos decorar a lei de Gauss em sua fórmula integral (conforme visto acima), pois nos nossos problemas sempre conseguiremos escolher uma superfície onde a gravidade é constante, dessa forma, se a gravidade é constante em uma superfície fechada, com massa interna, podemos escrever **sempre** que:



$$g = \frac{4\pi G m_{int}}{A}$$

Essa equação acima é a lei de Gauss em sua versão simplificada.

Veremos como aplicar a lei de Gauss para a gravitação no tópico seguinte. Precisaremos calcular os campos gravitacionais de inúmeras distribuições de massa. Veremos quais são as destruições adequadas para aplicar o a lei.

Não gaste muito tempo aqui, a lei de Gauss só é importante para a **demonstração** de alguns resultados que iremos obter.



## 4. Campos gravitacionais

Todo corpo que possui massa cria ao seu redor um campo gravitacional. O campo gravitacional é uma perturbação gravitacional. A seguir estudaremos vários casos de campos criados por inúmeras distribuições de massa.

Entretanto, antes de iniciarmos o estudo de casos mais complexos, atentaremos para a distribuição de massa mais elementar: um ponto mássico.

Considere um ponto  $P$  que detém uma massa  $m$ . Encontraremos o campo criado por essa massa a uma distância  $x$  deste ponto.

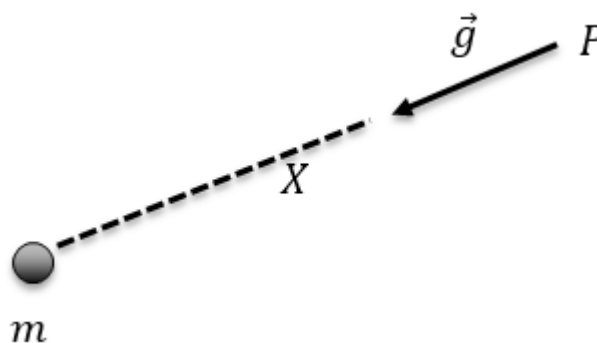


Figura 9: Massa  $m$  em uma região onde existe um campo gravitacional  $\vec{g}$ .

Por definição:

$$|\vec{g}| = \frac{G \cdot m}{x^2}$$

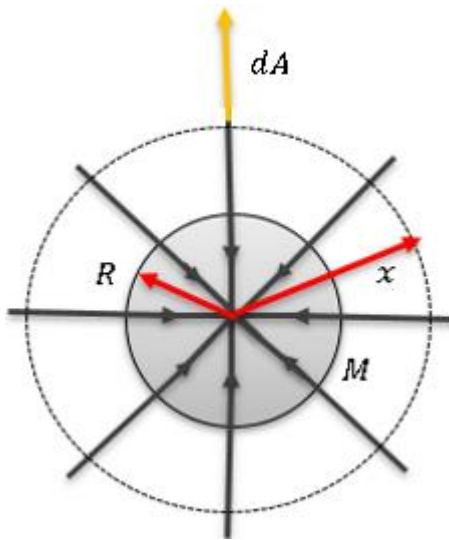


## 4.1. Distribuição esférica de massa

Estudaremos nesse tópico campos gravitacionais criados por distribuições esféricas de massa. Antes disso, faremos uma abordagem teórica para a lei de Gauss aplicada a Gravitação Universal.

### 4.1.1. Lei de Gauss para distribuições esféricas

Considere um corpo esférico de massa  $M$  e raio  $R$ . Considere também um gaussiana esférica de raio  $x$ .



Tentaremos agora calcular o campo gravitacional fora da esfera. Devemos ter em mente que, para uma casca esférica de raio  $x$ , sabemos que o campo gravitacional em qualquer ponto da casca é constante, dessa forma, pela lei de Gauss:

$$g = \frac{4\pi G m_{int}}{A}$$

$$g = \frac{4\pi G m_{int}}{(4\pi x^2)}$$

$$g = \frac{G m_{int}}{x^2}$$

Note que pelo cálculo da lei de Gauss para a gravitação, o campo gravitacional para superfícies esféricas possui algumas características interessantes e muito importantes de serem fixadas. São elas:

1. O campo gravitacional gerado por um corpo esférico em um ponto do espaço, pertencente a uma gaussiana esférica de raio  $x$ , só depende da massa interna à gaussiana.
2. O módulo do campo gravitacional gerado por uma distribuição esférica em um ponto que dista  $x$  de seu centro, é o mesmo gerado por uma massa puntiforme (de massa igual a massa interna à gaussiana) no centro da esfera.

### 4.1.2. Corpo esférico com densidade uniforme

Considere um corpo de massa  $M$  e raio  $R$ . Analisaremos o campo criado por uma porção esférica concêntrica de raio  $x$  **INTERNAMENTE**.



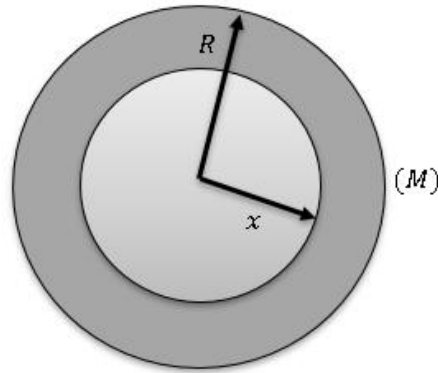


Figura 10: Corpo esférico com densidade uniforme.

**(A) Para  $x = R$  – Campo gravitacional na superfície do corpo ( $g_s$ ):**

Podemos utilizar, no limite, a fórmula que deduzimos anteriormente para o campo externo

$$g(x) = \frac{G \cdot M}{x^2} \Rightarrow g(R) = \frac{G \cdot M}{R^2} = g_s \Rightarrow \boxed{g_s = \frac{G \cdot M}{R^2}}$$

**(B) Para  $0 \leq x < R$ :**

Lei de Gauss:

$$g = \frac{4\pi G m_{int}}{A}$$

Devemos calcular

qual a massa interna da casca esférica com raio  $x$ , considerando que a massa/volume é proporcional ao cubo do raio:

$$m(x) = \frac{x^3}{R^3} \cdot M$$

Assim, pela lei de Gauss, o campo gravitacional a uma distância  $x$  é dado por:

$$g(x) = \frac{G \cdot m(x)}{x^2} = \frac{G \cdot \frac{x^3}{R^3} \cdot M}{x^2} = \frac{G \cdot M}{R^3} \cdot x \Rightarrow \boxed{g(x) = \frac{G \cdot M}{R^3} \cdot x}$$

Muito importante notar que esse resultado é uma reta crescente.

**(C) Para  $x > R$ :**

Conforme nós deduzimos para esse exercício anteriormente:

$$\boxed{g(x) = \frac{G \cdot M}{x^2}}$$

Assim, para uma representação geral do campo temos:



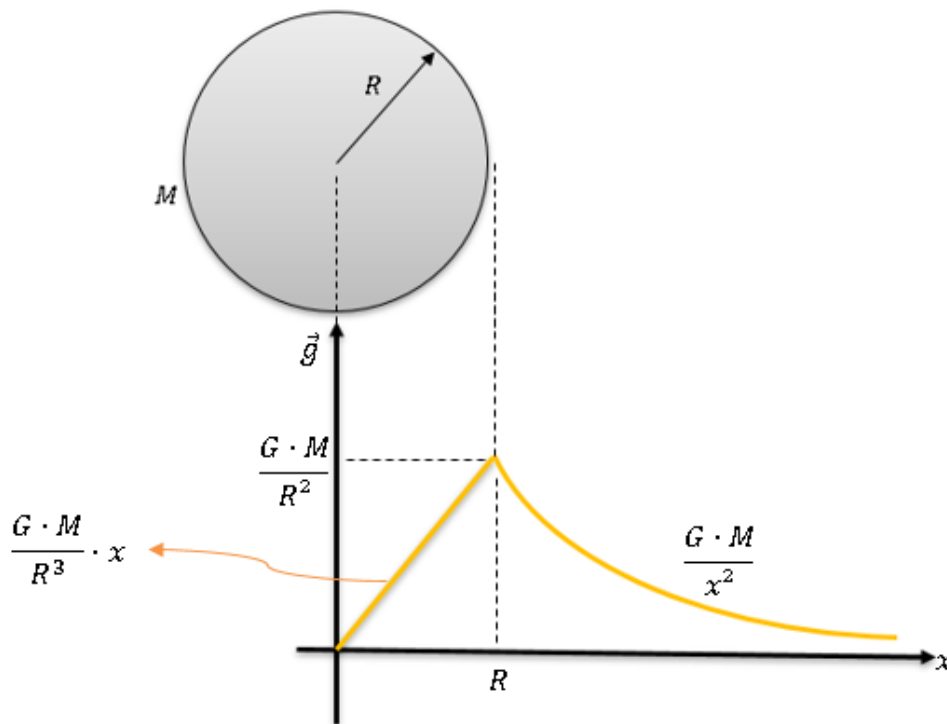


Figura 11: Gráfico do campo gravitacional em função da distância.

Veja que a gravidade cresce linearmente dentro dessa esfera, sendo zero no centro, e quando chega na superfície da esfera começa a diminuir com o inverso do quadrado da distância

#### 4.1.4. Corpo esférico com densidade uniforme e cavidade esférica

Considere um corpo de massa  $M$  e raio  $R$ . É feita uma cavidade esférica de raio  $a$ , a uma distância  $d$  do centro do corpo.

Podemos entender uma cavidade esférica como um corpo esférico de densidade negativa. Neste caso, o vetor campo gravitacional tem sentido oposto e, portanto, comporta-se como um vetor “saindo” do corpo.

**(A) Para pontos no interior do corpo:**



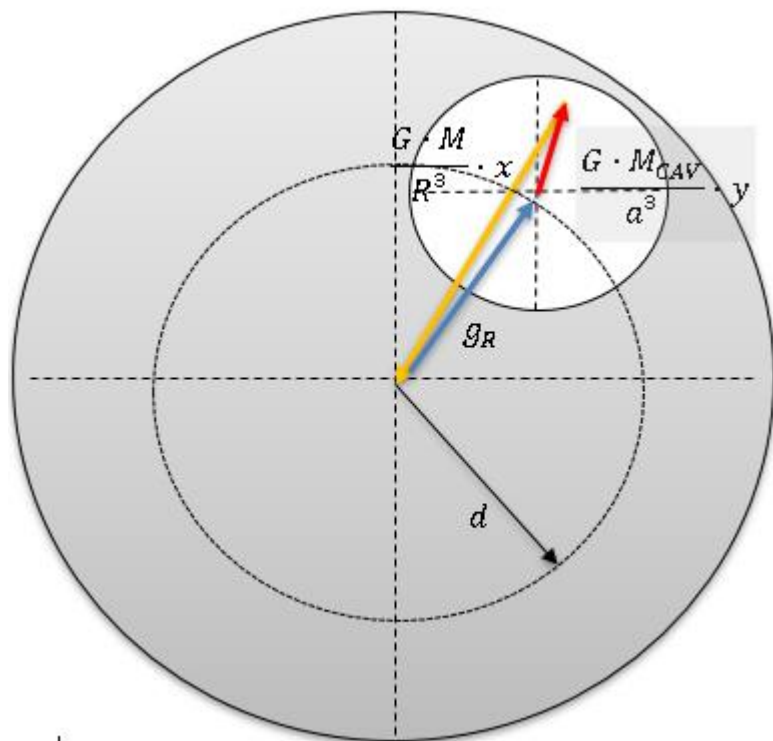


Figura 12: Corpo esférico com uma cavidade esférica.

O corpo sem o furo causa um campo gravitacional  $g'$ :

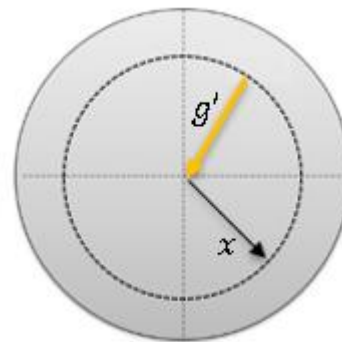


Figura 13: Região esférica caso não houvesse cavidade.

$$g' = \frac{G \cdot M}{R^3} \cdot x$$

O furo esférico de raio  $a$  é posto com densidade negativa. Ele gera um campo ( $g_{cav}$ ) de “repulsão” no ponto.

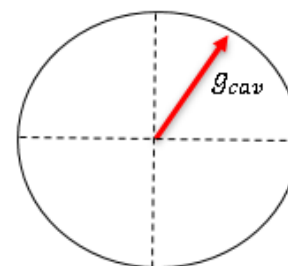


Figura 14: Cavidade esférica.

$$g_{cav} = \frac{G \cdot M_{CAV}}{a^3} \cdot y$$

Em módulo, a densidade dos corpos é a mesma. A massa da cavidade é dada por:

$$\frac{M_{CAV}}{a^3} = \frac{M}{R^3}$$

Assim:

$$g_{cav} = \frac{G \cdot M}{R^3} \cdot y$$

Podemos notar que as expressões dos campos são diretamente proporcionais a distância até o ponto analisado. Desta maneira, podemos fazer o seguinte truque matemático:

$$g' = k \cdot x$$

$$g_{cav} = k \cdot y$$

Portanto, o campo gravitacional resultante é dado por:

$$g_R = k \cdot d$$





$$g_R = \frac{G \cdot M}{R^3} \cdot d$$

O campo resultante no interior da cavidade tem as seguintes propriedades:

- É um campo gravitacional uniforme (constante, veja que  $d$  é uma **constante**).
- Só depende da distância entre o centro do corpo e o centro da cavidade esférica.

**(B) Pontos exteriores ao corpo:**

Considere um ponto  $P$  que dista  $x$  do centro do corpo esférico e  $y$  do centro da cavidade esférica.

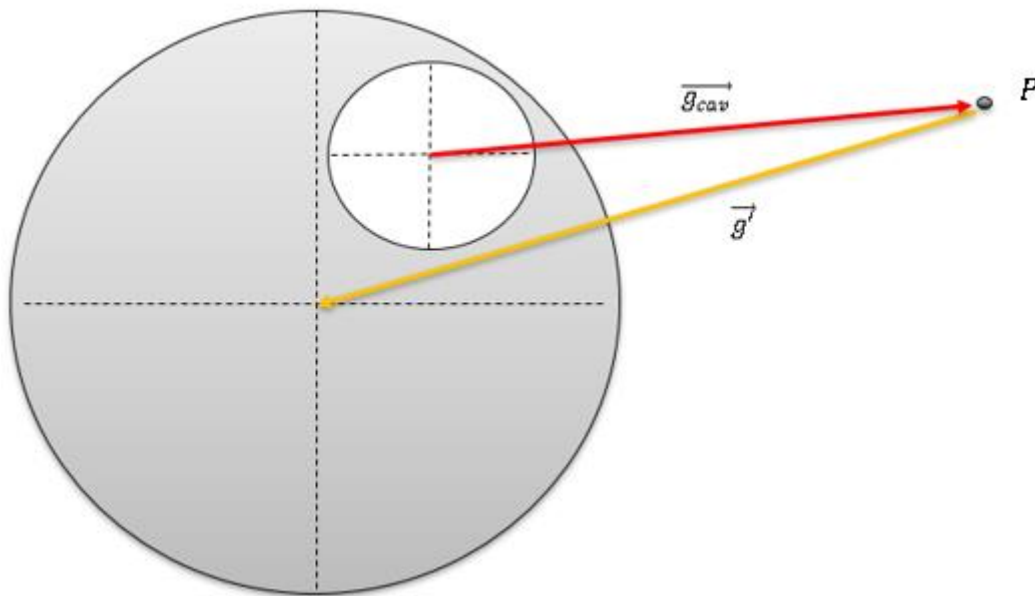


Figura 15: Composição dos campos em um dado ponto  $P$ .

O corpo sem o furo causa um campo gravitacional  $g'$  no ponto exterior:

$$g' = \frac{G \cdot M}{x^2} \quad (I)$$

A cavidade esférica produz um campo ( $g_{cav}$ ):

$$g_{cav} = \frac{G \cdot M_{cav}}{y^2} \Rightarrow g_{cav} = \frac{G \cdot \frac{M \cdot a^3}{R^3}}{y^2}$$

$$g_{cav} = \frac{G \cdot M \cdot a^3}{y^2 \cdot R^3} \quad (II)$$

A gravidade resultante é a subtração **vetorial** desses dois campos.

## 4.7. Variação da aceleração gravidade

Considere que a Terra é um planeta perfeitamente esférico de massa  $M$ , raio  $R$  e centro  $O$ . A terra gira em torno de seu eixo com velocidade angular  $\omega$ . Chamaremos de  $g$  a aceleração da gravidade (campo gravitacional) na superfície da Terra em um dos polos.



$$g = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

#### 4.7.1. Efeito da altitude

Se  $g(H)$  a aceleração da gravidade em um ponto  $P$ , a uma altura  $H$  acima da superfície da Terra.

$$g(H) = \frac{G \cdot M}{(R + H)^2}$$

Fazendo a razão  $g(H)/g$ , vem:

$$g(H) = g \cdot \left(1 + \frac{H}{R}\right)^{-2}$$

Note que para  $R \gg H$ , podemos realizar a aproximação  $\left(1 + \frac{H}{R}\right)^{-2} \cong \left(1 - 2\frac{H}{R}\right)$  e, portanto:

$$g(H) = g \cdot \left(1 - 2\frac{H}{R}\right)$$

#### 4.7.2. Efeito da profundidade

Se  $g(h)$  é a aceleração da gravidade em um ponto  $P'$ , a uma profundidade  $h$  da superfície da terra. Utilizando a expressão da gravidade em função da profundidade, temos:

$$g(x) = \frac{G \cdot M}{R^3} \cdot x$$

A distância  $x$  é medida a partir do centro e, portanto, devemos fazer  $x = R - h$ .

$$g(h) = \frac{G \cdot M}{R^3} \cdot (R - h)$$

Fazendo a razão  $g(h)/g$ , vem:

$$g(h) = g \cdot \left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

ATENÇÃO  
DECORE!



9.

Considere um buraco a uma profundidade  $h$  da superfície da Terra. No fundo deste buraco, a aceleração da gravidade é 36% menor que a aceleração da gravidade na superfície. Se o raio da Terra é de 6400 Km, determine  $h$ .

**Comentário:**

Aplicando a equação deduzida logo acima, temos:



$$g(h) = g \cdot \left(1 - \frac{h}{R}\right) \Rightarrow 0,64g = g \cdot \left(1 - \frac{h}{R}\right) \Rightarrow 0,36 = \frac{h}{R} \Rightarrow \boxed{h = 2304 \text{ Km}}$$

### 4.7.3. Efeito da rotação

Considere um ponto da superfície da Terra localizado a uma latitude  $\lambda$ . Esse ponto está sujeito a duas forças, se considerarmos o referencial da própria terra. A primeira força é de atração gravitacional, devido ao campo gravitacional  $g$ . A segunda é a força centrífuga, devido a rotação da Terra. A soma vetorial dessas forças nos fornece a gravidade aparente de um objeto colocado naquele ponto.

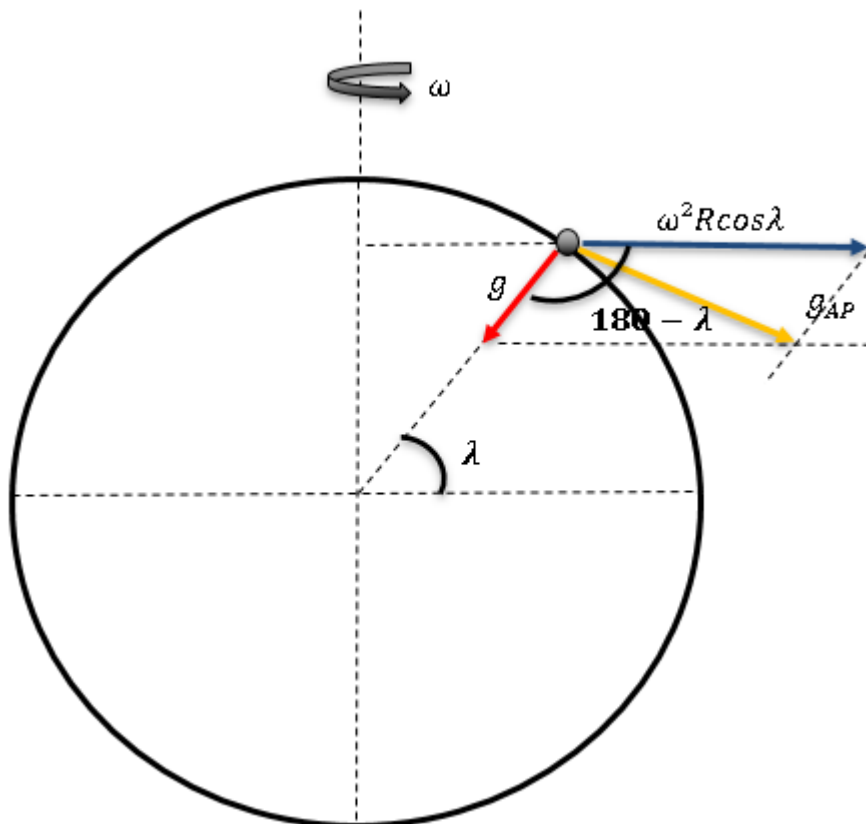


Figura 16: Efeito da rotação em um corpo a uma dada latitude.

Para determinar a gravidade aparente, fazemos a lei dos cossenos para os vetores vermelho e azul.

$$g_{ap} = \sqrt{g^2 + (\omega^2 R \cos \lambda)^2 + 2 \cdot g \cdot \omega^2 R \cos \lambda \cdot \cos (180 - \lambda)}$$

$$g_{ap} = \sqrt{g^2 + (\omega^2 R \cos \lambda)^2 - 2 \cdot g \cdot \omega^2 R \cos \lambda \cdot \cos (\lambda)}$$

$$\boxed{g_{ap} = g \sqrt{1 + \left(\frac{\omega^2 R}{g}\right)^2 \cos^2 \lambda - \frac{2\omega^2 R \cos^2 \lambda}{g}}}$$

(A) Nos polos ( $\lambda = 90^\circ$ ):

$$\boxed{g_{ap} = g}$$

(B) No equador ( $\lambda = 0^\circ$ ):



$$g_{ap} = g - \omega^2 R$$

ATENÇÃO  
DECORE!



### 10. (ITA)

Calcule a nova velocidade angular da Terra ( $\omega'$ ), para que o valor efetivo da aceleração da gravidade no equador seja nulo. O raio da terra vale  $6400 \text{ Km}$  e a aceleração da gravidade nos polos é de  $10 \text{ m/s}^2$ .

#### Comentário:

Utilizando a expressão (F: 4.7.6):

$$g_{ap} = g - \omega^2 R \Rightarrow g_{ap} = 0$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{g}{R}} \Rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{10}{6400 \cdot 1000}}$$

$$\omega' = 0,00125 \text{ rad/s}$$





## 5. Potencial gravitacional

O potencial gravitacional em um ponto P, sujeito a ação de um campo gravitacional, é definido pelo valor do trabalho realizado para trazer um corpo de massa unitária do infinito para esse ponto, sem variação de velocidade do corpo.

Se  $\tau$  é o trabalho realizado para trazer um corpo de massa  $m$  do infinito para o ponto P, sem aceleração, o potencial gravitacional ( $V$ ) em P é dado por:

$$V = \frac{\tau}{m}$$

O potencial gravitacional é uma grandeza escalar. Fazendo a dimensional do potencial temos:

$$[V] = \frac{[\tau]}{[m]} = \frac{[M \cdot L^2 \cdot T^{-2}]}{[M]}$$

$$[V] = [M^0 \cdot L^2 \cdot T^{-2}]$$

### 5.1. Potencial gravitacional de uma massa puntiforme

Considere uma massa puntiforme  $M$ . Determinaremos a seguir, o potencial gravitacional em um ponto P, distante  $x$  de  $M$ . As circunferências concêntricas representam superfícies equipotenciais (mesmo potencial).

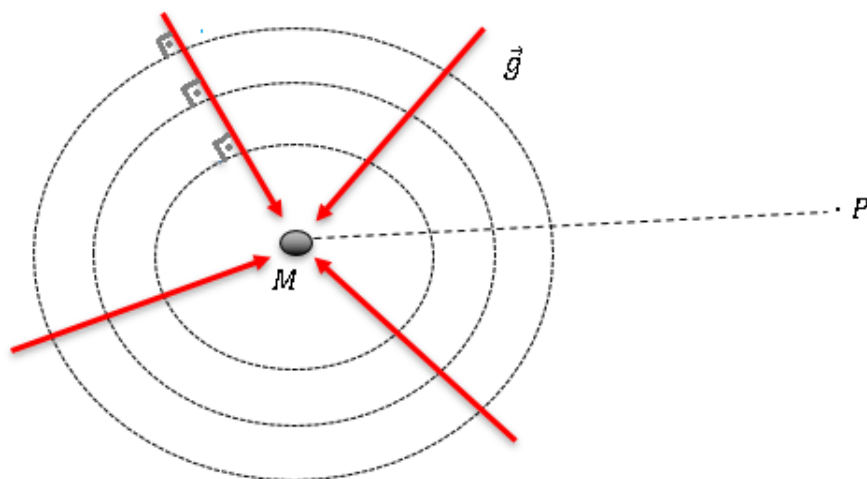


Figura 17: Campo gravitacional de uma massa puntiforme em um ponto P.

O campo gravitacional no ponto P é dado por:

$$g = \frac{G \cdot M}{x^2}$$

Para trazer uma massa unitária até o ponto P:

$$d\tau = 1 \cdot g \cdot (-dx) \Rightarrow \tau = - \int_{\infty}^x g \cdot dx \Rightarrow \tau = - \int_{\infty}^x \frac{G \cdot M}{x^2} \cdot dx = \frac{G \cdot M}{x}$$



$$V = -W = -\frac{G \cdot M}{x}$$

## 5.2. Relação entre o potencial e o campo gravitacional no ponto

Considere o campo gravitacional ( $g(x)$ ) em função da distância  $x$ , gerado por um corpo mássico. O potencial  $V(x)$  produzido por esse corpo é dado por:

$$V(x) = -\int_x^{\infty} g(y) \cdot dy = -\text{área do gráfico } g \text{ por } y$$

Outra maneira de perceber o potencial é através do gráfico do campo gravitacional em função da distância medida em relação a seu centro efetivo de massa (no caso de distribuições esféricas, o centro da esfera).

A área sob o gráfico, de um ponto  $P$  até o infinito, do campo gravitacional em função da distância, é numericamente igual ao potencial gravitacional.

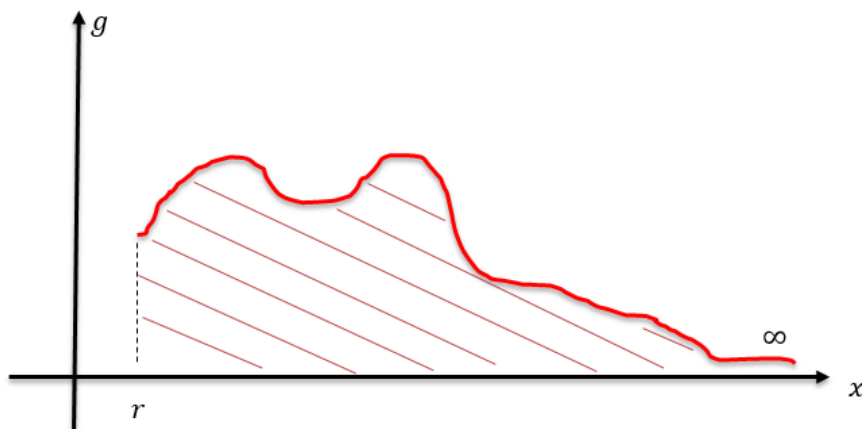


Figura 18: Área sob a curva do campo é numericamente igual a potencial gravitacional.

### 5.2.1. Referência

A referência para o potencial nulo é o infinito. Em qualquer outro ponto do universo, o potencial assume um valor negativo.

### 5.2.2. Troca de referência

Podemos definir uma troca de referência para o potencial nulo, a pedido do exercício, ou para que possamos facilitar a resolução de um problema. Adotaremos uma técnica simples para mudança de referência.

$$V_{P,\infty} = V_{P,B} + V_{B,\infty}$$

- $V_{P,\infty}$  – Potencial do ponto  $P$ , com referencial de potencial nulo no  $\infty$ .
- $V_{P,B}$  – Potencial do ponto  $P$ , com referencial de potencial nulo no ponto  $B$ .
- $V_{B,\infty}$  – Potencial do ponto  $B$ , com referencial de potencial nulo no  $\infty$ .



## 5.3. Potencial gerado por um corpo esférico

### 5.3.1. Potencial gerado por um corpo esférico maciço de densidade uniforme

#### Solução por gráfico:

Considere o gráfico para o gráfico do campo gravitacional para a esfera:

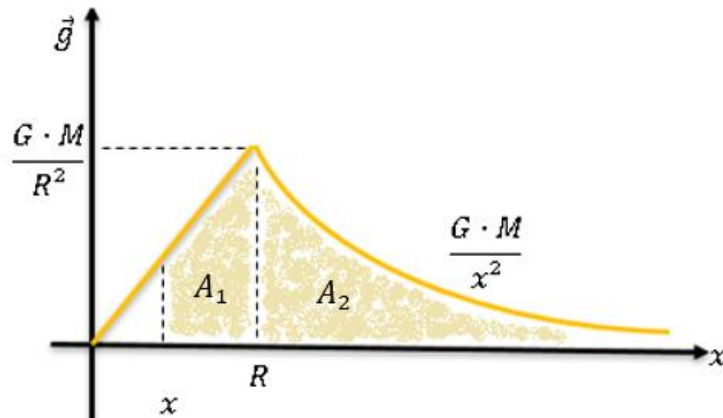


Figura 19: Gráfico do campo gravitacional em função da distância.

