26 BINÔMIO DE NEWTON

Seja n um número natural. Já conhecemos o desenvolvimento de $(a + b)^n$ para alguns valores de n:

- $n = 0 \Rightarrow (a + b)^0 = 1$
- $n = 1 \Rightarrow (a + b)^1 = a + b$
- $n = 2 \Rightarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $n = 3 \Rightarrow (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

O desenvolvimento de $(a + b)^n$ para $n > 3$ pode ser obtido com a aplicação dos desenvolvimentos acima e das propriedades das potências. Vejamos:

- $(a + b)^4 = (a + b) \cdot (a + b)^3 =$
  $= (a + b) \cdot (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) =$
  $= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $(a + b)^5 = (a + b) \cdot (a + b)^4 =$ etc.
- em geral, $(a + b)^n = (a + b) \cdot (a + b)^{n-1}$

Essa técnica, porém, pode conduzir a cálculos muito trabalhosos.

Apresentaremos neste capítulo alguns conceitos e ferramentas que nos permitirão, ao final, fazer o desenvolvimento de $(a + b)^n$ com menos trabalho.

Coeficientes binomiais

Definição

Dados dois números naturais, n e p, com $n \geqslant p$, definimos o coeficiente binomial n sobre p e indicamos por $\binom{n}{p}$ o número $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_{n,\,p}$.

O número n é dito numerador e o número p é chamado denominador de $\binom{n}{p}$.

Desse modo, temos, por exemplo:

- $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{5!}{3!\,2!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\,2} = 10$
- $\binom{10}{7} = \dfrac{10!}{7!\,3!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}\,3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$

Casos particulares

- Quando $p = 0$, temos $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!\,n!} = 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

  Assim, por exemplo, $\binom{4}{0} = 1$ e $\binom{20}{0} = 1$.

- Quando $p = 1$, temos $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!\,(n-1)!} =$
  $= \dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

  Assim, por exemplo, $\binom{5}{1} = 5$ e $\binom{9}{1} = 9$.

- Quando $p = n$, temos $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!\,0!} = 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

  Assim, por exemplo, $\binom{6}{6} = 1$ e $\binom{14}{14} = 1$.

Como veremos, os coeficientes binomiais são importantes no estudo do desenvolvimento de $(a + b)^n$.

Binomiais complementares

Dizemos que dois coeficientes binomiais de mesmo numerador são complementares quando a soma de seus denominadores é igual ao numerador, isto é:

$\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ são complementares se $p + q = n$

São binomiais complementares, por exemplo, $\binom{8}{2}$ e $\binom{8}{6}$; $\binom{9}{4}$ e $\binom{9}{5}$; $\binom{11}{4}$ e $\binom{11}{7}$.

Propriedade

Dois coeficientes binomiais complementares são iguais.

$$\boxed{\text{Para } p + q = n \text{, tem-se } \binom{n}{p} = \binom{n}{q}.}$$

A justificativa dessa propriedade é a que segue:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-q} = \frac{n!}{(n-q)!\,[n-(n-q)]!} =$$

$$= \frac{n!}{q!\,(n-q)!} = \binom{n}{q}$$

Propriedade

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{q} \iff (p = q \text{ ou } p + q = n)}$$

sendo n, p e q números naturais, tais que $n \geqslant p$ e $n \geqslant q$.

exemplo 1

Para que ocorra a igualdade $\binom{6}{x} = \binom{6}{2}$, devemos considerar dois casos: $\begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x + 2 = 6 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$

exercícios

1. Calcule:

a) $\binom{9}{2}$ 36

b) $\binom{13}{3}$

c) $\binom{6}{5}$

d) $\binom{4}{2} + \binom{4}{3}$

e) $\binom{6}{3}$

f) $\binom{5}{5} + \binom{4}{0} - 2 \cdot \binom{5}{1}$

2. Em cada caso, determine m:

a) $\binom{17}{2m} = \binom{17}{5m - 11}$

b) $\binom{15}{3m} = \binom{15}{m^2 + 5}$

3. (Fuvest-SP) Lembrando que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$:

a) calcule $\binom{6}{4}$.

b) simplifique a fração $\dfrac{\binom{12}{4}}{\binom{12}{5}}$.

c) determine os inteiros n e p de modo que $\dfrac{\binom{n}{p}}{1} = \dfrac{\binom{n}{p+1}}{2} = \dfrac{\binom{n}{p+2}}{3}$.

