MATEMÁTICA

FRENTE: MATEMÁTICA III

PROFESSOR(A): JUDSON SANTOS

EAD – ITA/IME

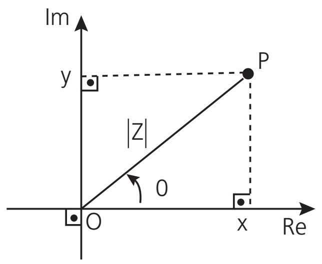
AULAS 03 A 05

ASSUNTO: FORMAR POLAR, FÓRMULAS DE MOIVRE E APLICAÇÕES

Resumo Teórico

Forma geométrica dos números complexos

Como os números complexos são pares ordenados, cada número complexo $Z = (x, y) = x + yi$ é representado por um único ponto do plano cartesiano ($\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$); além disso, cada ponto do plano é a imagem de um único número complexo (par ordenado):



As partes **x** (real) e **y** (imaginária) são as coordenadas cartesianas do ponto **P** (x, y), denominado **afixo** ou **imagem geométrica** do número complexo $Z = (x, y) = x + yi$, e o plano assim considerado passa a ser chamado de **plano complexo** ou **plano de Argand – Gauss**.

Além do plano de Argand – Gauss e do afixo **P**, também merecem destaque:

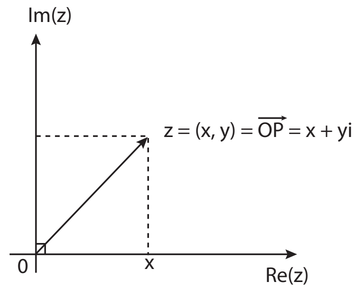
- O eixo Ox, chamado **eixo real**, e indicado por Re.
- O eixo Oy, chamado **eixo imaginário**, e indicado por Im.
- A distância do afixo **P** à origem **O** (0, 0), chamada **módulo** ou **norma** do número complexo $Z = x + yi$, e indicada por $|Z|$, onde $|Z| \in \mathbb{R}_+$.
- O ângulo θ formado pelo segmento $\overline{OP}$ e pelo eixo Ox, medido no sentido anti-horário, a partir do semieixo positivo **x**, $0 \le \theta < 2\pi$, chamado **argumento principal** do número complexo **Z**.

Representação vetorial dos números complexos

No complexo **C**, cada número complexo **z** pode ser representado por um vetar de origem **O** (O,O) e extremidade **P** (x, y) afixo de **z**.

z é caracterizado por $\overline{OP}$.

Geometricamente:



Da figura, um complexo pode ser escrito na forma trigonométrica:

$$Z = |Z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

Notação: Usaremos no decorrer do curso as notações:

$$\operatorname{cis}\theta = \cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta$$

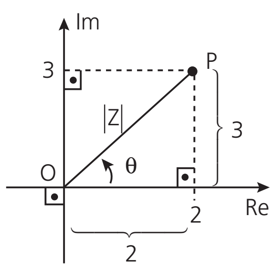
A unidade complexa é definida como $i = \sqrt{-1}$.
Considere o complexo $z = x + y \cdot i$ onde $x, y \in \Re$. Definimos:

- Módulo de **z**: $|Z| = |x + y \cdot i| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Parte Real e Imaginária de **z**: $\operatorname{Re}(z) = x$ e $\operatorname{Im}(z) = y$
- Argumento de **z**: $\theta = \arg(z) = \operatorname{arctg}(y/x) + 2k\pi$, $k \in z$
- Complexo conjugado de **z**: $\bar{z} = x - y \cdot i$

Exemplo 1:

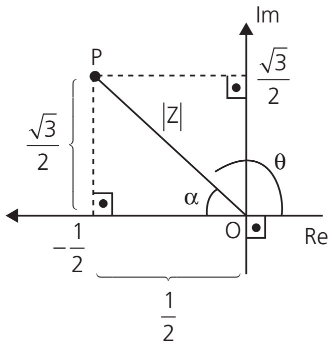
Represente geometricamente, no plano complexo, cada um dos seguintes números complexos, calculando o módulo $(|z|)$ e o argumento principal (θ), em função do ângulo agudo (α) que $\overline{OP}$ forma com o eixo real, quando θ não pertencer ao primeiro quadrante.

a) $Z = 2 + 3i$



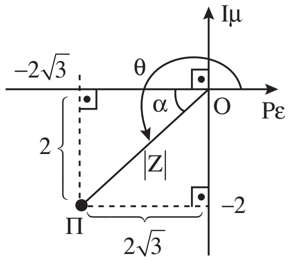
- $|Z| = OP \Rightarrow |Z|^2 = 2^2 + 3^2 \Rightarrow |Z| = \sqrt{13}$

b) $Z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$



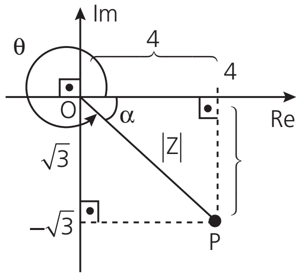
- $|Z| = OP \Rightarrow |Z|^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow |Z| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} \Rightarrow |Z| = 1$
- $\theta + \alpha = \pi(180°) \Rightarrow \theta = \pi - \alpha$

c) $Z = 2\sqrt{3} - 2i$



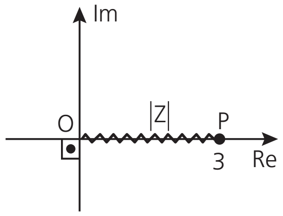
- $|Z| = OP \Rightarrow |Z|^2 = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2 \Rightarrow |Z| = \sqrt{12+4} \Rightarrow |Z| = 4$
- $\theta = 180° + \alpha \Rightarrow \theta = \pi + \alpha$

d) $Z = 4 - \sqrt{3}i$



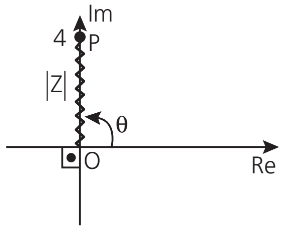
- $|Z| = OP \Rightarrow |Z|^2 = 4^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow |Z| = \sqrt{16+3} \Rightarrow |Z| = \sqrt{19}$
- $\theta + \alpha = 2\pi(360°) \Rightarrow \theta = 2\pi - \alpha$

e) Z = 3 (real) ou Z = (3, 0)



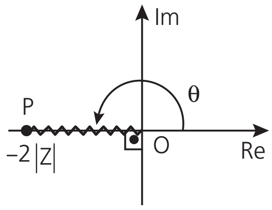
- $|Z| = OP \Rightarrow |Z| = 3$
- $\theta = 0°$

f) Z = 4i (imaginário puro) ou Z = (0, 4)



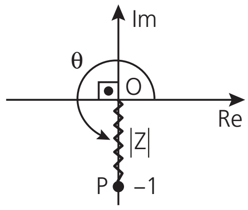
- $|Z| = OP \Rightarrow |Z| = 4$
- $\theta = \frac{\pi}{2}\text{rad}(90°)$

g) Z = – 2 (real) ou Z = (–2, 0)