A área sob o gráfico é numericamente o potencial gravitacional. Considerando um ponto interno à esfera:

$$A_1 = \frac{(x - R)}{2} \cdot \left[ \frac{G \cdot M}{R^2} + \frac{G \cdot M}{R^3} \cdot x \right]$$

$$A_2 = -\frac{G \cdot M}{R}$$

$$V(x) = A_1 + A_2$$

$$V(x) = -\frac{G \cdot M}{2R^3} (3R^2 - x^2)$$

Para pontos externos, o comportamento do campo é análogo ao de cargas pontuais. Portanto:

$$V(x) = -\frac{G \cdot M}{x}$$

Sintetizando todas as informações em um gráfico, temos:



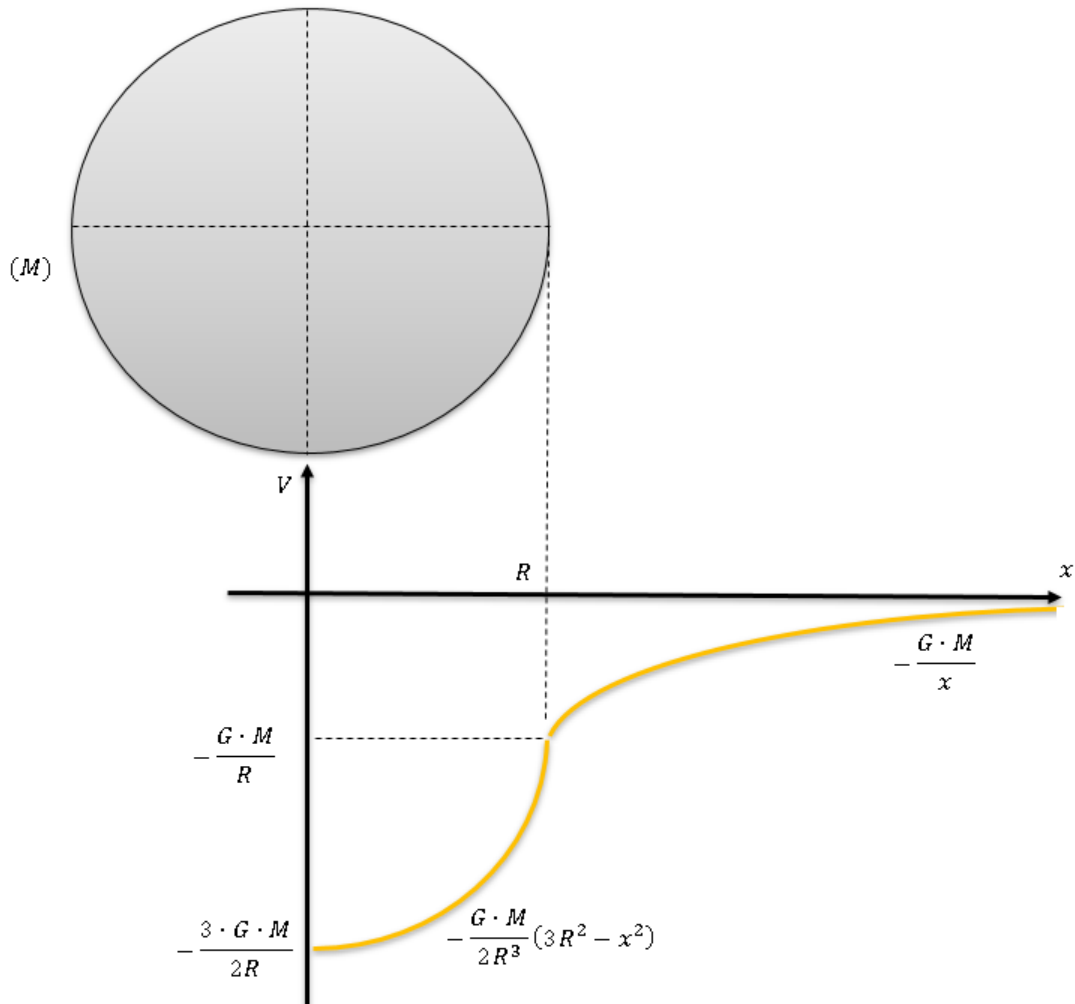


Figura 20: Gráfico do potencial gravitacional em função da distância.







## 6. Energia potencial gravitacional

A energia potencial gravitacional é a energia que um corpo possui devido a atração gravitacional de outro corpo. Ambos os corpos envolvidos nessa atração armazenam a mesma quantidade de energia ( $U$ ).

A energia potencial gravitacional  $U$  pode ser determinada pelo trabalho realizado para afastar essas duas massas. Considere duas massas  $M$  e  $m$  separadas infinitamente no início. O trabalho externo realizado para colocar as massas a uma distância  $x$  é dado por:

$$d\tau = \frac{G \cdot M \cdot m}{x^2} \cdot dx$$
$$\tau = \int_{\infty}^x \frac{G \cdot M \cdot m}{y^2} \cdot dy = -\frac{G \cdot M \cdot m}{x}$$
$$\tau = U$$

$$U = -\frac{G \cdot M \cdot m}{x}$$

Além disso, como sabemos, sempre temos a relação:

$$U = mV$$

### 6.1. Algumas discussões

- Considerando o potencial no infinito como zero, a energia potencial gravitacional nada mais é que o produto do potencial gravitacional pela massa menor.
- Nota-se que para valores grandes de  $x$ , considerando o referencial de energia nula no infinito, a energia potencial entre os corpos diminui. Para  $x \rightarrow \infty$ ,  $U \rightarrow 0$ .
- Se um corpo de massa  $m$  é movido de ponto a uma distância  $r_1$  para um ponto a uma distância  $r_2$ , a variação da energia potencial é dada por:

$$\Delta U_{1,2} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{G \cdot M \cdot m}{y^2} \cdot dy$$

$$\Delta U_{1,2} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r_1} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_2}$$

- Se um corpo é movido da superfície da Terra para um ponto a uma altura  $h$ , podemos fazer:

$$\Delta U_{1,2} = \frac{G \cdot M \cdot m}{R} - \frac{G \cdot M \cdot m}{R + h}$$



Como  $g = \frac{G \cdot M}{R^2}$ :

$$\Delta U_{1,2} = mgR - \frac{mgR^2}{R+h} = mgR \left( 1 - \left( 1 + \frac{h}{R} \right)^{-1} \right)$$

Se a variação de altura for pequena:

$$h \ll R$$

$$\Delta U_{1,2} = mgR \left( 1 - \left( 1 - \frac{h}{R} \right) \right)$$

$$\boxed{\Delta U_{1,2} = mgh}$$

ATENÇÃO  
DECORE!



**11.**

Um satélite de massa  $m$  orbita circularmente ao redor da Terra com um raio  $3R$ . Qual é a energia extra que deverá ser dada ao satélite, para que ele aumente o raio de sua órbita para  $4R$ ? Considere a massa da Terra como  $M$  e o seu raio  $R$ .

**Comentário:**

$$E = U_F - U_i$$
$$E = \left( -\frac{G \cdot M \cdot m}{2(3R)} \right) - \left( -\frac{G \cdot M \cdot m}{2(4R)} \right)$$

$$\boxed{E = \frac{G \cdot M \cdot m}{24R}}$$

**12.**

Inicialmente, duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  estão afastadas infinitamente. Determine a velocidade de relativa de aproximação das partículas, quando a distância entre elas for  $R$ .

**Comentário:**

Resolveremos novamente essa questão. Agora faremos uma abordagem por energia e conservação da quantidade de movimento.

Seja  $v_1$  e  $v_2$  as velocidades das massas  $m_1$  e  $v_2$ , respectivamente, quando a separação entre elas for  $R$ .

Conservação da energia:

$$0 - \left( -\frac{G \cdot M \cdot m}{R} \right) = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} \quad (eq1)$$



Conservação do momento linear:

$$m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 = 0 + 0 \quad (\text{eq2})$$

Das equações (1) e (2):

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m_2^2}{d(m_2 + m_1)}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m_1^2}{d(m_2 + m_1)}}$$

$$V = |v_2 + v_1| \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot (m_2 + m_1)}{d}}$$

13.

A distância entre os centros de duas estrelas é  $10R$ . As massas das estrelas são  $M$  e  $16M$  e seus raios são  $R$  e  $2R$ , respectivamente. Um corpo é lançado da superfície da estrela maior em direção a estrela menor. A velocidade tem a mesma direção da linha que une os centros das estrelas. Qual deve ser a mínima velocidade inicial para alcançar a estrela menor?

**Comentário:**

Primeiramente devemos encontrar o ponto  $P$ , entre as estrelas, onde o campo gravitacional é nulo:

$$\frac{G \cdot M}{x^2} = \frac{G \cdot 16M}{(10R - x)^2}$$
$$x = 2R$$

Assim, o ponto  $P$  dista  $2R$  da estrela menor.

Potencial gravitacional em  $P$ :

$$V_P = -\frac{G \cdot M}{x} - \frac{G \cdot 16M}{10R - x} = -\frac{G \cdot M}{2R} - \frac{2G \cdot M}{R}$$
$$V_P = -\frac{5G \cdot M}{2R}$$

Conservação da energia mecânica do sistema:

$$m(V_p - V_0) = \frac{m \cdot v^2}{2}$$
$$\left(-\frac{G \cdot M}{8R} - \frac{G \cdot 16M}{2R} + \frac{5G \cdot M}{2R}\right) = -\frac{v^2}{2}$$
$$v = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5 \cdot G \cdot M}{R}}$$





## 6.1. Velocidade de escape

É a mínima velocidade inicial dada a um corpo para que ele consiga “fugir” do campo gravitacional de um sistema mássico de partículas. Para um sistema composto por dois corpos, um planeta e um satélite, por exemplo, a velocidade de escape é a mínima velocidade inicial do satélite para que ele não retorne à superfície do planeta, após ser lançado.

### 6.1.1. Corpo lançado de uma cavidade de um planeta esférico homogêneo

Considere um corpo de massa  $m$  no interior de uma cavidade de profundidade  $h$ . O planeta possui massa  $M$  e raio  $R$ . As dimensões da cavidade não alteram o comportamento do campo gravitacional gerado pelo planeta. Determinaremos, a seguir, a velocidade escape ( $V_{esc}$ ) para esse corpo.

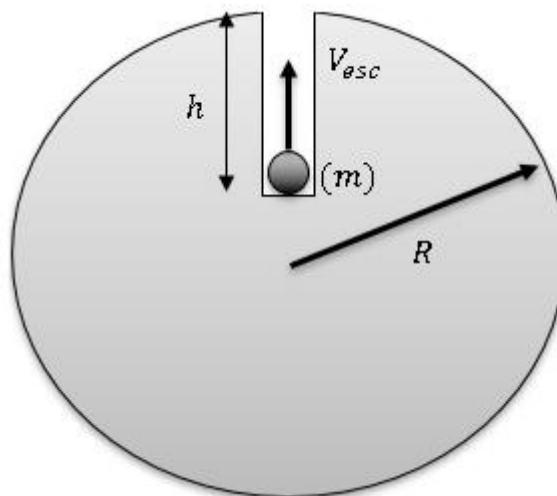


Figura 21: Corpo homogêneo com um pequeno túnel.

#### (1) Conservação da energia mecânica:

No infinito a energia potencial é nula e a velocidade também. A energia potencial gravitacional inicial ( $U_0$ ) é a energia que o corpo de massa  $m$  tem no interior da cavidade.

$$U_0 + \frac{m \cdot V_{esc}^2}{2} = 0 + 0$$

Para uma cavidade esférica, temos:

$$U(x) = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2R^3} (3R^2 - x^2)$$

Para a cavidade temos  $x = R - h$ .



$$U(R - h) = U_0 = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2R^3} (3R^2 - (R - h)^2)$$

$$U_0 = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2R^3} (2R^2 + 2Rh - h^2)$$

$$V_{esc} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R^3} (2R^2 + 2Rh - h^2)}$$

### 6.1.2. Corpo lançado da superfície de um planeta esférico homogêneo

Se o lançamento for da superfície do planeta, temos  $h = 0, x = R$ .

$$V_{esc} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}}$$

### 6.1.3. Buracos negros

Um buraco negro é um corpo, com uma massa muito grande, que não permite que nem a luz fuja de sua enorme atração. Podemos determinar qual é o raio de atuação de um buraco negro, ou seja, a região do espaço onde a luz não consegue escapar da atração do buraco negro. Essa região é chamada de raio de horizonte. Se  $c$  é a velocidade da luz no vácuo:

$$V_{esc} \geq c$$

$$V_{esc}^2 \geq c^2$$

$$\frac{2 \cdot G \cdot M}{R} \geq c^2$$

$$R \leq \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2}$$

### 6.1.4. Propriedades

- A velocidade de escape depende da massa e do tamanho do planeta.
- A velocidade de escape independe da massa do corpo.
- A velocidade de escape para o planeta Terra é dada por:

$$V_{esc}^{Terra} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}}$$

Como a gravidade  $g = \frac{G \cdot M}{R^2}$ :

$$V_{esc}^{Terra} = \sqrt{2 \cdot g \cdot R} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 6400 \cdot 10^3}$$

$$V_{esc}^{Terra} = 11,2 \text{ Km/s}$$

- Se um corpo é lançado da superfície de um planeta com uma velocidade  $v$ , menor que a de escape, o corpo volta para a superfície do planeta.



## 6.2. Trajetórias

Considere um corpo de massa  $m$  está sendo lançado da superfície de um planeta, de raio  $R$  e massa  $M$ , com velocidade  $V_0$ . A energia mecânica deste corpo é dada por:

$$E_M = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R} + \frac{m \cdot V_0^2}{2}$$

Kepler prova que todas as soluções da equação  $\frac{dE_M}{dt} = 0$  são cônicas (elipses, parábolas ou hipérbolas).

### 6.2.1. Trajetória elíptica

Para que a trajetória do corpo seja elíptica a energia mecânica da órbita deve ser negativa:

$$E_M < 0$$

$$V_0 < \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} = V_{esc}$$

Sempre que a velocidade do corpo for menor que a velocidade de escape, do corpo na superfície do planeta, ele fará uma trajetória elíptica. A velocidade ser menor que a velocidade de escape, não garante que ele volte à superfície do planeta. Mostraremos, nos tópicos seguintes, a condição para que ele retorne.

### 6.2.2. Trajetória parabólica

Para que a trajetória do corpo seja parabólica a energia mecânica da órbita deve ser zero:

$$E_M = 0$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} = V_{esc}$$

### 6.2.3. Trajetória hiperbólica ou degenerações

Para que a trajetória do corpo seja hiperbólica a energia mecânica da órbita deve ser positiva:

$$E_M > 0$$

$$V_0 > \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} = V_{esc}$$

## 6.3. Satélites

Os satélites são corpos que orbitam planetas e estrelas. Para o planeta Terra, estudaremos dois tipos de satélites:

- Satélite estacionário.



- Satélite rasante.

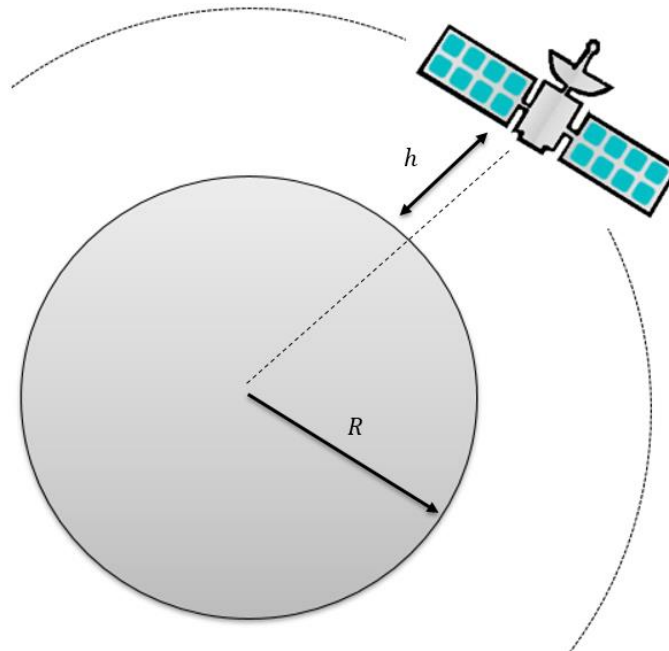


Figura 22: Satélite orbitando o planeta.

### 6.3.1. Satélite estacionário

Um satélite estacionário é um corpo que ocupa sempre a mesma posição em relação a um referencial ligado a superfície do planeta.

Consideraremos alguns dados de um satélite estacionário:

#### (A) Período:

Deve ser o mesmo período de rotação da terra. Se em 24 horas a terra dá uma volta completa:

$$T = 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 86400 \text{ s}$$

#### (B) Altura:

Consideraremos  $h = 36000 \text{ Km}$ , pois é uma altura usual para de um satélite estacionário. Assim, o raio da órbita do satélite é:

$$r = 36000 + 6400 = 40000 \text{ Km}$$

Igualando a força gravitacional com a resultante centrípeta:

$$\frac{G \cdot M \cdot m}{(R + h)^2} = \frac{m \cdot v_{\text{estacionário}}^2}{(R + h)}$$

$$g = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

$$v_{\text{estacionário}} = \sqrt{\frac{g \cdot R^2}{R + h}} = \sqrt{\frac{9,8 \cdot (6,4 \cdot 10^6)^2}{4 \cdot 10^7}}$$

$$v_{\text{estacionário}} \cong 3 \text{ Km/s}$$



### 6.3.2. Satélite rasante

Um satélite rasante tem raio de orbita igual ao raio da terra.

$$R = h$$

Igualando a força gravitacional com a resultante centrípeta:

$$\frac{G \cdot M \cdot m}{R^2} = \frac{m \cdot V_{rasante}^2}{R}$$

$$g = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

$$V_{rasante} = \sqrt{g \cdot R} = \sqrt{9,8 \cdot 6400 \cdot 10^3}$$

$$\boxed{V_{rasante} \cong 8 \text{ Km/s}}$$

Essa velocidade é chamada de velocidade cósmica primária. É a velocidade necessária para colocar um satélite em órbita rasante.

O período de movimento desse satélite é dado por:

$$T_{rasante} = \frac{2\pi R}{V_{rasante}} = \frac{2\pi \cdot 6400 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^3} \Rightarrow \boxed{T_{rasante} \cong 83,8 \text{ minutos}}$$







## 7. Trajetória elíptica

### 7.1. Momento angular e conservação

O momento angular é uma grandeza física vetorial associada à rotação de um corpo. O momento vetorial de uma partícula é definido pelo produto vetorial do vetor posição  $\vec{r}$  da partícula pelo seu momento linear  $\vec{p}$ .

$$\vec{L} = \vec{r} \cdot \vec{p} = \vec{r} \cdot m \cdot \vec{p}$$

#### 7.1.1. Conservação

Há conservação do momento angular sempre que o torque total for nulo.

Se há um sistema isolado, as forças agem internamente entre os corpos geram torque se anulam, pois essas forças são frequentemente centrais o que faz com que pares ação-reação anulem os torques.

Corpos que orbitam outros corpos, tem torque total nulo. Assim, o momento angular é conservado.

Considere um corpo em uma órbita elíptica. Veja como ocorre a conservação do momento angular:

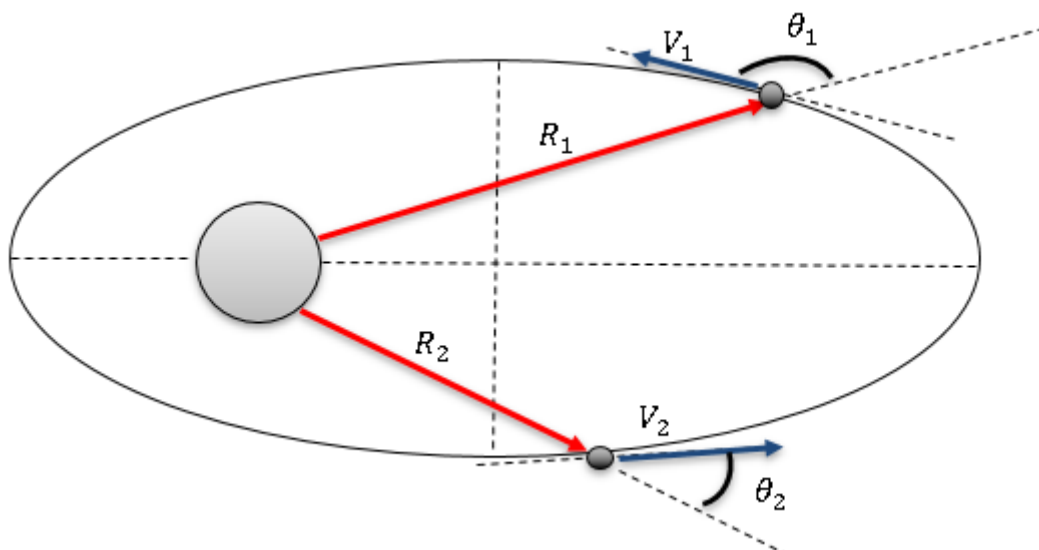


Figura 23: Representação de dois instantes distintos para um corpo orbitando outro.

$$L_1 = L_2$$

$$m \cdot V_1 \cdot r_1 \cdot \text{sen}\theta_1 = m \cdot V_2 \cdot r_2 \cdot \text{sen}\theta_2$$

$$V_1 \cdot R_1 \cdot \text{sen}\theta_1 = V_2 \cdot R_2 \cdot \text{sen}\theta_2$$



## 7.2. Corpo em órbita elíptica

Considere um corpo de massa  $m$  orbitando um planeta de massa  $M$ . Considere uma órbita elíptica de excentricidade  $e$  e semi-eixo maior  $a$ .

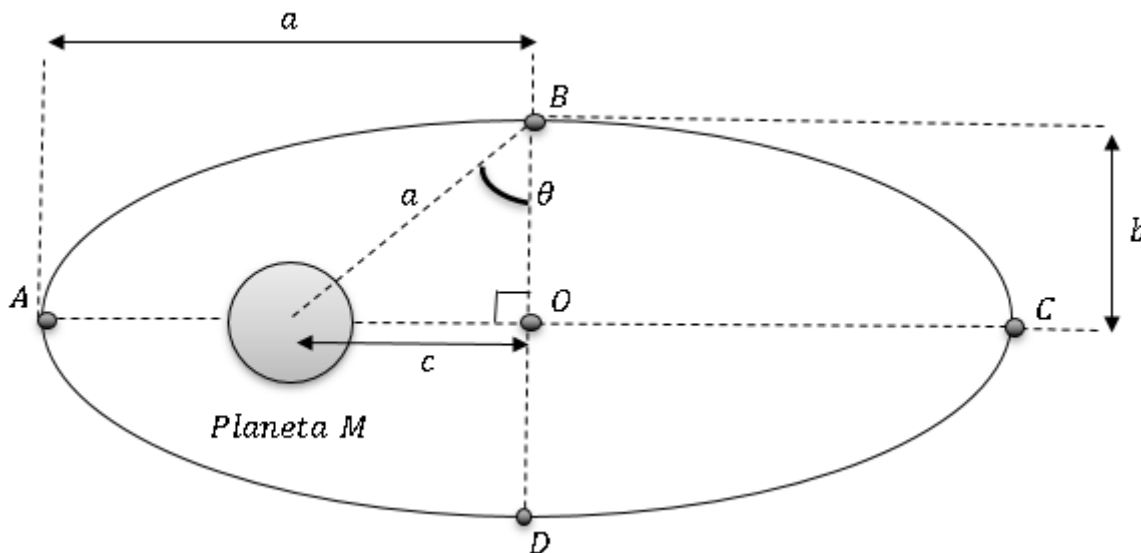


Figura 24: Corpo em órbita elíptica.

### 7.2.1. Elementos geométricos

Pela definição de excentricidade:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \boxed{c = e \cdot a}$$

Utilizando a relação fundamental da elipse:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + (e \cdot a)^2 \Rightarrow \boxed{b = a\sqrt{1 - e^2}}$$

Dessa forma, temos:

$$\cos\theta = \frac{b}{a} = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{a} \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \sqrt{1 - e^2}}$$

$$\sen\theta = \frac{c}{a} = \frac{e \cdot a}{a} \Rightarrow \boxed{\sen\theta = e}$$

### 7.2.2. Afélio e Periélio

Afélio e periélio são os pontos da trajetória mais afastado e menos afastado do planeta ( $M$ ), respectivamente. O afélio corresponde ao ponto  $C$  e o periélio ao ponto  $A$ .

**(A) Raios do afélio e periélio:**

- $r_A$  – Raio do afélio
- $r_P$  – Raio do periélio

$$r_A = a + c = a + e \cdot a$$

$$\boxed{r_A = a(1 + e)}$$



$$r_p = a - c = a - e \cdot a$$

$$\boxed{r_p = a(1 - e)}$$

### (B) Conservação do momento angular:

Pela conservação do momento angular, temos:

$$V_1 \cdot R_1 \cdot \text{sen}\theta_1 = V_2 \cdot R_2 \cdot \text{sen}\theta_2$$

$$V_A \cdot r_A \cdot \text{sen}90^\circ = V_P \cdot r_p \cdot \text{sen}90^\circ$$

$$V_A \cdot a(1 + e) = V_P \cdot a(1 - e)$$

Assim, a relação entre as velocidades no afélio e periélio:

$$\boxed{\frac{V_P}{V_A} = \frac{1 + e}{1 - e}}$$

### (C) Conservação da energia:

$$-\frac{G \cdot M \cdot m}{r_p} + \frac{m \cdot V_P^2}{2} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r_A} + \frac{m \cdot V_A^2}{2}$$

Pelas relações das velocidades do afélio e do periélio, temos:

$$\boxed{V_P = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a} \cdot \frac{1 + e}{1 - e}}} \quad \text{e} \quad \boxed{V_A = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a} \cdot \frac{1 - e}{1 + e}}}$$

### 7.2.3. Pontos sobre o eixo menor

Determinaremos a velocidade do corpo quando está em B ou D. Faremos as contas para o ponto B, em relação a posição do periélio. Fazendo a conservação do momento angular:

$$V_1 \cdot R_1 \cdot \text{sen}\theta_1 = V_2 \cdot R_2 \cdot \text{sen}\theta_2$$

$$V_B \cdot a \cdot \text{sen}(90^\circ + \theta) = V_P \cdot r_p \cdot \text{sen}90^\circ$$

$$V_B \cdot a \cdot \text{cos}\theta = V_P \cdot r_p$$

$$V_B \cdot a \cdot \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a} \cdot \frac{1 + e}{1 - e}} \cdot a(1 - e)$$

$$\boxed{V_B = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a}}}$$

### 7.2.4. Energia mecânica

O universo de forças no estudo de gravitação universal é conjunto das forças conservativas. Dessa forma, pode-se dizer que sempre há conservação da energia mecânica. A energia possui um valor fixo  $E_M$ , que iremos determinar a seguir:



Para o periélio, temos:

$$E_M = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r_p} + \frac{m \cdot V_p^2}{2}$$

$$E_M = -\frac{G \cdot M \cdot m}{a(1-e)} + \frac{m \cdot \left( \sqrt{\frac{G \cdot M}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}} \right)^2}{2}$$

$$\boxed{E_M = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2a}}$$

A energia mecânica encontrada acima é totalmente geral (para qualquer órbita elíptica). Para orbitas circulares o valor de  $a$  é o raio da órbita circular.

### 7.2.5. Momento angular

Em gravitação, as forças são pares ação e reação e, portanto, também se conserva o momento angular. A momento angular também possui um valor fixo. Chamaremos esse valor de  $L$  e iremos determiná-lo abaixo. Adotaremos o afélio como referência:

$$L = m \cdot V_A \cdot r_A \cdot \text{sen}90^\circ$$

$$L = m \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M}{a} \cdot \frac{1-e}{1+e}} \cdot a(1+e) \cdot \text{sen}90^\circ$$

$$\boxed{L = m\sqrt{G \cdot M \cdot a \cdot (1-e^2)}}$$

### 7.2.6. Raio de curvatura

Considere uma elipse centrada na origem. Seu eixo menor vale  $b$  e seu eixo maior vale  $a$ . Sua equação é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{a}{b} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

O raio de curvatura para uma função genérica é dado por:

$$\rho = \left| \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right|$$

- $y'$  – primeira derivada da função.
- $y''$  – segunda derivada da função.