Triângulo de Pascal/ Tartaglia

Os coeficientes binomiais podem ser dispostos em uma tabela chamada triângulo de Pascal ou de Tartaglia. Na verdade, vários matemáticos já haviam estudado o triângulo aritmético, mas talvez os mais famosos tenham sido o italiano Tartaglia, no século XVI, e o francês Blaise Pascal, no século XVII.

No triângulo, os coeficientes de mesmo numerador agrupam-se em uma mesma linha e coeficientes de mesmo denominador agrupam-se em uma mesma coluna.

linha 0	$\binom{0}{0}$
linha 1	$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$
linha 2	$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$
linha 3	$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$
linha 4	$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$
⋮	
linha k	$\binom{k}{0}\binom{k}{1}\binom{k}{2}\binom{k}{3}\binom{k}{4}\cdots\binom{k}{k}$

Notemos que o termo linha k significa a linha de numerador k.

Calculando os valores dos coeficientes, obtemos outra representação para o triângulo:

$$\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\vdots
\end{array}$$

É fácil perceber que o triângulo de Pascal apresenta várias propriedades. Vamos conhecê-las.

Propriedades

- Toda linha começa e termina por 1.

  De fato, o primeiro elemento de uma linha qualquer é $\binom{k}{0} = 1, \forall\, k \in \mathbb{N}$, e o último elemento dessa linha é $\binom{k}{k} = 1, \forall\, k \in \mathbb{N}$.

- Em uma mesma linha, os coeficientes binomiais eqüidistantes dos extremos são iguais. Vejamos, por exemplo:

linha 5:

$$\begin{array}{cccccc}
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\| & \| & \| & \| & \| & \| \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

iguais

iguais

linha 7:

$$\begin{array}{cccccccc}
\binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7} \\
\| & \| & \| & \| & \| & \| & \| & \| \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1
\end{array}$$

iguais

iguais

A justificativa dessa propriedade está no fato de que esses coeficientes binomiais são complementares e, portanto, iguais.

- A partir da linha 2, notamos que cada elemento X (com exceção do primeiro e do último) é igual à soma de dois elementos da linha anterior, a saber: o elemento imediatamente acima de X e o anterior a este. Vejamos:

$$\begin{array}{llllll}
1 \\
\underbrace{1 \; + \; 1} \\
1 & \hookrightarrow 2 & 1 \\
1 & \underbrace{3 \; + \; 3} & & 1 \\
1 & 4 & \hookrightarrow 6 & \underbrace{4 \; + \; 1} \\
1 & 5 & 10 & 10 & \hookrightarrow 5 & 1
\end{array}$$

Essa propriedade é conhecida como relação de Stifel e pode ser generalizada por:

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1},\ n \geqslant p}$$

É importante perceber que o 1º membro da igualdade acima representa um elemento genérico (linha n e coluna p) do triângulo; o 2º membro representa a soma dos dois elementos da linha anterior (linha $n - 1$), um da mesma coluna p e o outro da coluna anterior $p - 1$.

exemplo 2

Vamos calcular o valor de:

$$y = \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{9}{5}$$

Para calcularmos o valor de y não é preciso calcular os três coeficientes binominais. Basta aplicar a relação de Stifel duas vezes. Assim:

$$\binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \binom{9}{4} \quad (*)$$

Substituindo (*), temos:

$$y = \binom{9}{4} + \binom{9}{5} = \binom{10}{5}$$

Logo:

$$y = \frac{10!}{5!\,5!} = 252$$

► A soma dos elementos da linha de numerador k é igual a 2^k.