- $|Z| = OP \Rightarrow |Z| = 2$
- $\theta = \pi\text{rad} \cdot (180°)$

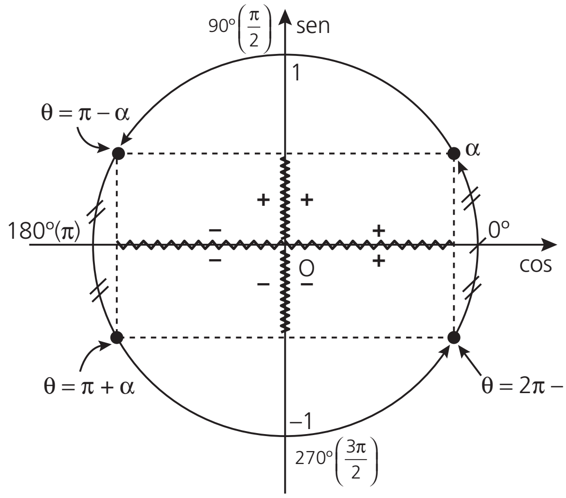
h) Z = – i (imaginário puro) ou Z = (0, –1)



- $|Z| = OP \Rightarrow |Z| = 1$
- $\theta = \frac{3\pi}{2}\text{rad}(3 \cdot 90° = 270°)$

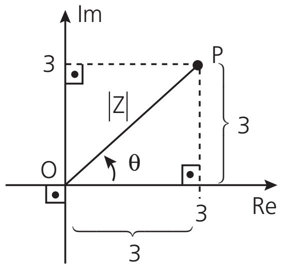
Exemplo 2:

Sendo α um ângulo agudo, no ciclo trigonométrico, os pontos que representam os argumentos principais $\theta = \pi - \alpha$, $\theta = \pi + \alpha$ e $\theta = 2\pi - \alpha$ são vértices de um mesmo retângulo inscrito e, portanto, têm o mesmo seno e o mesmo cosseno de α, **em valores absolutos**. Os sinais para o seno e o cosseno desses argumentos principais são obtidos de acordo com o quadrante a que pertencem:



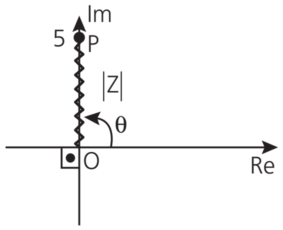
Calcule o seno e o cosseno do argumento principal (θ), calculando antes o seno e o cosseno do ângulo agudo (α) que $\overline{OP}$ forma como o eixo real, quando necessário, dos seguintes números complexos.

a) Z = 3 + 3i



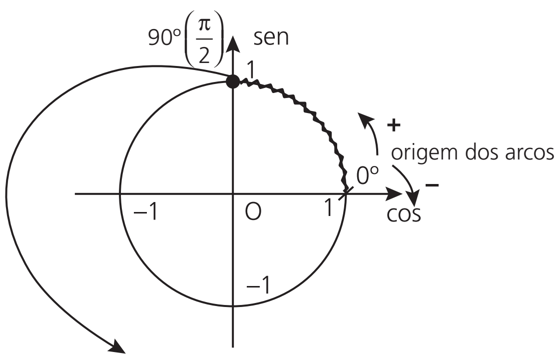
- $|Z|^2 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow |Z| = \sqrt{2 \cdot 3^2} \Rightarrow |Z| = 3\sqrt{2}$
- $\left\{\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{2}{|Z|} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{3}{|Z|} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \theta = 45° = \dfrac{\pi}{4}\text{rad}$

b) Z = 5 ou Z = (5, 0)



- $|Z| = OP \Rightarrow |Z| = 5$
- $\theta = 90° \Rightarrow \begin{cases} \cos 90° = 0 \\ \text{sen}\, 90° = 1 \end{cases}$

Note: "No ciclo trigonométrico (raio = 1), o cosseno é a abscissa e o seno, a ordenada".

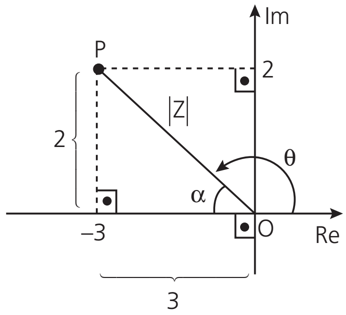


(0, 1) = (cos 90°, sen 90°)

1 unidade acima (+) da origem **O** (0, 0)

nem à direita (+) nem à esquerda da origem **O** (0, 0)

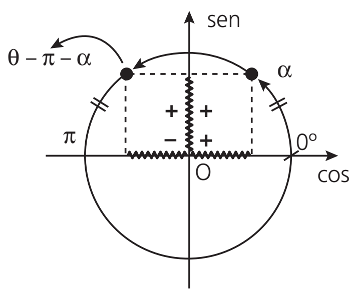
c) Z = – 3 + 2i ou Z = (– 3, 2)



- $|Z|^2 = (-3)^2 + 2^2 \Rightarrow |Z| = \sqrt{9+4} \Rightarrow |Z| = \sqrt{13}$
- $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{3}{|Z|} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} \\ \text{sen}\,\alpha = \dfrac{2}{|Z|} = \dfrac{4}{\sqrt{13}}, \text{ onde } \alpha \text{ é agudo} \end{cases}$
- $\theta = \pi - \alpha \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = -\cos\alpha = \dfrac{-3}{\sqrt{13}} \\ \text{sen}\,\theta = \text{sen}\,\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$

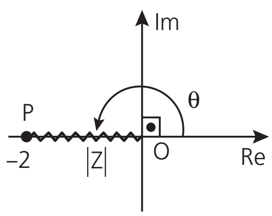
(θ = 180° – α)

Note:



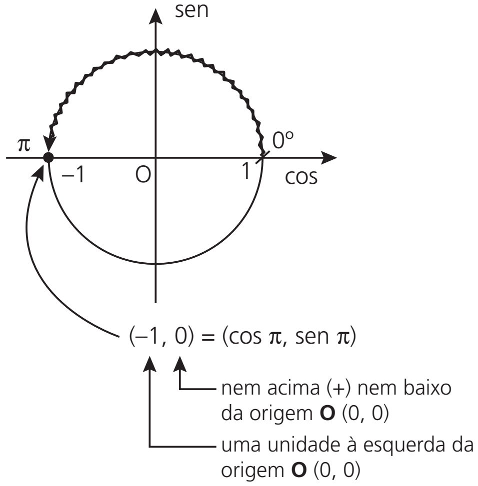
- sen (π – α) = sen α
- cos (π – α) = – cos α

d) Z = – 2 ou Z = (– 2, 0)

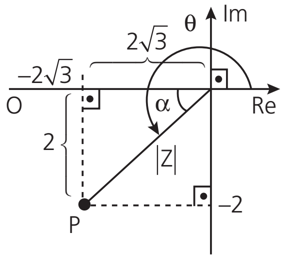


- $|Z| = OP \Rightarrow |Z| = 2$
- $\theta = \pi\ \text{rad}(180°) \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = -1 \\ \text{sen}\,\theta = 0 \end{cases}$

Note:



e) $Z = -2\sqrt{3} - 2i$ ou $Z = \left(-2\sqrt{3}, -2\right)$



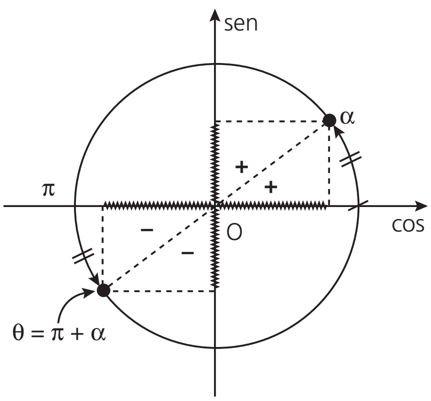
- $|Z| = OP \Rightarrow |Z|^2 = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2 \Rightarrow |Z| = \sqrt{12+4} \Rightarrow |Z| = 4$

- $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{|Z|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2}{|Z|} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6}\ \text{rad}(30°)$

