LeYa

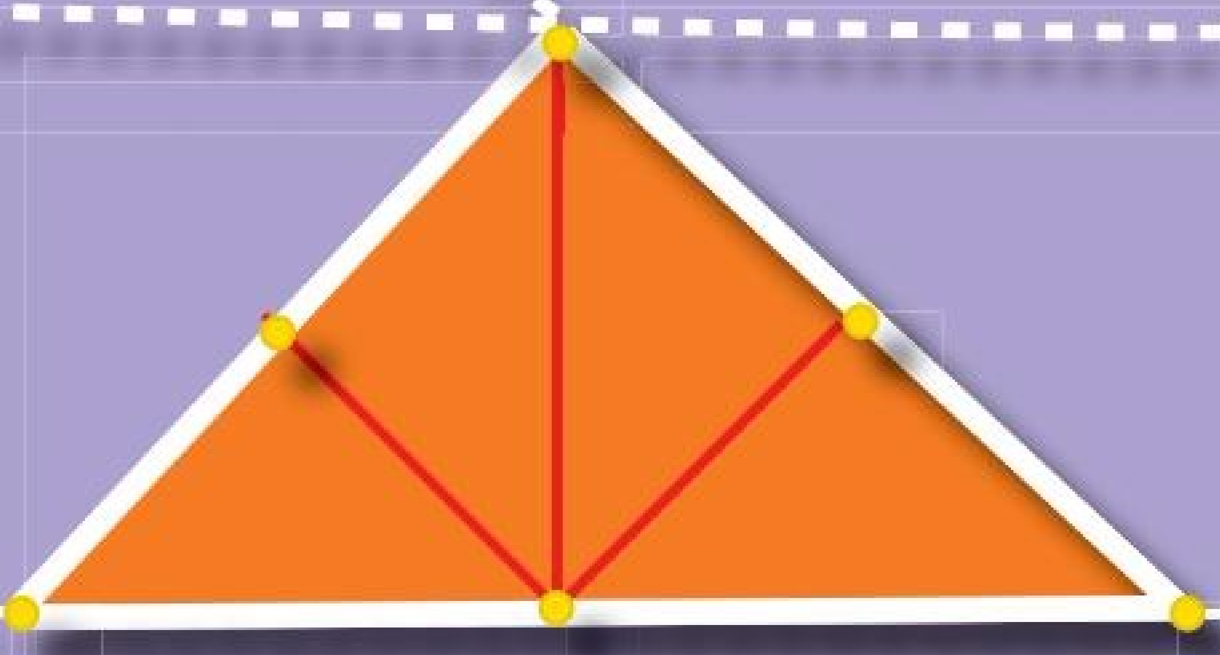
MATEMÁTICA

» RODRIGO **BALESTRI**

MATEMÁTICA 2

INTERAÇÃO E TECNOLOGIA

MANUAL DO PROFESSOR



LeYa

MATEMÁTICA

» RODRIGO DIAS BALESTRI

Professor licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL-PR).
Especialista em Educação Matemática pela UEL-PR.
Especialista em Física para o Novo Ensino Médio pela UEL-PR.
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL-PR.
Atua como professor da rede pública no Ensino Fundamental e Ensino Médio no estado do Paraná.
Autor de livros didáticos para o Ensino Fundamental e Ensino Médio.

MATEMÁTICA 2

INTERAÇÃO E TECNOLOGIA

MANUAL DO PROFESSOR

São Paulo • 2ª edição • 2016

Matemática: interação e tecnologia – Volume 2

Direção editorial
Monica Vendramin

Coordenação editorial
Viviane Mendes Gonçalves

Colaboração técnico-pedagógica
Eduardo Wagner
Túlio Oliveira de Carvalho

Coordenação de arte
Thaís Ometto
Imagem de capa:
G. Jackson/ Arcaid/ Corbis/ Fotoarena

Edição de arte
Renné Ramos

Gerência de revisão
Miriam de Carvalho Abões

Assistência de coordenação de revisão
Cláudia Renata Costa Colognori

Produção editorial
Scriba Projetos Editoriais

Assistência editorial
André Luiz Steigenberger
Fátima Gomes Machado Vizacaro
Paulo M. Krzyzanowski

Revisão
Shirley Gomes
Viviane Mendes

Projeto gráfico
Eduardo Carriça

Diagramação
Fernanda Miyabe Lantmann
Amanda Alves

Iconografia
Alaíde Stein

Ilustrações
Camila Carmona
Carlos Nascimento
Eduardo C.
Gilberto Alicio
Henrique Nakano
Renan Oliveira
Sergio L. Filho

Cartografia
Edson Bellusci

Título original da obra:
Matemática: interação e tecnologia – Volume 2
São Paulo – 2ª edição – 2016

Leya
Av. Angélica, 2.318 – 11º andar – Consolação
CEP 01228-200 – São Paulo – SP – Brasil
Fone + 55 11 3129-5448
Fax + 55 11 3129-5448
www.leya.com.br
leyaeducacao@leya.com

ISBN 978-85-451-0350-9 (aluno)
ISBN 978-85-451-0325-7 (professor)

Impressão e acabamento

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Ficha elaborada por: Tereza Cristina Barros – CRB-8/7410

Balestri, Rodrigo
Matemática : interação e tecnologia, volume 2 / Rodrigo Balestri. -- 2. ed. -- São Paulo : Leya, 2016.

ISBN 978-85-451-0350-9 (aluno)
ISBN 978-85-451-0325-7 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Título.

04.04/005-2016 CDD-510.7

Índice para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

APRESENTAÇÃO

A Matemática está presente em várias situações do dia a dia e, muitas vezes, nem percebemos. Por exemplo, admirar uma obra de arte, observar a forma de um objeto ou de uma construção, conferir o troco, utilizar uma balança, planejar uma viagem, interpretar um gráfico de uma reportagem ou preparar uma receita são apenas algumas ações que envolvem ideias matemáticas. Compreendendo essas ideias, podemos utilizá-las para melhor entender o mundo e a realidade a nossa volta, tornando-nos pessoas críticas e participativas em sociedade.

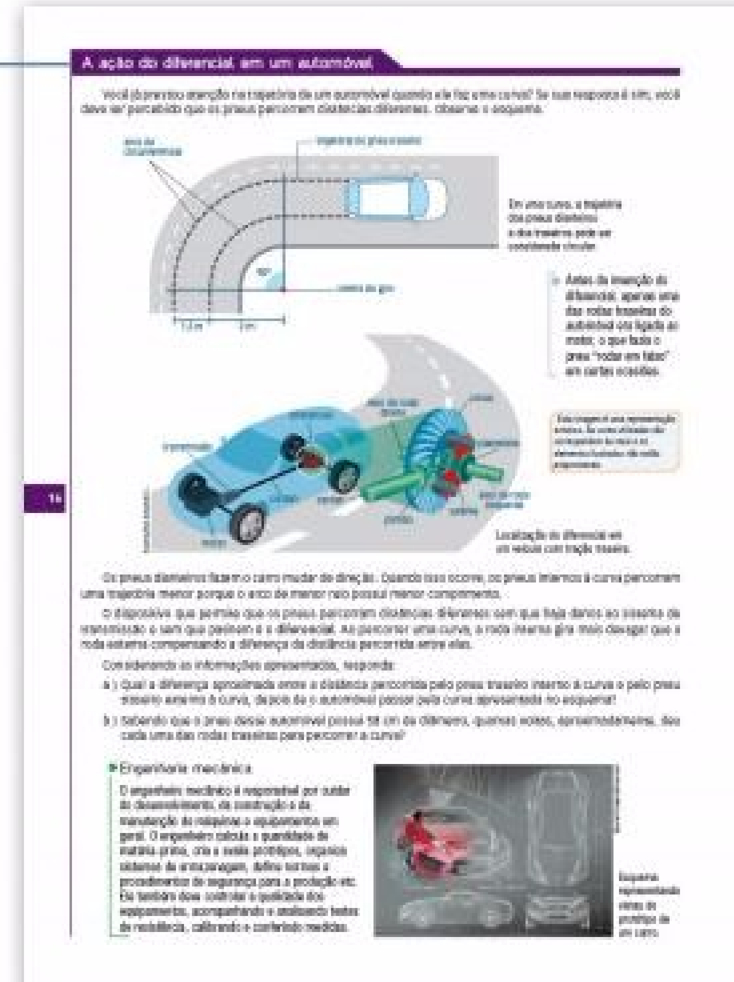
Essa coleção foi elaborada com o cuidado de estabelecer relações entre os conteúdos matemáticos e entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. Essas relações estão presentes tanto nas teorias e atividades quanto nas diversas seções.

Espero que este livro o auxilie a compreender melhor a Matemática. Para isso, é preciso comprometimento com os estudos e persistência perante as dificuldades, o que o fará perceber o quanto é gratificante superá-las. Além disso, seja um aluno crítico, argumente e levante hipóteses, dê sua opinião e converse com seus colegas e professor(a) acerca das soluções das atividades.

Espero que você utilize este livro com dedicação e alegria, e que ele contribua em sua formação como cidadão e em sua preparação para ingressar no Ensino Superior.

Desejo a você, aluno(a), sucesso em seus estudos!

O autor

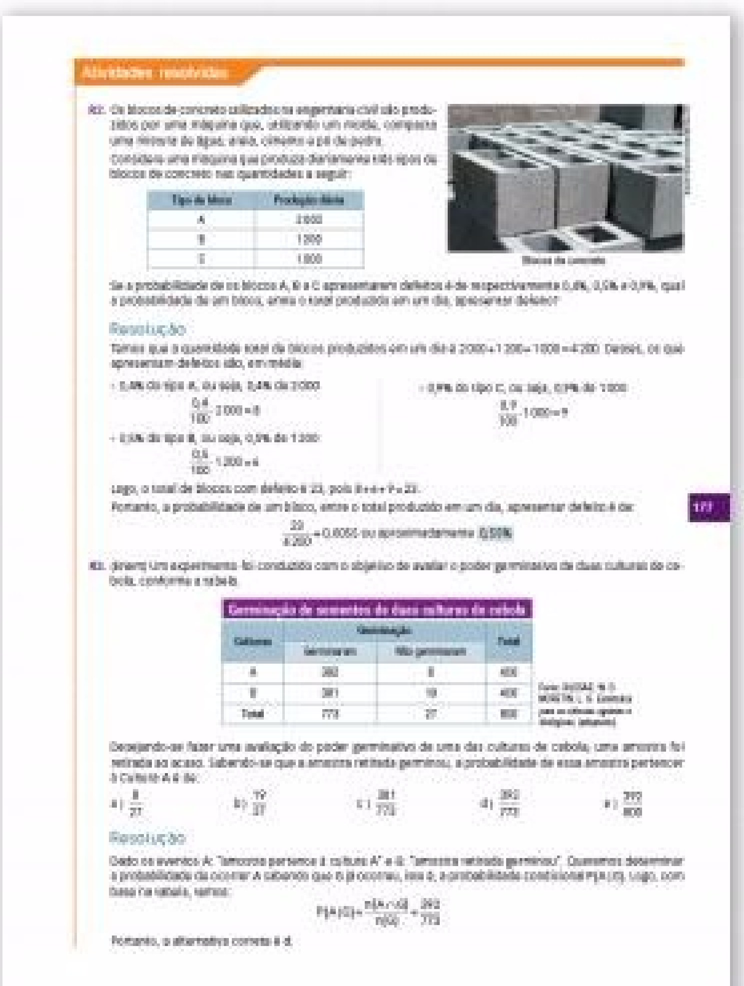


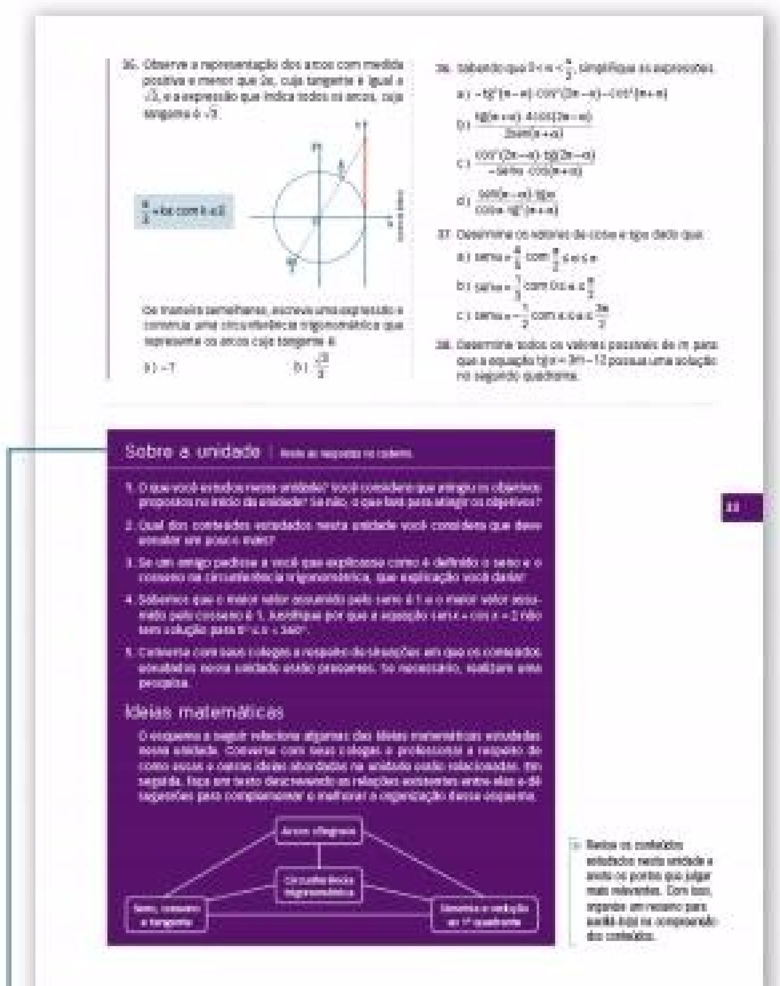
... as **Páginas de abertura**, que abordam temas relacionados ao conteúdo que será apresentado.

... os **Objetivos**.

... **atividades especiais**, nas quais poderão ser utilizados instrumentos como calculadora e computador.

... as páginas de atividades, com as seções **Atividades resolvidas** e **Atividades**.





... **atividades com destaque**, que aparecerão no decorrer das páginas.

... a seção **Sobre a unidade**, uma oportunidade para que você realize uma autoavaliação.

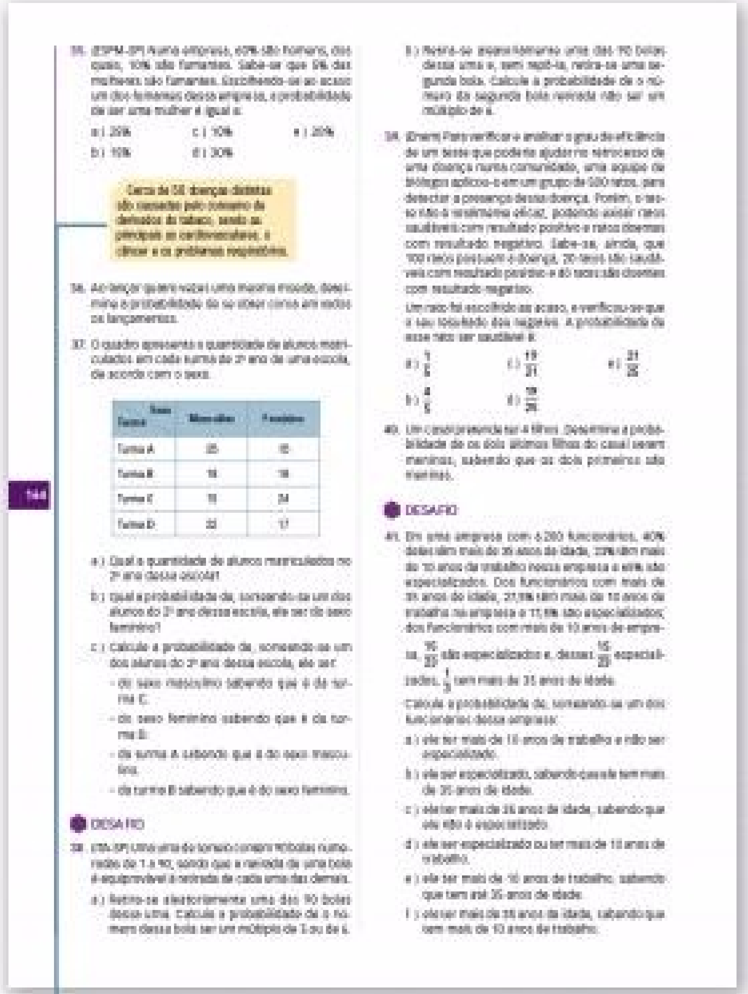
DESAFIO

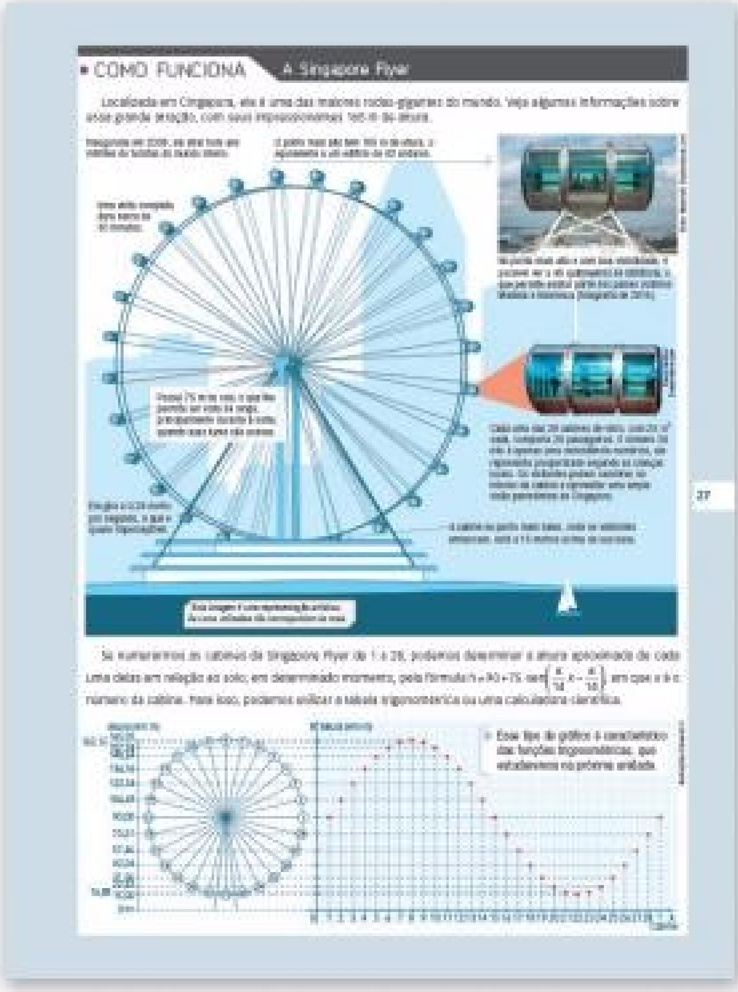
PRODUÇÃO TEXTUAL

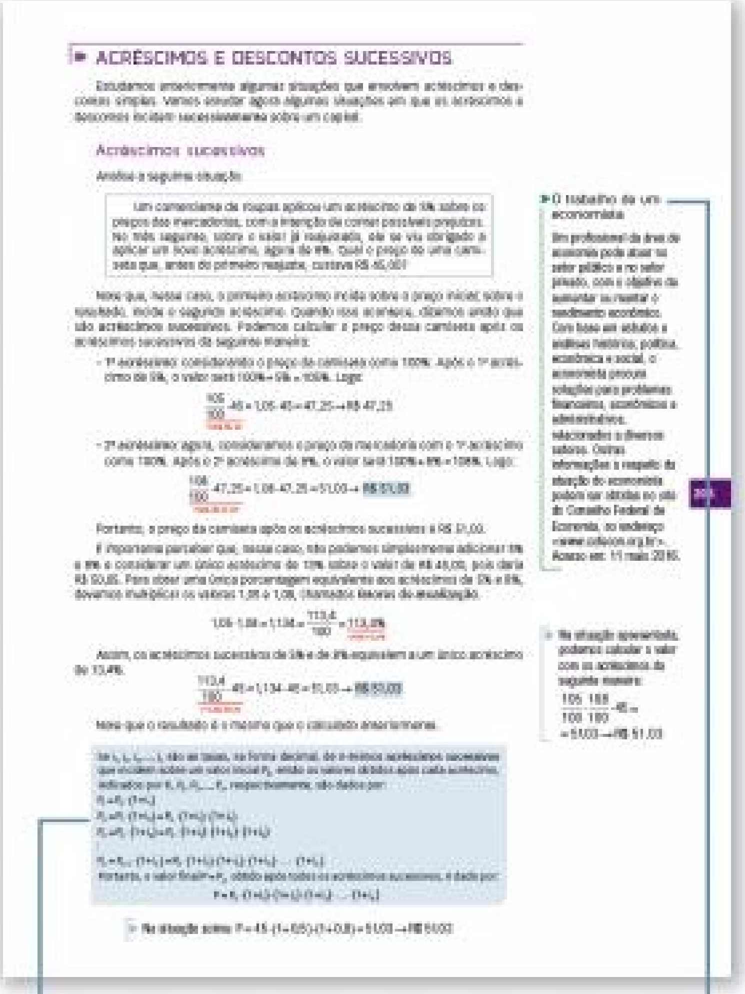
CALCULADORA

EM GRUPO

TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO





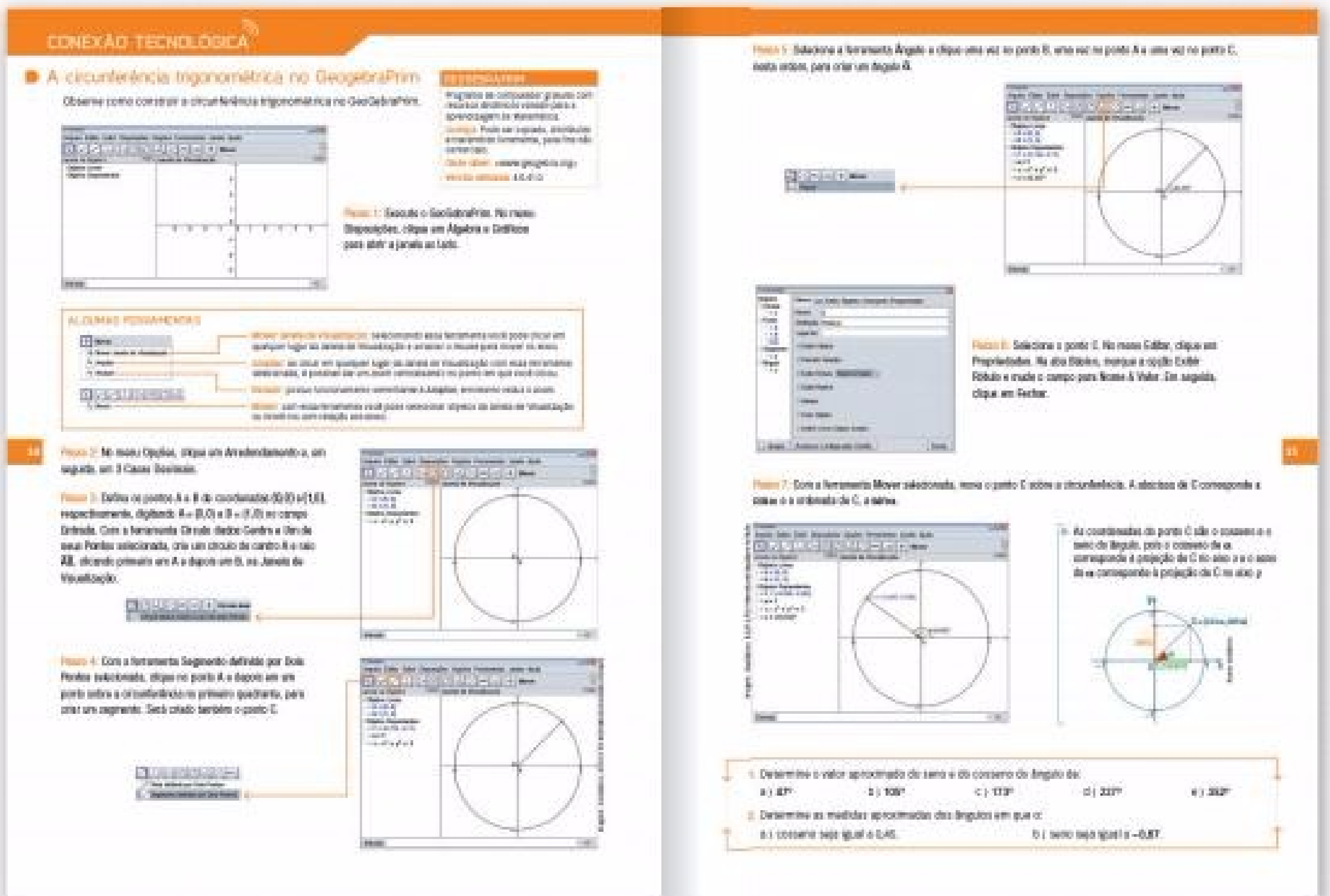


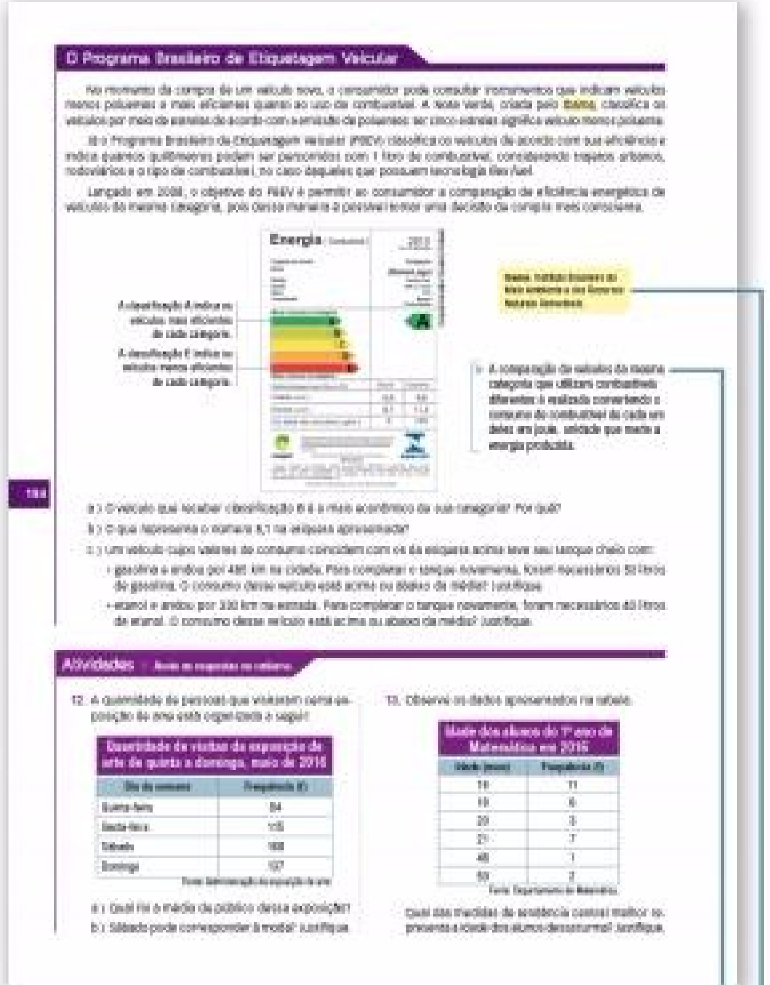
... quadros com **questões** e **temas** a serem discutidos, abordando, por exemplo, direitos e deveres do cidadão.

... a seção **Como funciona**, que apresenta, por exemplo, o funcionamento de algum equipamento.

... quadros com **definições**, **teoremas** etc.

... textos que trazem **informações complementares**.





... a seção **Conexão Tecnológica**, que apresenta procedimentos para utilização de *softwares* que podem contribuir para seus estudos.

... quadros com **dicas**, **observações**, **instruções** e **questionamentos**, que o auxiliarão na compreensão dos conteúdos e na resolução das atividades.

... o quadro **Vocabulário**, que apresenta definições de algumas palavras.

SUMÁRIO

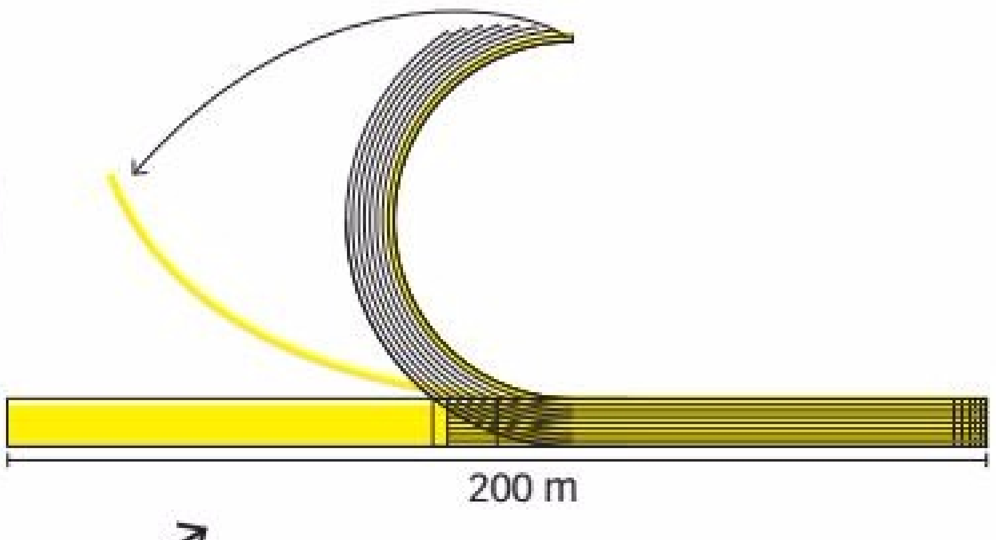
1 TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

Marc Atkins/ BPI/ Corbis/ Latinstock

Prova de 200 m

Esta imagem é uma representação artística. As cores utilizadas não correspondem às reais e os elementos ilustrados não estão proporcionais.

As oito raias possuem raios de medidas diferentes. Para que os atletas percorram a mesma distância, eles largam desalinhados. Se pudéssemos esticar as raias a partir da largada de cada atleta, veríamos que todos os percursos possuem o mesmo comprimento de 200 m.



Eduardo C.

Professor(a): Proponha aos alunos algumas questões relacionadas a esse tema. Algumas sugestões são:

a) Caso os atletas largassem alinhados na curva, quais deles estariam em vantagem, os das raias internas ou os das raias externas? Justifique.

(Resposta: Os atletas das raias internas, porque percorreriam menores distâncias.)

b) Na prova de 100 m, os atletas percorrem um trecho retilíneo. Nesse caso, há necessidade de eles largarem desalinhados?

(Resposta: Não)

c) Caso os atletas largassem de um trecho retilíneo, passassem por uma das curvas e finalizassem a prova em outro trecho retilíneo, haveria necessidade de eles largarem desalinhados?

(Resposta: Sim)

A atleta da Grã-Bretanha Hannah Cockroft conquista o ouro na final dos 200 m feminino nas Paraolimpíadas de 2012, em Londres, após cruzar a linha de chegada com um tempo de 31,09 segundos. Ela disputou a corrida na 6ª raia.

Paraolimpíadas

Você já participou de uma prova de atletismo ou teve oportunidade de assistir a alguma delas? Notou que na largada de certas provas os atletas estão em posições diferentes, isto é, estão "desalinhados", e que não podem sair de suas raias até a linha de chegada? Isso ocorre justamente para compensar a curva existente no trajeto dessas provas, uma vez que os atletas das raias internas percorrem uma trajetória com raio menor.

Essa característica torna a prova mais emocionante para os torcedores, pois a primeira metade da prova passa a impressão de que os atletas das raias externas estão em vantagem, à frente dos demais, no entanto eles são alcançados pelos atletas das raias internas na segunda metade da prova. Além disso, exige dos atletas uma combinação de técnicas com corrida em curva e em reta, principalmente em algumas modalidades paraolímpicas em que os atletas devem utilizar a parte superior do corpo e a força dos braços para controlar a velocidade e a direção da *handcycling*, que é uma bicicleta de mão adaptada para cadeirantes.

O esporte adaptado a portadores de necessidades especiais surgiu no começo do século XX. De início, as provas eram voltadas para deficientes visuais e auditivos. Entretanto, após a Segunda Guerra Mundial, os esportes para deficientes físicos começaram a ganhar espaço. O objetivo era auxiliar no tratamento de veteranos de guerra que voltavam do conflito com algum tipo de deficiência.

Em 1948, ano da primeira olimpíada pós-guerra, foi organizada a primeira competição para atletas em cadeiras de rodas. Quatro anos depois, em 1952, atletas dos Países Baixos se juntaram à competição, dando assim maior notoriedade ao evento.

Anatoliy Cherkasov/ Alamy Stock Photo/ Latinstock

Em algumas provas de atletismo que utilizam a pista oficial, os atletas largam desalinhados para compensar a diferença da distância percorrida nas curvas. Isso facilita o controle, já que a linha de chegada é única para todos. Na fotografia observamos os atletas no momento da largada do Campeonato Mundial Júnior de Atletismo de 2013, em Donetsk, Ucrânia.

Nesta unidade você vai...

- reconhecer os elementos de uma circunferência.
- determinar a medida linear e a medida angular de um arco.
- identificar os quadrantes em uma circunferência trigonométrica.
- determinar os arcos côngruos por meio de simetria.
- reconhecer os ângulos notáveis e as relações trigonométricas (seno, cosseno e tangente) na circunferência.

Professor(a): Explique aos alunos que estes são os principais objetivos a serem atingidos por eles nesta unidade. Retome esses objetivos no decorrer dos estudos da unidade e, se julgar necessário, estabeleça também novos objetivos. Na Assessoria Pedagógica, encontram-se os objetivos gerais deste nível de ensino, assim como os objetivos específicos desta unidade.

TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

Origem da trigonometria

Como vários outros ramos da Matemática, não se sabe exatamente quando ou com quem se originou a trigonometria, porém estudos apontam que a Astronomia deu origem à trigonometria esférica, conforme está explicitado no livro *História da matemática*, de Boyer.

Durante cerca de dois séculos e meio, de Hipócrates a Eratóstenes, os matemáticos gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram a uma variedade de problemas de astronomia, mas disso não resultou uma trigonometria sistemática. Então, presumivelmente durante a segunda metade do segundo século a.C., foi compilada a que foi presumivelmente a primeira tabela trigonométrica pelo astrônomo Hiparco de Niceia (por volta de 180 a.C.–125 a.C.), que assim ganhou o direito de ser chamado "o pai da trigonometria".

BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. p. 118.

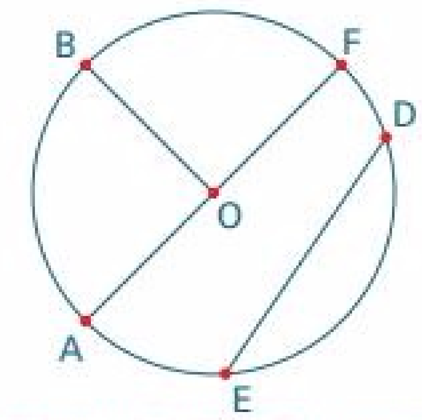
rook76/ Shutterstock/ Glow Images

Selo grego em homenagem a Hiparco de Niceia.

Em anos anteriores, utilizamos a trigonometria para calcular medidas de lados ou ângulos de triângulos (*trigono*: triângulo e *metria*: medida). Vimos também que, para cada ângulo agudo de um triângulo retângulo, tem-se um valor para seno, cosseno e tangente. Esse estudo surgiu há milhares de anos, com a necessidade de resolver situações, como, por exemplo, medir a altura de uma pirâmide ou a largura de um rio, ou seja, situações nas quais não temos acesso ao que pretendemos medir.

Nesta unidade, vamos estender as razões trigonométricas aos elementos de uma circunferência, uma necessidade mais recente da Matemática. Isso nos permitirá compreender a ideia de seno, cosseno e tangente para além dos ângulos internos de um triângulo retângulo, isto é, para qualquer medida de ângulo maior do que 90°.

Antes, porém, vamos retomar alguns conceitos. Na circunferência a seguir, temos:



O: centro

$\overline{OB}$: raio (r)

$\overline{AF}$: diâmetro (d = 2r)

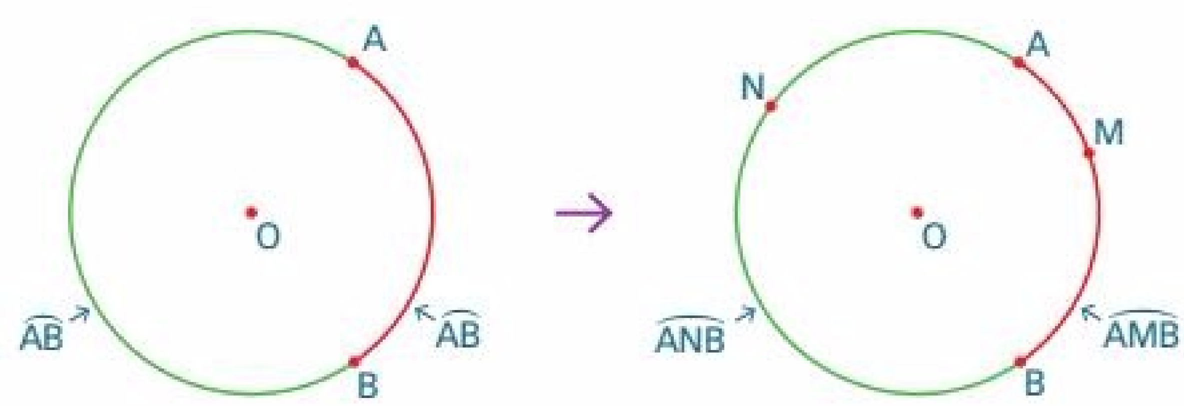
$\overline{DE}$: corda

Comprimento de uma circunferência de raio r: $C = 2\pi r$

Professor(a): Diga aos alunos que a corda é o segmento que liga dois pontos quaisquer da circunferência. Nesse caso, o diâmetro $\overline{AF}$ é uma corda que passa pelo centro da circunferência.

Professor(a): Diga aos alunos que utilizaremos r para designar o raio da circunferência e também sua medida. De acordo com a situação saberemos qual significado está sendo usado.

Agora, considere os pontos A e B na circunferência a seguir. Eles dividem-na em duas partes chamadas **arcos de circunferência**, que indicamos por $\overset{\frown}{AB}$. Para diferenciar um arco do outro, indica-se um ponto em cada um deles e utilizamos a seguinte notação:



Ilustrações: Acervo da Editora

Quando não tivermos dúvidas em relação ao arco ao qual nos referimos, utilizamos simplesmente a notação $\overset{\frown}{AB}$.

Wassily Kandinsky. Alguns círculos. 1926. Óleo sobre tela. Museu Solomon R. Guggenheim, Nova York

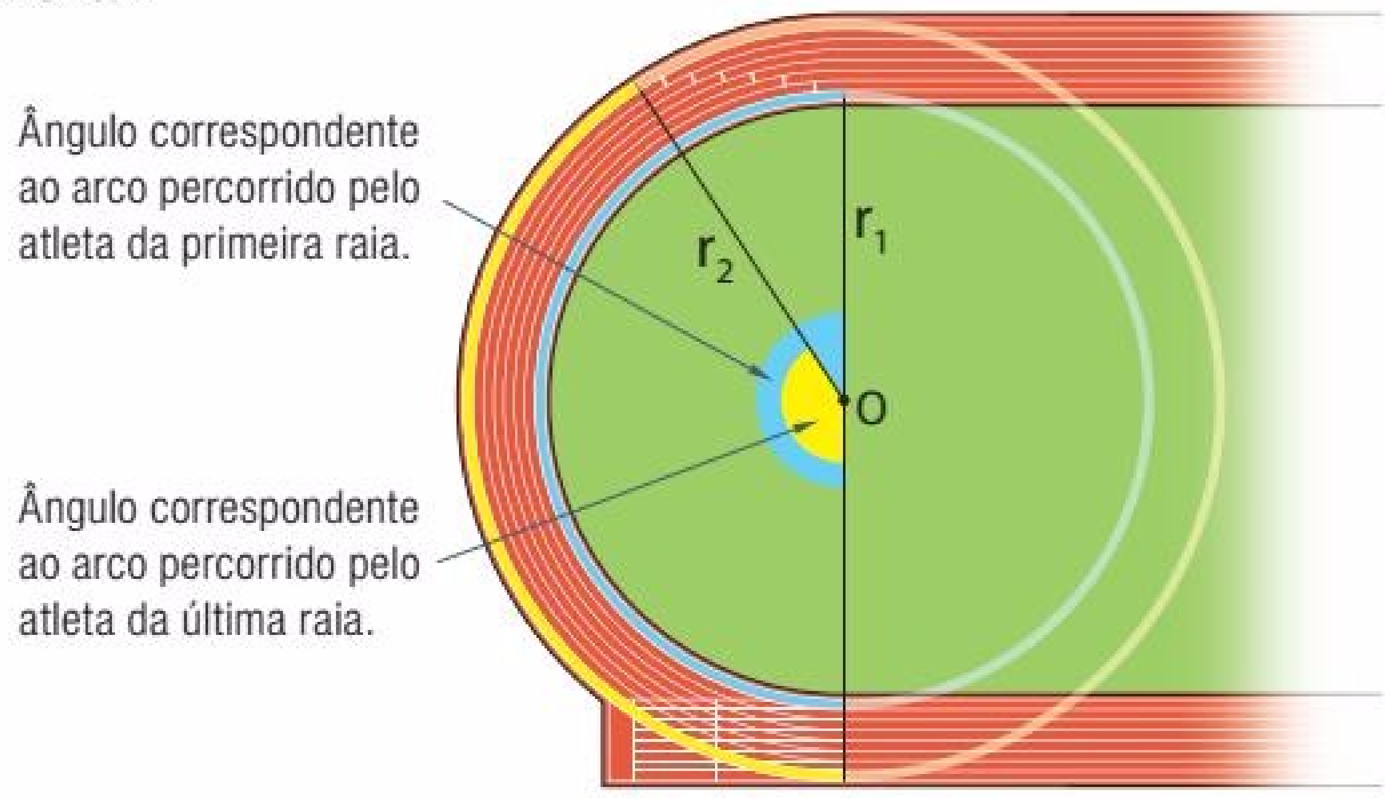
Wassily Kandinsky – *Alguns círculos*. 1926. Óleo sobre tela, 140,3 × 140,7 cm. Solomon R. Guggenheim. Nova York.

Jad Davenport/ National Geographic Creative/ Corbis/ Latinstock

O *Great Blue Hole* (Grande Buraco Azul) é uma formação natural que lembra uma circunferência. Essa formação fica na costa de Belize – um pequeno país da América Central – e possui centenas de metros de diâmetro e uma profundidade que cria uma cor azul intensa (fotografia de 2014).

Medida linear e medida angular do arco

Na abertura desta unidade, vimos que, em algumas provas de corrida, os atletas não ficam alinhados para a largada, a fim de compensar a diferença de comprimento entre as raias. Essa diferença ocorre nas curvas, que são arcos de circunferência que aumentam de comprimento à medida que o raio da circunferência correspondente aumenta.



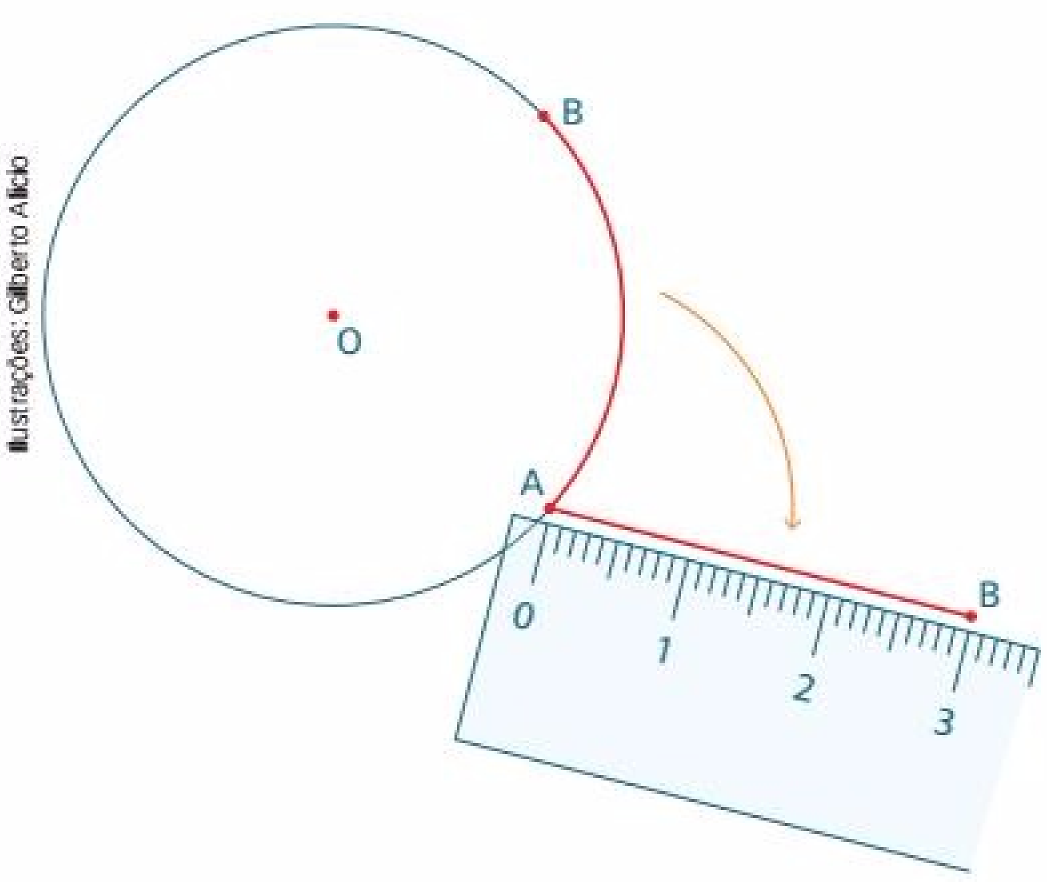
Esta imagem é uma representação artística. As cores utilizadas não correspondem às reais.

Assim, caso os atletas ficassem alinhados para a largada, ou seja, se todos percorressem arcos com o mesmo ângulo central, os atletas das raias internas estariam em vantagem porque percorreriam menores distâncias.

Mas, como podemos medir um arco $\overset{\frown}{AB}$ de uma circunferência? Para responder a essa pergunta, devemos imaginar um ponto na circunferência deslocando-se de **A** para **B**. Ele percorrerá uma **distância** ℓ sobre a circunferência ao mesmo tempo em que ele gira um ângulo α em torno do ponto **O**.

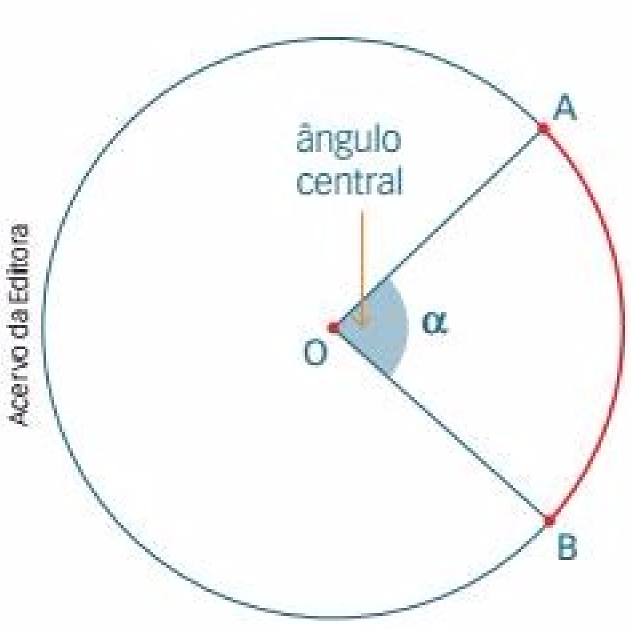
Nesse caso, ℓ refere-se à **medida linear**, ou simplesmente **comprimento do arco** $\overset{\frown}{AB}$, e a unidade de medida utilizada é a mesma do raio (centímetro, metro etc.). É como se o arco fosse “esticado” e medido com uma régua.

Ilustrações: Gilberto Alicio



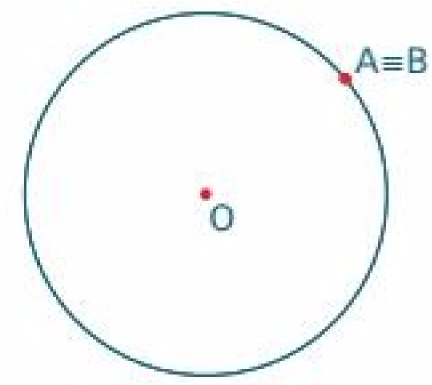
Já α refere-se à **medida angular**, ou simplesmente **medida do arco** $\overset{\frown}{AB}$. Essa medida é igual à medida do ângulo central correspondente.

Acervo da Editora

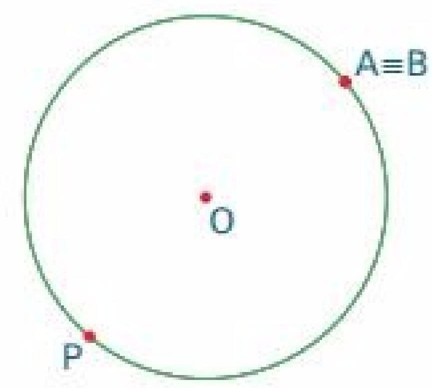


$$\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = \text{med}(A\hat{O}B) = \alpha$$

Caso as extremidades de um arco sejam coincidentes, esse arco é nulo ou corresponde a uma volta completa.

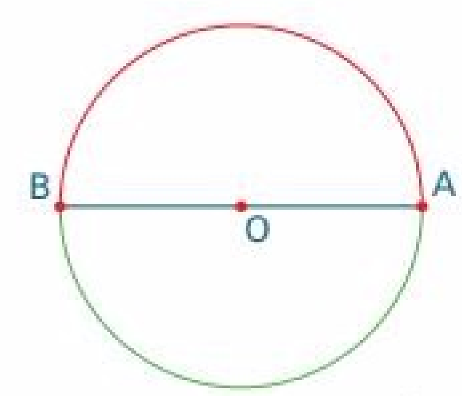


arco nulo $\overset{\frown}{AB}$



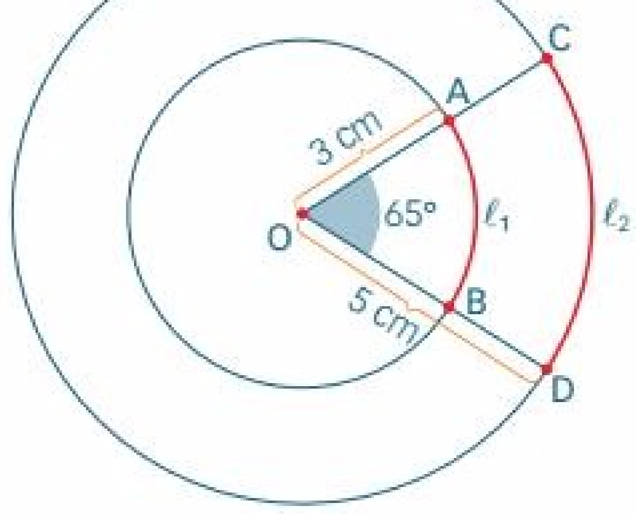
arco de uma volta $\overset{\frown}{APB}$

Caso as extremidades de um arco coincidam com as extremidades de um diâmetro, esse arco é uma semicircunferência.



semicircunferência $\overset{\frown}{AB}$

Ilustrações: Acervo da Editora



É importante perceber que, enquanto a **medida do arco** depende apenas do ângulo central correspondente, o **comprimento do arco** depende também do raio da circunferência. Na imagem ao lado, $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ têm a mesma medida ($\text{med}(\widehat{AB}) = \text{med}(\widehat{CD}) = 65°$), mas comprimentos ℓ_1 e ℓ_2, respectivamente, diferentes ($\ell_1 < \ell_2$).

Como a circunferência inteira mede 360° e tem comprimento $2\pi r$, vamos calcular ℓ_1 e ℓ_2 por regra de três, pois o comprimento do arco é diretamente proporcional à medida do arco.