Temos:

							soma dos elementos da linha	
linha 0	1					$\rightarrow$	1	$= 2^0$
linha 1	1	1				$\rightarrow$	1 + 1	$= 2^1$
linha 2	1	2	1			$\rightarrow$	1 + 2 + 1	$= 2^2$
linha 3	1	3	3	1		$\rightarrow$	1 + 3 + 3 + 1	$= 2^3$
⋮								
linha k:	$\binom{k}{0}$	$\binom{k}{1}$	...	$\binom{k}{k}$		$\rightarrow$	$\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+...+\binom{k}{k}$	$= 2^k$

A soma $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+...+\binom{5}{5}$ vale $2^5 = 32$; observe que não é preciso calcular separadamente cada coeficiente.

A demonstração:

$$\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+...+\binom{k}{k}=2^k$$

pode ser feita utilizando-se o desenvolvimento de $(a + b)^n$ (binômio de Newton), como veremos um pouco adiante neste capítulo.

exercícios

4. Aplicando a relação de Stifel, reduza cada soma seguinte a um único coeficiente binomial. (Não é necessário fazer o cálculo final.)

a) $\binom{11}{3}+\binom{11}{4}$

b) $\binom{21}{8}+\binom{21}{9}$

c) $\binom{18}{3}+\binom{18}{4}+\binom{19}{5}$

d) $\binom{21}{8}+\binom{22}{10}+\binom{21}{9}+\binom{23}{11}$

e) $\binom{27}{21}+\binom{27}{5}$

5. Observe a seqüência de números a seguir, que corresponde a certa linha do triângulo de Pascal:

1 8 28 56 70 56 28 8 1

a 9 b 84 c d 84 e 9 1

f g

a) Determine a, b, c, d, e, f e g.

b) Calcule a soma dos elementos da linha dada. Qual é essa linha?

6. Calcule o valor de:

a) $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+...+\binom{4}{4}$

b) $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+...+\binom{5}{4}$

c) $\binom{10}{0}-\binom{9}{0}+\binom{10}{1}-\binom{9}{1}+...+$
$+\binom{10}{9}-\binom{9}{9}+\binom{10}{10}$

d) $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}$

Somatório

Vamos conhecer um importante símbolo da linguagem matemática: o somatório, indicado pela letra grega $\sum$ (lê-se "sigma"). Ele representa a soma de um certo número de parcelas com alguma característica comum.

exemplo 3

O símbolo $\sum_{n=0}^{3} n^3$ (lê-se "somatório de n^3 para n variando de 0 a 3") é compreendido da seguinte maneira: calculamos os valores da expressão n^3 para n = 0, 1, 2 e 3 e somamos os valores encontrados. Assim:

$$\sum_{n=0}^{3} n^3 = \underbrace{0^3}_{n=0} + \underbrace{1^3}_{n=1} + \underbrace{2^3}_{n=2} + \underbrace{3^3}_{n=3} =$$
$$= 0 + 1 + 8 + 27 = 36$$

exemplo 4

Vamos calcular $\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k}$.

A soma pedida é:

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + ... + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 2^6 = 64$$

pela última propriedade apresentada do triângulo de Pascal.

exercícios

7. Calcule o valor de $\sum_{i=1}^{4} (i + 1)$.

8. Qual é o valor de $\sum_{i=0}^{2} \left(\frac{1}{i^2 + 1}\right)$?

9. Calcule o valor de $\sum_{n=4}^{6} (n - 3)^2$.

10. Se $x = \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i}$ e $y = \sum_{n=0}^{3} \binom{3}{n}$, determine o valor de $x - y$.

11. Resolva a equação na variável n: $\sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i} = 29$.

12. Determine o valor da constante p, sabendo que $\sum_{n=2}^{5} (n^2 + p) = 78$.

Desenvolvimento de $(a + b)^n$

Vamos rever os desenvolvimentos de $(a + b)^n$ para alguns valores de n apresentados no início do capítulo:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \longrightarrow$ 3 termos

  Os expoentes de a decrescem de 2 até zero e os expoentes de b aumentam desde zero até 2;
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \longrightarrow$ 4 termos

  Os expoentes de a decrescem de 3 até zero e os expoentes de b aumentam desde zero até 3;
- $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \longrightarrow$ 5 termos

  Os expoentes de a decrescem de 4 até zero e os expoentes de b aumentam desde zero até 4.