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \Rightarrow y'' = -\frac{b^4}{a^2} \cdot \frac{1}{y^3} \Rightarrow \rho = \frac{(a^4 \cdot y^2 + b^4 \cdot x^2)^{3/2}}{a^4 \cdot b^4}$$

#### (I) Para o eixo menor:

Encontraremos o raio de curvatura no ponto  $P(0, b)$ :



$$\rho_1 = \frac{(a^4 \cdot b^2)^{3/2}}{a^4 \cdot b^4} \Rightarrow \boxed{\rho_1 = \frac{a^2}{b}}$$

(II) Para o eixo maior:

Encontraremos o raio de curvatura no ponto  $P(a, 0)$ :

$$\rho_2 = \frac{(b^4 \cdot a^2)^{3/2}}{a^4 \cdot b^4} \Rightarrow \boxed{\rho_2 = \frac{b^2}{a}}$$

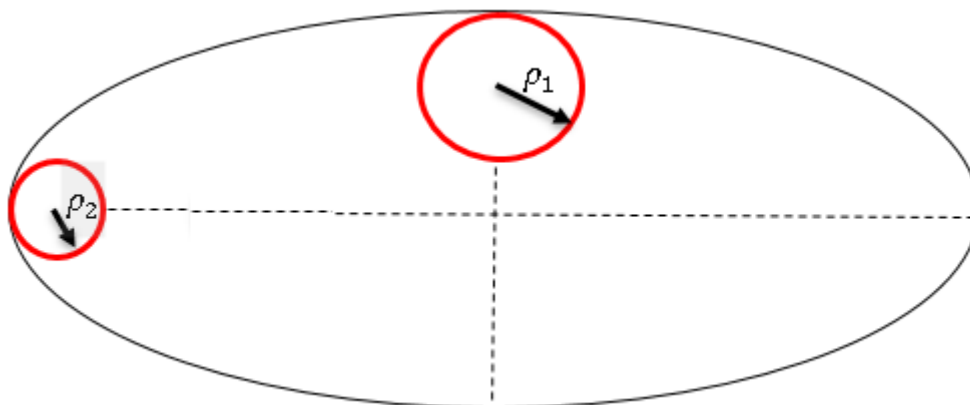


Figura 25: Raio de curvatura em dois momentos distintos.





## 8. Lista de exercícios

### 1. (ITA – 2020 – 1ª)

Um satélite artificial viaja em direção a um planeta ao longo de uma trajetória parabólica. A uma distância  $d$  desse corpo celeste, propulsores são acionados de modo  $a$ , a partir daquele instante, mudar o módulo da velocidade do satélite de  $v_p$  para  $v_e$  e também a sua trajetória, que passa a ser elíptica em torno do planeta, com semieixo maior  $a$ . Sendo a massa do satélite desproporcionalmente menor que a do planeta, a razão  $v_e/v_p$  é dada por

a)  $\sqrt{\frac{d}{a} - \frac{1}{2}}$ .

b)  $\sqrt{\frac{d}{2a}}$ .

c)  $\sqrt{1 - \frac{d}{2a}}$ .

d)  $\sqrt{1 + \frac{d}{2a}}$ .

e)  $\sqrt{1 - \frac{d}{a}}$ .

### 2. (ITA – 2020 – 2ª)

Um planeta esférico de massa  $M$  e raio  $R$  gira com velocidade angular constante ao redor de seu eixo norte-sul. De um ponto de sua linha equatorial é lançado um satélite artificial de massa  $m \ll M$  sob ação de seus propulsores, que realizam um trabalho  $W$ . Em consequência, o satélite passa a descrever uma órbita elíptica em torno do planeta, com semieixo maior  $2R$ . Calcule:

1. A excentricidade máxima da órbita do satélite para que este complete uma volta ao redor do planeta.
2. período de rotação do planeta, levando em conta as grandezas intervenientes, inclusive a constante universal da gravitação  $G$ .

### 3. (ITA)



Sabendo-se que a massa da Terra é aproximadamente 80 vezes a da Lua e que seu raio é aproximadamente 4 vezes maior, um astronauta descendo na superfície da Lua faz oscilar um pêndulo simples de comprimento  $L$  e mede seu período  $T_L$ . Comparando com o período  $T_T$  desse mesmo pêndulo medido na Terra ele observa que:

- a)  $T_T = 80T_L$
- b)  $T_L = 80T_T$
- c)  $T_L = 16T_T$
- d)  $T_T = 16T_L$
- e)  $T_T = 0,4T_L$

#### 4. (ITA)

Em seu livro, “Viagem ao Céu”, Monteiro Lobato, pela boca de um personagem, faz a seguinte afirmação: “quando jogamos uma laranja para cima, ela sobe enquanto a força que produziu o movimento é maior do que a força da gravidade. Quando esta se tornar maior a laranja cai”. (Despreza-se a resistência do ar)

- a) a afirmação é correta pois, de  $F = ma$ , temos que  $a = 0$  quando  $F = 0$ , indicando que as duas forças se equilibraram no ponto mais alto da trajetória;
- b) a afirmação está errada porque a força, exercida para elevar a laranja, sendo constante, nunca será menor que a da gravidade;
- c) a afirmação está errada porque após ser abandonada no espaço a única força que age sobre a laranja é a da gravidade;
- d) a afirmação está correta porque está de acordo com o princípio de ação e reação;
- e) a afirmação está errada porque não satisfaz o princípio de conservação da quantidade de movimento.

#### 5. (ITA)

A energia potencial de um corpo de massa  $m$  na superfície da Terra é  $-G \cdot M_T \cdot m / R_T$ . No infinito essa energia potencial é nula. Considerando-se o princípio de conservação da energia (cinética + potencial), que velocidade deve ser dada a esse corpo de massa  $m$  (velocidade de escape) para que ele se livre da atração da Terra, isto é, chegue ao infinito com  $V = 0$ ?  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$ ;  $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ ;  $R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ . Despreze o atrito com a atmosfera.

- a) 13,1 m/s
- b) 1130 m/s
- c) 11,3 km/s



- d) 113 km/s
- e) Depende do ângulo de lançamento

## 6. (ITA)

Os satélites de comunicação (chamados síncronos) permanecem praticamente estacionários sobre determinados pontos do equador terrestre. Com referência a esse fato, ignorando o movimento de translação da terra:

- a) Um observador terrestre que esteja sob o satélite diz que ele não cai porque está fora da atração da gravidade.
- b) Outro dirá que ele não cai devido ao campo magnético que envolve a terra.
- c) Um terceiro invoca a terceira lei de Newton e explica que existe uma reação igual e oposta à atração da gravidade.
- d) Um observador que estivesse no sol explicaria o fenômeno como um movimento circular uniforme sob a ação de uma força única, centrípeta.
- e) Nenhuma das afirmações acima é correta.

## 7. (ITA)

Uma das conclusões expressas nas famosas leis de Kepler foi sobre o movimento dos planetas em órbitas elípticas das quais o Sol ocupa um dos focos.

- a) esta conclusão foi uma consequência, e, portanto, posterior, do enunciado das leis da Mecânica de Newton.
- b) coube a Sir Isaac Newton interpretar teoricamente estas conclusões com base na lei de gravitação universal e nos princípios de Mecânica Clássica que ele próprio havia proposto.
- c) esta conclusão não apresenta nenhuma relação com o movimento dos engenhos conhecidos como satélites artificiais da Terra.
- d) o movimento da Lua em torno da Terra é de natureza diferente daquele descrito por Kepler.
- e) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

## 8. (ITA)

A relação  $E = \frac{G \cdot M}{R^2}$  entre o valor da aceleração da gravidade na superfície da Terra e os valores da constante de gravitação universal, massa e raio da Terra:

- a) é resultado de uma fórmula empírica elaborada pelos astrônomos e válida para qualquer planeta de forma esférica.
- b) dá o valor correto da aceleração da gravidade em qualquer ponto da Terra desde o polo até o equador.





- c) pode ser obtida teoricamente, tanto no caso da Terra como no caso de um planeta qualquer de forma esférica, homogêneo e que não esteja em rotação em torno de um eixo relativamente a um sistema de referência inercial.
- d) dá o valor correto de  $g$  mesmo para pontos internos à superfície da Terra desde que  $R$  seja interpretado como a distância entre este ponto e o centro da Terra.
- e) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

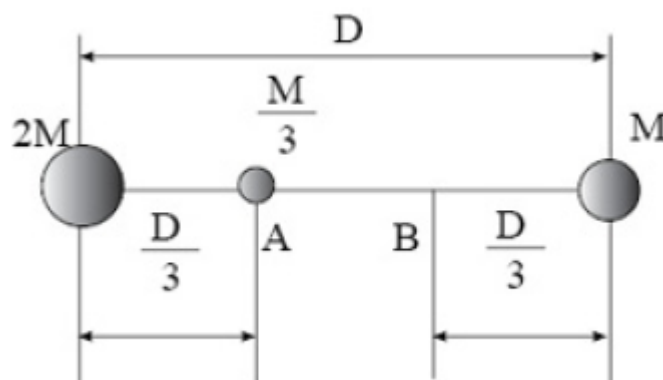
### 9. (ITA)

Dois estrelas de massa “ $m$ ” e “ $2m$ ”, respectivamente, separadas por uma distância “ $d$ ” e bastante afastada de qualquer outra massa considerável, executam movimentos circulares em torno do centro de massa comum. Nestas condições, a mínima quantidade de energia necessária para separar completamente as duas estrelas em função da constante universal de gravidade “ $G$ ”, será dada por:

- a)  $- G \cdot m^2/d$
- b)  $+ G \cdot m^2/d$
- c)  $+ 2 G \cdot m^2/d$
- d)  $- 2 G \cdot m^2/d$
- e) Nenhum dos valores acima

### 10. (ITA)

O trabalho necessário para levar a partícula de massa  $M/3$  do ponto “A” até o ponto “B”, em função da constante universal de gravitação “ $G$ ”, quando essa partícula se encontra sob a ação de 2 massas, “ $M$ ” e “ $2M$ ”, conforme figura abaixo, será dado por:



- a)  $+ 9GM^2/2D$
- b)  $- 9 GM^2/2D$
- c)  $+ GM^2/2D$
- d)  $- GM^2/2D$
- e) Nenhum dos valores acima.

### 11. (ITA)

Deseja-se colocar em órbita da Terra um satélite  $ST$  e, em órbita da Lua um satélite  $SL$ , de modo que ambos tenham o mesmo período de revolução.

Dados:

$$\text{Raio da terra: } 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$\text{Raio da Lua: } 1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$\text{Massa da Terra: } 5,98 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

$$\text{Massa da Lua: } 7,34 \cdot 10^{22} \text{ Kg}$$

Nestas condições, pode-se afirmar que:

- a) isto não é fisicamente possível
- b) se  $r_L$  é a distância entre os centros de  $SL$  e da Lua e  $r_T$  a distância entre os centros de  $ST$  e da Terra, então,  $r_L = r_T$ .
- c) a distância de  $ST$  à superfície da Terra será maior do que  $1,1 \times 10^6$  m
- d) os segmentos que unem  $SL$  ao centro da Lua e  $ST$  ao centro da Terra descrevem áreas iguais em tempos iguais.
- e) a distância de  $ST$  à superfície da Terra deve ser igual à distância de  $SL$  à superfície da Lua.

### 12. (ITA)

Um foguete lançado verticalmente, da superfície da Terra, atinge uma altitude máxima igual a três vezes o raio  $R$  da Terra. Calcular a velocidade inicial do foguete.  $M$  é a massa da Terra e  $G$  constante gravitacional.

$$\text{a) } v = \sqrt{\frac{3GM}{2R}}$$

$$\text{b) } v = \sqrt{\frac{4GM}{3R}}$$

$$\text{c) } v = \sqrt{\frac{2GM}{3R}}$$

$$\text{d) } v = \sqrt{\frac{3GM}{4R}}$$

$$\text{e) } v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

### 13. (ITA)

Um satélite artificial de dimensões desprezíveis gira em torno da Terra em órbita circular



de raio  $R$ . Sua massa é  $m$  e a massa da Terra é  $M$  (muito maior que  $m$ ). Considerando a Terra como uma esfera homogênea e indicando a constante de gravitação universal por  $G$ , podemos afirmar que:

- a) A aceleração normal do satélite é dirigida para o centro da Terra e sua aceleração tangencial vale  $GMR^{-2}$ .
- b) Se a atração gravitacional pudesse ser substituída pela ação de um cabo de massa desprezível, ligando o satélite ao centro da Terra, a tensão nesse cabo seria dada por  $GmM / (2R^2)$ .
- c) Em relação ao satélite, a Terra percorre uma circunferência de raio  $mR/M$ .
- d) O período de rotação do satélite é  $2\pi\sqrt{R^3}/\sqrt{GM}$
- e) A Terra é atraída pelo satélite com uma força de intensidade  $m/M$  vezes menor que a força com a qual o satélite é atraído pela Terra.

#### 14. (ITA)

Sendo  $R$  o raio da Terra, suposta esférica,  $G$  a constante da gravitação universal,  $g_1$  a aceleração de queda livre de um corpo no Equador,  $g_2$  a aceleração de queda livre no pólo Norte,  $M$  a massa da Terra, podemos afirmar que:

- a)  $g_1 = GM/R^2$
- b)  $M = \frac{R^2 \cdot g_2}{G}$
- c)  $g_2$  é nula
- d)  $g_1$  é nula
- e)  $\frac{GM}{R^2} = \frac{g_1 + g_2}{2}$

#### 15. (ITA)

Sabendo-se que a energia potencial gravitacional de um corpo de massa  $M$  (em kg) a uma distância  $r$  (em metros) do centro da Terra é  $E_p = -4 \cdot 10^{14} \frac{M}{r}$ , qual será a velocidade de lançamento que o corpo deve receber na superfície da Terra para chegar a uma distância infinita, com velocidade nula? (Ignore o atrito com a atmosfera e considere o raio da Terra como  $6,4 \cdot 10^6$  m).

- a)  $1,25 \times 10^4$  m/s
- b)  $5,56 \times 10^4$  m/s
- c) 22 km/s
- d)  $19,5 \times 10^3$  m/s
- e)  $1,12 \times 10^4$  m/s



### 16. (ITA)

Uma espaçonave de massa 2000 kg está a  $3 \cdot 10^8$  m da terra ( $6 \cdot 10^{24}$  Kg). A terra, espaçonave, Lua ( $7,4 \cdot 10^{22}$  Kg) e o sol ( $2 \cdot 10^{30}$  Kg) estão alinhados, com a Lua entre a Terra e o sol. A distância da terra a lua é de  $4 \cdot 10^8$  m, a distância da terra ao sol é de  $1,5 \cdot 10^{11}$  m. A força resultante sobre a espaçonave é:

- a) 4,0 N no sentido da espaçonave ao sol
- b) 4,0 N no sentido da espaçonave a terra
- c) 3,0 N no sentido da espaçonave ao sol
- d) 4000 N no sentido da espaçonave ao sol
- e) 3000 N no sentido da espaçonave a terra

### 17. (ITA)

Um corpo A, inicialmente em repouso, explode sob a ação exclusiva de forças internas, dividindo-se em duas partes, uma de massa  $m$  e outra de massa  $m'$ . Após a explosão, a única força que atua sobre cada uma das partes é a força gravitacional exercida pela outra parte. Quando a massa  $m$  está a uma distância  $r$  da posição originalmente ocupada pelo corpo A, a intensidade da aceleração de  $m$  é igual a:

- a)  $a = \frac{Gm}{r^2 \left(1 + \frac{m}{m'}\right)^2}$
- b)  $a = \frac{Gm'}{r^2 \left(1 + \frac{m}{m'}\right)^2}$
- c)  $a = \frac{Gm}{r^2 \left(1 + \frac{m'}{m}\right)^2}$
- d)  $a = \frac{Gm}{r^2}$
- e)  $a = \frac{Gm'}{r^2}$

### 18. (ITA)

Um planeta descreve uma órbita elíptica em torno de uma estrela cuja massa é muito maior que a massa do planeta. Seja  $r$  a distância entre a estrela e o planeta, num ponto genérico da órbita, e a velocidade do planeta no mesmo ponto. Sabendo-se que  $a$  e  $b$  são, respectivamente, os valores mínimo e máximo de  $r$  e  $v_1$  o valor mínimo de  $v$ , pode-se afirmar que o produto  $v \cdot r$  satisfaz a relação:



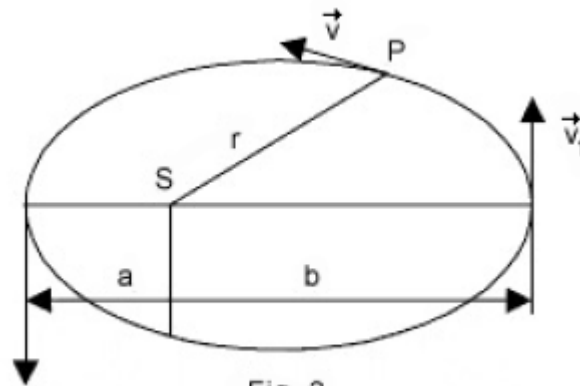


Fig. 3

- a)  $v \cdot r \leq v_1 \cdot b$
- b)  $v \cdot r \geq v_1 \cdot b$
- c)  $v \cdot r = v_1 \cdot \frac{b^2}{a}$
- d)  $v \cdot r = v_1 \cdot \frac{a^2}{b}$
- e)  $v \cdot r = v_1 \cdot \frac{b^2}{2a}$

### 19. (ITA)

Na questão anterior, designando por  $M$  a massa da estrela ( $M \gg m$ ) e por  $E$  a energia mecânica total, pode-se afirmar que:

- a)  $v^2 = 2 \left( \frac{E}{m} + \frac{G \cdot M}{r} \right)$
- b)  $v^2 = 2 \left( \frac{E}{m} - \frac{G \cdot M}{r} \right)$
- c)  $v^2 = 2 \left( \frac{E}{m} + \frac{G \cdot M}{r^2} \right)$
- d)  $v^2 = 2 \left( \frac{E}{m} - \frac{G \cdot M}{r^2} \right)$
- e)  $v = \left( \frac{E}{m} + \frac{G \cdot M}{r} \right)$

### 20. (ITA)

Se colocarmos um satélite artificial de massa “ $m$ ” girando ao redor de Marte ( $6,37 \cdot 10^{23} \text{ kg}$ ) numa órbita circular, a relação entre a sua energia cinética ( $T$ ) e a potencial gravitacional ( $U$ ) será:

- a)  $T = -U/2$
- b)  $T = -1/2U$
- c)  $T = U/2m$

d)  $T = m \cdot U$

e)  $T = U$

### 21. (ITA)

A respeito da lei da gravitação universal podemos afirmar que:

- a) Exprime-se pela fórmula  $P = mg$ .
- b) Pode ser deduzida das leis de Kepler do movimento planetário.
- c) Evidencia a esfericidade da Terra.
- d) Implica em que todos os movimentos planetário sejam circulares.
- e) É compatível com as leis de Kepler do movimento planetário.

### 22. (ITA)

Considere a Terra como um corpo homogêneo, isotrópico e esférico de raio  $R$ , girando em torno do seu eixo com frequência  $\nu$  (número de voltas por unidade de tempo), sendo  $g$  a aceleração da gravidade medida no equador. Seja  $\nu'$  a frequência com que a Terra deveria girar para que o peso dos corpos no equador fosse nulo. Podemos afirmar que:

- a)  $\nu' = 4\nu$
- b)  $\nu' = 2\nu$
- c) não existe  $\nu'$  que satisfaça às condições do problema.
- d)  $\nu' = \sqrt{\left(\nu^2 + \frac{g}{4\pi^2 R}\right)}$
- e)  $\nu' = \sqrt{\left(\nu^2 - \frac{g}{4\pi^2 R}\right)}$

### 23. (ITA)

Duas estrelas de massa  $m$  e  $2m$  respectivamente, separadas por uma distância  $d$  e bastante afastadas de qualquer outra massa considerável, executam movimentos circulares em torno do centro de massa comum. Nestas condições, determine o tempo  $T$  para uma revolução completa, a velocidade  $v(2m)$  da estrela maior, bem como a energia mínima  $W$  para separar completamente as duas estrelas.

### 24. (ITA)

Comentando as leis de Kepler para o movimento planetário, um estudante escreveu:

I- Os planetas do sistema solar descrevem elipses em torno do Sol que ocupa o centro dessas elipses.



II- Como o dia (do nascer ao pôr-do-Sol) é mais curto no inverno e mais longo no verão, conclui-se que o vetor posição da Terra (linha que une esta ao Sol) varre uma área do espaço menor no inverno do que no verão para o mesmo período de 24 horas.

III- Como a distância média da Terra ao Sol é de  $1,50 \cdot 10^8$  km e a de Urano ao Sol é de  $3,00 \cdot 10^9$  km, pela 3ª lei de Kepler conclui-se que o “ano” de Urano é igual a 20 vezes o ano da Terra.

IV- As leis de Kepler não fazem referência à força de interação entre o Sol e os planetas.

Verifique quais as afirmações que estão corretas e assinale a opção correspondente.

- a) I e IV estão corretas.
- b) Só a I está correta.
- c) II e IV estão corretas.
- d) Só a IV está correta.
- e) II e III estão corretas.

## 25. (ITA)

Um astronauta faz experiências dentro do seu satélite esférico, que está em órbita circular ao redor da Terra. Colocando com cuidado um objeto de massa  $m$  bem no centro do satélite o astronauta observa que objeto mantém sua posição ao longo tempo. Baseado na 2ª lei de Newton, um observador no Sol tenta explicar esse fato com as hipóteses abaixo. Qual delas é correta?

- a) Não existem forças atuando sobre o objeto (o próprio astronauta sente-se imponderável).
- b) Se a força de gravidade da Terra  $F_G = G \frac{M_T m_o}{r^2}$  está atuando sobre o objeto e este fica imóvel é porque existe uma força centrífuga oposta que a equilibra.
- c) A carcaça do satélite serve de blindagem contra qualquer força externa.
- d) As forças aplicadas pelo Sol e pela Lua equilibram a atração da Terra.
- e) A força que age sobre o satélite é de gravitação, mas a velocidade tangencial  $v$  do satélite deve ser tal que  $\frac{mv^2}{r} = G \frac{M_T m_o}{r^2}$ .

## 26. (ITA)

Considere um planeta cuja massa é o triplo da massa da Terra e seu raio, o dobro do raio da Terra. Determine a relação entre a velocidade de escape deste planeta e a da Terra ( $v_P/v_T$ ) e a relação entre a aceleração gravitacional na superfície do planeta e da Terra ( $g_P/g_T$ ).

a)  $\frac{v_P}{v_T} = \sqrt{\frac{3}{4}}, \frac{g_P}{g_T} = \frac{3}{4}$



b)  $\frac{V_P}{V_T} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{g_P}{g_T} = \frac{3}{4}$

c)  $\frac{V_P}{V_T} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{g_P}{g_T} = \frac{3}{2}$

d)  $\frac{V_P}{V_T} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{g_P}{g_T} = \frac{3}{4}$

e) Nenhuma das anteriores

### 27. (ITA)

Um satélite artificial geoestacionário permanece acima de um mesmo ponto da superfície da Terra em uma órbita de raio  $R$ . Usando um valor de  $R_T = 6400 \text{ Km}$  para o raio da Terra. A razão  $R/R_T$  é aproximadamente igual a:

a) 290

b) 66

c) 6,6

d) 11,2

e) Indeterminada pois a massa do satélite não é conhecida.

### 28. (ITA)

Na 3ª lei de Kepler, a constante de proporcionalidade entre cubo do semi-eixo maior da elipse (a) descrita por um planeta e o quadrado do período (P) de translação do planeta, pode ser deduzida do caso particular do movimento circular. Sendo G a constante da gravitação universal, M a massa do Sol, R o raio do Sol temos:

a)  $\frac{a^2}{P^2} = \frac{GMR}{4\pi^2}$

b)  $\frac{a^3}{P^2} = \frac{GR}{4\pi^2}$

c)  $\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{2\pi^2}$

d)  $\frac{a^3}{P^2} = \frac{GR}{2\pi^2}$

e)  $\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$

### 29. (ITA)

Qual seria o período (T) de rotação da Terra em torno do seu eixo, para que um objeto apoiado sobre a superfície da Terra no equador ficasse desprovido de peso?

Dados: raio da Terra:  $6,4 \cdot 10^3 \text{ Km}$ ; massa da terra:  $6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$ .





- a)  $T = 48 h$
- b)  $T = 12 h$
- c)  $T = 1,4 h$
- d)  $T = 2,8 h$
- e)  $T = 0$

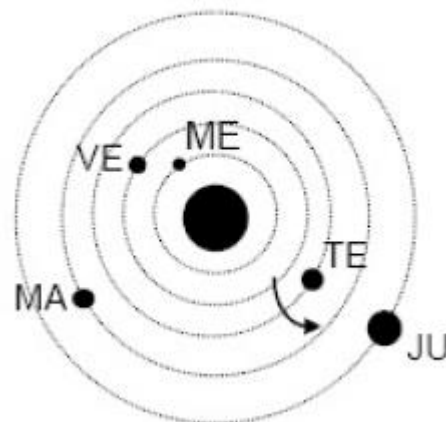
### 30. (ITA)

Considere que  $M_T$  é a massa da Terra,  $R_T$  o seu raio,  $g$  a aceleração da gravidade e  $G$  a constante de gravitação universal. Da superfície terrestre e verticalmente para cima, desejamos lançar um corpo de massa  $m$  para que, desprezando a resistência do ar ele se eleve a uma altura acima da superfície igual ao raio da Terra. A velocidade inicial  $V$  do corpo neste caso deverá ser de:

- a)  $v = \sqrt{\frac{2G \cdot M_T}{R_T}}$
- b)  $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{3R_T}}$
- c)  $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T}}$
- d)  $v = \sqrt{\frac{3G \cdot M_T}{R_T}}$
- e)  $v = \sqrt{\frac{g \cdot G \cdot M_T}{m \cdot R_T}}$

### 31. (ITA)

Numa certa data, a posição relativa dos corpos celestes do Sistema Solar era, para um observador fora do Sistema, a seguinte: ME = Mercúrio; VE = Vênus; TE = Terra; MA = Marte; JU = Júpiter



O sentido de rotação da Terra está indicado na figura. A figura não está em escala. Do diagrama apresentado, para um observador terrestre não muito distante do equador, pode-se afirmar que:

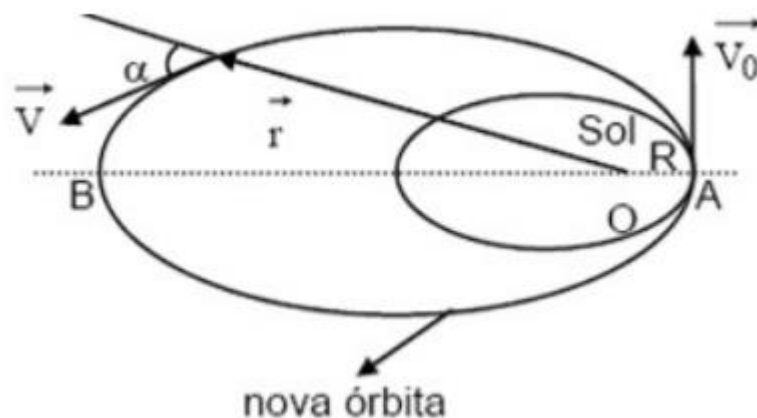
- I - Marte e Júpiter eram visíveis à meia-noite.
- II - Mercúrio e Vênus eram visíveis à meia-noite.
- III - Marte era visível a oeste ao entardecer.
- IV - Júpiter era visível à meia-noite.

Das afirmativas feitas pode-se dizer que:

- a) Somente a IV é verdadeira.
- b) III e IV são verdadeiras.
- c) Todas são verdadeiras.
- d) I e IV são verdadeiras.
- e) Nada se pode afirmar com os dados fornecidos.

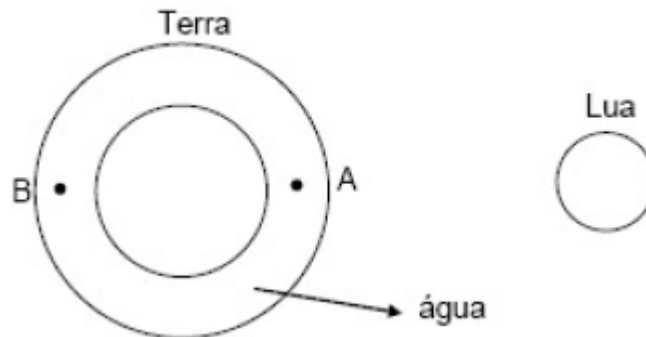
### 32. (ITA)

Suponha um cenário de ficção científica em que a Terra é atingida por um imenso meteoro. Em consequência do impacto, somente o módulo da velocidade da Terra é alterado, sendo  $V_0$  seu valor imediatamente após o impacto, como mostra a figura abaixo. O meteoro colide com a Terra exatamente na posição onde a distância entre a Terra e o Sol é mínima (distância  $AO = R$  na figura). Considere a atração gravitacional exercida pelo Sol, tido como referencial inercial, como a única força de interação que atua sobre a Terra após a colisão, e designe por  $M$  a massa do Sol e por  $G$  a constante de gravitação universal. Considere ainda que o momento angular da Terra seja conservado, isto é, a quantidade de módulo  $m \cdot v \cdot r \cdot \text{sen} \alpha$  permanece constante ao longo da nova trajetória elíptica da Terra em torno do sol (nessa expressão,  $m$  é a massa da Terra,  $r$  é o módulo do vetor posição da Terra em relação ao Sol, o módulo da velocidade da Terra e o ângulo  $\alpha$  entre  $r$  e  $v$ ). Determine a distância  $(OB)$ , do apogeu ao centro do Sol, da trajetória que a Terra passa a percorrer após o choque com o meteoro.



