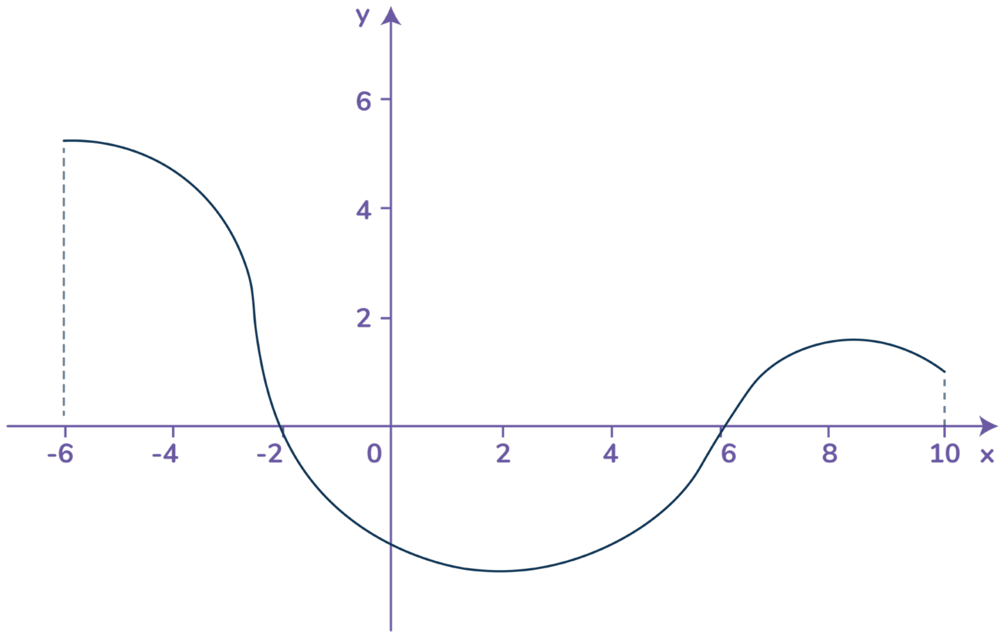
ESTUDO DOS SINAIS DA FUNÇÃO

Neste momento, vamos nos dedicar ao estudo dos sinais de funções. Para introduzir este assunto, observe o gráfico de uma função f, exibido a seguir:



A partir deste gráfico, podemos concluir que:

- $f(x) > 0$ para $6 \leq x < -2$ e para $6 < x \leq 10$;
- $f(x) = 0$ para $x = -2$ e para $x = 6$;
- $f(x) < 0$ para $-2 < x < 6$.

O que fizemos acima foi estudar o sinal de f. Em outras palavras, estudar o sinal de uma função f é analisar em quais pontos de seu domínio temos $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ ou $f(x) < 0$. A partir de agora, usaremos os seguintes termos:

Seja f uma função de domínio D. Diremos que:

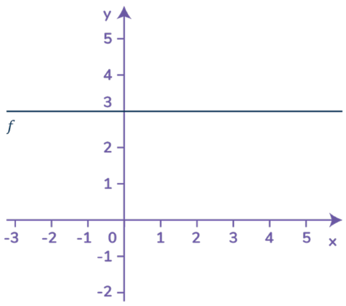
- f é positiva em x, com $x \in$ D, se e somente se $f(x) > 0$;
- f é anulada em x, com $x \in$ D, se e somente se $f(x) = 0$;
- f é negativa em x, com $x \in$ D, se e somente se $f(x) < 0$.

ESTUDO DO SINAL DE UMA FUNÇÃO AFIM

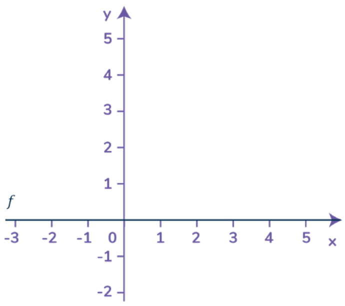
Considere uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f for uma função constante, a seguinte propriedade é válida:

> Se f é uma reta horizontal, f é apenas positiva, apenas negativa ou anulada em todos os pontos.

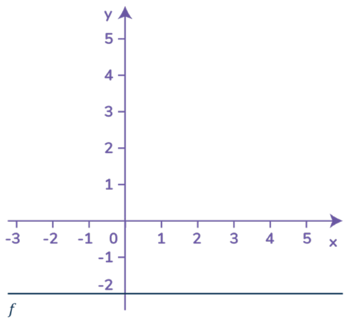
As imagens a seguir ilustram esta propriedade:



f sempre positiva



f sempre nula

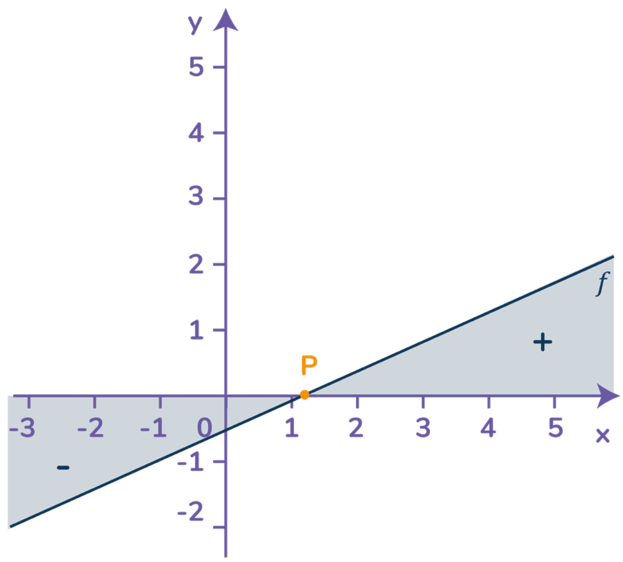


f sempre negativa

Para qualquer função afim não constante, é válida a seguinte propriedade:

> Se f for uma reta não horizontal, então existem infinitos pontos para os quais f é positiva, infinitos pontos para os quais é negativa e apenas um para o qual f se anula.

Esta propriedade está ilustrada na imagem a seguir, no caso de uma função afim crescente:

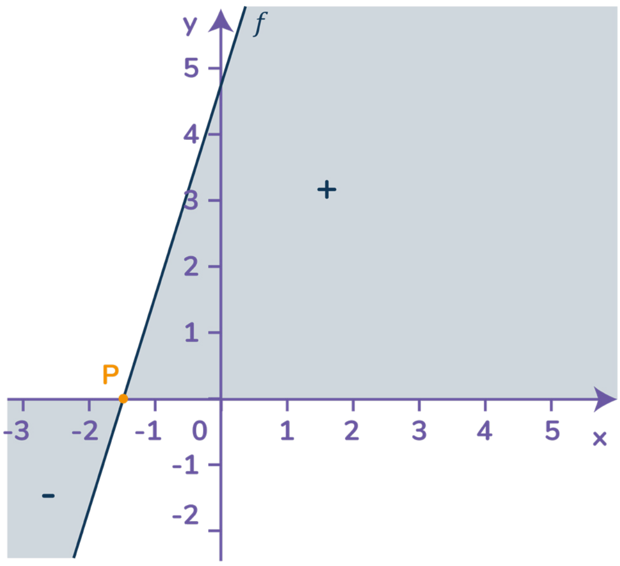


Perceba que a função assume valores positivos para valores de $x > \mathrm{P}$, valores negativos para valores de $x < \mathrm{P}$ e assume o valor zero exatamente em $x = \mathrm{P}$.

Exemplo: Realize o estudo de sinal de $f = 4x + 6$.

Note que f não é constante e, portanto, a segunda propriedade descrita se aplica. Do estudo que fizemos sobre funções afim, temos que f se anula em $P = \frac{-b}{a}$, isto é, em $P = \frac{-3}{2}$. Agora, para estudar o sinal de f, vamos verificar o que acontece se considerarmos $x <$ P e $x >$ P:

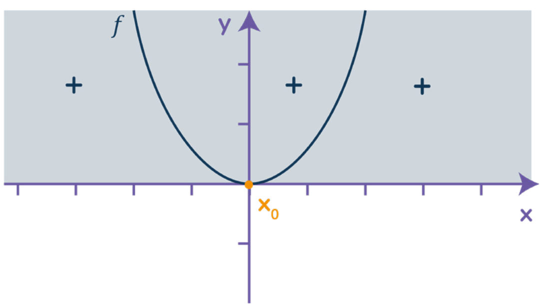
Se considerarmos $x <$ P, digamos $x = -2$, temos $f(x) = f(-2) = 4 \,.\, (-2) + 6 = -2$, ou seja, para todo $x <$ P vale que $f(x)$ é negativa. Além disso, se considerarmos $x >$ P, digamos $x = 0$, temos $f(x) = 6$ e, como já era esperado, $f(x)$ é positiva para todo $x >$ P:

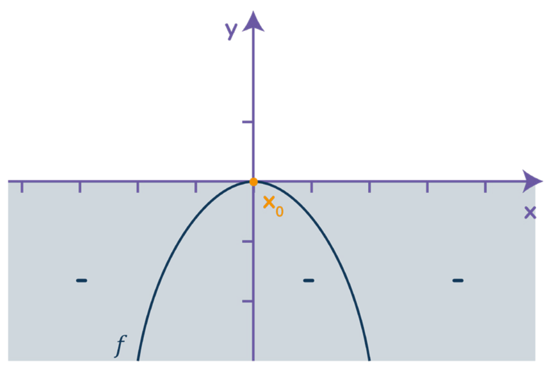


Agora faça você mesmo um caso em que a função afim seja decrescente!