Medida do arco (°)	Comprimento (cm)
360	$2 \cdot \overset{3,14}{\pi} \cdot \underset{3\text{ cm}}{r} = 18,84$
65	ℓ_1

Medida do arco (°)	Comprimento (cm)
360	$2 \cdot \overset{3,14}{\pi} \cdot \underset{5\text{ cm}}{r} = 31,4$
65	ℓ_2

Lembre-se de que $\pi = 3,141592...$ é um número irracional que corresponde ao quociente entre o comprimento (C) e a medida do diâmetro $(2r)$ de uma circunferência qualquer.

Nos cálculos, consideramos $\pi = 3,14$.

$$\frac{360}{65} = \frac{18,84}{\ell_1}$$
$$18,84 \cdot 65 = 360 \cdot \ell_1$$
$$\ell_1 = \frac{1\,224,6}{360}$$
$$\ell_1 \simeq 3,40$$

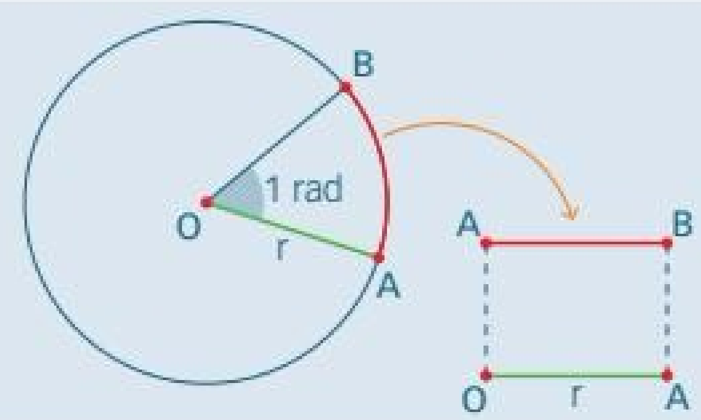
$$\frac{360}{65} = \frac{31,4}{\ell_2}$$
$$31,4 \cdot 65 = 360 \cdot \ell_2$$
$$\ell_2 = \frac{2\,041}{360}$$
$$\ell_2 \simeq 5,67$$

Portanto, $\text{med}(\widehat{AB}) = \text{med}(\widehat{CD}) = 65°$ (medidas iguais) e $\ell_1 \simeq 3,40$ cm e $\ell_2 \simeq 5,67$ cm (comprimentos diferentes).

Radiano

Além do grau, outra unidade para medir ângulo e arco é o **radiano**. Um arco cuja medida é um radiano (1 rad) tem o mesmo comprimento que o raio da circunferência que o contém.

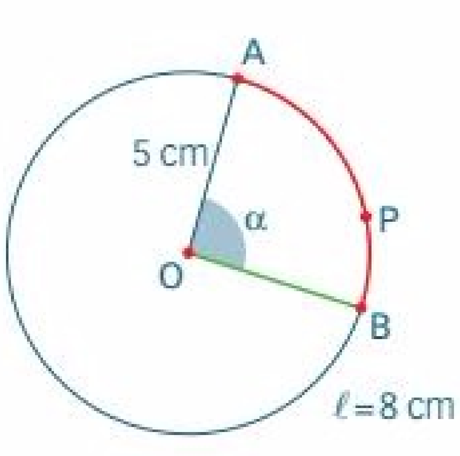
A medida de um arco cujo comprimento é igual ao do raio da circunferência é chamada de **radiano**. O radiano é a unidade de medida padrão para ângulos na circunferência.



Exemplo 1: Vamos calcular a medida α em radianos de um arco $\widehat{APB}$ de comprimento $\ell = 8$ cm em uma circunferência de raio medindo 5 cm, com a seguinte regra de três:

Medida do arco (rad)	Comprimento (cm)
1	5
α	8

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{5}{8}$$
$$5 \cdot \alpha = 1 \cdot 8$$
$$\alpha = \frac{8}{5}$$
$$\alpha = 1,6$$



Ilustrações: Acervo da Editora

Se aumentarmos a medida do raio dessa circunferência para 15 cm, qual será a medida linear do arco $\widehat{APB}$?
24 cm

Portanto, a medida do arco $\widehat{APB}$ é 1,6 rad, ou seja, a medida desse arco é 1,6 vez a medida do raio da circunferência.

Professor(a): Neste momento, reforce a ideia de que a medida do arco em radianos é a mesma (1,6 rad).

Uma das vantagens em utilizar a medida de um arco em radianos é que, quando sabemos que um arco mede α radianos, podemos deduzir que seu comprimento corresponde ao de α raios dessa circunferência. Por exemplo, se o arco mede 1 radiano, então seu comprimento corresponde ao de 1 raio da circunferência; se o arco mede 2 radianos, então seu comprimento corresponde ao de 2 raios da circunferência, e assim por diante.

Exemplo 2: Uma circunferência de raio **r** tem ângulo central $\alpha = 360°$ e comprimento $C = 2\pi r$. Vamos obter a medida da circunferência em radianos com a seguinte regra de três:

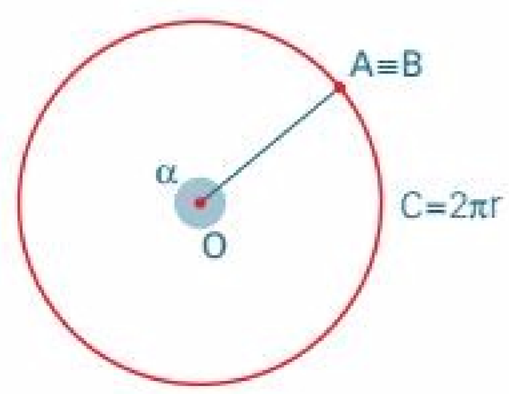
Medida do arco (rad)	Comprimento
1	r
x	$2\pi r$

$$\frac{1}{x} = \frac{r}{2\pi r}$$

$$r \cdot x = 1 \cdot 2\pi r$$

$$x = \frac{2\pi \cancel{r}}{\cancel{r}}$$

$$x = 2\pi \rightarrow \boxed{x = 2\pi \text{ rad}}$$



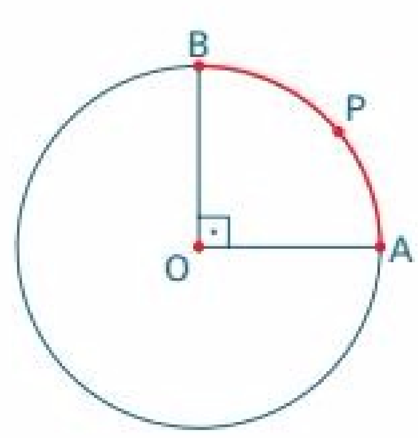
Portanto:

> A medida de uma circunferência (360°) é 2π rad, o que equivale dizer que π rad corresponde a 180°.

Assim, se "esticarmos" a circunferência, obtemos um segmento cuja medida é 2π vezes a medida do raio, o que equivale dizer que a medida desse segmento é π vezes a medida do diâmetro da circunferência.

Com base na relação de que π rad corresponde a 180°, podemos converter uma medida de arco de graus para radianos e vice-versa. Observe alguns arcos com medidas em graus e em radianos.

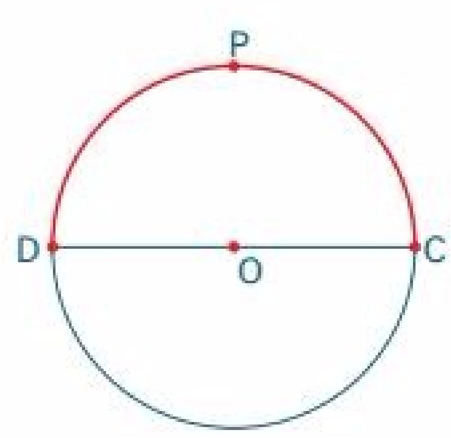
$\frac{1}{4}$ de volta



$\text{med}(\widehat{APB}) = 90°$ ou

$\text{med}(\widehat{APB}) = \frac{\pi}{2}$ rad

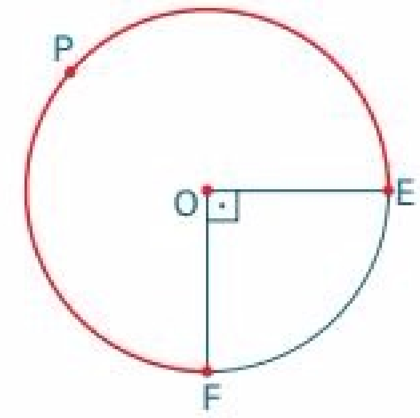
$\frac{1}{2}$ volta



$\text{med}(\widehat{CPD}) = 180°$ ou

$\text{med}(\widehat{CPD}) = \pi$ rad

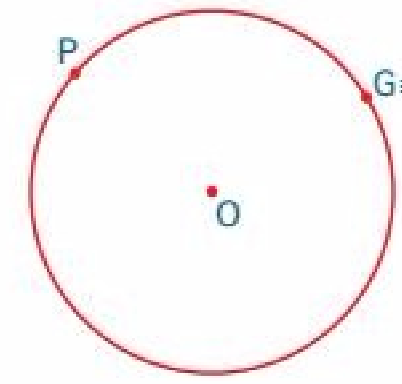
$\frac{3}{4}$ de volta



$\text{med}(\widehat{EPF}) = 270°$ ou

$\text{med}(\widehat{EPF}) = \frac{3\pi}{2}$ rad

1 volta



$\text{med}(\widehat{GPH}) = 360°$ ou

$\text{med}(\widehat{GPH}) = 2\pi$ rad

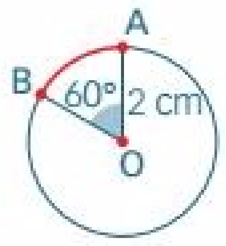
Ilustrações: Acervo da Editora

Note que $\underbrace{\frac{3}{4}}_{\frac{3}{4}\text{ de volta}} \cdot 360° = 270°$ corresponde a $\frac{3}{4} \cdot 2\pi \text{ rad} = \frac{3\pi}{2}$ rad.

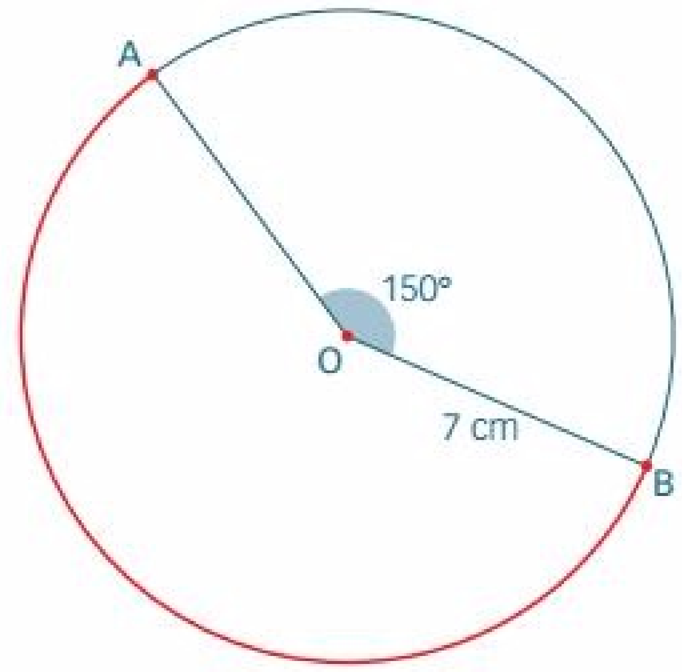
Atividades resolvidas

R1. Determine o comprimento do arco indicado em vermelho em cada circunferência:

a)



b)



Ilustrações: Acervo da Editora

Resolução

a) Pela regra de três, temos:

Medida do arco (°)	Comprimento (cm)
360	$2 \cdot \pi \cdot \underset{2}{\underbrace{r}} = 12{,}56$
60	x

$$\frac{360}{60} = \frac{12{,}56}{x} \Rightarrow 60 \cdot 12{,}56 = 360 \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{60 \cdot 12{,}56}{360} \simeq 2{,}09$$

Portanto, o comprimento do arco é de aproximadamente 2,09 cm.

b) Pela regra de três, temos:

Medida do arco (°)	Comprimento (cm)
360	$2 \cdot \pi \cdot \underset{7}{\underbrace{r}} = 43{,}96$
$\underset{360-150}{\underbrace{210}}$	x

$$\frac{360}{210} = \frac{43{,}96}{x} \Rightarrow 210 \cdot 43{,}96 = 360 \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{210 \cdot 43{,}96}{360} \simeq 25{,}64$$

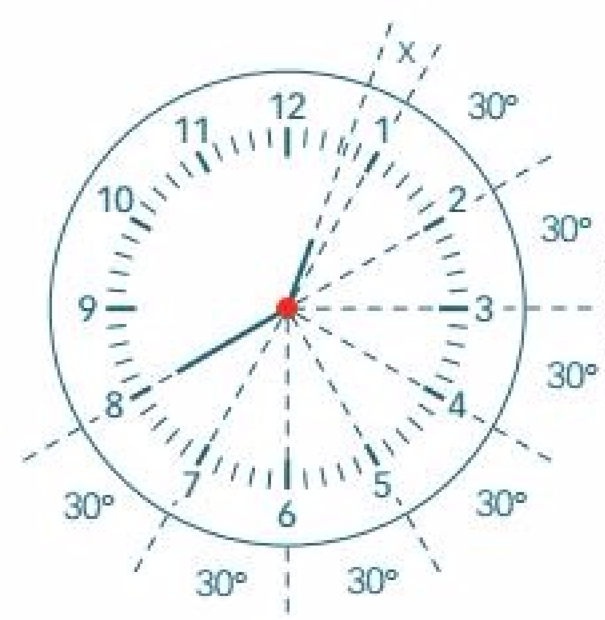
Portanto, o comprimento do arco é de aproximadamente 25,64 cm.

R2. Qual a medida do maior ângulo formado entre os ponteiros de um relógio que marca 12h40?

Resolução

Em um relógio de ponteiros, a circunferência é dividida em 12 partes de mesma medida, cada uma delas com 30°, pois $\frac{360°}{12} = 30°$.

Às 12h40, o ponteiro dos minutos indica exatamente o número 8 enquanto o ponteiro das horas está entre os números 12 e 1, como na figura ao lado:



Gilberto Alicio

O ângulo formado entre o número 1 e o número 8 mede:

$$30° + 30° + 30° + 30° + 30° + 30° + 30° = \boxed{210°}$$

Para determinar o valor de x, ou seja, a medida do ângulo entre o ponteiro das horas e o 1, vamos utilizar uma regra de três. Para isso, consideramos que em 60 minutos o ponteiro das horas se desloca 30° e que a medida de x corresponde ao deslocamento de 20 minutos, que é o tempo restante para completar a hora e o ponteiro chegar no 1.

Tempo (min)	Ângulo (°)
60	30
20	x

$$60 \cdot x = 30 \cdot 20 \Rightarrow x = \frac{30 \cdot 20}{60} = 10 \rightarrow \boxed{10°}$$

Calculando a medida do ângulo formado entre os ponteiros, temos:

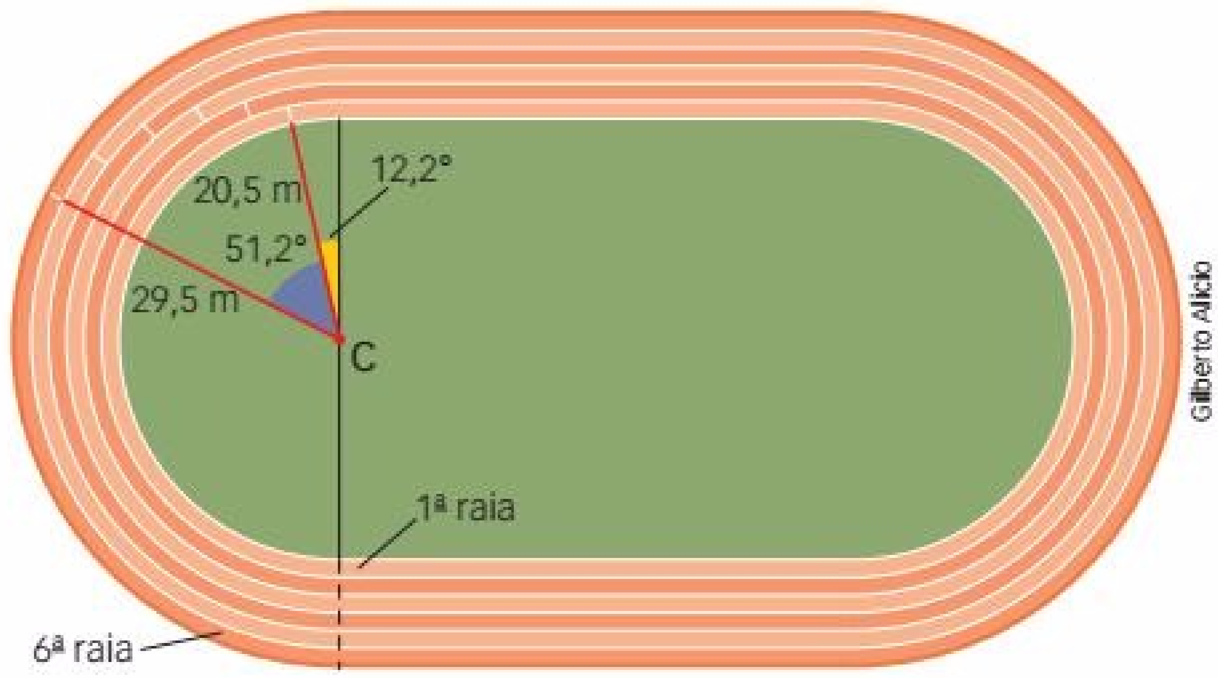
$$210° + 10° = 220°$$

Portanto, a medida do maior ângulo formado entre os ponteiros de um relógio às 12h40 é 220°.

Professor(a): Incentive os alunos a resolverem o problema de outra maneira.

R3. Em determinada pista de atletismo, os corredores são dispostos em seis raias. Na figura, estão representadas as posições do corredor da 1ª raia e do corredor da 6ª raia.

Professor(a): As medidas apresentadas nos ângulos estão aproximadas.



Esta imagem é uma representação artística. As cores utilizadas não correspondem às reais.

Considerando os primeiros metros da corrida, da largada até a linha tracejada, percorridos no sentido anti-horário, o atleta da 1ª raia está em desvantagem em relação ao atleta da 6ª raia? Por quê?

Resolução

O percurso inicial realizado pelos atletas, da largada até a linha tracejada, é um arco de circunferência. Para respondermos se o atleta da 1ª raia está em desvantagem em relação ao atleta da 6ª raia, devemos determinar qual a distância, em metros, percorrida por esses dois participantes.

- Atleta da 1ª raia:

Ângulo (°)	Distância (m)
360	$2\cdot\pi\cdot\underset{20{,}5}{r}=128{,}74$
$\underbrace{167{,}8}_{180-12{,}2}$	x

$$\frac{360}{167{,}8}=\frac{128{,}74}{x}\Rightarrow 167{,}8\cdot 128{,}74=360\cdot x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{167{,}8\cdot 128{,}74}{360}\simeq 60\rightarrow \boxed{60\text{ m}}$$

- Atleta da 6ª raia:

Ângulo (°)	Distância (m)
360	$2\cdot\pi\cdot\underset{29{,}5}{r}=185{,}26$
$\underbrace{116{,}6}_{180-(51{,}2+12{,}2)}$	x

$$\frac{360}{116{,}6}=\frac{185{,}26}{x}\Rightarrow 116{,}6\cdot 185{,}26=360\cdot x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{116{,}6\cdot 185{,}26}{360}\simeq 60\rightarrow \boxed{60\text{ m}}$$

Portanto, o atleta da 1ª raia não está em desvantagem em relação ao atleta da 6ª raia porque ambos vão percorrer, aproximadamente, a mesma distância.

R4. Determine, em radianos, a medida equivalente a 120°.

Resolução

Utilizando uma regra de três, temos:

Medida em graus (°)	Medida em radianos (rad)
180	π
120	x

$$120\cdot\pi=180\cdot x\Rightarrow x=\frac{120\cdot\pi}{180}=\frac{2\pi}{3}\rightarrow \boxed{\frac{2\pi}{3}\text{ rad}}$$

R5. Determine, em graus, a medida equivalente a $\frac{4\pi}{9}$ rad.

Resolução

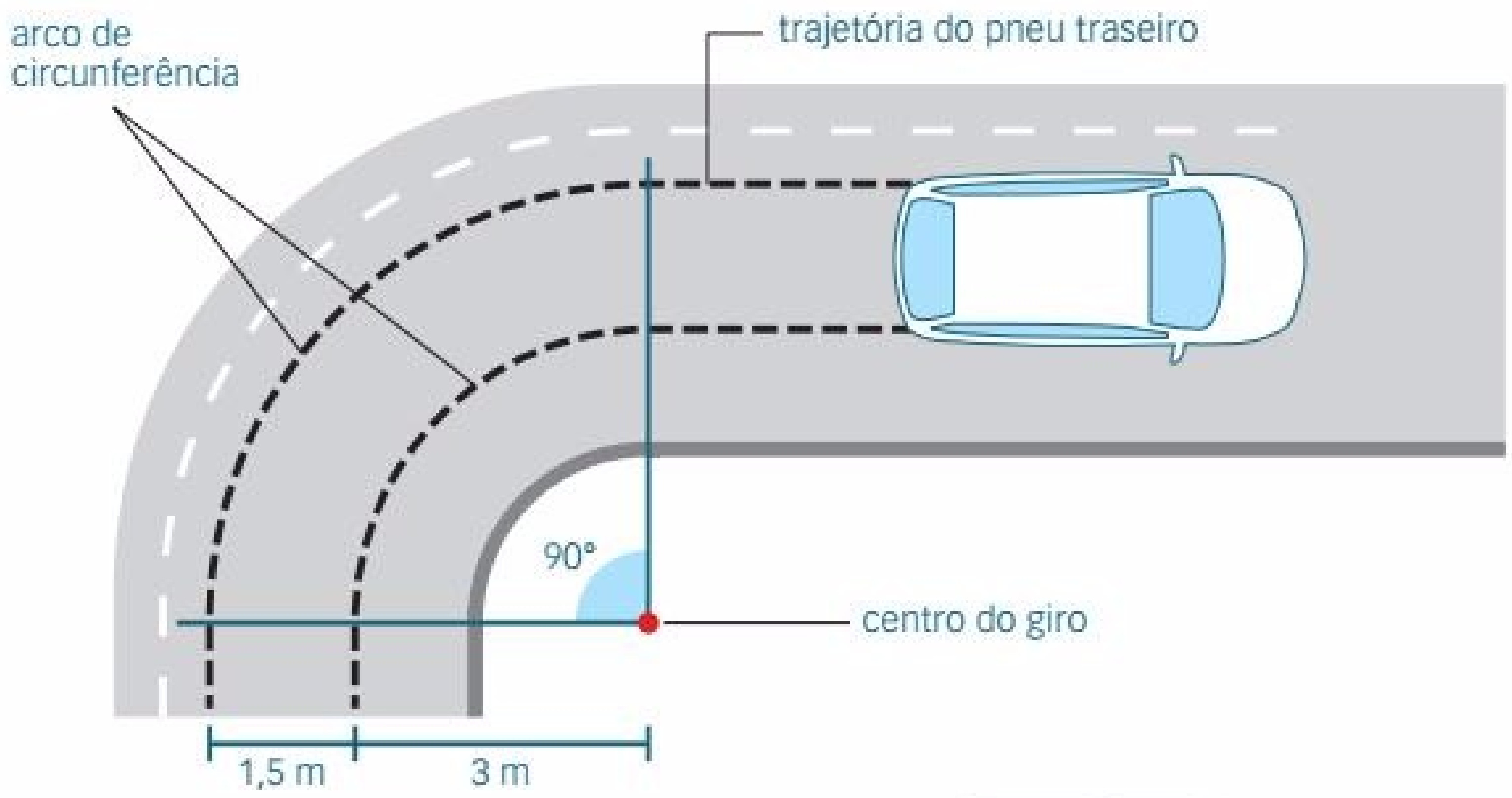
Utilizando uma regra de três, temos:

Medida em graus (°)	Medida em radianos (rad)
180	π
x	$\frac{4\pi}{9}$

$$\pi\cdot x=\cancel{180}^{20}\cdot\frac{4\pi}{\cancel{9}^{1}}\Rightarrow \pi\cdot x=20\cdot 4\pi\Rightarrow x=\frac{20\cdot 4\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}=80\rightarrow \boxed{80°}$$

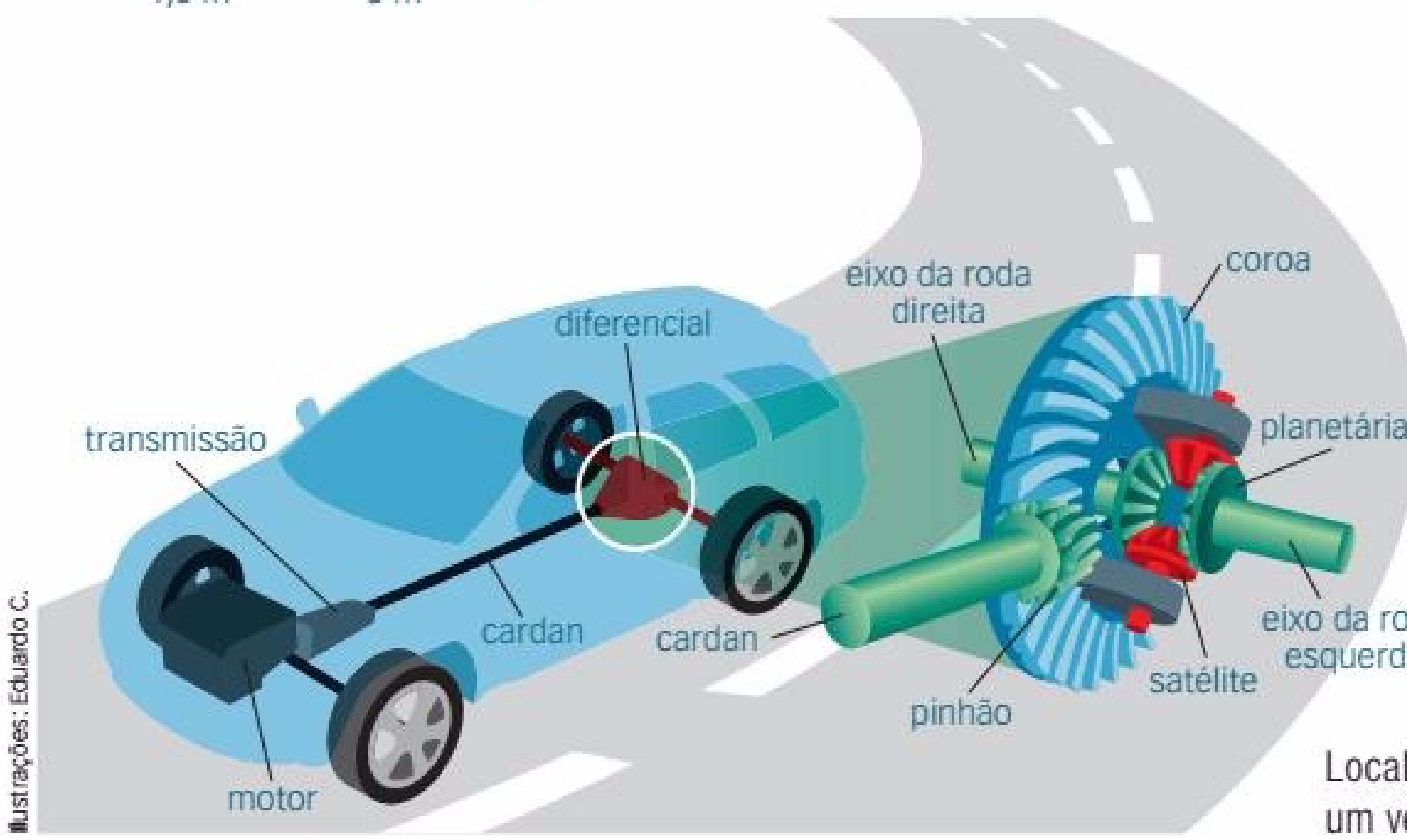
A ação do diferencial em um automóvel

Você já prestou atenção na trajetória de um automóvel quando ele faz uma curva? Se sua resposta é sim, você deve ter percebido que os pneus percorrem distâncias diferentes. Observe o esquema.



Em uma curva, a trajetória dos pneus dianteiros e dos traseiros pode ser considerada circular.

Antes da invenção do diferencial, apenas uma das rodas traseiras do automóvel era ligada ao motor, o que fazia o pneu "rodar em falso" em certas ocasiões.



Esta imagem é uma representação artística. As cores utilizadas não correspondem às reais e os elementos ilustrados não estão proporcionais.

Localização do diferencial em um veículo com tração traseira.

Os pneus dianteiros fazem o carro mudar de direção. Quando isso ocorre, os pneus internos à curva percorrem uma trajetória menor porque o arco de menor raio possui menor comprimento.

O dispositivo que permite que os pneus percorram distâncias diferentes sem que haja danos ao sistema de transmissão e sem que patinem é o **diferencial**. Ao percorrer uma curva, a roda interna gira mais devagar que a roda externa compensando a diferença da distância percorrida entre elas.

Considerando as informações apresentadas, responda:

a) Qual a diferença aproximada entre a distância percorrida pelo pneu traseiro interno à curva e pelo pneu traseiro externo à curva, depois de o automóvel passar pela curva apresentada no esquema? 2,36 m

b) Sabendo que o pneu desse automóvel possui 58 cm de diâmetro, quantas voltas, aproximadamente, deu cada uma das rodas traseiras para percorrer a curva? roda interna: 2,59 voltas; roda externa: 3,88 voltas

Engenharia mecânica

O engenheiro mecânico é responsável por cuidar do desenvolvimento, da construção e da manutenção de máquinas e equipamentos em geral. O engenheiro calcula a quantidade de matéria-prima, cria e avalia protótipos, organiza sistemas de armazenagem, define normas e procedimentos de segurança para a produção etc. Ele também deve controlar a qualidade dos equipamentos, acompanhando e analisando testes de resistência, calibrando e conferindo medidas.

Ba-mi/ Dreamstime.com

Esquema representando vistas do protótipo de um carro.

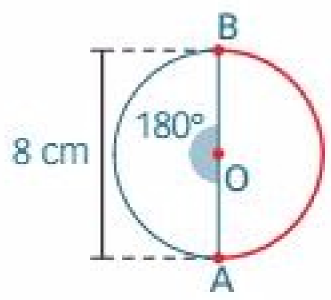
Professor(a): Diga aos alunos que todo profissional da Engenharia precisa estar registrado no Conselho Regional de Engenharia, Arquitetura e Agronomia/Conselho Federal de Engenharia e Agronomia (Crea/Confea) para que possa desenvolver sua função legalmente.

Atividades ▸ Anote as respostas no caderno.

▸ Nas atividades, quando conveniente, utilize $\pi = 3{,}14$.

1. Em cada circunferência, determine a medida linear e a medida angular do arco indicado em vermelho.

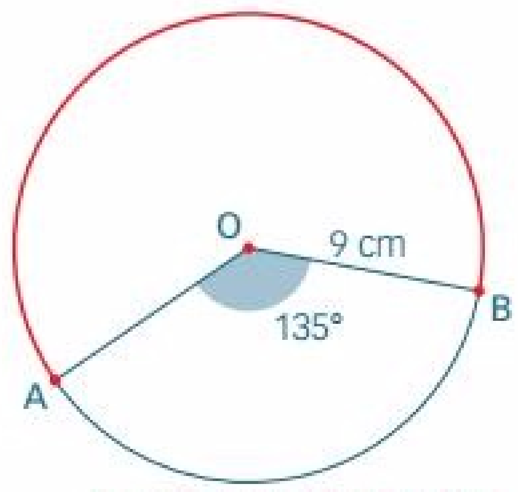
a)



$AB = 8$ cm

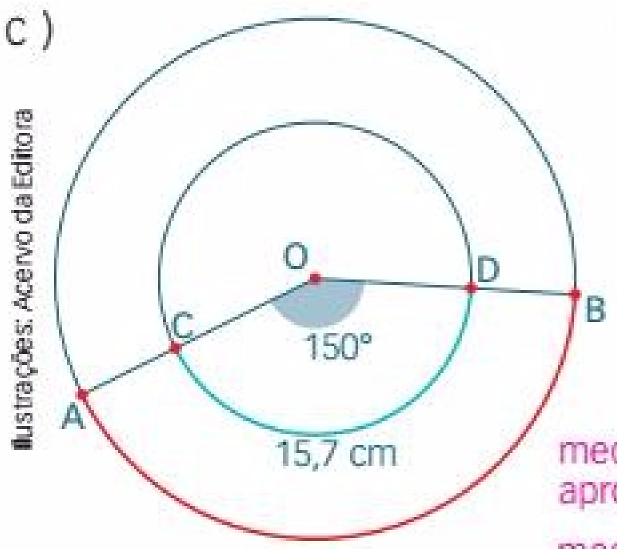
medida linear: 12,56 cm; $med(\widehat{AB}) = 180°$

b)



medida linear: 35,325 cm; $med(\widehat{AB}) = 225°$

c)



$OD = 6$ cm e $AC = 4$ cm

medida linear: aproximadamente 26,17 cm; $med(\widehat{AB}) = 150°$

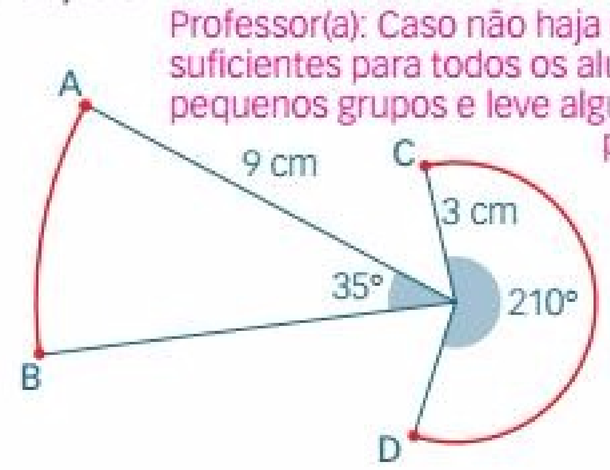
Ilustrações: Acervo da Editora

CALCULADORA

2. Determine o comprimento aproximado, em centímetros, de cada um dos arcos a seguir.

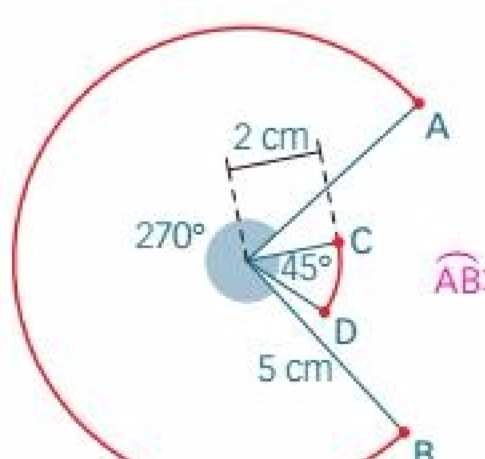
Professor(a): Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

a)



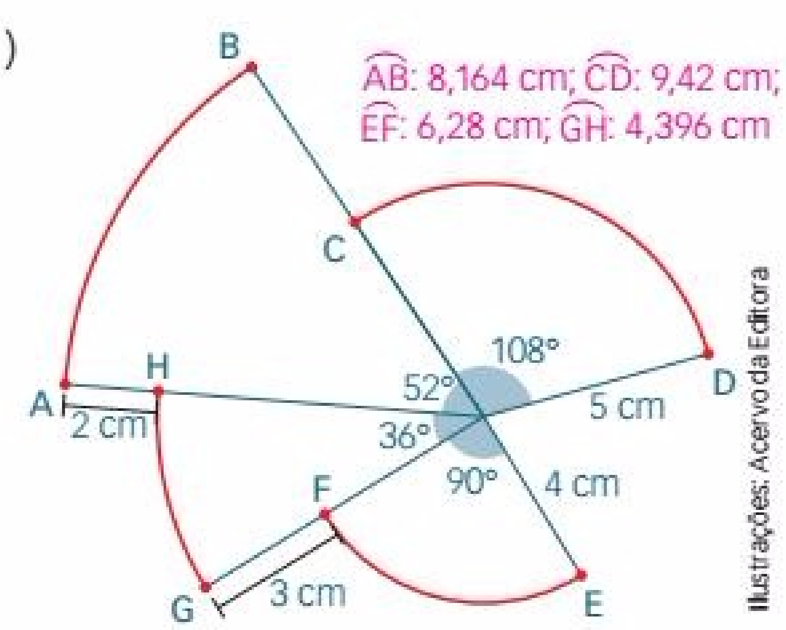
$\widehat{AB}$: 5,495 cm; $\widehat{CD}$: 10,99 cm

b)



$\widehat{AB}$: 23,55 cm; $\widehat{CD}$: 1,57 cm

c)



$\widehat{AB}$: 8,164 cm; $\widehat{CD}$: 9,42 cm; $\widehat{EF}$: 6,28 cm; $\widehat{GH}$: 4,396 cm

Ilustrações: Acervo da Editora

3. Expresse, em graus, a medida de cada um dos arcos.

a) $\frac{3\pi}{6}$ rad 90°

b) $\frac{5\pi}{9}$ rad 100°

c) $\frac{8\pi}{5}$ rad 288°

d) $\frac{17\pi}{10}$ rad 306°

4. Expresse a medida de cada um dos arcos em radianos.

a) 45° $\frac{\pi}{4}$ rad

b) 135° $\frac{3\pi}{4}$ rad

c) 225° $\frac{5\pi}{4}$ rad

d) 320° $\frac{16\pi}{9}$ rad

5. (UEG-GO) Considerando 1° como a distância entre dois meridianos, e que na linha do equador corresponde a uma distância média de 111,322 km, tomando-se esses valores como referência, pode-se inferir que o comprimento do círculo da Terra, na linha do equador, é de, aproximadamente: d

a) 52 035 km

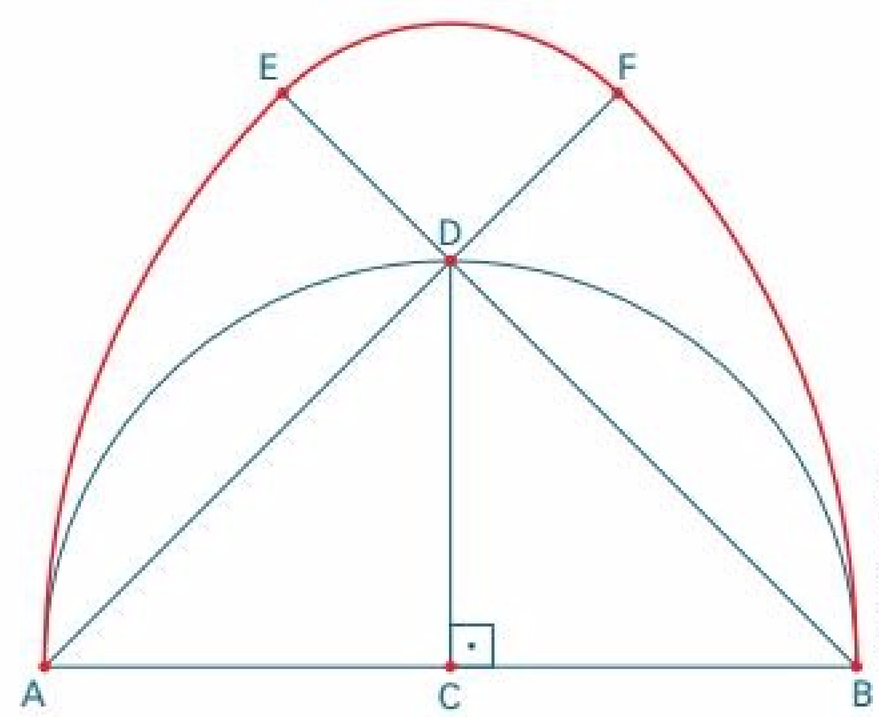
b) 48 028 km

c) 44 195 km

d) 40 076 km

DESAFIO

6. (Uerj) Observe a curva AEFB desenhada abaixo.



Acervo da Editora

Analise os passos seguidos em sua construção:

a) traçar um semicírculo de diâmetro $\overline{AB}$ com centro **C** e raio 2 cm;

b) traçar o segmento CD, perpendicular a $\overline{AB}$, partindo do ponto **C** e encontrando o ponto **D**, pertencente ao arco $\widehat{AB}$;

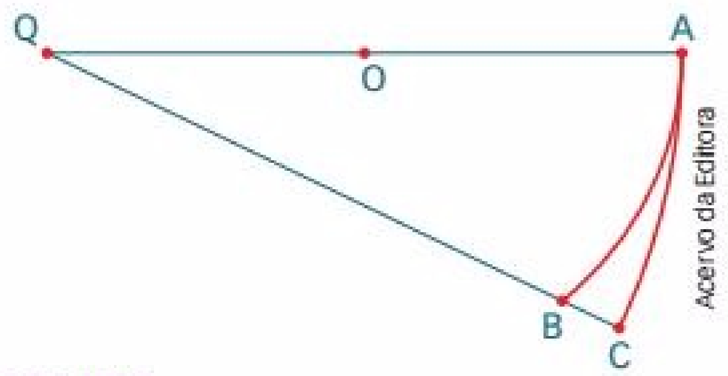
c) construir o arco circular $\widehat{AE}$, de raio $\overline{AB}$ e centro **B**, sendo **E** a interseção com o prolongamento do segmento BD, no sentido **B** para **D**;

d) construir o arco circular $\widehat{BF}$, de raio $\overline{AB}$ e centro **A**, sendo **F** a interseção com o prolongamento do segmento AD, no sentido **A** para **D**;

e) desenhar o arco circular $\widehat{EF}$ com centro **D** e raio $\overline{DE}$.

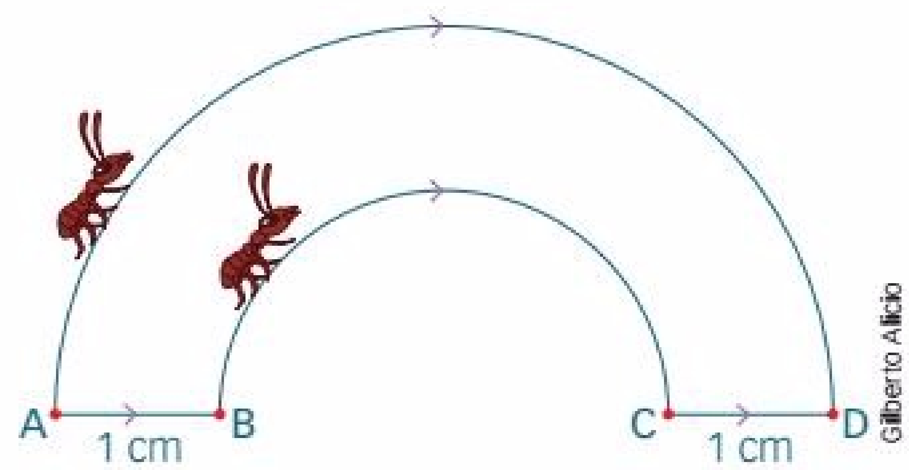
Determine o comprimento, em centímetros, da curva AEFB. $\pi(4 - \sqrt{2})$ cm

7. Na figura, estão indicados dois arcos de circunferência com centro **O** e **Q** e extremidades **A** e **B**, e **A** e **C** respectivamente. O ponto **O** é ponto médio do segmento QA, e o ponto **B** está sobre o segmento QC. Sabendo que o comprimento do arco $\widehat{AB}$ é de, aproximadamente, 11,16 cm, calcule o comprimento aproximado, em centímetros, do arco $\widehat{AC}$. 11,16 cm



EM GRUPO

8. (OBMEP) Duas formigas partem do ponto **A** e vão até o ponto **D**, andando no sentido indicado pelas flechas. A primeira percorre o semicírculo maior; a segunda, o segmento AB, o semicírculo menor e o segmento CD. Os pontos **A**, **B**, **C** e **D** estão alinhados e os segmentos AB e CD medem 1 cm cada um. Quantos centímetros a segunda formiga andou menos que a primeira? d



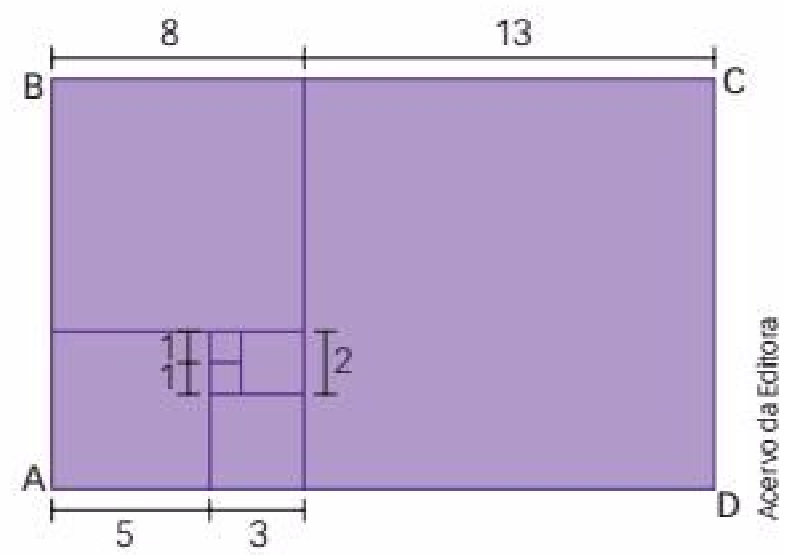
a) 2
b) π
c) $\frac{\pi}{2}$
d) $\pi - 2$
e) 2π

As imagens apresentadas são representações artísticas. As cores utilizadas não correspondem às reais e os elementos ilustrados não estão proporcionais.

9. (Enem) Quando se dá uma pedalada na bicicleta abaixo (isto é, quando a coroa acionada pelos pedais dá uma volta completa), qual é a distância aproximada percorrida pela bicicleta, sabendo-se que o comprimento de um círculo de raio **R** é igual a $2\pi R$, em que $\pi \simeq 3$? c

a) 1,2 m
b) 2,4 m
c) 7,2 m
d) 14,4 m
e) 48,0 m

10. No retângulo áureo, as razões das medidas dos seus lados são uma aproximação do número de ouro, ou seja, considerando o retângulo ABCD temos que $\frac{BC}{AB} \simeq 1{,}62 \simeq \Phi$. Podemos construir um retângulo áureo por meio da união de quadrados cujas medidas dos lados coincidem com a sequência de Fibonacci, ou seja, 1, 1, 2, 3, 5, 8..., e quanto mais quadrados forem unidos, mais próximo do número de ouro será a razão entre as medidas de seus lados. Observe a construção de um retângulo áureo:



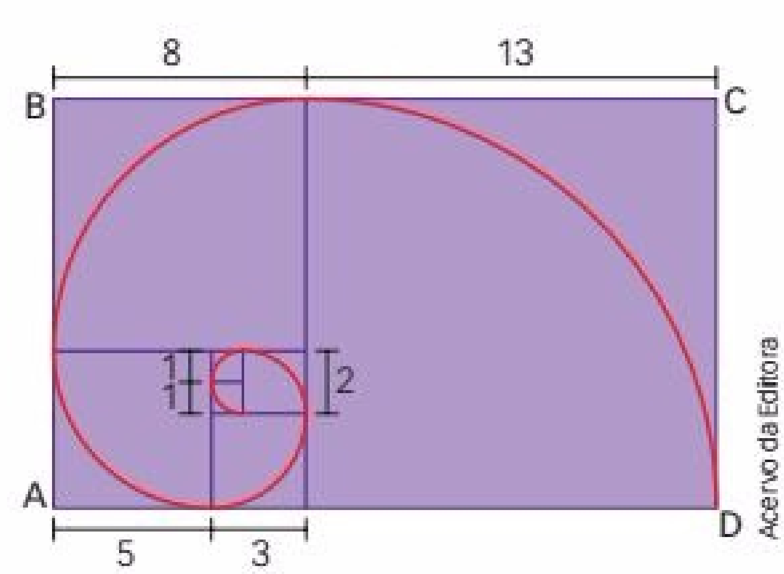
Os retângulos áureos circunscrevem uma espiral logarítmica, também chamada de espiral de ouro, frequentemente encontrada na natureza.

Cathy Keifer/ Dreamstime.com

A cauda do camaleão, quando contraída, é uma das mais perfeitas representações da espiral logarítmica na natureza. Outros lugares onde encontramos a espiral logarítmica são, por exemplo, a concha do náutilo, a cauda de um cavalo marinho, a disposição das sementes de um girassol, os marfins de elefantes etc.

Camaleão adulto: de 40 cm a 52 cm de comprimento.

Utilizando retângulos áureos e arcos de circunferência, podemos construir uma espiral semelhante à espiral logarítmica. Observe:



Qual o comprimento aproximado da espiral apresentada na imagem acima? 51,81 u

CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Na patinação artística no gelo, um dos componentes técnicos avaliados pelos juízes na categoria individual são as piruetas, que consistem em girar em torno de si no mínimo três voltas. A cada volta completada pelo patinador, ele retorna à posição inicial; e caso ele dê meia volta, sua posição será em sentido oposto à inicial. Outro esporte em que há presença de giros em suas manobras é o *bodyboarding*, no qual o atleta desliza sobre as ondas deitado em uma prancha. Uma dessas manobras chama-se "trezentos e sessenta graus", em que é necessário girar 360° em torno do eixo da prancha em direção à parede da onda.


Gerard Vandystadt/ Tips Images/ Glow Images

Em abril de 2003, em Nova York, EUA, a patinadora sueca Lucinda Ruh deu 115 voltas sobre um pé só, entrando para o *Guinness World Records*.


Pedro Monteiro/ Shutterstock/ Glow Images

Atleta executando a manobra "trezentos e sessenta graus".

A ação de girar em torno de um ponto fixo está associada à ideia de ângulo. Essa ideia não é uma exclusividade da patinação ou do *bodyboarding*, ela está presente em muitas outras situações, das mais simples, como abrir uma torneira, às mais complexas, como a rotação dos componentes da turbina de um avião.

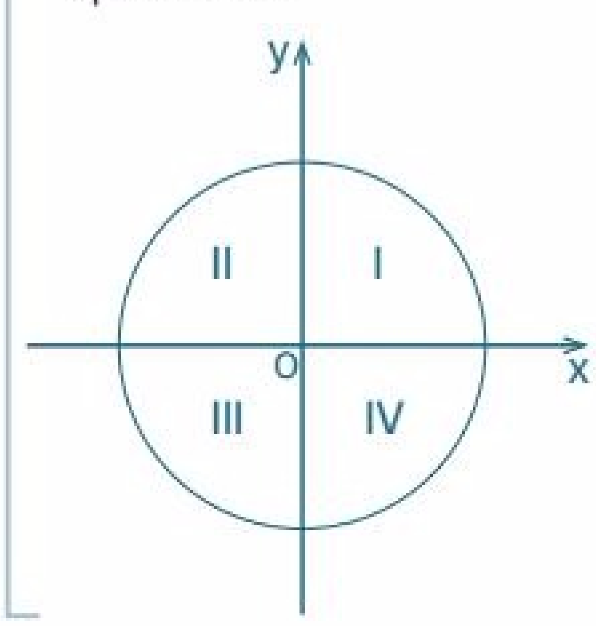
Vimos anteriormente que, dado um ponto na circunferência, deslocando-se de **A** para **B**, ele irá percorrer uma **distância** ℓ, cuja unidade de medida é a mesma do raio (m, cm, mm etc.), ao mesmo tempo em que ele gira um **ângulo** α em torno do centro **O**, cuja unidade de medida é dada em graus ou em radianos. Então poderíamos perguntar:

- Em qual sentido esse ponto se desloca: horário ou anti-horário?
- E se o ponto girou mais do que uma volta completa?

Para contemplar casos como esses, vamos definir a **circunferência trigonométrica** ou **ciclo trigonométrico**.