### 33. (ITA)

Sabe-se que a atração gravitacional da lua sobre a camada de água é a principal responsável pelo aparecimento de marés oceânicas na Terra, supostamente esférica, homogeneamente recoberta por uma camada de água.



Nessas condições, considere as seguintes afirmativas:

- I. As massas de água próximas das regiões A e B experimentam marés altas simultaneamente.
- II. As massas de água próximas das regiões A e B experimentam marés opostas, isto é, quando A tem maré alta, B tem maré baixa e vice-versa.
- III. Durante o intervalo de tempo de um dia ocorrem duas marés altas e duas marés baixas.

Então está(ão) correta(s), apenas:

- a) a afirmativa I
- b) a afirmativa II
- c) a afirmativa III
- d) as afirmativas I e II
- e) as afirmativas I e III

### 34. (ITA)

Numa dada balança, a leitura é baseada na deformação de uma mola quando um objeto é colocado sobre sua plataforma. Considerando a Terra como uma esfera homogênea, assinale a opção que indica uma posição da balança sobre a superfície terrestre onde o objeto terá a maior leitura.

- a) Latitude de  $45^\circ$ .
- b) Latitude de  $60^\circ$ .
- c) Latitude de  $90^\circ$ .
- d) Em qualquer ponto do Equador.
- e) A leitura independe da localização da balança já que a massa do objeto é invariável.

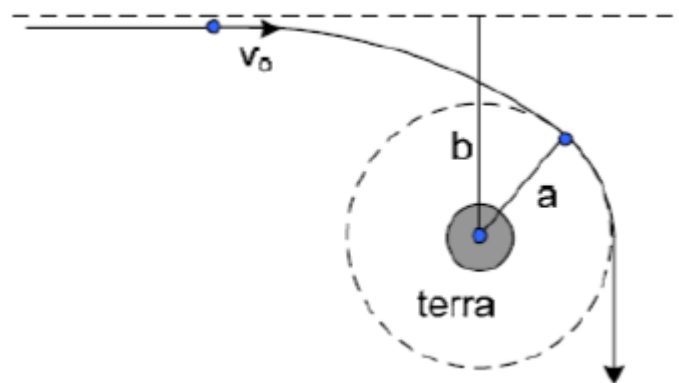


### 35. (ITA)

Derive a 3ª Lei de Kepler do movimento planetário a partir da Lei da Gravitação Universal de Newton considerando órbitas circulares.

### 36. (Lucie)

Uma nave espacial tripulada por marcianos chega à vizinhança da Terra (de massa  $M$ ) seguindo uma órbita hiperbólica cuja assíntota dista  $b$  do centro da Terra. Quando a nave se encontrava a uma distância muito grande da Terra, sua velocidade era  $V_0$ . Qual a relação entre  $V_0$ ,  $b$  e a distância de perigeu  $a$ ?



### 37. (Pandey)

Uma partícula é projetada da superfície da Terra com uma velocidade igual à velocidade de escape do planeta formado um ângulo de  $45^\circ$  com horizontal. Determine o ângulo formado entre a velocidade com a horizontal quando o objeto atinge uma altura em relação à superfície da Terra igual a  $R$ . (Interprete a reta horizontal como a reta tangente a superfície de raio  $2R$  no ponto pedido).

### 38. (Halliday)

Um cometa move-se em uma órbita de excentricidade igual a  $0,880$  e tem velocidade de  $3,72$  km/s quando está o mais distante possível do Sol. Determine a sua velocidade quando estiver no ponto mais próximo do Sol.

### 39. (ITA)

Suponha que na Lua, cujo raio é  $R$ , exista uma cratera de profundidade  $R/100$ , do fundo da qual um projétil é lançado verticalmente para cima com velocidade inicial  $v$  igual à velocidade de escape da superfície da Lua. Determine literalmente a altura máxima alcançada pelo projétil.



#### 40. (Solved Problems in Physics)

Qual a profundidade da cratera que devemos fazer num planeta de raio  $R$  para que, lançando um projétil do fundo da mesma com a velocidade de escape do planeta, sua altura máxima alcançada seja igual a  $3R$ ?

#### 41. (OBF)

Em seu trabalho sobre gravitação universal, Newton demonstrou que uma distribuição esférica homogênea de massa surte o mesmo efeito que uma massa concentrada no centro de distribuição. Se no centro da Terra fosse recortado um espaço oco esférico com metade do raio da Terra, o módulo da aceleração na superfície terrestre diminuiria para ( $g$  é o módulo da aceleração da gravidade na superfície terrestre sem a cavidade):

- a)  $6g/8$
- b)  $3g/8$
- c)  $5g/8$
- d)  $g/8$
- e)  $7g/8$

#### 42. (IME)

Um astronauta equipado, utilizando o esforço máximo, salta  $0,60$  m de altura na superfície terrestre. Calcular o quanto saltaria na superfície lunar, nas mesmas condições. Considerar o diâmetro e a densidade da lua como  $1/4$  e  $2/3$  dos da Terra, respectivamente.

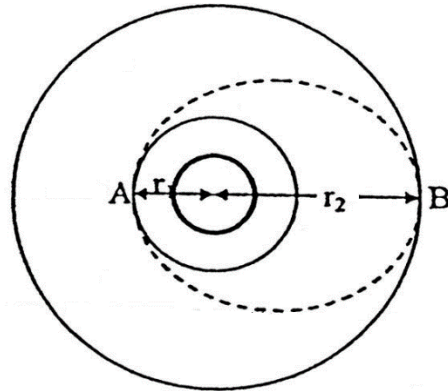
#### 43. (IME)

Um astronauta em traje especial e completamente equipado pode dar pulos verticais de  $0,5$  m na Terra. Determine a altura máxima que o astronauta poderá pular em um outro planeta, sabendo-se que o seu diâmetro é um quarto do da Terra e sua massa específica dois terços da terrestre. Considere que o astronauta salte em ambos os planetas com a mesma velocidade inicial.

#### 44.

Uma nave espacial, de massa  $m$ , descreve uma órbita circular de raio  $r_1$  ao redor da Terra.



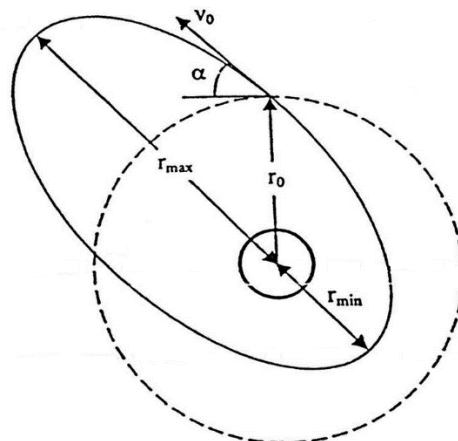


a) Mostre que a energia adicional  $\Delta E$  que deve ser fornecida à nave espacial para transferi-la até uma órbita de raio  $r_2$  é  $\Delta E = \frac{G.M.m(r_2-r_1)}{2r_2r_1}$ , onde  $M$  é massa da Terra.

b) Mostre ainda que, se a transferência de órbita é feita colocando-se a espaçonave numa órbita de transição semielíptica  $AB$ , as energias  $\Delta E_A$  e  $\Delta E_B$  que devem ser fornecidas em  $A$  e  $B$  são, respectivamente,  $\Delta E_A = \frac{r_2}{r_1+r_2} \Delta E$  e  $\Delta E_B = \frac{r_1}{r_1+r_2} \Delta E$

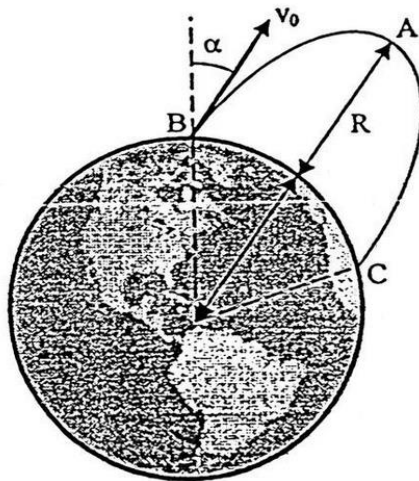
**45.**

Um satélite é projetado no espaço com velocidade  $V_0$  a uma distância  $r_0$  do centro de Terra pelo último estágio de seu foguete de lançamento. A velocidade  $V_0$  foi projetada para colocar o satélite numa órbita circular de raio  $r_0$ . No entanto, devido ao mau funcionamento do controle, o satélite não é projetado horizontalmente, mas num ângulo qualquer  $\alpha$  com a horizontal, e como resultado é impelido numa órbita elíptica. Determine os valores máximo e mínimo da distância do centro da Terra ao satélite.



**46.**

Um míssil é disparado do solo com velocidade  $V_0$ , formando um ângulo  $\alpha$  com a vertical. Se o míssil deve atingir uma altitude máxima igual ao raio da Terra:



Demonstre que o ângulo necessário  $\alpha$  é definido pela relação  $\text{sen}\alpha = 2\sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{V_{ESC}}{V_0}\right)^2}$ , em que  $V_{ESC}$  é a velocidade de escape;

**47.**

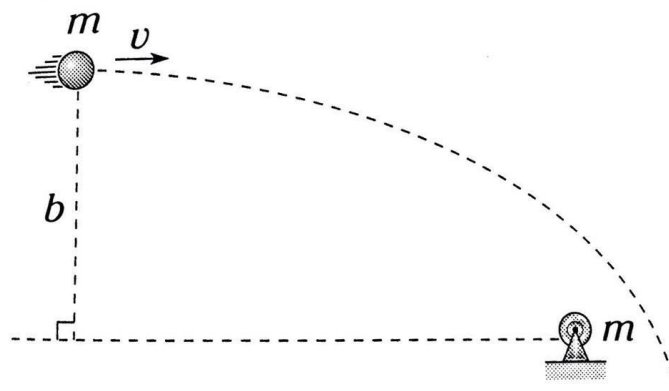
Um planeta descreve uma trajetória elíptica ao redor de um sol, onde os semi-eixos são  $a$  e  $b$  ( $b > a$ ). Determine o raio de curvatura da trajetória do planeta, quando se encontra a uma distância  $b$  do sol.

- a)  $\frac{a^2}{b^2}$
- b)  $\frac{b^2}{a}$
- c)  $\frac{a^2+b^2}{a}$
- d)  $\frac{b^2-a^2}{b}$
- e)  $\frac{2ab}{a+b}$

**48.**

O sistema abaixo é isolado e formado por corpos de mesma massa: um corpo está fixo e o outro é projetado de um lugar muito afastado para depois seguir a trajetória indicada. Determine a menor separação entre os corpos. (Considere  $mG = bv^2$ )





- a)  $\frac{b\sqrt{2}}{2}$
- b)  $\frac{b(\sqrt{2}+1)}{4}$
- c)  $\frac{b\sqrt{2}}{4}$
- d)  $b(\sqrt{2} - 1)$
- e)  $\frac{b(\sqrt{2}-1)}{2}$

49.

Dois corpos idênticos de movem ao redor de uma estrela em um mesmo sentido por trajetórias tangentes. O primeiro corpo se move por uma circunferência de raio  $R$  e o segundo possui um período oito vezes maior que o primeiro. Se os dois corpos se acoplam, qual é o máximo afastamento (da estrela) conseguido por esses corpos acoplados?

- a)  $R$
- b)  $1,2R$
- c)  $1,4R$
- d)  $2R$
- e)  $2,4R$

50.

Um satélite orbita em torno de um planeta e descreve uma trajetória elíptica, cujas distâncias máximas e mínimas são  $R$  e  $r$ , respectivamente. Indique verdadeiro (V) ou falso (F).

I. A maior velocidade alcançada pelo satélite é  $\sqrt{\frac{2RGM}{r(R+r)}}$ , onde  $M$  é a massa do planeta.

II. O menor raio de curvatura da trajetória descrita pelo satélite é  $\frac{2rR}{R+r}$ .

III. A menor energia potencial gravitacional é alcançada na posição de máximo afastamento.





- a) FVF
- b) FFV
- c) VVF
- d) VVV
- e) FVV

**51.**

Um planeta descreve uma trajetória elíptica em torno do Sol, sendo a máxima e a mínima distância  $a$  e  $b$  respectivamente. Qual é a relação entre a energia cinética de translação do planeta e sua energia potencial de interação com o Sol, no instante em que passa pelo afélio?

**52.**

Um foguete é lançado de um planeta e retorna ao mesmo planeta, de raio  $R$ , de tal forma que o vetor velocidade no retorno é paralelo ao vetor velocidade no lançamento. A separação angular no centro do planeta entre o ponto de lançamento e o de retorno é  $\theta$ . Quanto tempo dura o voo do foguete, se o período de um satélite cuja órbita tangencia a superfície da Terra é  $T_0$ ?

**53.**

Imagine um planeta esférico (despreze o movimento de rotação) de massa  $M$  e raio  $R$ . O planeta não possui atmosfera. Uma espaçonave de massa  $m$  ( $m \ll M$ ) é lançada da superfície do planeta com uma velocidade  $v_0$  e um ângulo de  $30^\circ$  com o eixo vertical local. Os foguetes são acionados por um intervalo de tempo muito pequeno. Você pode considerar que quando a espaçonave possuir a velocidade  $v_0$  ela não se movimento uma distância considerável

a) A velocidade  $v_0$  é tão grande que a órbita não é fechada. Qual é a menor velocidade possível nesta situação?

Imagine agora que a órbita é fechada e que a espaçonave atinge uma distância máxima de  $15R$  do centro do planeta. Nesta distância, sua velocidade é  $V$ . Determine:

- b) A razão  $v_0 / V$
- c) A energia total da espaçonave logo após o lançamento
- d) A energia total da espaçonave no ponto mais distante do planeta
- e) A equação que permitiria você determinar  $v_0$  em função de  $M$ ,  $G$  e  $R$  (não é necessário resolver esta equação)





## 9. Gabarito sem comentários

1) C

2) A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  B.  $2\pi\sqrt{\frac{8R^3}{GM}}$

3) E

4) C

5) C

6) D

7) B

8) C

9) B

10) C

11) C

12) A

13) D

14) B

15) E

16) A

17) B

18) B

19) A

20) A

21) E

22) D

23)  $2\pi d \sqrt{\frac{d}{3GM}} \sqrt{\frac{Gm}{3d}} e + \frac{G \cdot m^2}{d}$

24) D

25) E

26) B

27) C

28) E

29) C

30) C

31) B

32)  $\frac{R^2 \cdot V_0^2}{2GM - R \cdot V_0^2}$

33) E

34) C

35)  $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$

$$36) V_0^2 \left( \frac{b^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{2GM}{a}$$

37)  $60^\circ$

38) 58,3 Km/s

39) 99,5 R

$$40) x = R \left( \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right)$$

41) E

42)  $h = 3,6 m$

43) 3,0 m

$$44) a) \frac{GMm}{2r_2r_1} \cdot (r_2 - r_1) \quad b) \Delta E \cdot \left( \frac{r_1}{r_1+r_2} \right)$$

$$45) R_{\min} = (1 - \sin \alpha) \cdot r_0 \quad e \quad R_{\max} = (1 + \sin \alpha) \cdot r_0$$

46) demonstraçã

47) B

48) D

49) D

50) C

$$51) - \frac{b}{(b+a)}$$

$$52) T_0 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$53) 51. a) v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad b) 30 \quad c) E_T = \frac{mv_0^2}{2} -$$

$$\frac{GmM}{R} \quad d) E_T = \frac{mv_0^2}{1800} - \frac{GmM}{15R} \quad e) \frac{mv_0^2}{1800} - \frac{GmM}{15R} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GmM}{R}$$



ESCLARECENDO!



## 10. Lista de exercícios comentada

### 1. (ITA – 2020 – 1ª)

Um satélite artificial viaja em direção a um planeta ao longo de uma trajetória parabólica. A uma distância  $d$  desse corpo celeste, propulsores são acionados de modo a, a partir daquele instante, mudar o módulo da velocidade do satélite de  $v_p$  para  $v_e$  e também a sua trajetória, que passa a ser elíptica em torno do planeta, com semieixo maior  $a$ . Sendo a massa do satélite desproporcionalmente menor que a do planeta, a razão  $v_e/v_p$  é dada por

a)  $\sqrt{\frac{d}{a} - \frac{1}{2}}$ .

b)  $\sqrt{\frac{d}{2a}}$ .

c)  $\sqrt{1 - \frac{d}{2a}}$ .

d)  $\sqrt{1 + \frac{d}{2a}}$ .

e)  $\sqrt{1 - \frac{d}{a}}$ .

#### Comentários:

Sabemos que se a trajetória do corpo é parabólica a energia mecânica é nula:

$$\frac{mv_p^2}{2} - \frac{GMm}{d} = 0 \rightarrow \frac{mv_p^2}{2} = \frac{GMm}{d}$$

Além, disso, para uma trajetória elíptica, a energia mecânica vale  $-\frac{GMm}{2a}$ :

$$\frac{mv_e^2}{2} - \frac{GMm}{d} = -\frac{GMm}{2a} \rightarrow \frac{mv_e^2}{2} = \frac{GMm}{d} - \frac{GMm}{2a}$$

$$\frac{v_e}{v_p} = \sqrt{\frac{\frac{1}{d} - \frac{1}{2a}}{\frac{1}{d}}} = \sqrt{1 - \frac{d}{2a}}$$

**Gabarito: C**



## 2. (ITA – 2020 – 2ª)

Um planeta esférico de massa  $M$  e raio  $R$  gira com velocidade angular constante ao redor de seu eixo norte-sul. De um ponto de sua linha equatorial é lançado um satélite artificial de massa  $m \ll M$  sob ação de seus propulsores, que realizam um trabalho  $W$ . Em consequência, o satélite passa a descrever uma órbita elíptica em torno do planeta, com semieixo maior  $2R$ . Calcule:

1. A excentricidade máxima da órbita do satélite para que este complete uma volta ao redor do planeta.
2. período de rotação do planeta, levando em conta as grandezas intervenientes, inclusive a constante universal da gravitação  $G$ .

### Comentários:

1. A excentricidade máxima ocorre quando  $b = R$ :

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = R\sqrt{3}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Pela segunda lei de Kepler:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G(M+m)}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{8R^3}{GM}}$$

**Gabarito:** A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $2\pi \sqrt{\frac{8R^3}{GM}}$

---

## 3. (ITA)

Sabendo-se que a massa da Terra é aproximadamente 80 vezes a da Lua e que seu raio é aproximadamente 4 vezes maior, um astronauta descendo na superfície da Lua faz oscilar um pêndulo simples de comprimento  $L$  e mede seu período  $T_L$ . Comparando com o período  $T_T$  desse mesmo pêndulo medido na Terra ele observa que:

- a)  $T_T = 80T_L$
- b)  $T_L = 80T_T$
- c)  $T_L = 16T_T$
- d)  $T_T = 16T_L$
- e)  $T_T = 0,4T_L$



### Comentários:

Sabe-se que o período de um pêndulo, para pequenas oscilações, está de acordo com a fórmula:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Portanto, a relação entre os períodos pode ser encontrada a partir da relação entre as gravidades locais de acordo com a equação abaixo:

$$\frac{T_L}{T_T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g_L}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g_T}}} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}}$$

Agora, resta encontrar a relação entre as gravidades locais. A gravidade local pode ser calculada com a fórmula abaixo:

$$g = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

Onde:

-  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

- M é a massa do planeta.

- R é o raio do planeta.

Substituindo a equação na relação anterior, temos:

$$\frac{T_L}{T_T} = \sqrt{\frac{\frac{G \cdot M_T}{R_T^2}}{\frac{G \cdot M_L}{R_L^2}}} = \sqrt{\frac{M_T \cdot R_L^2}{M_L \cdot R_T^2}}$$

Como:

$$M_T = 80 \cdot M_L \text{ e } R_T = 4 \cdot R_L$$

Tem-se:

$$\frac{T_L}{T_T} = \sqrt{\frac{80 \cdot M_L \cdot R_L^2}{M_L \cdot 4^2 \cdot R_L^2}} = \sqrt{5}$$
$$T_T = \frac{T_L}{\sqrt{5}} \approx 0,4 \cdot T_L$$

**Gabarito: E**

#### 4. (ITA)

Em seu livro, “Viagem ao Céu”, Monteiro Lobato, pela boca de um personagem, faz a seguinte afirmação: “quando jogamos uma laranja para cima, ela sobe enquanto a força que produziu



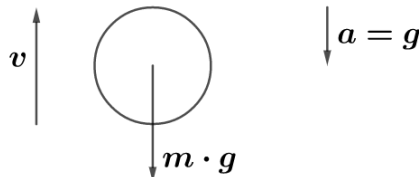
o movimento é maior do que a força da gravidade. Quando esta se tornar maior a laranja cai". (Despreza-se a resistência do ar)

- a) a afirmação é correta pois, de  $F = ma$ , temos que  $a = 0$  quando  $F = 0$ , indicando que as duas forças se equilibraram no ponto mais alto da trajetória;
- b) a afirmação está errada porque a força, exercida para elevar a laranja, sendo constante, nunca será menor que a da gravidade;
- c) a afirmação está errada porque após ser abandonada no espaço a única força que age sobre a laranja é a da gravidade;
- d) a afirmação está correta porque está de acordo com o princípio de ação e reação;
- e) a afirmação está errada porque não satisfaz o princípio de conservação da quantidade de movimento.

### Comentários:

A afirmação apresenta um erro ao afirmar que a laranja sobe enquanto a força que produz o movimento é maior que a gravidade, visto que durante a subida não há força na direção de subida, apenas o peso, contrário ao movimento de subida. O que faz com que a laranja caia é a desaceleração causada pela atuação da força resultante, neste caso o peso, durante a subida, e, a posterior aceleração causada pela mesma força durante a descida.

*Na subida :*



Dessa forma, a alternativa correta é a C, que afirma corretamente sobre a situação da força resultante durante a subida.

### Gabarito: C

## 5. (ITA)

A energia potencial de um corpo de massa  $m$  na superfície da Terra é  $-G \cdot M_T \cdot m / R_T$ . No infinito essa energia potencial é nula. Considerando-se o princípio de conservação da energia (cinética + potencial), que velocidade deve ser dada a esse corpo de massa  $m$  (velocidade de escape) para que ele se livre da atração da Terra, isto é, chegue ao infinito com  $V = 0$ ?  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{Kg}^{-2}$ ;  $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ ;  $R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ . Despreze o atrito com a atmosfera.

- a) 13,1 m/s
- b) 1130 m/s

- c) 11,3 km/s
- d) 113 km/s
- e) Depende do ângulo de lançamento

**Comentários:**

Considerando-se que há conservação de energia, a energia mecânica em ambas as situações deve ser igual. A primeira situação é o corpo com velocidade  $V$  na superfície da terra, a segunda situação é o corpo com velocidade nula no infinito. Como dito pelo enunciado, no infinito a energia potencial gravitacional é nula, assim como a energia cinética visto que a velocidade será 0. Portanto, pela conservação da energia obtemos a equação abaixo:

$$-\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} + \frac{m \cdot V^2}{2} = 0$$

Assim:

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}}$$

Substituindo os valores fornecidos pelo problema:

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6,4 \cdot 10^6}} = 11183 \frac{m}{s} \approx 11,3 \frac{km}{s}$$

**Gabarito: C**

---

**6. (ITA)**

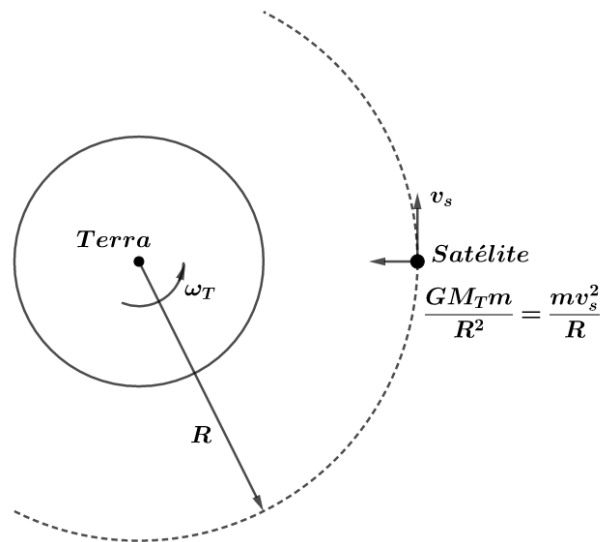
Os satélites de comunicação (chamados síncronos) permanecem praticamente estacionários sobre determinados pontos do equador terrestre. Com referência a esse fato, ignorando o movimento de translação da terra:

- a) Um observador terrestre que esteja sob o satélite diz que ele não cai porque está fora da atração da gravidade.
- b) Outro dirá que ele não cai devido ao campo magnético que envolve a terra.
- c) Um terceiro invoca a terceira lei de Newton e explica que existe uma reação igual e oposta à atração da gravidade.
- d) Um observador que estivesse no sol explicaria o fenômeno como um movimento circular uniforme sob a ação de uma força única, centrípeta.
- e) Nenhuma das afirmações acima é correta.

**Comentários:**



A letra a e b estão erradas pois não condizem com a dinâmica da situação, exposta pela figura mais abaixo. A letra c não é falsa, existe uma reação igual e oposta, mas como diz a terceira lei de Newton, ela atua em um corpo distinto, portanto não pode explicar o equilíbrio do satélite. Finalmente a letra d explicita exatamente a situação observada na figura abaixo.



**Gabarito: D**

## 7. (ITA)

Uma das conclusões expressas nas famosas leis de Kepler foi sobre o movimento dos planetas em órbitas elípticas das quais o Sol ocupa um dos focos.

- esta conclusão foi uma consequência, e, portanto, posterior, do enunciado das leis da Mecânica de Newton.
- coube a Sir Isaac Newton interpretar teoricamente estas conclusões com base na lei de gravitação universal e nos princípios de Mecânica Clássica que ele próprio havia proposto.
- esta conclusão não apresenta nenhuma relação com o movimento dos engenhos conhecidos como satélites artificiais da Terra.
- o movimento da Lua em torno da Terra é de natureza diferente daquele descrito por Kepler.
- Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

### Comentários:

As leis de Kepler foram observações feitas empiricamente, não deduzidas matematicamente. A comprovação matemática veio apenas com a união entre as três leis de Newton, base de mecânica clássica, e a Teoria da Gravitação Universal, também da autoria de Newton. As Leis de Kepler apesar de deduzidas para a terra em torno do Sol, foram posteriormente provadas matematicamente por Newton como válidas para quaisquer dois corpos celestes onde um apresente massa muito maior que o outro.





## Gabarito: B

---

### 8. (ITA)

A relação  $E = \frac{G \cdot M}{R^2}$  entre o valor da aceleração da gravidade na superfície da Terra e os valores da constante de gravitação universal, massa e raio da Terra:

- a) é resultado de uma fórmula empírica elaborada pelos astrônomos e válida para qualquer planeta de forma esférica.
- b) dá o valor correto da aceleração da gravidade em qualquer ponto da Terra desde o polo até o equador.
- c) pode ser obtida teoricamente, tanto no caso da Terra como no caso de um planeta qualquer de forma esférica, homogêneo e que não esteja em rotação em torno de um eixo relativamente a um sistema de referência inercial.
- d) dá o valor correto de  $g$  mesmo para pontos internos à superfície da Terra desde que  $R$  seja interpretado como a distância entre este ponto e o centro da Terra.
- e) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

### Comentários:

A dedução dessa relação consiste em considerar o planeta como puntiforme, ou seja, concentrar toda sua massa em um ponto só. No entanto, isto é possível apenas para o caso de um planeta que atenda às condições da afirmativa C.

Caso não seja homogêneo, a distribuição das diferentes densidades afetará o campo gravitacional resultante, portanto a letra A está errada.

A letra B está errada pois a relação apresenta um resultado de campo gravitacional médio para a Terra de acordo com as condições da afirmativa C, na realidade, como a Terra não é nem homogênea, nem perfeitamente circular, sua gravidade varia de acordo com a latitude.

A letra D está errada devido ao fato de que para pontos internos, a massa interna será menor, portanto não poderia utilizar-se  $M$  que refere-se à toda a massa do planeta.

## Gabarito: C

---

### 9. (ITA)

Dois estrelas de massa “ $m$ ” e “ $2m$ ”, respectivamente, separadas por uma distância “ $d$ ” e bastante afastada de qualquer outra massa considerável, executam movimentos circulares em torno do centro de massa comum. Nestas condições, a mínima quantidade de energia necessária para separar completamente as duas estrelas em função da constante universal de gravidade “ $G$ ”, será dada por:

- a) –  $G \cdot m^2 / d$



- b)  $+ G \cdot m^2/d$
- c)  $+ 2 G \cdot m^2/d$
- d)  $- 2 G \cdot m^2/d$
- e) Nenhum dos valores acima

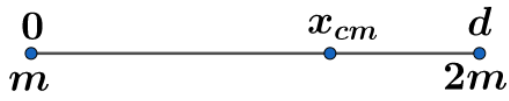
**Comentários:**

Para o problema, considera-se que há conservação da energia mecânica. Dessa forma, deve-se definir duas situações, sendo a primeira já estabelecida pelo problema como as estrelas orbitando em torno do centro de massa comum.

A segunda situação seria o caso das estrelas afastadas por uma distância infinita (energia potencial gravitacional nula) e, como busca-se a energia mínima necessária, considera-se que nenhuma das estrelas possui velocidade após afastarem-se infinitamente.