Essas observações sugerem que para a parte literal do desenvolvimento de $(a + b)^n$, $n \in \mathbb{N}$, temos:

I. $\underbrace{a^n b^0}_{1º\text{ termo}}$; $\underbrace{a^{n-1} b^1}_{2º\text{ termo}}$; $\underbrace{a^{n-2} b^2}_{3º\text{ termo}}$; ... ;

$\underbrace{a^1 b^{n-1}}_{n\text{-ésimo termo}}$; $\underbrace{a^0 b^n}_{(n+1)\text{-ésimo termo}}$

II. Os coeficientes que aparecem nos desenvolvimentos anteriores correspondem, ordenadamente, às linhas do triângulo de Pascal:

$(a + b)^1 = 1a + 1b$	linha 1: 1 1
$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$	linha 2: 1 2 1
$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$	linha 3: 1 3 3 1

Dessa maneira, para determinar os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$, basta considerar a linha n (linha de numerador n) do triângulo de Pascal.

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{\substack{\text{coeficiente do}\\ 1^{\text{o}}\text{ termo}}} \quad \underbrace{\binom{n}{1}}_{\substack{\text{coeficiente do}\\ 2^{\text{o}}\text{ termo}}} \quad \ldots \quad \underbrace{\binom{n}{n-1}}_{\substack{\text{coeficiente do}\\ \text{n-ésimo termo}}} \quad \underbrace{\binom{n}{n}}_{\substack{\text{coeficiente do}\\ (n+1)\text{-ésimo termo}}}$$

Com os coeficientes obtidos em II e a parte literal obtida em I, podemos enunciar:

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n}$$

em que a e b são reais e n é natural.

Utilizando o símbolo de somatório, podemos escrever:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

que é o desenvolvimento do chamado binômio de Newton.

exemplo 5

Vamos desenvolver $(3x+2)^4$ usando o desenvolvimento binomial.

Temos:

$$(3x+2)^4 = \binom{4}{0}(3x)^4 \cdot 2^0 + \binom{4}{1}(3x)^3 \cdot 2^1 + \binom{4}{2}(3x)^2 \cdot 2^2 + \binom{4}{3}(3x)^1 \cdot 2^3 + \binom{4}{4}(3x)^0 \cdot 2^4$$

isto é:

$$(3x+2)^4 = 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16$$

observação

O desenvolvimento binomial continua válido se quisermos obter a expansão de $(a-b)^n$. Basta notar que:

$$(a-b)^n = [a + (-b)]^n$$

$$[a+(-b)]^n = \binom{n}{0} a^n \cdot (-b)^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot (-b)^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot (-b)^2 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 \cdot (-b)^n$$

Cada um dos termos acima contém potências do tipo:

$$(-b)^k = \begin{cases} b^k, \text{ se } k \text{ é par} \\ -b^k, \text{ se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Assim, os sinais dos termos do desenvolvimento de $(a-b)^n$ se alternam, a partir do 1º termo, que é positivo.

Desse modo, baseando-se no exemplo 5, podemos dizer que:

$$(3x-2)^4 = 81x^4 - 216x^3 + 216x^2 - 96x + 16$$

exemplo 6

Qual é o valor de $\sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} \cdot 2^i$?

Desenvolvendo o somatório, temos:

$$\sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} \cdot 2^i = \binom{5}{0} \cdot 2^0 + \binom{5}{1} \cdot 2^1 + \ldots + \binom{5}{5} \cdot 2^5$$

Para que essa expressão represente o desenvolvimento de um binômio de Newton devemos notar que em cada um dos termos acima também aparecem potências de 1, isto é:

$$\sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} \cdot 2^i =$$

$$= \binom{5}{0} \cdot 1^5 \cdot 2^0 + \binom{5}{1} \cdot 1^4 \cdot 2^1 + \ldots + \binom{5}{5} \cdot 1^0 \cdot 2^5$$

que é exatamente igual a $(1+2)^5 = 3^5 = 243$.

exemplo 7

Qual é a soma dos coeficientes dos termos no desenvolvimento de $(3x^2 + 2y)^4$?