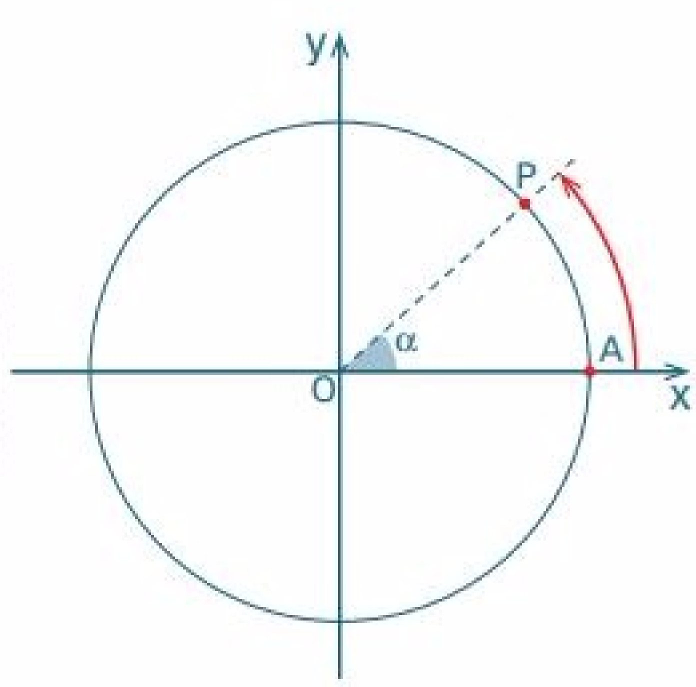
Inicialmente, consideramos uma circunferência de centro **O** e raio unitário, ou seja, raio cuja medida é 1 unidade de comprimento ($r = 1$). Em seguida, posicionamos o centro dessa circunferência sob a origem de um sistema cartesiano, que a divide em quatro partes chamadas **quadrantes**. Por fim, vamos convencionar que os arcos têm origem no ponto $A(1, 0)$, com medida positiva no sentido anti-horário e negativa no sentido horário.

Na circunferência trigonométrica, **I**, **II**, **III** e **IV** indicam os quadrantes.



Acervo da Editora

Assim, a cada ponto **P** da circunferência trigonométrica, está associado um arco $\overset{\frown}{AP}$ cuja medida α é dada em graus ou radianos. Note que, como o raio da circunferência trigonométrica mede 1 unidade, a medida do arco em radianos é numericamente igual ao seu comprimento. Por isso, daqui em diante, deixaremos de utilizar a notação **rad** para indicar um arco na circunferência trigonométrica.



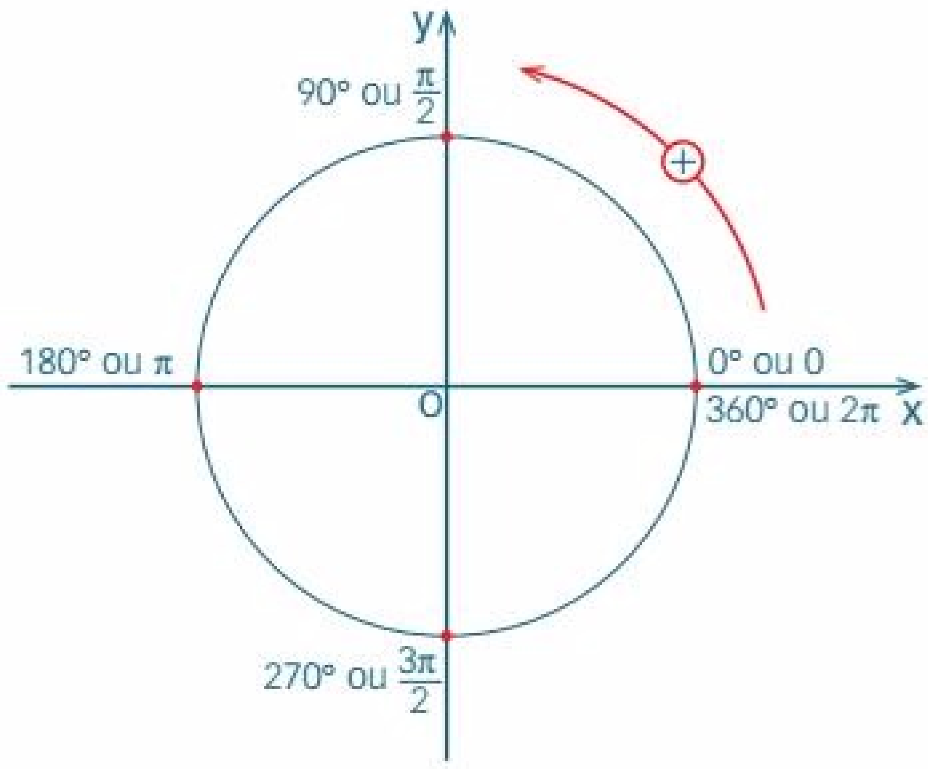
Acervo da Editora


Delfim Martins/ Pulsar Imagens

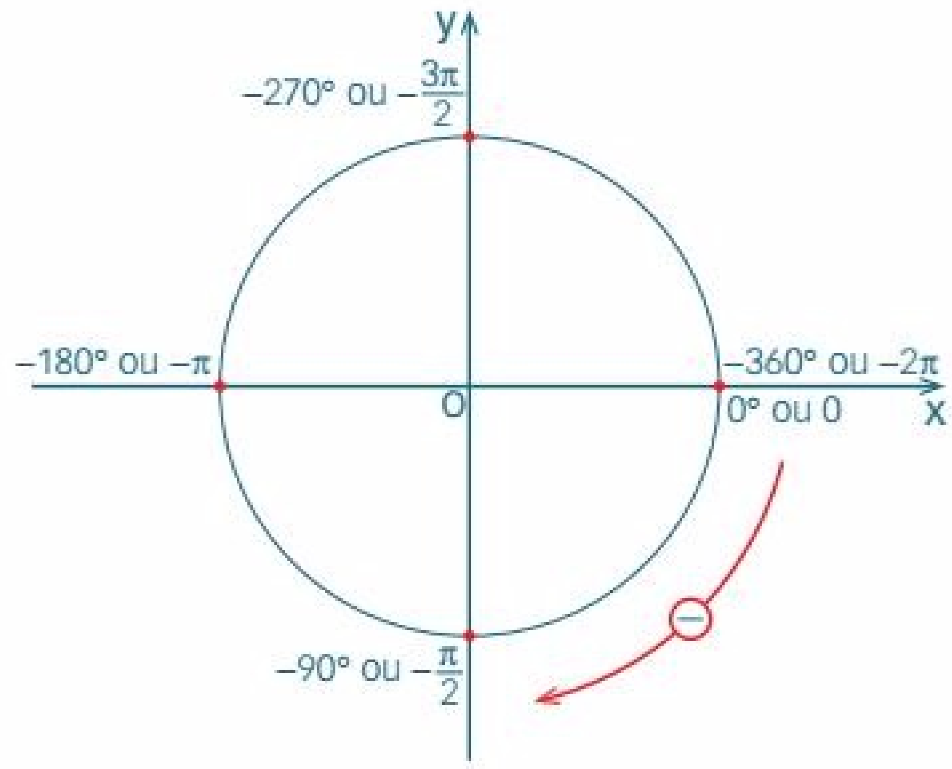
A área irrigada pelo sistema de pivô central lembra uma circunferência. Esse sistema é constituído por vários aspersores ligados a uma haste, com uma das pontas fixa em um ponto, que gira em torno do próprio eixo, caracterizando um movimento circular. Na fotografia observa-se uma plantação de milho sob pivô de irrigação central em Guaíra, São Paulo, 2013.

Veja na circunferência trigonométrica as medidas dos arcos de 0 volta, $\frac{1}{4}$ de volta, $\frac{1}{2}$ volta, $\frac{3}{4}$ de volta e 1 volta completa, que são as extremidades dos quadrantes.

Sentido anti-horário

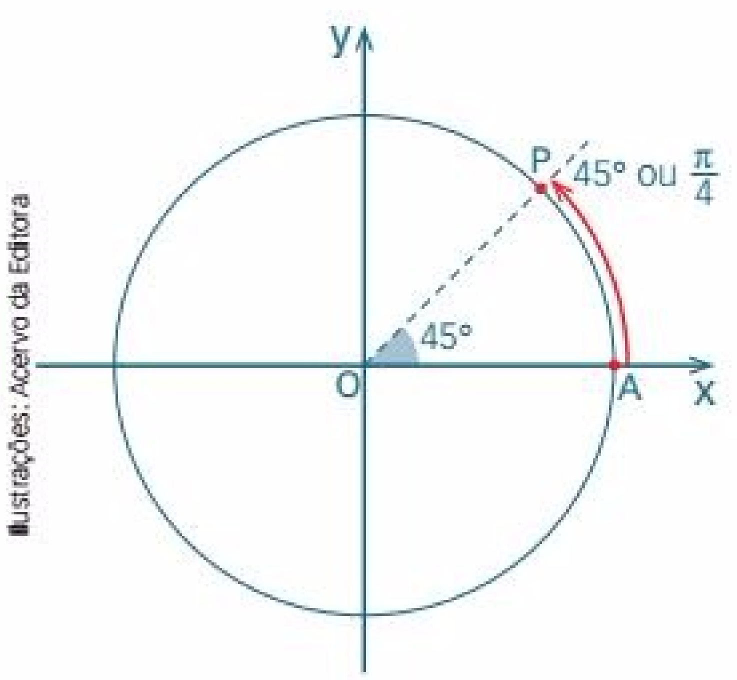


Sentido horário

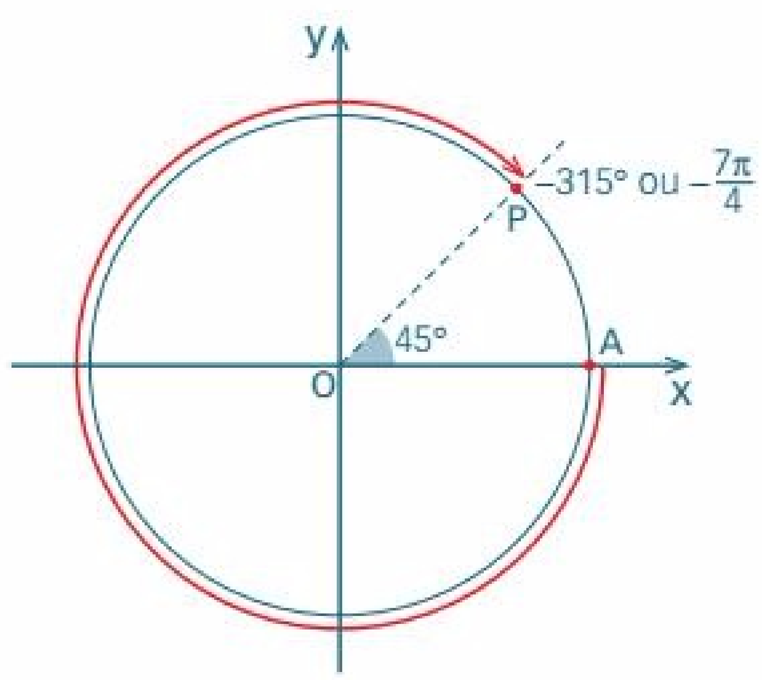


Arcos côngruos

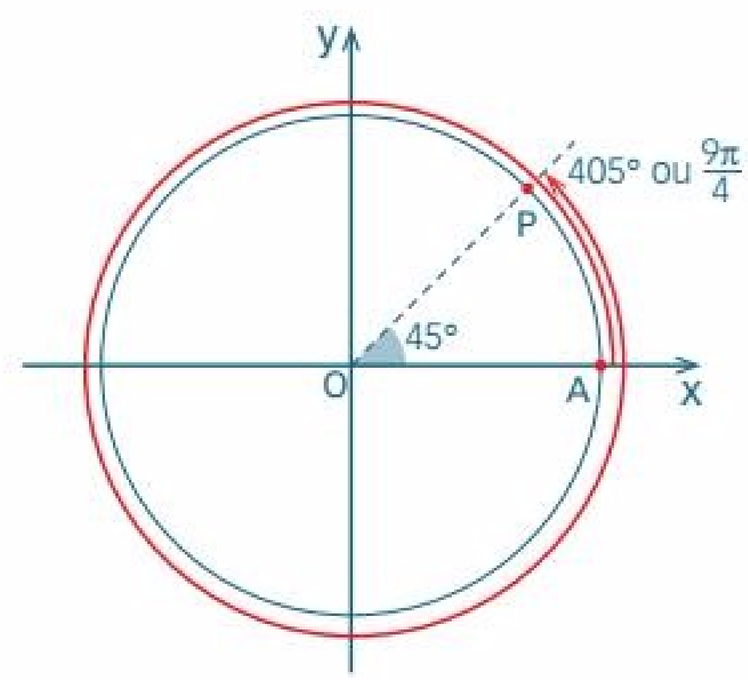
O ponto **P** pode também deslocar-se no sentido horário ou dar mais do que uma volta completa. Consequentemente, um mesmo ponto **P** está associado a infinitos arcos. Observe alguns exemplos.



O ponto **P** corresponde à extremidade final de um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida 45° ou $\frac{\pi}{4}$.



O ponto **P** também corresponde à extremidade final de um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida −315° ou $-\frac{7\pi}{4}$, pois ele deslocou-se no sentido horário.



O ponto **P** também corresponde à extremidade final de um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida 405° ou $\frac{9\pi}{4}$, pois ele deslocou-se uma volta completa no sentido anti-horário mais 45° ou $\frac{\pi}{4}$.

Ilustrações: Acervo da Editora

Note que $45° + \underbrace{360°}_{\text{1 volta completa}} = 405°$ ou $\frac{\pi}{4} + \underbrace{2\pi}_{\text{1 volta completa}} = \frac{9\pi}{4}$.

Além disso, o ponto **P** poderia dar **k** voltas completas, tanto no sentido anti-horário quanto no sentido horário, e a medida do arco $\overset{\frown}{AP}$ seria escrita da seguinte maneira:

$$45° + k \cdot 360° \text{ ou } \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{, sendo } k \in \mathbb{Z}$$

Professor(a): Verifique se os alunos perceberam que o arco de medida $-315°$ ou $-\frac{7\pi}{4}$ é côngruo ao de 45° ou $\frac{\pi}{4}$, pois ele pode ser escrito na forma $45° + (-1) \cdot 360°$ ou $\frac{\pi}{4} + (-1) \cdot 2\pi$.

Nesse caso, os arcos diferem apenas no sentido de deslocamento ou na quantidade de voltas. Dizemos então que eles são **arcos côngruos**.

Quando dois ou mais arcos de uma circunferência trigonométrica têm a mesma origem e a mesma extremidade, dizemos que eles são **arcos côngruos**. Dado um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, com $0° \leq \alpha < 360°$ ou $0 \leq \alpha < 2\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, os arcos côngruos a $\overset{\frown}{AP}$ são da forma:

$$\alpha + k \cdot 360° \text{ ou } \alpha + k \cdot 2\pi$$

O arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α é chamado **1ª determinação positiva** dos arcos côngruos a ele.

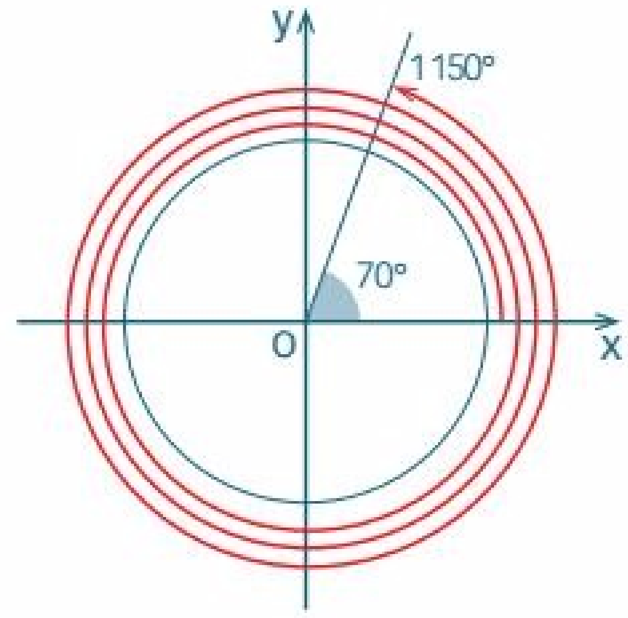
Atividades resolvidas

R6. Calcule a 1ª determinação positiva e o número de voltas completas na circunferência trigonométrica do arco de medida:

a) $1\,150°$

b) $\frac{11\pi}{4}$

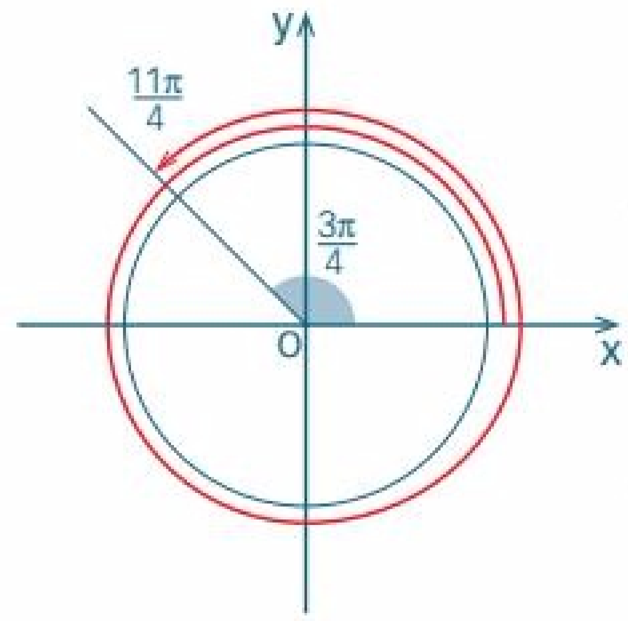
Resolução



a) O arco de medida α, chamado de 1ª determinação positiva, em $\alpha + k \cdot 360°$ é côngruo a $1\,150°$, sendo $k \in \mathbb{Z}$ o número de voltas completas na circunferência trigonométrica. Assim, devemos dividir $1\,150°$ por $360°$, para obtermos os valores de **k** e α:

$$\begin{array}{r|l} 1\,150 & 360 \\ \hline \underbrace{70}_{\alpha} & \underbrace{3}_{k} \end{array}$$

Portanto, $1\,150° = 70° + 3 \cdot 360°$, ou seja, a 1ª determinação positiva do arco é $70°$ e o número de voltas completas na circunferência trigonométrica no sentido positivo é 3.



Ilustrações: Acervo da Editora

b) Vamos resolver esse item de duas maneiras.

- 1ª maneira: O arco de medida α, em $\alpha + k \cdot 2\pi$, é côngruo a $\frac{11\pi}{4}$. Desse modo, como $2\pi = \frac{8\pi}{4}$, temos:

$$\frac{11\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \underbrace{\frac{3\pi}{4}}_{\alpha} + \underbrace{1}_{k} \cdot 2\pi$$

- 2ª maneira: Inicialmente convertemos a medida de radianos para graus:

Radiano (rad)	Graus (°)
2π	360
$\frac{11\pi}{4}$	x

$$2\pi \cdot x = \frac{11\pi}{4} \cdot 360 \Rightarrow x = \frac{990\pi}{2\pi} \Rightarrow x = 495 \rightarrow \boxed{495°}$$

Dividindo $495°$ por $360°$ obtemos os valores de **k** e α:

$$\begin{array}{r|l} 495 & 360 \\ \hline \underbrace{135}_{\alpha} & \underbrace{1}_{k} \end{array}$$

Convertendo $\alpha = 135°$ em radianos:

Graus (°)	Radiano (rad)
180	π
135	x

$$180 \cdot x = 135 \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{135\pi}{180} = \boxed{\frac{3\pi}{4}}$$

Portanto, $k = 1$ representa uma volta completa na circunferência trigonométrica no sentido positivo e a 1ª determinação positiva do arco é $\frac{3\pi}{4}$.

R7. Obtenha a expressão que determina todos os arcos côngruos ao arco cuja medida é $-\frac{17\pi}{3}$.

Resolução

Queremos uma expressão do tipo $\alpha + k \cdot 2\pi$, com $0 \leq \alpha < 2\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$ que determina todos os arcos côngruos a $-\frac{17\pi}{3}$. Logo, devemos obter o valor de α, isto é, a 1ª determinação positiva. Como $-2\pi = -\frac{6\pi}{3}$, temos:

$$-\frac{17\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3} - \frac{12\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3} - 4\pi = -\frac{5\pi}{3} - \underbrace{2}_{k} \cdot 2\pi$$

Segue que a 1ª determinação positiva é dada por $-\frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3}$.

Portanto, a expressão que determina todos os arcos côngruos ao arco de medida $-\frac{17\pi}{3}$ é $\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

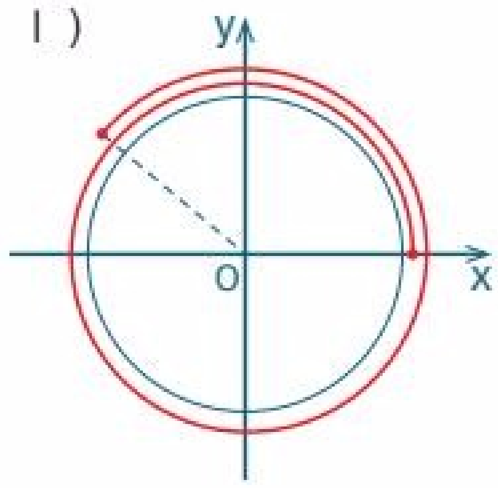
11. Escreva a 1ª determinação positiva do arco de:

a) 540° 180°
b) 1130° 50°
c) 2080° 280°
d) $\frac{66\pi}{8}$ $\frac{\pi}{4}$
e) $\frac{45\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{4}$
f) $\frac{125\pi}{12}$ $\frac{5\pi}{12}$

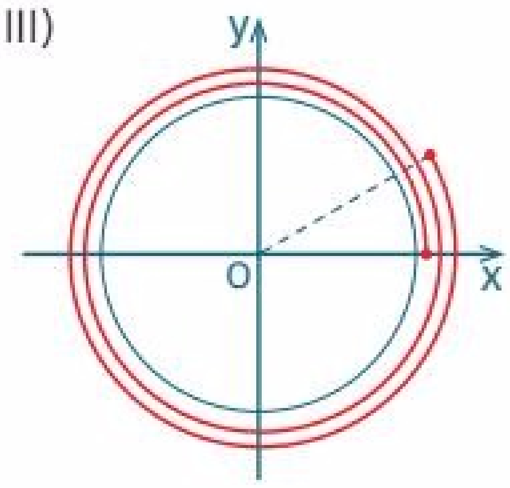
12. Por meio de estimativas, associe as medidas a seguir aos arcos indicados nas circunferências trigonométricas. Para isso, escreva a letra e o símbolo romano correspondentes. a–III; b–IV; c–I; d–II

a) $\frac{25\pi}{6}$ b) 615° c) 500° d) $\frac{34\pi}{9}$

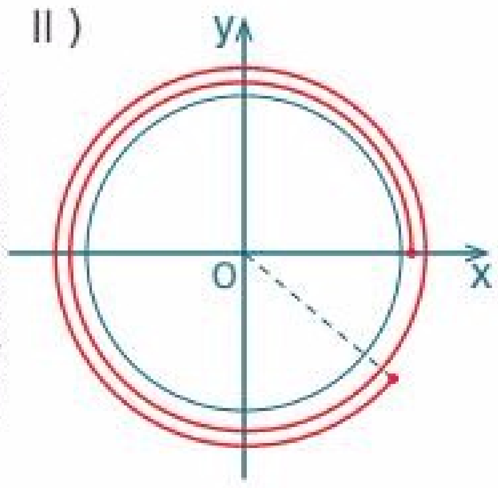
I)



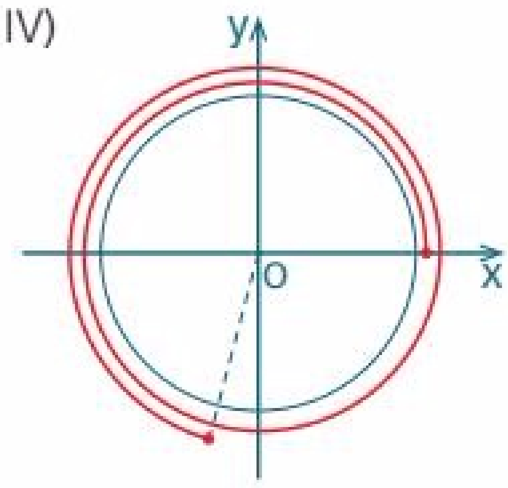
III)



II)



IV)



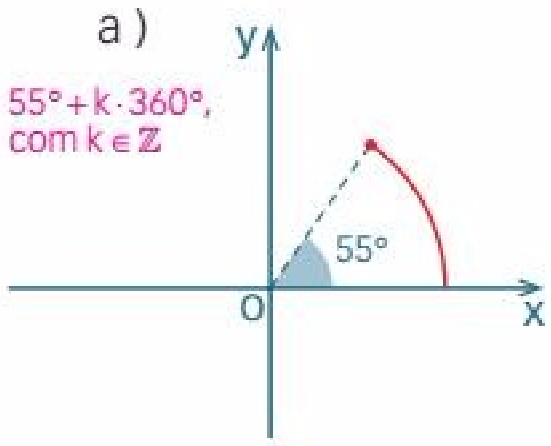
Ilustrações: Acervo da Editora

13. Em uma circunferência trigonométrica represente a extremidade de cada um dos arcos de medidas apresentadas a seguir. Professor(a): Veja a resposta desta atividade na Assessoria Pedagógica.

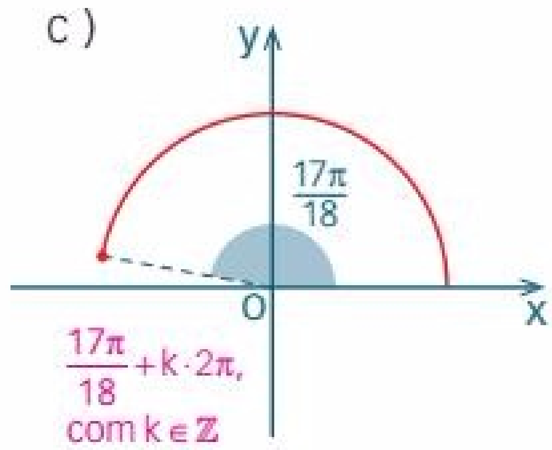
a) 800°
b) $\frac{5\pi}{6}$
c) 675°
d) $\frac{4\pi}{3}$
e) 2000°
f) $\frac{46\pi}{9}$

14. Para cada arco em destaque escreva uma expressão que determine os seus arcos côngruos.

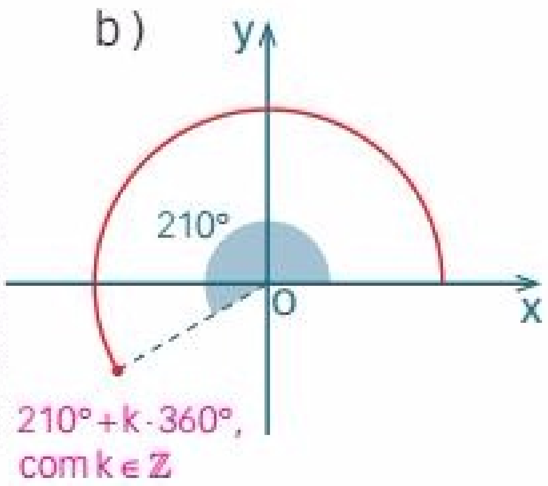
a)



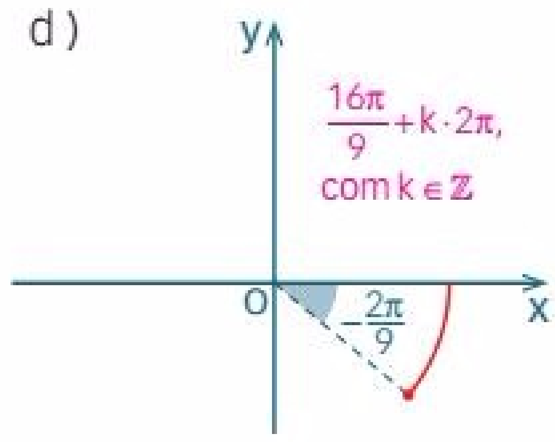
c)



b)



d)



Ilustrações: Acervo da Editora

15. (Unemat-MT) Quanto ao arco de 4 555°, é correto afirmar: e

a) Pertence ao segundo quadrante e tem como côngruo o ângulo de 55°.
b) Pertence ao primeiro quadrante e tem como côngruo o ângulo de 75°.
c) Pertence ao terceiro quadrante e tem como côngruo o ângulo de 195°.
d) Pertence ao quarto quadrante e tem como côngruo o ângulo de 3115°.
e) Pertence ao terceiro quadrante e tem como côngruo o ângulo de 4195°.

16. Em uma circunferência de raio unitário, represente as extremidades dos arcos obtidos por meio da expressão $\frac{\pi}{9} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ com **k** inteiro e não negativo.
Professor(a): Veja a resposta desta atividade na Assessoria Pedagógica.

DESAFIO

17. (ITA-SP) Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em radianos, é igual a: c

a) $\frac{23\pi}{11}$ b) $\frac{13\pi}{6}$ c) $\frac{24\pi}{11}$ d) $\frac{25\pi}{11}$ e) $\frac{7\pi}{3}$

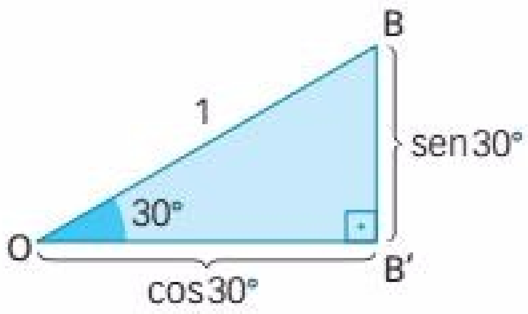
18. (UEM-PR) Um brinquedo eletrônico tem um disco de 10 cm de raio, e esse disco possui 5 pontos igualmente distribuídos em seu bordo e numerados de 1 a 5 no sentido horário. Uma esfera magnética movimenta-se na borda desse disco.

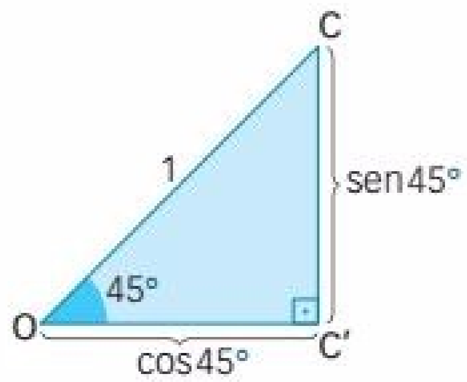
Quando posicionada em um ponto de número ímpar, movimenta-se para o próximo número, em sentido horário; e quando posicionada em um ponto de número par, movimenta-se dois números também em sentido horário. Em relação ao exposto, julgue os itens em verdadeiro ou falso.
verdadeiro: b, d, e; falso: a, c

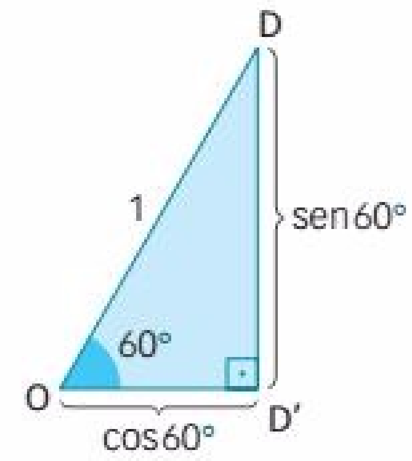
a) Se a esfera é inicialmente colocada no ponto de número 5, com 1000 movimentos, a esfera irá parar no ponto de número 2.
b) Se a esfera começa na posição 1, com dois movimentos, o ângulo do maior arco compreendido entre a posição 1 e a posição final, em relação ao centro do disco, em radianos, mede $\frac{6\pi}{5}$.
c) Se a esfera começa na posição 2, com 3 movimentos, o caminho total que a esfera percorre mede 10π cm.
d) Se a esfera não inicia na posição 5, então ela nunca passará por essa posição.
e) Qualquer que seja a posição em que a esfera seja inicialmente colocada, ela sempre passará pela posição 4.

SENO E COSSENO NA CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Considere os triângulos retângulos OBB′, OCC′ e ODD′, cada um com hipotenusa de medida igual a 1 unidade. Utilizando as razões trigonométricas seno e cosseno do ângulo em destaque, determinamos as medidas dos catetos dos triângulos da seguinte maneira:



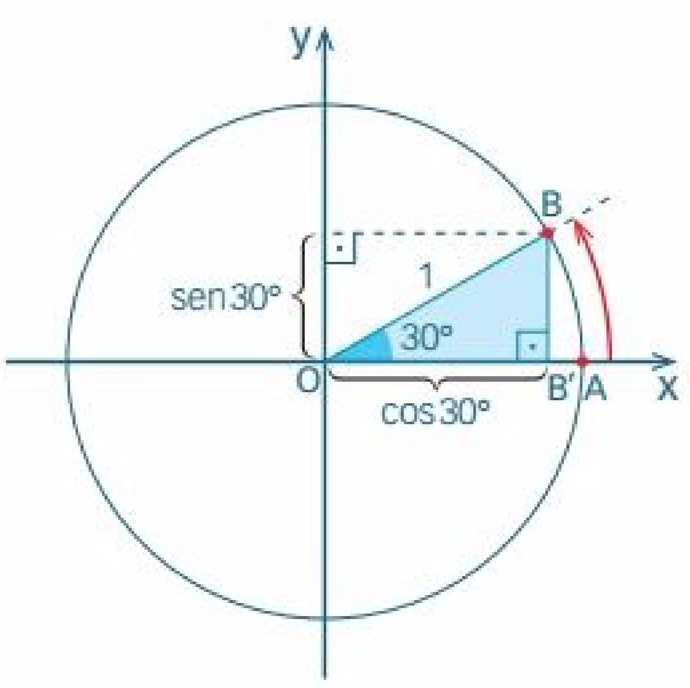




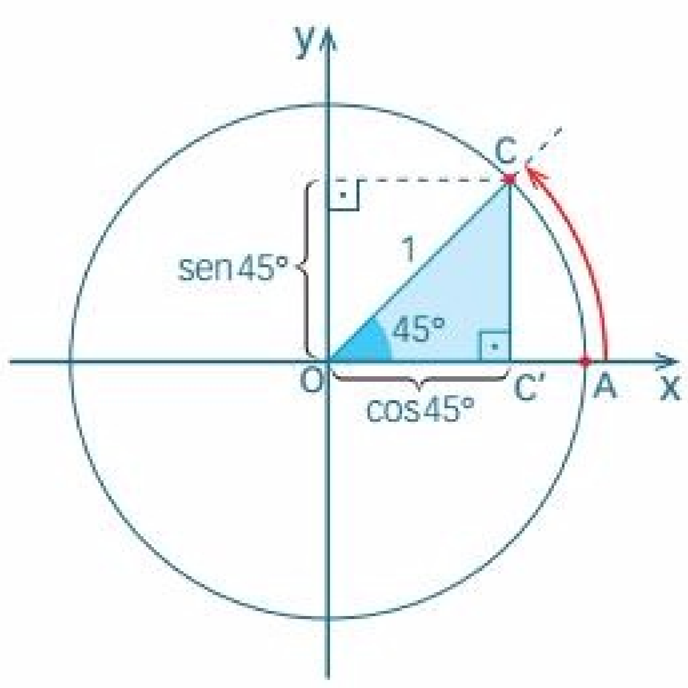
$\text{sen } 30° = \dfrac{BB'}{1}$	$\cos 30° = \dfrac{OB'}{1}$	$\text{sen } 45° = \dfrac{CC'}{1}$	$\cos 45° = \dfrac{OC'}{1}$	$\text{sen } 60° = \dfrac{DD'}{1}$	$\cos 60° = \dfrac{OD'}{1}$
$\text{sen } 30° = BB'$	$\cos 30° = OB'$	$\text{sen } 45° = CC'$	$\cos 45° = OC'$	$\text{sen } 60° = DD'$	$\cos 60° = OD'$

> Lembre-se de que, em um triângulo retângulo, calculamos o seno de um ângulo agudo (α) pela razão entre as medidas do cateto oposto (CO) a esse ângulo e da hipotenusa (H), isto é, $\text{sen}\alpha = \dfrac{CO}{H}$. Já o cosseno, calculamos pela razão entre as medidas do cateto adjacente (CA) a esse ângulo e da hipotenusa (H), isto é, $\cos\alpha = \dfrac{CA}{H}$.

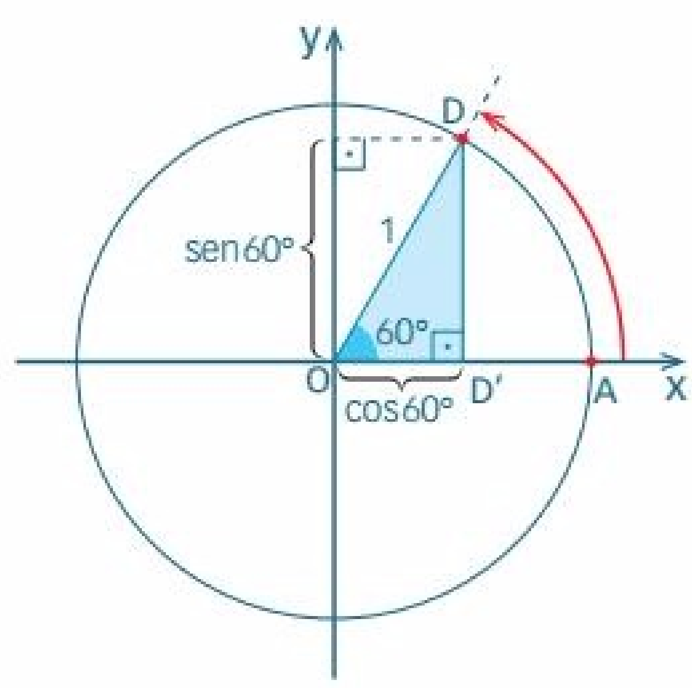
Como a medida da hipotenusa em cada um desses triângulos é 1 unidade, os vértices **B**, **C** e **D** dos triângulos são pontos da circunferência trigonométrica.



Arco $\widehat{AB}$ de medida 30°.

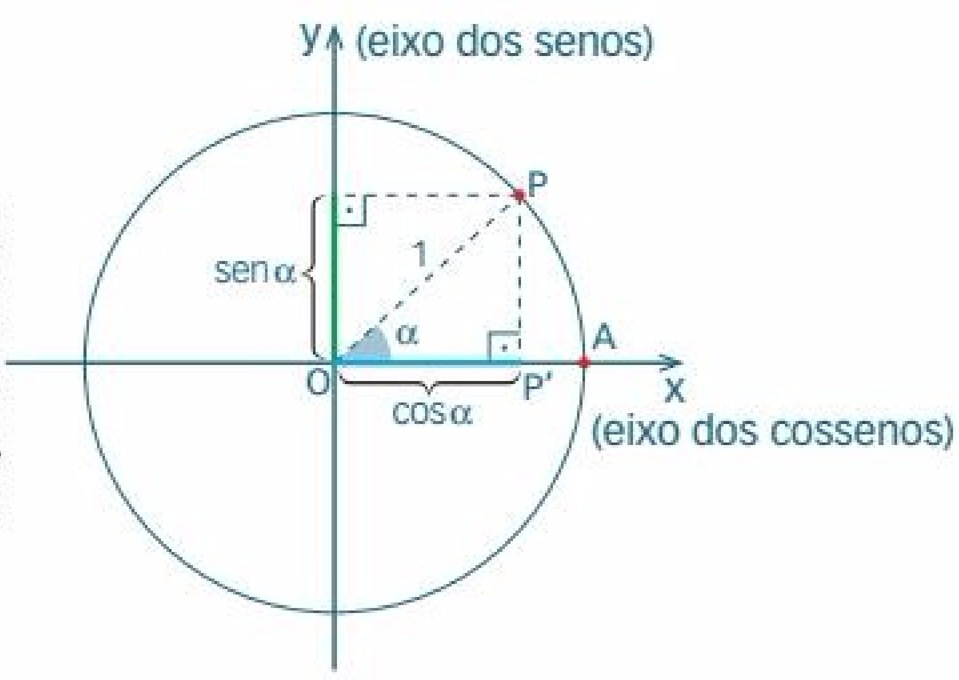


Arco $\widehat{AC}$ de medida 45°.



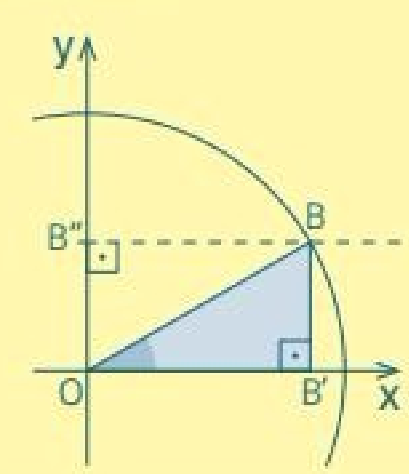
Arco $\widehat{AD}$ de medida 60°.

Essas ideias nos levam a perceber que, dado um arco de medida α e extremidade **P** na circunferência trigonométrica, o par ordenado $(\cos\alpha, \text{sen}\alpha)$ representa as coordenadas do ponto **P**, de tal modo que a abscissa $\cos\alpha$ é a projeção de **P** no eixo *x* e a ordenada $\text{sen}\alpha$ é a projeção de **P** no eixo *y*. Dizemos então que o eixo *x* é o **eixo dos cossenos** e o eixo *y* é o **eixo dos senos**.



Ilustrações: Acervo da Editora

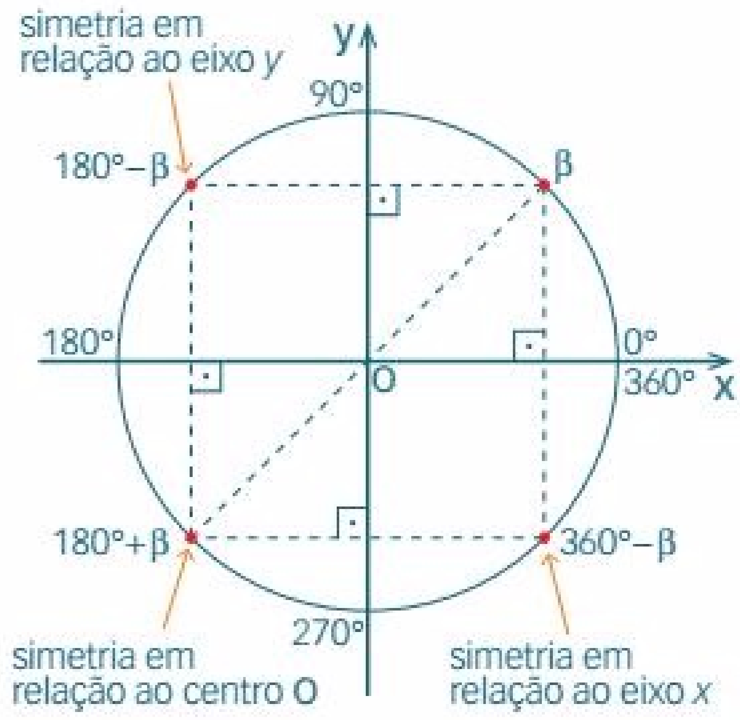
Projeção: no triângulo retângulo a seguir, o ponto **B'** é a projeção do ponto **B** sobre o eixo *x* e o ponto **B"** é a projeção do ponto **B** sobre o eixo *y*.

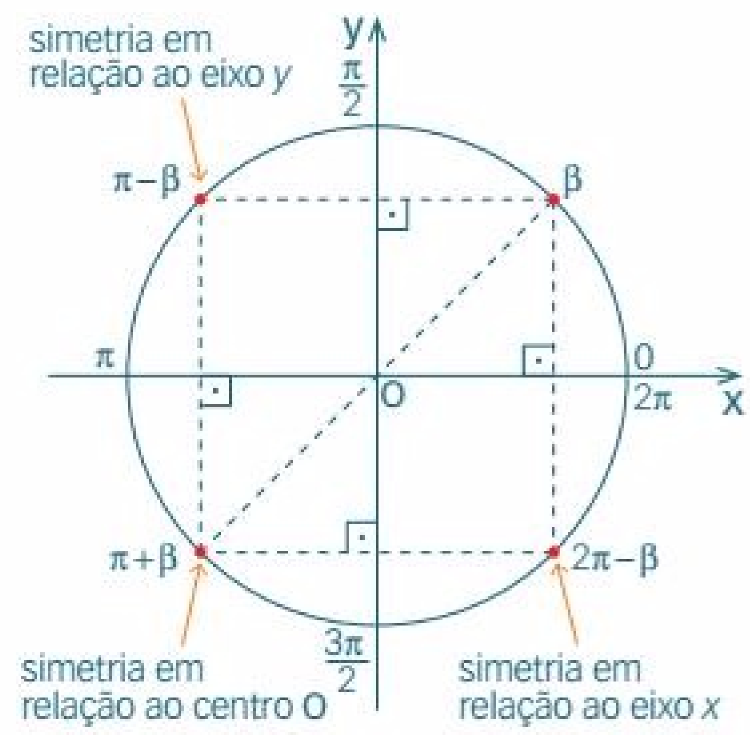


SIMETRIA E REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

Agora podemos pensar em seno e cosseno de ângulos (ou arcos) maiores ou iguais a 90° ou $\frac{\pi}{2}$, pois até então estudamos essas relações trigonométricas apenas para os ângulos agudos nos triângulos retângulos. Também podemos pensar em senos e cossenos de ângulos negativos.

Para isso, tomamos um arco de medida β do 1º quadrante e consideramos três simetrias na circunferência trigonométrica:

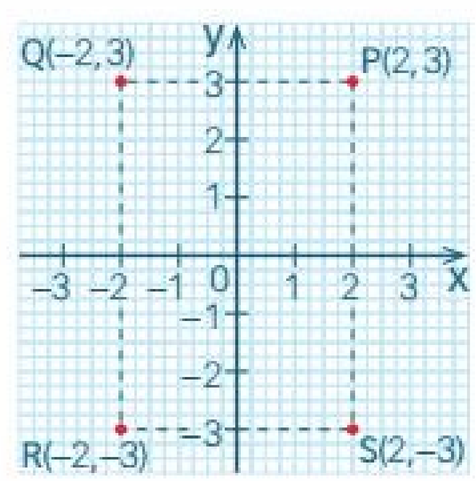




Lembre-se de que, em um sistema cartesiano, dado um ponto $P(a, b)$, com $a > 0$ e $b > 0$:

- o ponto $Q(-a, b)$ é simétrico a **P** em relação ao eixo *y*.
- o ponto $R(-a, -b)$ é simétrico a **P** em relação à origem.
- o ponto $S(a, -b)$ é simétrico a **P** em relação ao eixo *x*.

Por exemplo:



Utilizaremos agora a simetria nas circunferências para relacionar os valores de seno e cosseno de um arco α qualquer com o seno e o cosseno de um arco correspondente no primeiro quadrante. Esse procedimento é chamado de **redução ao 1º quadrante**; ele nos permite reduzir o cálculo dos valores das relações trigonométricas aos arcos de medida entre 0° e 90°. Observe:

- **Redução do 2º quadrante para o 1º quadrante.**

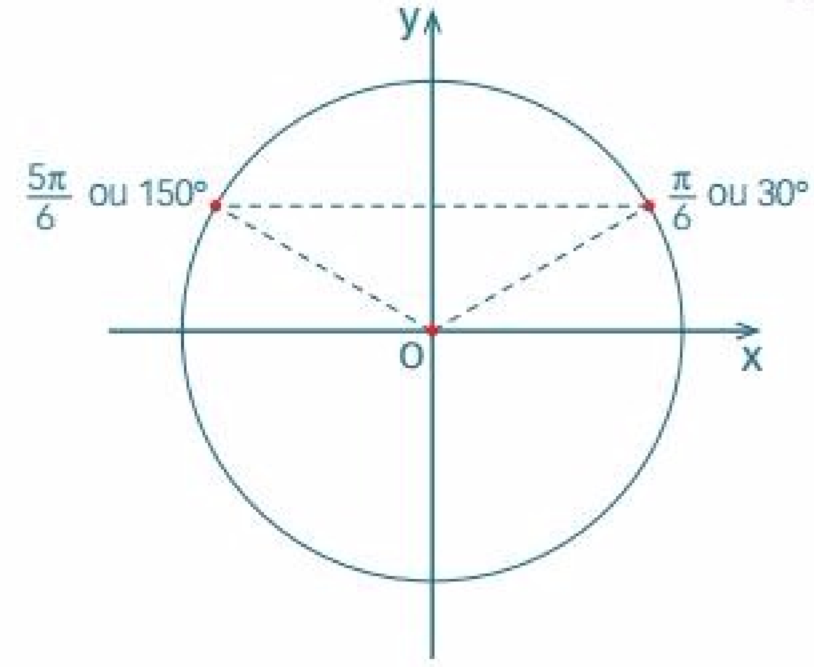
  Dado, por exemplo, o arco do 2º quadrante de medida $\frac{5\pi}{6}$, considerando a simetria em relação ao eixo *y*, o seu simétrico no 1º quadrante é o arco de medida $\frac{\pi}{6}$.

› $\text{sen}\frac{5\pi}{6} = \text{sen}\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{6}$

› $\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6}$

$$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}(\pi - \alpha)$$

$$\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$$



Ilustrações: Acervo da Editora

- **Redução do 3º quadrante para o 1º quadrante.**

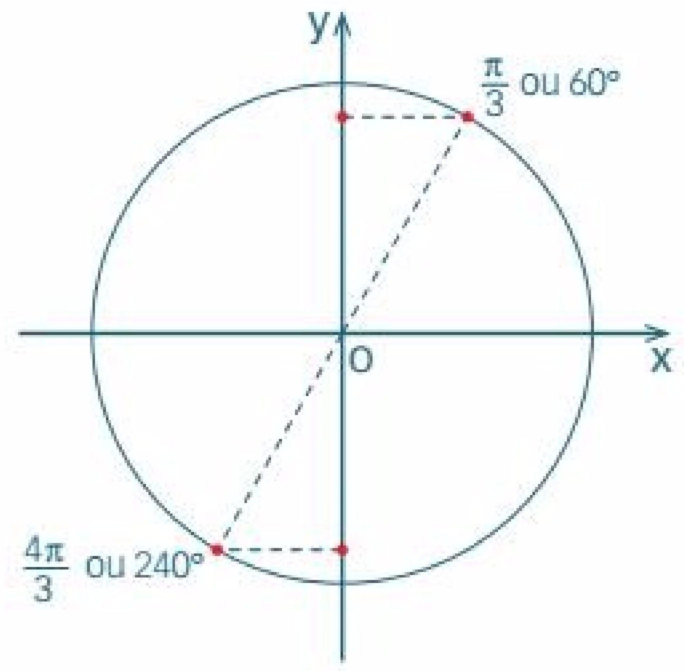
Dado, por exemplo, o arco do 3º quadrante de medida $\frac{4\pi}{3}$, considerando a simetria em relação ao centro **O**, o seu simétrico no 1º quadrante é o arco de medida $\frac{\pi}{3}$.

› $\text{sen}\frac{4\pi}{3} = -\text{sen}\left(\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = -\text{sen}\,\underbrace{\frac{7\pi}{3}}_{\frac{\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}} = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = -\text{sen}\frac{\pi}{3}$

› $\cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\left(\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = -\cos\,\underbrace{\frac{7\pi}{3}}_{\frac{\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}} = -\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = -\cos\frac{\pi}{3}$

$\text{sen}\alpha = -\text{sen}(\pi + \alpha)$

$\cos\alpha = -\cos(\pi + \alpha)$



- **Redução do 4º quadrante para o 1º quadrante.**

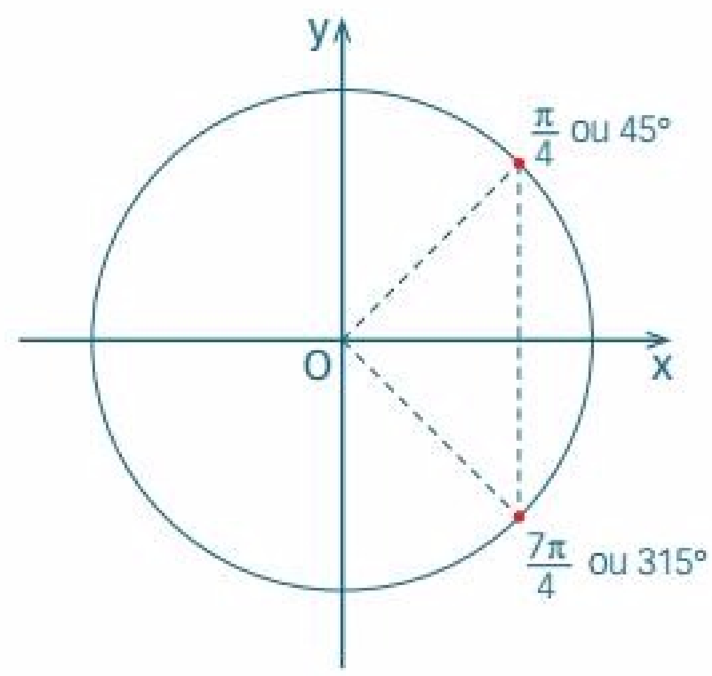
Dado, por exemplo, o arco do 4º quadrante de medida $\frac{7\pi}{4}$, considerando a simetria em relação ao eixo *x*, o seu simétrico no 1º quadrante é o arco de medida $\frac{\pi}{4}$.