- $\begin{matrix} \theta = \pi + \alpha \Rightarrow \\ (\theta = 180° + \alpha) \end{matrix} \begin{cases} \cos\theta = -\cos\alpha = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \theta = \pi + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6}\ \text{rad}(210°)$

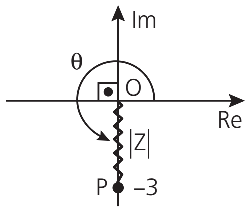
Note:



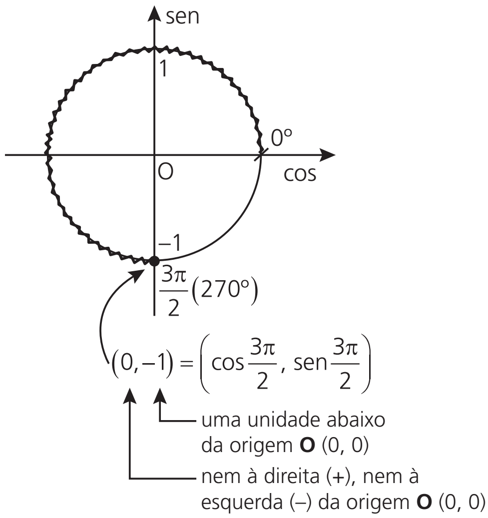
- cos (π + α) = – cos α
- sen (π + α) = – sen α

f) Z = – 3i ou Z = (0, – 3)

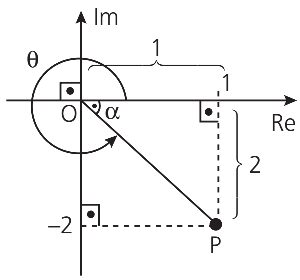
- $|Z| = OP \Rightarrow |Z| = 3$
- $\theta = \dfrac{3\pi}{2}(3 \cdot 90° = 270°) \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \operatorname{sen}\theta = -1 \end{cases}$



Note:



g) Z =1 –2i ou Z = (1, – 2)

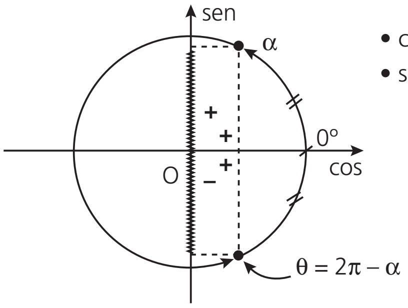


- $|Z| = OP \Rightarrow |Z|^2 = 1^2 + (-2)^2 \Rightarrow |Z| = \sqrt{1+4} \Rightarrow |Z| = \sqrt{5}$

- $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{|Z|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2}{|Z|} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \text{ onde } \alpha \text{ é agudo} \end{cases}$

- $\begin{matrix} \theta = 2\pi - \alpha \Rightarrow \\ (\theta = 360° - \alpha) \end{matrix} \begin{cases} \cos\theta = \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{-2}{\sqrt{5}} \end{cases}$

Note:



- $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$
- $\text{sen}(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

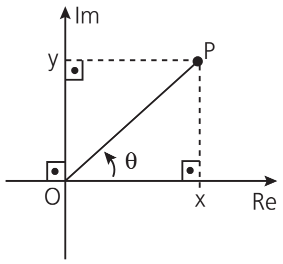
Observação 1:

Em geral, o número complexo $Z = x + yi = (x, y)$ tem módulo $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e argumento principal θ, tais que:

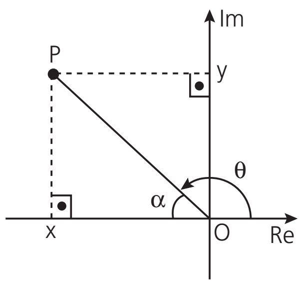
- $\cos\theta = \dfrac{x}{|Z|}$, onde $\cos\theta$ tem o mesmo sinal de **x** (parte real de **Z**).
- $\text{sen}\,\theta = \dfrac{y}{|Z|}$, onde $\text{sen}\,\theta$ tem o mesmo sinal de **y** (parte imaginária de **Z**).

De fato, observando os gráficos:

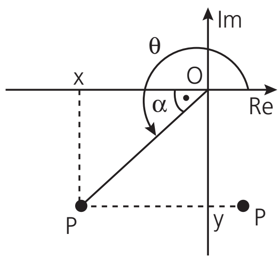
a)



b)



c)



Como $(\pm x)^2 = x^2$, $(\pm y)^2 = y^2$, $\cos\alpha = \dfrac{|x|}{OP}$ e $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{|y|}{OP}$, temos:

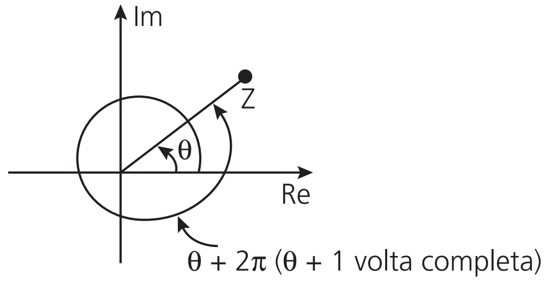
- $(OP)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\theta = \pi - \alpha$ (2º quadrante), $\theta = \pi + \alpha$ (3º quadrante) e $\theta = 2\pi - \alpha$ (4º quadrante) têm cossenos com o mesmo sinal de **x** (parte real de **Z**), e senos com o mesmo sinal de **y** (parte imaginária de **Z**), respectivamente. Já os valores absolutos dos cossenos e dos senos desses argumentos (θ) são os mesmos de α, respectivamente:

Daí:

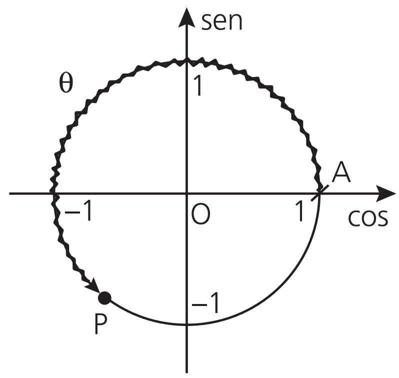
- $\cos\theta = \dfrac{x}{|Z|}$ tem o mesmo sinal de **x**.
- $\text{sen}\,\theta = \dfrac{y}{|Z|}$ tem o mesmo sinal de **y**.

Observação 2:

Um mesmo número completo $Z = (x, y)$ tem infinitos argumentos.



No ciclo trigonométrico, saindo da origem dos arcos (A), e percorrendo o arco não negativo θ ($0 \le \theta < 2\pi$), chega-se a um ponto **P**. A partir de **P**, sempre que se dá um número inteiro de voltas completas (positivas ou negativas), chega-se novamente em **P**, ou seja, são arcos congruentes a θ (têm a mesma extremidade de θ):



$0 \le \theta < 2\pi$

$$\ldots \equiv \theta - 4\pi \equiv \theta - 2 \equiv \theta \equiv \theta + 2\pi \equiv \theta + 4\pi \equiv \ldots$$

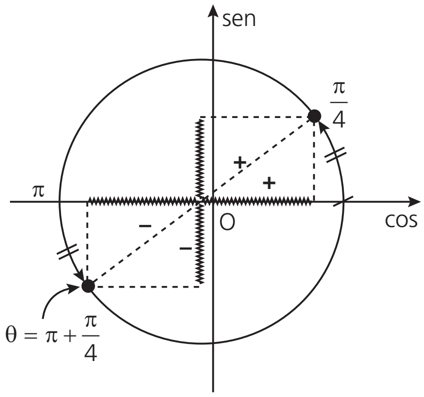
2 voltas negativas — 1 volta negativa — 1 volta positiva — 2 voltas positivas

Se o módulo de um número complexo é igual a $\sqrt{2}$ e seu argumento principal é igual a $\dfrac{5\pi}{4}$, represente esse número complexo nas três formas: trigonométrica, algébrica e cartesiana.