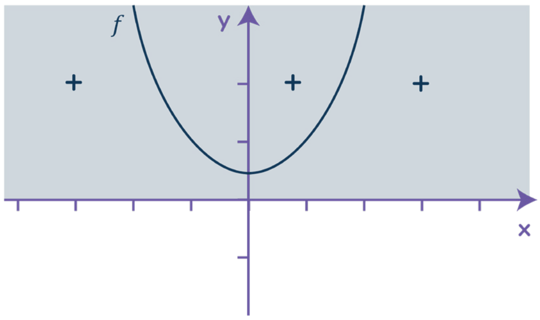
ESTUDO DO SINAL DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

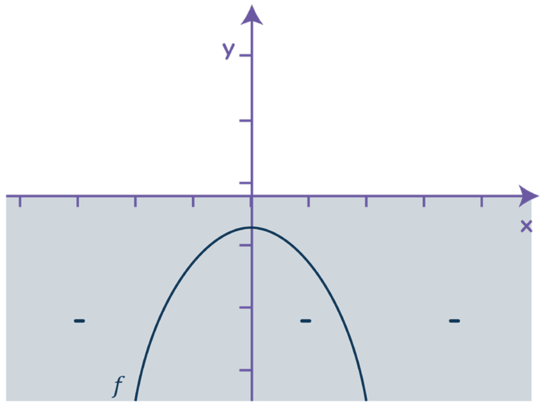
Considere agora uma função quadrática. Vamos realizar este estudo com base no valor de Δ. Se tivermos $\Delta = 0$, existe apenas um ponto no qual f se anula e temos f positiva para todos os outros pontos ou negativa em todos os pontos, dependendo de sua concavidade:





Se $\Delta < 0$, algo similar acontece. Como já sabemos, neste caso a parábola não cruza o eixo x. Isto significa que só temos duas possibilidades para o sinal de f: positiva em todos os pontos ou negativa em todos os pontos.

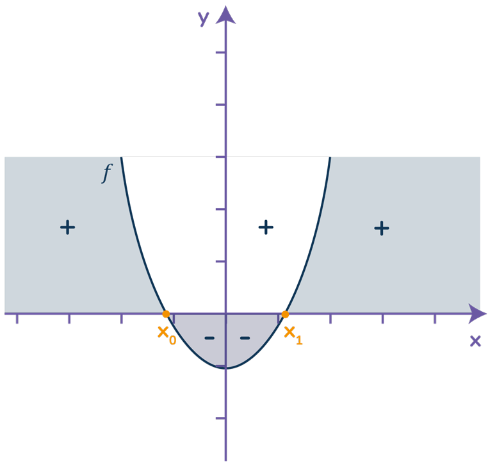


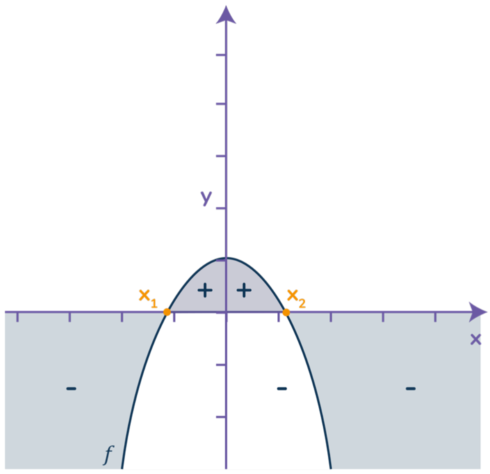


Finalmente, se $\Delta > 0$, temos que a parábola cruza o eixo x em dois pontos distintos, que chamaremos de x_1 e x_2. Neste caso, a seguinte propriedade é válida:

- Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ e x_1, x_2 suas raízes distintas. Então:
- Se $a > 0$, f é positiva para todo $x < x_1$ e para todo $x > x_2$, negativa para $x_1 < x < x_2$ e nula para $x = x_1$ e $x = x_2$.
- Se $a < 0$, f é negativa para todo $x < x_1$ e para todo $x > x_2$, positiva para $x_1 < x < x_2$ e nula para $x = x_1$ e $x = x_2$.

Esta propriedade é ilustrada pelas imagens a seguir:



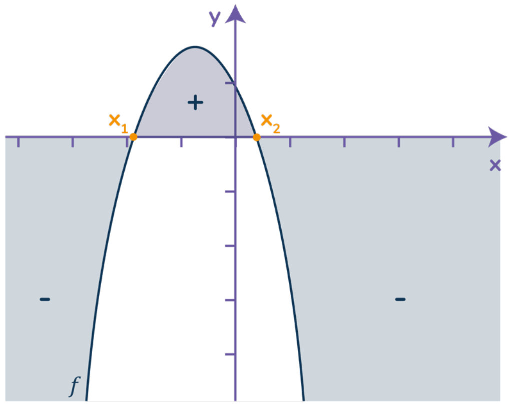


Exemplo: Realize o estudo de sinal da função $f(x) = -x^2 + 2x + 2$.

Como $a < 0$, pela propriedade anterior, temos que f será positiva entre suas raízes e negativa em todos os outros pontos. Assim, basta encontrar os valores de x_1 e x_2 que anulam f.

Pela fórmula de Bhaskara, temos $x_1 = 1 - \sqrt{3}$ e $x_2 = 1 + \sqrt{3}$. Portanto, temos:

- f positiva se $x_1 < x < x_2$;
- f nula se $x = x_1$ ou $x = x_2$;
- f negativa se $x < x_1$ ou $x > x_2$.



ANOTAÇÕES