› $\text{sen}\frac{7\pi}{4} = -\text{sen}\left(2\pi - \frac{7\pi}{4}\right) = -\text{sen}\frac{\pi}{4}$

› $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(2\pi - \frac{7\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

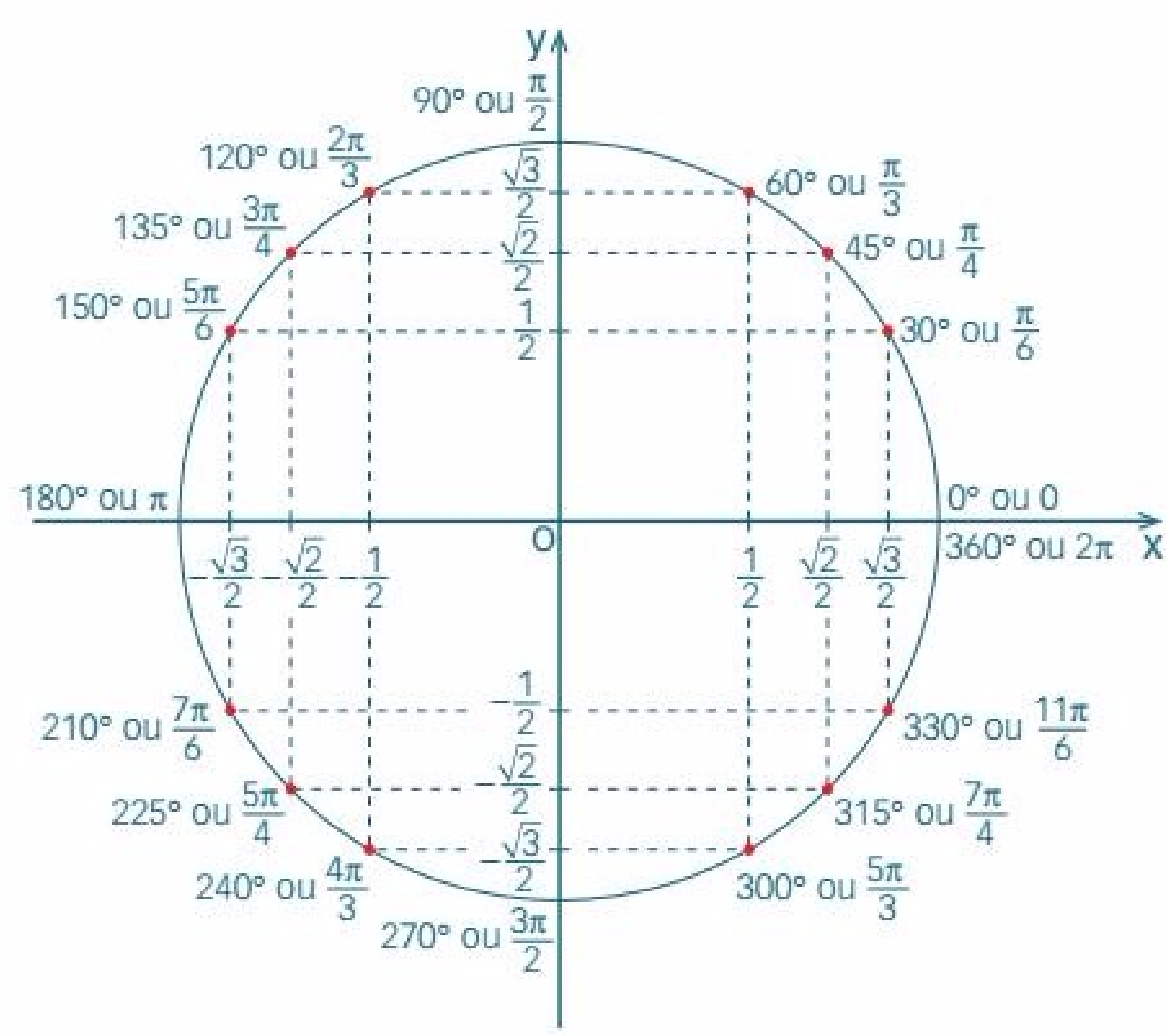
$\text{sen}\alpha = -\text{sen}(2\pi - \alpha)$

$\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha)$



Como já havíamos deduzido os valores do seno e do cosseno para os **ângulos notáveis** (30°, 45° e 60°) no estudo da trigonometria no triângulo retângulo, vamos indicar também na circunferência trigonométrica os ângulos cuja redução ao 1º quadrante é um ângulo notável.

α	30°	45°	60°
$\text{sen}\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$



Ilustrações: Acervo da Editora

Também podemos organizar esses valores do seguinte modo:

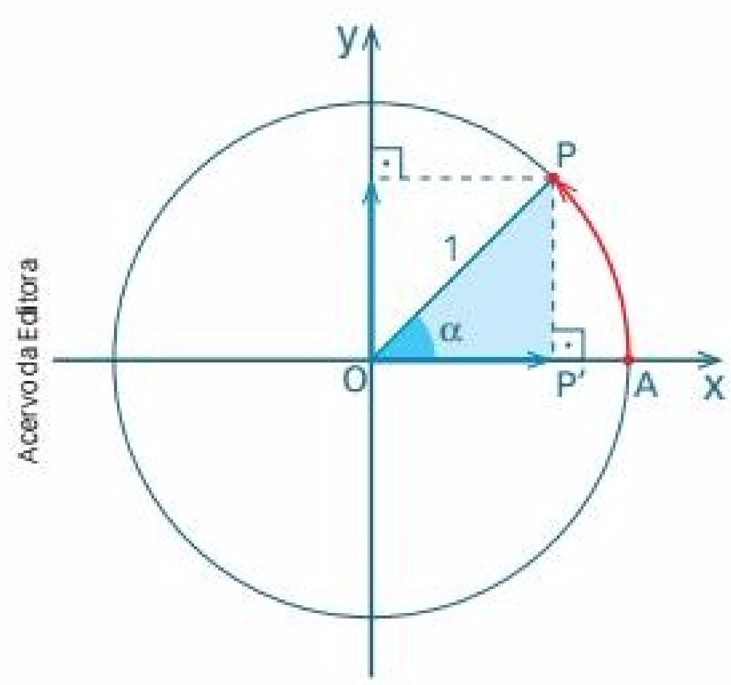
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
senα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

α	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
senα	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cosα	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Desse modo, estendemos a ideia de seno e cosseno para além dos ângulos internos agudos de um triângulo retângulo, isto é, para qualquer medida de ângulo maior ou igual a 90°. Esse estudo será muito importante para compreendermos as funções trigonométricas seno e cosseno, que iremos estudar na próxima unidade.

Relação fundamental da trigonometria na circunferência trigonométrica

O ponto **P**, na circunferência trigonométrica a seguir, é a extremidade de um arco $\widehat{AP}$ de medida α com $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, ou seja, α pertence ao 1º quadrante.



Lembre-se de que AB representa a medida de $\overline{AB}$.

Por meio do teorema de Pitágoras, vamos estabelecer uma relação entre o seno e o cosseno de α.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OPP', temos:

$$(OP)^2=(OP')^2+(P'P)^2 \Rightarrow 1^2=(\cos\alpha)^2+(\text{sen}\,\alpha)^2 \Rightarrow \boxed{\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$$

Professor(a): Se julgar necessário, exemplifique essa relação para o ponto P no 2º, 3º ou 4º quadrante.

Essa relação é chamada de **relação fundamental da trigonometria**. Ela é verdadeira mesmo que o ponto **P** esteja no 2º, 3º ou 4º quadrante, ou seja, para qualquer valor de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Agora, simplifique cada uma das expressões. Para isso utilize a relação fundamental da trigonometria.

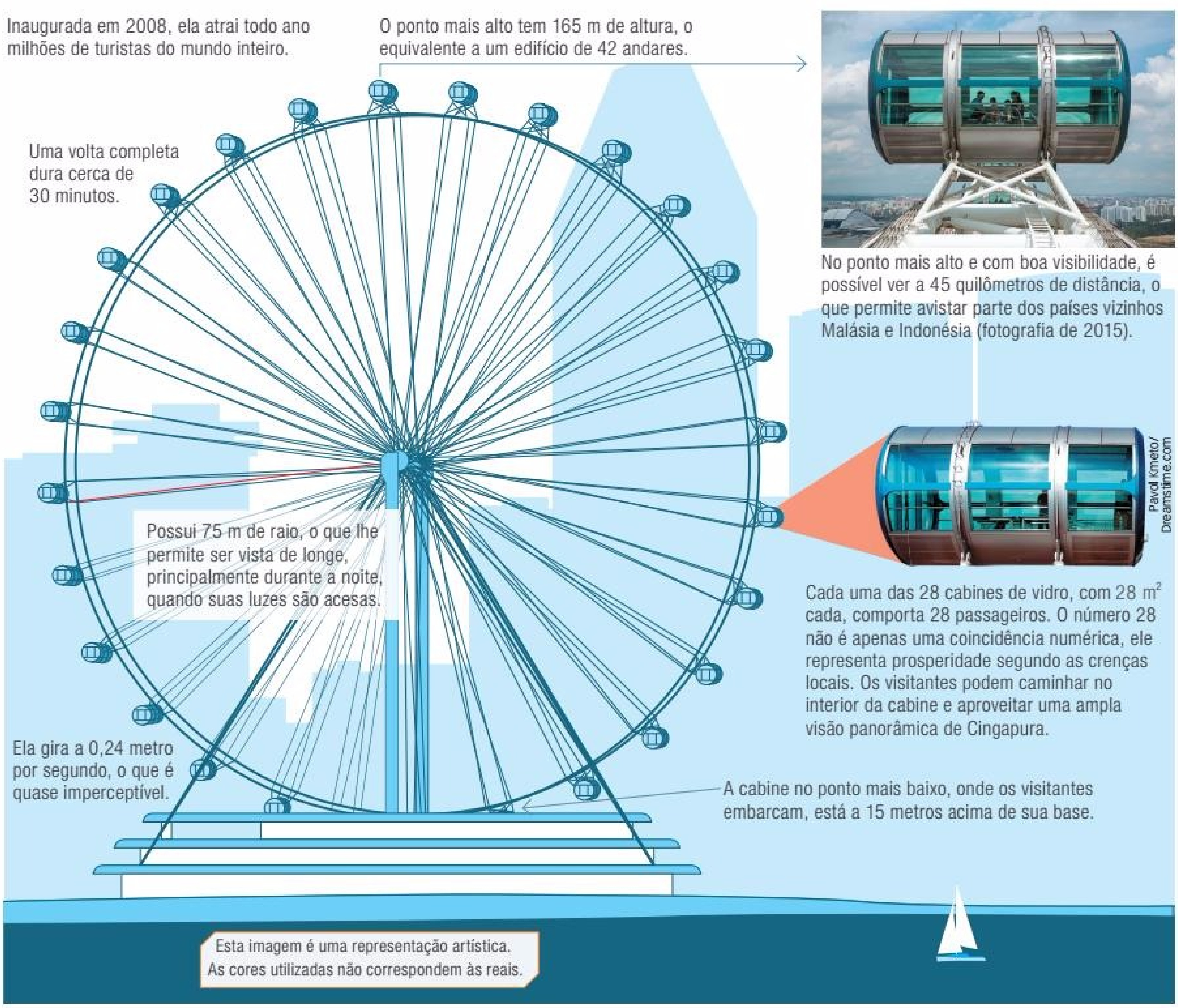
a) $\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}+\cos\alpha$ $\frac{1}{\cos\alpha}$

b) $\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha+\frac{\cos^3\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$ $\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$

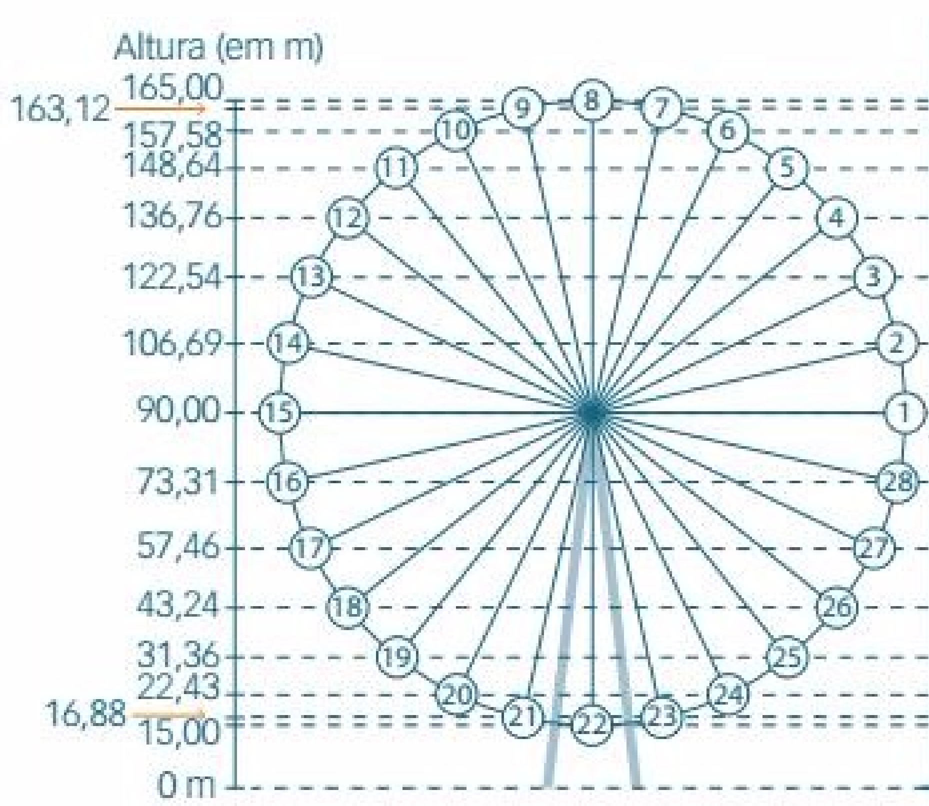
c) $\frac{\text{sen}^3\alpha}{\cos^2\alpha}+\text{sen}\,\alpha$ $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos^2\alpha}$

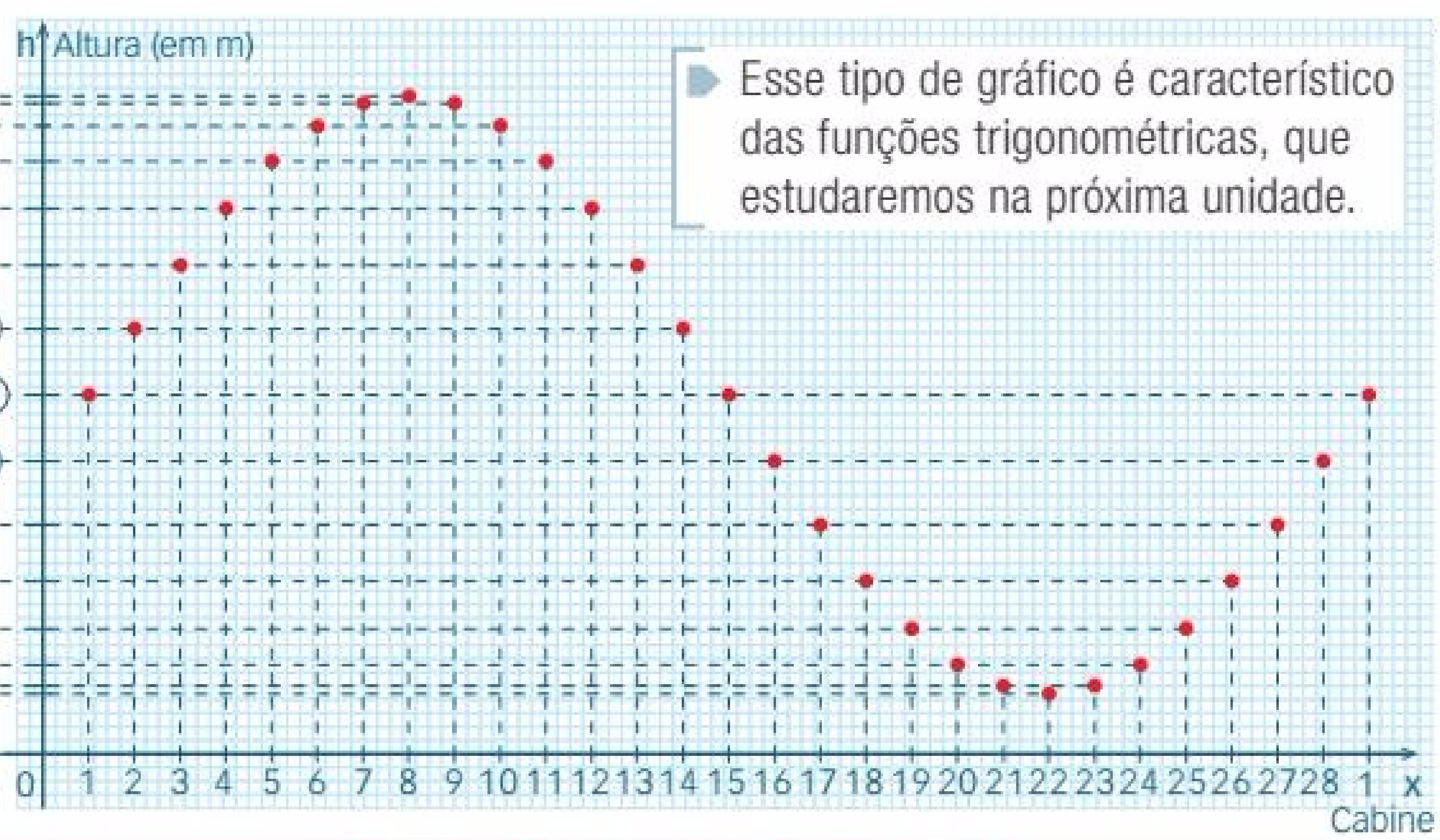
COMO FUNCIONA A Singapore Flyer

Localizada em Cingapura, ela é uma das maiores rodas-gigantes do mundo. Veja algumas informações sobre essa grande atração, com seus impressionantes 165 m de altura.



Se numerarmos as cabines da Singapore Flyer de 1 a 28, podemos determinar a altura aproximada de cada uma delas em relação ao solo, em determinado momento, pela fórmula $h = 90 + 75 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{14}x - \frac{\pi}{14}\right)$, em que x é o número da cabine. Para isso, podemos utilizar a tabela trigonométrica ou uma calculadora científica.





Professor(a): Comente com os alunos que, para determinar o seno e o cosseno de ângulos não múltiplos dos ângulos notáveis, recorremos à calculadora científica.

Atividades resolvidas

R8. Reduza ao 1º quadrante e determine o valor de:

a) $\cos 1\,665°$

b) $\operatorname{sen}\dfrac{23\pi}{6}$

Resolução

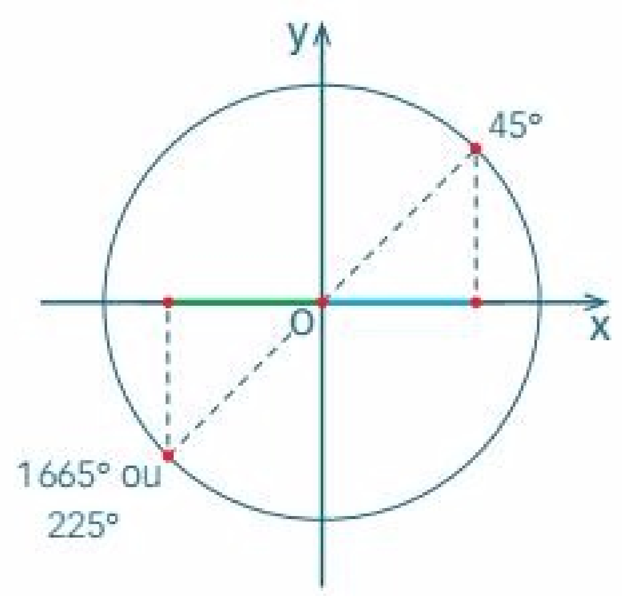
a) Vamos inicialmente obter a 1ª determinação positiva do arco de 1 665°:

$$\begin{array}{r|l} 1\,665 & 360 \\ \underbrace{225}_{\text{1ª determinação positiva}} & \underbrace{4}_{\text{número de voltas}} \end{array}$$

Assim, como a extremidade do arco de 225° está no 3º quadrante, temos:

$$\cos 1665° = \cos 225° = -\cos(180° + 225°) =$$

$$= -\cos(405°) = -\cos(45° + 360°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Portanto, $\cos 1\,665° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

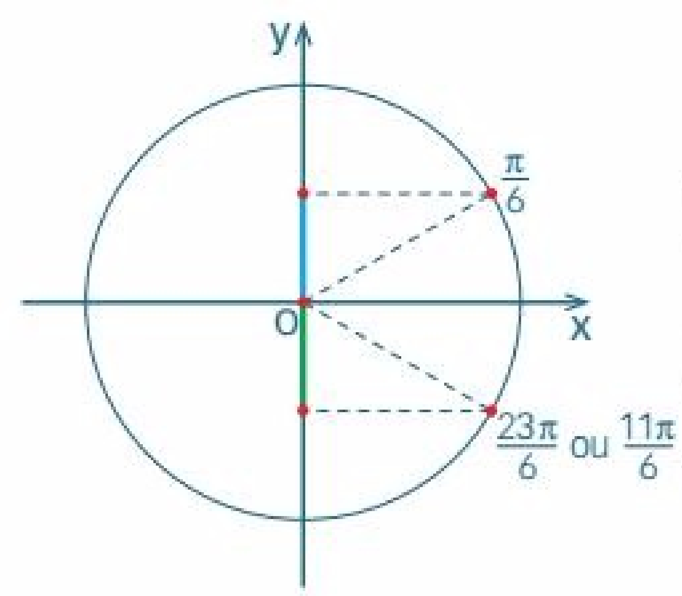
b) Calculando a 1ª determinação positiva do arco de $\dfrac{23\pi}{6}$, temos:

$$\frac{23\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} + \underbrace{\frac{12\pi}{6}}_{2\pi} = \frac{11\pi}{6} + 2\pi = \underbrace{\frac{11\pi}{6}}_{\text{1ª determinação positiva}} + \overset{\text{número de voltas}}{\hat{1}} \cdot 2\pi$$

Assim, como a extremidade do arco de $\dfrac{11\pi}{6}$ está no 4º quadrante, temos:

$$\operatorname{sen}\frac{23\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6} = -\operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{11\pi}{6}\right) =$$

$$= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$



Ilustrações: Acervo da Editora

Portanto, $\operatorname{sen}\dfrac{23\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$.

R9. Determine o valor da expressão $\dfrac{2\cos\dfrac{2\pi}{3} - \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{4}}{\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6}}$.

Resolução

Vamos inicialmente reduzir cada arco da expressão ao 1º quadrante.

- $\dfrac{2\pi}{3}$ está no 2º quadrante, logo:

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

- $\dfrac{7\pi}{4}$ está no 4º quadrante, logo:

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} = -\operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{7\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- $\dfrac{5\pi}{6}$ está no 2º quadrante, logo:

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Substituindo os valores na expressão, temos:

$$\frac{2\cos\frac{2\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}}{\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}} = \frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} - 2$$

Portanto, o valor da expressão é $\sqrt{2} - 2$.

Atividades Anote as respostas no caderno.

19. Considerando o esquema com a numeração das cabines da roda-gigante Singapore Flyer apresentado anteriormente, determine: Possível resposta:

a) 5 pares de cabines simétricas em relação ao centro da roda-gigante. 1 e 15; 2 e 16; 5 e 19; 8 e 22; 10 e 24

b) 4 pares de cabines simétricas em relação a um eixo imaginário passando pelas cabines 8 e 22. 7 e 9; 4 e 12; 1 e 15; 16 e 28

c) 4 pares de cabines simétricas em relação a um eixo imaginário passando pelas cabines 1 e 15. 2 e 28; 5 e 25; 8 e 22; 10 e 20

20. Determine o sinal do seno e do cosseno do arco de medida:

a) $1\,100°$ positivo; positivo

b) $930°$ negativo; negativo

c) $2300°$ positivo; negativo

d) $\frac{5\pi}{3}$ negativo; positivo

e) $\frac{15\pi}{4}$ negativo; positivo

f) $\frac{13\pi}{5}$ positivo; negativo

21. Em cada item, escreva a quais quadrantes pode pertencer a extremidade final de um arco de medida α, sabendo que:

a) $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{3}{10}$ 3º ou 4º quadrante

b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ 1º ou 4º quadrante

c) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$ 1º ou 2º quadrante

d) $\cos\alpha = -\frac{2}{7}$ 2º ou 3º quadrante

e) $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{8}{9}$ 3º ou 4º quadrante

f) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ 1º ou 4º quadrante

22. Calcule o valor indicado em cada item.

a) $\operatorname{sen}150°$ $\frac{1}{2}$

b) $\cos\frac{13\pi}{3}$ $\frac{1}{2}$

c) $\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos 225°$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\cos\frac{\pi}{6}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

23. Em cada item, caso exista, determine a medida do ângulo α para que:

a) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, com $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ $\alpha = \frac{\pi}{6}$

b) $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2}$, com $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ $\alpha = \frac{11\pi}{6}$

c) $\cos\alpha = -1$, com $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ $\nexists\, \alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

d) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

24. (PUC-RS) Para representar os harmônicos emitidos pelos sons dos instrumentos da orquestra, usam-se funções trigonométricas.

A expressão $2\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x - 5$ envolve estas funções e, para $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, seu valor é de: b

a) -7

b) -3

c) -1

d) $2\pi - 5$

e) $3\pi - 5$

25. Determine o valor de cada uma das expressões.

a) $\dfrac{\operatorname{sen}\pi + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\cos\pi + 2\cos\frac{\pi}{2}}$ -2

b) $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \cos\frac{2\pi}{3} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{5\pi}{3}}$ $2\sqrt{3}$

c) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12} \cdot \operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} - \cos\frac{19\pi}{12} \cdot \cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$ 1

26. Escreva cada equação utilizando ângulos do primeiro quadrante. Em seguida, determine o sinal de P.

a) $P = \operatorname{sen}820° \cdot \cos 480°$ $P = \operatorname{sen}80° \cdot (-\cos 60°)$; negativo

b) $P = \cos\frac{34\pi}{9} \cdot \cos\frac{62\pi}{9}$ $P = \cos\frac{2\pi}{9} \cdot \left(-\cos\frac{\pi}{9}\right)$; negativo

c) $P = \operatorname{sen}\frac{11\pi}{4} \cdot \operatorname{sen}\frac{29\pi}{6}$ $P = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$; positivo

d) $P = \cos 1\,035° \cdot \operatorname{sen}120°$ $P = \cos 45° \cdot \operatorname{sen}60°$; positivo

DESAFIO

27. Para quais valores de x a equação $|\operatorname{sen}x| = \operatorname{sen}x$ será verdadeira? $2k\pi \le x \le \pi + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

28. Em cada item, escreva uma expressão que determine os possíveis valores de x em que a igualdade seja verdadeira. Professor(a): Veja a resposta desta atividade no final do livro.

a) $\cos x = \frac{1}{2}$

b) $\operatorname{sen}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\operatorname{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\operatorname{sen}x = -\frac{1}{2}$

DESAFIO

29. (Insper-SP) O professor de Matemática de Artur e Bia pediu aos alunos que colocassem suas calculadoras científicas no modo "radianos" e calculassem o valor de $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$. Tomando um valor aproximado, Artur digitou em sua calculadora o número 1,6 e, em seguida, calculou o seu seno, encontrando o valor A. Já Bia calculou o seno de 1,5, obtendo o valor B. Considerando que $\frac{\pi}{2}$ vale aproximadamente 1,5708, assinale a alternativa que traz a correta ordenação dos valores A, B e $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$. e

a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} < A < B$

b) $A < \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} < B$

c) $A < B < \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$

d) $B < \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} < A$

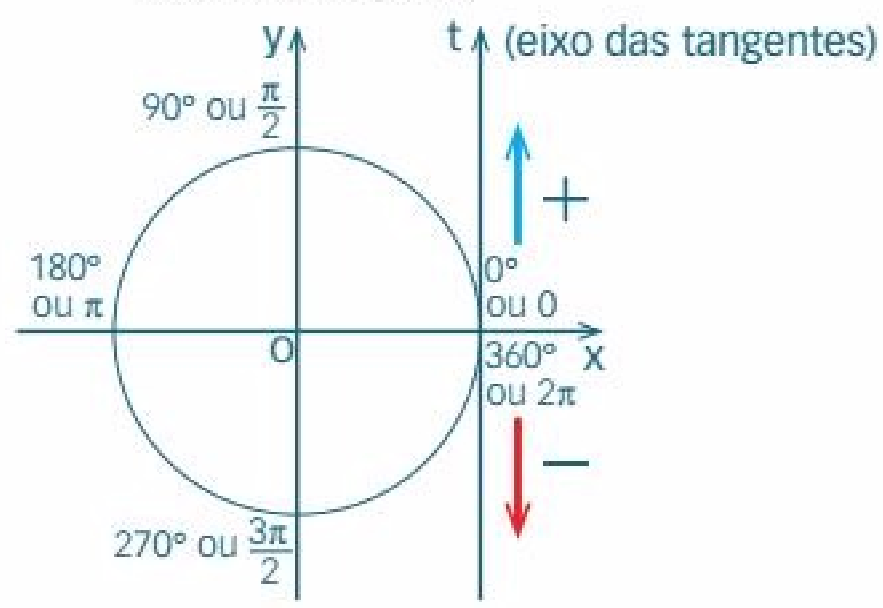
e) $B < A < \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$

TANGENTE NA CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Agora, vamos falar de outra razão trigonométrica: a **tangente**. Assim como fizemos para o seno e o cosseno, vamos estender o estudo dessa razão trigonométrica para ângulos (ou arcos) maiores ou iguais a 90° ou $\frac{\pi}{2}$. Também podemos pensar em tangentes de ângulos negativos.

Para isso, vamos acrescentar um eixo *t*, tangenciando a circunferência trigonométrica no ponto A(1, 0), denominado **eixo das tangentes**. Consideramos que "para cima" do ponto **A** temos os valores **positivos** e "para baixo" desse ponto os valores **negativos** para a tangente, como na figura.

Sinais da tangente



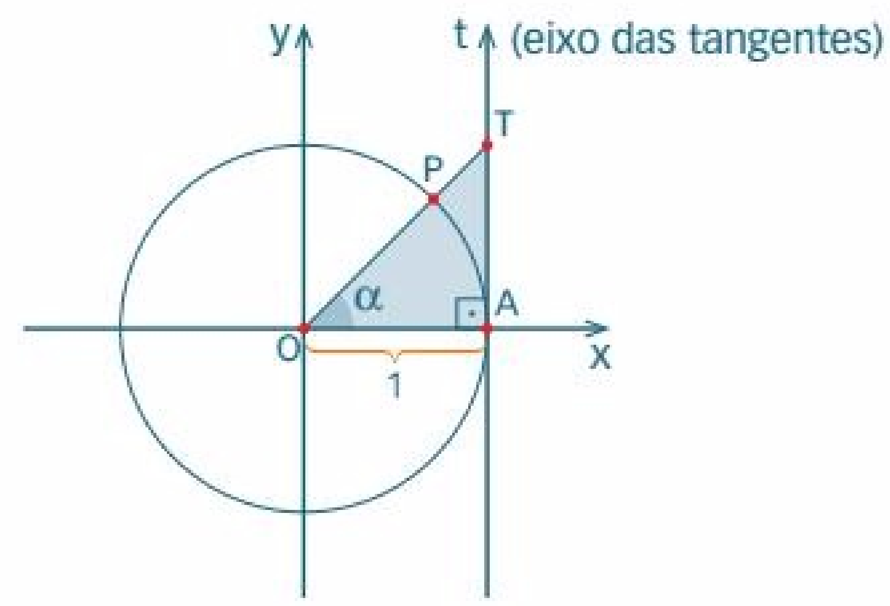
Dado um arco $\widehat{AP}$ de medida α, o prolongamento do segmento OP irá intersectar o eixo *t* em um ponto **T**. No triângulo OAT, temos:

> Lembre-se de que, em um triângulo retângulo, calculamos a tangente de um ângulo agudo (α) pela razão entre as medidas do cateto oposto (CO) e do cateto adjacente a esse ângulo (CA), isto é, $\text{tg}\,\alpha = \frac{CO}{CA}$.

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{AT}{OA}$$

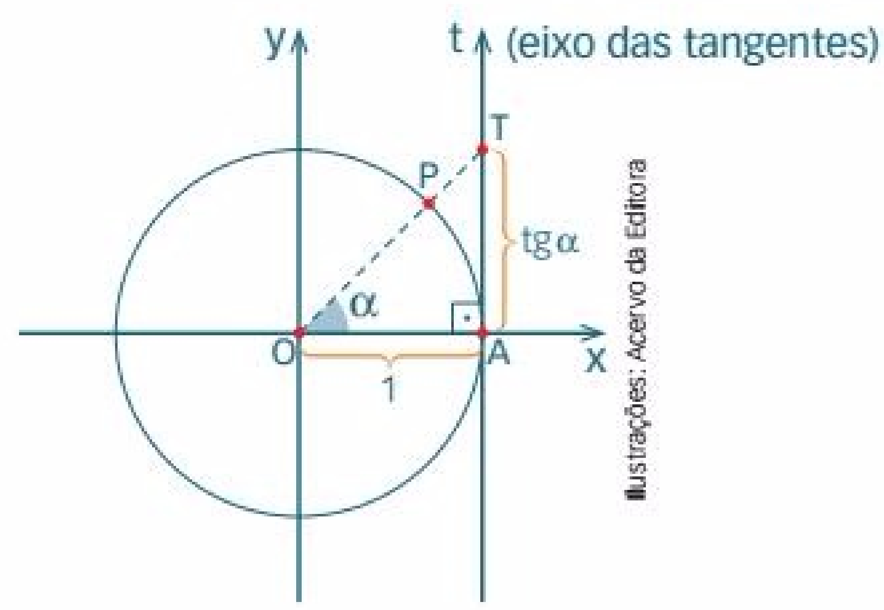
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{AT}{1}$$

$$\text{tg}\,\alpha = AT$$



Portanto, tg α é igual à medida de $\overline{AT}$.

Professor(a): Leve os alunos a perceber que, diferente do seno e do cosseno de um arco que possui valor mínimo −1 e valor máximo +1, a tangente não possui valores limitantes. Veja na Assessoria Pedagógica uma sugestão de atividade.



Ilustrações: Acervo da Editora

> Outra maneira de compreender a restrição $\alpha \neq 90°$ e $\alpha \neq 270°$ (ou $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$) é que não podemos utilizar a razão $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$ nesse caso, pois $\cos 90° = \cos 270° = 0$ (ou $\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$) e teríamos a razão $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{0}$, que não está definida.

Note ainda que:

- Se $\alpha = 0°$ (ou $\alpha = 0$), o arco $\widehat{AP}$ tem extremidade sobre o eixo dos cossenos e $\overline{OP}$ intersecta o eixo *t* no ponto A(1, 0), logo, AT = 0. Nesse caso, temos tg 0° = 0 (ou tg 0 = 0). Pelo mesmo motivo, temos tg 180° = tg 360° = 0 (ou tg π = tg 2π = 0).
- Se $\alpha = 90°$ (ou $\alpha = \frac{\pi}{2}$), o arco $\widehat{AP}$ tem extremidade sobre o eixo dos senos e $\overline{OP}$ é paralelo ao eixo das tangentes, isto é, não intersecta o eixo *t*. Nesse caso, não se define tg 90° (ou $\text{tg}\,\frac{\pi}{2}$). Pelo mesmo motivo, não se define tg 270° (ou $\text{tg}\,\frac{3\pi}{2}$).

Também podemos realizar o procedimento de redução para o 1º quadrante e determinar o valor da tangente do arco correspondente em qualquer outro quadrante. Veja alguns ângulos indicados na circunferência trigonométrica ao lado e os respectivos valores da tangente.

Utilizando as igualdades estabelecidas na redução de seno e cosseno para o 1º quadrante, vamos relacionar os valores da tangente de um arco α qualquer com a tangente de um arco correspondente no primeiro quadrante. Observe:

- **Redução do 2º quadrante para o 1º quadrante.**

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\text{sen}(\pi-\alpha)}{-\cos(\pi-\alpha)}=-\text{tg}(\pi-\alpha)$$

$$\boxed{\text{tg}\,\alpha=-\text{tg}(\pi-\alpha)}$$

- **Redução do 3º quadrante para o 1º quadrante.**

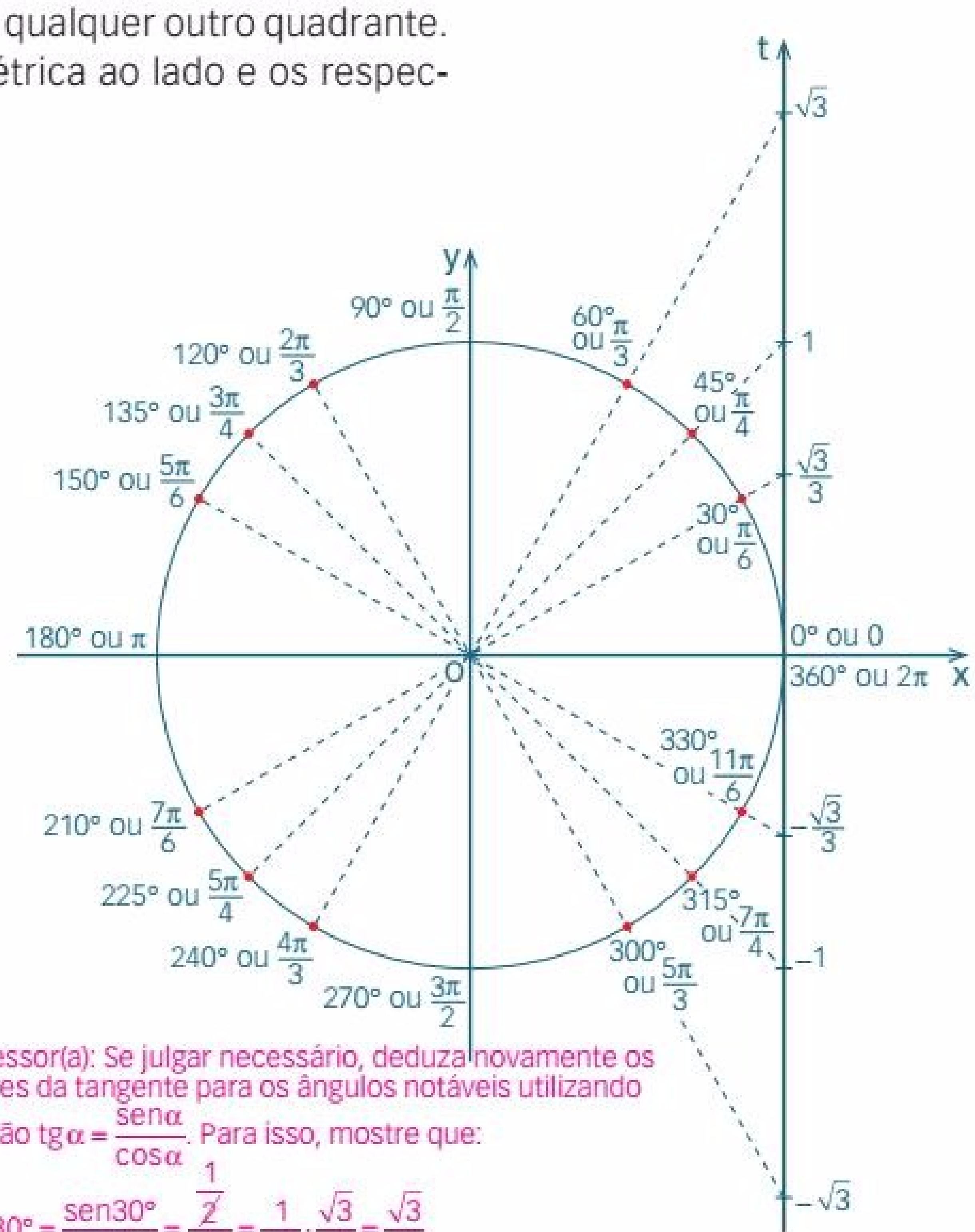
$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\text{sen}(\pi+\alpha)}{-\cos(\pi+\alpha)}=\text{tg}(\pi+\alpha)$$

$$\boxed{\text{tg}\,\alpha=\text{tg}(\pi+\alpha)}$$

- **Redução do 4º quadrante para o 1º quadrante.**

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\text{sen}(2\pi-\alpha)}{\cos(2\pi-\alpha)}=-\text{tg}(2\pi-\alpha)$$

$$\boxed{\text{tg}\,\alpha=-\text{tg}(2\pi-\alpha)}$$



Acervo da Editora

Professor(a): Se julgar necessário, deduza novamente os valores da tangente para os ângulos notáveis utilizando a razão $\text{tg}\,\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$. Para isso, mostre que:

- $\text{tg}\,30°=\frac{\text{sen}\,30°}{\cos 30°}=\frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\text{tg}\,45°=\frac{\text{sen}\,45°}{\cos 45°}=\frac{\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}}=1$
- $\text{tg}\,60°=\frac{\text{sen}\,60°}{\cos 60°}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}=\sqrt{3}$

Atividades resolvidas

R10. (Udesc) Se $\text{tg}\,20°=a$, o valor de $\frac{\text{tg}\,160°+\text{tg}\,340°}{\text{tg}\,200°}$ é:

a) 2 b) $-a$ c) 0 d) a e) -2

Resolução

Inicialmente, reduzimos cada arco ao 1º quadrante.

- 160° está no 2º quadrante, logo:

$$\text{tg}\,160°=-\text{tg}(180°-160°)=-\text{tg}\,20°=-a$$

- 340° está no 4º quadrante, logo:

$$\text{tg}\,340°=-\text{tg}(360°-340°)=-\text{tg}\,20°=-a$$

- 200° está no 3º quadrante, logo:

$$\text{tg}\,200°=\text{tg}(180°+200°)=\text{tg}(380°)=\text{tg}(20°+360°)=\text{tg}\,20°=a$$

Substituindo os valores na expressão, segue que:

$$\frac{\text{tg}\,160°+\text{tg}\,340°}{\text{tg}\,200°}=\frac{-a+(-a)}{a}=\frac{-2a}{a}=-2$$

Portanto, a alternativa correta é **e**.

R11. Reduza ao 1º quadrante e determine o valor de:

a) $\operatorname{tg} 2\,040°$

b) $\operatorname{tg}\dfrac{19\pi}{4}$

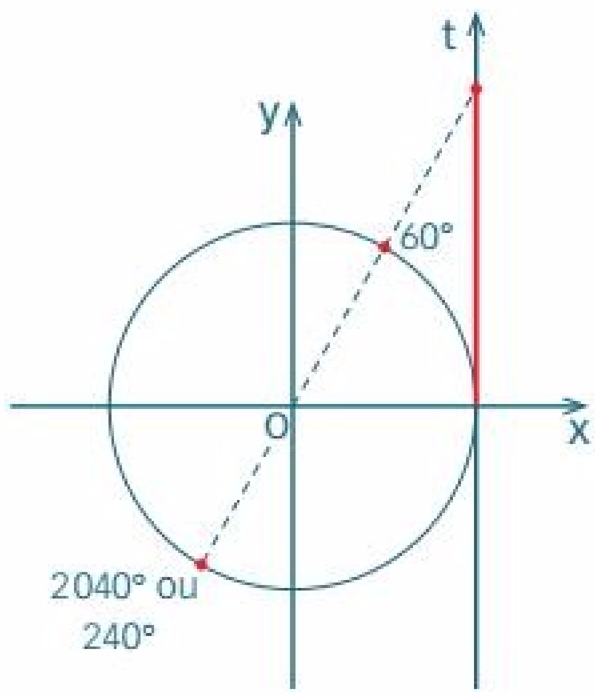
Resolução

a) Inicialmente, obtemos a 1ª determinação positiva do arco de $2\,040°$:

$$\begin{array}{l|l} 2\,040 & 360 \\ \hline \underbrace{240}_{\text{1ª determinação positiva}} & \underbrace{5}_{\text{número de voltas}} \end{array}$$

Como a extremidade do arco de $240°$ está no 3º quadrante, temos:

$$\operatorname{tg} 2040° = \operatorname{tg} 240° = \operatorname{tg}(180° + 240°) =$$
$$= \operatorname{tg}(420°) = \operatorname{tg}(60° + 360°) = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$$



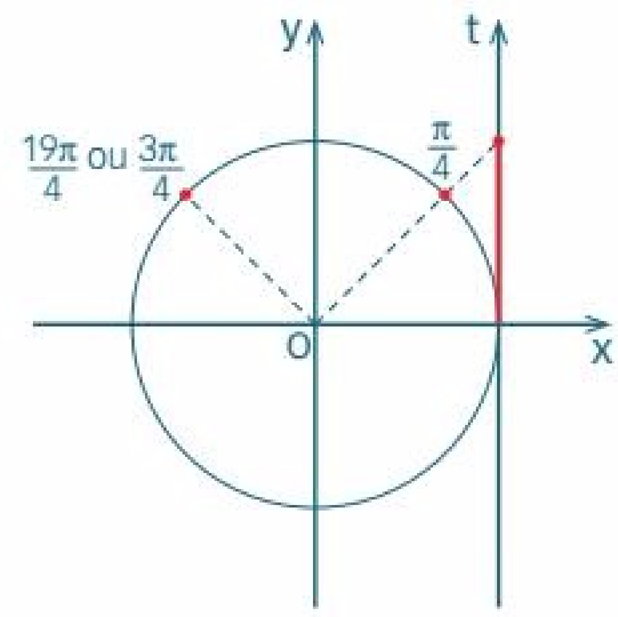
Portanto, $\operatorname{tg} 2\,040° = \sqrt{3}$.

b) Calculando a 1ª determinação positiva do arco de $\dfrac{19\pi}{4}$, temos:

$$\frac{19\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + \underbrace{\frac{16\pi}{4}}_{4\pi} = \frac{3\pi}{4} + 4\pi = \underbrace{\frac{3\pi}{4}}_{\text{1ª determinação positiva}} + \overbrace{2}^{\text{número de voltas}} \cdot 2\pi$$

Como a extremidade do arco de $\dfrac{3\pi}{4}$ está no 2º quadrante, temos:

$$\operatorname{tg}\frac{19\pi}{4} = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = -\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$



Ilustrações: Acervo da Editora

Portanto, $\operatorname{tg}\dfrac{19\pi}{4} = -1$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

30. Determine a qual quadrante pode pertencer o ângulo α em cada um dos itens.

a) $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{3}{5}$ 2º ou 4º quadrante

b) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{8}$ 1º ou 3º quadrante

c) $\operatorname{tg}\alpha = 10$ 1º ou 3º quadrante

d) $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{5}{2}$ 2º ou 4º quadrante

e) $\operatorname{tg}\alpha = -1$ 2º ou 4º quadrante

f) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{3}$ 1º ou 3º quadrante

31. Em cada item, determine o valor x.

a) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ com $\dfrac{7\pi}{2} < x < 4\pi$ $x = \dfrac{11\pi}{3}$

b) $\operatorname{tg} x = 0$ com $\dfrac{5\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{7\pi}{2}$ $x = 3\pi$

c) $\operatorname{tg} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ com $\dfrac{9\pi}{2} < x < \dfrac{11\pi}{2}$ $x = \dfrac{29\pi}{6}$

d) $\operatorname{tg} x = -1$ com $\dfrac{7\pi}{2} < x < 4\pi$ $x = \dfrac{15\pi}{4}$

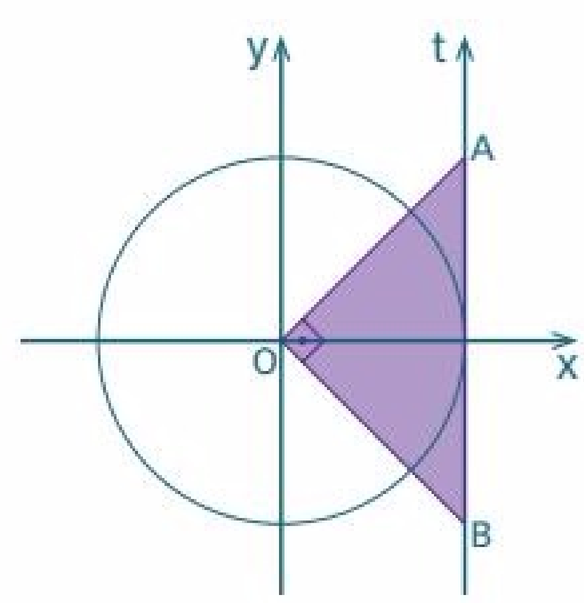
e) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ com $4\pi < x < \dfrac{9\pi}{2}$ $x = \dfrac{13\pi}{3}$

f) $\operatorname{tg} x = 1$ com $5\pi < x < 6\pi$ $x = \dfrac{21\pi}{4}$

32. Para quais valores de x a equação $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x$ é verdadeira? $2k\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $2k\pi + \pi \leq x < \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

33. Construa um quadro indicando o valor da tangente para cada um dos ângulos notáveis (30°, 45° e 60°). Em seguida, complemente esse quadro com os valores das tangentes dos ângulos com menos de uma volta cuja redução ao 1º quadrante é um ângulo notável. Professor(a): Veja a resposta desta atividade no final do livro.

34. Um triângulo isósceles foi construído sobre uma circunferência trigonométrica de raio unitário e sobre o eixo das tangentes.



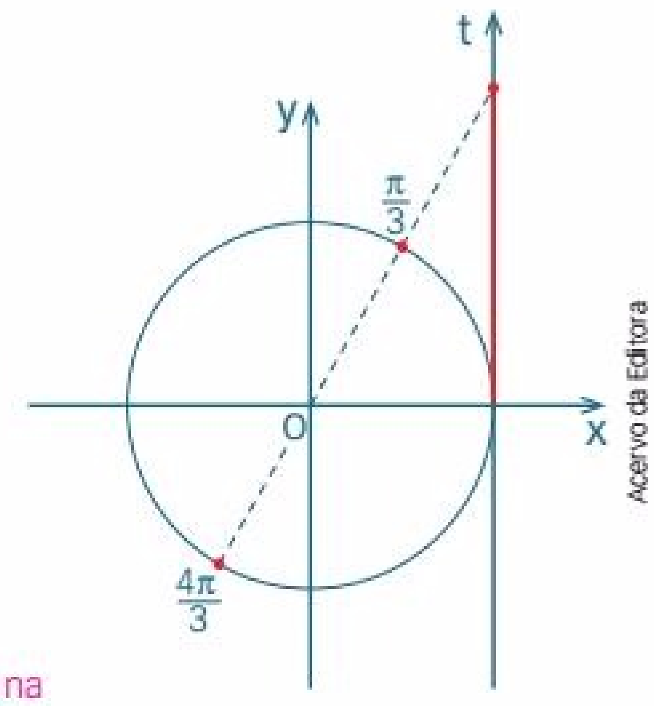
Acervo da Editora

a) Quais as medidas dos ângulos internos do triângulo ABO? $\text{med}(A\hat{O}B) = 90°$; $\text{med}(B\hat{A}O) = \text{med}(A\hat{B}O) = 45°$

b) Calcule a área e o perímetro do triângulo ABO. área: 1 u.a.; perímetro: $(2 + 2\sqrt{2})$ u

35. Observe a representação dos arcos com medida positiva e menor que 2π, cuja tangente é igual a $\sqrt{3}$, e a expressão que indica todos os arcos, cuja tangente é $\sqrt{3}$.

$\frac{\pi}{3}+k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z}$



Professor(a): Veja a resposta desta atividade na Assessoria Pedagógica.