Solução:

Temos:

i) $\theta = \dfrac{5\pi}{4} = \dfrac{4\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \pi + \dfrac{\pi}{4}$ (3º quadrante)



- $\cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

- $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ii) $Z = |Z|\cdot(\cos\theta + i\cdot\operatorname{sen}\theta) \Rightarrow Z = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\cdot\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow$ forma trigonométrica.

iii) $Z = \sqrt{2}\cdot\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \Rightarrow \underbrace{Z = -1 - i}_{\text{forma algébrica}}$ ou $\underbrace{Z = (-1, -1)}_{\text{forma cartesiana}}$

Exemplo 2:

Seja o número complexo $Z = \sqrt{3} + i$, onde **i** é a unidade imaginária. Qual o argumento principal de Z^2?

Solução:

i) $w = Z^2 = Z \cdot Z \Rightarrow w = (\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} + i) \Rightarrow$
$= (3 - 1) + (\sqrt{3}i + \sqrt{3}i) \Rightarrow w = 2 + 2\sqrt{3}i$

ii) $|w| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} \Rightarrow |w| = \sqrt{4 + 12} \Rightarrow |w| = 4$

iii) $\left\{\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{|w|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta\, \frac{y}{|w|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow \theta = 30°\left(\frac{\pi}{6}\text{rad}\right)$

Obs.: $Z^2 = w = |w|(\cos\theta + i\cdot\operatorname{sen}\theta) \Rightarrow Z^2 = 4\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

Resposta: $\frac{\pi}{6}\text{rad}$

Exemplo 3:

Determine a fórmula trigonométrica do número complexo **Z**, tal que $Z^2 = i$.

Solução:

Sendo Z = x + yi, temos:

a) $(x + yi)^2 = i \Rightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = 0 + 1\cdot i \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases}$

b) $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ x = -y \end{cases}$

Daí:

- se x = y:

$2xy = 1 \Rightarrow 2y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

- se x = – y:

$2xy = 1 \Rightarrow 2y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y \notin \mathbb{R}$

Assim, $|Z| = \sqrt{\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} \Rightarrow |Z| = 1.$

Daí: $Z = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\cos 45°} + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\operatorname{sen} 45°} i \Rightarrow Z = 1\cdot(\cos 45° + i\cdot\operatorname{sen} 45°)$

Ou

$Z = -\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\cos\theta < 0} - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\operatorname{sen}\theta < 0} i \Rightarrow Z = 1\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\cdot\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \theta \in 4°$ quadrante

$\left(\theta = 2\pi - \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{45°} = \frac{7\pi}{4}\text{rad}\right)$

Resposta: $Z = \cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$

ou

$Z = \cos\frac{7\pi}{4} + i\cdot\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$

Exemplo 4:

A representação geométrica de todos os afixos do número Z = x + yi, tais que $|z - 1| = 3$ é que figura geométrica?

Solução:

Sendo Z = x + yi, onde x, y $\in \mathbb{R}$, temos:

i) $Z - 1 = (x - 1) + yi \Rightarrow |Z - 1| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$

ii) $|Z - 1| = 3 \Rightarrow \sqrt{(x - 1^2) + y^2} = 3 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 3^2$, que é a equação de uma circunferência, de centro no ponto (1, 0) e raio R = 3.

Lembre-se:

A circunferência de centro no ponto (x_0, y_0) e raio **R** tem equação $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Multiplicação de números complexos

Antes de efetuarmos a multiplicação de números complexos, convém relembrar as seguintes fórmulas trigonométricas.

- sen (a + b) = sen a · cos b + sen b · cos a
- sen (a – b) = sen a · cos b – sen b · cos a
- cos (a + b) = cos a · cos b – sen a · sen b
- cos (a – b) = cos a · cos b + sen a · sen b

Observe agora que:

$(\cos\theta_1 + i\cdot \text{sen}\,\theta_1)\cdot(\cos\theta_2 + i\cdot\text{sen}\,\theta_2) = (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\cdot\text{sen}\,\theta_2) + (\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_2\cos\theta_1)i = \cos(\theta_1+\theta_2) + \text{sen}\,(\theta_1+\theta_2)$

Daí, podemos calcular o produto dos números complexos

$Z_1 = |Z_1|\cdot(\cos\theta_1 + i\cdot\text{sen}\,\theta_1)$ e $Z_2 = |Z_2|(\cos\theta_2 + i\cdot\text{sen}\,\theta_2)$:

$Z_1\cdot Z_2 = |Z_1|\cdot|Z_2|\cdot(\cos\theta_1 + i\cdot\text{sen}\,\theta_1)\cdot(\cos\theta_2 + i\cdot\text{sen}\,\theta_2)$

$$\boxed{Z_1\cdot Z_2 = |Z_1|\cdot|Z_2|\cdot[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\cdot\text{sen}(\theta_1+\theta_2)]}$$

Nessa fórmula, note que:

- $|Z_1\cdot Z_2| = |Z_1|\cdot|Z_2|$ (o módulo do produto é o produto dos módulos).
- O argumento de $Z_1\cdot Z_2 = \theta_1 + \theta_2$ (o argumento do produto é a soma dos argumentos).

Exemplo 1:

Dados $Z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ e $Z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{12}\right)$, calcule:

a) $Z_1\cdot Z_2$

b) Z_1^2

c) Z_1^3

Solução:

a) $Z_1\cdot Z_2 = |Z_1|\cdot|Z_2|\cdot[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\cdot\text{sen}(\theta_1+\theta_2)]$

$= 4\cdot 5\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right) + i\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)\right]$

$= 20\cdot\left[\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + i\cdot\underbrace{\text{sen}\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right] = 10\sqrt{2} + i\cdot 10\sqrt{2}$

b) $Z_1^2 = Z_1\cdot Z_1 = |Z_1|\cdot|Z_1|[\cos(\theta_1+\theta_1) + i\cdot\text{sen}(\theta_1+\theta_1)]$

$= |Z_1|^2\cdot[\cos(2\theta_1) + i\cdot\text{sen}(2\theta_1)]$, onde $|Z_1| = 4$ e $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$

Então,

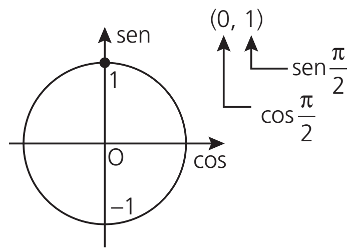
$Z_1^2 = 16\cdot\left[\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{1/2} + i\cdot\underbrace{\text{sen}\frac{\pi}{3}}_{\sqrt{3}/2}\right] = 8 + i\cdot 8\sqrt{3}$

c) $Z_1^3 = Z_1^2\cdot Z_1 = |Z_1|^2\cdot[\cos(2\theta_1) + i\cdot\text{sen}(2\theta_1)]\cdot|Z_1|\cdot$
$\cdot[\cos\theta_1 + i\cdot\text{sen}\,\theta_1] = |Z_1|^3\cdot[\cos(2\theta_1+\theta_1) + i\cdot\text{sen}(2\theta_1+\theta_1)]$
$= |Z_1|^3\cdot[\cos(3\theta_1) + i\cdot\text{sen}(3\theta_1)]$, onde $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ e $|Z| = 4$

Então,

$Z_1^3 = 64\cdot\left[\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{\text{zero}} + i\cdot\underbrace{\text{sen}\frac{\pi}{2}}_{1}\right] = 64i$

Note:



Exemplo 2:

Considerando os números complexos Z_1 e Z_2 do exemplo anterior, calcule $Z_1\cdot Z_2\cdot Z_3$, onde $Z_3 = 3 - 3i$.

