FRENTE: MATEMÁTICA

PROFESSOR: MARCELO MENDES

EAD – ITA/IME

AULAS 22 E 23

ASSUNTO: COMBINAÇÕES

Resumo Teórico

Números Binomiais

Denomina-se número binomial todo número dado por $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ em que **n** e **p** são números inteiros não negativos e $n \geq p$.

Os números binomiais podem ser representados das seguintes formas: $\binom{n}{p}$, C^p ou $C_{n,p}$, cuja leitura é: binomial **n** sobre **p**, binomial de **n** tomados **p** a **p**, combinação de **n** objetos tomados **p** a **p**, **n** classe **p**, ou ainda, **n escolhe p**.

Exemplo 1: Resolva $C^5_{n+2} + \frac{28}{3}n$.

Solução:

$$C^5_{n+2} = \frac{28}{3}n \Rightarrow \frac{(n+2)!}{(n-3)!5!} = \frac{28n}{3} \Rightarrow$$
$$\frac{(n+2)(n+1)(n-1)(n-2)}{120} = \frac{28n}{3} \Rightarrow$$
$$(n+2)(n+1)(n-1)(n-2) =$$
$$40 \cdot 28 = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8$$

Onde n =6.

Exemplo 2: Resolva $\frac{C_{6,p}}{C_{7,p+1}} = \frac{5}{7}$

Solução:

$$\frac{C_{6,p}}{C_{7,p+1}} = \frac{5}{7} \Rightarrow 7 \cdot \frac{6!}{p!(6-p)!} = 5 \cdot \frac{7!}{(p+1)!(6-p)!} \Rightarrow$$
$$\frac{1}{p!} = \frac{5}{(p+1)!} \Rightarrow p+1=5 \Rightarrow p=4$$

Números Binomiais Complementares

Se p + q = n, então os números binomiais $\binom{n}{p} = \binom{n}{q} = \binom{n}{n-p}$ são chamados complementares.

Exemplo 3.1: Resolva $C_{15,\, x+3} = C_{15,\, 2x+1}$.

Exemplo 3.2: Calcule **y** em função de **x** sabendo que $C_{y,\, x} = C_{y,\, x-1}$.

Exemplo 3.3: Para quais valores de **n** é verificada a igualdade $\binom{n}{50} = \binom{n}{40}$.

Combinações

Uma **combinação** de **n** elementos tomados m a m, m ≤ n, é uma sequência não ordenada (a ordem não importa) de **m** desses elementos. O total dessas combinações é $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. (Por exemplo, para formar uma comissão de 3 pessoas a partir de um grupo de 10 pessoas, não importa em que ordem essas pessoas são escolhidas e, sim, o grupo formado. Para comparação, a contagem seria de arranjo se fossem escolhidos cargos (presidente, vice-presidente, secretário, por exemplo), pois a ordem seria relevante.

Exercícios

01. (IME) Dados 20 pontos do espaço, do quais não existem 4 coplanares, quantos planos ficam definidos?

02. (IME) Seja um octógono convexo. Suponha que quando todas as suas diagonais são traçadas, não haja mais que duas diagonais se intersectando no mesmo ponto. Quantos pontos de interseção (de diagonais) existem nesse octógono?

03. (ITA) Considere (P) um polígono regular de **n** lados. Suponha que os vértices de (P) determinam 2n triângulos cujos lados não são lados de (P). O valor de **n** é:
A) 6
B) 8
C) 10
D) 20
E) não existe um polígono regular com esta propriedade.

04. (IME) Determine os valores de x, y, z, r que satisfazem o sistema $\begin{matrix} C_{r+y}^{r} = \log_y x, \log_y z = 4 + \log_x z, \\ C_{r+y}^{y} = \log_x z + \log_z z, \end{matrix}$, onde C_m^p representa a combinação de **m** elementos tomados **p** a **p** e $\log_c B$ representa o logaritmo de B na base **c**.

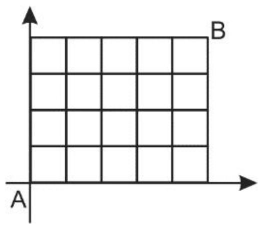
05. Mostre que o produto de quaisquer **n** números inteiros consecutivos é divisível por n!.

06. O senhor e a senhora Zeta querem um nome para seu bebê Zeta de tal maneira que seu monograma (iniciais do primeiro, segundo e terceiro nomes) esteja em ordem alfabética sem letras repetidas. Quantos são os monogramas possíveis?
A) 276
B) 300
C) 552
D) 600
E) 15600

07. (ITA) Considere uma prova com 10 questões de múltipla escolha, cada questão com 5 alternativas. Sabendo que cada questão admite uma única alternativa correta, então o número de formas possíveis para que um candidato acerte somente 7 das 10 questões é:
A) $4^4 \cdot 30$
B) $4^3 \cdot 60$
C) $5^3 \cdot 60$
D) $\binom{7}{3} \cdot 4^3$
E) $\binom{10}{7}$

08. (ITA) Considere 12 pontos distintos dispostos no plano, 5 dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outra reta no plano contém, no máximo, 2 destes pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nestes pontos?
A) 210
B) 315
C) 410
D) 415
E) 521

09. (FGV) Na figura, quantos caminhos diferentes podem ser feitos de A até B, deslocando-se uma unidade de cada vez, para cima ou para a direita?