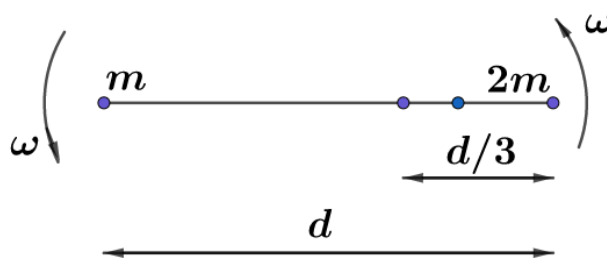
Portanto, a energia mecânica final do sistema é nula. Resta calcular então a energia mecânica inicial (cinética e potencial), para então descobrir-se a energia necessária a ser fornecida para atingir-se a energia mecânica nula.

A distância entre cada estrela e o centro de massa pode ser obtida pelo cálculo do  $X_{CM}$ , como mostrado a seguir.



$$X_{CM} = \frac{X_m \cdot m + X_{2m} \cdot 2m}{3m} = \frac{0 \cdot m + d \cdot 2m}{3m} = \frac{2d}{3}$$

Com essa informação, a situação inicial está ilustrada na figura a seguir:



Cada corpo está sujeito a uma resultante centrípeta, neste caso, a atração gravitacional entre eles. Formulando a dinâmica para o corpo m:

$$R_{cp,m} = \frac{G \cdot m \cdot 2m}{d^2}$$

$$\frac{m \cdot v_m^2}{\frac{2d}{3}} = \frac{G \cdot m \cdot 2m}{d^2} \Rightarrow \frac{v_m^2}{2} = \frac{G \cdot 2m}{3 \cdot d}$$

Como ambas as estrelas têm mesma velocidade angular (pois giram em torno do centro de massa com mesmo período), então:

$$\omega_m = \omega_{2m} \Rightarrow \frac{v_m}{r_m} = \frac{v_{2m}}{r_{2m}}$$

$$v_{2m} = v_m \cdot \frac{r_{2m}}{r_m} = v_m \cdot \frac{\frac{d}{3}}{\frac{2d}{3}} = \frac{v_m}{2} \Rightarrow \frac{v_{2m}^2}{2} = \frac{G \cdot m}{6 \cdot d}$$

Com isto, agora calcula-se a energia mecânica inicial ( $E_{m,i}$ ):

$$E_{m,i} = \frac{m \cdot v_m^2}{2} + \frac{2m \cdot v_{2m}^2}{2} - \frac{G \cdot m \cdot 2m}{d} = \frac{2 \cdot G \cdot m^2}{3 \cdot d} + \frac{2m \cdot G \cdot m}{6 \cdot d} - \frac{2 \cdot G \cdot m^2}{d} = \frac{-G \cdot m^2}{d}$$

Sabendo a energia mecânica inicial e final, pode-se calcular a energia necessária a ser fornecida.

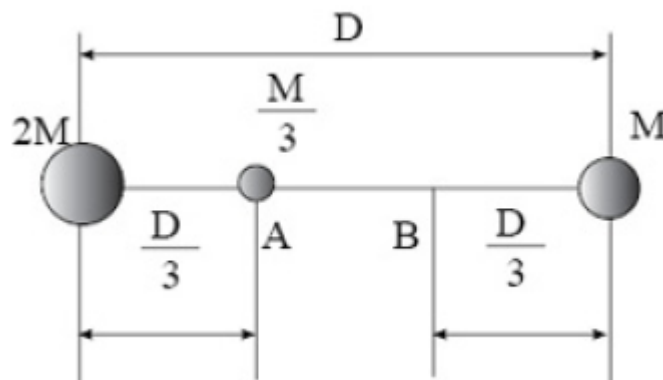
$$E_{m,f} - E_{m,i} = \Delta E$$

$$\Delta E = 0 - \left( \frac{-G \cdot m^2}{d} \right) = + \frac{G \cdot m^2}{d}$$

**Gabarito: B**

### 10. (ITA)

O trabalho necessário para levar a partícula de massa  $M/3$  do ponto "A" até o ponto "B", em função da constante universal de gravitação "G", quando essa partícula se encontra sob a ação de 2 massas, "M" e "2M", conforme figura abaixo, será dado por:



- a)  $+ 9GM^2/2D$
- b)  $- 9 GM^2/2D$
- c)  $+ GM^2/2D$
- d)  $- GM^2/2D$
- e) Nenhum dos valores acima.

**Comentários:**



Trabalho é definido como a variação de energia mecânica. Portanto, considerando-se nula a energia cinética tanto na posição A, quanto na posição B, tem-se que o trabalho neste caso será a variação de energia potencial gravitacional. Assim:

$$W = \Delta E_m = \Delta E_p = E_{p,b} - E_{p,a}$$
$$E_{p,a} = -\frac{G \cdot \left(\frac{M}{3}\right) \cdot 2M}{\frac{D}{3}} - \frac{G \cdot \left(\frac{M}{3}\right) \cdot M}{\frac{2D}{3}} = -\frac{5 \cdot G \cdot M^2}{2 \cdot D}$$
$$E_{p,b} = -\frac{G \cdot \left(\frac{M}{3}\right) \cdot 2M}{\frac{2D}{3}} - \frac{G \cdot \left(\frac{M}{3}\right) \cdot M}{\frac{D}{3}} = -\frac{4 \cdot G \cdot M^2}{2 \cdot D}$$
$$W = -\frac{4 \cdot G \cdot M^2}{2 \cdot D} - \left(-\frac{5 \cdot G \cdot M^2}{2 \cdot D}\right) = \frac{G \cdot M^2}{2 \cdot D}$$

**Gabarito: C**

### 11. (ITA)

Deseja-se colocar em órbita da Terra um satélite *ST* e, em órbita da Lua um satélite *SL*, de modo que ambos tenham o mesmo período de revolução.

Dados:

Raio da terra:  $6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$

Raio da Lua:  $1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$

Massa da Terra:  $5,98 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$

Massa da Lua:  $7,34 \cdot 10^{22} \text{ Kg}$

Nestas condições, pode-se afirmar que:

- isto não é fisicamente possível
- se  $r_L$  é a distância entre os centros de *SL* e da Lua e  $r_T$  a distância entre os centros de *ST* e da Terra, então,  $r_L = r_T$ .
- a distância de *ST* à superfície da Terra será maior do que  $1,1 \times 10^6 \text{ m}$
- os segmentos que unem *SL* ao centro da Lua e *ST* ao centro da Terra descrevem áreas iguais em tempos iguais.
- a distância de *ST* à superfície da Terra deve ser igual à distância de *SL* à superfície da Lua.

**Comentários:**

**Solução 1:**



Utilizando a Terceira Lei de Kepler para a Lua:

$$T_L^2 = \frac{r_L^3 \cdot 4 \cdot \pi^2}{G \cdot M_L}$$

Onde:

- $T_L$  é o período de órbita em torno da lua;
- $r_L$  é o raio da órbita em torno da lua;
- $G$  é a constante gravitacional;
- $M_L$  é a massa da lua.

Analogamente para a Terra (com variáveis iguais em relação à terra):

$$T_T^2 = \frac{r_T^3 \cdot 4 \cdot \pi^2}{G \cdot M_T}$$

$$T_L = T_T$$

$$\frac{r_L^3 \cdot 4 \cdot \pi^2}{G \cdot M_L} = \frac{r_T^3 \cdot 4 \cdot \pi^2}{G \cdot M_T}$$

$$\frac{r_L^3}{M_L} = \frac{r_T^3}{M_T}$$

A relação acima deve ser cumprida para que tenham mesmo período de revolução.

$$\frac{r_L^3}{r_T^3} = \frac{M_L}{M_T} = \frac{7,34 \cdot 10^{22}}{5,98 \cdot 10^{24}} \approx \frac{1}{81}$$

$$\frac{r_T}{r_L} \approx 4,33$$

O valor mínimo de  $r_L$  é o próprio raio da lua. Portanto, o valor mínimo de  $r_T$  seria:

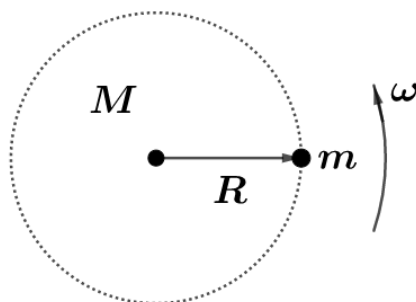
$$r_T \geq 4,33 \cdot r_L = 7,54 \cdot 10^6$$

Como o raio da terra é  $6,37 \cdot 10^6$ , a distância mínima que o satélite terá até a superfície da Terra será:

$$d_{min} = 7,54 \cdot 10^6 - 6,37 \cdot 10^6 = 1,17 \cdot 10^6$$

### Solução 2:

Caso não se lembre da terceira lei de Kepler, pode-se fazer uma dedução rápida. Considere um corpo de massa  $m$  em rotação em torno de um corpo de massa  $M$ , com velocidade angular  $\omega$  e raio de órbita  $R$ . A situação está representada na figura a seguir:



Pela resultante centrípeta, tem-se:

$$m \cdot \omega^2 \cdot R = \frac{G \cdot M \cdot m}{R^2}$$

Sabendo que  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ :

$$T^2 = \frac{r^3 \cdot 4 \cdot \pi^2}{G \cdot M}$$

Então conclui-se a questão seguindo o raciocínio da solução 1.

**Gabarito: C**

---

### 12. (ITA)

Um foguete lançado verticalmente, da superfície da Terra, atinge uma altitude máxima igual a três vezes o raio R da Terra. Calcular a velocidade inicial do foguete. M é a massa da Terra e G constante gravitacional.

a)  $v = \sqrt{\frac{3GM}{2R}}$

b)  $v = \sqrt{\frac{4GM}{3R}}$

c)  $v = \sqrt{\frac{2GM}{3R}}$

d)  $v = \sqrt{\frac{3GM}{4R}}$

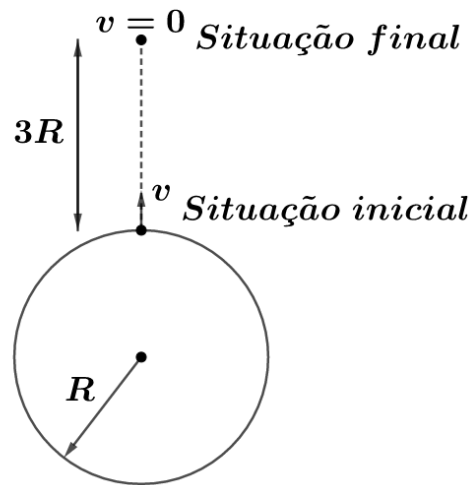
e)  $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

### Comentários:

Considerando-se que houve conservação de energia no problema, a energia mecânica (cinética mais potencial) no lançamento é igual à do ponto mais alto de sua trajetória. No lançamento, o foguete possui velocidade v e uma energia potencial gravitacional conhecida.

No ponto mais alto de sua trajetória o foguete possui velocidade nula e energia potencial gravitacional também conhecida. Ambas as situações estão representadas na figura a seguir:





Pela conservação da energia mecânica:

$$E_{m,i} = E_{m,f}$$
$$-\frac{G \cdot M \cdot m}{R} + \frac{m \cdot v^2}{2} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{4 \cdot R}$$

Onde:

- m é a massa do foguete;
- M é a massa da Terra;
- G é a constante gravitacional;
- R é o raio da Terra.

$$\frac{v^2}{2} = \frac{4 \cdot G \cdot M}{4 \cdot R} - \frac{G \cdot M}{4 \cdot R} = \frac{3 \cdot G \cdot M}{4 \cdot R}$$
$$v = \sqrt{\frac{3 \cdot G \cdot M}{2 \cdot R}}$$

**Gabarito: A**

### 13. (ITA)

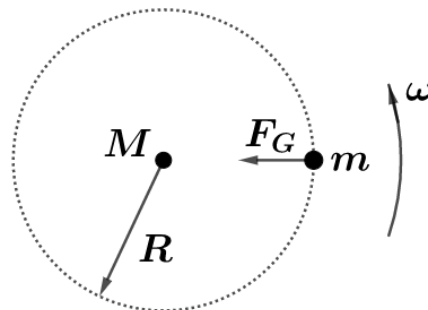
Um satélite artificial de dimensões desprezíveis gira em torno da Terra em órbita circular de raio R. Sua massa é m e a massa da Terra é M (muito maior que m). Considerando a Terra como uma esfera homogênea e indicando a constante de gravitação universal por G, podemos afirmar que:

- A aceleração normal do satélite é dirigida para o centro da Terra e sua aceleração tangencial vale  $GMR^{-2}$ .
- Se a atração gravitacional pudesse ser substituída pela ação de um cabo de massa desprezível, ligando o satélite ao centro da Terra, a tensão nesse cabo seria dada por  $GmM / (2R^2)$ .
- Em relação ao satélite, a Terra percorre uma circunferência de raio  $mR/M$ .

d) O período de rotação do satélite é  $2\pi\sqrt{R^3}/\sqrt{GM}$

e) A Terra é atraída pelo satélite com uma força de intensidade  $m/M$  vezes menor que a força com a qual o satélite é atraído pela Terra.

### Comentários:



$$R_{cp} = F_G$$

$$m \cdot \omega^2 \cdot R = \frac{G \cdot M \cdot m}{R^2}$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{R^3}$$

$$T^2 = \frac{R^3 \cdot 4 \cdot \pi^2}{G \cdot M}$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{R^3}}{\sqrt{G \cdot M}}$$

A letra a é inconsistente por afirmar que o satélite apresenta aceleração tangencial, apesar deste não apresentar força nessa direção, como representado na figura.

A letra b está errada, pois o valor da tensão deveria ser igual à resultante centrípeta que apresenta módulo igual à força gravitacional.

A letra c está errada, pois a questão afirma ser a massa  $m$  muito menor que a massa  $M$ .

A letra e está errada, pois desobedece a Terceira Lei de Newton.

### Gabarito: D

#### 14. (ITA)

Sendo  $R$  o raio da Terra, suposta esférica,  $G$  a constante da gravitação universal,  $g_1$  a aceleração de queda livre de um corpo no Equador,  $g_2$  a aceleração de queda livre no pólo Norte,  $M$  a massa da Terra, podemos afirmar que:

a)  $g_1 = GM/R^2$

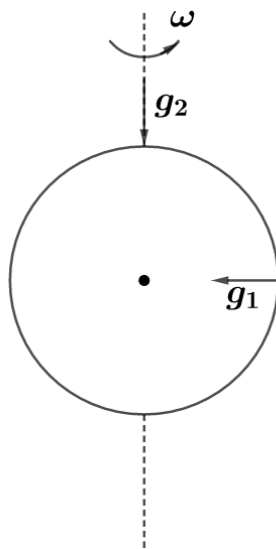
b)  $M = \frac{R^2 \cdot g_2}{G}$



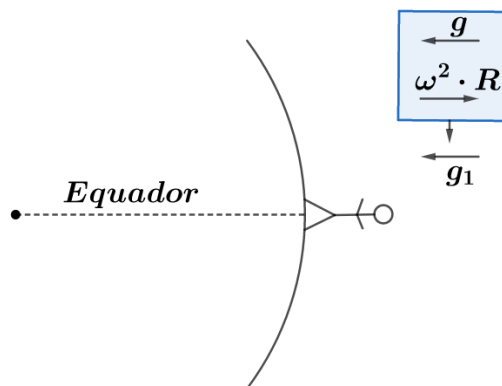


- c)  $g_2$  é nula
- d)  $g_1$  é nula
- e)  $\frac{GM}{R^2} = \frac{g_1 + g_2}{2}$

**Comentários:**



A situação está representada na figura acima. A gravidade local varia de acordo com a latitude da seguinte forma (adotou-se um referencial não inercial exposto na figura abaixo):



$$g_1 = g - \omega^2 \cdot R$$

Onde:

$$- g = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

Como  $g$  é aceleração gravitacional sem aceleração centrífuga,  $g = g_2$ , pois nos polos o raio de rotação é nulo, sendo assim, a aceleração centrífuga do referencial não inercial é nula. Portanto, tem-se:

$$g_2 = \frac{G \cdot M}{R^2} \Rightarrow M = \frac{g_2 \cdot R^2}{G}$$

**Gabarito: B**

### 15. (ITA)

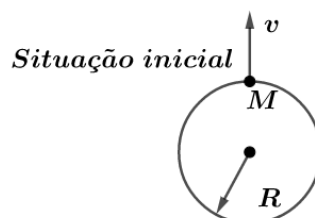
Sabendo-se que a energia potencial gravitacional de um corpo de massa  $M$  (em kg) a uma distância  $r$  (em metros) do centro da Terra é  $E_p = -4 \cdot 10^{14} \frac{M}{r}$ , qual será a velocidade de lançamento que o corpo deve receber na superfície da Terra para chegar a uma distância infinita, com velocidade nula? (Ignore o atrito com a atmosfera e considere o raio da Terra como  $6,4 \cdot 10^6$  m).

- a)  $1,25 \times 10^4$  m/s
- b)  $5,56 \times 10^4$  m/s
- c) 22 km/s
- d)  $19,5 \times 10^3$  m/s
- e)  $1,12 \times 10^4$  m/s

#### Comentários:

Como é desconsiderado o atrito, supõe-se que não haja nenhuma perda de energia mecânica. Portanto, a energia mecânica inicial é igual à energia mecânica final. A condição inicial e final estão representadas na figura a seguir.

$$\text{Situação final} \bullet \begin{matrix} v = 0 \\ E_p = 0 \end{matrix}$$



Na situação final, a energia potencial e cinética são ambas nulas.

$$\begin{aligned} E_{m,i} &= E_{m,f} \\ -\frac{4 \cdot 10^{14} \cdot M}{R} + \frac{M \cdot v^2}{2} &= 0 \\ \frac{v^2}{2} &= \frac{4 \cdot 10^{14}}{6,4 \cdot 10^6} \\ v &= \sqrt{\frac{5}{4} \cdot 10^8} = 1,118 \cdot 10^4 \frac{m}{s} \approx 1,12 \cdot 10^4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**Gabarito: E**



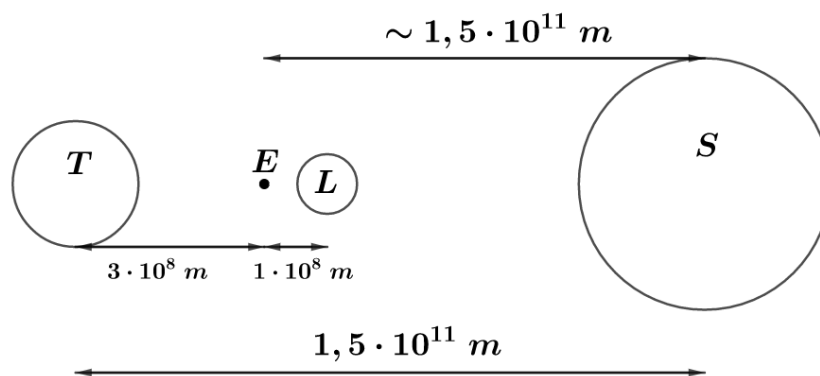
### 16. (ITA)

Uma espaçonave de massa 2000 kg está a  $3 \cdot 10^8 \text{ m}$  da terra ( $6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$ ). A terra, espaçonave, Lua ( $7,4 \cdot 10^{22} \text{ Kg}$ ) e o sol ( $2 \cdot 10^{30} \text{ Kg}$ ) estão alinhados, com a Lua entre a Terra e o sol. A distância da terra a lua é de  $4 \cdot 10^8 \text{ m}$ , a distância da terra ao sol é de  $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ . A força resultante sobre a espaçonave é:

- a) 4,0 N no sentido da espaçonave ao sol
- b) 4,0 N no sentido da espaçonave a terra
- c) 3,0 N no sentido da espaçonave ao sol
- d) 4000 N no sentido da espaçonave ao sol
- e) 3000 N no sentido da espaçonave a terra

#### Comentários:

A situação descrita pelo problema está representada na figura abaixo:



Na figura, T representa Terra, E, Espaçonave, L, Lua e S, Sol. A distância entre a espaçonave e o sol foi tomada como aproximadamente  $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ . Sendo assim, a força resultante será (adotando a direção espaçonave-terra como positiva):

$$\frac{G \cdot M_T \cdot m}{d_T^2} - \frac{G \cdot M_L \cdot m}{d_L^2} - \frac{G \cdot M_S \cdot m}{d_S^2} = F_R$$

Onde:

- $m$  é a massa da espaçonave;
- $G$  é a constante gravitacional;
- $d_T$ ,  $d_S$  e  $d_L$  são as distâncias da espaçonave à Terra, ao Sol e à Lua respectivamente;
- $M_T$ ,  $M_L$  e  $M_S$  são as massas da Terra, do Sol e da Lua respectivamente;
- $F_R$  representa força resultante.

$$G \cdot m \cdot \left( \frac{M_T}{d_T^2} - \frac{M_L}{d_L^2} - \frac{M_S}{d_S^2} \right) = F_R$$



$$F_R = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot \left( \frac{6 \cdot 10^{24}}{9 \cdot 10^{16}} - \frac{7,4 \cdot 10^{22}}{10^{16}} - \frac{2 \cdot 10^{30}}{2,25 \cdot 10^{22}} \right)$$
$$F_R = -3,951 \text{ N}$$

Lembrando a convenção de sinais adotada, portanto a força é de aproximadamente 4 N na direção espaçonave sol.

## Gabarito: A

### 17. (ITA)

Um corpo A, inicialmente em repouso, explode sob a ação exclusiva de forças internas, dividindo-se em duas partes, uma de massa  $m$  e outra de massa  $m'$ . Após a explosão, a única força que atua sobre cada uma das partes é a força gravitacional exercida pela outra parte. Quando a massa  $m$  está a uma distância  $r$  da posição originalmente ocupada pelo corpo A, a intensidade da aceleração de  $m$  é igual a:

a)  $a = \frac{Gm}{r^2 \left(1 + \frac{m}{m'}\right)^2}$

b)  $a = \frac{Gm'}{r^2 \left(1 + \frac{m}{m'}\right)^2}$

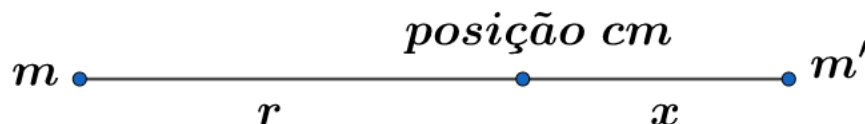
c)  $a = \frac{Gm}{r^2 \left(1 + \frac{m'}{m}\right)^2}$

d)  $a = \frac{Gm}{r^2}$

e)  $a = \frac{Gm'}{r^2}$

### Comentários:

Como a explosão foi ação exclusiva de forças internas, não há deslocamento do centro de massa nem variação de energia mecânica, pois forças internas não realizam trabalho.



Como a posição do centro de massa não variou:

$$m \cdot r = x \cdot m'$$

$$x = \frac{m}{m'} \cdot r$$

Portanto, a distância entre os dois corpos é:

$$d = x + r = r \left(1 + \frac{m}{m'}\right)$$



Assim, a força gravitacional sobre  $m'$  é:

$$F = \frac{G \cdot m \cdot m'}{r^2 \cdot \left(1 + \frac{m}{m'}\right)^2}$$

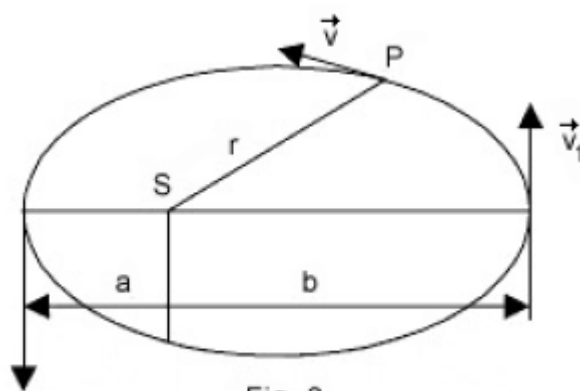
Como esta é a única força atuando sobre o corpo:

$$F = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{G \cdot m'}{r^2 \cdot \left(1 + \frac{m}{m'}\right)^2}$$

**Gabarito: B**

### 18. (ITA)

Um planeta descreve uma órbita elíptica em torno de uma estrela cuja massa é muito maior que a massa do planeta. Seja  $r$  a distância entre a estrela e o planeta, num ponto genérico da órbita, e a velocidade do planeta no mesmo ponto. Sabendo-se que  $a$  e  $b$  são, respectivamente, os valores mínimo e máximo de  $r$  e  $v_1$  o valor mínimo de  $v$ , pode-se afirmar que o produto  $v \cdot r$  satisfaz a relação:



- a)  $v \cdot r \leq v_1 \cdot b$
- b)  $v \cdot r \geq v_1 \cdot b$
- c)  $v \cdot r = v_1 \cdot \frac{b^2}{a}$
- d)  $v \cdot r = v_1 \cdot \frac{a^2}{b}$
- e)  $v \cdot r = v_1 \cdot \frac{b^2}{2a}$

### Comentários:

Pensando na conservação do momento angular, temos que  $\vec{v} \times \vec{r}$  é constante. Quando a partícula está no afélio (distância  $b$  da estrela), o produto vetorial terá módulo  $v_1 \cdot b$ .

No entanto, em um instante qualquer, o produto vetorial terá módulo  $v \cdot r \cdot \sin \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{r}$ . Como o módulo de  $\sin \theta$  é sempre menor ou igual a 1, temos que:

$$|\vec{v} \times \vec{r}| = v_1 \cdot b = v \cdot r \cdot \sin \theta \leq v \cdot r$$

Portanto:

$$v \cdot r \geq v_1 \cdot b$$

**Gabarito: B**

---

### 19. (ITA)

Na questão anterior, designando por  $M$  a massa da estrela ( $M \gg m$ ) e por  $E$  a energia mecânica total, pode-se afirmar que:

a)  $v^2 = 2 \left( \frac{E}{m} + \frac{G \cdot M}{r} \right)$

b)  $v^2 = 2 \left( \frac{E}{m} - \frac{G \cdot M}{r} \right)$

c)  $v^2 = 2 \left( \frac{E}{m} + \frac{G \cdot M}{r^2} \right)$

d)  $v^2 = 2 \left( \frac{E}{m} - \frac{G \cdot M}{r^2} \right)$

e)  $v = \left( \frac{E}{m} + \frac{G \cdot M}{r} \right)$

**Comentários:**

Para um corpo em órbita, sabe-se que sua energia mecânica total ( $E$ ) é a soma da energia potencial com a cinética. Assim, para nosso problema:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

$$\frac{E}{m} + \frac{G \cdot M}{r} = \frac{v^2}{2}$$

$$v^2 = 2 \cdot \left( \frac{E}{m} + \frac{G \cdot M}{r} \right)$$

**Gabarito: A**

---

### 20. (ITA)

Se colocarmos um satélite artificial de massa “ $m$ ” girando ao redor de Marte ( $6,37 \cdot 10^{23} \text{ kg}$ ) numa órbita circular, a relação entre a sua energia cinética ( $T$ ) e a potencial gravitacional ( $U$ ) será:

a)  $T = -U/2$

b)  $T = -1/2U$

c)  $T = U/2m$

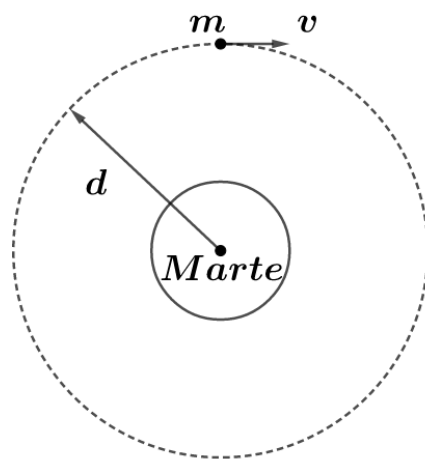


d)  $T = m \cdot U$

e)  $T = U$

**Comentários:**

A representação do problema está abaixo:



Como trata-se de um movimento circular uniforme, podemos escrever a resultante centrípeta como:

$$R_{cp} = \frac{G \cdot M \cdot m}{d^2} = \frac{mv^2}{d}$$

Então, podemos reorganizar de forma que:

$$\frac{G \cdot M \cdot m}{2 \cdot d} = \frac{mv^2}{2}$$

Ou seja:

$$-\frac{U}{2} = T$$

**Gabarito: A**

**21. (ITA)**

A respeito da lei da gravitação universal podemos afirmar que:

- a) Exprime-se pela fórmula  $P = mg$ .
- b) Pode ser deduzida das leis de Kepler do movimento planetário.
- c) Evidencia a esfericidade da Terra.
- d) Implica em que todos os movimentos planetários sejam circulares.
- e) É compatível com as leis de Kepler do movimento planetário.

**Comentários:**



A letra a está errada, pois essa é apenas uma adaptação da lei da gravitação universal para uma região.

A letra b está errada, pois as leis de Kepler foram confirmadas pela lei da gravitação universal, mas não derivadas dela, assim como a lei da gravitação também não foi derivada das leis de Kepler.

A letra c está errada, pois além da Terra não ser uma esfera, a lei da gravitação universal independe do corpo ser esférico ou não.

A letra d está errada, a lei de gravitação universal foi utilizada para confirmar as leis de Kepler que inclusive afirmam que as órbitas são elípticas.

A letra e está correta.