Solução:

i) $|Z_3| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+(-3)^2} = \sqrt{2\cdot 9} \Rightarrow |Z_3| = 3\sqrt{2}$

ii) $Z_3 = |Z_3|(\cos\theta_3 + i\cdot\text{sen}\,\theta_3) = |Z_3|\cdot\left[\frac{x}{|Z_3|} + i\cdot\frac{y}{|Z_3|}\right]$

$3\sqrt{2}\cdot\left[\frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{-3}{3\sqrt{2}}i\right] = 3\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right]$

sen $\theta_3 < 0$
cos $\theta_3 > 0$

$\Rightarrow \theta_3 \in 2^{\circ}$ quadrante

$\left(\theta_3 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\right)$

$\therefore Z_3 = 3\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$

iii) $Z_1\cdot Z_2\cdot Z_3 = (Z_1\cdot Z_2)\cdot Z_3$

$= (|Z_1|\cdot|Z_2|)\cdot|Z_3|\cdot[\cos((\theta_1+\theta_2)+\theta_3) + i\cdot\text{sen}((\theta_1+\theta_2)+\theta_3)]$

$= 4\cdot 5\cdot 3\sqrt{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{4}\right) + i\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$= 60\sqrt{2}\cdot\left(\underbrace{\cos\pi}_{-1}\cdot\underbrace{i\,\text{sen}\,\pi}_{\text{zero}}\right) = -60\sqrt{2}$

Observação:

Em geral, para **n** números complexos, temos:

$$Z_1 \cdot Z_2 \ldots Z_n = |Z_1| \cdot |Z_2| \ldots |Z_n| \left[\cos(\theta_1 + \theta_2 \ldots. + \theta_n) + \right.$$
$$\left. + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)\right]$$

1ª Fórmula de Moivre

Em geral, se $Z = |Z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$, temos para $n \in \mathbb{R}$:

$$Z^n = \underbrace{Z \cdot Z \ldots Z}_{\text{n vezes}} =$$
$$= \underbrace{|Z| \cdot |Z| \ldots. |Z|}_{\text{n vezes}} \cdot \left[\cos\underbrace{(\theta + \theta + \ldots. + \theta)}_{\text{n vezes}} + \right.$$
$$\left. i \cdot \text{sen}\underbrace{(\theta + \theta + \ldots. + \theta)}_{\text{n vezes}}\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Z^n = |Z|^n \cdot [\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta)] \\ (1^{\text{a}} \text{ fórmula de Moivre}) \end{array}}$$

Observação:

A primeira fórmula de Moivre garante que, sendo dado o número complexo $Z = |Z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$, o módulo de Z^n é igual a $|Z|^n$, e o argumento principal, $Z = 5\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{12}\right)$ $(n \cdot \theta)$.

Exemplo 1:

Considerando o número complexo, $Z = 5\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{12}\right)$ calcule Z^{24}.

Solução:

$Z^{24} = |Z|^{24} \cdot [\cos(24\theta) + i \cdot \text{sen}(24\theta)]$, onde $|Z| = 5$ e $\theta = \frac{\pi}{12}$.

Então, $Z^{24} = 5^{24} \cdot \left[\underbrace{\cos(2\pi)}_{1} + i \cdot \underbrace{\text{sen}(2\pi)}_{\text{zero}}\right] = 5^{24}$

Importante:

> Se Z = a + bi é solução da equação $a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, $\bar{Z} = a - bi$ também o é, onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais.

Para você compreender o porquê desse fato, veja primeiro as propriedades:

a) $\boxed{\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}$

De fato:

- $\begin{cases} Z_1 = x_1 + y_1 i \\ Z_2 = x_2 + y_2 i \end{cases} \begin{array}{l} \Rightarrow Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \\ \Rightarrow \overline{Z_1 + Z_2} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i \end{array}$

- $\begin{cases} \bar{Z}_1 = x_1 - y_1 i \\ \bar{Z}_2 = x_2 - y_2 i \end{cases} \Rightarrow \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i$

b) $\boxed{\overline{kZ} = k \cdot \bar{Z}}$, onde $k \in \mathbb{R}$ e $Z \in \mathbb{C}$

De fato:

- $k \cdot Z = k(x + yi) \Rightarrow k \cdot Z = kx + kyi \Rightarrow \overline{kZ} = kx - kyi$
- $k \cdot \bar{Z} = k(x - yi) \Rightarrow k \cdot \bar{Z} = kx - kyi$

c) $\boxed{\bar{x} = x}$, onde $x \in \mathbb{R}$

De fato:

- $x = x + oi \Rightarrow \bar{x} = x - oi \Rightarrow \bar{x} = x$

d) $\overline{Z^n} = (\bar{Z})^n$, onde $Z \in \mathbb{C}$. $\bar{Z}$ é o seu conjugado

De fato, considerando Z = x + yi e $\bar{Z} = x - yi$ ou $Z = |Z|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$, temos.

- $|Z| = |\bar{Z}| = \sqrt{x^2 + (\pm y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $Z^n = |Z|^n \cdot [\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta)] \Rightarrow$
  $\Rightarrow \overline{Z^n} = |Z|^n \cdot [\cos(n\theta) - i \cdot \text{sen}(n\theta)]$
- $Z = |Z| \cdot [\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta] \Rightarrow$
  $\bar{Z} = |Z|(\cos\theta - i \cdot \text{sen}\,\theta)$
  $\Rightarrow (\bar{Z})^n = |Z|^n [\cos(n\theta) - i \cdot \text{sen}(n\theta)]$

Daí, $\overline{Z^n} = (\bar{Z})^n$

Vejamos a Demonstração. agora:

Se **Z** é raiz da equação $a_n x^n + \ldots. + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, temos:

$$a_n Z^n + a_{n-1} \cdot Z^{n-1} + \ldots + a_2 Z^2 + a_1 Z + a_0 = 0$$

Daí,

$$\overline{a_n Z^n + a_{n-1} \cdot Z^{n-1} + \ldots + a_2 Z^2 + a_1 Z + a_0} = \bar{0}$$
$$\overline{a_n Z^n} + \overline{a_{n-1} \cdot Z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_2 Z_2^2} + \overline{a_1 Z} + \overline{a_0} = 0$$
$$a_n \overline{Z^n} + a_{n-1} \cdot \overline{Z^{n-1}} + \ldots a_2 \overline{Z^2} + a_1 \bar{Z} + a_0 = 0$$
$$a_n (\bar{Z})^n + a_{n-1} \cdot (\bar{Z})^{n-1} + \ldots + a_2 (\bar{Z})^2 + a_1 (\bar{Z}) + a_0 = 0,$$

mostrando que $\bar{Z}$ é raiz!

Exemplo 2:

Se (5 + 2i) é raiz da equação $2x^2 + mx + n = 0$, calcule os valores das constantes reais **m** e **n**.