De maneira semelhante, escreva uma expressão e construa uma circunferência trigonométrica que represente os arcos cuja tangente é:

a) -1

b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

36. Sabendo que $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, simplifique as expressões.

a) $-\text{tg}^2(\pi-\alpha)\cdot\cos^2(2\pi-\alpha)-\cos^2(\pi+\alpha)$ -1

b) $\frac{\text{tg}(\pi+\alpha)\cdot 4\cos(2\pi-\alpha)}{2\text{sen}(\pi+\alpha)}$ -2

c) $\frac{\cos^2(2\pi-\alpha)\cdot\text{tg}(2\pi-\alpha)}{-\text{sen}\,\alpha\cdot\cos(\pi+\alpha)}$ -1

d) $\frac{\text{sen}(\pi-\alpha)\cdot\text{tg}\,\alpha}{\cos\alpha\cdot\text{tg}^2(\pi+\alpha)}$ 1

37. Determine os valores de $\cos\alpha$ e $\text{tg}\,\alpha$ dado que:

a) $\text{sen}\,\alpha=\frac{4}{5}$ com $\frac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\pi$ $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$; $\text{tg}\,\alpha=-\frac{4}{3}$

b) $\text{sen}\,\alpha=\frac{1}{3}$ com $0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$ $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\text{tg}\,\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $\text{sen}\,\alpha=-\frac{1}{2}$ com $\pi\leq\alpha\leq\frac{3\pi}{2}$ $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{tg}\,\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$

38. Determine todos os valores possíveis de m para que a equação $\text{tg}\,\alpha=3m-12$ possua uma solução no segundo quadrante. $m<4$

Professor(a): Veja na Assessoria Pedagógica orientações para o trabalho com a seção Sobre a unidade.

Sobre a unidade | Anote as respostas no caderno.

1. O que você estudou nesta unidade? Você considera que atingiu os objetivos propostos no início da unidade? Se não, o que fará para atingir os objetivos?

2. Qual dos conteúdos estudados nesta unidade você considera que deve estudar um pouco mais?

3. Se um amigo pedisse a você que explicasse como é definido o seno e o cosseno na circunferência trigonométrica, que explicação você daria?

4. Sabemos que o maior valor assumido pelo seno é 1 e o maior valor assumido pelo cosseno é 1. Justifique por que a equação $\text{sen}\,x+\cos x=2$ não tem solução para $0°\leq x<360°$.

5. Converse com seus colegas a respeito de situações em que os conteúdos estudados nesta unidade estão presentes. Se necessário, realizem uma pesquisa.

1. Resposta esperada: Medida linear e medida angular de um arco, circunferência trigonométrica, arcos côngruos, seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica, simetria e redução ao 1º quadrante. Resposta pessoal. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. Resposta esperada: Considerando um arco de medida α e extremidade no ponto P na circunferência trigonométrica de centro O, o seno é definido como a projeção de P no eixo y e o cosseno como a projeção de P no eixo x.

4. Para um mesmo valor de x, quando $\text{sen}\,x=1$ tem-se que $\cos x=0$ e quando $\cos x=1$ tem-se que $\text{sen}\,x=0$. Logo, se uma das parcelas assume o valor máximo igual a 1, temos que $\text{sen}\,x+\cos x=1$. Portanto, $\text{sen}\,x+\cos x\neq 2$.

5. Possível resposta: Os conteúdos desta unidade estão presentes em situações como: algumas manobras de patinação; nas pistas de atletismo; na rotação de uma roda gigante; em situações em que há a presença de circunferências e giros.

Ideias matemáticas

O esquema a seguir relaciona algumas das ideias matemáticas estudadas nesta unidade. Converse com seus colegas e professor(a) a respeito de como essas e outras ideias abordadas na unidade estão relacionadas. Em seguida, faça um texto descrevendo as relações existentes entre elas e dê sugestões para complementar e melhorar a organização desse esquema.

Revise os conteúdos estudados nesta unidade e anote os pontos que julgar mais relevantes. Com isso, organize um resumo para auxiliá-lo(a) na compreensão dos conteúdos.

Professor(a): Converse com os alunos de maneira que retomem os objetivos propostos no início da unidade e verifique, por exemplo, se compreenderam o conceito de circunferência trigonométrica. Auxilie-os a listar as principais ideias matemáticas presentes na unidade e a buscar relações entre elas, como a relação entre seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica. Com base nas ideias listadas e relações estabelecidas, oriente-os a propor aprimoramentos ao esquema apresentado, inserindo novas ideias e indicando suas possíveis relações. Peça aos alunos que registrem essas discussões, compondo uma síntese da unidade.

A circunferência trigonométrica no GeogebraPrim

Observe como construir a circunferência trigonométrica no GeoGebraPrim.

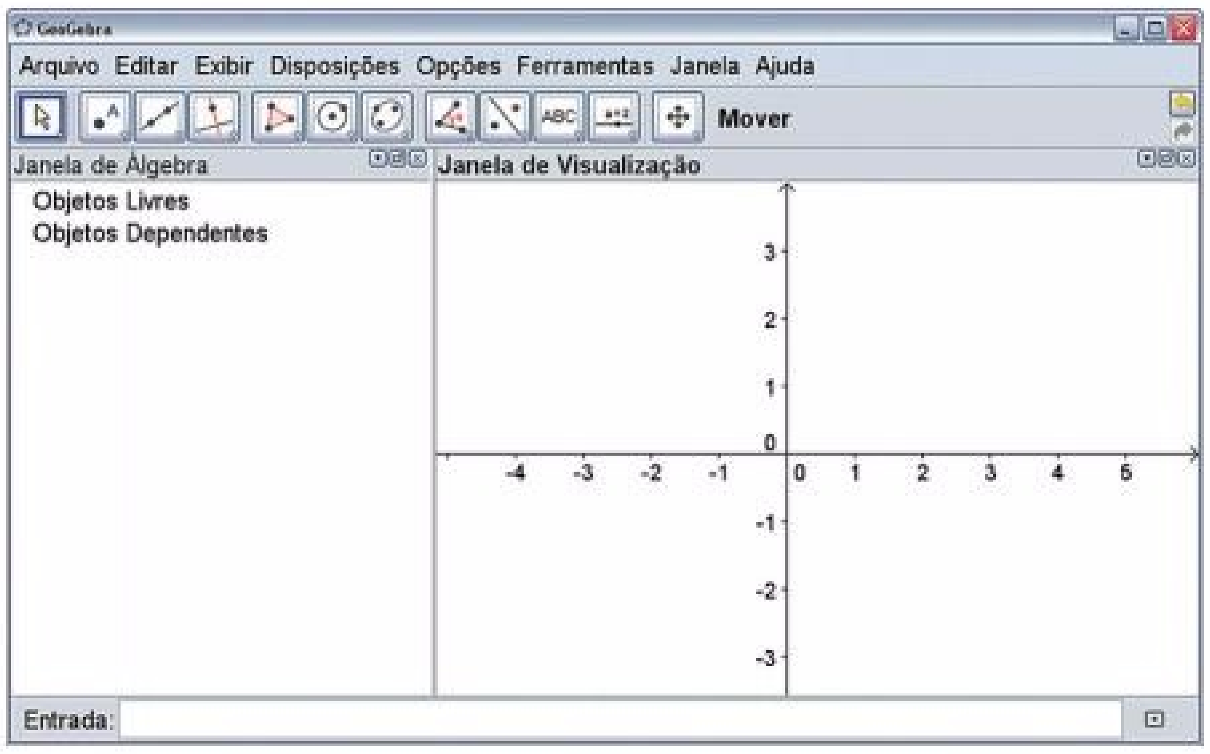
GEOGEBRAPRIM

Programa de computador gratuito com recursos dinâmicos voltado para a aprendizagem de Matemática.

Licença: Pode ser copiado, distribuído e transmitido livremente, para fins não comerciais.

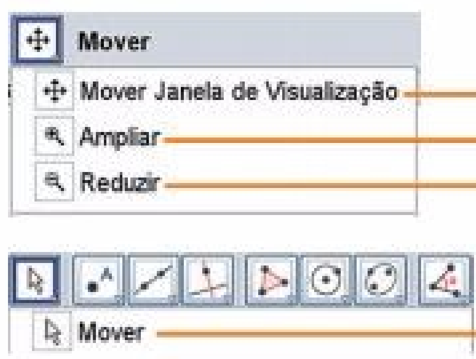
Onde obter: <www.geogebra.org>

Versão utilizada: 4.0.41.0



Passo 1: Execute o GeoGebraPrim. No menu **Disposições**, clique em **Álgebra e Gráficos** para abrir a janela ao lado.

ALGUMAS FERRAMENTAS



Mover Janela de Visualização: selecionando essa ferramenta você pode clicar em qualquer lugar da Janela de Visualização e arrastar o *mouse* para mover os eixos.

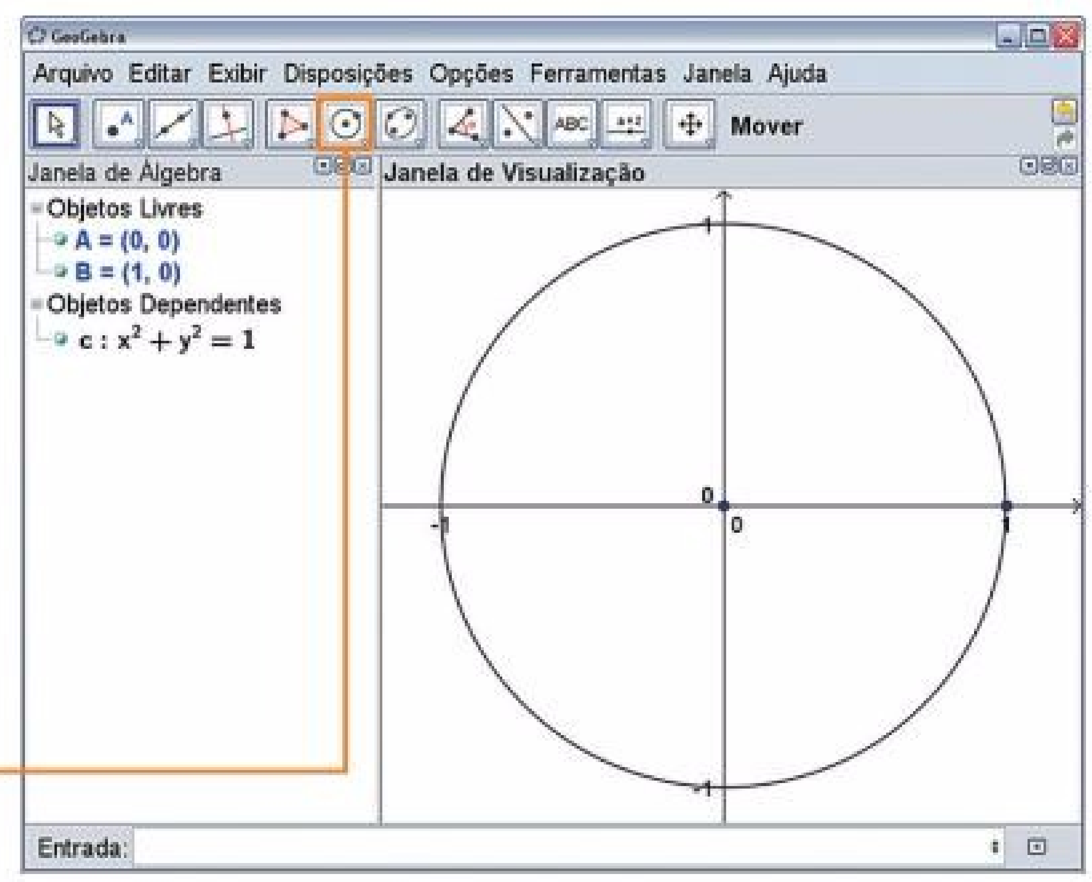
Ampliar: ao clicar em qualquer lugar da Janela de Visualização com essa ferramenta selecionada, é possível dar um *zoom* centralizando no ponto em que você clicou.

Reduzir: possui funcionamento semelhante à **Ampliar**, entretanto reduz o *zoom*.

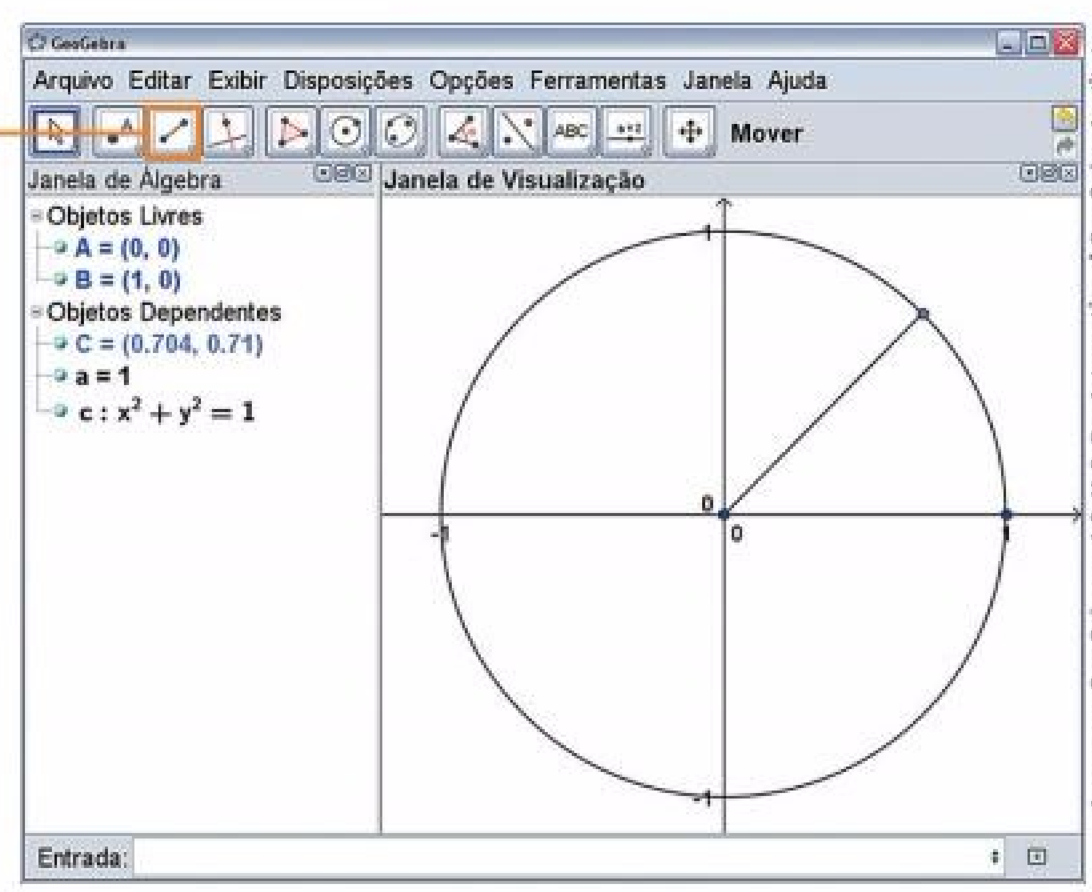
Mover: com essa ferramenta você pode selecionar objetos da Janela de Visualização ou movê-los com relação aos eixos.

Passo 2: No menu **Opções**, clique em **Arredondamento** e, em seguida, em **3 Casas Decimais**.

Passo 3: Defina os pontos **A** e **B** de coordenadas $(0,0)$ e $(1,0)$, respectivamente, digitando **A = (0,0)** e **B = (1,0)** no campo **Entrada**. Com a ferramenta **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos** selecionada, crie um círculo de centro **A** e raio $\overline{AB}$, clicando primeiro em **A** e depois em **B**, na **Janela de Visualização**.

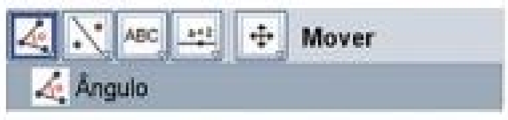


Passo 4: Com a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** selecionada, clique no ponto **A** e depois em um ponto sobre a circunferência no primeiro quadrante, para criar um segmento. Será criado também o ponto **C**.

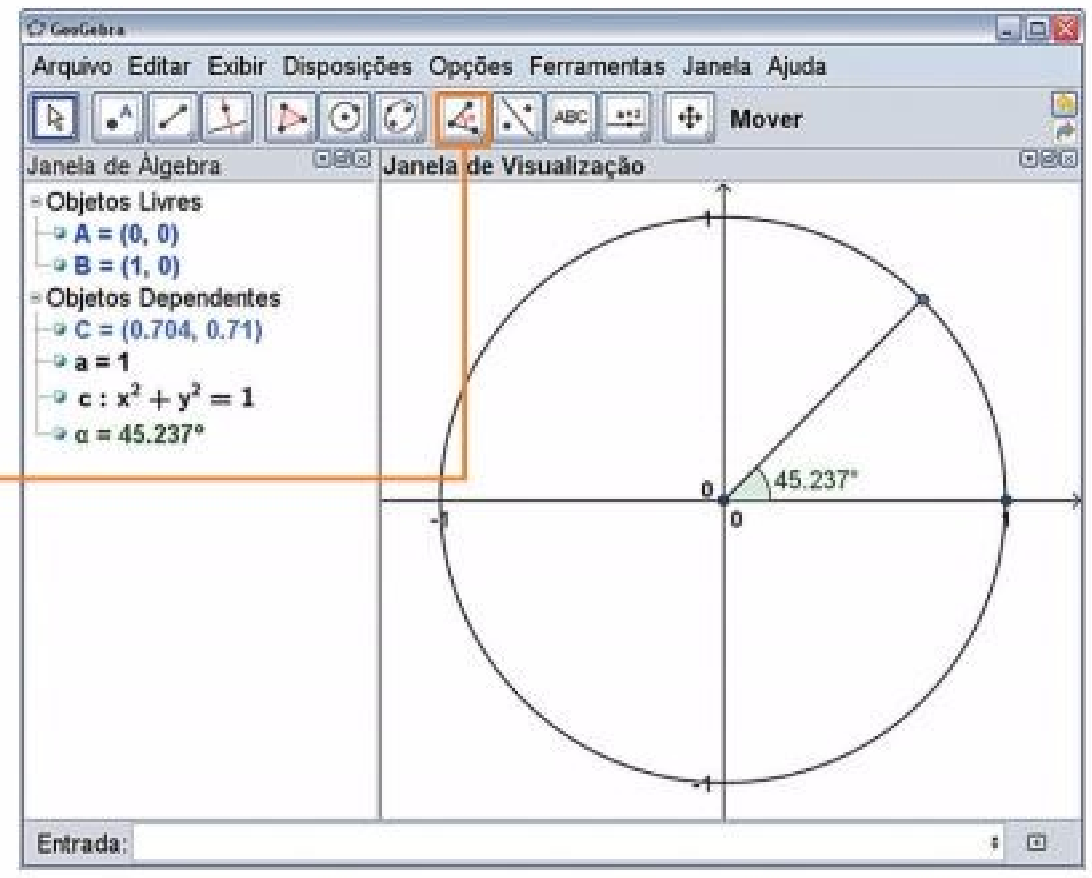


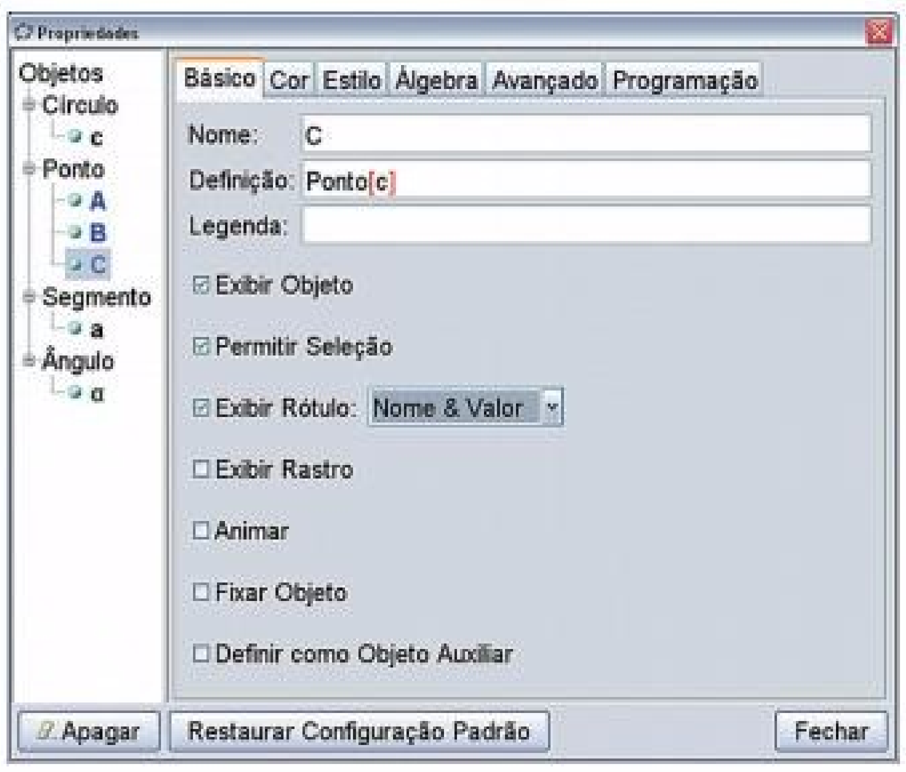
Imagens: GeoGebra v. 4.0.41.0. Por International GeoGebra Institute

Passo 5: Selecione a ferramenta **Ângulo** e clique uma vez no ponto **B**, uma vez no ponto **A** e uma vez no ponto **C**, nesta ordem, para criar um ângulo $\widehat{\alpha}$.



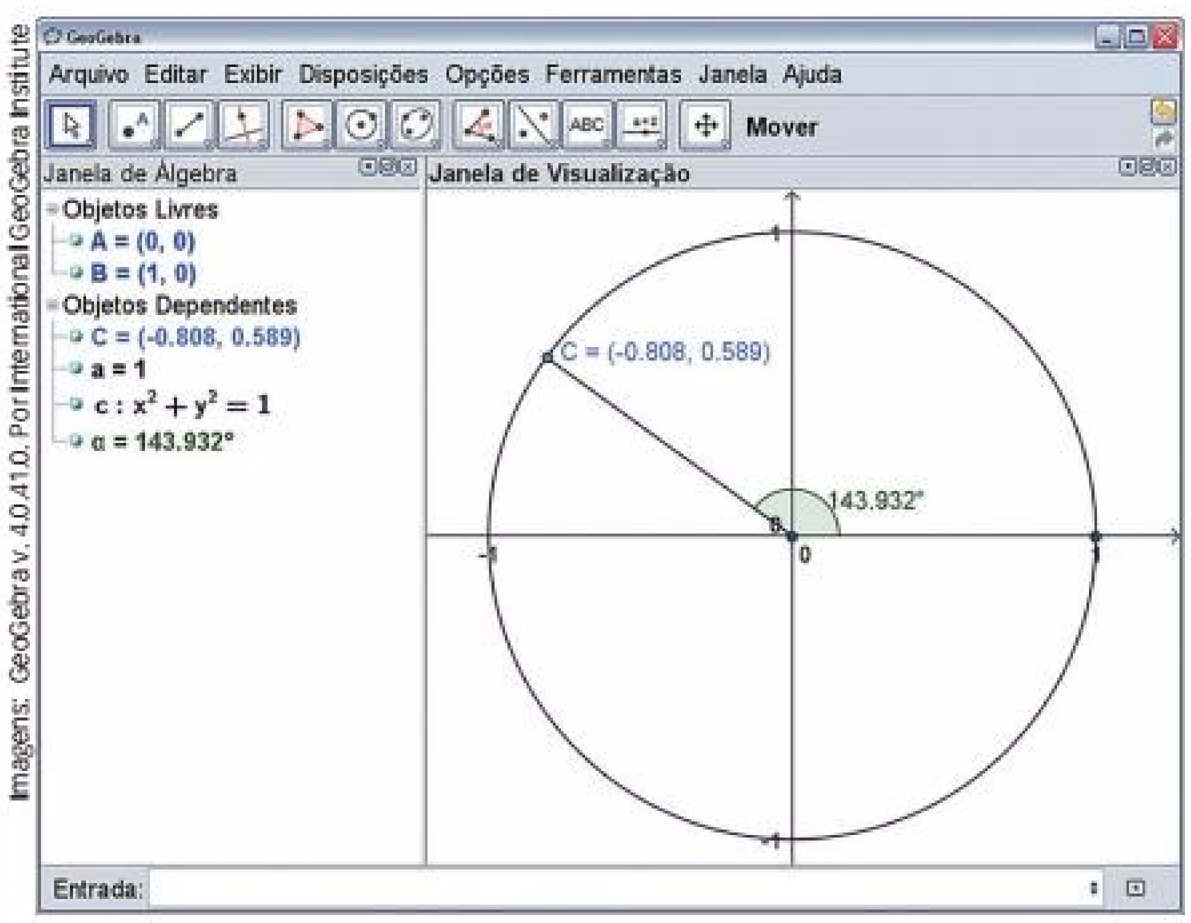
Professor(a): Dependendo da versão do GeoGebraPrim, a ferramenta **Ângulo** sempre irá exibir a medida do menor ângulo determinado pelos pontos **B** e **C**, ou seja, o ângulo de medida menor que 180°. Se for esse o caso, leve os alunos a perceber que, para se obter a medida de ângulos maiores que 180°, basta subtrair de 360° o valor exibido.





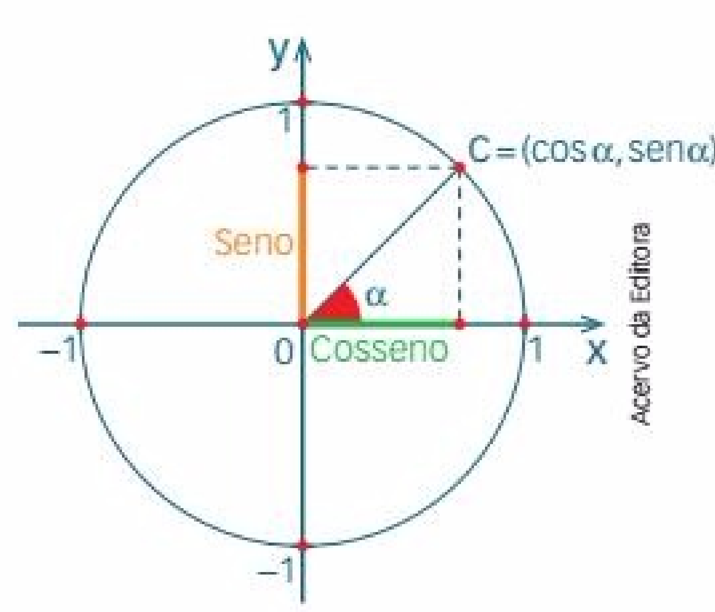
Passo 6: Selecione o ponto **C**. No menu **Editar**, clique em **Propriedades**. Na aba **Básico**, marque a opção **Exibir Rótulo** e mude o campo para **Nome & Valor**. Em seguida, clique em **Fechar**.

Passo 7: Com a ferramenta **Mover** selecionada, mova o ponto **C** sobre a circunferência. A abscissa de **C** corresponde a $\cos\alpha$ e a ordenada de **C**, a $\operatorname{sen}\alpha$.



Imagens: GeoGebra v. 4.0.41.0. Por International GeoGebra Institute

As coordenadas do ponto **C** são o cosseno e o seno do ângulo, pois o cosseno de α corresponde à projeção de **C** no eixo *x* e o seno de α corresponde à projeção de **C** no eixo *y*.



Acervo da Editora

1. Determine o valor aproximado do seno e do cosseno do ângulo de:

a) 47° $\cos 47° = 0{,}682$; $\operatorname{sen} 47° = 0{,}731$
b) 105° $\cos 105° = -0{,}259$; $\operatorname{sen} 105° = 0{,}966$
c) 173° $\cos 173° = -0{,}993$; $\operatorname{sen} 173° = 0{,}122$
d) 227° $\cos 227° = -0{,}682$; $\operatorname{sen} 227° = -0{,}731$
e) 352° $\cos 352° = 0{,}990$; $\operatorname{sen} 352° = -0{,}139$

2. Determine as medidas aproximadas dos ângulos em que o:

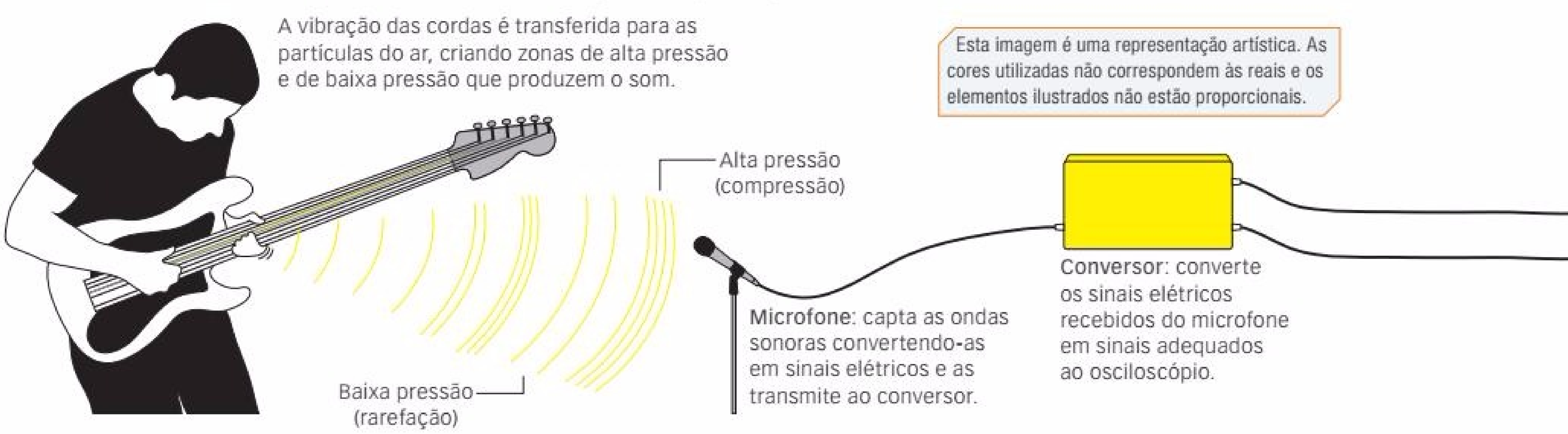
a) cosseno seja igual a 0,45. $\alpha = 63{,}3°$ e $\alpha = 296{,}7°$
b) seno seja igual a −0,87. $\alpha = 240{,}5°$ e $\alpha = 299{,}5°$

2 FUNÇÕES, RELAÇÕES, EQUAÇÕES E TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Filme de George Lucas. Star Wars: uma nova esperança. EUA. 1977. Foto: Ronald Grant/ Mary Evans/ Diomedia

Como podemos "visualizar" o som?

Uma das maneiras de "visualizar" o som é utilizar um osciloscópio. Esse aparelho permite "visualizar" as ondas em uma tela, com linhas ondulatórias.



Esta imagem é uma representação artística. As cores utilizadas não correspondem às reais e os elementos ilustrados não estão proporcionais.

Professor(a): Proponha aos alunos algumas questões relacionadas a esse tema. Algumas sugestões são:

a) Qual a frequência mínima captada pelo ouvido humano? E a máxima? (Resposta: 20 Hz; 20 000 Hz)

b) Uma onda sonora que produz 50 picos a cada 2 segundos pode ser captada pelo ouvido humano? Por quê? (Resposta: Sim, pois sua frequência é 25 Hz, a qual está no intervalo audível pelo ouvido humano.)

Cena do filme *Star Wars Episódio IV: Uma Nova Esperança*, da saga Guerra nas Estrelas, lançado em 1977. O diretor George Lucas impressionou os espectadores com os sons estrondosos das explosões ocorridas durante as batalhas travadas no espaço sideral, meio em que o som não se propaga.

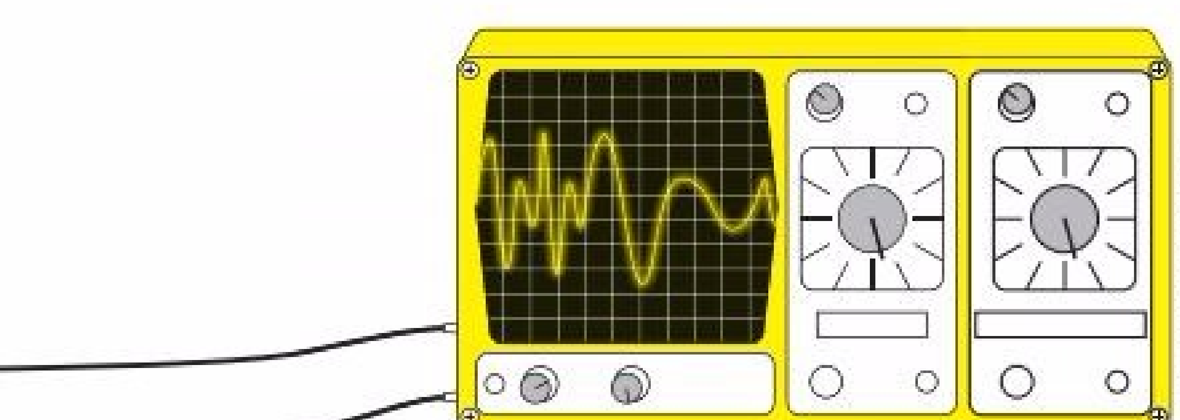
Ondas sonoras

Você já assistiu a filmes de ficção científica em que são travadas batalhas no espaço sideral? A cada explosão, quais eram os sons produzidos? Em geral nesses filmes, erroneamente, os disparos, explosões ou colisões são acompanhados de sons tal como os ouviríamos se ocorressem aqui na Terra. É isso mesmo, erroneamente! Mas, caso os diretores não utilizassem esse recurso, possivelmente as cenas ficariam menos empolgantes.

O som é um tipo de onda chamada onda de pressão que se propaga na matéria (sólida, líquida ou gasosa), mas não se propaga no vácuo, como ocorre no espaço sideral. Em uma onda sonora se propagando no ar, ocorre a compressão (alta pressão) e a rarefação (baixa pressão) do ar. Uma importante característica de uma onda é sua frequência, que pode ser obtida pelo número de repetições desse evento por unidade de tempo. Para se ter uma ideia, as ondas sonoras audíveis pelo ser humano possuem frequência entre 20 Hz e 20 000 Hz, aproximadamente. Frequências acima de 20 000 Hz, chamadas ultrassons, apesar de não serem captadas pelo ouvido humano, podem ser ouvidas por alguns animais, como os cães, e possuem aplicações em diversas áreas, como na realização de exames médicos. Frequências abaixo de 20 Hz são chamadas infrassons.

No ar, por exemplo, as vibrações causadas por ondas sonoras fazem variar a massa de ar concentrada em determinado ponto, ou seja, o ar sofre compressões e rarefações. Sendo m essa massa em um momento em que não há alteração, em um instante t posterior à alteração, a massa de ar concentrada nesse ponto é calculada pela função do tipo trigonométrica $M(t) = m + a \cdot sen(\omega \cdot t)$. Nessa função, a é a variação máxima em relação a m, $\omega = 2\pi f$, em que f é a frequência da onda e t é o tempo, em segundos.

Hertz (Hz): unidade de medida de frequência.



Ilustrações: Eduardo C.

Osciloscópio: recebe os pulsos elétricos do conversor e gera imagens com base nessas informações.

Nesta unidade você vai...

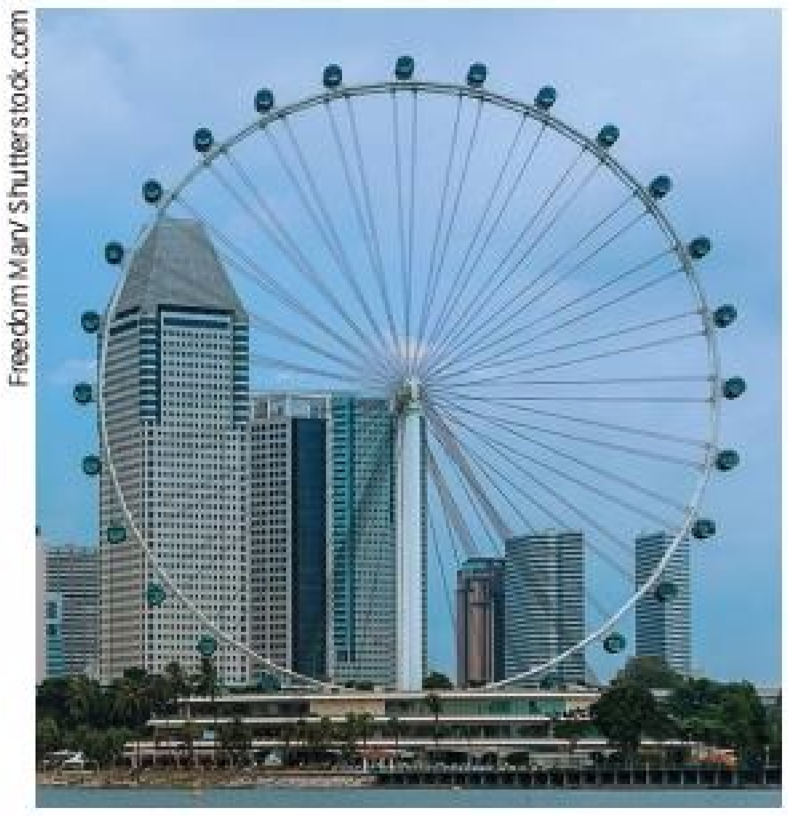
- compreender o conceito de função seno e função cosseno.
- identificar o período e a imagem das funções seno e cosseno.
- reconhecer o gráfico da função seno e da função cosseno.
- relacionar as razões trigonométricas seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante.
- resolver equações trigonométricas.

Professor(a): Explique aos alunos que estes são os principais objetivos a serem atingidos por eles nesta unidade. Retome esses objetivos no decorrer dos estudos da unidade e, se julgar necessário, estabeleça também novos objetivos. Na Assessoria Pedagógica encontram-se os objetivos gerais deste nível de ensino, assim como os objetivos específicos desta unidade.

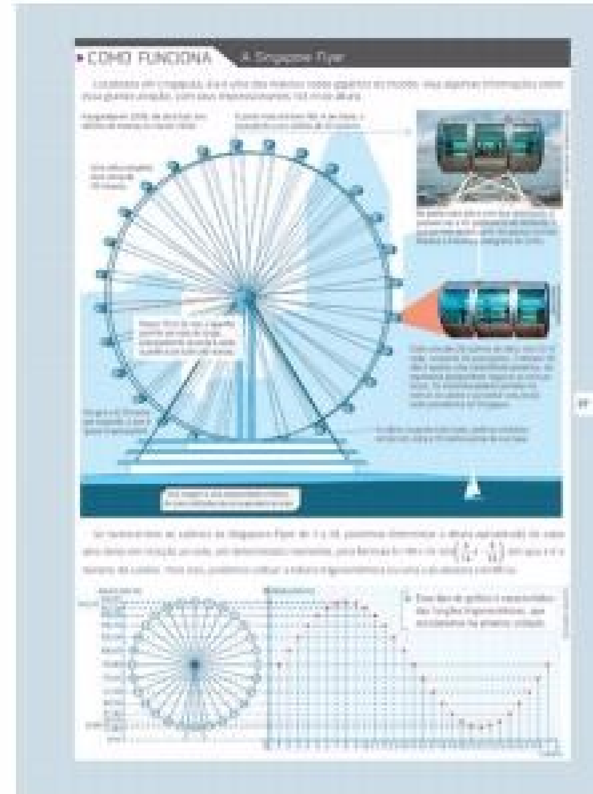
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Na seção **Como funciona** da unidade anterior, apresentamos algumas informações sobre uma das maiores rodas-gigantes do mundo, a Singapore Flyer.

Freedom Mary Shutterstock.com

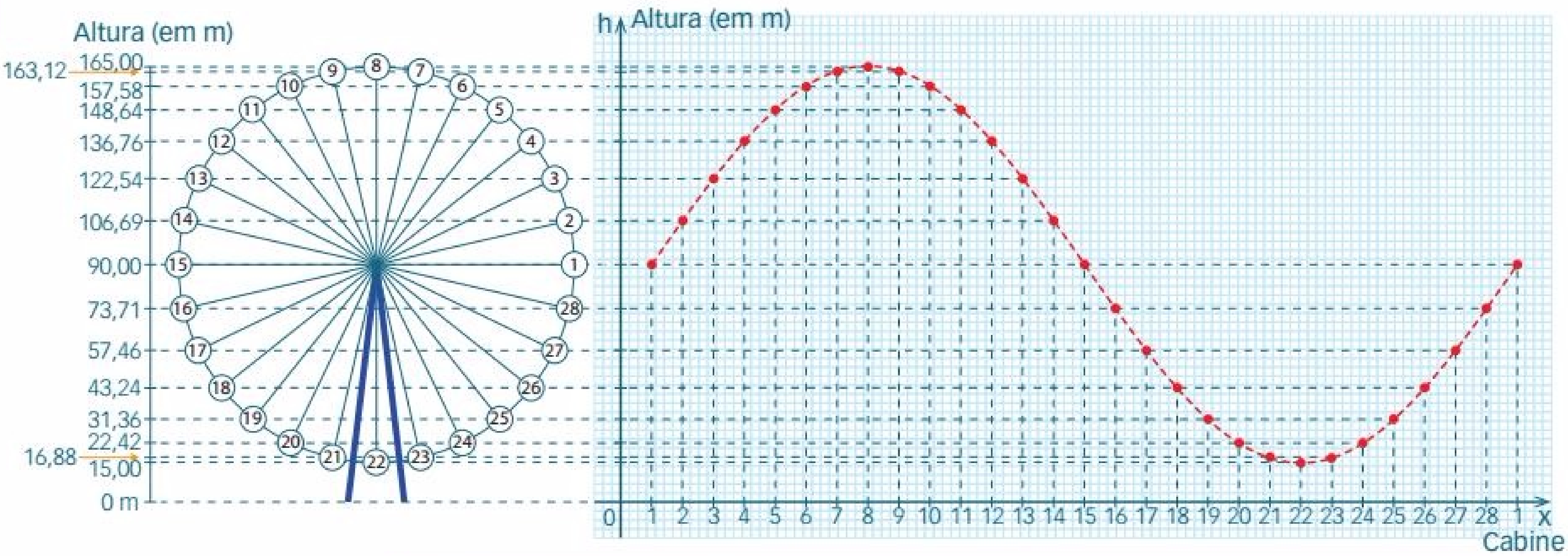


Singapore Flyer, localizada em Cingapura, 2014.



Vimos que, se numerarmos as cabines da Singapore Flyer de 1 a 28, podemos determinar a altura aproximada de cada uma delas em relação ao solo, em determinado momento, pela fórmula $h = 90 + 75 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{14}x - \frac{\pi}{14}\right)$, em que x é o número da cabine.

Sob o ponto de vista das funções, $h(x) = 90 + 75 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{14}x - \frac{\pi}{14}\right)$ é uma **função do tipo trigonométrica**, que associa a cada cabine x a sua altura **h**. Comparando esses valores com o esquema a seguir, vamos esboçar um gráfico que vai sugerir um tipo de curva chamada **senoide** ou **curva senoidal**.



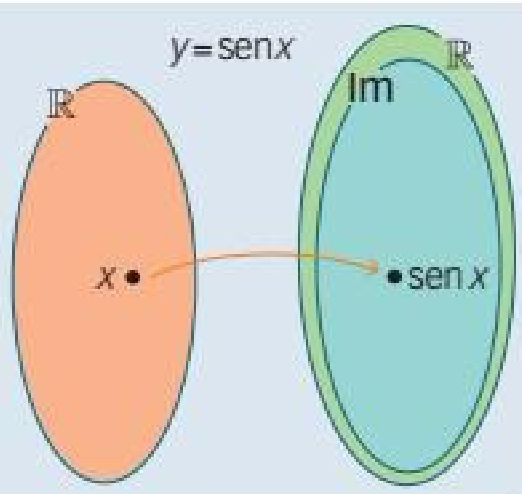
FUNÇÃO SENO

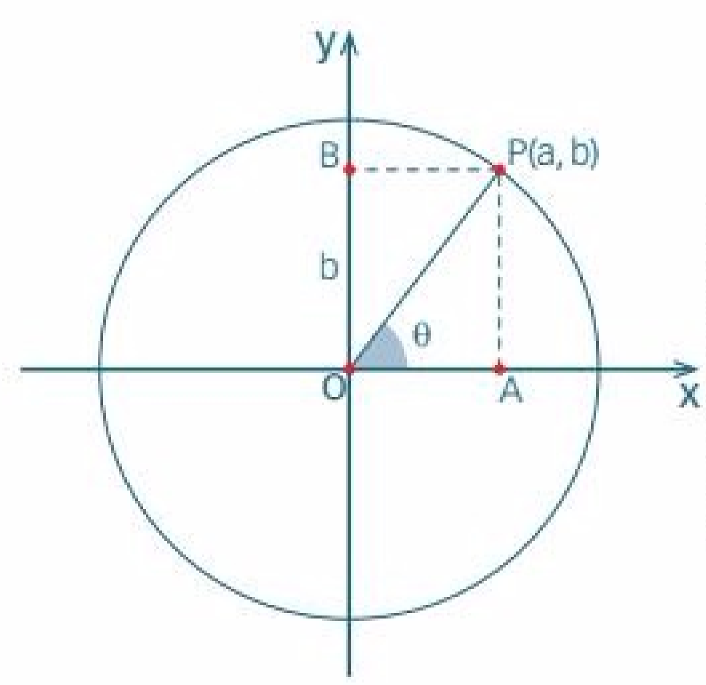
Quando necessário, consulte a tabela trigonométrica no final do livro.

Professor(a): Lembre os alunos de que uma função $f: A \rightarrow B$ é composta de domínio, contradomínio e lei de formação. No entanto, muitas vezes descreveremos uma função dizendo apenas sua lei de formação. Nesses casos, consideraremos que o domínio A da função são todos os números reais que a variável independente x pode assumir, ou seja, todos aqueles que resultem em um $y \in B$.

Considere o ângulo θ, cuja medida em radianos seja x, e $P(a, b)$ pertencente à circunferência trigonométrica. Desse modo, $\text{sen}\,x = b$.

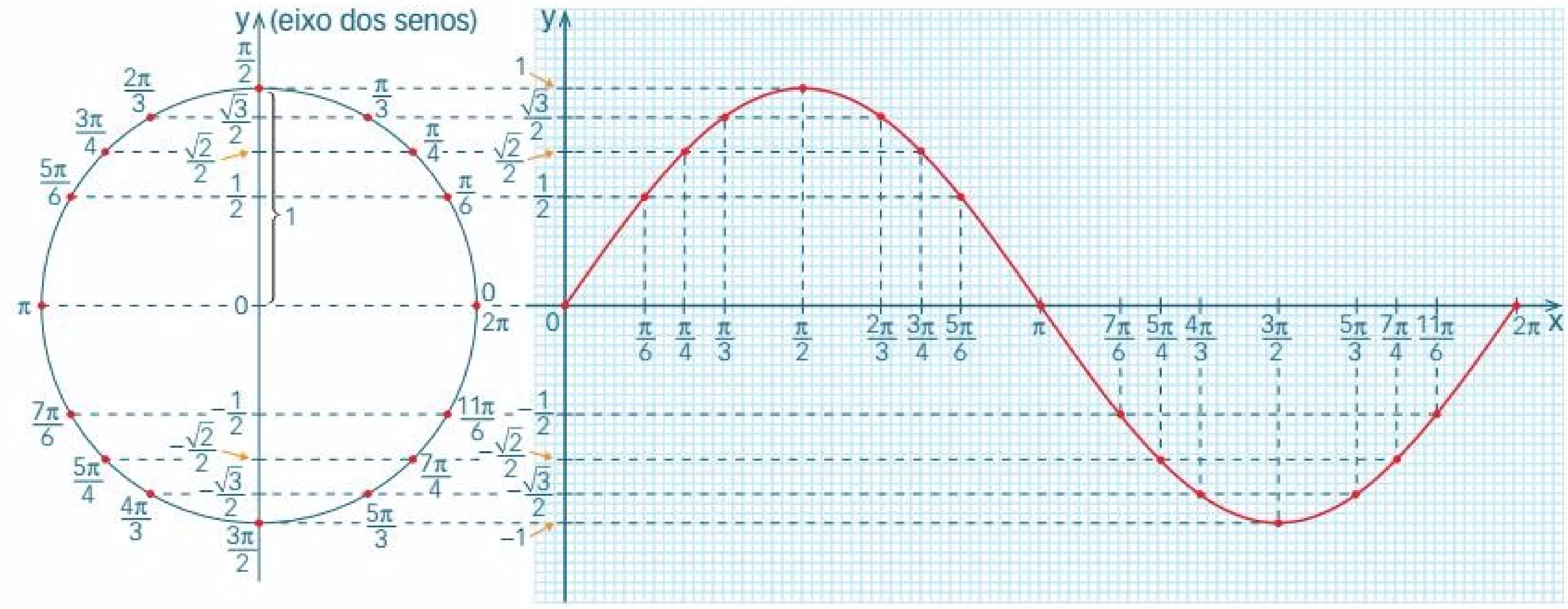
Denominamos **função seno** a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \text{sen}\,x$, que associa cada número real x ao correspondente seno de x.





Ilustrações: Acervo da Editora

Do mesmo modo como fizemos com as alturas das cabines da Singapore Flyer, vamos esboçar o gráfico da função seno com base em alguns valores do seno na circunferência trigonométrica. Observe:



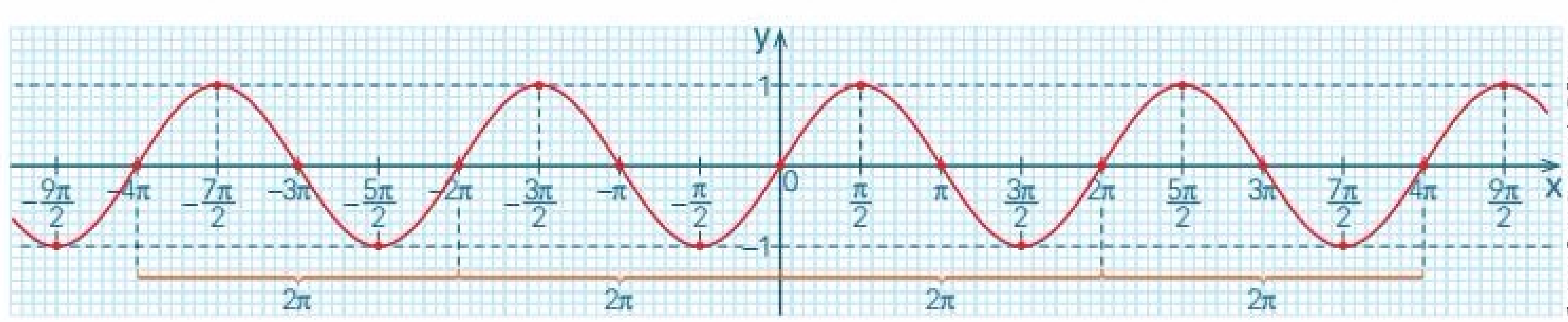
No gráfico acima, cada número real *x* representa o **comprimento** de um arco de medida *x* radianos na circunferência trigonométrica. É como se "esticássemos" a circunferência de comprimento 2π sobre o eixo.

Voltando ao exemplo da Singapore Flyer, se a roda-gigante executa um giro completo de 360°, cada cabine irá retornar à mesma altura em que estava. O mesmo acontece na circunferência trigonométrica a cada período de 2π. Isso equivale a dizer que os valores de seno se repetem de 2π em 2π, correspondendo aos arcos côngruos apresentados na primeira volta da circunferência trigonométrica. Dizemos que a função seno é **periódica** de período 2π. Assim, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + k \cdot 2\pi)$, sendo $k \in \mathbb{Z}$. Por exemplo:

$$\ldots = \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - 2\pi\right)}_{\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)}_{\operatorname{sen}\frac{9\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi\right)}_{\operatorname{sen}\frac{17\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \ldots$$

Professor(a): Determine com os alunos o valor de **k** em cada argumento de seno na igualdade.