**Gabarito: E**

## 22. (ITA)

Considere a Terra como um corpo homogêneo, isotrópico e esférico de raio  $R$ , girando em torno do seu eixo com frequência  $\nu$  (número de voltas por unidade de tempo), sendo  $g$  a aceleração da gravidade medida no equador. Seja  $\nu'$  a frequência com que a Terra deveria girar para que o peso dos corpos no equador fosse nulo. Podemos afirmar que:

a)  $\nu' = 4\nu$

b)  $\nu' = 2\nu$

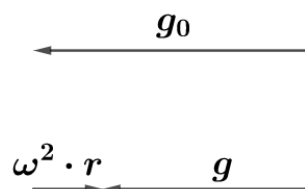
c) não existe  $\nu'$  que satisfaça às condições do problema.

d)  $\nu' = \sqrt{\left(\nu^2 + \frac{g}{4\pi^2 R}\right)}$

e)  $\nu' = \sqrt{\left(\nu^2 - \frac{g}{4\pi^2 R}\right)}$

### Comentários:

Adotando um referencial não inercial, tem-se:



Onde:

-  $g_0$  é a gravidade real;

-  $g$  é a gravidade medida;

-  $\omega^2 \cdot r$  é a aceleração centrífuga.

$$g = g_0 - \omega^2 \cdot r$$

Neste problema existem duas situações. A primeira é a usual, com frequência de rotação  $\nu$ .





Como:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot v$$

Então:

$$g = g_0 - 4 \cdot \pi^2 \cdot v^2 \cdot r$$

Temos também a situação em que a gravidade medida seria 0. Isto é:

$$g' = g_0 - 4 \cdot \pi^2 \cdot v'^2 \cdot r = 0$$

$$g_0 = 4 \cdot \pi^2 \cdot v'^2 \cdot r$$

Substituindo  $g_0$  na primeira equação, temos:

$$g = 4 \cdot \pi^2 \cdot v'^2 \cdot r - 4 \cdot \pi^2 \cdot v^2 \cdot r$$

$$\frac{g}{4 \cdot \pi^2 \cdot r} = v'^2 - v^2$$

$$v' = \sqrt{\frac{g}{4 \cdot \pi^2 \cdot r} + v^2}$$

**Gabarito: D**

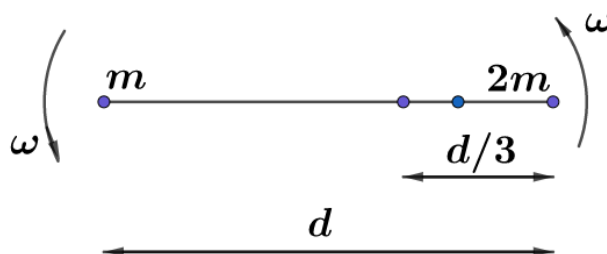
### 23. (ITA)

Duas estrelas de massa  $m$  e  $2m$  respectivamente, separadas por uma distância  $d$  e bastante afastadas de qualquer outra massa considerável, executam movimentos circulares em torno do centro de massa comum. Nestas condições, determine o tempo  $T$  para uma revolução completa, a velocidade  $v(2m)$  da estrela maior, bem como a energia mínima  $W$  para separar completamente as duas estrelas são:

#### Comentários:

As estrelas orbitam em torno de seu centro de massa. Para calcular o  $x_{cm}$ :

$$X_{CM} = \frac{X_m \cdot m + X_{2m} \cdot 2m}{3m} = \frac{0 \cdot m + d \cdot 2m}{3m} = \frac{2d}{3}$$



Cada corpo está sujeito a uma resultante centrípeta, neste caso, a atração gravitacional entre eles. Formulando a dinâmica para o corpo  $m$ :



$$R_{cp,m} = \frac{G \cdot m \cdot 2m}{d^2}$$

$$\frac{m \cdot v_m^2}{\frac{2d}{3}} = \frac{G \cdot m \cdot 2m}{d^2}$$

$$\frac{v_m^2}{2} = \frac{G \cdot 2m}{3 \cdot d}$$

Como ambas as estrelas têm mesma velocidade angular (pois giram em torno do centro de massa com mesmo período), então:

$$\omega_m = \omega_{2m}$$

$$\frac{v_m}{r_m} = \frac{v_{2m}}{r_{2m}}$$

$$v_{2m} = v_m \cdot \frac{r_{2m}}{r_m} = v_m \cdot \frac{\frac{d}{3}}{\frac{2d}{3}} = \frac{v_m}{2}$$

$$\frac{v_{2m}^2}{2} = \frac{G \cdot m}{6 \cdot d}$$

Portanto, a velocidade da estrela 2m é:

$$v_{2m} = \sqrt{\frac{G \cdot m}{3 \cdot d}}$$

E, o período é dado por:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{2m}}{v_{2m}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{d}{3}}{\sqrt{\frac{G \cdot m}{3 \cdot d}}} = 2 \cdot \pi \cdot d \cdot \sqrt{\frac{d}{3 \cdot G \cdot m}}$$

Com isto, agora calcula-se a energia mecânica inicial ( $E_{m,i}$ ):

$$E_{m,i} = \frac{m \cdot v_m^2}{2} + \frac{2m \cdot v_{2m}^2}{2} - \frac{G \cdot m \cdot 2m}{d} = \frac{2 \cdot G \cdot m^2}{3 \cdot d} + \frac{2m \cdot G \cdot m}{6 \cdot d} - \frac{2 \cdot G \cdot m^2}{d} = \frac{-G \cdot m^2}{d}$$

Sabendo a energia mecânica inicial e final, pode-se calcular a energia necessária a ser fornecida.

$$E_{m,f} - E_{m,i} = \Delta E$$

$$\Delta E = W = 0 - \left( \frac{-G \cdot m^2}{d} \right) = + \frac{G \cdot m^2}{d}$$

**Gabarito:**  $2\pi d \sqrt{\frac{d}{3GM}} \sqrt{\frac{Gm}{3d}} \mathbf{e} + \frac{G \cdot m^2}{d}$

## 24. (ITA)

Comentando as leis de Kepler para o movimento planetário, um estudante escreveu:



I- Os planetas do sistema solar descrevem elipses em torno do Sol que ocupa o centro dessas elipses.

II- Como o dia (do nascer ao pôr-do-Sol) é mais curto no inverno e mais longo no verão, conclui-se que o vetor posição da Terra (linha que une esta ao Sol) varre uma área do espaço menor no inverno do que no verão para o mesmo período de 24 horas.

III- Como a distância média da Terra ao Sol é de  $1,50 \cdot 10^8$  km e a de Urano ao Sol é de  $3,00 \cdot 10^9$  km, pela 3ª lei de Kepler conclui-se que o “ano” de Urano é igual a 20 vezes o ano da Terra.

IV- As leis de Kepler não fazem referência à força de interação entre o Sol e os planetas.

Verifique quais as afirmações que estão corretas e assinale a opção correspondente.

- a) I e IV estão corretas.
- b) Só a I está correta.
- c) II e IV estão corretas.
- d) Só a IV está correta.
- e) II e III estão corretas.

### Comentários:

A I está incorreta, as Leis de Kepler afirmam que o Sol ocupa um dos focos da elipse, não seu centro.

A II está incorreta, pois contraria a Segunda Lei de Kepler.

Aqui já se conclui que a única alternativa possível é a letra D. No entanto, prova-se que a III está incorreta através da Terceira Lei de Kepler como mostra-se abaixo:

$$T_T^2 = \frac{r_T^3 \cdot 4 \cdot \pi^2}{G \cdot M} \text{ e } T_U^2 = \frac{r_U^3 \cdot 4 \cdot \pi^2}{G \cdot M}$$
$$\frac{T_T}{T_U} = \frac{r_T^3}{r_U^3} = \frac{1,5 \cdot 10^8}{30 \cdot 10^8} = 20$$

Portanto, o período da Terra dura 20 vezes o período de Urano, ou seja, o ano de Urano dura 20 vezes menos que o ano na Terra.

A IV está correta, as Leis de Kepler foram deduzidas empiricamente, somente depois foi-se formulada a Lei da Gravitação Universal que tratou das forças entre o Sol e os planetas.

### Gabarito: D

### 25. (ITA)

Um astronauta faz experiências dentro do seu satélite esférico, que está em órbita circular ao redor da Terra. Colocando com cuidado um objeto de massa  $m$  bem no centro do satélite o astronauta observa que objeto mantém sua posição ao longo tempo. Baseado na 2ª lei de

Newton, um observador no Sol tenta explicar esse fato com as hipóteses abaixo. Qual delas é correta?

- a) Não existem forças atuando sobre o objeto (o próprio astronauta sente-se imponderável).
- b) Se a força de gravidade da Terra  $F_G = G \frac{M_T m_o}{r^2}$  está atuando sobre o objeto e este fica imóvel é porque existe uma força centrífuga oposta que a equilibra.
- c) A carcaça do satélite serve de blindagem contra qualquer força externa.
- d) As forças aplicadas pelo Sol e pela Lua equilibram a atração da Terra.
- e) A força que age sobre o satélite é de gravitação, mas a velocidade tangencial  $v$  do satélite deve ser tal que  $\frac{mv^2}{r} = G \frac{M_T m_o}{r^2}$ .

### Comentários:

A letra A está incorreta, pois sentir-se imponderável está relacionada à ausência de normal, não à ausência de peso.

A letra B está incorreta, pois a força centrífuga é uma força “imaginária” adotada ao mudar-se para um sistema não inercial, ela é incapaz de equilibrar outra força.

A letra C está incorreta, a gravidade não é barrada pela carcaça do satélite.

A letra D é falsa, pois o corpo em órbita apresenta aceleração (centrípeta), portanto, sua resultante não pode ser nula, ou seja, o corpo não está em equilíbrio.

A letra E está correta, pois iguala a resultante centrípeta à força gravitacional. Se não o for assim, o corpo irá aproximar-se gradualmente do planeta que o atrai.

### Gabarito: E

#### 26. (ITA)

Considere um planeta cuja massa é o triplo da massa da Terra e seu raio, o dobro do raio da Terra. Determine a relação entre a velocidade de escape deste planeta e a da Terra ( $v_P/v_T$ ) e a relação entre a aceleração gravitacional na superfície do planeta e da Terra ( $g_P/g_T$ ).

a)  $\frac{v_P}{v_T} = \sqrt{\frac{3}{4}}, \frac{g_P}{g_T} = \frac{3}{4}$

b)  $\frac{v_P}{v_T} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{g_P}{g_T} = \frac{3}{4}$

c)  $\frac{v_P}{v_T} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{g_P}{g_T} = \frac{3}{2}$

d)  $\frac{v_P}{v_T} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{g_P}{g_T} = \frac{3}{4}$

e) Nenhuma das anteriores



### Comentários:

A velocidade de escape ( $v$ ) de um objeto de massa  $m$ , para um planeta de raio  $r$  e massa  $M$  pode ser calculado como:

$$-\frac{GMm}{r} + \frac{mv^2}{2} = 0$$

Isto é, fornece-se energia cinética suficiente para que o corpo chegue ao infinito (energia potencial nula) e sem velocidade (energia cinética nula).

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Portanto, comparando as velocidades de escape, tem-se:

$$\frac{v_P}{v_T} = \sqrt{\frac{\frac{2GM_P}{r_P}}{\frac{2GM_T}{r_T}}} = \sqrt{\frac{M_P}{M_T} \cdot \frac{r_T}{r_P}} = \sqrt{\frac{3}{1} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

A gravidade na superfície é calculada por:

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

Portanto, a relação entre as gravidades na superfície é dada por:

$$\frac{g_P}{g_T} = \frac{\frac{GM_P}{r_P^2}}{\frac{GM_T}{r_T^2}} = \frac{M_P r_T^2}{M_T r_P^2} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

### Gabarito: B

---

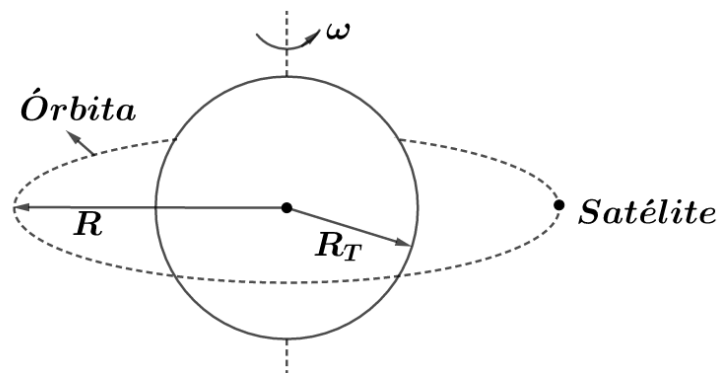
#### 27. (ITA)

Um satélite artificial geoestacionário permanece acima de um mesmo ponto da superfície da Terra em uma órbita de raio  $R$ . Usando um valor de  $R_T = 6400 \text{ Km}$  para o raio da Terra. A razão  $R/R_T$  é aproximadamente igual a:

- a) 290
- b) 66
- c) 6,6
- d) 11,2
- e) Indeterminada pois a massa do satélite não é conhecida.



## Comentários:



Para o satélite ser geostacionário, sua velocidade angular deve ser igual à da Terra. Portanto, sua velocidade pode ser relacionada com seu raio:

$$v = \omega R$$

Sua resultante centrípeta:

$$m\omega^2 R = \frac{GMm}{R^2} = \frac{GMm}{R_T^2} \cdot \frac{R_T^2}{R^2} = gm \cdot \frac{R_T^2}{R^2}$$

$$\omega^2 R = g \frac{R_T^2}{R^2} \Rightarrow R = \sqrt[3]{g \cdot \frac{R_T^2}{\omega^2}}$$

Onde:

$$- g = 9,8 \frac{m}{s^2}$$

$$- R = 6,4 \cdot 10^6 m$$

$$- \omega = \frac{2\pi}{T}, \text{ com } T \text{ sendo o período da Terra, isto é, } 86400 \text{ s. } \omega = \frac{2\pi}{86400}$$

Substituindo os valores:

$$R = \sqrt[3]{9,8 \cdot \frac{(6,4 \cdot 10^6)^2}{\left(\frac{2\pi}{86400}\right)^2}} = 42,34 \cdot 10^6 \approx 6,6 \cdot R_T$$

**Gabarito: C**

### 28. (ITA)

Na 3ª lei de Kepler, a constante de proporcionalidade entre cubo do semi-eixo maior da elipse (a) descrita por um planeta e o quadrado do período (P) de translação do planeta, pode ser deduzida do caso particular do movimento circular. Sendo G a constante da gravitação universal, M a massa do Sol, R o raio do Sol temos:

$$a) \frac{a^2}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

$$b) \frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$



$$c) \frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{2\pi^2}$$

$$d) \frac{a^3}{P^2} = \frac{GR}{2\pi^2}$$

$$e) \frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

### Comentários:

Para deduzir a Terceira Lei de Kepler para um movimento circular, iguala-se a resultante centrípeta à força gravitacional, assim:

$$\omega^2 r = \frac{GM}{r^2}$$

Mas, sabe-se que:

$$\omega = \frac{2\pi}{P}$$

Assim:

$$\frac{4\pi^2}{P^2} \cdot r^3 = GM$$

Reescrevendo:

$$\frac{r^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

No caso da elipse, basta substituir  $r$  por  $a$ , obtendo-se então:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

### Gabarito: E

---

#### 29. (ITA)

Qual seria o período ( $T$ ) de rotação da Terra em torno do seu eixo, para que um objeto apoiado sobre a superfície da Terra no equador ficasse desprovido de peso?

Dados: raio da Terra:  $6,4 \cdot 10^3 \text{ Km}$ ; massa da terra:  $6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$ .

a)  $T = 48 \text{ h}$

b)  $T = 12 \text{ h}$

c)  $T = 1,4 \text{ h}$

d)  $T = 2,8 \text{ h}$

e)  $T = 0$

### Comentários:



A gravidade medida no Equador pode ser calculada com auxílio de um referencial não inercial. Assim:

$$g = g_0 - \omega^2 \cdot r$$

Onde:

- $g$  é a gravidade medida;
- $g_0$  é a gravidade real;
- $\omega^2 r$  é a aceleração centrífuga do referencial não inercial.

Para que a gravidade seja nula:

$$g = 0 = 9,8 - \omega^2 \cdot 6,4 \cdot 10^6$$
$$\omega = \sqrt{\frac{9,8}{6,4}} \cdot 10^{-3} = 1,237 \cdot 10^{-3}$$

E sabe-se que o período está relacionado à frequência angular por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1,237} \cdot 10^3 = 5080 \text{ s}$$
$$T = \frac{5080}{3600} \text{ h} = 1,41 \text{ h}$$

**Gabarito: C**

---

### 30. (ITA)

Considere que  $MT$  é a massa da Terra,  $RT$  o seu raio,  $g$  a aceleração da gravidade e  $G$  a constante de gravitação universal. Da superfície terrestre e verticalmente para cima, desejamos lançar um corpo de massa  $m$  para que, desprezando a resistência do ar ele se eleve a uma altura acima da superfície igual ao raio da Terra. A velocidade inicial  $V$  do corpo neste caso deverá ser de:

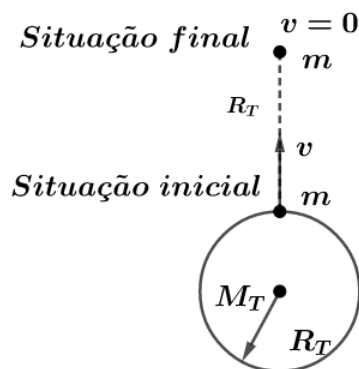
- a)  $v = \sqrt{\frac{2G \cdot MT}{RT}}$
- b)  $v = \sqrt{\frac{G \cdot MT}{3RT}}$
- c)  $v = \sqrt{\frac{G \cdot MT}{RT}}$
- d)  $v = \sqrt{\frac{3G \cdot MT}{RT}}$
- e)  $v = \sqrt{\frac{g \cdot G \cdot MT}{m \cdot RT}}$

**Comentários:**





Existem duas situações bem definidas representadas na figura a seguir.



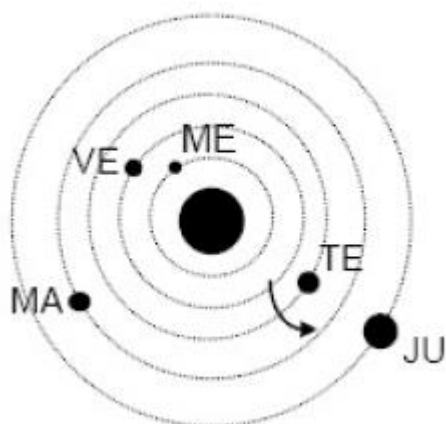
Portanto, na situação inicial existe energia potencial e cinética, enquanto na situação final, somente energia potencial. Como as perdas de energia são desprezadas, podemos fazer a conservação da energia mecânica.

$$\begin{aligned} \Delta E_m &= 0 \\ E_{m,i} &= E_{m,f} \\ -\frac{GM_T m}{R_T} + \frac{mv^2}{2} &= -\frac{GM_T m}{2R_T} \\ \frac{v^2}{2} &= \frac{GM_T}{2R_T} \\ v &= \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} \end{aligned}$$

**Gabarito: C**

### 31. (ITA)

Numa certa data, a posição relativa dos corpos celestes do Sistema Solar era, para um observador fora do Sistema, a seguinte: ME = Mercúrio; VE = Vênus; TE = Terra; MA = Marte; JU = Júpiter



O sentido de rotação da Terra está indicado na figura. A figura não está em escala. Do diagrama apresentado, para um observador terrestre não muito distante do equador, pode-se afirmar que:

- I - Marte e Júpiter eram visíveis à meia-noite.
- II - Mercúrio e Vênus eram visíveis à meia-noite.
- III - Marte era visível a oeste ao entardecer.
- IV - Júpiter era visível à meia-noite.

Das afirmativas feitas pode-se dizer que:

- a) Somente a IV é verdadeira.
- b) III e IV são verdadeiras.
- c) Todas são verdadeiras.
- d) I e IV são verdadeiras.
- e) Nada se pode afirmar com os dados fornecidos.

#### Comentários:

A I é falsa, pois embora Júpiter seja visível à meia noite, Marte seria visível ao entardecer.

A II é falsa, Mercúrio e Vênus sequer seriam visíveis devido ao brilho do sol que ofuscaria o brilho de ambas.

A III é verdadeira. O vetor que indica o sentido de rotação da Terra está indo de Oeste a Leste (basta conferir que de meio dia para meia noite o deslocamento relativo do sol para o espectador foi em direção à origem do vetor). Portanto, no entardecer, Marte estaria a oeste na visão do espectador.

A IV é verdadeira, o espectador só estaria virado para Júpiter próximo da meia noite.

#### Gabarito: B

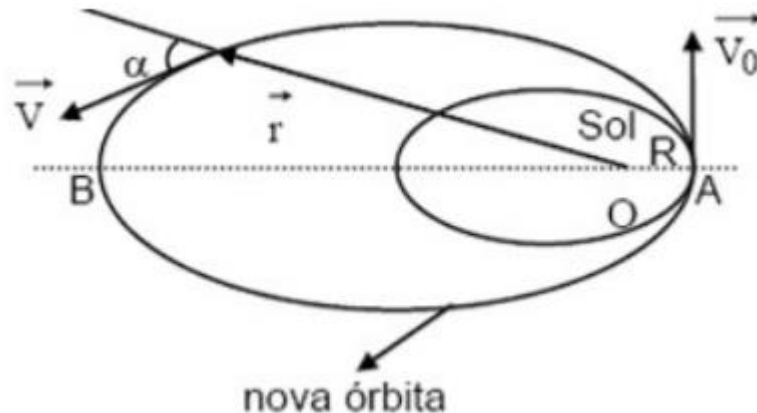
---

### 32. (ITA)

Suponha um cenário de ficção científica em que a Terra é atingida por um imenso meteoro. Em consequência do impacto, somente o módulo da velocidade da Terra é alterado, sendo  $V_0$  seu valor imediatamente após o impacto, como mostra a figura abaixo. O meteoro colide com a Terra exatamente na posição onde a distância entre a Terra e o Sol é mínima (distância  $AO = R$  na figura). Considere a atração gravitacional exercida pelo Sol, tido como referencial inercial, como a única força de interação que atua sobre a Terra após a colisão, e designe por  $M$  a massa do Sol e por  $G$  a constante de gravitação universal. Considere ainda que o momento angular da Terra seja conservado, isto é, a quantidade de módulo  $m \cdot v \cdot r \cdot \sin\alpha$  permanece constante ao longo da nova trajetória elíptica da Terra em torno do sol (nessa expressão,  $m$  é a massa da Terra,  $r$  é o módulo do vetor posição da Terra em relação ao Sol, o módulo da



velocidade da Terra e o ângulo  $\alpha$  entre  $r$  e  $v$ ). Determine a distância (OB), do apogeu ao centro do Sol, da trajetória que a Terra passa a percorrer após o choque com o meteoro.



### Comentários:

Primeiro, façamos a conservação do momento angular entre o afélio (posição B) e o periélio (ponto A). Temos:

$$\begin{aligned} mV_0R &= mV_b r_b \\ V_b &= \frac{V_0R}{r_b} \end{aligned}$$

No entanto, não se sabe  $r_b$ . Entretanto, ainda com os dados da questão pode se fazer a conservação da energia mecânica entre os pontos A e B, visto que a energia se conserva ao longo de toda a órbita.

$$\begin{aligned} \Delta E_m &= 0 \\ E_{m,i} &= E_{m,f} \\ \frac{mV_0^2}{2} - \frac{GMm}{R} &= \frac{mV_b^2}{2} - \frac{GMm}{r_b} \end{aligned}$$

Tem-se duas incógnitas ( $V_b$  e  $r_b$ ) e duas equações. Substituindo o  $V_b$  obtido na primeira equação na segunda, tem-se:

$$\frac{V_0^2}{2} - \frac{GM}{R} = \frac{V_0^2 R^2}{2r_b^2} - \frac{GM}{r_b}$$

Visto que  $r_b = 0$  não é solução, multiplicando toda a expressão por  $2r_b^2$  tem-se:

$$\left(V_0^2 - \frac{2GM}{R}\right)r_b^2 + 2GMr_b - V_0^2 R^2 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau em  $r_b$ :

$$r_b = \frac{-2GM \pm \sqrt{4G^2M^2 - 4 \cdot \left(V_0^2 - \frac{2GM}{R}\right) \cdot (-V_0^2 R^2)}}{2 \left(V_0^2 - \frac{2GM}{R}\right)}$$

Trabalhando a raiz do numerador:

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \sqrt{4G^2M^2 - 4 \cdot \left(V_0^2 - \frac{2GM}{R}\right) \cdot (-V_0^2R^2)} \\ \Rightarrow & \sqrt{(2GM)^2 + 4V_0^4R^2 - 8GMV_0^2R} \\ \Rightarrow & \sqrt{(2GM)^2 - 2(2GM)(2V_0^2R) + (2V_0^2R)^2} \\ & \Rightarrow 2(GM - V_0^2R) \end{aligned}$$

Substituindo de volta:

$$r_b = \frac{-2GM \pm 2(GM - V_0^2R)}{2 \left(V_0^2 - \frac{2GM}{R}\right)}$$

As duas soluções são:

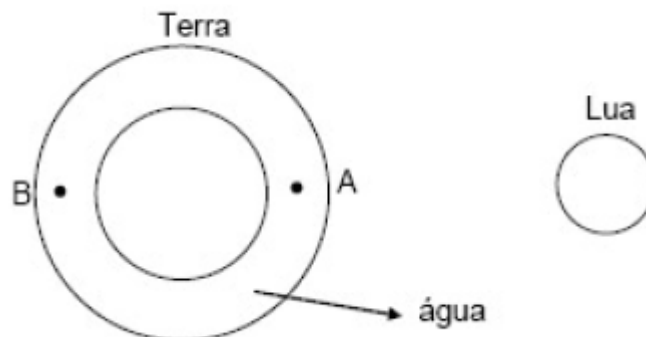
$$\begin{aligned} r_{b,1} &= \frac{-V_0^2R}{\left(V_0^2 - \frac{2GM}{R}\right)} = \frac{V_0^2R^2}{2GM - RV_0^2} \\ r_{b,2} &= \frac{-2GM + V_0^2R}{\left(V_0^2 - \frac{2GM}{R}\right)} = R \end{aligned}$$

Note que  $r_{b,2}$  é o próprio afélio. Portanto a resposta é somente a primeira raiz obtida.

**Gabarito:**  $\frac{R^2 \cdot V_0^2}{2GM - R \cdot V_0^2}$

### 33. (ITA)

Sabe-se que a atração gravitacional da lua sobre a camada de água é a principal responsável pelo aparecimento de marés oceânicas na Terra, supostamente esférica, homogeneamente recoberta por uma camada de água.



Nessas condições, considere as seguintes afirmativas:

- I. As massas de água próximas das regiões A e B experimentam marés altas simultaneamente.

II. As massas de água próximas das regiões A e B experimentam marés opostas, isto é, quando A tem maré alta, B tem maré baixa e vice-versa.

III. Durante o intervalo de tempo de um dia ocorrem duas marés altas e duas marés baixas.

Então está(ão) correta(s), apenas:

- a) a afirmativa I
- b) a afirmativa II
- c) a afirmativa III
- d) as afirmativas I e II
- e) as afirmativas I e III

### Comentários:

Analisemos a influência da lua sobre a água nas regiões A e B, e sobre a Terra nas regiões A e B.

Em A, a água está mais próxima da Lua, portanto a atração da Lua sobre a água é maior do que sobre a Terra. Portanto, a água é mais atraída do que a Terra, criando uma maré alta.

Em B ocorre o oposto. A água sentirá menor atração, por conta da atração gravitacional da Lua, em relação à Terra. Assim, a Terra, sendo mais atraída que a água, sofre um deslocamento maior, causando também um fenômeno de maré alta.

Entre as regiões A e B a interferência da Lua não afeta muito, portanto a maré fica mais baixa, relativamente a A e B, caracterizando o fenômeno conhecido como maré baixa.

Portanto, ocorrem marés altas em A e B e marés baixas nos pontos intermediários. Agora, analisando as afirmações.

A I está correta.

A II é falsa.

A III está correta.

### Gabarito: E

---

#### 34. (ITA)

Numa dada balança, a leitura é baseada na deformação de uma mola quando um objeto é colocado sobre sua plataforma. Considerando a Terra como uma esfera homogênea, assinale a opção que indica uma posição da balança sobre a superfície terrestre onde o objeto terá a maior leitura.

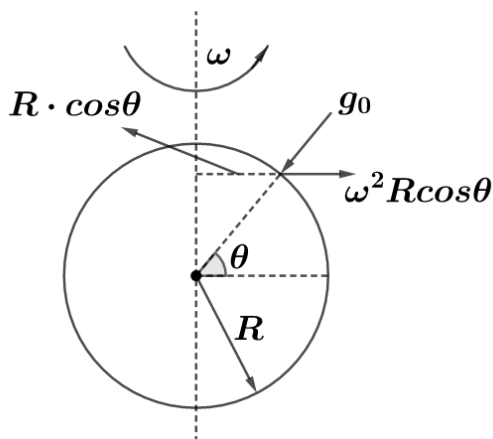
- a) Latitude de  $45^\circ$ .
- b) Latitude de  $60^\circ$ .
- c) Latitude de  $90^\circ$ .



- d) Em qualquer ponto do Equador.
- e) A leitura independe da localização da balança já que a massa do objeto é invariável.