Como sabemos, o desenvolvimento binomial para *x* e *y* quaisquer é:

$$(3x^2 + 2y)^4 = (3x^2)^4 + 4 \cdot (3x^2)^3 \cdot 2y + 6 \cdot (3x^2)^2 \cdot (2y)^2 + 4 \cdot (3x^2) \cdot (2y)^3 + (2y)^4$$

Para sabermos a soma dos coeficientes desses cinco termos, não é necessário efetuar todos os cálculos. Basta notar que, no 2º membro da expressão acima, a soma dos coeficientes pode ser obtida fazendo-se $x = y = 1$. De fato:

$$\underbrace{(3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1)^4}_{5^4} =$$

$$= \underbrace{3^4 + 4 \cdot 3^3 \cdot 2 + 6 \cdot 3^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2^3 + 2^4}_{\text{soma dos coeficientes}}$$

Logo, a soma pedida é 625.

exercícios

13. Usando a expansão do binômio de Newton, desenvolva:

a) $(x+2)^5$ b) $(3x+4y)^4$ c) $(1-2x)^5$

14. Utilizando a expansão binomial, desenvolva:

a) $\left(3b^2 - \frac{1}{b}\right)^4$

b) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$

c) $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4, x > 0$

15. Sabendo que $a > b$, resolva o sistema:

$$\begin{cases} a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 = 81 \\ a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = 1\,024 \end{cases}$$

16. Encontre o valor de:

$$99^5 + 5 \cdot 99^4 + 10 \cdot 99^3 + 10 \cdot 99^2 + 5 \cdot 99 + 1$$

17. Calcule:

a) $\sum_{n=0}^{5} \binom{5}{n} \cdot 2^{5-n} \cdot 3^n$

b) $\sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{6-i} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^i$

c) $\sum_{i=0}^{8} \binom{8}{i} \cdot 3^{8-i} \cdot (-2)^i$

d) $\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} \cdot 3^i$

e) $\sum_{n=1}^{8} \binom{8}{n} \cdot 2^n$

18. Determine o valor da soma dos coeficientes do desenvolvimento de:

a) $(x+3y)^5$

b) $(6x^2 - 4x^3)^8$

c) $(x^8 - 1)^{10}$

d) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^4$

19. A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x+3y)^n$ é 1 024. Qual é o valor de *n*?

20. Usando o binômio de Newton, desenvolva, para $x > 0$:

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$$

Termo geral do binômio

Muitas vezes estamos interessados em conhecer apenas um termo específico do desenvolvimento de $(a + b)^n$, sem precisar escrever todos os seus termos. Para isso, é necessário encontrarmos uma expressão que possa representar qualquer termo do desenvolvimento de $(a + b)^n$ e, a partir dela, determinarmos o termo procurado.

Já vimos que:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n} a^n b^n$$

O termo $\binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ é chamado termo geral do binômio, pois, atribuindo valores para *k* (k = 0, 1, 2, ..., n), obtemos todos os termos do desenvolvimento.

observações

- Na expressão do termo geral, o expoente de *a* é sempre dado pela diferença entre o numerador e o denominador do coeficiente binomial e o expoente de *b* é igual ao denominador desse coeficiente.
- Na expressão do termo geral, o 1º termo do desenvolvimento é obtido fazendo-se k = 0; o 2º termo é obtido fazendo-se k = 1; e assim por diante.

Assim, se quisermos determinar o p-ésimo termo basta fazer $k = p - 1$.

exemplo 8

No desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{3}{y}\right)^8$, segundo potências decrescentes de *x*, é possível sabermos qual é o termo que contém a potência x^{10} sem conhecermos todo o desenvolvimento.

O termo geral desse binômio é:

$$\binom{8}{k} \cdot (x^2)^{8-k} \cdot \left(\frac{3}{y}\right)^k = \binom{8}{k} \cdot x^{16-2k} \cdot \frac{3^k}{y^k}, \text{ para}$$

$k = 0, 1, 2, \dots, 8$ (*)

A fim de determinar o termo que contém x^{10}, basta fazer:

$16 - 2k = 10 \Rightarrow k = 3$ (convém em (*))

Logo, o termo pedido é:

$$\binom{8}{3} \cdot \frac{x^4 \cdot 3^3}{y^3} = \frac{1\,512x^4}{y^3}$$

Observe que esse termo ocupa a 4ª posição do desenvolvimento.

exemplo 9

Vamos verificar se há termo independente de *x* no desenvolvimento de $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^9$.