Consequentemente, para esboçar o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$, repetimos a curva obtida no intervalo $[0, 2\pi[$ para valores menores que zero e maiores ou iguais a 2π. Portanto, o gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ é dado por:



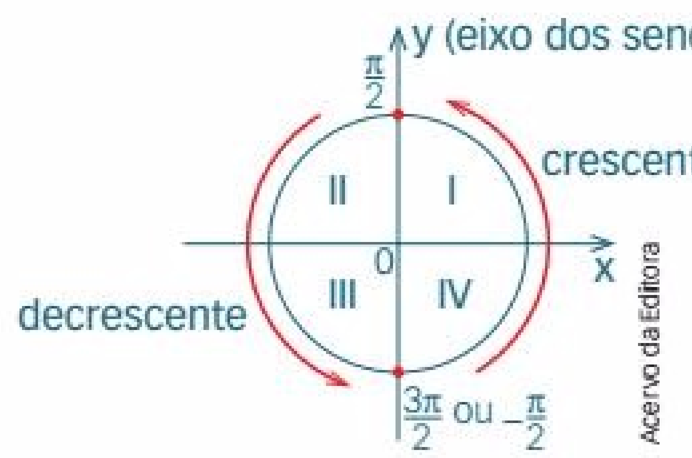
Ilustrações: Acervo da Editora

A curva correspondente ao gráfico da função **f** é denominada **senoide**.

Note ainda que:

- O domínio e o contradomínio da função seno são iguais a $\mathbb{R}$, mas como sen$x$ é sempre um valor maior ou igual a -1 e menor ou igual a 1, a **imagem** da função fica restrita ao intervalo $[-1, 1]$.
- A função é **crescente** para $x \in \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$ e **decrescente** para $x \in \left]\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right[$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Essa característica pode ser observada na circunferência trigonométrica, pois, à medida que x aumenta, os valores de sen$x$ aumentam do 4º para o 1º quadrante, e diminuem do 2º para o 3º quadrante.



Acervo da Editora

Para $k = 1$, por exemplo, temos que $f(x) = \text{sen}\,x$:

- é crescente para $x \in \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[$
- é decrescente para $x \in \left]\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right[$

- A função é **ímpar**, pois para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $\text{sen}\,x = -\text{sen}(-x)$.

Observe no gráfico que:

$$\text{sen}\frac{\pi}{2} = -\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{sen}\frac{3\pi}{2} = -\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) \qquad \text{sen}\frac{5\pi}{2} = -\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$$

Se dois arcos na circunferência trigonométrica são simétricos em relação ao eixo x, os valores dos senos desses arcos são **opostos**.

Representação gráfica da função seno no GeoGebraPrim

Observe uma maneira de construir o gráfico da função $f(\alpha) = \text{sen}\,\alpha$ com base nos valores de α na circunferência trigonométrica utilizando o GeoGebraPrim.

Passo 1: Após executar o GeoGebraPrim no menu **Opções**, clique em **Arredondamento** e, em seguida, em **2 Casas Decimais**. Defina os pontos **O** e **A** de coordenadas $(-2, 0)$ e $(-1, 0)$, respectivamente, digitando **O=(–2,0)** e **A=(–1,0)** no campo **Entrada**. Com a ferramenta **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos** selecionada , crie um círculo de centro **O** passando pelo ponto **A**.

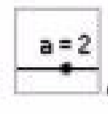
GEOGEBRAPRIM

Programa de computador gratuito com recursos dinâmicos voltado para a aprendizagem de Matemática.

Licença: Pode ser copiado, distribuído e transmitido livremente, para fins não comerciais.

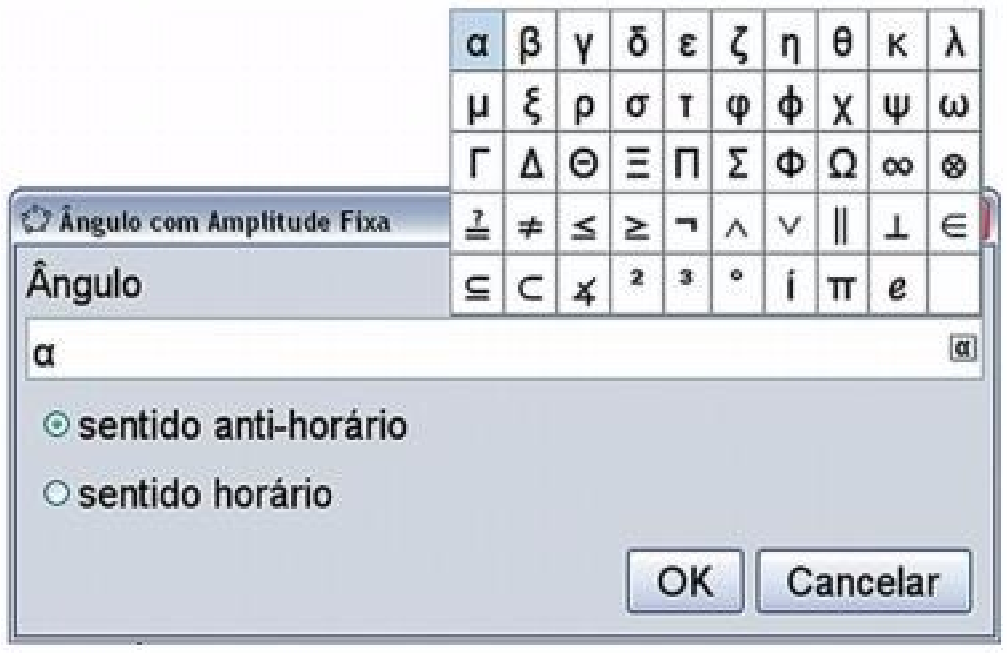
Onde obter: <www.geogebra.org>

Versão utilizada: 4.0.41.0

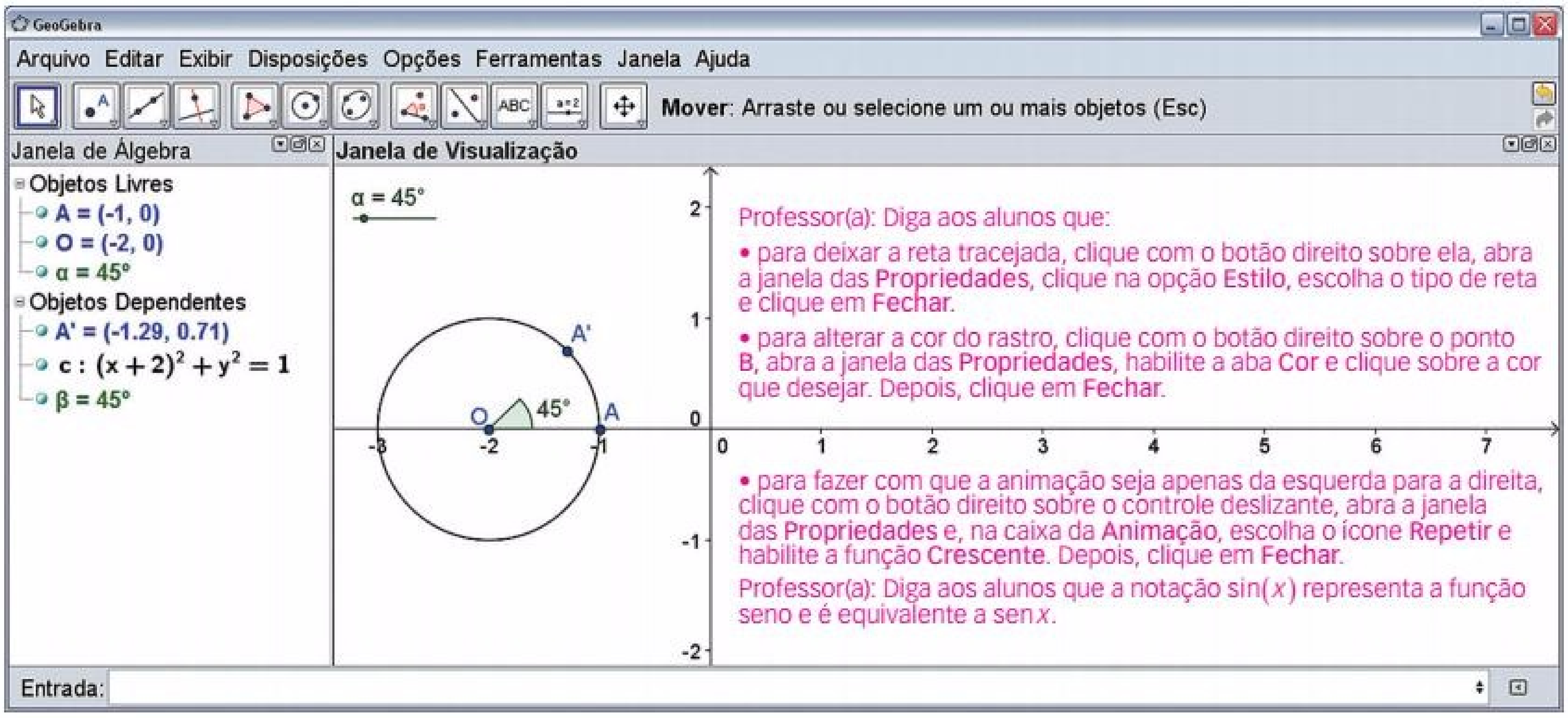
Passo 2: Com a ferramenta **Controle Deslizante** selecionada , clique em algum local da **Janela de Visualização** e selecione a opção **Ângulo**. Clique em **Aplicar**.

Professor(a): Dependendo da versão do GeoGebraPrim, o programa irá exibir ângulos de medida menor que 180°. Se for esse o caso, diga aos alunos que no **Passo 2**, na janela **Controle Deslizante**, selecionem a opção **Número** e no campo **Nome**, escolham o caractere grego α. Ainda no **Passo 2**, diga que, na aba **Intervalo**, digitem "0" no campo min e "2pi" no campo **max**. Por fim, diga para clicar em **Aplicar**.

GeoGebra v. 4.0.41.0. Por International GeoGebra Institute



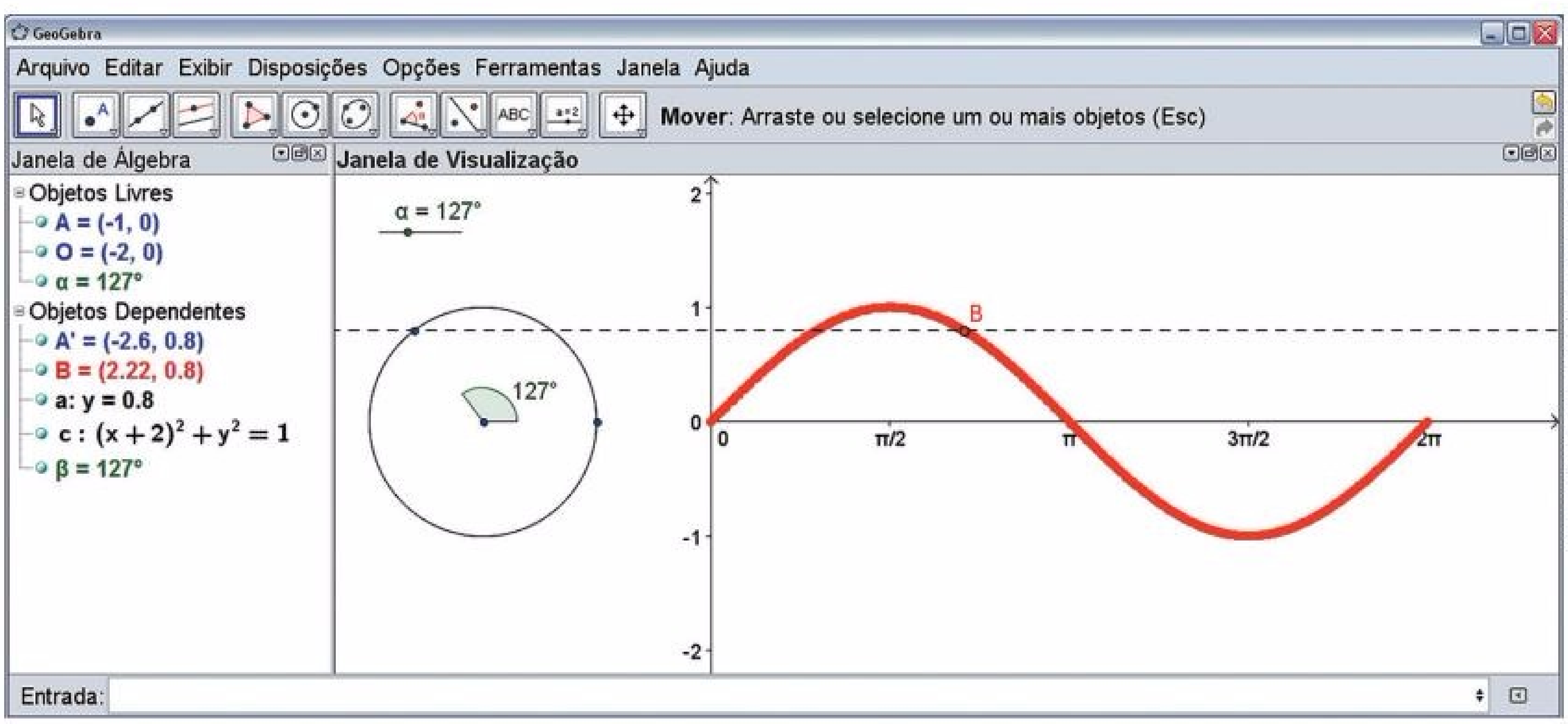
Passo 3: Com a ferramenta **Ângulo com Amplitude Fixa** selecionada, clique no ponto **A** e, em seguida, no ponto **O** e selecione o caractere grego α à direita na janela que vai aparecer. Clique em **OK**.



Passo 4: Com a ferramenta **Reta Paralela** selecionada, construa uma reta paralela ao eixo *x*, passando pelo ponto A'. Para isso, clique no ponto A' e, em seguida, no eixo *x*, ou vice-versa.

Passo 5: Defina o ponto **B** de coordenadas $(\alpha, \text{sen}\alpha)$ digitando **B=(α,sin(α))** no campo **Entrada**.

Por fim, clique com o botão direito sobre o ponto **B** e acione o comando **Habilitar Rastro**. Depois, clique com o botão direito sobre o controle deslizante e acione o comando **Animar**.



Imagens: GeoGebra v. 4.0.41.0. Por International GeoGebra Institute

Para alterar a escala do eixo *x*, clique com o botão direito sobre um dos eixos e acione o comando **Janela de Visualização**. Nela, selecione a opção **EixoX** e marque as opções **Direção Positiva Apenas** e **Distância**, na qual deve ser selecionada a opção $\pi / 2$. Depois, clique em **Fechar**.

Atividades ▶ Anote as respostas no caderno.

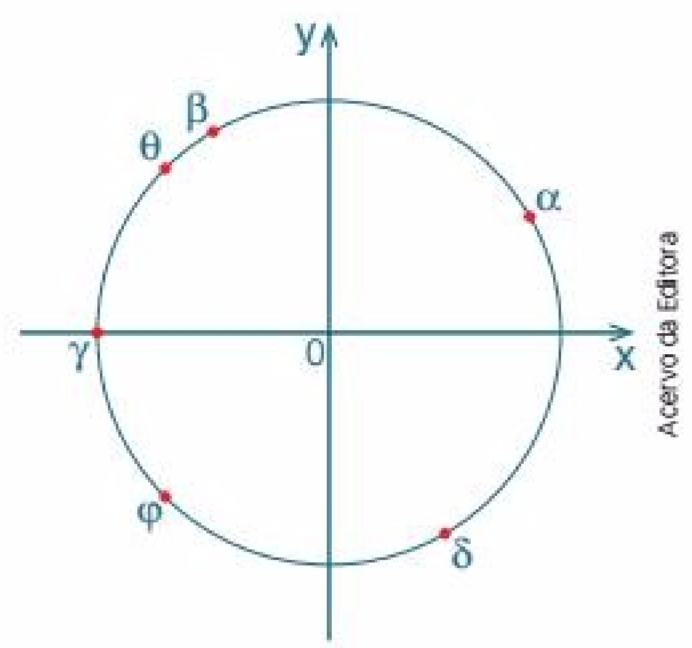
1. Calcule:

a) $\text{sen}\frac{\pi}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\text{sen}\frac{11\pi}{6}$ $-\frac{1}{2}$ e) $\text{sen}\frac{7\pi}{6}$ $-\frac{1}{2}$

b) $\text{sen}\frac{4\pi}{3}$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\text{sen}3\pi$ 0 f) $\text{sen}8\pi$ 0

2. Associe o valor de seno, apresentado no quadro, com a medida do arco indicado na circunferência trigonométrica. Para isso, escreva uma igualdade, por exemplo, $\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\text{sen}\alpha = \frac{1}{2}$; $\text{sen}\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{sen}\gamma = 0$; $\text{sen}\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{sen}\delta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0



3. Determine os valores de x para que:

a) $\text{sen}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, com $0° < x < 180°$ $x = 60°$ ou $x = 120°$

b) $\text{sen}x = \frac{1}{2}$, com $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ $x = \frac{5\pi}{6}$

c) $\text{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, com $0° < x < 540°$ $x = 45°$, $x = 135°$, $x = 405°$ ou $x = 495°$

d) $\text{sen}x = 0$, com $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{2}$ $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ ou $x = 3\pi$

4. (Ufam) Dada a equação $\text{sen}x = 2m - 9$. Então os valores reais de **m** para que a equação tenha solução são: e

a) $\{m \in \mathbb{R}; m \geq 5\}$

b) $\{m \in \mathbb{R}; m \geq 4\}$

c) $\{m \in \mathbb{R}; m \leq 5\}$

d) $\{m \in \mathbb{R}; m \leq 4 \text{ ou } m \geq 5\}$

e) $\{m \in \mathbb{R}; 4 \leq m \leq 5\}$

5. Esboce o gráfico da função seno para o intervalo de $-\pi$ a $\frac{3\pi}{2}$ e destaque o ponto:

- **A**, cuja abscissa é $-\frac{\pi}{4}$
- **B**, cuja abscissa é $\frac{4\pi}{9}$
- **C**, cuja abscissa é $\frac{2\pi}{3}$
- **D**, cuja abscissa é $\frac{10\pi}{9}$

Professor(a): Veja a resposta desta atividade na Assessoria Pedagógica.

Professor(a): Oriente os alunos para que, quando necessário, consultem a tabela trigonométrica no final do livro.

6. (FGV-SP) A previsão de vendas mensais de uma empresa para 2011, em toneladas de um produto, é dada por $f(x) = 100 + 0{,}5x + 3 \cdot \text{sen}\frac{\pi x}{6}$, em que $x = 1$ corresponde a janeiro de 2011, $x = 2$ corresponde a fevereiro de 2011 e assim por diante.

A previsão de vendas (em toneladas) para o primeiro trimestre de 2011 é: d

(Use a aproximação decimal $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$)

a) 308,55 c) 309,55 e) 310,55

b) 309,05 d) 310,05

EM GRUPO

7. Vimos que a função $h(x) = 90 + 75 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{14}x - \frac{\pi}{14}\right)$ determina a altura aproximada de cada cabine da roda-gigante Singapore Flyer. Nessa função, **h** representa a altura, em metros, de cada cabine em relação ao solo e x, o número da cabine. Considerando que essa roda-gigante gira no sentido anti-horário, determine a altura aproximada da:

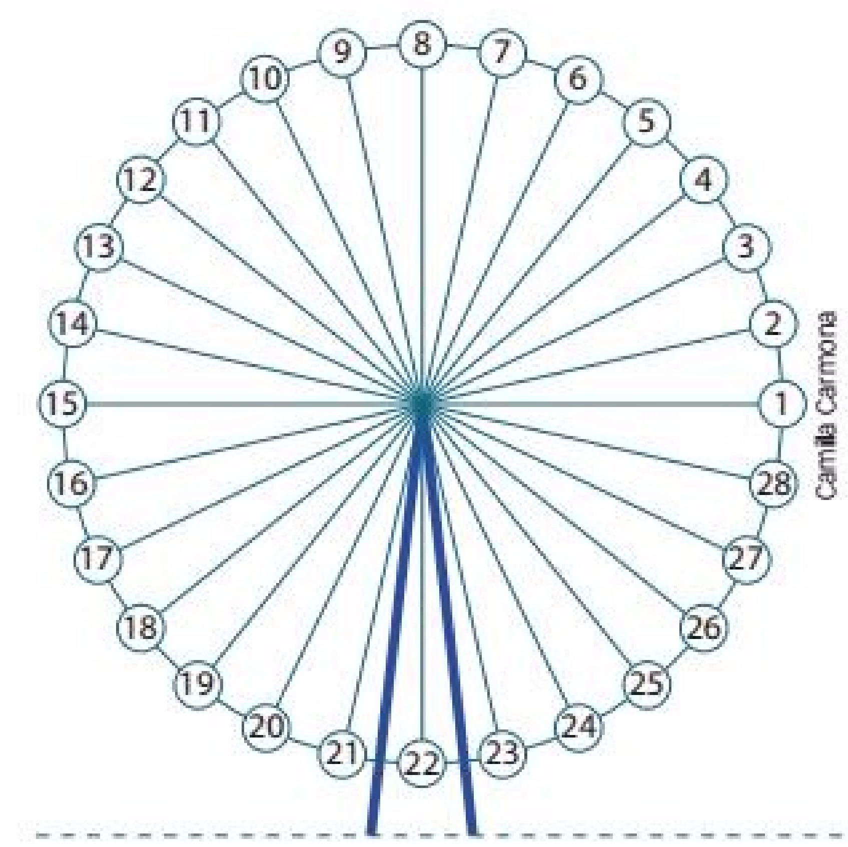
a) cabine 4 após 5 voltas completas 136,76 m

b) cabine 20 após $\frac{1}{2}$ volta 157,57 m

c) cabine 16 após $1\frac{1}{4}$ de volta 16,88 m

d) cabine 25 após um giro de 270° 43,24 m

e) cabine 11 após um giro de aproximadamente 77,14° 57,46 m



8. A função seno é crescente ou decrescente no intervalo: crescente: a, c, f; decrescente: b, d, e

a) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$? d) $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$?

b) $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$? e) $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}\right]$?

c) $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$? f) $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$?

FUNÇÕES DO TIPO $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$

No início da unidade, vimos a função do tipo trigonométrica $h(x) = 90 + 75 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{14}x - \frac{\pi}{14}\right)$, que descreve as alturas das cabines da Singapore Flyer em relação ao solo, em determinado momento. As funções definidas por $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$, sendo **a**, **b**, **c** e **d** números reais com $b \neq 0$ e $c \neq 0$, são **funções do tipo trigonométricas**, e seus gráficos são senoides **transladadas**, **ampliadas** ou **comprimidas**, verticalmente ou horizontalmente, se comparadas com o gráfico da função seno.

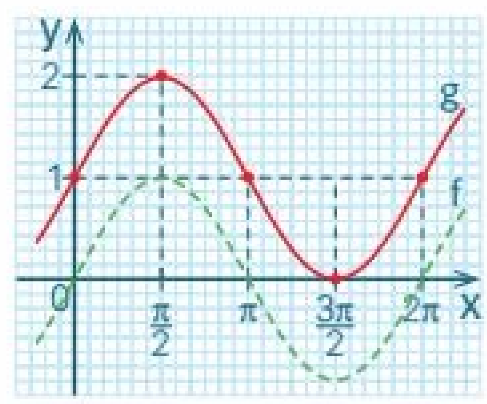
Professor(a): Diga aos alunos que as funções definidas por $f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$, sendo a, b, c e d números reais com $b \neq 0$ e $c \neq 0$, também são funções do tipo trigonométricas, que estudaremos no próximo tópico.

Na função $h(x) = 90 + 75 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{14}x - \frac{\pi}{14}\right)$, temos $a = 90$, $b = 75$, $c = \frac{\pi}{14}$ e $d = -\frac{\pi}{14}$.

- Em relação ao gráfico de $f(x) = \text{sen}\,x$, o gráfico da função $g(x) = a + \text{sen}\,x$ é **transladado** em $|a|$ unidades **para cima** se $a > 0$, ou **para baixo** se $a < 0$. Exemplo:

Em cada exemplo, esboçamos o gráfico da função para apenas um período ou dois. Mas lembre-se de que a curva se repete periodicamente.

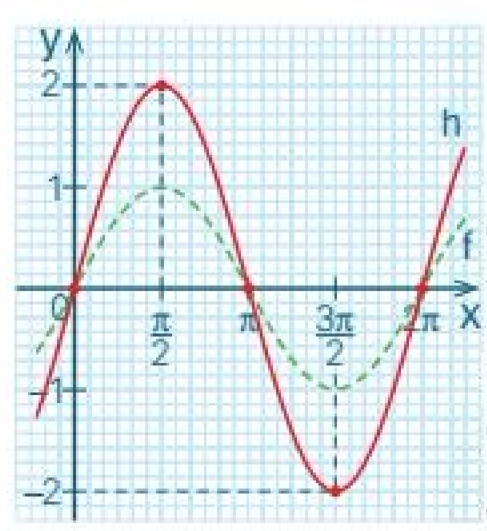
x	$y = g(x) = 1 + \text{sen}\,x$	(x, y)
0	$y = 1 + \text{sen}\,0 = 1 + 0 = 1$	$(0, 1)$
$\frac{\pi}{2}$	$y = 1 + \text{sen}\frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$	$\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$
π	$y = 1 + \text{sen}\,\pi = 1 + 0 = 1$	$(\pi, 1)$
$\frac{3\pi}{2}$	$y = 1 + \text{sen}\frac{3\pi}{2} = 1 + (-1) = 0$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$
2π	$y = 1 + \text{sen}\,2\pi = 1 + 0 = 1$	$(2\pi, 1)$



O gráfico de $g(x) = 1 + \text{sen}\,x$ é congruente ao gráfico de $f(x) = \text{sen}\,x$, porém transladado $|1| = 1$ unidade para cima, pois $a = 1 > 0$. Assim, $\text{Im}(g) = [0, 2]$, e o período é 2π.

- Em relação ao gráfico de $f(x) = \text{sen}\,x$, o gráfico da função $h(x) = b \cdot \text{sen}\,x$ é **ampliado verticalmente** se $|b| > 1$, ou **comprimido verticalmente** se $|b| < 1$. Exemplo:

x	$y = h(x) = 2 \cdot \text{sen}\,x$	(x, y)
0	$y = 2 \cdot \text{sen}\,0 = 2 \cdot 0 = 0$	$(0, 0)$
$\frac{\pi}{2}$	$y = 2 \cdot \text{sen}\frac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 = 2$	$\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$
π	$y = 2 \cdot \text{sen}\,\pi = 2 \cdot 0 = 0$	$(\pi, 0)$
$\frac{3\pi}{2}$	$y = 2 \cdot \text{sen}\frac{3\pi}{2} = 2 \cdot (-1) = -2$	$\left(\frac{3\pi}{2}, -2\right)$
2π	$y = 2 \cdot \text{sen}\,2\pi = 2 \cdot 0 = 0$	$(2\pi, 0)$



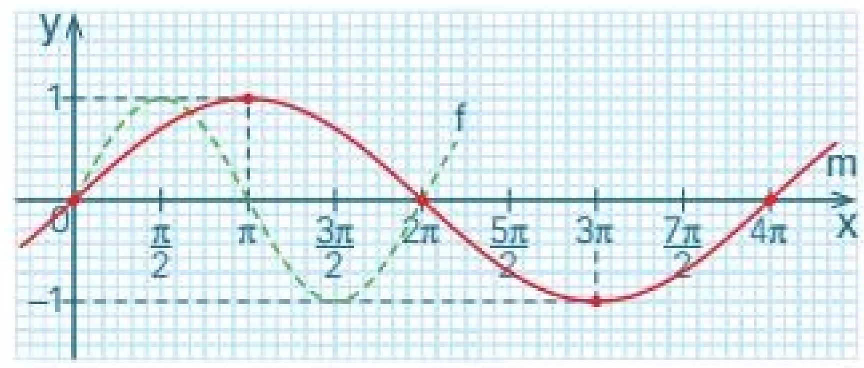
Ilustrações: Acervo da Editora

O gráfico de $h(x) = 2 \cdot \text{sen}\,x$ foi ampliado verticalmente em relação ao gráfico de $f(x) = \text{sen}\,x$, pois $|b| = |2| > 1$. Assim, $\text{Im}(h) = [-2, 2]$, e o período é 2π.

- Em relação ao gráfico de $f(x) = \text{sen}\, x$, o gráfico da função $m(x) = \text{sen}(cx)$ é **ampliado horizontalmente** se $|c| < 1$, ou **comprimido horizontalmente** se $|c| > 1$.

Exemplo:

x	$y = m(x) = \text{sen}\,\frac{x}{2}$	(x, y)
0	$y = \text{sen}\,\frac{0}{2} = \text{sen}\,0 = 0$	$(0, 0)$
π	$y = \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$	$(\pi, 1)$
2π	$y = \text{sen}\,\frac{2\pi}{2} = \text{sen}\,\pi = 0$	$(2\pi, 0)$
3π	$y = \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -1$	$(3\pi, -1)$
4π	$y = \text{sen}\,\frac{4\pi}{2} = \text{sen}\,2\pi = 0$	$(4\pi, 0)$



O gráfico de $m(x) = \text{sen}\,\frac{x}{2}$ foi ampliado horizontalmente em relação ao gráfico de $f(x) = \text{sen}\,x$, pois $|c| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1$. Assim, $\text{Im}(m) = [-1, 1]$, e o período é 4π.

O período da função $m(x) = \text{sen}(cx)$ é dado por $p = \frac{2\pi}{|c|}$.

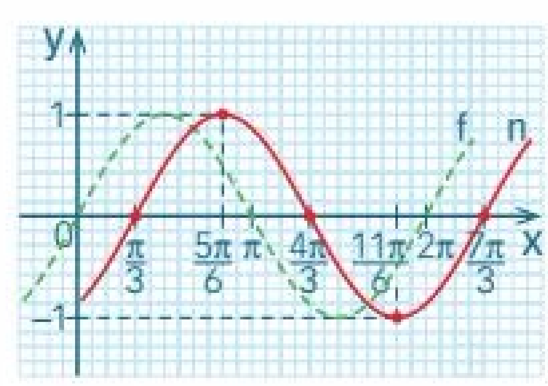
No caso da função $m(x) = \text{sen}\,\frac{x}{2}$, por exemplo, temos:

$$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 2\pi \cdot \frac{2}{1} = 4\pi$$

- Em relação ao gráfico de $f(x) = \text{sen}\,x$, o gráfico da função $n(x) = \text{sen}(cx + d)$ é **transladado** em $\left|\frac{d}{c}\right|$ unidades para a esquerda se $d > 0$, ou para a direita se $d < 0$.

Exemplo:

x	$y = n(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$	(x, y)
$\frac{\pi}{3}$	$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\,0 = 0$	$\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$
$\frac{5\pi}{6}$	$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$	$\left(\frac{5\pi}{6}, 1\right)$
$\frac{4\pi}{3}$	$\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\,\pi = 0$	$\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$
$\frac{11\pi}{6}$	$\text{sen}\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -1$	$\left(\frac{11\pi}{6}, -1\right)$
$\frac{7\pi}{3}$	$\text{sen}\left(\frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\,2\pi = 0$	$\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right)$



Ilustrações: Acervo da Editora

O gráfico de $n(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ é congruente ao gráfico de $f(x) = \text{sen}\,x$, porém transladado $\left|\frac{-\frac{\pi}{3}}{1}\right| = \frac{\pi}{3}$ unidades para a direita, pois $d = -\frac{\pi}{3} < 0$. Assim, $\text{Im}(g) = [-1, 1]$, e o período é 2π.

Professor(a): Verifique se os alunos perceberam que, nesse caso, a constante c é 1.

Podemos dizer então que na função do tipo trigonométrica $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ as constantes **a** e **b** alteram as características relacionadas à imagem da função e as constantes **c** e **d** alteram as características relacionadas ao período da função.

Combinando essas características, vamos esboçar o gráfico da função $g(x)=3+2\cdot \text{sen}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$, por exemplo, considerando o gráfico da função $f(x)=\text{sen}\,x$.

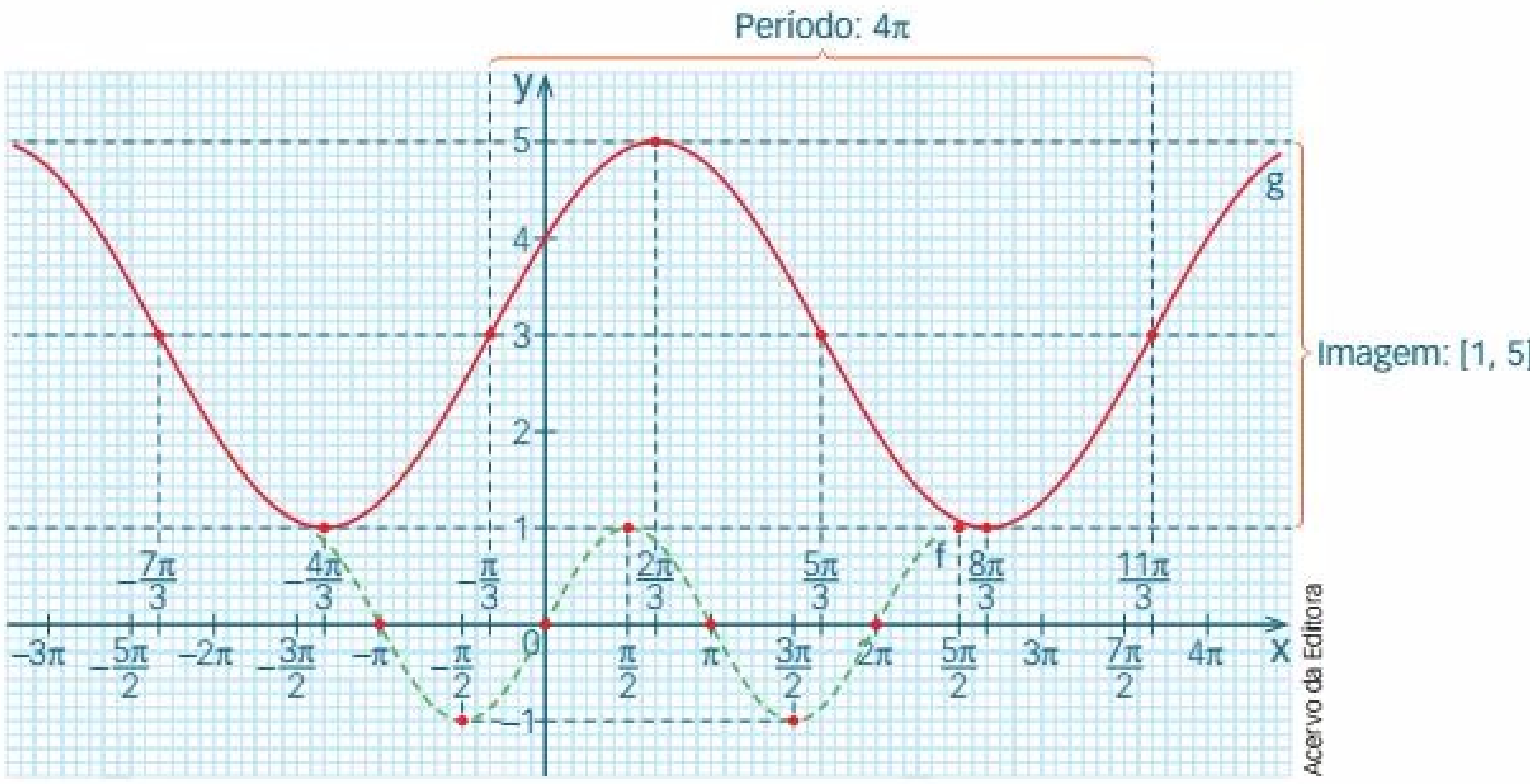
Foi transladado $|3|=3$ unidades para cima, pois $a=3>0$.

Foi ampliado horizontalmente, pois $|c|=\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$. O período "dobrou" de comprimento.

$$g(x)=3+2\cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$$

Foi ampliado verticalmente, pois $|b|=|2|>1$. O intervalo da imagem dobrou de altura.

Foi transladado $\left|\dfrac{\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2}}\right|=\dfrac{\pi}{3}$ unidades para a esquerda, pois $d=\dfrac{\pi}{6}>0$.



Professor(a): Veja na seção **Conexão tecnológica** desta unidade como plotar funções do tipo trigonométricas com o programa de computador GeoGebraPrim.

Atividades resolvidas

R1. Esboce os gráficos e determine a imagem e o período das funções a seguir com domínio nos números reais.

a) $f(x)=\text{sen}(2x)-1$

b) $g(x)=\dfrac{1}{2}\cdot \text{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $h(x)=2\cdot \text{sen}(3x-\pi)$

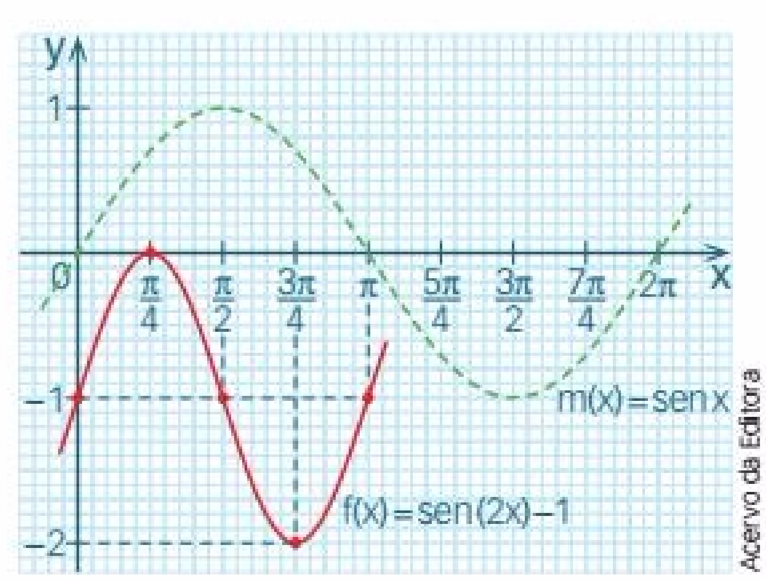
Resolução

a) O gráfico da função **f** será comprimido horizontalmente e transladado 1 unidade para baixo em relação ao gráfico da função $m(x)=\text{sen}x$, pois $|c|=|2|>1$ e $a=-1<0$.

Consequentemente, o período e a imagem, que na função **m** são $p=2\pi$ e $\text{Im}(m)=[-1,1]$, respectivamente, na função **f** serão $p=\pi$ e $\text{Im}(f)=[-2,0]$.

Por fim, para auxiliar no esboço do gráfico da função **f**, atribuímos alguns valores para x e esboçamos o gráfico.

x	$y=f(x)=\text{sen}(2x)-1$	(x,y)
0	$y=f(0)=\text{sen}(\underbrace{2\cdot 0}_{0})-1=0-1=-1$	$(0,-1)$
$\dfrac{\pi}{4}$	$y=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\text{sen}\underbrace{\left(2\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)}_{\frac{\pi}{2}}-1=1-1=0$	$\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$
$\dfrac{\pi}{2}$	$y=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\text{sen}\underbrace{\left(2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)}_{\pi}-1=0-1=-1$	$\left(\dfrac{\pi}{2},-1\right)$
$\dfrac{3\pi}{4}$	$y=f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\text{sen}\underbrace{\left(2\cdot\dfrac{3\pi}{4}\right)}_{\frac{3\pi}{2}}-1=-1-1=-2$	$\left(\dfrac{3\pi}{4},-2\right)$
π	$y=f(\pi)=\text{sen}(\underbrace{2\cdot \pi}_{2\pi})-1=0-1=-1$	$(\pi,-1)$

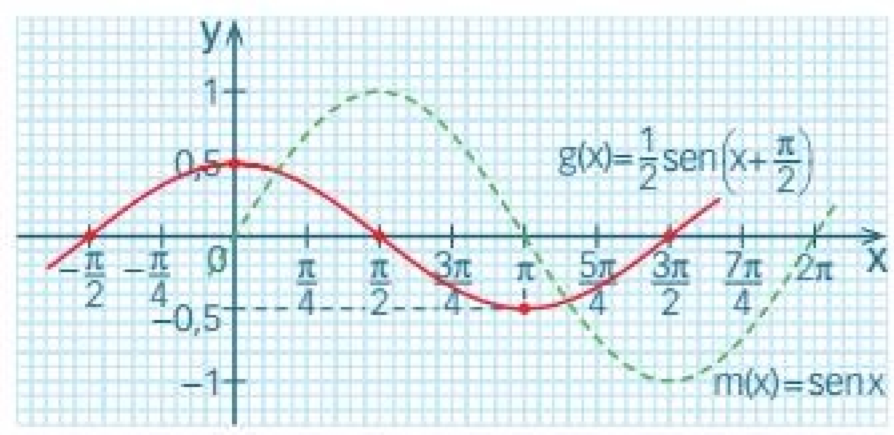


b) O gráfico da função **g** será comprimido verticalmente e transladado $\left|\dfrac{\frac{\pi}{2}}{1}\right| = \dfrac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda em relação ao gráfico da função $m(x) = \operatorname{sen} x$, pois $|b| = \left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$ e $d = \dfrac{\pi}{2} > 0$.

Consequentemente, se a imagem na função **m** é $[-1, 1]$, na função **g** é $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, e o período é $p = 2\pi$.

Por fim, para auxiliar no esboço do gráfico da função **g**, atribuímos alguns valores para *x* e esboçamos o gráfico.

x	$y = g(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$	(x, y)
$-\dfrac{\pi}{2}$	$y = g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}\underbrace{\left(-\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)}_{0} = \dfrac{1}{2} \cdot 0 = 0$	$\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$
0	$y = g(0) = \dfrac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}\underbrace{\left(0 + \dfrac{\pi}{2}\right)}_{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$	$\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$
$\dfrac{\pi}{2}$	$y = g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}\underbrace{\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)}_{\pi} = \dfrac{1}{2} \cdot 0 = 0$	$\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$
π	$y = g(\pi) = \dfrac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}\underbrace{\left(\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)}_{\frac{3\pi}{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot (-1) = -\dfrac{1}{2}$	$\left(\pi, -\dfrac{1}{2}\right)$
$\dfrac{3\pi}{2}$	$y = g\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}\underbrace{\left(\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)}_{2\pi} = \dfrac{1}{2} \cdot 0 = 0$	$\left(\dfrac{3\pi}{2}, 0\right)$

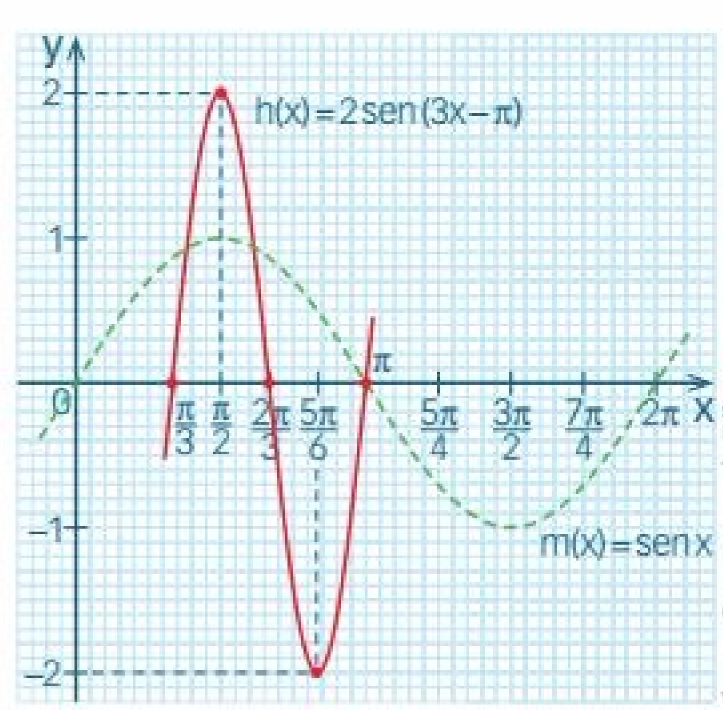


c) O gráfico da função **h** será ampliado verticalmente, comprimido horizontalmente e transladado $\left|\dfrac{-\pi}{3}\right| = \dfrac{\pi}{3}$ unidades para a direita em relação ao gráfico da função $m(x) = \operatorname{sen} x$, pois $|b| = |2| > 1$, $|c| = |3| > 1$ e $d = -\pi < 0$.

Consequentemente, se na função **m** temos $p = 2\pi$ e $\operatorname{Im}(m) = [-1, 1]$, na função **h** temos $\operatorname{Im}(h) = [-2, 2]$ e $p = \dfrac{2\pi}{3}$.

Por fim, para auxiliar no esboço do gráfico da função **h**, atribuímos alguns valores para *x*:

x	$y = h(x) = 2 \cdot \operatorname{sen}(3x - \pi)$	(x, y)
$\dfrac{\pi}{3}$	$y = h\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \operatorname{sen}\underbrace{\left(3 \cdot \dfrac{\pi}{3} - \pi\right)}_{0} = 2 \cdot 0 = 0$	$\left(\dfrac{\pi}{3}, 0\right)$
$\dfrac{\pi}{2}$	$y = h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \operatorname{sen}\underbrace{\left(3 \cdot \dfrac{\pi}{2} - \pi\right)}_{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot 1 = 2$	$\left(\dfrac{\pi}{2}, 2\right)$
$\dfrac{2\pi}{3}$	$y = h\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2 \cdot \operatorname{sen}\underbrace{\left(3 \cdot \dfrac{2\pi}{3} - \pi\right)}_{\pi} = 2 \cdot 0 = 0$	$\left(\dfrac{2\pi}{3}, 0\right)$
$\dfrac{5\pi}{6}$	$y = h\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 2 \cdot \operatorname{sen}\underbrace{\left(3 \cdot \dfrac{5\pi}{6} - \pi\right)}_{\frac{3\pi}{2}} = 2 \cdot (-1) = -2$	$\left(\dfrac{5\pi}{6}, -2\right)$
π	$y = h(\pi) = 2 \cdot \operatorname{sen}\underbrace{(3 \cdot \pi - \pi)}_{2\pi} = 2 \cdot 0 = 0$	$(\pi, 0)$



Ilustrações: Acervo da Editora

R2. Sendo as funções $f(x) = 3 \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ e $g(x) = |x|$, esboce o gráfico da função $g \circ f$.

Resolução

Temos que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(3 \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \left|3 \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

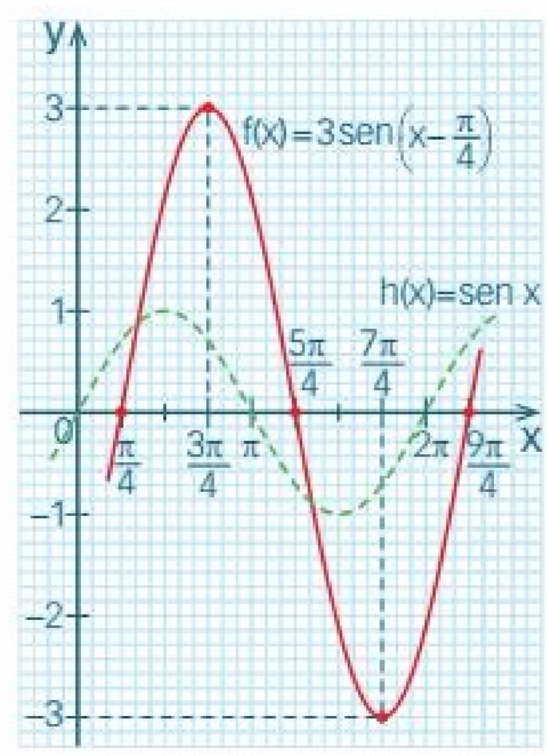
Para esboçarmos o gráfico da função $g \circ f$, inicialmente esboçamos o gráfico da função $f(x) = 3 \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Note que o gráfico de **f** será ampliado verticalmente e transladado $\left|\frac{-\frac{\pi}{4}}{1}\right| = \frac{\pi}{4}$ unidades para a direita em relação ao gráfico de $h(x) = \text{sen}x$, pois $|b| = |3| > 1$ e $d = -\frac{\pi}{4} < 0$.

Consequentemente, a função **f** terá o mesmo período da função **h**, porém sua imagem, em vez de ser $[-1, 1]$ como na função **h**, será $[-3, 3]$.

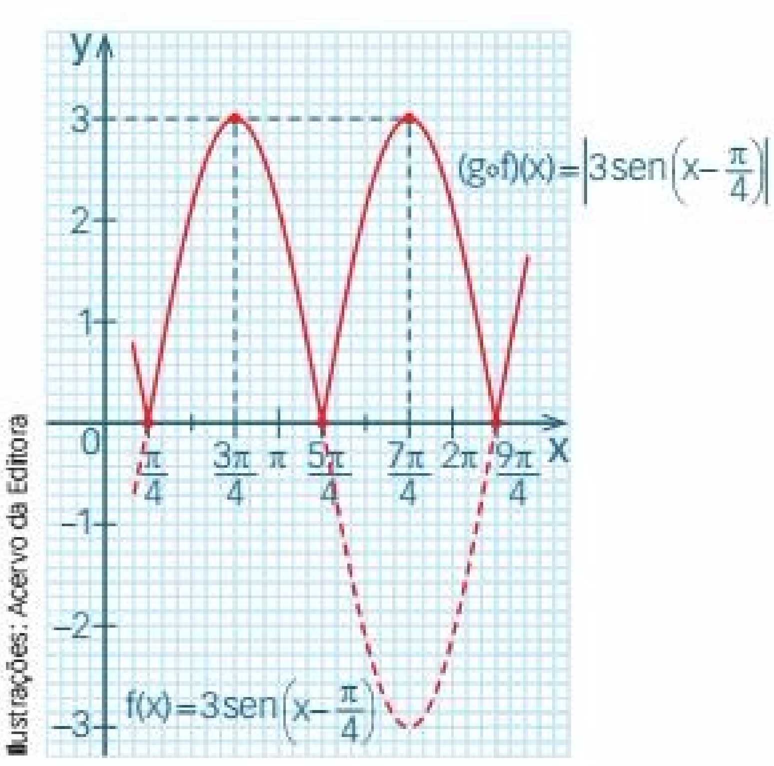
Atribuímos alguns valores para x e esboçamos o gráfico da função **f**.

x	$y = f(x) = 3 \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	(x, y)
$\frac{\pi}{4}$	$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \cdot \text{sen}\underbrace{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)}_{0} = 3 \cdot 0 = 0$	$\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$
$\frac{3\pi}{4}$	$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3 \cdot \text{sen}\underbrace{\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{\pi}{2}} = 3 \cdot 1 = 3$	$\left(\frac{3\pi}{4}, 3\right)$
$\frac{5\pi}{4}$	$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 3 \cdot \text{sen}\underbrace{\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)}_{\pi} = 3 \cdot 0 = 0$	$\left(\frac{5\pi}{4}, 0\right)$
$\frac{7\pi}{4}$	$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 3 \cdot \text{sen}\underbrace{\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{3\pi}{2}} = 3 \cdot (-1) = -3$	$\left(\frac{7\pi}{4}, -3\right)$
$\frac{9\pi}{4}$	$f\left(\frac{9\pi}{4}\right) = 3 \cdot \text{sen}\underbrace{\left(\frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)}_{2\pi} = 3 \cdot 0 = 0$	$\left(\frac{9\pi}{4}, 0\right)$



Esboçado o gráfico da função **f**, vamos esboçar o gráfico da função $(g \circ f)(x) = |f(x)|$.

- Para os valores em que $f(x) \geq 0$, segue que $(g \circ f)(x) = f(x)$.
- Para os valores em que $f(x) < 0$, segue que $(g \circ f)(x) = -f(x)$, ou seja, os valores de **f** menores que zero são refletidos em relação ao eixo x.



Ilustrações: Acervo da Editora

Note que o gráfico da função $g \circ f$ é obtido do gráfico da função **f**, refletindo a parte negativa em relação ao eixo x, pois a imagem de $g \circ f$ contém apenas valores não negativos.