**Comentários:**

A maior leitura será feita onde a gravidade medida for maior. A gravidade medida pode ser calculada em função da latitude como mostrado abaixo:



A gravidade medida será a soma da gravidade real  $g_0$  com a aceleração centrífuga  $\omega^2 R \cos \theta$ , visto que a medição é feita em um referencial não inercial. A contribuição da aceleração centrífuga depende de  $\cos \theta$ , sendo  $\theta$  a latitude. Portanto, quando  $\cos \theta$  for 0, a gravidade medida será máxima, ou seja, isso ocorre para a latitude  $90^\circ$ .

**Gabarito: C**

**35. (ITA)**

Derive a 3ª Lei de Kepler do movimento planetário a partir da Lei da Gravitação Universal de Newton considerando órbitas circulares.

**Comentários:**

Para deduzir a Terceira Lei de Kepler para um movimento circular, iguale-se a resultante centrípeta à força gravitacional, assim:

$$\omega^2 r = \frac{GM}{r^2}$$

Mas, sabe-se que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Assim:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r^3 = GM$$



Reescrevendo:

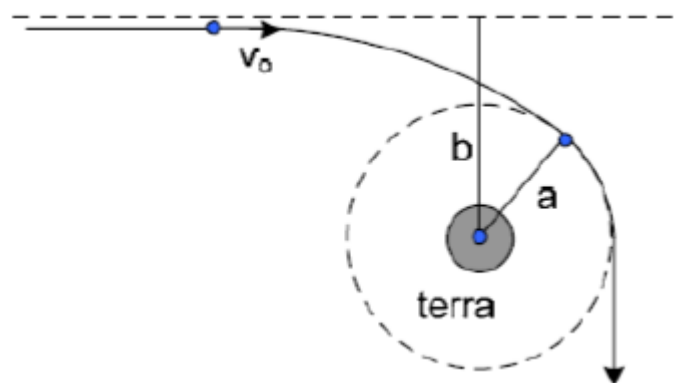
$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

**Gabarito:**  $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$

---

### 36. (Lucie)

Uma nave espacial tripulada por marcianos chega à vizinhança da Terra (de massa  $M$ ) seguindo uma órbita hiperbólica cuja assíntota dista  $b$  do centro da Terra. Quando a nave se encontrava a uma distância muito grande da Terra, sua velocidade era  $V_0$ . Qual a relação entre  $V_0$ ,  $b$  e a distância de perigeu  $a$ ?



#### Comentários:

Há duas coisas importantes a notar neste problema. A conservação da energia mecânica e a conservação de momento angular. Pela conservação da energia mecânica:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_a^2}{2} - \frac{GMm}{a}$$
$$v_0^2 = v_a^2 - \frac{2GM}{a}$$

Pela conservação do momento angular, tem-se:

$$mv_0 b \sin 90^\circ = mv_a a \sin 90^\circ$$
$$v_a = v_0 \cdot \frac{b}{a}$$

Substituindo  $v_a$  na equação da energia, tem-se:

$$v_0^2 = v_0^2 \cdot \frac{b^2}{a^2} - \frac{2GM}{a} \Rightarrow v_0^2 \left( \frac{b^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{2GM}{a}$$

**Gabarito:**  $V_0^2 \left( \frac{b^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{2GM}{a}$

---

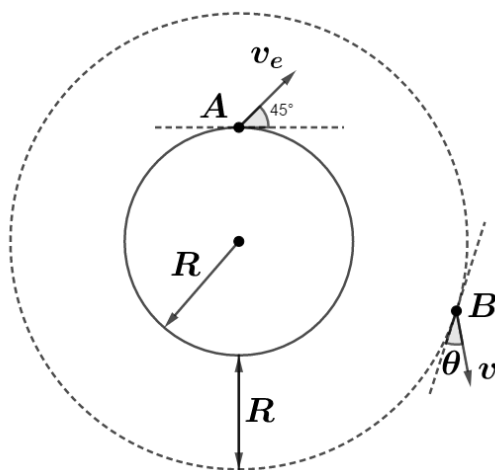


### 37. (Pandey)

Uma partícula é projetada da superfície da Terra com uma velocidade igual à velocidade de escape do planeta formado um ângulo de  $45^\circ$  com horizontal. Determine o ângulo formado entre a velocidade com a horizontal quando o objeto atinge uma altura em relação à superfície da Terra igual a  $R$ . (Interprete a reta horizontal como a reta tangente a superfície de raio  $2R$  no ponto pedido).

#### Comentários:

A situação descrita está representada na figura abaixo, sendo A a situação inicial de lançamento e B a situação final pedida.



O problema apresenta conservação de energia mecânica e de momento angular. Pela conservação da energia mecânica:

$$\frac{mv_e^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{mv_b^2}{2} - \frac{GMm}{2R}$$

Onde:

- $m$  é a massa da partícula;
- $M$  é a massa da Terra;
- $G$  é a constante gravitacional;
- $v_e$  é a velocidade de escape;
- $v_b$  é a velocidade em b;
- $R$  é o raio da Terra.

É importante lembrar que a velocidade de escape é conhecida:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Substituindo na equação da energia:





$$\frac{m}{2} \cdot \frac{2GM}{R} - \frac{GMm}{R} = \frac{mv_b^2}{2} - \frac{GMm}{2R}$$

$$\frac{GM}{2R} = \frac{v_b^2}{2} \Rightarrow v_b = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Pela conservação de momento angular:

$$v_e \cdot R \cdot \sin 45^\circ = v_b \cdot 2R \cdot \sin(90^\circ + \theta)$$

$$\sqrt{\frac{2GM}{R}} \cdot R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{GM}{R}} \cdot 2R \cdot \sin(90^\circ + \theta)$$

$$\sin(90^\circ + \theta) = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

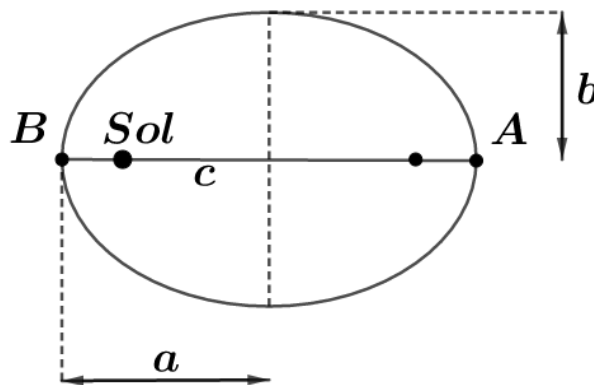
**Gabarito: 60°**

### 38. (Halliday)

Um cometa move-se em uma órbita de excentricidade igual a 0,880 e tem velocidade de 3,72 km/s quando está o mais distante possível do Sol. Determine a sua velocidade quando estiver no ponto mais próximo do Sol.

#### Comentários:

A órbita descrita está representada abaixo:



Pela definição de excentricidade, tem-se:

$$e = \frac{c}{a} = 0,88 \Rightarrow c = 0,88a$$

Portanto, a distância ao Sol no afélio (A) é:

$$d_A = c + a = 1,88a$$

E, a distância ao Sol no periélio (B) é:

$$d_B = a - c = 0,12a$$

Pela conservação do momento angular, tem-se:



$$1,88\alpha \cdot 3,72 = 0,12\alpha \cdot v_B \Rightarrow v_B = 58,28 \text{ km/s}$$

**Gabarito: 58,3 Km/s**

### 39. (ITA)

Suponha que na Lua, cujo raio é  $R$ , exista uma cratera de profundidade  $R/100$ , do fundo da qual um projétil é lançado verticalmente para cima com velocidade inicial  $v$  igual à velocidade de escape da superfície da Lua. Determine literalmente a altura máxima alcançada pelo projétil.

**Comentários: A questão apresenta uma incoerência. A velocidade de escape no interior da Lua é maior que em sua superfície, portanto, se lançado da superfície com a velocidade de escape de um local no interior da Lua, a partícula irá sair da órbita e ir para o infinito. Supõe-se que o que a questão pretendia pedir era a altura máxima alcançada se lançada do ponto interior da Lua com a velocidade de escape da superfície.**

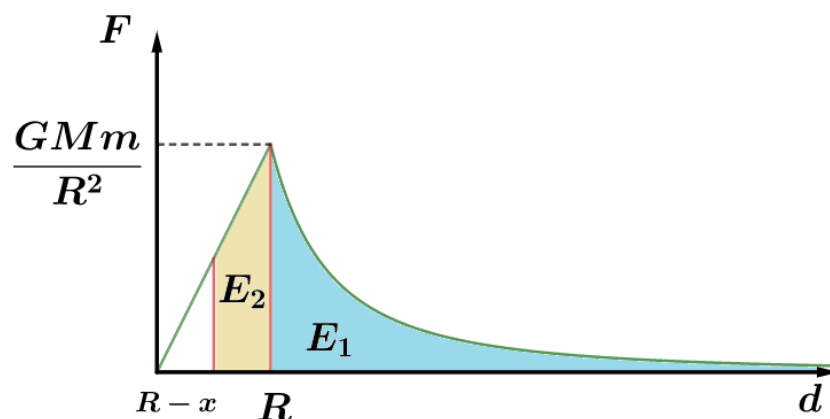
A energia potencial gravitacional de um corpo no interior de outro é:

$$E_p = -\frac{GMm}{R} - \frac{GMmx}{2R^2} \left(2 - \frac{x}{R}\right)$$

Onde:

- $G$  é a constante gravitacional;
- $M$  é a massa do corpo maior;
- $m$  é a massa do corpo menor;
- $R$  é o raio do corpo maior;
- $x$  é a profundidade na qual o corpo menor está inserido no maior.

Para chegar a essa fórmula utiliza-se a definição de energia potencial, a partir do gráfico da força gravitacional, como mostrado na figura abaixo:



A energia potencial é igual, em módulo, à área sob o gráfico da distância inicial até o infinito. No caso,  $E_1$  é a energia potencial na superfície e já conhecida. Resta calcular a área  $E_2$ .

$$|E_2| = \frac{\left(\frac{GMm}{R^2} + \frac{GMm(R-x)}{R^3}\right) \cdot x}{2} = \frac{GMmx}{2R^2} \left(1 + \frac{(R-x)}{R}\right)$$



$$E_p = E_1 - |E_2| = -\frac{GMm}{R} - \frac{GMmx}{2R^2} \left(1 + \frac{(R-x)}{R}\right)$$

$$E_p = -\frac{GMm}{R} - \frac{GMmx}{2R^2} \left(2 - \frac{x}{R}\right)$$

Agora, resta fazer a conservação da energia mecânica. Inicialmente o corpo está à uma profundidade  $\frac{R}{100}$ , com velocidade igual à velocidade de escape (isto é,  $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ ). Na altura máxima, a velocidade é nula, existe somente energia potencial. Equacionando a conservação de energia, temos:

$$-\frac{GMm}{R} - \frac{GMm \cdot \frac{R}{100}}{2R^2} \left(2 - \frac{1}{100}\right) + m \cdot \frac{\sqrt{\frac{2GM}{R}}^2}{2} = -\frac{GMm}{d}$$

Do lado esquerdo temos a energia mecânica no início, e à direita temos a energia mecânica no ponto mais alto (de distância  $d$  em relação ao centro da Lua).

$$-\frac{1}{R} - \frac{1}{200R} \left(\frac{199}{100}\right) + \frac{1}{R} = -\frac{1}{d}$$

$$\frac{199}{20000R} = \frac{1}{d} \Rightarrow d = \frac{20000}{199}R = 100,5R$$

Assim, a distância máxima alcançada foi de  $99,5 R$  acima da superfície da Lua.

**Gabarito: 99,5 R**

#### 40. (Solved Problems in Physics)

Qual a profundidade da cratera que devemos fazer num planeta de raio  $R$  para que, lançando um projétil do fundo da mesma com a velocidade de escape do planeta, sua altura máxima alcançada seja igual a  $3R$ ?

#### Comentários:

Utilizando a fórmula já apresentada da energia potencial para um ponto interno a um corpo da questão anterior, novamente exposta abaixo:

$$E_p = -\frac{GMm}{R} - \frac{GMmx}{2R^2} \left(2 - \frac{x}{R}\right)$$

Agora, faz-se a conservação da energia mecânica. O corpo é lançado de uma profundidade  $x$ , com velocidade de escape da superfície e chega à uma altura de  $3R$  em relação à superfície, sem velocidade.

$$-\frac{GMm}{R} - \frac{GMmx}{2R^2} \left(2 - \frac{x}{R}\right) + \frac{m \sqrt{\frac{2GM}{R}}^2}{2} = -\frac{GMm}{4R}$$

$$-\frac{x}{2R} \left(2 - \frac{x}{R}\right) = -\frac{1}{4}$$



Rearranjando:

$$x^2 - 2xR + \frac{R^2}{2} = 0$$
$$x = \frac{2R \pm \sqrt{4R^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{R^2}{2}\right)}}{2}$$
$$x = \frac{2R \pm \sqrt{2R^2}}{2} = R \cdot \left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

As soluções são pontos simétricos em relação ao centro do planeta. Qualquer um serviria para o pedido pelo exercício, mas considerando somente aquele que não atravessa o centro do planeta, seria:

$$R \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

**Gabarito:**  $x = R \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$

---

#### 41. (OBF)

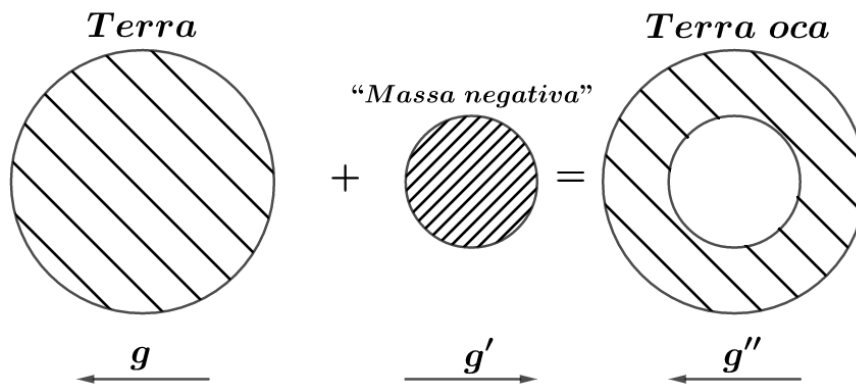
Em seu trabalho sobre gravitação universal, Newton demonstrou que uma distribuição esférica homogênea de massa surte o mesmo efeito que uma massa concentrada no centro de distribuição. Se no centro da Terra fosse recortado um espaço oco esférico com metade do raio da Terra, o módulo da aceleração na superfície terrestre diminuiria para ( $g$  é o módulo da aceleração da gravidade na superfície terrestre sem a cavidade):

- a)  $6g/8$
- b)  $3g/8$
- c)  $5g/8$
- d)  $g/8$
- e)  $7g/8$

#### Comentários:

Uma forma de resolver o problema é considerando a aplicação de um corpo com “massa negativa”, isto é, o seu campo gravitacional tem sentido contrário. Fazemos a superposição da Terra com este corpo de massa negativa, de mesma densidade que a Terra, com metade do raio. O efeito de seu campo irá cancelar o campo da mesma quantidade da Terra, ou seja, será como se houvesse um espaço oco no centro da esfera. Essa solução encontra-se explicada na figura abaixo:





O  $g$  representado na figura é conhecido. Resta calcular  $g'$ . Para tal, utilizemos a lei da gravitação universal (lembrando que  $g'$  está sendo calculado na superfície da Terra, não na superfície da massa negativa):

$$g' = \frac{GM_n}{R_T^2}$$

Onde:

- $G$  é a constante gravitacional;
- $M_n$  é a massa negativa;
- $R_T$  é o raio da Terra.

Mas, como definido anteriormente, a massa negativa possui mesma densidade que a terra, portanto:

$$M_n = \frac{4\pi R_n^3}{3} \cdot \rho_T$$

Onde:

- $\rho_T$  é a densidade da Terra;
- $R_n$  é o raio da massa negativa.

E, também se sabe que:

$$R_n = \frac{R_T}{2}$$

Substituindo tudo na equação de  $g'$  tem-se:

$$g' = \frac{G \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{R_T}{2}\right)^3 \cdot \rho_T}{R_T^2} = \frac{\pi}{6} GR_T \rho_T$$

Reescrevendo  $g$  em função das variáveis de  $g'$ :

$$g = \frac{GM}{R_T^2} = \frac{G \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R_T^3 \cdot \rho_T}{R_T^2} = \frac{4}{3} \pi GR_T \rho_T$$

E:



$$\frac{g''}{g} = \frac{g - g'}{g} = \frac{\frac{4}{3}\pi GR_T \rho_T - \frac{\pi}{6} GR_T \rho_T}{\frac{4}{3}\pi GR_T \rho_T} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{4}{3}} = \frac{7}{8}$$

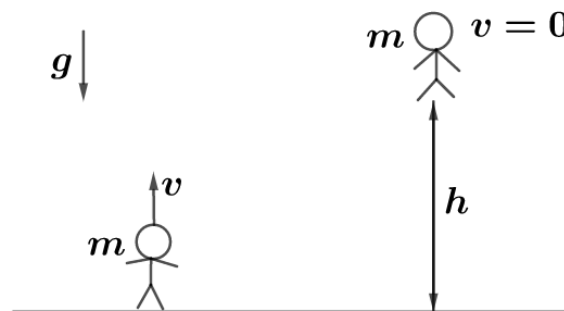
Portanto, o campo resultante  $g''$  é igual a  $\frac{7}{8}g$ .

**Gabarito: E**

#### 42. (IME)

Um astronauta equipado, utilizando o esforço máximo, salta 0,60 m de altura na superfície terrestre. Calcular o quanto saltaria na superfície lunar, nas mesmas condições. Considerar o diâmetro e a densidade da lua como 1/4 e 2/3 dos da Terra, respectivamente.

**Comentários:**



De forma genérica, uma pessoa de massa  $m$ , em um campo gravitacional  $g$ , pulando com todo seu esforço (velocidade inicial do pulo  $v$ ), atinge uma altura  $h$ . Equacionando a conservação da energia mecânica, tem-se:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g}$$

Portanto, se encontrar a relação entre a gravidade local da Lua e da Terra, encontra-se a relação entre as alturas atingidas. Isto é válido, pois supõe-se que apesar das diferentes condições, o astronauta consegue fornecer a mesma quantidade de energia no seu impulso inicial, portanto, mesma velocidade inicial. Para calcular a gravidade local utiliza-se a equação abaixo:

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Aplicando essa equação, pode-se estabelecer a relação entre ambas as gravidades locais da seguinte forma:

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{\frac{GM_L}{R_L^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}} = \frac{M_L}{M_T} \cdot \frac{R_T^2}{R_L^2}$$



A relação entre os raios é conhecida pois é igual à dos diâmetros. Para achar a relação entre as massas:

$$\frac{M_L}{M_T} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_L^3 \rho_L}{\frac{4}{3}\pi R_T^3 \rho_T} = \frac{R_L^3}{R_T^3} \cdot \frac{\rho_L}{\rho_T}$$

Substituindo isso na relação anterior, temos:

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{R_L^3}{R_T^3} \cdot \frac{\rho_L}{\rho_T} \cdot \frac{R_T^2}{R_L^2} = \frac{R_L}{R_T} \cdot \frac{\rho_L}{\rho_T} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

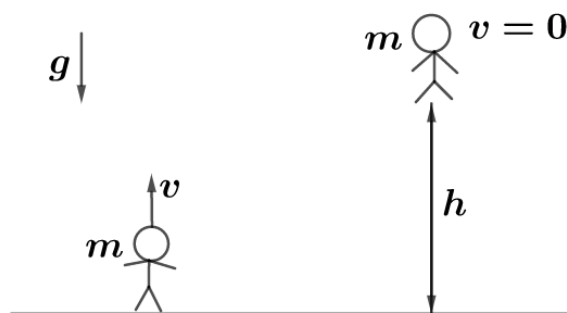
Como a gravidade da Lua é um sexto da gravidade da Terra, a altura atingida pelo salto será seis vezes maior (grandezas inversamente proporcionais). Portanto, a altura atingida foi de 3,6m.

**Gabarito:  $h = 3,6 \text{ m}$**

### 43. (IME)

Um astronauta em traje especial e completamente equipado pode dar pulos verticais de 0,5m na Terra. Determine a altura máxima que o astronauta poderá pular em um outro planeta, sabendo-se que o seu diâmetro é um quarto do da Terra e sua massa específica dois terços da terrestre. Considere que o astronauta salte em ambos os planetas com a mesma velocidade inicial.

#### Comentários:



De forma genérica, uma pessoa de massa  $m$ , em um campo gravitacional  $g$ , pulando com todo seu esforço (velocidade inicial do pulo  $v$ ), atinge uma altura  $h$ . Equacionando a conservação da energia mecânica, tem-se:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g}$$

Portanto, se encontrar a relação entre a gravidade local da Lua e da Terra, encontra-se a relação entre as alturas atingidas. Isto é válido, pois supõe-se que apesar das diferentes condições, o astronauta consegue fornecer a mesma quantidade de energia no seu impulso inicial, portanto, mesma velocidade inicial. Para calcular a gravidade local utiliza-se a equação abaixo:



$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Aplicando essa equação, pode-se estabelecer a relação entre ambas as gravidades locais da seguinte forma:

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{\frac{GM_L}{R_L^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}} = \frac{M_L}{M_T} \cdot \frac{R_T^2}{R_L^2}$$

A relação entre os raios é conhecida pois é igual à dos diâmetros. Para achar a relação entre as massas:

$$\frac{M_L}{M_T} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_L^3 \rho_L}{\frac{4}{3}\pi R_T^3 \rho_T} = \frac{R_L^3}{R_T^3} \cdot \frac{\rho_L}{\rho_T}$$

Substituindo isso na relação anterior, temos:

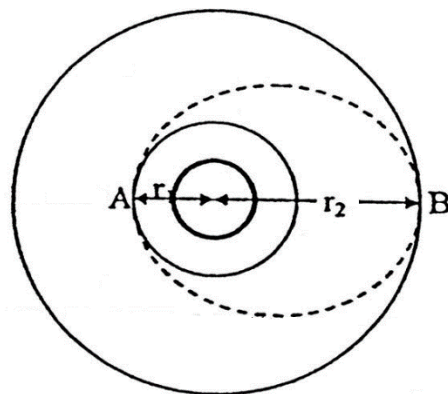
$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{R_L^3}{R_T^3} \cdot \frac{\rho_L}{\rho_T} \cdot \frac{R_T^2}{R_L^2} = \frac{R_L}{R_T} \cdot \frac{\rho_L}{\rho_T} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

Como a gravidade da Lua é um sexto da gravidade da Terra, a altura atingida pelo salto será seis vezes maior (grandezas inversamente proporcionais). Portanto, a altura atingida foi de 3,0m.

**Gabarito: 3,0 m**

44.

Uma nave espacial, de massa  $m$ , descreve uma órbita circular de raio  $r_1$  ao redor da Terra.



a) Mostre que a energia adicional  $\Delta E$  que deve ser fornecida à nave espacial para transferi-la até uma órbita de raio  $r_2$  é  $\Delta E = \frac{G.M.m(r_2-r_1)}{2r_2r_1}$ , onde  $M$  é massa da Terra.





b) Mostre ainda que, se a transferência de órbita é feita colocando-se a espaçonave numa órbita de transição semi-elíptica AB, as energias  $\Delta E_A$  e  $\Delta E_B$  que devem ser fornecidas em A e B são, respectivamente,  $\Delta E_A = \frac{r_2}{r_1+r_2} \Delta E$  e  $\Delta E_B = \frac{r_1}{r_1+r_2} \Delta E$

### Comentários:

a)

Para transferir o satélite de órbita, é necessário que se forneça a diferença de energia entre as duas órbitas. Portanto, deve-se calcular a energia mecânica total de cada órbita.

A energia mecânica total de uma órbita é dada por:

$$E_m = -\frac{GMm}{2a}$$

No caso da órbita circular,  $a$  é substituído por  $R$ . Portanto, na órbita inicial, a energia mecânica é de:

$$E_{m,i} = -\frac{GMm}{2r_1}$$

Na órbita final, a energia mecânica é de:

$$E_{m,f} = -\frac{GMm}{2r_2}$$

A energia a ser fornecida, portanto é de:

$$\Delta E = E_{m,f} - E_{m,i} = -\frac{GMm}{2} \cdot \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = -\frac{GMm}{2r_2r_1} \cdot (r_1 - r_2) = \frac{GMm}{2r_2r_1} \cdot (r_2 - r_1)$$

Aqui a transferência faz-se em duas partes. Primeiramente, em A, passa-se de uma órbita circular com raio  $r_1$  para uma órbita elíptica de semi-eixo maior  $a = \frac{r_1+r_2}{2}$ . Em seguida, em B, passa-se da órbita elíptica para outra órbita circular de raio  $r_2$ .

Utilizando a fórmula para energia mecânica da órbita apresentada na letra a), e calculando a energia necessária para os saltos também como feito no item anterior, tem-se:

$$\Delta E_A = -\frac{GMm}{2 \cdot \frac{r_1+r_2}{2}} - \left( -\frac{GMm}{2r_1} \right) = GMm \left( \frac{1}{2r_1} - \frac{1}{r_1+r_2} \right)$$

$$\Delta E_A = \frac{GMm(r_2 - r_1)}{2r_1(r_1 + r_2)} = \frac{GMm}{2r_2r_1} (r_2 - r_1) \cdot \frac{r_2}{r_1 + r_2}$$

$$\Delta E_A = \Delta E \cdot \frac{r_2}{r_1 + r_2}$$

Como não ocorrem perdas nem ganhos de energia além dos fornecidos na questão, não importa em quantas etapas o processo de mudança de órbita seja feito. O total de energia fornecido é o mesmo. Ou seja:

$$\Delta E = \Delta E_A + \Delta E_B$$

Logo:



$$\Delta E_B = \Delta E - \Delta E_A$$

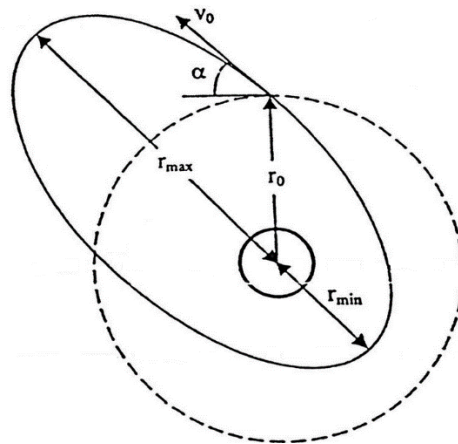
Assim:

$$\Delta E_B = \Delta E \left( 1 - \frac{r_2}{r_1 + r_2} \right) = \Delta E \cdot \left( \frac{r_1}{r_1 + r_2} \right)$$

**Gabarito:** a)  $\frac{GMm}{2r_2r_1} \cdot (r_2 - r_1)$  b)  $\Delta E \cdot \left( \frac{r_1}{r_1 + r_2} \right)$

45.

Um satélite é projetado no espaço com velocidade  $V_0$  a uma distância  $r_0$  do centro de Terra pelo último estágio de seu foguete de lançamento. A velocidade  $V_0$  foi projetada para colocar o satélite numa órbita circular de raio  $r_0$ . No entanto, devido ao mau funcionamento do controle, o satélite não é projetado horizontalmente, mas num ângulo qualquer  $\alpha$  com a horizontal, e como resultado é impelido numa órbita elíptica. Determine os valores máximo e mínimo da distância do centro da Terra ao satélite.



**Comentários:**

De acordo com o enunciado, a falha apenas projetou o satélite na direção errada, isto é, a quantidade de energia fornecida ainda se manteve igual. Dessa forma, a energia mecânica das duas órbitas é igual. Assim:

$$E_{m,circ} = E_{m,elip}$$

$$-\frac{GMm}{2r_0} = -\frac{GMm}{2a} \Rightarrow a = r_0$$

Sabe-se, portanto, a energia mecânica da órbita elíptica. Sabe-se, também, que o momento angular se conserva. Portanto, comparando o momento angular entre o instante de projeção e o momento de maior distância, tem-se:

$$mV_0r_0 \sin(90^\circ + \alpha) = mV_a r_{max} \Rightarrow V_a = \frac{V_0 r_0 \cos \alpha}{r_{max}}$$

Equacionando a energia mecânica no afélio tem-se:

$$E_m = E_p + E_c$$

$$-\frac{GMm}{2r_0} = -\frac{GMm}{r_{max}} + \frac{mV_a^2}{2} = -\frac{GMm}{r_{max}} + \frac{mV_0^2 r_0^2 \cos^2 \alpha}{2r_{max}^2}$$

Multiplicando toda a expressão por  $2r_{max}^2 r_0$  e rearranjando, chega-se a:

$$(GM)r_{max}^2 - (2GMr_0)r_{max} + (r_0^3 V_0^2 \cos^2 \alpha) = 0$$

Antes de prosseguir, é importante reduzir o número de incógnitas. Para isso, utilizar-se-á a relação entre  $V_0$  e  $r_0$  com o movimento circular uniforme e a força gravitacional da órbita circular. Isto é:

$$F_{cp} = F_g$$

$$\frac{mV_0^2}{r_0} = \frac{GMm}{r_0^2} \Rightarrow V_0^2 = \frac{GM}{r_0}$$

Agora, substituindo na equação do segundo grau anterior, chega-se a:

$$(GM)r_{max}^2 - (2GMr_0)r_{max} + (GMr_0^2 \cos^2 \alpha) = 0$$

$$r_{max}^2 - 2r_0 r_{max} + r_0^2 \cos^2 \alpha = 0$$

$$r_{max} = \frac{2r_0 \pm \sqrt{4r_0^2 - 4 \cdot r_0^2 \cos^2 \alpha}}{2}$$

$$r_{max} = r_0 \frac{2 \pm 2\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{2}$$

$$r_{max} = r_0(1 \pm \sin \alpha)$$

Como  $r_{max}$  deve ser maior que  $r_0$  e  $\sin \alpha$  é positivo, visto que  $\alpha < 180^\circ$ , das duas soluções obtidas:

$$r_{max} = r_0(1 + \sin \alpha)$$

Sabe-se que:

$$r_0 = a$$

$$r_0 = \frac{r_{max} + r_{min}}{2}$$

$$2r_0 - r_{max} = r_{min}$$

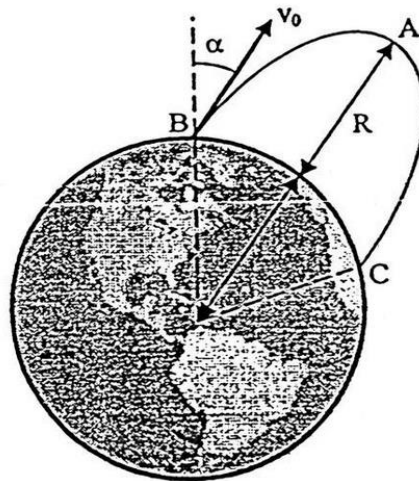
$$r_{min} = r_0(1 - \sin \alpha)$$

**Gabarito:**  $R_{mín} = (1 - \text{sen } \alpha) \cdot r_0$  e  $R_{máx} = (1 + \text{sen } \alpha) \cdot r_0$

46.