Solução:

i) $x_1 = 5 + 2i$ é raiz, então $x_2 = 5 - 2i$ também é raiz. (raízes conjugadas)

ii) $x_1 + x_2 = \frac{-m}{2} \Rightarrow 10 = \frac{-m}{2} \Rightarrow m = -20$

iii) $x_1 \cdot x_2 = \frac{n}{2} \Rightarrow 5^2 - (2i)^2 = \frac{n}{2} \Rightarrow 25 + 4 = \frac{n}{2} \Rightarrow n = 58$

Divisão de números complexos

Considere Z_1, Z_2 e **w** números complexos não nulos, onde **w** é o quociente de Z_1 por Z_2, tais que θ_1, θ_2 e θ_w sejam seus argumentos e $|Z_1|$, $|Z_2|$ e $|w|$, seus módulos, respectivamente. Temos:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = w \Rightarrow Z_2 \cdot \frac{Z_1}{Z_2} = Z_2 \cdot w \Rightarrow Z_1 = Z_2 \cdot w$$

Pela multiplicação de números complexos, obtemos:

a) $\theta_1 = \theta_2 + \theta_w \Rightarrow \theta_1 - \theta_2 = \theta_w$

b) $|Z_1| = |Z_2| \cdot |w| \Rightarrow \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|} = |w|$

Daí,

$$\frac{Z_1}{Z_2} = w \Rightarrow \boxed{\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \cdot \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right]}$$

Lembre-se, então:

- O módulo do quociente é o quociente dos módulos, isto é:
- $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}$
- O argumento principal do quociente é a respectiva diferença dos argumentos.

Exemplo:

Dados $Z_1 = 10 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{3\pi}{5}\right)$ e $Z_2 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)$, calcule $\dfrac{Z_1}{Z_2}$.

Solução:

a) módulo de $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|} = \dfrac{10}{2} = 5$

b) $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \arg(Z_1) - \arg(Z_2) = \dfrac{3\pi}{5} - \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{2\pi}{5}$

Então, $\dfrac{Z_1}{Z_2} = 5 \cdot \left(\cos\dfrac{2\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{5}\right)$

Radiciação de números complexos

Considere o número complexo **Z**, não nulo, dado na forma trigonométrica:

$$Z = |Z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

Denomina-se **raiz n-ésima de Z** um número complexo $w = |w|(\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha)$ tal que:

$$w = \sqrt[n]{Z} \Leftrightarrow w^n = Z$$

Daí resulta:

$$|w|^n\left[\cos(n\alpha) + i \cdot \operatorname{sen}(n\alpha)\right] = |Z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

E, portanto:

- $|w|^n = |Z| \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{|Z|}$, pois $|w|$ e $|Z|$ são reais positivos
- $n\alpha = \theta + \underbrace{k \cdot 2\pi}_{\text{um número inteiro (k) de voltas completas}} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}$

Assim:

$w = \sqrt[n]{|Z|}\left[\cos\dfrac{\theta + k \cdot 2\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right]$, apresentando os seguintes valores distintos:

- Se $k = 0 \Rightarrow w_0 = \sqrt[n]{|Z|}\left(\cos\dfrac{\theta}{n} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\theta}{n}\right)$
- Se $k = 1 \Rightarrow w_1 = \sqrt[n]{|Z|}\left(\cos\dfrac{\theta + 2\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\theta + 2\pi}{n}\right)$
- Se $k = n - 1$:
- $w_{n-1} = \sqrt[n]{|Z|}\left(\cos\dfrac{\theta + (n-1)2\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\theta + (n-1)2\pi}{n}\right)$
- Se $k = n \Rightarrow w_n = w_0$
  $\left(\text{repete-se, pois } \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{n \cdot 2\pi}{n} = \dfrac{\theta}{n} + 2\pi \equiv \dfrac{\theta}{n}\right)$

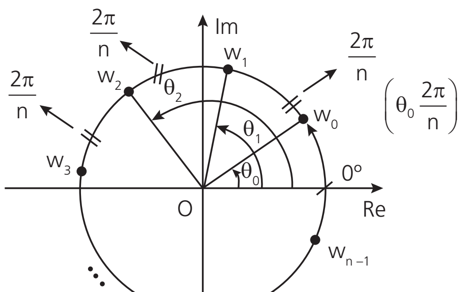
A partir daí, para k = n + 1, k = n + 2, etc, recairemos em raízes já obtidas. Podemos, então, dizer que um número complexo $Z = |Z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$ apresenta **n** raízes n-ésimas, e são tais que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt[n]{Z} = w_k, \text{ onde:} \\ w_k = \sqrt[n]{|Z|} \cdot \left[\cos\dfrac{\theta + k \cdot 2\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right], \\ \text{com } k \in \{0, 1, ..., (n-1)\} \\ \text{(segunda fórmula de Moivre)} \end{array}}$$

Observações importantes:

a) As **n** raízes do número complexo **Z** têm o mesmo módulo $\sqrt[n]{|Z|}$ e, portanto, os afixos dessas **n** raízes ficam sobre a circunferência de raio igual a $\sqrt[n]{|Z|}$.

b) Os **n** argumentos dividem essa circunferência em **n** arcos de medidas iguais a $\dfrac{2\pi}{n}$ ou $\dfrac{360°}{n}$, sendo portanto:



Note: Raio = $\sqrt[n]{|Z|}$

$$\theta_0 = \frac{\theta}{n}$$
$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{2\pi}{n}$$
$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{2\pi}{n}$$
$$\theta_{n-1} = \theta_{n-2} + \frac{2\pi}{n}$$

Exemplo 1:

Calcule as raízes cúbicas de – 8, e representá-las geometricamente.

Solução:

a) $Z=-8 \Rightarrow Z=8\left(\underbrace{-1}_{\cos\pi}+\underbrace{o}_{\text{sen}\,\pi}\,i\right) \Rightarrow Z=8\cdot(\cos\pi+i\cdot\text{sen}\,\pi)$

b) $\sqrt[3]{-8}=w_k$, onde:

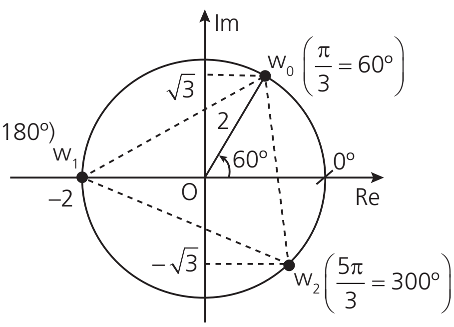
$$w_k=\sqrt[3]{8}\cdot\left[\cos\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{3}+i\cdot\text{sen}\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{3}\right],$$

com $k \in \{0,\ 1,\ 2\}$

- se $k=0 \Rightarrow w_0=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
  $\Rightarrow w_0=1+\sqrt{3}i$
- se $k=1 \Rightarrow w_1=2\cdot(\cos\pi+i\cdot\text{sen}\,\pi)=2\cdot(-1+i\cdot 0)$
  $\Rightarrow w_1=-2$
- se $k=2 \Rightarrow w_2=2\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\cdot\text{sen}\frac{5\pi}{3}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
  $\Rightarrow w_2=1-\sqrt{3}i$

Note: $\frac{5\pi}{3}=\frac{6\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\left(2\pi-\underbrace{\frac{\pi}{3}}_{60^\circ}\right)\in$ 4º quadrante

c) Representação geométrica:



Note: os afixos formam um triângulo equilátero.

Outra solução:

$$\sqrt[3]{-8}=w \Rightarrow w^3=-8 \Rightarrow w^3+2^3=0$$
$$\Rightarrow (w+2)(w^2-2w+4)=0$$

Daí:

- $w+2=0 \Rightarrow w=-2$

  ou
- $w^2-2w+4=0 \Rightarrow w=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{2}$

$$\Rightarrow w=\frac{2}{2}\pm\frac{2\sqrt{-3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} w=1+\sqrt{3}i \\ \text{ou} \\ w=1-\sqrt{3}i \end{cases}$$

Exemplo 2:

Os afixos dos números complexos **Z** tais que Z^6 = – 64 formam um polígono regular de área igual a quanto?