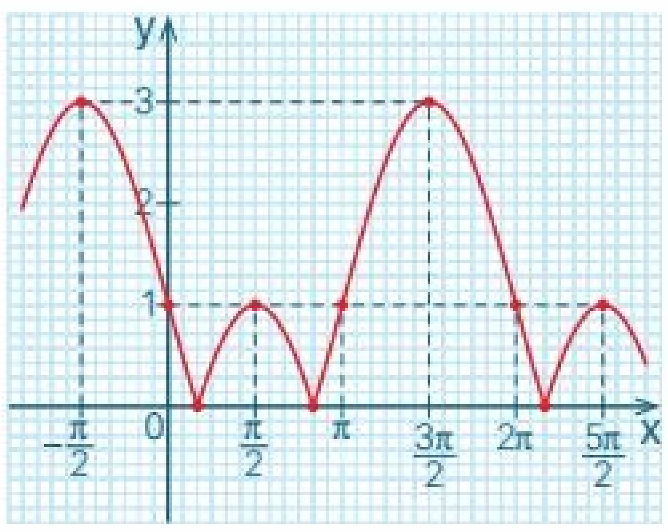
9. Associe cada função a seu respectivo gráfico. Para isso, escreva a letra e o símbolo romano correspondentes. a–III; b–II; c–I

a) $f(x)=4-\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

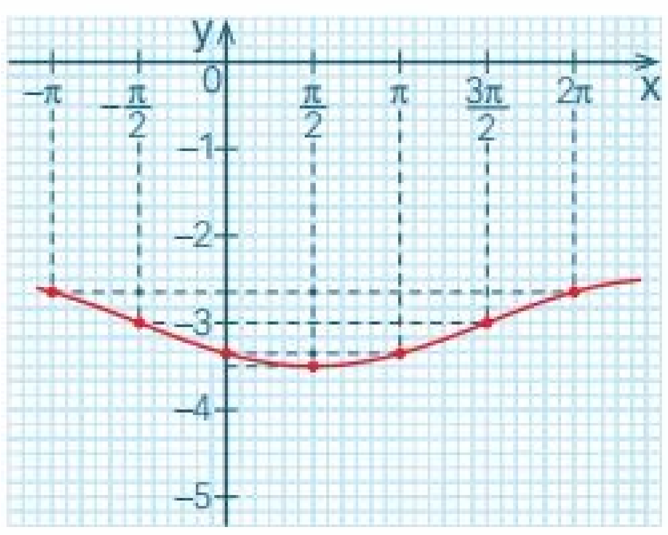
b) $g(x)=-3+\frac{1}{2}\cdot\text{sen}\left(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)$

c) $h(x)=|1-2\cdot\text{sen}\,x|$

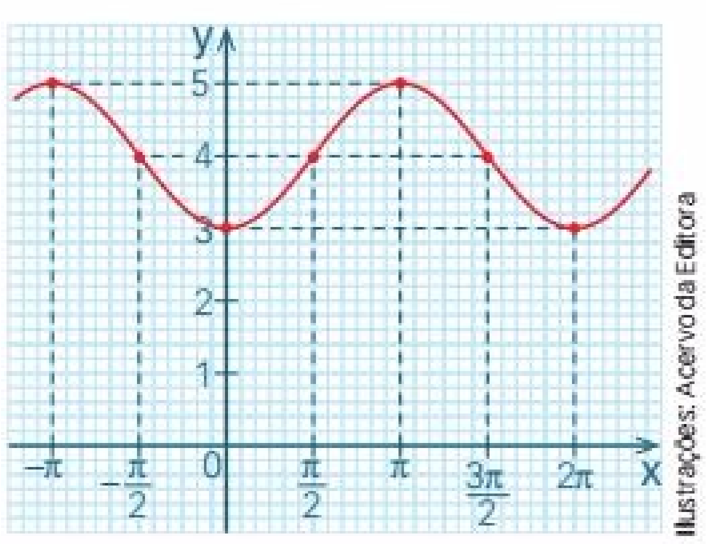
I)



II)



III)



10. Para cada função, determine o período e a imagem e esboce o gráfico. Professor(a): Veja a resposta desta atividade na Assessoria Pedagógica.

a) $f(x)=2\cdot\text{sen}(5x)$

b) $g(x)=\text{sen}(3x+\pi)$

c) $m(x)=4-\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

d) $n(x)=1+3\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{3}\right)$

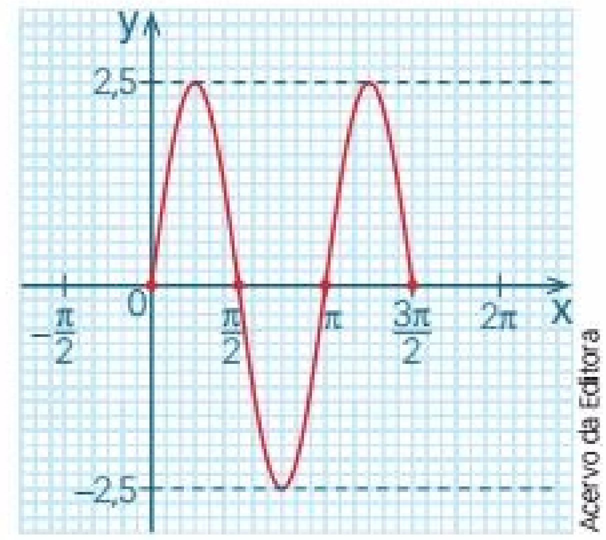
11. Para quais valores de **k** a função:

a) $f(x)=3+6\cdot\text{sen}(kx+\pi)$ tem período 3π? $k=\frac{2}{3}$ ou $k=-\frac{2}{3}$

b) $g(x)=k-7\cdot\text{sen}\left(\frac{x}{k}+\frac{\pi}{4}\right)$ tem período 8π? $k=4$ ou $k=-4$

c) $h(x)=-5+\frac{1}{k}\cdot\text{sen}\left(\frac{kx}{3}-\frac{4\pi}{5}\right)$ tem período $\frac{7\pi}{2}$? $k=\frac{12}{7}$ ou $k=-\frac{12}{7}$

12. Observe o gráfico da função $f(x)=b\cdot\text{sen}(cx)$.



a) Qual é o domínio dessa função? $D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,0\leq x\leq\frac{3\pi}{2}\right\}$

b) Quais são os valores dos coeficientes **b** e **c**? $b=2{,}5$ e $c=2$ ou $b=-2{,}5$ e $c=-2$

13. (UFPR) Suponha que o horário do pôr do sol na cidade de Curitiba, durante o ano de 2009, possa ser descrito pela função $f(t)=18{,}8-1{,}3\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi}{365}t\right)$, sendo t o tempo dado em dias e $t=0$ o dia 1º de janeiro. Com base nessas informações, considere as seguintes afirmativas:

1 - O período da função acima é 2π.

2 - Foi no mês de abril o dia em que o pôr do sol ocorreu mais cedo.

3 - O horário em que o pôr do sol ocorreu mais cedo foi 17h30.

Determine a alternativa correta. d

a) Somente a afirmativa 3 é verdadeira.

b) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.

c) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.

d) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.

e) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

DESAFIO

14. A tensão de um circuito elétrico pode ser dada por uma senoide. Dada a tensão $V(t)=12\cdot\text{sen}\left(50t+\frac{\pi}{2}\right)$, com **V** em volts e t em segundos, determine o período (p) para se completar um ciclo. $p=0{,}1257$s

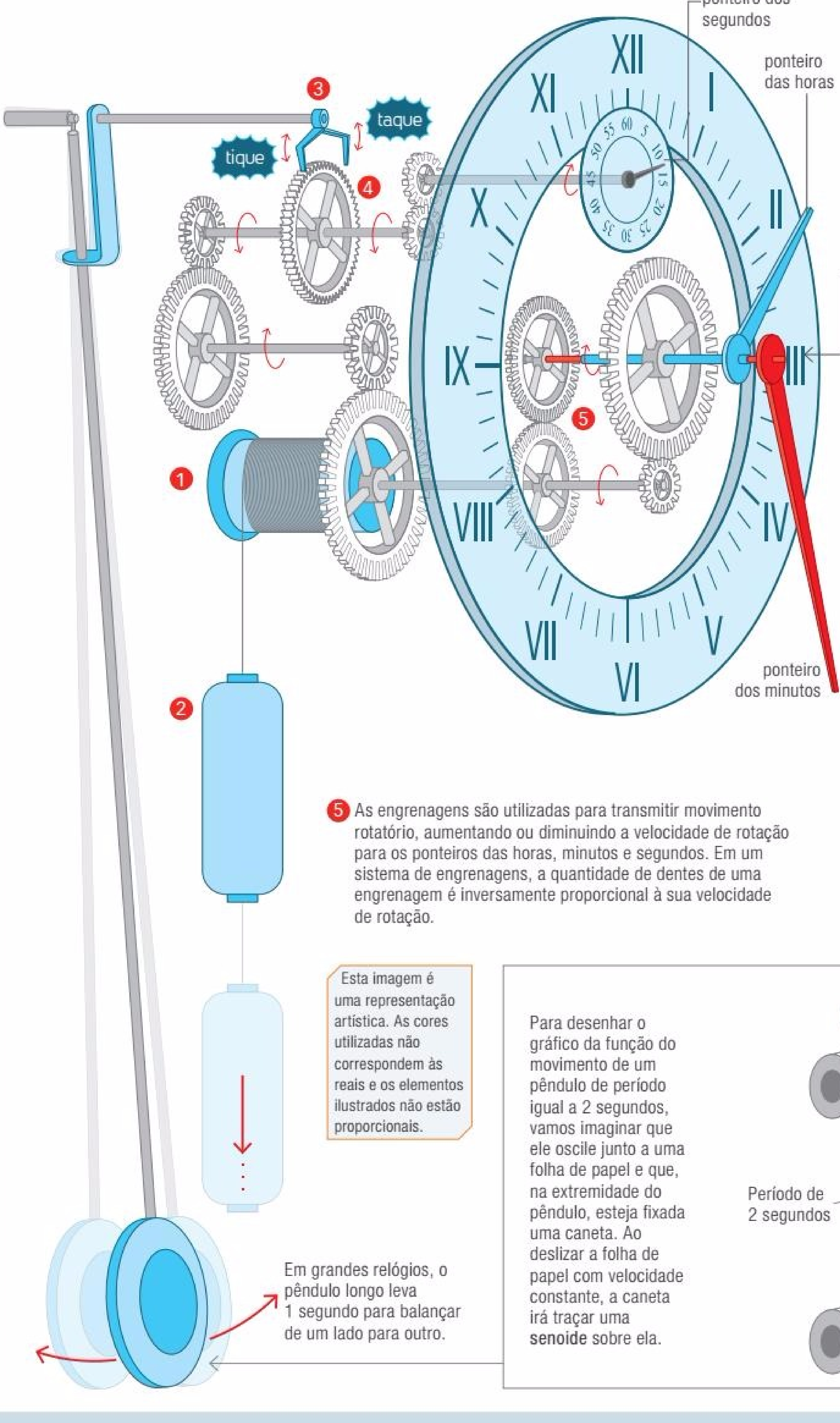
▸ Sabendo que o número de ciclos por segundo, chamado de frequência cíclica (f), é dada por $f=\frac{1}{p}$ em Hertz (Hz), determine a frequência cíclica desse circuito. $f\simeq 7{,}9554$ Hz

PRODUÇÃO TEXTUAL

15. Considerando o gráfico da função $f(x)=\text{sen}\,x$, descreva e explique as ampliações, compressões e translações características do gráfico da função $h(x)=90+75\cdot\text{sen}\left(\frac{90}{7}x\right)$. Professor(a): Veja a resposta desta atividade no final do livro.

COMO FUNCIONA — O relógio de pêndulo

Um pêndulo, um balanço, uma corda de violão ou uma mola realizam movimentos de vaivém em torno de uma posição fixa, e se considerarmos que eles se repetem sem alteração, podemos chamá-los de **movimentos periódicos**. Eles podem ser descritos por funções do tipo trigonométricas. No caso do pêndulo, o período da função é o tempo que ele leva para ir e voltar uma vez. Observe como o pêndulo é utilizado para dar regularidade ao movimento dos ponteiros de um relógio de pêndulo.



1 Um relógio de pêndulo longo é "alimentado" por um peso sobre um cabo enrolado em um tambor. Esse peso cai muito lentamente e gira o sistema de engrenagens para movimentar os ponteiros.

Os ponteiros das horas e dos minutos estão ligados a eixos diferentes.

2 Quando o peso é totalmente desenrolado, é preciso dar corda no relógio, fazendo subir o peso para que todo o processo comece novamente.

3 O que impede que o peso caia de uma só vez é um tipo de âncora em forma de pinça, encaixado a uma roldana do relógio, chamado escapo.

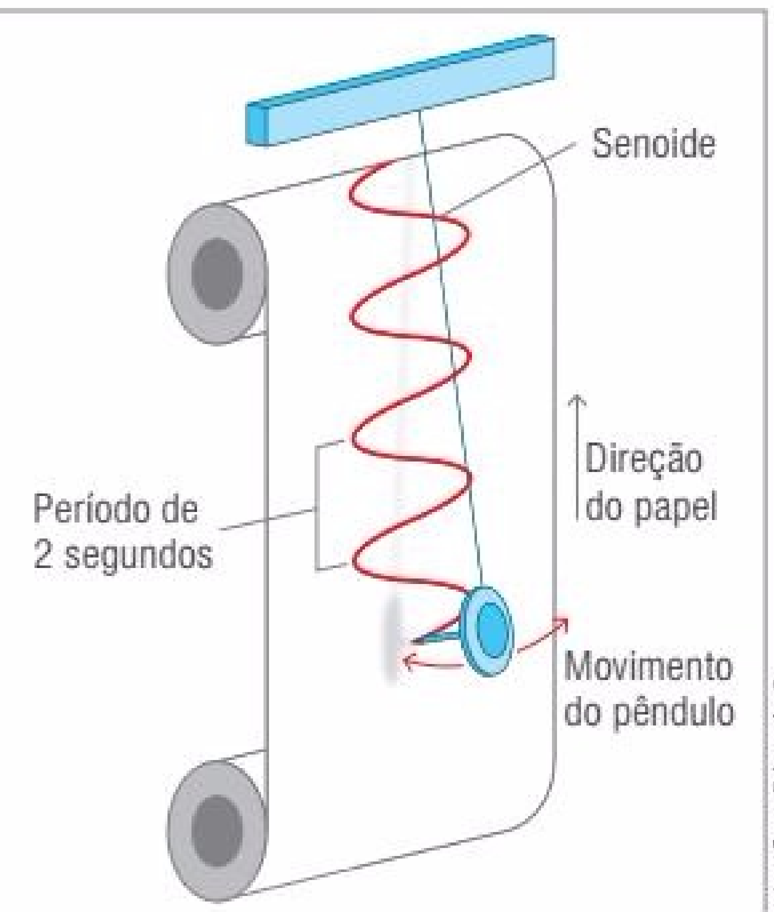
4 Quando o pêndulo está em uma extremidade, o lado oposto da âncora trava o escapo. Ao balançar para o outro lado, o pêndulo faz que a âncora trave novamente o escapo, mas, desta vez, pelo outro lado. Cada balanço do pêndulo permite "escapar" um dente por vez no escapo. É daí que vem o som de tique-taque do relógio.

5 As engrenagens são utilizadas para transmitir movimento rotatório, aumentando ou diminuindo a velocidade de rotação para os ponteiros das horas, minutos e segundos. Em um sistema de engrenagens, a quantidade de dentes de uma engrenagem é inversamente proporcional à sua velocidade de rotação.

Esta imagem é uma representação artística. As cores utilizadas não correspondem às reais e os elementos ilustrados não estão proporcionais.

Em grandes relógios, o pêndulo longo leva 1 segundo para balançar de um lado para outro.

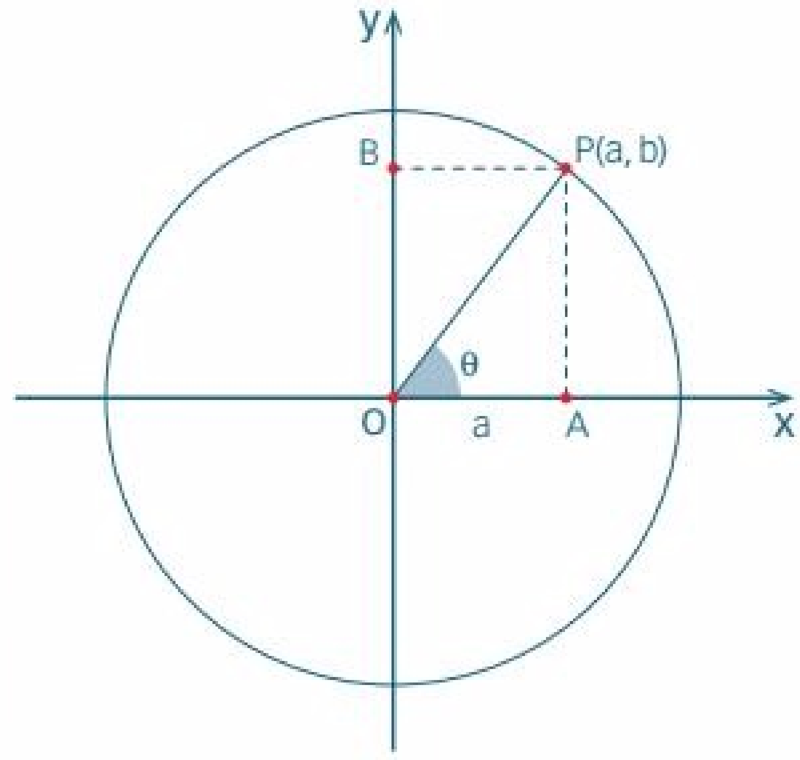
Para desenhar o gráfico da função do movimento de um pêndulo de período igual a 2 segundos, vamos imaginar que ele oscile junto a uma folha de papel e que, na extremidade do pêndulo, esteja fixada uma caneta. Ao deslizar a folha de papel com velocidade constante, a caneta irá traçar uma **senoide** sobre ela.



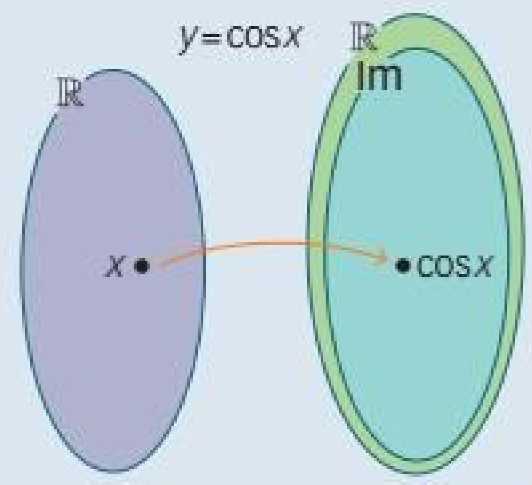
Ilustrações: Eduardo C.

FUNÇÃO COSSENO

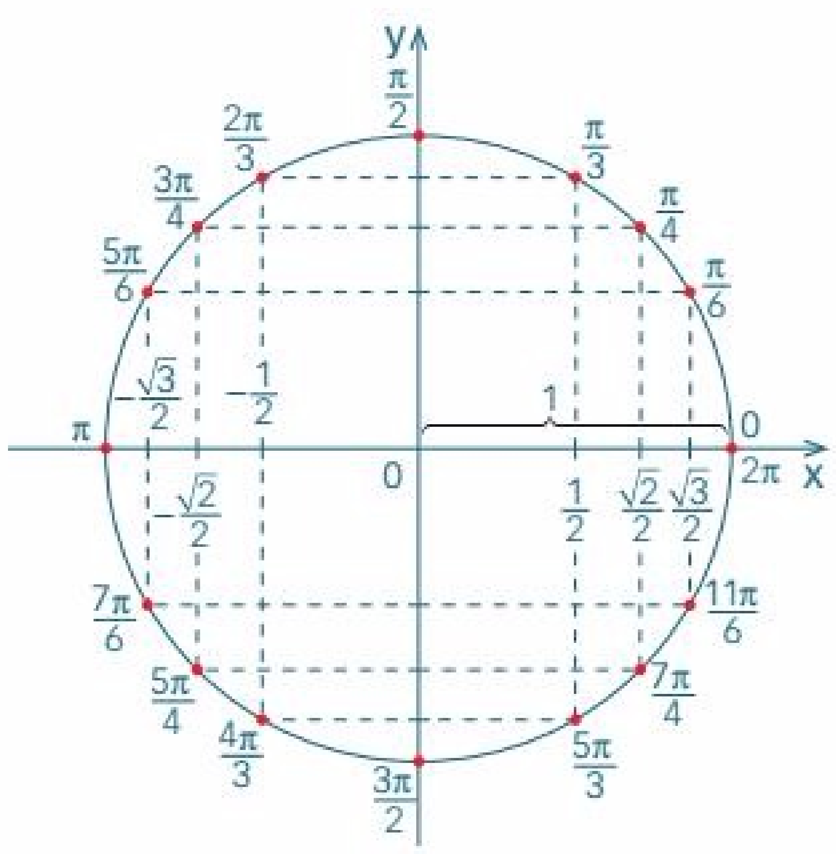
Considere o ângulo θ, cuja medida em radianos seja x, e $P(a, b)$ pertencente à circunferência trigonométrica. Desse modo, $\cos x = a$.

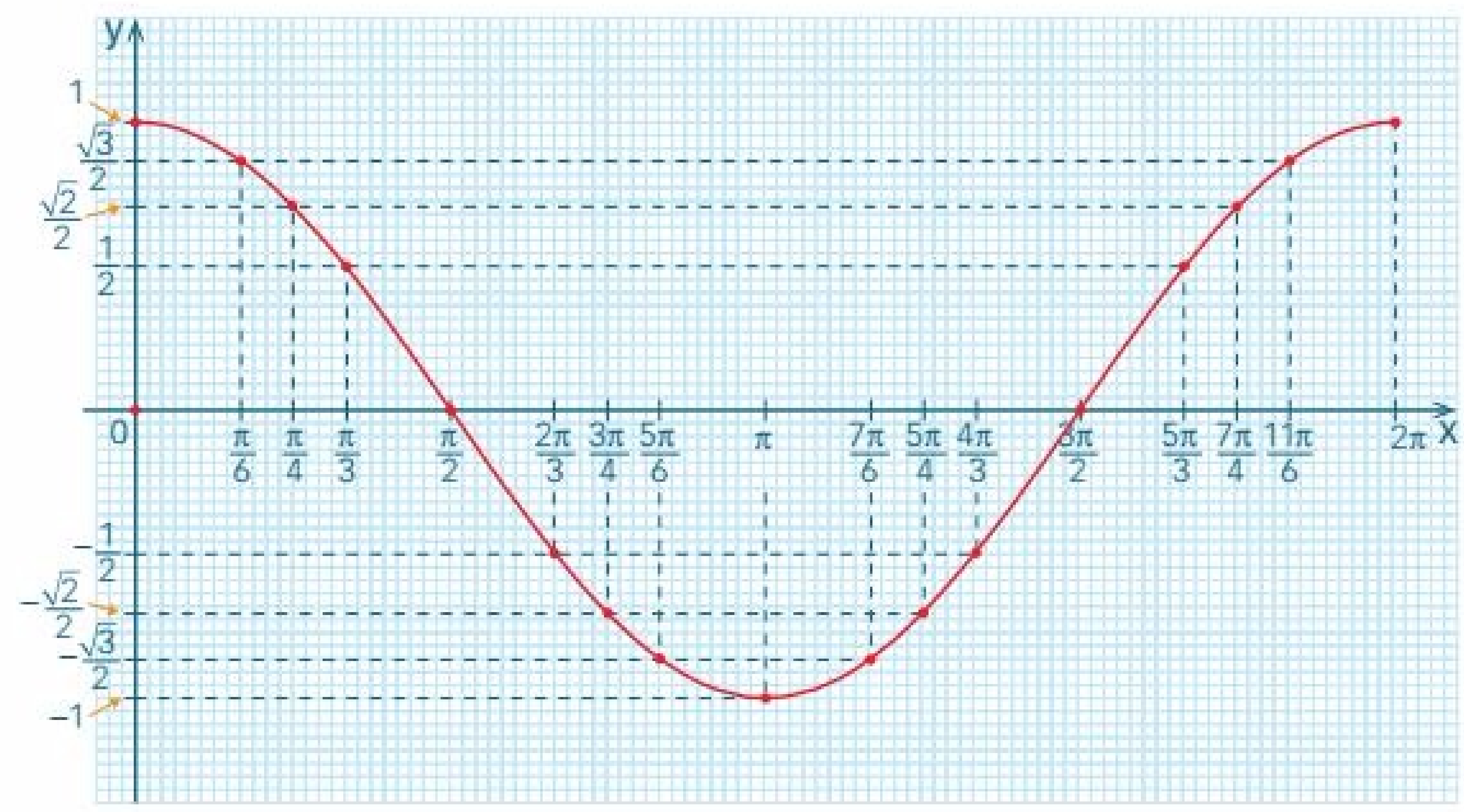


Denominamos **função cosseno** a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \cos x$, que associa cada número real x ao correspondente cosseno de x.

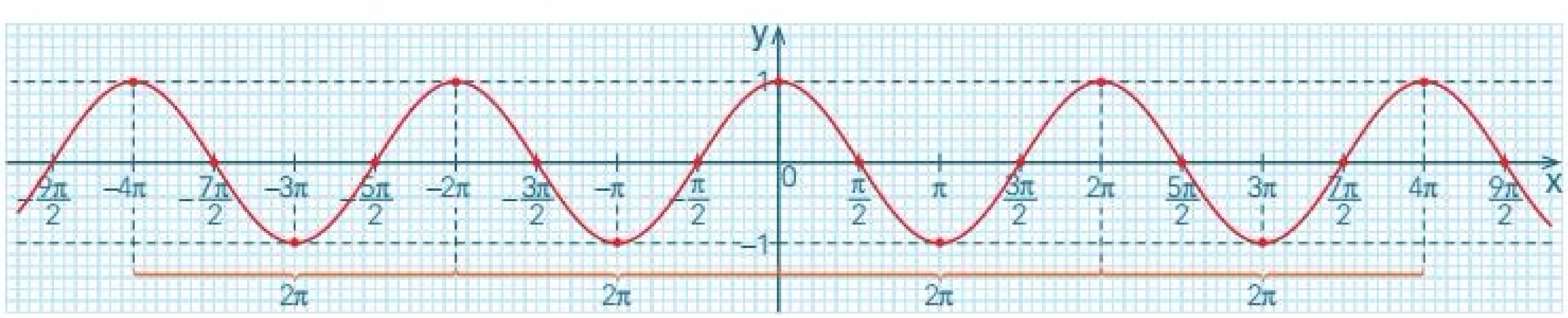


Do mesmo modo como fizemos para a função seno, vamos esboçar o gráfico da função cosseno com base em alguns valores do cosseno na circunferência trigonométrica. Observe:

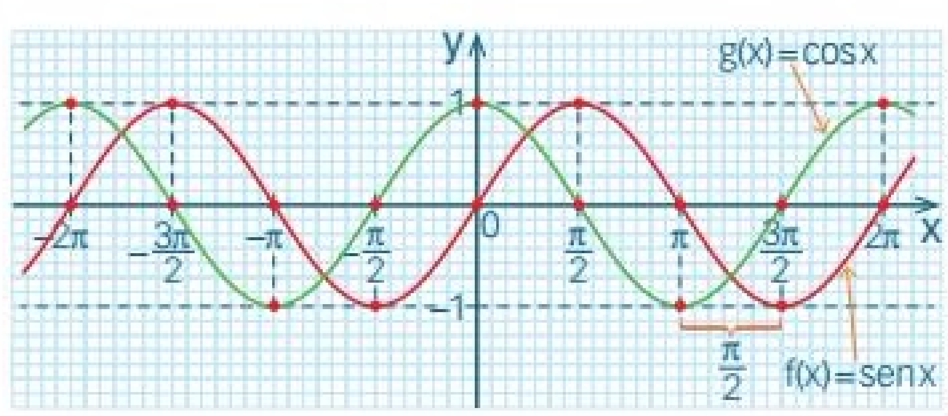




Para esboçar o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \cos x$, repetimos a curva obtida no intervalo $[0, 2\pi[$ para valores menores que zero e maiores ou iguais a 2π. Portanto o gráfico de $f(x) = \cos x$ é dado por:



Observe os gráficos das funções $f(x) = \text{sen}\, x$ e $g(x) = \cos x$ no mesmo plano cartesiano.

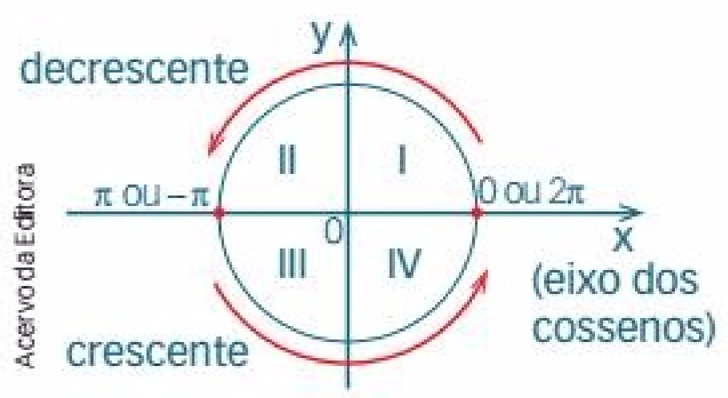


Note que o gráfico da função $g(x) = \cos x$ foi transladado $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda em relação ao gráfico da função $f(x) = \text{sen}\, x$. Mostraremos esse fato no próximo tópico, ou seja, mostraremos que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Consequentemente, o período da função cosseno também é 2π e a imagem é $[-1, 1]$. Por outro lado, por conta dessa translação, a função cosseno possui algumas características próprias:

- A função é **crescente** para $x \in]-\pi + 2k\pi, 2k\pi[$ e **decrescente** para $x \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[$, com $k \in \mathbb{Z}$.

  Essa característica pode ser observada na circunferência trigonométrica, pois, à medida que x aumenta, os valores de $\cos x$ aumentam do 3º para o 4º quadrante, e diminuem do 1º para o 2º quadrante.



Para $k = 1$, por exemplo, temos que $g(x) = \cos x$:

- é crescente para $x \in]\pi, 2\pi[$
- é decrescente para $x \in]2\pi, 3\pi[$

- A função é **par**, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $\cos x = \cos(-x)$.

  Observe no gráfico que:

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \qquad \cos\frac{3\pi}{2} = \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) \qquad \cos\pi = \cos(-\pi)$$

Se dois arcos na circunferência trigonométrica são simétricos em relação ao eixo x, os valores dos cossenos desses arcos são **iguais**.

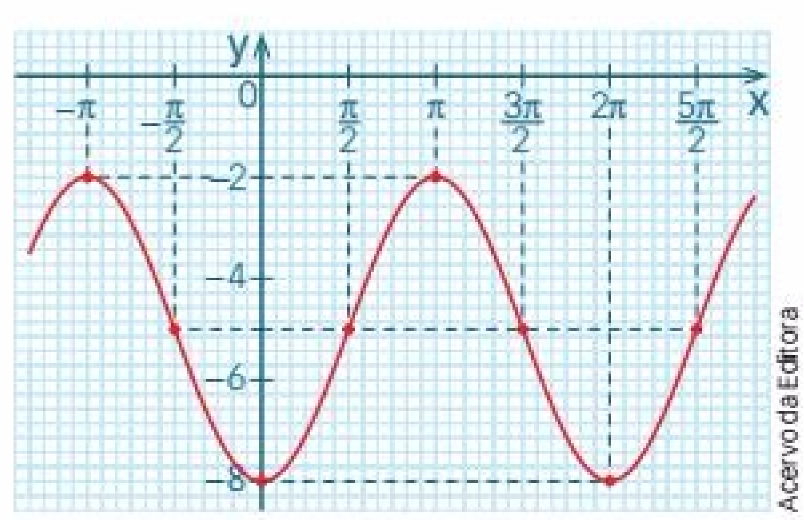
Outra consequência é que as constantes reais **a**, **b**, **c** e **d**, com $b \neq 0$ e $c \neq 0$, alteram as características relacionadas à imagem e ao período das funções do tipo trigonométricas dadas por $f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$, da mesma maneira como estudamos anteriormente no caso da função seno.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

DESAFIO

16. Observe o gráfico da função $f(x) = -5 + 3 \cdot \text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$.



Agora, escreva a lei de formação de uma função cosseno do tipo $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$ cujo gráfico corresponda ao gráfico da função **f**.

Possível resposta: $g(x) = -5 + 3 \cdot \cos(x + \pi)$

17. Determine o período e a imagem de cada função e esboce seu gráfico. Professor(a): Veja a resposta desta atividade na Assessoria Pedagógica.

a) $f(x) = 3 + \cos(2x)$

b) $g(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$

c) $m(x) = \frac{1}{4} \cdot \cos(3x + \pi)$

18. (Enem) Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a **r** quilômetros de distância do centro da Terra. Quando **r** assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o *apogeu* e o *perigeu*, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de **r** em função de t seja dado por:

$$r(t) = \frac{5\,865}{1 + 0{,}15 \cdot \cos(0{,}06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de **r**, no *apogeu* e no *perigeu*, representada por **S**.

O cientista deveria concluir que, periodicamente, **S** atinge o valor de: b

a) 12 765 km

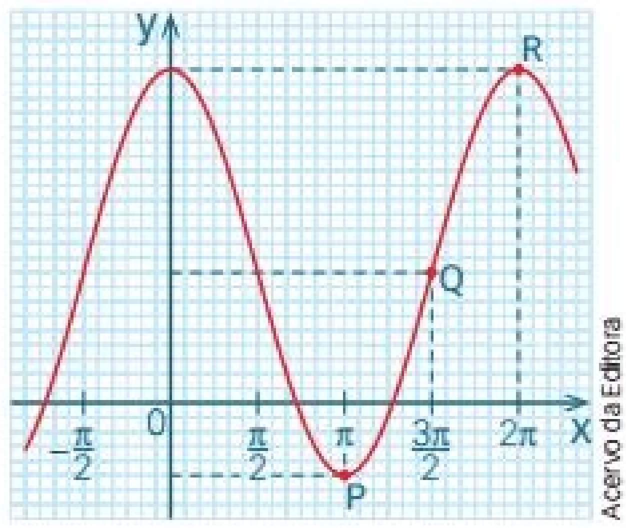
b) 12 000 km

c) 11 730 km

d) 10 965 km

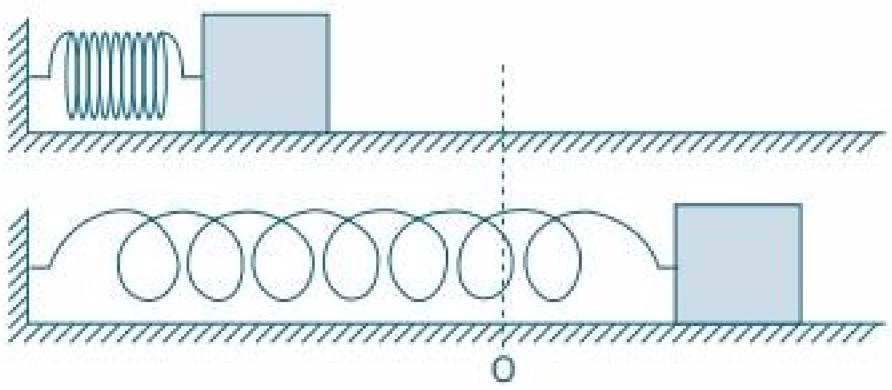
e) 5 865 km

19. A imagem representa parte do gráfico da função $f(x)=\frac{5}{4}+2\cdot\cos x$. Quais são as coordenadas dos pontos **P**, **Q** e **R**? $P\left(\pi,-\frac{3}{4}\right)$; $Q\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5}{4}\right)$; $R\left(2\pi,\frac{13}{4}\right)$



Acervo da Editora

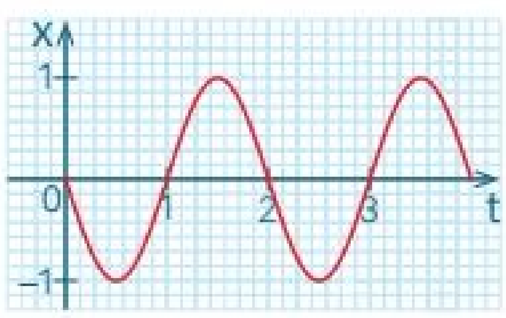
20. (UFPB) Considere um corpo, preso a uma mola, oscilando em torno da sua posição de equilíbrio **O**, como na figura abaixo.



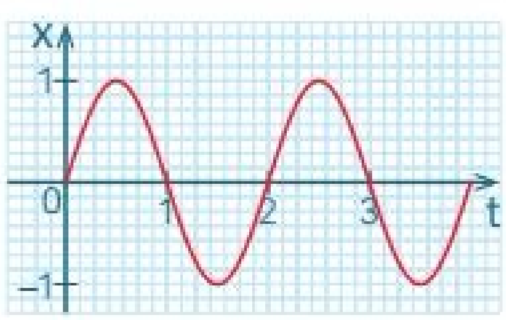
Gilberto Alicio

No instante t, a posição $x=x(t)$ desse corpo, em relação à sua posição de equilíbrio, é dada pela função $x(t)=\cos\left(\pi t+\frac{3\pi}{2}\right)$, $t\geq 0$. Dessa forma, o gráfico que melhor representa a posição **x** desse corpo, como função do tempo t, em relação ao ponto **O**, é: b

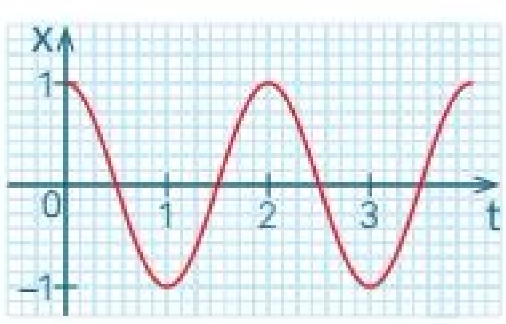
a)



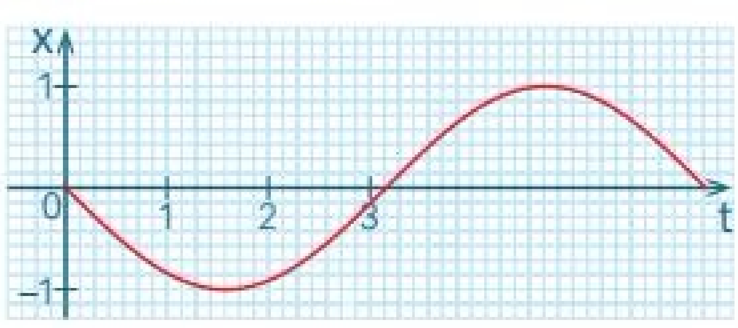
b)



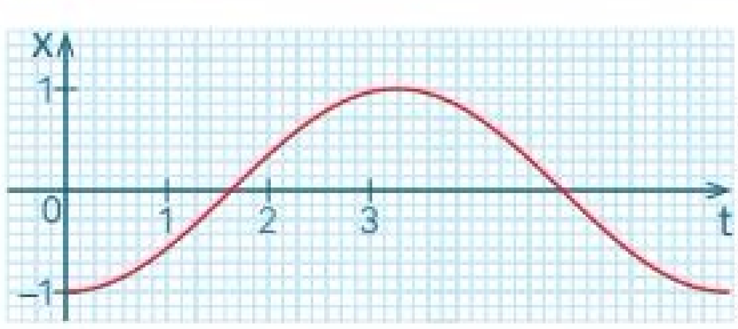
c)



d)



e)



Ilustrações: Acervo da Editora

21. (UFRGS) O gráfico da função **f**, definida por $f(x)=\cos x$, e o gráfico da função **g**, quando representados no mesmo sistema de coordenadas, possuem somente dois pontos em comum. Assim, das alternativas abaixo, a que pode representar a função **g** é: b

a) $g(x)=(\cos x)^2+(\operatorname{sen} x)^2$

b) $g(x)=x^2$

c) $g(x)=2^x$

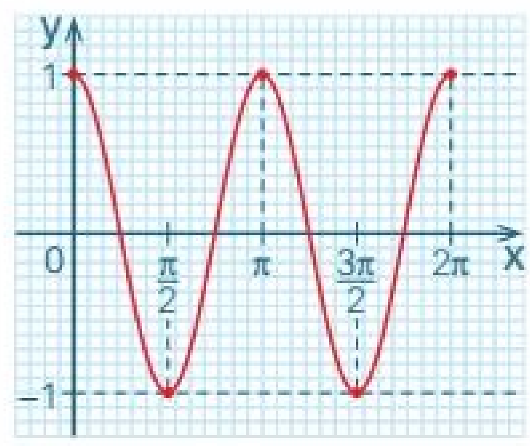
d) $g(x)=\log x$

e) $g(x)=\operatorname{sen} x$

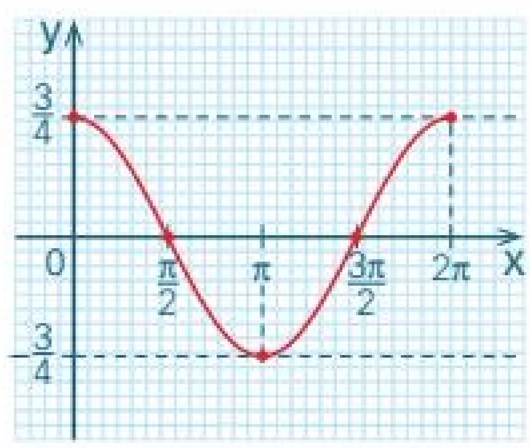
Professor(a): Com o auxílio de um programa de computador, plote com os alunos os gráficos dessas funções em um mesmo plano cartesiano.

22. Qual dos gráficos abaixo melhor representa a função f definida por $f(x)=\cos(x)$, com $x\in[0,2\pi]$?
c

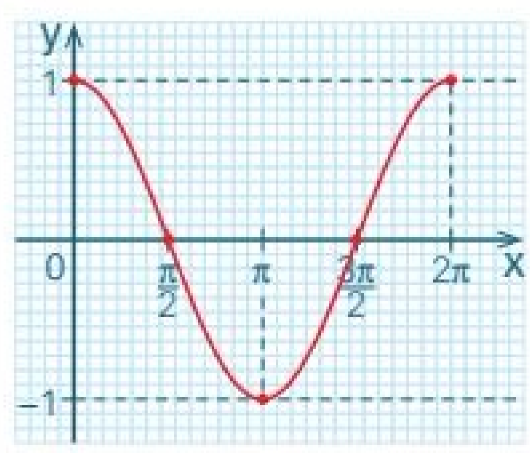
a)



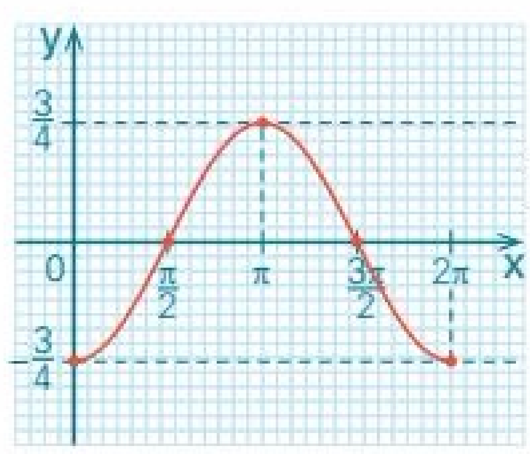
b)



c)



d)



Ilustrações: Acervo da Editora

Professor(a): Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

CALCULADORA

23. Determine os valores aproximados da medida do ângulo α, com $\alpha\in[0,2\pi]$, de modo que $\operatorname{sen}\alpha=4\cos\alpha$. $\alpha\cong 75{,}94°$ ou $\alpha\cong 255{,}94°$

Professor(a): Oriente os alunos em relação ao uso da calculadora científica.

Duração do período de incidência de luz solar

Todos os dias, o Sol nasce e se põe, porém a duração do dia (período em que há incidência de luz solar) não é a mesma para todas as estações do ano nem para todas as regiões. Em certa cidade foi registrada a duração do dia três vezes por mês, sempre nos dias 1, 11 e 21, durante o período de um ano, e com essas informações modelou-se a função $D(t)=12{,}1+1{,}6\cdot\cos\left(\frac{\pi}{18}(t+1)\right)$, em que $D(t)$ corresponde à duração do dia, em horas, e t é a variável associada aos dias do ano. Observe a seguir o gráfico dessa função.

A variável t está associada aos dias do ano da seguinte maneira:

- $t=0$ corresponde à duração do dia da primeira medida do mês 1 (01/01)
- $t=1$ corresponde à duração do dia da segunda medida do mês 1 (11/01)
- $t=2$ corresponde à duração do dia da terceira medida do mês 1 (21/01)
- $t=3$ corresponde à duração do dia da primeira medida do mês 2 (01/02)
- $t=4$ corresponde à duração do dia da segunda medida do mês 2 (11/02)

  ⋮

- $t=36$ corresponde à duração do dia 01/01 do ano seguinte

Para determinarmos o dia correspondente a $t=10$, por exemplo, dividimos 10 por 3. O quociente (3) indica a quantidade de meses que se passaram, e o resto da divisão (1) indica a quantidade de medidas do mês seguinte que se passaram, no caso, dia 11/04.

a) Qual foi a duração aproximada do dia: Professor(a): Verifique se os alunos realizaram a transformação do número decimal de horas para horas e minutos. Por exemplo, 1,2 h não é equivalente a 1 h 20, mas a 1 h 12.

- 21/02? 12 h 54
- 11/05? 10 h 53
- 11/09? 11 h 49
- 21/11? 13 h 29

b) Quantas horas teve o dia mais curto desse ano? E o dia mais longo? 10 h 30; 13 h 42

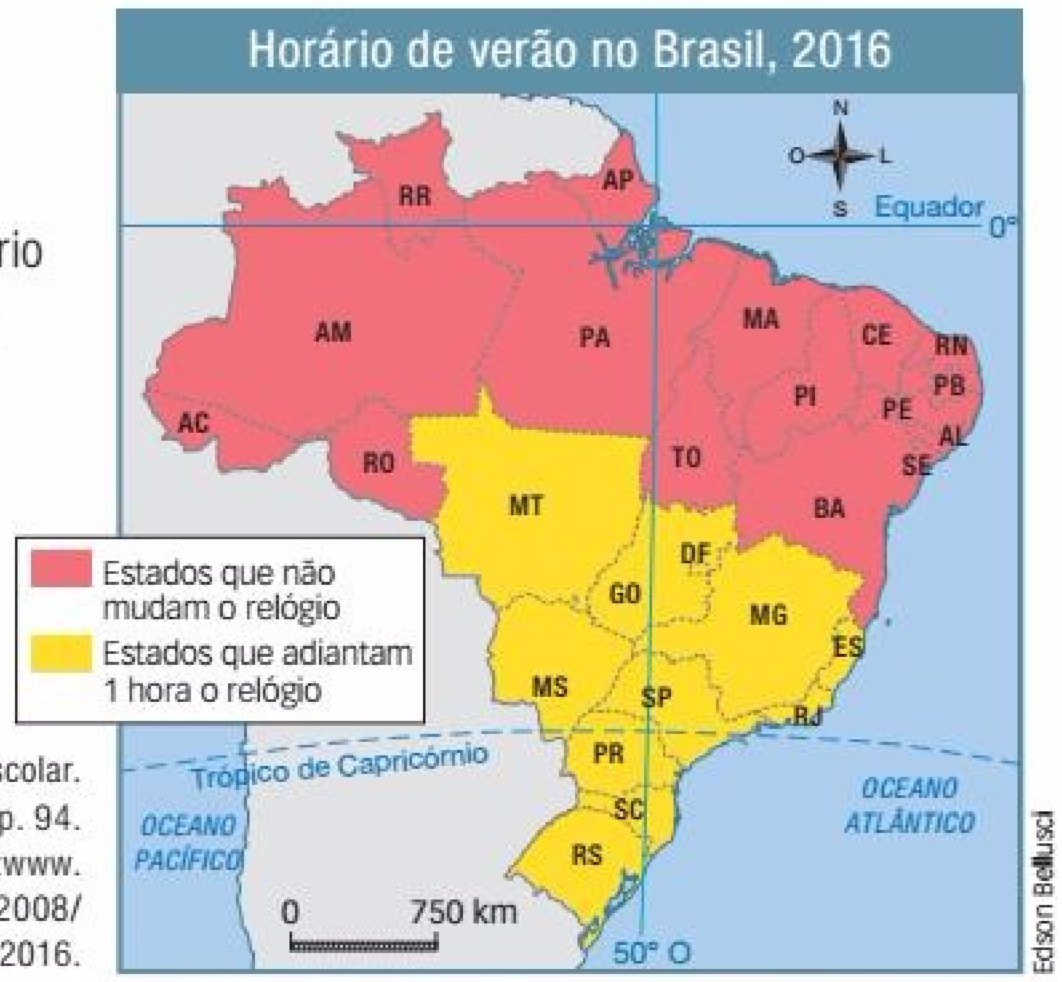
c) Quais foram as datas em que a duração do dia foi de aproximadamente 11 h 18? 21/04 e 21/08

d) O início e o término do horário de verão correspondem às datas que possuem dias com duração igual à média anual, sendo o início do horário de verão no 2º semestre e o término, no 1º semestre do ano seguinte. Nesse ano, de acordo com a função D, qual seria a data ideal para o término de um horário de verão e o início de outro? término: 21/03; início: 21/09

Horário de verão

Com o objetivo de melhorar o aproveitamento da luz natural em relação à artificial, é adotado o horário de verão nas regiões brasileiras Sul, Sudeste e Centro-Oeste. Nesse sistema, os relógios são adiantados em uma hora, com o propósito de reduzir a concentração de consumo de energia elétrica no horário entre 18 e 20 horas.

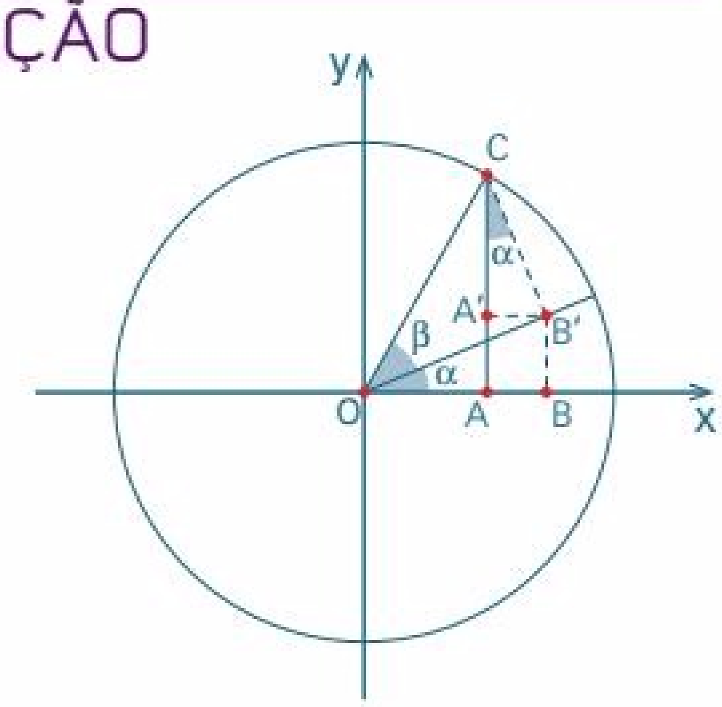
Fonte: Atlas Geográfico Escolar. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 94.
Fonte: Palácio do Planalto. Disponível em: <www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2008/Decreto/D6558.htm>. Acesso em: 9 mar. 2016.



Professor(a): Para acessar o conteúdo da fonte indicada, digite na barra de endereços do navegador o endereço eletrônico exatamente como informado entre os símbolos "<" e ">".

FÓRMULAS DE TRANSFORMAÇÃO

Professor(a): Diga aos alunos que algumas calculadoras científicas oferecem três opções para a unidade de medida de ângulo: **graus** (Deg), **radianos** (Rad) ou **grados** (Gra). No entanto, para realizar os cálculos das atividades propostas nesta unidade, estamos considerando a medida do ângulo em graus. Ao acionar essa opção na calculadora, irá aparecer a indicação $\boxed{\text{D}}$. Solicite aos alunos que verifiquem se a calculadora está com essa indicação no visor.