A) 126
B) 858
C) 326
D) 954
E) 386

10. (EN) Um grupo de 8 jovens pretende sair para um passeio em dois carros (cada um com capacidade para 4 pessoas). Apenas 4 deles dirigem. O número de modos de eles escolherem seus lugares nos dois carros é igual a:
A) 10080
B) 8640
C) 4320
D) 1440
E) 720

11. (OPM) Considere um polígono convexo de **n** lados.
A) Quantos são os quadriláteros convexos que têm vértices nos vértices do polígono?
B) Quantos são, no máximo, os pontos de interseção das diagonais do polígono, internos a ele?

12. (Fuvest) Participam de um torneio de voleibol 20 times distribuídos em 4 chaves, de 5 times cada. Na 1ª fase do torneio, os times jogam entre si uma única vez (um único turno), todos contra todos em cada chave, sendo que os 2 melhores de cada chave passam para a 2ª fase. Na 2ª fase, os jogos são eliminatórios; depois de cada partida, apenas o vencedor permanece no torneio. Logo, o número de jogos necessários até que se apure o campeão do torneio é:
A) 39
B) 41
C) 43
D) 45
E) 47

13.

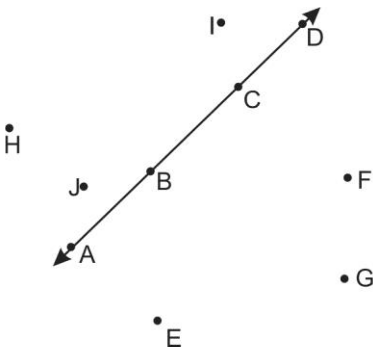
A) Usando um argumento combinatório, demonstre que o número de diagonais de um polígono convexo com **n** lados é $d_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

B) Entendendo-se por diagonal de um poliedro convexo todo segmento que liga dois vértices não pertencentes a uma mesma face, quantas diagonais possui um prisma cujas bases são polígonos de **n** lados?

14. (IME) Considere o conjunto formado por **m** bolas pretas e **n** bolas brancas. Determine o número de sequências simétricas que podem ser formadas utilizando-se todas as m + n bolas.

15. (IME) Considere uma turma com **n** alunos, numerados de 1 a **n**. Deseja-se organizar uma comissão de três alunos. De quantas maneiras pode ser formada essa comissão, de modo que não façam parte da mesma dois ou três alunos designados por números consecutivos? (Sugestão: conte o total e subtraia o número de comissões com 2 ou 3 consecutivos)

16. (Vunesp) Marcam-se, num plano, 10 pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, dos quais 4 estão sobre a mesma reta e três outros pontos quaisquer nunca estão alinhados, conforme a figura.



O número total de triângulos que podem ser formados, unindo-se três quaisquer desses pontos, é:

A) 24
B) 112
C) 116
D) 120
E) 124

17. (OPM) São dados 10 pontos distintos num plano sendo 5 pertencentes à reta **r** e os demais estão fora dela. Excetuando-se os 5 pontos sobre **r**, não existem outros 3 pontos alinhados.

A) Quantas retas distintas ficam determinadas por esses 10 pontos?

B) Admitindo-se que entre duas retas quaisquer do item anterior não exista paralelismo, quantos são os pares de retas concorrentes?

C) Nas condições do item anterior, qual é o número de pontos de interseção daquelas retas, distintos dos pontos dados?

18. Determine todos os polígonos, se existirem, em que o número de lados é igual ao número de diagonais.

GABARITO					
01	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
*	*	B	*	*	B
07	**08**	**09**	**10**	**11**	**12**
A	A	A	B	*	E
13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
*	*	*	C	*	*

Resoluções

01. $\binom{20}{3}$

02. $\binom{8}{4}$

04. r = 1; x = 8; y = 2; z = 64

05. Demonstração

06.

A) $\binom{n}{4}$

B) $\binom{n}{4}$

13.

A) Demonstração

B) n(n – 3)

14. O se mn é ímpar e $\binom{\left\lfloor \frac{m+n}{2} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}$, caso contrário.

15. $\dfrac{n^3 - 9n^2 + 26n - 24}{6}$

17.

A) 36
B) 630
C) 375

18. Pentágono

SUPERVISOR/DIRETOR: MARCELO PENA – AUTOR: MARCELO MENDES
DIG.: VICENTINA – REV.: RITA DE CÁSSIA