Solução:

a) $w=-64 \Rightarrow w=64(-1+o\cdot i) \Rightarrow w=\underbrace{64}_{|w|}(\cos\pi+i\cdot\text{sen}\,\pi)$

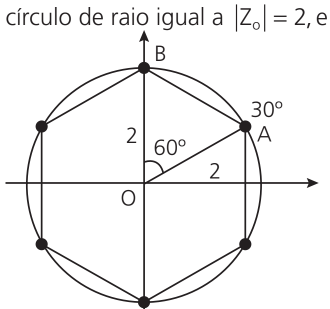
b) $Z^6=w \Rightarrow Z_k=\sqrt[6]{w}$, onde:

$$Z_k=\sqrt[6]{|w|}\cdot\left(\cos\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{6}+i\cdot\text{sen}\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{6}\right);$$

$\Rightarrow k \in \{0,1,\ldots,5\}$

- Para $k_0=0 \Rightarrow Z_0=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

Daí, as 6 raízes têm afixos formando um hexágono regular inscrito num círculo de raio igual a $|Z_0|$ = 2, e um de seus vértices fica no $\frac{\pi}{6}$(30º).



$$S_{\text{hexágono}}=6\cdot S_{AOB}$$
$$=6\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\text{sen}60^\circ=6\sqrt{3}$$

Resposta: $6\sqrt{3}$ ua (unidades de área)

Propriedades dos argumentos dos números complexos

P1 $\cdot\ \arg(z_1\cdot z_2\ldots z_n)=\arg(z_1)+\arg(z_2)+\ldots+\arg(z_n)$

P2 $\cdot\ \arg(z^n)=n\cdot\arg(z)$

P3 $\cdot\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$

P4 $\cdot\ \arg(\bar{z})=-\arg(z)$ ou $\arg(\bar{z})=-\arg(z)+2k\pi$

Teorema de Euler

Para todo número real θ, tem-se:

$$\boxed{e^{i\cdot\theta}=\cos\theta+i\cdot\text{sen}\theta}$$

A fórmula de Euler implica que:

$$\left|e^{i\theta}\right|=|\cos\theta+i\cdot\text{sen}\theta|=\sqrt{(\cos\theta)^2+(\text{sen}\theta)^2}=1$$

A fórmula de Euler permite escrever um número complexo na forma trigonométrica da seguinte maneira:

$$\boxed{z = r\cdot(\cos\theta + i\cdot \text{sen}\theta) = r\cdot e^{i.\theta}}$$

Onde $\begin{cases} r = |z| \\ \theta \text{ argumento de } \mathbf{z} \end{cases}$

Caro aluno, vamos demonstrar o teorema de Euler através da série de Taylor.

a) Desenvolvimento em série de potência de y = senx

$$\begin{array}{ll} f(x) = \text{sen}x & f(0°) = \text{sen}0° = 0 \\ f'(x) = \cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & f'(0) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ f''(x) = -\text{sen}x = \text{sen}(x+\pi) & f''(0) = \text{sen}\pi = 0 \\ f'''(x) = -\cos x = \text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) & f'''(0) = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \\ f''''(x) = \text{sen}x = \text{sen}(x+2\pi) & f''''(0) = \text{sen}2\pi = 0 \end{array}$$

b) Substituir na fórmula da série de Mac Laurin:

$$f(x) = f(0) + \left(\frac{x^1}{1!}\right)\cdot f'(0) + \left(\frac{x^2}{2!}\right)\cdot f''(0) + \left(\frac{x^3}{3!}\right)\cdot f'''(0) + \ldots + \left(\frac{x^n}{n!}\right)\cdot f^{(n)}(0)$$

$$f(x) = \text{sen}0 + \left(\frac{x^1}{1!}\right)\cdot 1 + \left(\frac{x^2}{2!}\right)\cdot 0 + \left(\frac{x^3}{3!}\right)\cdot(-1) + \left(\frac{x^4}{4!}\right)\cdot 0 + \left(\frac{x^5}{5!}\right)\cdot 1 + \ldots\ldots$$

concluimos que:

$$\text{sen}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots\ldots$$

c) Desenvolvendo em série de potências a função y = cosx

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & f(0°) = \cos 0° = 1 \\ f'(x) = -\text{sen}x = \text{sen}(x+\pi) & f'(0) = \text{sen}\pi = 0 \\ f''(x) = -\cos x = \text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) & f''(0) = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \\ f'''(x) = \text{sen}x = \text{sen}(x+2\pi) & f'''(0) = \text{sen}2\pi = 0 \\ f''''(x) = \cos x = \text{sen}\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) & f''''(0) = \text{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1 \end{array}$$

Substituindo na fórmula da série Mac Laurin, temos:

$$f(x) = \cos 0 + \left(\frac{x^1}{1!}\right)\cdot 0 + \left(\frac{x^2}{2!}\right)\cdot(-1) + \left(\frac{x^3}{3!}\right)\cdot 0 + \left(\frac{x^4}{4!}\right)\cdot(1) + \left(\frac{x^5}{5!}\right)\cdot 0 + \ldots\ldots\ldots$$

concluimos que:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots.$$

d) Desenvolvendo em série de potência a função f(x) = e^x

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & f''(0) = 1 \end{array}$$

Substituindo na série Mac Laurin, temos:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}$$

fazendo $x = i\cdot\theta$ onde **i** é a unidade imaginária

$$e^{i\cdot\theta} = 1 + i\cdot\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^3\cdot i}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^5\cdot i}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{\theta^7\cdot i}{7!} - \frac{\theta^8}{8!} + \frac{\theta^9\cdot i}{9!} + \ldots\ldots$$

agrupando os termos, temos:

$$e^{i\cdot\theta} = \underbrace{\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{\theta^8}{8!} + \ldots\ldots\right)}_{\cos\theta} + \underbrace{\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} + \ldots.\right)}_{\text{sen}\theta}\cdot i$$

logo,

$$e^{i\cdot\theta} = \cos\theta + i\cdot\text{sen}\theta \to z = r\cdot(\cos\theta + i\cdot\text{sen}\theta) \to z = r\cdot e^{i\cdot\theta}$$

Outra maneira de demonstrar a fórmula de Euler

Vamos provar que $e^{i\cdot\alpha} = \cos\alpha + i\cdot\text{sen}\,\alpha$

Demonstração.:

Façamos $f(\alpha) = \cos\alpha + i\cdot\text{sen}\,\alpha$

Derivamos, temos:

$$\frac{df}{d\alpha} = -\text{sen}\alpha + i\cdot\cos\alpha$$

Porém:

$$\frac{df}{d\alpha} = i^2\cdot\text{sen}\alpha + i\cdot\cos\alpha$$

Mas:

$$\frac{df}{d\alpha} = i\cdot(\cos\alpha + i\cdot\text{sen}\alpha) = i\cdot f(\alpha)$$

$$\frac{1}{f(\alpha)}\cdot df = i\cdot d\alpha$$

Integrando dos dois lados, temos:

$\text{Ln}f(\alpha) = i\cdot\alpha$

Logo:

$$\log_e^{f(\alpha)} = i\cdot\alpha \to e^{i\cdot\alpha} = f(\alpha)$$

Portanto:

$e^{i\cdot\alpha} = \cos\alpha + i\cdot\text{sen}\,\alpha$

Além disso, a relação de Euler implica que uma expressão da forma $e^{x+i\cdot y}$, onde **x** e **y** são números reais, pode ser expressa por:

$$e^{x+i\cdot y} = e^x\cdot e^{i\cdot y} = e^x\cdot(\cos y + i\cdot\text{sen}y)$$