O termo geral é:

$$\binom{9}{k} \cdot (\sqrt{x})^{9-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^k = \binom{9}{k} \cdot x^{\frac{9-k}{2}} \cdot (-1)^k \cdot \frac{1}{x^k} =$$

$$= \binom{9}{k} \cdot (-1)^k \cdot x^{\frac{9-3k}{2}}, \text{ para } k = 0, 1, \dots, 9$$

O termo independente de *x* é obtido atribuindo-se zero ao seu expoente, isto é:

$$\frac{9-3k}{2} = 0 \Rightarrow k = 3$$

Como k = 3 é natural e menor que 9, concluímos que existe termo independente de *x* (4º termo) e seu valor é $\binom{9}{3} \cdot (-1)^3 = -84$.

exercícios

21. No desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{2}{x^3}\right)^{10}$, determine:

a) o termo central;
b) o coeficiente do termo em *x*;
c) o termo independente de *x*.

22. No desenvolvimento de $\left(\frac{2x}{3} + y^2\right)^8$, segundo potências decrescentes de *x*, determine:

a) o 3º termo; b) o 8º termo.

23. No desenvolvimento de $(1 + \sqrt{x})^{10}$, qual é o coeficiente de x^2?

24. No desenvolvimento de $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^{22}$, determine:

a) o coeficiente do termo em x^{18};
b) o termo independente de x.

25. No desenvolvimento de $\left(x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$, determine o coeficiente do termo:

a) em x^{14};
b) em x^9;
c) em x^{-6};
d) independente de x.

26. No desenvolvimento de $\left(4x-\frac{3}{x}\right)^{n}$, a razão entre o 3º termo e o 4º termo vale $-\frac{x^2}{2}$. Qual é o valor de n?

27. Dado o binômio $\left(x^3+\frac{p}{x}\right)^{n}$, determine os valores de n e p a fim de que o termo central ocupe o 6º lugar e seja dado por $8\,064x^{10}$.

28. (UE-RJ) Na potência $\left(x+\frac{1}{x^5}\right)^{n}$, n é um número natural menor do que 100. Determine o maior valor de n, de modo que o desenvolvimento dessa potência tenha um termo independente de x.

29. Determine o número de termos racionais no desenvolvimento de:

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^8$
b) $(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})^{15}$

testes de vestibulares

1. (Unicap-PE) Considere o binômio $(x + 2)^6$. Atribua verdadeiro (V) ou falso (F) às seguintes afirmações:

a) O desenvolvimento do binômio é um polinômio composto por 6 monômios.
b) O monômio $60x^4$ pertence à expansão binomial.
c) A expansão binomial possui um monômio cujo coeficiente é maior que 200.
d) Na expansão binomial, todos os coeficientes são divisíveis por 2.
e) A soma dos coeficientes do primeiro e último termo é um número múltiplo de 5.

2. (UCDB-MS) Qual é o coeficiente numérico do termo que contém o fator y^5 no desenvolvimento binomial de $\left(x^2+\frac{1}{2}y\right)^{8}$?

a) $\frac{7}{4}$
b) $\frac{1}{32}$
c) 28
d) 56
e) 210

3. (Unifor-CE) Por uma das propriedades do triângulo de Pascal, a soma $\binom{50}{20}+\binom{50}{21}+\binom{51}{22}+\binom{52}{23}$ é igual a:

a) $\binom{51}{21}$
b) $\binom{51}{22}$
c) $\binom{53}{23}$
d) $\binom{52}{21}$
e) $\binom{52}{22}$

4. (PUC-RJ) O coeficiente de a^{13} no binômio $(a + 2)^{15}$ é:

a) 105
b) 210
c) 360
d) 420
e) 480

5. (FGV-SP) Sabendo que:

- x e y são números positivos
- $x - y = 1$
- $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = 16$

podemos concluir que:

a) $x=\frac{7}{6}$
b) $x=\frac{6}{5}$
c) $x=\frac{5}{4}$
d) $x=\frac{4}{3}$
e) $x=\frac{3}{2}$