Um míssil é disparado do solo com velocidade  $V_0$ , formando um ângulo  $\alpha$  com a vertical. Se o míssil deve atingir uma altitude máxima igual ao raio da Terra:





Demonstre que o ângulo necessário  $\alpha$  é definido pela relação  $\text{sen} \alpha = 2 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left( \frac{V_{ESC}}{V_0} \right)^2}$ , em que  $V_{ESC}$  é a velocidade de escape;

### Comentários:

Primeiramente, calculemos a velocidade no ponto mais alto de sua trajetória. Isso é feito pela conservação do momento angular entre B e A.

$$mV_0 R \sin \alpha = mV_A \cdot 2R \Rightarrow V_A = \frac{V_0 \sin \alpha}{2}$$

Agora, aplica-se a conservação da energia mecânica entre A e B.

$$\begin{aligned} E_{m,A} &= E_{m,B} \\ -\frac{GMm}{R} + \frac{mV_0^2}{2} &= -\frac{GMm}{2R} + \frac{mV_A^2}{2} \\ -\frac{GM}{R} + \frac{V_0^2}{2} &= -\frac{GM}{2R} + \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{8} \end{aligned}$$

Antes de prosseguir, busquemos eliminar algumas variáveis do problema. Para isso, utilizaremos a fórmula da velocidade de escape abaixo:

$$V_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \Rightarrow \frac{2GM}{R} = V_{esc}^2 \Rightarrow \frac{GM}{R} = \frac{V_{esc}^2}{2}$$

Substituindo na equação da energia mecânica e rearranjando:

$$-\frac{V_{esc}^2}{2} + \frac{V_0^2}{4} = \frac{V_0^2}{2} \left( \frac{\sin^2 \alpha}{4} - 1 \right) \Rightarrow -\frac{V_{esc}^2}{2V_0^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{4} - 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 4 \left( 1 - \frac{V_{esc}^2}{2V_0^2} \right)$$

$$\boxed{\sin \alpha = 2 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left( \frac{V_{esc}^2}{V_0^2} \right)}}$$

**Gabarito: demonstração**



47.

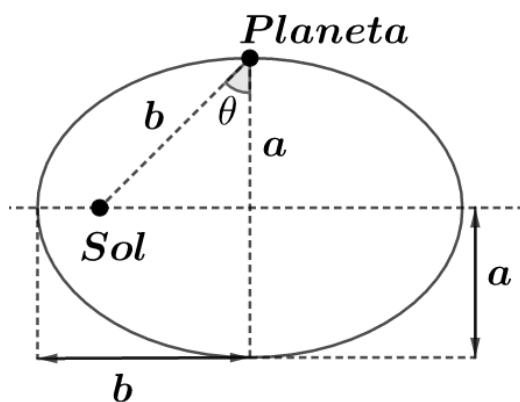
Um planeta descreve uma trajetória elíptica ao redor de um sol, onde os semi-eixos são  $a$  e  $b$  ( $b > a$ ). Determine o raio de curvatura da trajetória do planeta, quando se encontra a uma distância  $b$  do sol.

- a)  $\frac{a^2}{b^2}$
- b)  $\frac{b^2}{a}$
- c)  $\frac{a^2+b^2}{a}$
- d)  $\frac{b^2-a^2}{b}$
- e)  $\frac{2ab}{a+b}$

**Comentários:**

**Solução 1)**

Existem duas formas para se resolver o problema. A primeira é utilizando a teoria de gravitação vista até agora. A órbita está representada abaixo:



A energia mecânica de uma órbita:

$$E_m = -\frac{GMm}{2b}$$

Onde:

- $G$  é a constante gravitacional;
- $M$  é a massa do Sol;
- $m$  é a massa do planeta;
- $b$  é o semi-eixo maior.

A energia mecânica quando o planeta dista  $b$  do sol é:

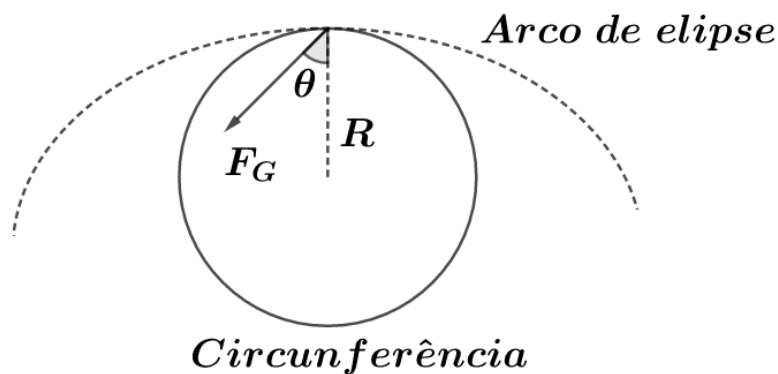


$$-\frac{GMm}{2b} = -\frac{GMm}{b} + \frac{mv^2}{2}$$

$$\frac{GM}{2b} = \frac{v^2}{2}$$

$$v^2 = \frac{GM}{b}$$

Para analisar o raio de curvatura, primeiro analisa-se a dinâmica do planeta na situação representada na imagem anterior. A situação está representada abaixo:



Para calcular o raio de curvatura, podemos supor que no instante pedido o planeta está sobre uma trajetória circular, ou seja, apresenta aceleração centrípeta. Essa aceleração centrípeta é igual a força gravitacional na direção do centro da circunferência, que coincide com o centro da elipse. Assim, tem-se:

$$F_G \cos \theta = \frac{mv^2}{R}$$

Onde:

- $F_G$  é a força gravitacional;
- $\theta$  é o ângulo representado na primeira figura;
- $v$  é a velocidade tangencial do planeta;
- $R$  é o raio de curvatura.

Substituindo, tem-se:

$$\frac{GMm}{b^2} \cdot \frac{a}{b} = \frac{m}{R} \cdot \frac{GM}{b}$$

$$R = \frac{b^2}{a}$$

## Solução 2)

Outra solução é utilizar a fórmula para raio de curvatura abaixo:

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - y'x''|}$$

Onde:



- $x$  e  $y$  são parametrização da curva;
- $x'$  e  $y'$  são as primeiras derivadas das parametrizações em relação à variável independente;
- $x''$  e  $y''$  são as segundas derivadas das parametrizações em relação à variável independente.

Portanto, é necessário parametrizar a elipse. Uma parametrização válida é:

$$x(t) = b \sin t$$

$$y(t) = a \cos t$$

Assim:

$$x'(t) = b \cos t$$

$$y'(t) = -a \sin t$$

E:

$$x''(t) = -b \sin t$$

$$y''(t) = -a \cos t$$

Substituindo:

$$R = \frac{(b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}{|-ab \cos^2 t + ab \sin^2 t|}$$

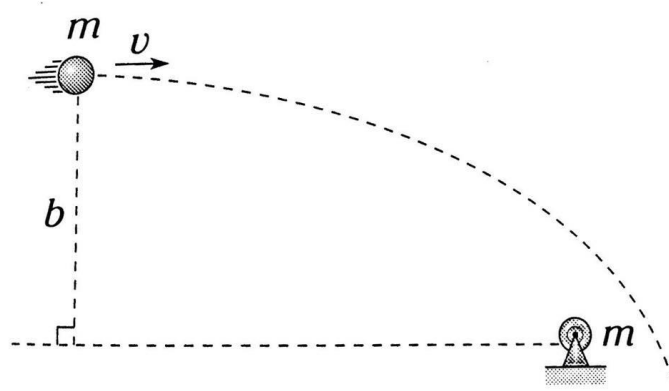
Como pode-se observar,  $R$  é uma função de  $t$ . Portanto, para o ponto desejado de nossa órbita,  $t$  é 0 (confira!). Substituindo  $t = 0$  na equação acima:

$$R = \frac{(b^2)^{\frac{3}{2}}}{|-ab|} = \frac{b^3}{ab} = \frac{b^2}{a}$$

**Gabarito: B**

**48.**

O sistema abaixo é isolado e formado por corpos de mesma massa: um corpo está fixo e o outro é projetado de um lugar muito afastado para depois seguir a trajetória indicada. Determine a menor separação entre os corpos. (Considere  $mG = bv^2$ )



a)  $\frac{b\sqrt{2}}{2}$



b)  $\frac{b(\sqrt{2}+1)}{4}$

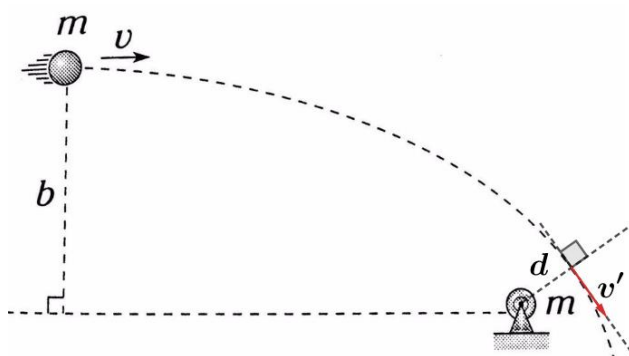
c)  $\frac{b\sqrt{2}}{4}$

d)  $b(\sqrt{2} - 1)$

e)  $\frac{b(\sqrt{2}-1)}{2}$

**Comentários:**

No momento de menor separação, os corpos estarão ligados por uma reta perpendicular à trajetória, como observado na figura abaixo:



Pela conservação de momento angular:

$$b \cdot v = d \cdot v' \Rightarrow v' = \frac{b \cdot v}{d}$$

E, pela conservação de energia mecânica:

$$\frac{mv^2}{2} = -\frac{GMm}{d} + \frac{mv'^2}{2}$$

Substituindo a relação entre as velocidades e  $Gm = bv^2$ :

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{bv^2}{d} + \frac{b^2v^2}{2d^2}$$

Multiplicando por  $2d^2$  e rearranjando:

$$d^2 + 2bd - b^2 = 0$$

$$d = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - (-4)b^2}}{2} = b \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

Como  $d$  é uma distância, deve ser positiva. Portanto:

$$d = b(-1 + \sqrt{2})$$

**Gabarito: D**

49.

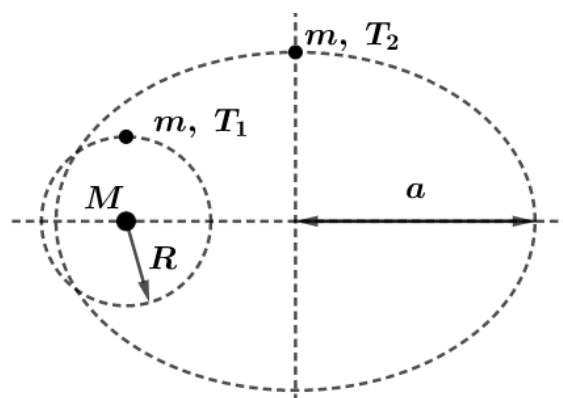




Dois corpos idênticos se movem ao redor de uma estrela em um mesmo sentido por trajetórias tangentes. O primeiro corpo se move por uma circunferência de raio  $R$  e o segundo possui um período oito vezes maior que o primeiro. Se os dois corpos se acoplam, qual é o máximo afastamento (da estrela) conseguido por esses corpos acoplados?

- a)  $R$
- b)  $1,2R$
- c)  $1,4R$
- d)  $2R$
- e)  $2,4R$

**Comentários:**



Como dito pelo enunciado:

$$T_2 = 8T_1$$

Pela Terceira Lei de Kepler:

$$\frac{R^3}{T_1^2} = \frac{a^3}{T_2^2} \Rightarrow a^3 = \frac{T_2^2}{T_1^2} R^3 = 64R^3 \Rightarrow a = 4R$$

Agora, aplica-se a conservação da energia mecânica, igualando a energia das duas órbitas separadas à da órbita nova.

$$-\frac{GMm}{2R} - \frac{GMm}{2a} = -\frac{GMm \cdot 2}{2b}$$

Onde:

- $G$  é a constante gravitacional;
- $M$  é a massa da estrela;
- $m$  é a massa dos corpos;
- $b$  é o semi-eixo maior da nova órbita.

$$\frac{1}{2R} + \frac{1}{8R} = \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{5}{8R} = \frac{1}{b} \Rightarrow b = \frac{8R}{5}$$



Considerando que o acoplamento ocorreu no ponto de tangência das órbitas, calcula-se a velocidade de cada corpo no instante anterior ao acoplamento e faz-se a conservação da quantidade de movimento. Para o cálculo da velocidade para a órbita circular utiliza-se a resultante centrípeta:

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Para a órbita elíptica, faz-se pela conservação da energia mecânica:

$$E_m = E_p + E_c$$

$$-\frac{GMm}{8R} = -\frac{GMm}{R} + \frac{mv'^2}{2} \Rightarrow \frac{7GM}{8R} = \frac{v'^2}{2} \Rightarrow v' = \sqrt{\frac{7GM}{4R}}$$

Agora, a conservação da quantidade de movimento:

$$q_{antes} = q_{depois}$$

$$mv + mv' = 2mv'' \Rightarrow \sqrt{\frac{GM}{R}} \left(1 + \frac{\sqrt{7}}{2}\right) = 2v'' \Rightarrow v'' = \sqrt{\frac{GM}{R}} \left(\frac{2 + \sqrt{7}}{4}\right)$$

Agora, faz-se a conservação do momento angular entre o ponto conhecido (distância  $R$  e velocidade  $v''$ ) e o desconhecido (afélio).

$$m \cdot R \cdot v'' = m \cdot d_a \cdot v_a$$

Onde:

- $d_a$  é a distância do afélio;
- $v_a$  é a velocidade no afélio.

Assim:

$$v_a = \frac{R \cdot v''}{d_a}$$

Finalmente, a conservação da energia mecânica no afélio, lembrando que já se sabe a energia mecânica total da órbita:

$$E_m = E_{p,afélio} + E_{c,afélio}$$

$$-\frac{5GMm}{8R} = -\frac{GM \cdot 2m}{d_a} + \frac{2mv_a^2}{2}$$

Sendo que:

$$mv_a^2 = \frac{mR^2v''^2}{d_a^2} = \frac{mR^2 \cdot \frac{GM}{R} \cdot \left(\frac{11 + 4\sqrt{7}}{16}\right)}{d_a^2}$$

Substituindo e eliminando o termo comum  $GMm$ , tem-se:



$$-\frac{5}{8R} = -\frac{2}{d_a} + \frac{R \left( \frac{11 + 4\sqrt{7}}{16} \right)}{d_a^2}$$

Usando:

$$\left( \frac{11 + 4\sqrt{7}}{16} \right) \approx 1,35$$

E, multiplicando toda a equação por  $8Rd_a^2$ :

$$\begin{aligned} -5d_a^2 &= -16Rd_a + 8R^2 \cdot 1,35 \\ 5d_a^2 - 16Rd_a + 10,8R^2 &= 0 \\ d_a &= R \frac{16 \pm \sqrt{256 - 216}}{10} = 2,23R \end{aligned}$$

**Gabarito: D**

---

**50.**

Um satélite orbita em torno de um planeta e descreve uma trajetória elíptica, cujas distâncias máximas e mínimas são  $R$  e  $r$ , respectivamente. Indique verdadeiro (V) ou falso (F).

I. A maior velocidade alcançada pelo satélite é  $\sqrt{\frac{2RGM}{r(R+r)}}$ , onde  $M$  é a massa do planeta.

II. O menor raio de curvatura da trajetória descrita pelo satélite é  $\frac{2rR}{R+r}$ .

III. A menor energia potencial gravitacional é alcançada na posição de máximo afastamento.

- a) FVF
- b) FFV
- c) VVF
- d) VVV
- e) FVV

**Comentários:**

A energia da órbita elíptica é  $-\frac{GMm}{2a}$ , em que  $a$  é o semi-eixo maior. Mas,  $a$  é igual à média aritmética da distância do periélio e afélio. Ou seja, a energia da órbita em função das variáveis do problema é:

$$E_m = -\frac{GMm}{2 \frac{(r+R)}{2}} = -\frac{GMm}{r+R}$$

Fazendo a energia mecânica no periélio:



$$-\frac{GMm}{r+R} = -\frac{GMm}{r} + \frac{mv^2}{2}$$
$$\frac{v^2}{2} = \frac{GMR}{(r+R)r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GMR}{(r+R)r}}$$

**Portanto, a I é verdadeira.**

O menor raio de curvatura acontece onde a curva da trajetória é mais acentuada, portanto, em algum dos extremos, seja periélio ou afélio, já que a elipse é simétrica. Utilizando o periélio (velocidade já conhecida) e fazendo-se a resultante centrípeta:

$$\frac{mv^2}{R_c} = \frac{GMm}{r^2}$$

Onde:

-  $R_c$  é o raio de curvatura

Substituindo a velocidade do periélio calculado antes:

$$R_c = \frac{r^2}{GM} \cdot \frac{2GMR}{(r+R)r} \Rightarrow R_c = \frac{2rR}{r+R}$$

**Portanto, a II também é verdadeira.**

A energia potencial gravitacional é, em módulo, inversamente proporcional à distância. Portanto, maiores distâncias significam menores energias potenciais gravitacionais. Entretanto, como a energia potencial gravitacional é negativa, quanto maior a distância, maior o número.

**Portanto, a III é falsa.**

**Gabarito: C**

---

**51.**

Um planeta descreve uma trajetória elíptica em torno do Sol, sendo a máxima e a mínima distância  $a$  e  $b$  respectivamente. Qual é a relação entre a energia cinética de translação do planeta e sua energia potencial de interação com o Sol, no instante em que passa pelo afélio?

**Comentários:**

Fazendo-se a conservação de momento angular entre periélio e afélio, tem-se:

$$a \cdot v_a = b \cdot v_p \Rightarrow v_p = \frac{a \cdot v_a}{b}$$

Pela conservação da energia mecânica entre o periélio e afélio:

$$-\frac{GMm}{b} + \frac{mv_p^2}{2} = -\frac{GMm}{a} + \frac{mv_a^2}{2}$$



$$-\frac{GM}{b} + \frac{GM}{a} = \frac{1}{2}(v_a^2 - v_p^2)$$

$$\frac{GM(b-a)}{ab} = \frac{1}{2}\left(v_a^2 - \frac{a^2 v_a^2}{b^2}\right)$$

$$\frac{v_a^2}{2} = \frac{GM(b-a)}{ab} \cdot \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^{-1} = \frac{GM(b-a)b^2}{ab(b^2 - a^2)} = \frac{GMb}{a(a+b)}$$

Fazendo-se a relação entre as energias pedidas:

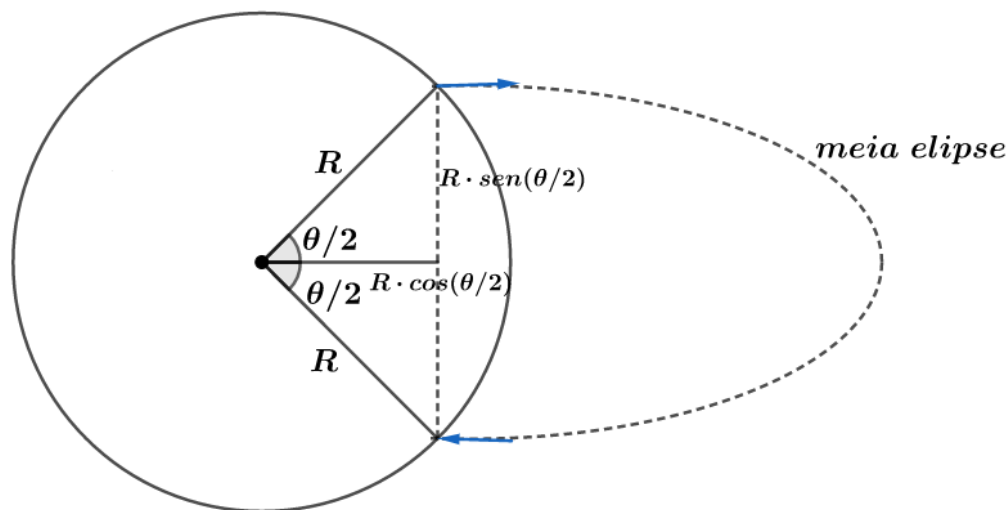
$$\frac{\frac{mv_a^2}{2}}{-\frac{GMm}{a}} = -\frac{\frac{GMb}{a(a+b)}}{\frac{GM}{a}} = -\frac{b}{(b+a)}$$

**Gabarito:**  $-\frac{b}{(b+a)}$

52.

Um foguete é lançado de um planeta e retorna ao mesmo planeta, de raio  $R$ , de tal forma que o vetor velocidade no retorno é paralelo ao vetor velocidade no lançamento. A separação angular no centro do planeta entre o ponto de lançamento e o de retorno é  $\theta$ . Quanto tempo dura o voo do foguete, se o período de um satélite cuja órbita tangencia a superfície da Terra é  $T_0$ ?

**Comentários:**



Como os vetores velocidade são paralelas, isso significa que o foguete realizou meia órbita (somente posições opostas têm vetor velocidade paralelo). O centro da Terra é um dos focos da órbita elíptica (Leis de Kepler). Com os dados apresentados, pode-se utilizar a Segunda Lei de Kepler (Lei das áreas). Para a órbita elíptica representada:



$$\begin{cases} a = R \\ b = R \sin \frac{\theta}{2} \\ c = R \cos \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

Onde:

- $a$  é o semi-eixo maior;
- $b$  é o semi-eixo menor;
- $c$  é a distância focal.

A área varrida pela meia órbita realizada foi metade a área da elipse mais a área do triângulo isósceles de lado  $R$  e ângulo  $\theta$  (consultar a figura). A área de uma elipse é dada por:

$$A = \pi ab$$

Portanto, a área percorrida pelo vetor foi de:

$$A_{\text{triângulo}} + A_{\frac{1}{2}\text{elipse}} = \frac{R^2 \sin \theta}{2} + \frac{\pi R^2 \sin \frac{\theta}{2}}{2} = \frac{R^2 \sin \frac{\theta}{2}}{2} (2 \cos \frac{\theta}{2} + \pi)$$

Caso fosse percorrida toda a elipse, a área percorrida seria:

$$A_{\text{elipse}} = \pi R^2 \sin \frac{\theta}{2}$$

Pela Segunda Lei de Kepler:

$$\frac{A_{\text{elipse}}}{T_0} = \frac{A_{\text{triângulo}} + A_{\frac{1}{2}\text{elipse}}}{t}$$

Onde:

- $t$  é o tempo que se deseja encontrar.

$$t = T_0 \cdot \frac{\frac{R^2 \sin \frac{\theta}{2}}{2} (2 \cos \frac{\theta}{2} + \pi)}{\pi R^2 \sin \frac{\theta}{2}} = T_0 \cdot \frac{2 \cos \frac{\theta}{2} + \pi}{2\pi} = T_0 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

**Gabarito:**  $T_0 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \right)$

---

### 53.

Imagine um planeta esférico (despreze o movimento de rotação) de massa  $M$  e raio  $R$ . O planeta não possui atmosfera. Uma espaçonave de massa  $m$  ( $m \ll M$ ) é lançada da superfície do planeta com uma velocidade  $v_0$  e um ângulo de  $30^\circ$  com o eixo vertical local. Os foguetes são acionados por um intervalo de tempo muito pequeno. Você pode considerar que quando a espaçonave possuir a velocidade  $v_0$  ela não se movimento uma distância considerável



a) A velocidade  $v_0$  é tão grande que a órbita não é fechada. Qual é a menor velocidade possível nesta situação?

Imagine agora que a órbita é fechada e que a espaçonave atinge uma distância máxima de  $15R$  do centro do planeta. Nesta distância, sua velocidade é  $V$ . Determine:

b) A razão  $v_0 / V$

c) A energia total da espaçonave logo após o lançamento

d) A energia total da espaçonave no ponto mais distante do planeta

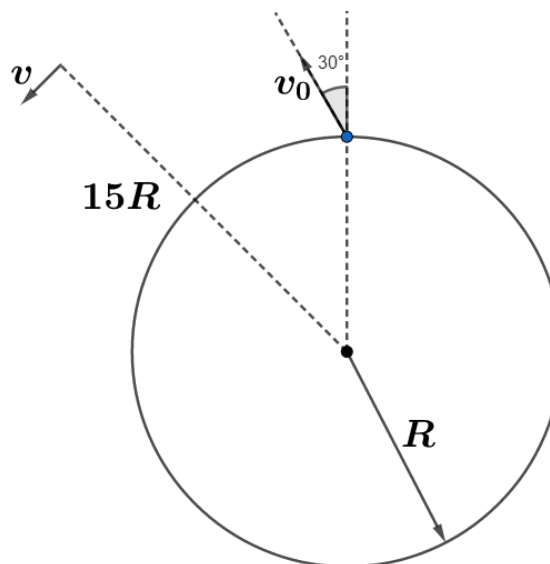
e) A equação que permitiria você determinar  $v_0$  em função de  $M$ ,  $G$  e  $R$  (não é necessário resolver esta equação)

### Comentários:

a) Se a órbita não é fechada, quer dizer que a espaçonave teve energia suficiente para escapar do campo gravitacional terrestre. Portanto, a menor velocidade para que isso aconteça é a velocidade de escape, e sabe-se que:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

b) Fazendo a conservação de momento angular entre o lançamento e o ponto de distância  $15R$  do centro do planeta:



$$v_0 \cdot R \cdot \sin 150^\circ = V \cdot 15R \Rightarrow v_0 \cdot \frac{1}{2} = 15V \Rightarrow \frac{v_0}{V} = 30$$

c)

$$E_M = E_P + E_C$$

$$E_M = -\frac{GMm}{R} + \frac{mv_0^2}{2}$$

d)

$$E_M = E_P + E_C$$



$$E_M = -\frac{GMm}{15R} + \frac{m\left(\frac{v_0}{30}\right)^2}{2} = -\frac{GMm}{15R} + \frac{mv_0^2}{1800}$$

- e) Tem-se 3 equações (energia mecânica nos dois pontos e a relação entre as velocidades) e 3 incógnitas (as duas velocidades e a energia mecânica total). Há várias formas de se resolver, uma que é suficiente é a conservação da energia mecânica.

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{GmM}{R} = \frac{mv_0^2}{1800} - \frac{GmM}{15R}$$

**Gabarito:** a)  $v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$  b) 30 c)  $E_T = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GmM}{R}$  d)  $E_T = \frac{mv_0^2}{1800} - \frac{GmM}{15R}$  e)  $\frac{mv_0^2}{1800} - \frac{GmM}{15R} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GmM}{R}$

---





## 11. Considerações finais

Chegamos ao final da nossa aula. Relembre os principais conceitos estudados nessa aula e tenha no sangue as leis de Kepler e os conceitos de energia e trajetória.


Estude com calma os tópicos que não são vistos em ensino médio comum e anote alguns resultados no seu caderno de resumo.

É muito importante chegar na prova com alguns resultados prontos para ganhar tempo. As demonstrações utilizando Cálculo serve apenas para dar sustentação de como chegamos aos resultados. Não se preocupe em decorar essas passagens matemáticas.

A lei de Gauss da gravitação é muito importante e possibilita diversos cálculos de campo para sistemas com elevado grau de simetria. Ela tem mais a cara do ITA e pode ser muito bem-vinda na resolução de problemas nestas condições.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



 @proftoniburgatto



## 12. Referências bibliográficas

- [1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.
- [2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Seleccionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.
- [3] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física. 11ª ed. Saraiva, 1993. 303p.
- [4] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física 1. 9ª ed. Moderna. 490p.
- [5] Resnick, Halliday. Fundamentos de Física. 8ª ed. LTC. 349p. Versão



## 13. Versão de aula

Versão de Aula	Data da última atualização
1.0	21/09/2019