Sejam dois números complexos $z_1 = a_1 + i\cdot b_1$ e $z_2 = a_2 + i\cdot b_2$ representados em sua forma trigonométrica

$$z_1 = r_1\cdot(\cos\alpha + i\cdot\text{sen}\alpha) = r_1\cdot e^{i\cdot\alpha} \text{ e } z_2 = r_2\cdot(\cos\beta + i\cdot\text{sen}\beta) = r_2\cdot e^{i\cdot\beta}.$$

Usando as propriedades de potenciação e a fórmula de Euler, garante que

$$z_1\cdot z_2 = r_1\cdot e^{i\cdot\alpha}\cdot r_2\cdot e^{i\cdot\beta} = r_1\cdot r_2\cdot e^{i\cdot(\alpha+\beta)} = r_1\cdot r_2\left[\cos(\alpha+\beta) + i\cdot\text{sen}(\alpha+\beta)\right]$$

Usando a fórmula de Euler, podemos representar o inverso do número complexo $z = r\cdot e^{i\cdot\theta}$ por

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r\cdot e^{i\cdot\theta}} = \left(\frac{1}{r}\right)\cdot e^{-i\cdot\theta}$$

Teorema-Fórmula de Moivre (1ª)

$$(\cos\theta + i\cdot \text{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\cdot \text{sen}(n\theta).$$

Este resultado é facilmente demonstrado usando a fórmula de Euler e as regras de potenciação,

$$(\cos\theta + i\cdot \text{sen}\theta)^n = \left(e^{i\cdot\theta}\right)^n = e^{i\cdot(n\theta)} = \cos(n\theta) + i\cdot \text{sen}(n\theta)$$

Exercício Resolvido

Calcule $\left(-\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}$

Solução:

Seja $z = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, então $|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$,

com isso $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ e $\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Portanto, a forma trigonométrica será,

$z = 1\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$,

então $z^{100} = 1^{100}\left[\cos\left(\frac{200\pi}{3}\right) + i\cdot\text{sen}\left(\frac{200\pi}{3}\right)\right] =$

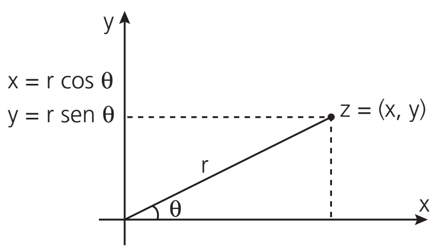
$= 1\cdot\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

Trigonometria envolvendo números complexos

Caro aluno, vamos subdividir o assunto trigonometria envolvendo número complexos em três casos.

1º caso: Funções arcos na trigonometria.

Sabemos que as coordenadas cartesianas e polares estão relacionadas por (veja a figura):



O ângulo θ é chamado argumento de **z** denotado por arg(z). Note que para $z \neq 0$, os valores de θ são determinados a partir da relação:

$$\boxed{\text{tg}\theta = \frac{y}{x}}$$

Observe que θ não é único já que, se a igualdade é verdadeira para um valor de θ, também o é para $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Mas podemos determinar θ de maneira única exigindo, por exemplo, que $0 \le \theta < 2\pi$ ou $-\pi < \theta \le \pi$.

Usando as fórmulas de adição para o seno e o cosseno. Já sabemos que $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$ e o que concluímos de novo a partir da igualdade acima é que $\arg(z_1\cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

Exercícios

01. Sabendo que o $\cos\theta = \frac{1}{5}$, então o valor da expressão $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{2^n}$ vale:

A) $\frac{2}{7}$
B) $\frac{3}{7}$
C) $\frac{4}{7}$
D) $\frac{5}{7}$
E) $\frac{6}{7}$

02. (Bulgária) O valor da expressão cos 5° + cos 77° + cos 149° + + cos 221° + cos 293° é igual a:
A) 0
B) 1
C) –1
D) 2
E) 1/2

03. (O.M.Campinense) A expressão

$$\cos\frac{4\pi}{15}\cdot\cos\frac{8\pi}{15}\cdot\cos\frac{16\pi}{15}\cdot\cos\frac{32\pi}{15}$$

é igual a:
A) 1/15
B) 1/13
C) 1/16
D) 1/14
E) 1/18

04. Consideremos o número natural n > 1 e sendo $w = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Mostre que:

$$1 + 2\cdot w + 3\cdot w^2 + 4\cdot w^3 + \ldots + n\cdot w^{n-1} = \frac{n}{w-1}$$

05. (ITA/2009) Se $a = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ e $b = \text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$, então, o número complexo $\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]^{54}$ é igual a:

A) $a + b\cdot i$
B) $-a + b\cdot i$
C) $(1 - 2a^2\cdot b^2) + ab(1 + b^2)\cdot i$
D) $a - b\cdot i$
E) $1 - 4a^2b^2 + 2ab(1 - b^2)\cdot i$

06. (O.M.Campinense/2005) Determine o menor ângulo positivo que satisfaz simultaneamente às equações:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x = 0 \\ \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = -1 \end{cases}$$

A) 18°
B) 36°
C) 54°
D) 72°
E) 82°

07. (ITA/2011) Dado $z = \frac{1}{2}\left(-1 + i \cdot \sqrt{3}\right)$, então $\sum_{n=1}^{89} z^n$ é igual a:

A) $-\frac{89}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot i$
B) – 1
C) 0
D) 1
E) $\frac{89}{6} \cdot \sqrt{3} \cdot i$

08. (ITA/2011) Dado $z = \frac{1}{2}\left(-1 + i \cdot \sqrt{3}\right)$, então $\sum_{n=1}^{89} z^n$ é igual a:

A) $-\frac{89}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot i$
B) – 1
C) 0
D) 1
E) $\frac{89}{6} \cdot \sqrt{3} \cdot i$

09. Sabendo que $\dfrac{\cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + \ldots + \cos 44°}{\operatorname{sen} 1° + \operatorname{sen} 2° + \operatorname{sen} 3° + \ldots + \operatorname{sen} 44°}$ representa um número irracional da forma $a + b\sqrt{2}$. Então, o valor de a + b é igual a:

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

10. O valor **P** na expressão P = cos 20° · cos 40° · cos 80° é igual a:

A) $\frac{1}{4}$
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{1}{8}$
D) 1
E) $\frac{1}{16}$

11. O valor da expressão $\cos^2 10° + \cos^2 50° + \cos^2 70°$ é igual a:

A) $\frac{1}{4}$
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{1}{8}$
D) $\frac{3}{4}$
E) $\frac{3}{2}$

12. (IME/2012) O valor de $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \frac{1}{2}$ é:

A) –1
B) – 0,5
C) 0
D) 0,5
E) 1

13. O valor da expressão

$$\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} \text{ é igual a:}$$

A) 1
B) $\frac{1}{2}$
C) –1
D) $-\frac{1}{2}$
E) 0

14. Sabendo que o número complexo z = a + b · i, tal que **a** e **b** são números reais com b ≠ 0. Então o valor mínimo da expressão $\dfrac{\operatorname{Im}(z^5)}{[\operatorname{Im}(z)]^5}$ é igual a:

A) – 1
B) – 2
C) – 3
D) – 4
E) – 5

15. Seja Im(z) a parte imaginária do número complexo **z**. Então o valor da expressão
$\operatorname{Im}((\cos 12° + i \cdot \operatorname{sen} 12° + \cos 48° + i \cdot \operatorname{sen} 48°)^6)$ é igual a:

Gabaritos

01	02	03	04	05
E	A	C	–	B
06	**07**	**08**	**09**	**10**
D	B	A	B	C
11	**12**	**13**	**14**	**15**
E	C	B	D	A

– Demonstração