6. (Puccamp-SP) Os estudiosos das obras de Isaac Newton julgam que ele foi a inteligência suprema que a raça humana produziu. O binômio da forma $(x + a)^n$ é denominado, em sua homenagem, binômio de Newton. No desenvolvimento de $(x + 2)^8$ segundo as potências decrescentes de x, o coeficiente do termo central é igual a:

a) 70
b) 120
c) 140
d) 280
e) 1 120

7. (FGV-SP) A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(2x + y)^5$ é igual a:

a) 81
b) 128
c) 243
d) 512
e) 729

8. (U. F. Santa Maria-RS) Desenvolvendo o binômio $(2x - 1)^8$, segundo potências decrescentes de x, o quociente entre o 4º e o 3º termos é:

a) $-4x$
b) $-x$
c) x
d) $-\frac{1}{x}$
e) $4x$

9. (Ucsal-BA) O 5º termo do desenvolvimento do binômio $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$, segundo as potências crescentes de x, é $70x^4$. Nessas condições, a soma $\binom{n+1}{4} + \binom{n+1}{5}$ é igual a:

a) 84
b) 210
c) 252
d) 386
e) 462

10. (Unit-SE) Seja o binômio $\left(2x^3 + \frac{k}{x^5}\right)^8$, em que k é um número real. Para que no desenvolvimento desse binômio o termo independente de x seja 224, o valor de k deve ser:

a) 4
b) 2
c) 1
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{1}{4}$

11. (Udesc-SC) O valor de n, para que o número de combinações de n elementos tomados dois a dois seja igual ao número de combinações de n elementos tomados quatro a quatro, é:

a) 4
b) 7
c) 5
d) 8
e) 6

12. (UF-MA) No binômio $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$, a soma dos coeficientes dos três primeiros termos é igual a 37. O termo central do desenvolvimento do binômio é igual a:

a) $56x^8$
b) $70x^{-4}$
c) $56x^4$
d) $56x^{-4}$
e) $70x^4$

13. (UF-MA) No desenvolvimento da expressão $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$, o termo independente de x é:

a) -20
b) 20
c) 15
d) -15
e) 6

14. (UF-CE) Se $\sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} 3^p = 256$, então o valor de m é:

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

15. (ESPM-SP) A média aritmética dos coeficientes numéricos do desenvolvimento do binômio $(x + y)^{31}$ é igual a:

a) 8^8
b) 4^{14}
c) 4^{13}
d) 8^7
e) 2^{25}

16. (Cefet-PR) Se o termo médio do desenvolvimento de $\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + a^2\right)^6$ é $20 \cdot 2^{-9}$, o valor de a será:

a) $\sqrt[3]{2}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\sqrt{3}$
e) 2

17. (Mackenzie-SP) Conhecido o desenvolvimento de $(1 + x)^n$, vê-se que $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + 8\binom{n}{3} + \ldots + 2^n\binom{n}{n}$ é:

a) 2^n
b) 3^n
c) 4^n
d) $32n$
e) $64n$

desafios

1. (UE-RJ) Em uma barraca de frutas, as laranjas são arrumadas em camadas retangulares, obedecendo à seguinte disposição: uma camada de duas laranjas encaixa-se sobre uma camada de seis; essa camada de seis encaixa-se sobre outra de doze; e assim por diante. Sabe-se que a soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Pascal pode ser calculada pela fórmula $C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \ldots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$, na qual n e p são números naturais, $n \geq p$ e C_n^p corresponde ao número de combinações simples de n elementos tomados p a p. Com base nessas informações, calcule:

a) a soma $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 \ldots C_{18}^2$;
b) o número total de laranjas que compõe quinze camadas.

2. Utilizando o binômio de Newton, mostre que $(3{,}05)^8$ é maior que 7 485.

3. Uma empresa tem n diretores entre os quais há um casal. Oito deles serão selecionados para participar de um treinamento no exterior. O casal, entretanto, só participará do treinamento se ambos forem convocados. Sabendo que o número de escolhas distintas que incluem o casal é igual ao número de escolhas que o excluem, determine o valor de n.