Acervo da Editora

Considere os ângulos α e β, cujas medidas em radianos são respectivamente **a** e **b**. Note que:

- $OA = \cos(a+b)$
- $OB' = \cos b$
- $CB' = \operatorname{sen} b$

No triângulo retângulo A'B'C, temos que:

$$\operatorname{sen} a = \frac{A'B'}{CB'} \Rightarrow \operatorname{sen} a = \frac{A'B'}{\operatorname{sen} b} \Rightarrow A'B' = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

Como $AB = A'B'$, temos que $AB = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

Considerando agora o triângulo retângulo OBB', temos:

Lembre-se de que $\cos(-b) = \cos b$ e $\operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen} b$.

$$\cos a = \frac{OB}{OB'} \Rightarrow \cos a = \frac{OB}{\cos b} \Rightarrow OB = \cos a \cdot \cos b$$

Como $OA = OB - AB$, então:

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}$$

Essa fórmula permite calcular o cosseno da soma de dois arcos. No caso do cosseno da diferença de dois arcos, temos:

$$\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos a \cdot \cos(-b) - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen}(-b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

Portanto:

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}$$

Determinaremos agora o seno da soma de dois arcos. Inicialmente, observe que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+b\right) = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} \cdot \cos b - \underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}_{1} \cdot \operatorname{sen} b = -\operatorname{sen} b$$

Desse modo:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+a\right) = -\cos(\pi+a) = -\left(\underbrace{\cos\pi}_{-1} \cdot \cos a - \underbrace{\operatorname{sen}\pi}_{0} \cdot \operatorname{sen} a\right) = \cos a$$

Consequentemente:

Professor(a): Reforce com os alunos a ideia de que a sentença $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$ não é válida para quaisquer valores reais de a e b. Por exemplo, fazendo $a = 30°$ e $b = 60°$, teríamos:

$$\operatorname{sen}\underbrace{90°}_{30°+60°} = \operatorname{sen}(30°+60°) =$$
$$= \underbrace{\operatorname{sen}30°}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\operatorname{sen}60°}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

que é um resultado **falso**, pois $\operatorname{sen}90° = 1$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a+b) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}+a+b\right) \\
&= -\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right) \cdot \cos b - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+a\right) \cdot \operatorname{sen} b\right] \\
&= -\left[-\operatorname{sen} a \cdot \cos b - \cos a \cdot \operatorname{sen} b\right] \\
&= \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b
\end{aligned}$$

Portanto, o seno da soma de dois arcos é dado por:

$$\boxed{\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a}$$

No caso do seno da diferença de dois arcos, temos:

$$\text{sen}(a-b)=\text{sen}(a+(-b))=\text{sen}\,a\cdot\cos(-b)+\text{sen}(-b)\cdot\cos a=\text{sen}\,a\cdot\cos b-\text{sen}\,b\cdot\cos a$$

Portanto,

$$\boxed{\text{sen}(a-b)=\text{sen}\,a\cdot\cos b-\text{sen}\,b\cdot\cos a}$$

Utilizando a relação $\text{tg}\,x=\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x}\ \forall x\in\mathbb{R}$ e $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$, podemos mostrar que a tangente da soma e a tangente da diferença são dadas por:

Professor(a): Veja na Assessoria Pedagógica a demonstração dessas fórmulas.

- $\boxed{\text{tg}(a+b)=\dfrac{\text{tg}\,a+\text{tg}\,b}{1-\text{tg}\,a\cdot\text{tg}\,b}}$

  válida para $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ e $(a+b)\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$.

- $\boxed{\text{tg}(a-b)=\dfrac{\text{tg}\,a-\text{tg}\,b}{1+\text{tg}\,a\cdot\text{tg}\,b}}$

  válida para $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ e $(a-b)\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$.

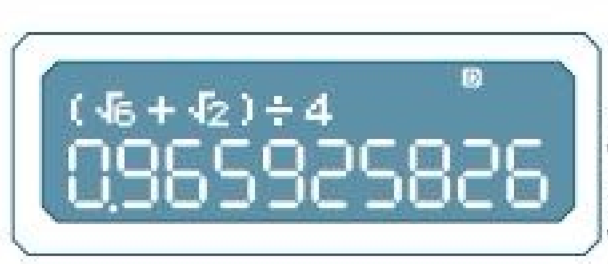
Uma aplicação para as fórmulas de transformação é que, para determinar o valor de sen 75°, por exemplo, não precisamos recorrer a uma tabela trigonométrica ou a uma calculadora científica, basta conhecer os valores de seno para os ângulos notáveis de medidas 30° e 45° e utilizar a fórmula do seno da soma de dois arcos, ou seja:

$$\text{sen}\,\underbrace{75°}_{45°+30°}=\text{sen}(45°+30°)=\underbrace{\text{sen}\,45°}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\underbrace{\cos 30°}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\underbrace{\text{sen}\,30°}_{\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\cos 45°}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Portanto, $\text{sen}\,75°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Na calculadora científica, podemos verificar esse resultado da seguinte maneira:



Ilustrações: Eduardo C.

R3. Determine o valor de:

a) $\cos 15°$ b) $\operatorname{sen}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ c) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{12}$

Resolução

a) $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + \operatorname{sen} 45° \cdot \operatorname{sen} 30° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Portanto, $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Utilizando uma calculadora, determine o valor aproximado de $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ e compare-o com o valor apresentado na tabela trigonométrica.

Professor(a): Lembre os alunos de que a tabela trigonométrica se encontra no final do livro.

b) $\operatorname{sen}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x \cdot \cos\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} \cdot \cos x = \operatorname{sen} x \cdot 0 - 1 \cdot \cos x = -\cos x$

Portanto, $\operatorname{sen}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos x$.

c) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}} = \dfrac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \cdot \dfrac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \dfrac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3}$

Portanto, $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$.

R4. Mostre que a igualdade $\operatorname{tg}(x+45°) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$ é verdadeira, para todo $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

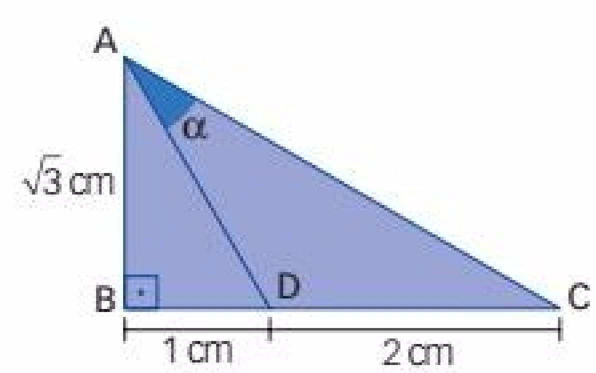
Resolução

Utilizando a fórmula do seno da soma e do cosseno da soma, temos que:

$$\operatorname{tg}(x+45°) = \frac{\operatorname{sen}(x+45°)}{\cos(x+45°)} = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos 45° + \operatorname{sen} 45° \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos 45° - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 45°} = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x}{\cos x \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{sen} x \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\cancel{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}(\operatorname{sen} x + \cos x)}{\cancel{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}(\cos x - \operatorname{sen} x)} = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$$

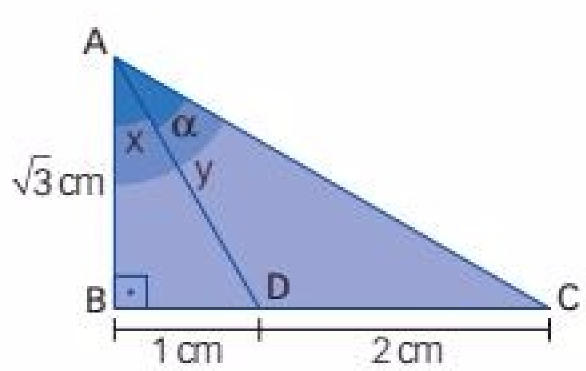
Portanto, a igualdade $\operatorname{tg}(x+45°) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$ é verdadeira, para todo $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

R5. Qual é a medida do ângulo α no triângulo ACD?



Resolução

Inicialmente, determinamos a tangente dos ângulos x e y nos triângulos ABD e ABC, respectivamente:



Ilustrações: Acervo da Editora

- $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- $\operatorname{tg} y = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3}$

Utilizando a fórmula da tangente da diferença, segue que:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(y-x) = \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{\dfrac{3\sqrt{3}}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1+\dfrac{3\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}{1+\dfrac{9}{9}} = \frac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $0° < \alpha < 90°$, temos que $\alpha = 30°$.

Atividades ▶ Anote as respostas no caderno.

24. Calcule.

a) $\text{sen}15°$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\cos 75°$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

c) $\text{tg}105°$ $-(\sqrt{3}+2)$

d) $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$ $-\cos x$

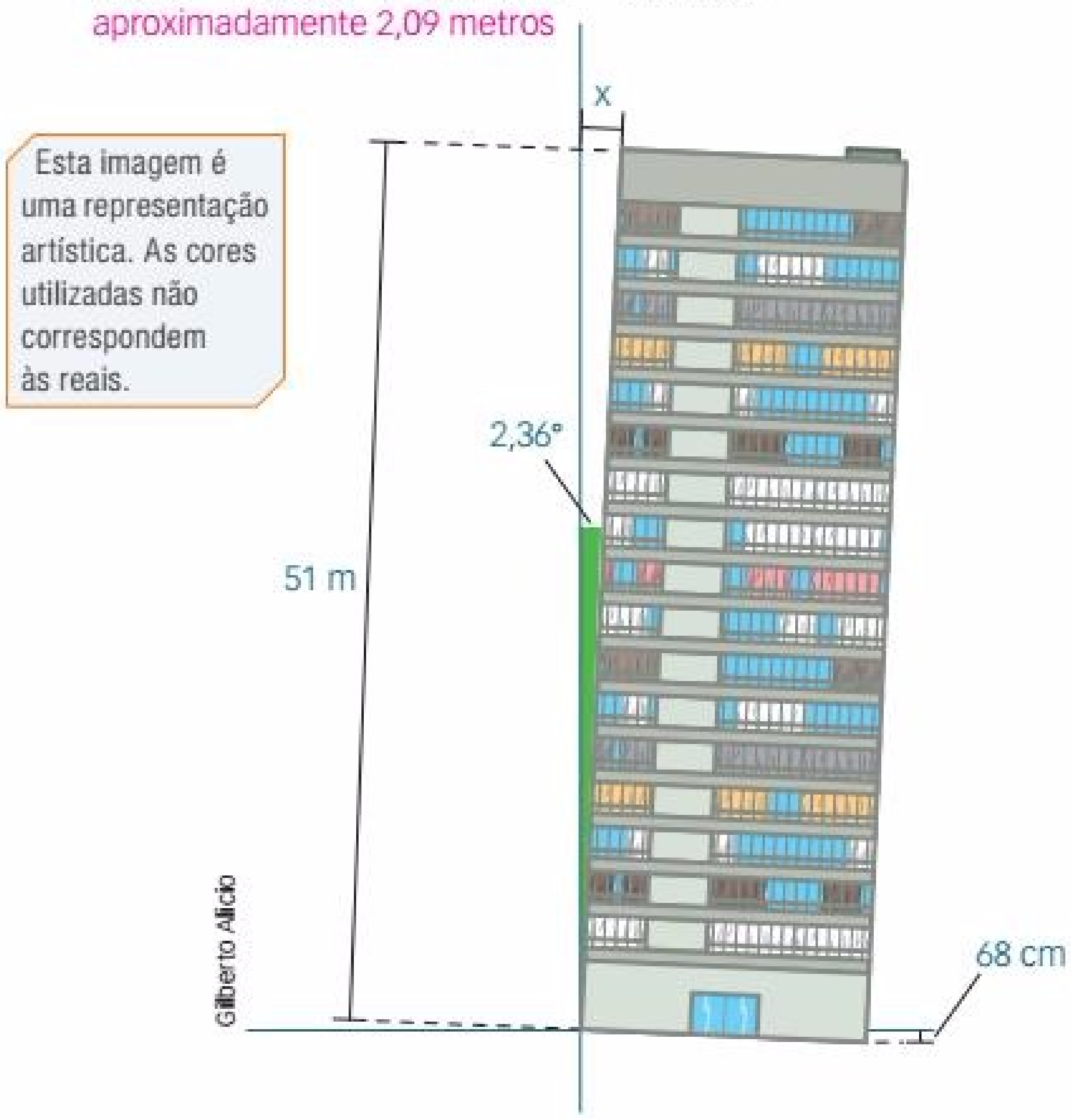
e) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ $\text{sen}x$

f) $\text{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ $-\sqrt{3}$

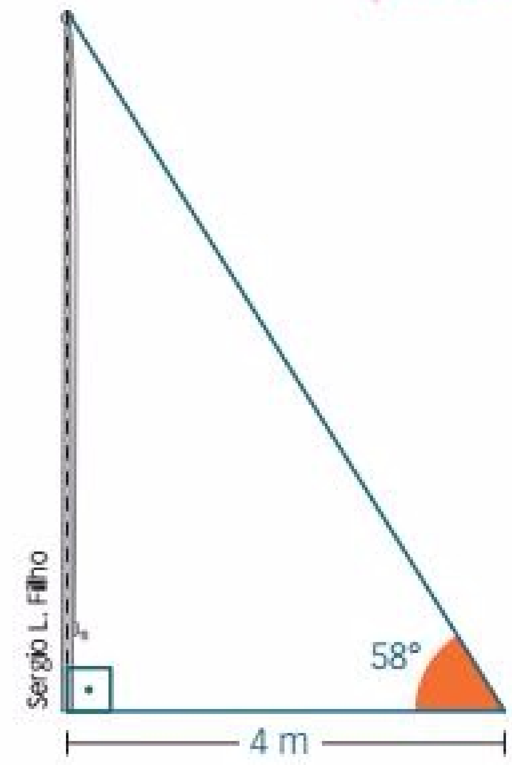
▶ Utilize os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis.

25. O edifício Núncio Malzoni, localizado em Santos, litoral de São Paulo, era uma atração turística em virtude de sua inclinação, que chegou a 2,36°. Porém, no dia 26 de janeiro de 2001, o edifício voltou de forma integral à sua posição original, graças a uma obra de realinhamento.

Observe o esquema do edifício antes das obras de recuperação e determine o valor de x, em metros. (Utilizar: $\text{sen}5° = 0{,}087$, $\text{sen}2{,}64° = 0{,}046$, $\cos 5° = 0{,}996$ e $\cos 2{,}64° = 0{,}998$).
aproximadamente 2,09 metros



26. A uma distância de 4 m é possível observar o topo de um mastro sob um ângulo de 58°. Utilizando $\text{tg}13° = 0{,}231$, determine a altura do mastro.
aproximadamente 6,4 m



27. Sabendo que $\cos a = \frac{\sqrt{3}}{4}$, para $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$, determine:

a) $\cos\left(a+\frac{\pi}{6}\right)$ $\frac{3+\sqrt{13}}{8}$

b) $\text{sen}\left(a-\frac{\pi}{3}\right)$ $-\frac{3+\sqrt{13}}{8}$

c) $\text{tg}\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$ $-\frac{8-\sqrt{39}}{5}$

▶ Lembre-se de que $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$ e $\text{tg}a = \frac{\text{sen}a}{\cos a}$.

28. (UPM-SP) O maior valor que o número real $\dfrac{10}{2-\frac{\text{sen}x}{3}}$ pode assumir é d

a) $\frac{20}{3}$

b) $\frac{7}{3}$

c) 10

d) 6

e) $\frac{20}{7}$

DESAFIO

29. Verifique se a igualdade $\text{sen}x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\text{sen}(x-y)+\text{sen}(x+y)]$ é verdadeira. Professor(a): Veja a resposta desta atividade na Assessoria Pedagógica.

Fórmulas do arco duplo e do arco metade

Com base nas fórmulas do seno, cosseno e tangente da soma de dois arcos, mostre que as fórmulas a seguir, chamadas de **fórmulas do arco duplo**, são válidas: Professor(a): Veja a resposta desta atividade na Assessoria Pedagógica.

- $\text{sen}(2a) = 2 \cdot \text{sen}a \cdot \cos a$
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$
- $\text{tg}(2a) = \frac{2 \cdot \text{tg}a}{1-\text{tg}^2 a}$

Mostre também que, com base na relação $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$, podemos escrever a fórmula do cosseno do arco duplo das seguintes maneiras:

- $\cos(2a) = 2 \cdot \cos^2 a - 1$
- $\cos(2a) = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 a$

▶ Para determinar o arco metade do seno e do cosseno, basta utilizar as fórmulas do cosseno do arco duplo, combinadas com a relação $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$. Lembre-se de que, se $2a$ é o arco duplo de a, então a é o arco metade de $2a$.

Agora, calcule:

a) sen22°30'

b) cos22°30'

Professor(a): Oriente os alunos a utilizar a calculadora na verificação dos cálculos realizados nos itens **a** e **b**. Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Estudamos na unidade anterior duas relações fundamentais envolvendo seno, cosseno e tangente de um ângulo: $\text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Além delas, destacamos outras relações fundamentais, que são:

Temos que $\forall x \in \mathbb{R}$, com $x \neq k\pi$, e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, vale a relação: $\text{cotg}\,x = \frac{1}{\text{tg}\,x}$.

- Cotangente:

$$\text{cotg}\,x = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x}$$

válida para todo $x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

- Secante:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

válida para todo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

- Cossecante:

$$\text{cossec}\,x = \frac{1}{\text{sen}\,x}$$

válida para todo $x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Dessas relações, vamos obter as relações $\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$ e $1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x$.

- Dividindo os dois membros da igualdade $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ por $\cos^2 x$, temos:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

para todo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

- Dividindo os dois membros da igualdade $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ por $\text{sen}^2 x$, temos:

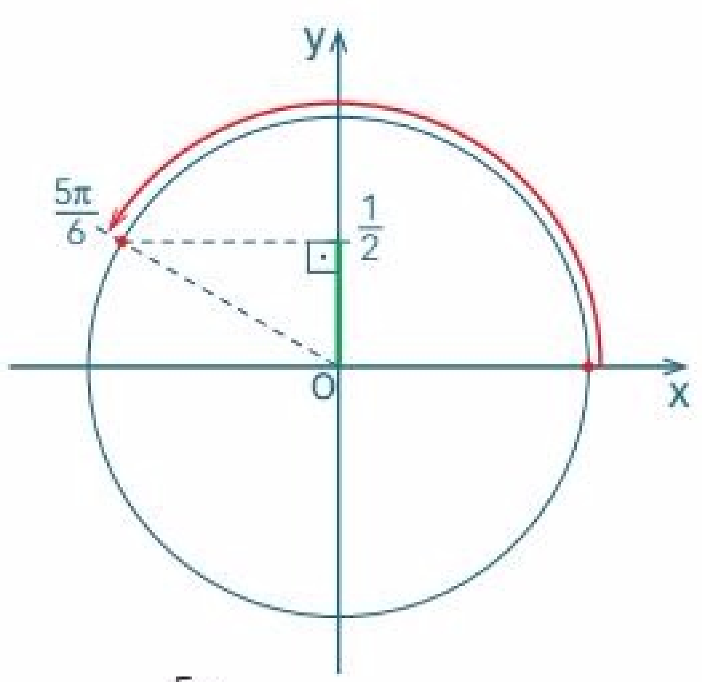
$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{1}{\text{sen}^2 x} \Rightarrow 1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x$$

para todo $x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

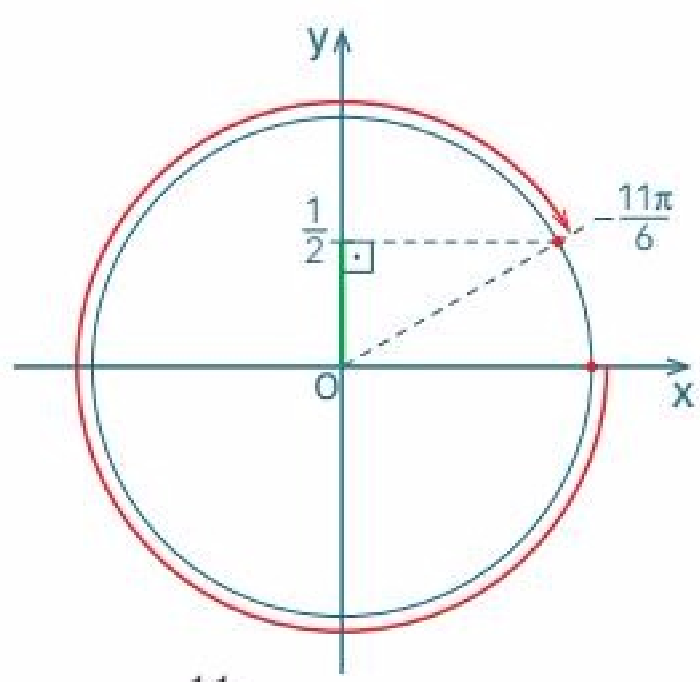
EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Para resolver uma equação trigonométrica do tipo $\text{sen}\,x = a$, por exemplo, sendo **a** uma constante real, não basta determinar um único valor de x que satisfaça a igualdade, pois existem infinitos valores que, atribuídos a x, também a tornam verdadeira.

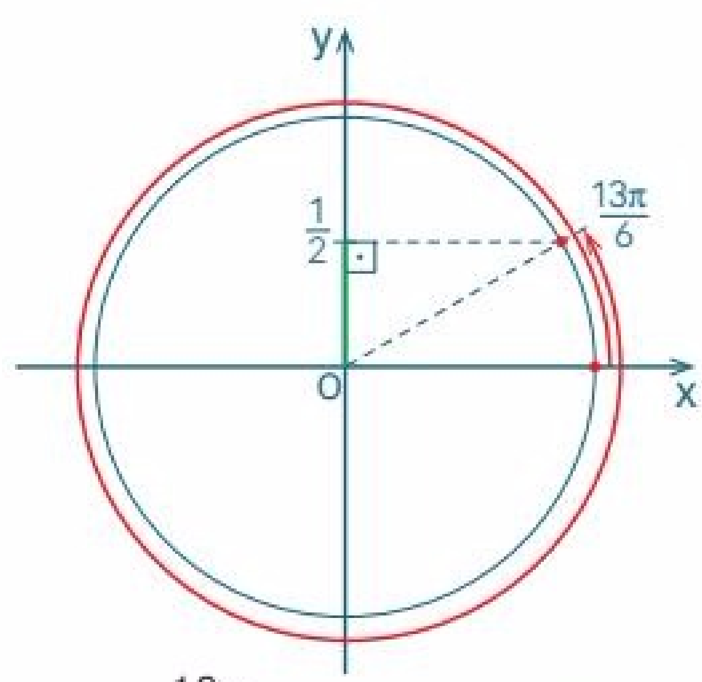
Por exemplo, para a equação $\text{sen}\,x = \frac{1}{2}$, além da solução $x = \frac{\pi}{6}$, vamos determinar outras três:



$x = \frac{5\pi}{6}$ também é solução, pois $\text{sen}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.



$x = -\frac{11\pi}{6}$ também é solução, pois $\text{sen}\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.



$x = \frac{13\pi}{6}$ também é solução, pois $\text{sen}\frac{13\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Ilustrações: Acervo da Editora

Para determinarmos todas as soluções da equação $\text{sen}\,x = \frac{1}{2}$, escrevemos as expressões que representam todos os arcos côngruos aos arcos positivos de primeira volta que são solução da equação. Como na 1ª volta positiva temos $\text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\text{sen}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, o conjunto solução da equação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Atividades resolvidas

R6. Determine os valores de $\text{sen}\,\alpha$, $\sec\alpha$ e $\text{tg}\,\alpha$, dado que $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Resolução

- $\text{sen}\,\alpha$

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\frac{3}{5}$$

Como $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então $\boxed{\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}}$.

- $\sec\alpha$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{\sec\alpha = \frac{5}{4}}$$

- $\text{tg}\,\alpha$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}}$$

R7. Determine o valor da expressão $y = \cos^2 x + \text{sen}\,x$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, sabendo que $\cos x = \frac{1}{3}$.

Resolução

Inicialmente, determinamos $\text{sen}\,x$; para isso, substituímos $\cos x = \frac{1}{3}$ na fórmula $\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1$:

$$\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,x = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \text{sen}\,x = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} \Rightarrow \text{sen}\,x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então $\text{sen}\,x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Desse modo:

$$y = \cos^2 x + \text{sen}\,x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{9} + \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1+6\sqrt{2}}{9}$$

Portanto, $y = \frac{1+6\sqrt{2}}{9}$.

R8. Mostre que a igualdade $\text{cossec}^2\,a \cdot \text{sen}(2a) = 2\,\text{cotg}\,a$ é verdadeira para todo $\alpha \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Resolução

Temos que $\text{cossec}\,a = \frac{1}{\text{sen}\,a}$, assim:

$$\text{cossec}^2\,a = \left(\frac{1}{\text{sen}\,a}\right)^2 \Rightarrow \text{cossec}^2\,a = \frac{1}{\text{sen}^2\,a}$$

Temos ainda que $\text{sen}(2a) = 2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \cos a$.

Deste modo:

$$\text{cossec}^2\,a \cdot \text{sen}(2a) = \frac{1}{\text{sen}^2\,a} \cdot (2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \cos a) = \frac{2\cos a}{\text{sen}\,a} = 2\,\text{cotg}\,a$$

Portanto, $\text{cossec}^2\,a \cdot \text{sen}(2a) = 2\,\text{cotg}\,a$.

R9. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$ c) $\sec(2x) = \sqrt{2}$ d) $2\operatorname{sen} x - \cos^2 x = -1$

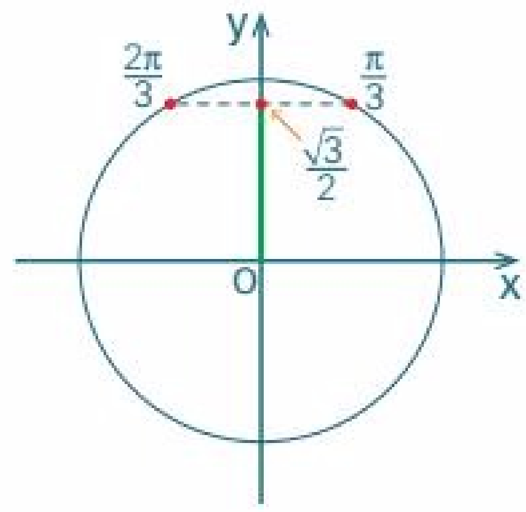
Resolução

a) $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Como na 1ª volta positiva temos $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, então:

$x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ e $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

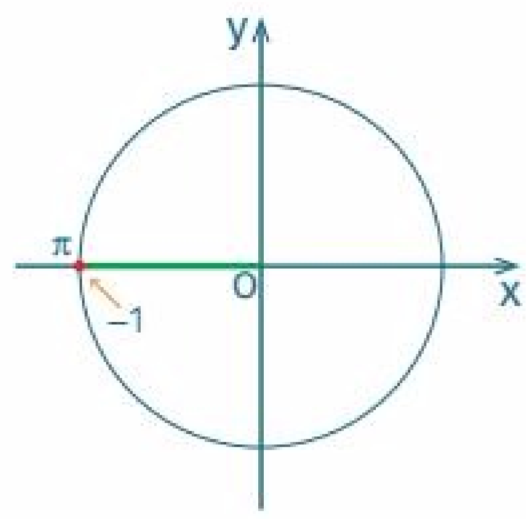


b) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$

Como na 1ª volta positiva temos $\cos \pi = -1$, então:

$$x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.



c) $\sec(2x) = \sqrt{2}$

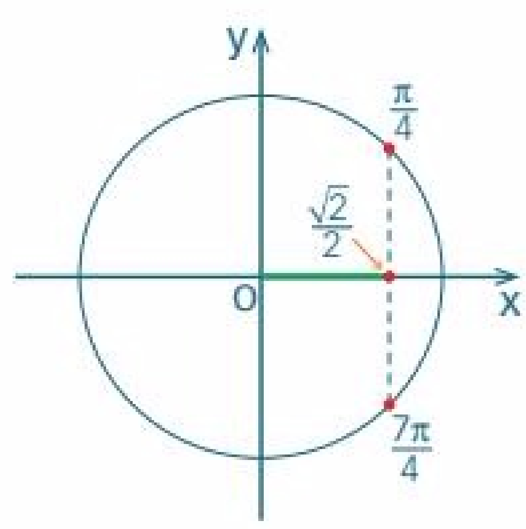
Temos:

$$\sec(2x) = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\cos(2x)} = \sqrt{2} \Rightarrow \cos(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como na 1ª volta positiva $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, então:

- $2x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} = \dfrac{\pi}{8} + k\pi$
- $2x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{2} = \dfrac{7\pi}{8} + k\pi$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = \dfrac{7\pi}{8} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.



d) $2\operatorname{sen} x - \cos^2 x = -1$

Inicialmente, vamos substituir $\cos^2 x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 x$:

$$2\operatorname{sen} x - \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) = -1 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x - 1 + \operatorname{sen}^2 x = -1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x = 0$$

Utilizando $y = \operatorname{sen} x$, temos:

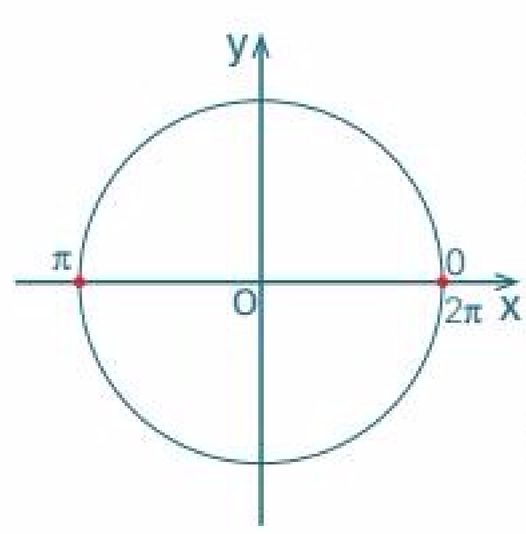
$$y^2 + 2y = 0 \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = -2 \end{cases}$$

Como $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, então $\operatorname{sen} x = 0$.

Na 1ª volta positiva, temos $\operatorname{sen} 0 = 0$ e $\operatorname{sen} \pi = 0$.

Note que $\operatorname{sen} x = 0$ quando $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.



Ilustrações: Acervo da Editora

Atividades
Anote as respostas no caderno.

30. Sabendo que $\operatorname{sen} x = \frac{3}{7}$, para $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, determine:

a) $\cos x$ $-\frac{2\sqrt{10}}{7}$

b) $\operatorname{tg} x$ $-\frac{3\sqrt{10}}{20}$

c) $\operatorname{cossec} x$ $\frac{7}{3}$

d) $\sec x$ $-\frac{7\sqrt{10}}{20}$

e) $\operatorname{cotg} x$ $-\frac{2\sqrt{10}}{3}$

31. Mostre que, para todo α real, com $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, temos:

Professor(a): Veja a resposta desta atividade na Assessoria Pedagógica.

a) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}} = \operatorname{sen}\alpha$

b) $\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \cos\alpha$

c) $\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} - 1 = \operatorname{cotg}^2\alpha$

d) $1 + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sec^2\alpha$

32. (Fuvest) Sabe-se que existem números reais **A** e x_0, sendo $A > 0$, tais que

$$\operatorname{sen} x + 2\cos x = A\cos(x - x_0)$$

Para todo x real. O valor de **A** é igual a c

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}$

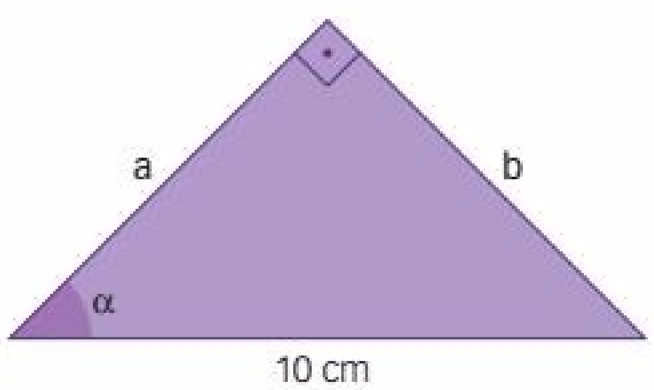
c) $\sqrt{5}$

d) $2\sqrt{2}$

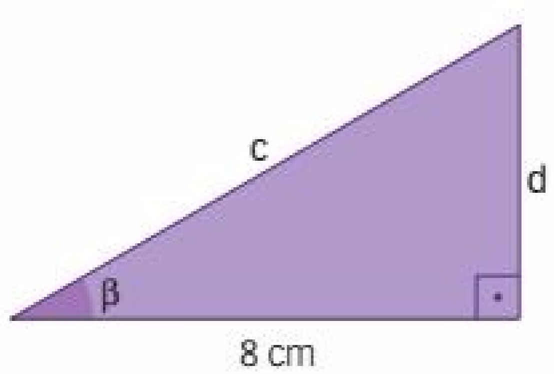
e) $2\sqrt{3}$

33. Determine o perímetro do triângulo sabendo que:

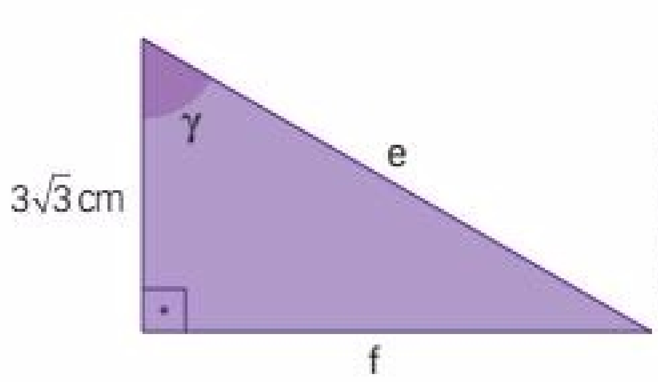
a) $\operatorname{cossec}\alpha = \sqrt{2}$ $10(1+\sqrt{2})$ cm



b) $\sec\beta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $8(1+\sqrt{3})$ cm



c) $\operatorname{cotg}\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $9(1+\sqrt{3})$ cm



Ilustrações: Acervo da Editora

34. (Furg-RS) Determine a alternativa que indica o valor da expressão $z = \frac{\cos x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{cotg} x}$, sabendo que $\operatorname{sen} x = \frac{3}{4}$, onde x é tal que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. d

a) $-\frac{4}{3}$

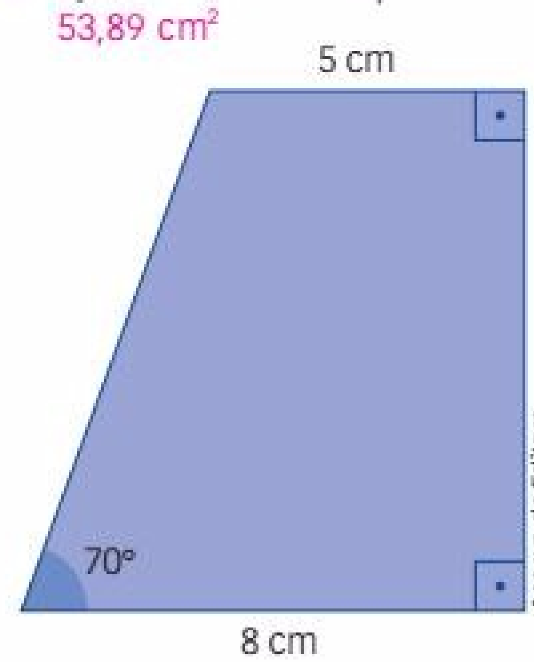
b) $-\frac{3}{4}$

c) 1

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{4}{3}$

35. Qual é a área aproximada do trapézio? 53,89 cm²



Acervo da Editora

Se necessário, utilize $\operatorname{sen}70° = 0{,}94$ e $\cos 70° = 0{,}34$.

36. Resolva as equações em $\mathbb{R}$. Professor(a): Veja a resposta desta atividade no final do livro.

a) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

c) $\sec^2 x = 1$

d) $\operatorname{cossec}\left(2x - \frac{3\pi}{8}\right) = -2$

e) $3\cos x + 2\operatorname{sen}^2 x = 2$

EM GRUPO

37. A altura máxima que uma bola de vôlei atinge ao ser tocada pelo atleta depende basicamente de sua velocidade inicial (v_0), do ângulo formado com o eixo horizontal (α) e da aceleração da gravidade (g). Essa altura pode ser obtida por meio da fórmula $h_{max} = \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}$.

Supondo que, em certa recepção, a bola saia das mãos da jogadora com velocidade inicial de 12 m/s e sua altura máxima seja de 5,4 m, determine a medida do ângulo α. $\alpha = 60°$

Utilize $g = 10$ m/s².

photofriday/ Shutterstock.com

Atleta executando uma manchete em partida de vôlei.

38. (UFRN) A equação $(\operatorname{sen} x)^2 - 5(\operatorname{sen} x) + 6 = 0$: d

a) admite mais de duas raízes.

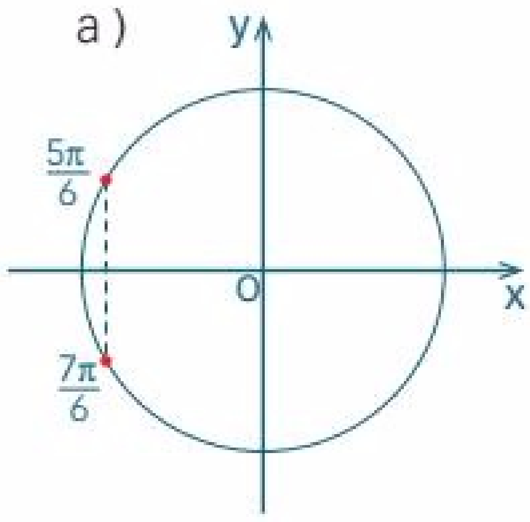
b) admite exatamente duas raízes.

c) admite uma única raiz.

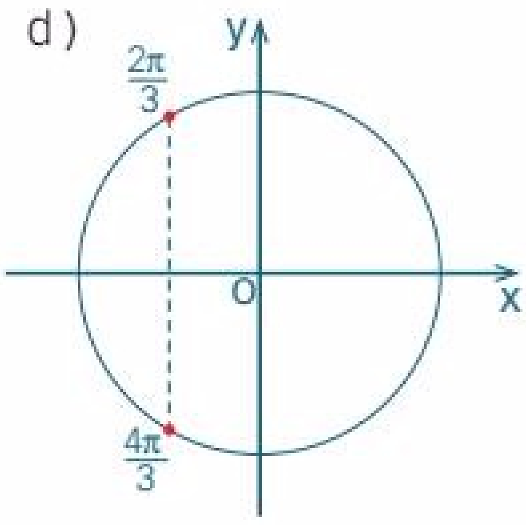
d) não admite raízes.

39. (UFPel-RS) As raízes da equação $4\cos^2 x + 4\sqrt{3}\cdot\operatorname{sen}(90° + x) = 3\operatorname{tg} 135°$ para $0 \le x < 2\pi$ pode(m) ser representada(s), no ciclo trigonométrico, pelos pontos: a

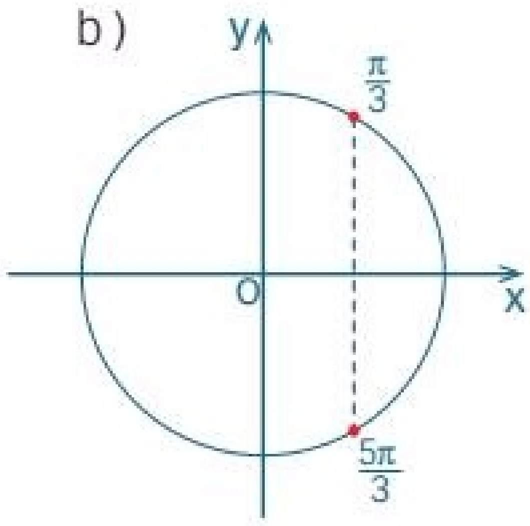
a)



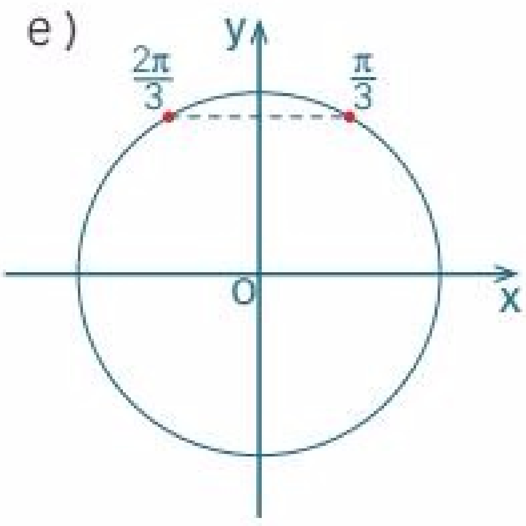
d)



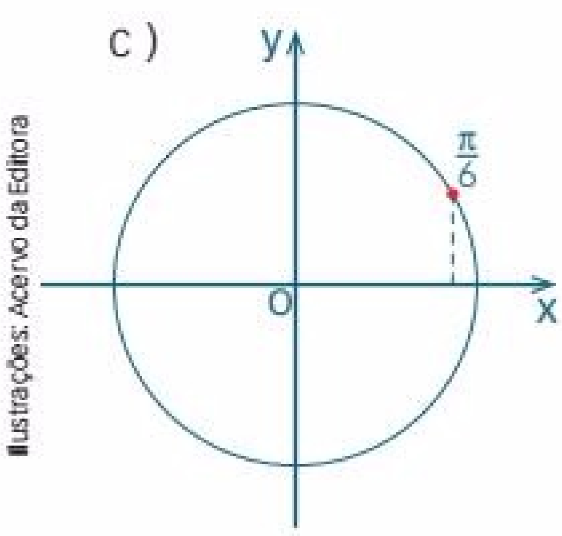
b)



e)



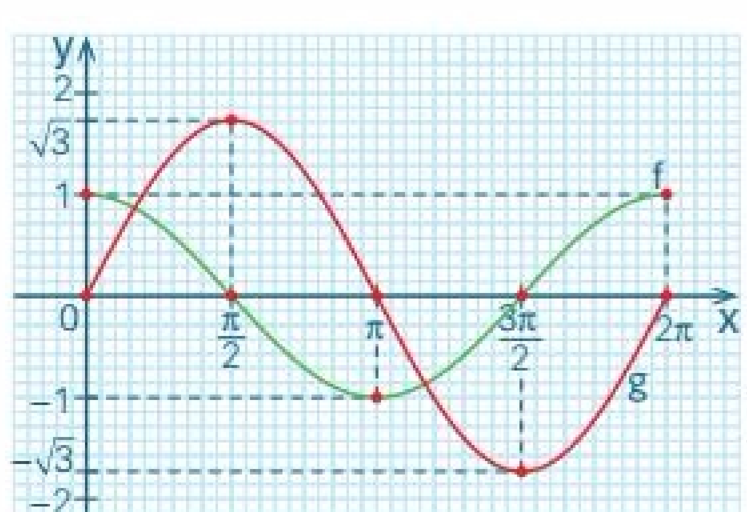
c)



Ilustrações: Acervo da Editora

DESAFIO

40. De acordo com os gráficos das funções do tipo trigonométricas, quais são os valores de x em que $f(x) = g(x)$?



Acervo da Editora

$x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$

41. Seja a função $q(x) = \frac{1}{2}\cdot\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, com $D(q) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le \frac{3\pi}{2}\right\}$. Determine as coordenadas do(s) ponto(s) em que o gráfico de q intersecta o eixo das:

a) abscissas $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ ou $\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$

b) ordenadas $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

42. O movimento periódico de subida e descida do nível do mar é denominado maré. Devido à periodicidade desse fenômeno, a altura h da maré em relação ao nível médio do mar de certa praia é dada por $h(t) = 2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right)$, em que t é o tempo em horas do dia desde a meia-noite.

Nessa Gnatoush/ Shutterstock.com

Praia localizada na região Nordeste do Brasil, 2015.

a) Qual é a menor altura que essa maré atinge? E a maior altura? 2 m abaixo do nível médio do mar; 2 m acima do nível médio do mar

b) Calcule a altura dessa maré às:

- 3h06 2 m acima do nível do mar
- 11h30 aproximadamente 0,88 m abaixo do nível do mar

c) Quais são os horários em que essa maré fica:

- com 1 m de altura? *
- ao nível médio do mar? **

O que ocasiona as marés?

As marés ocorrem por influência do Sol e da Lua e dependem da intensidade da força de atração desses astros sobre nosso planeta. A Lua atrai a Terra de um modo sutil, causando pouco efeito sobre os continentes, que são sólidos, mas os oceanos são afetados consideravelmente, em virtude da fluidez da água.

O Sol, com atração correspondente a 46% da atração lunar, também influi no comportamento das marés.

*$t = \frac{31}{30} = 1\text{h}02$ ou $t = \frac{31}{6} = 5\text{h}10$ ou $t = \frac{403}{30} = 13\text{h}26$ ou $t = \frac{527}{30} = 17\text{h}34$

**$t = 0 = 0\text{h}$ ou $t = \frac{31}{5} = 6\text{h}12$ ou $t = \frac{62}{5} = 12\text{h}24$ ou $t = \frac{93}{5} = 18\text{h}36$

DESAFIO

43. (UFPE) Quantas soluções a equação trigonométrica $\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos x}$ admite no intervalo $[0, 80\pi[$?

80 soluções

44. (UFPR) Suponha que a expressão $P = 100 + 20\text{sen}(2\pi t)$ descreve de maneira aproximada a pressão sanguínea P, em milímetros de mercúrio, de uma certa pessoa durante um teste. Nessa expressão, t representa o tempo em segundos.

A pressão oscila entre 20 milímetros de mercúrio acima e abaixo dos 100 milímetros de mercúrio, indicando que a pressão sanguínea da pessoa é 120 por 80. Como essa função tem um período de 1 segundo, o coração da pessoa bate 60 vezes por minuto durante o teste.

a) Dê o valor da pressão sanguínea dessa pessoa em $t = 0$ s; $t = 0{,}75$ s.
100 mm de mercúrio; 80 mm de mercúrio

b) Em que momento, durante o primeiro segundo, a pressão sanguínea atingiu seu mínimo? 0,75 s

45. O gráfico da função $y = a + b \cdot \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ passa pelos pontos $P = \left(-\frac{\pi}{2}, 3\right)$ e $Q = \left(\frac{11\pi}{6}, 5\right)$.

a) Qual é o período dessa função? 2π

b) Qual é o valor do coeficiente a? E do coeficiente b? 7; – 4

c) Determine a imagem dessa função. $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 3 \le y \le 11\}$

Professor(a): Veja na Assessoria Pedagógica orientações para o trabalho com a seção Sobre a unidade.

Sobre a unidade | Anote as respostas no caderno.

1. O que você estudou nesta unidade? Você considera que atingiu os objetivos propostos no início da unidade? Se não, o que fará para atingir os objetivos?

2. Qual dos conteúdos estudados nesta unidade você considera que deve estudar um pouco mais?

3. Se um amigo pedisse a você que explicasse as características das funções seno e cosseno, que explicações você daria?

4. A sentença $\text{sen}(a - b) = \text{sen}\, a - \text{sen}\, b$ é válida para quaisquer valores de a e b? Justifique.

5. Converse com seus colegas a respeito de situações em que os conteúdos estudados nesta unidade estão presentes. Se necessário, realizem uma pesquisa.

1. Resposta esperada: Definição e gráfico das funções trigonométricas seno e cosseno, gráfico das funções tipo trigonométrica, fórmulas de transformação, relações trigonométricas, equações trigonométricas. Resposta pessoal. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

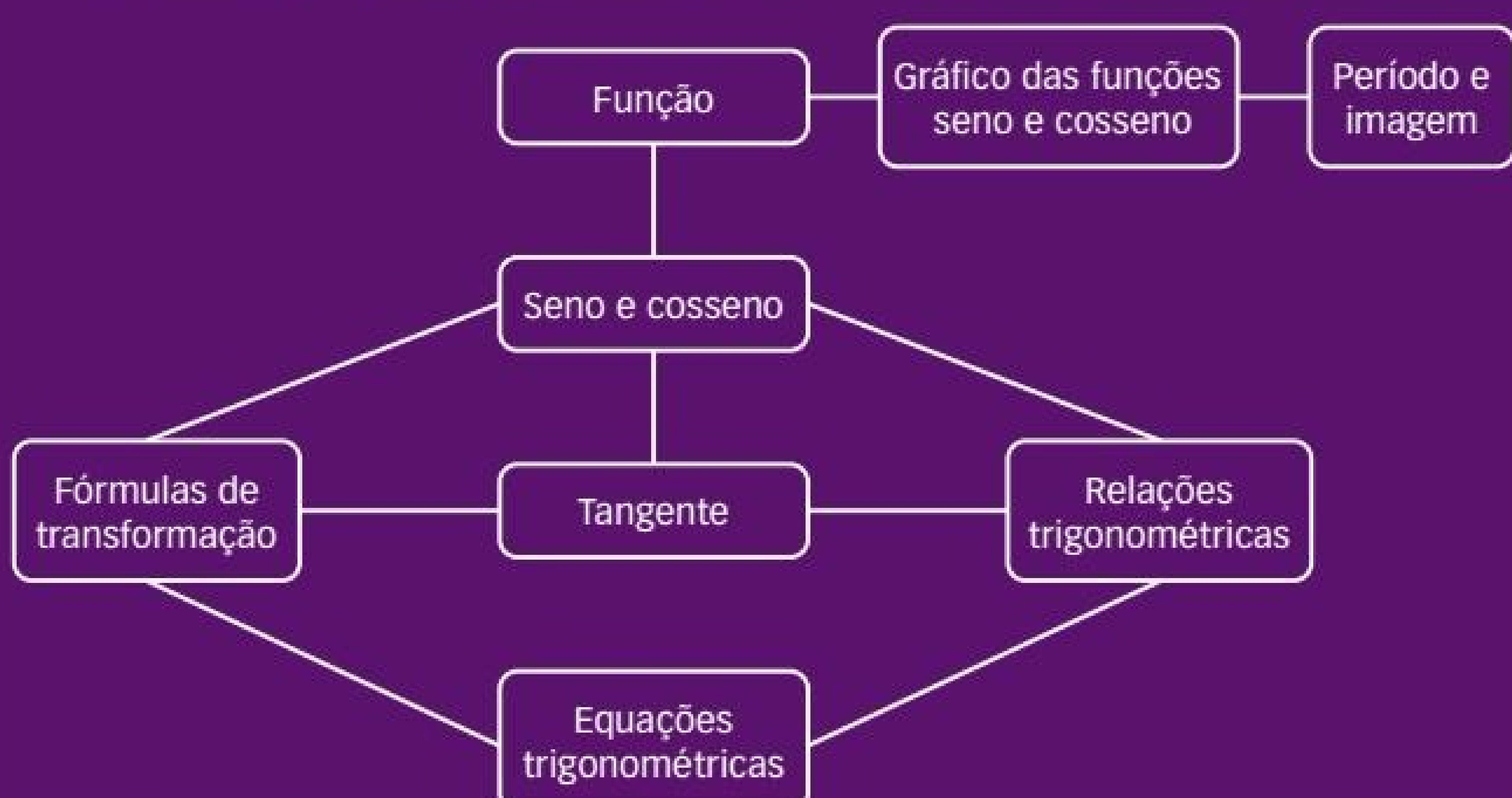
3. Resposta esperada: As funções seno e cosseno são funções periódicas, ambas com período igual a 2π. A função seno é crescente para $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$ e decrescente para $x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[$, com $k \in \mathbb{Z}$, é positiva no 1º e 2º quadrantes e negativa no 3º e 4º quadrantes, e é uma função ímpar. A função cosseno é crescente para $x \in \left]-\pi + 2k\pi, 2k\pi\right[$ e decrescente para $x \in \left]2k\pi, \pi + 2k\pi\right[$, com $k \in \mathbb{Z}$, é positiva no 1º e 4º quadrantes e negativa no 2º e 3º quadrantes, e é uma função par.

4. Não. Resposta esperada: Por exemplo, para $a = 90°$ e $b = 30°$, teríamos: $\text{sen}60° = \text{sen}(90° - 30°) = \text{sen}90° - \text{sen}30° = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, que é um resultado falso, pois $\text{sen}60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Possível resposta: Os conteúdos desta unidade estão presentes em situações como: descrição do movimento de objetos que realizam movimentos periódicos, como um pêndulo, um balanço, uma corda de violão ou uma mola; a duração do período de incidência de luz solar; a altura de uma maré, em relação ao nível médio do mar.

Ideias matemáticas

O esquema a seguir relaciona algumas das ideias matemáticas estudadas nesta unidade. Converse com seus colegas e professor(a) a respeito de como essas e outras ideias abordadas na unidade estão relacionadas. Em seguida, faça um texto descrevendo as relações existentes entre elas e dê sugestões para complementar e melhorar a organização desse esquema.



Revise os conteúdos estudados nesta unidade e anote os pontos que julgar mais relevantes. Com isso, organize um resumo para auxiliá-lo(a) na compreensão dos conteúdos.

Professor(a): Converse com os alunos, de maneira que retomem os objetivos propostos no início da unidade, e verifique, por exemplo, se compreenderam a definição de seno e cosseno. Auxilie-os a listar as principais ideias matemáticas presentes na unidade e a buscar relações entre elas, como a relação entre os movimentos periódicos e as funções trigonométricas. Com base nas ideias listadas e relações estabelecidas, oriente-os a propor aprimoramentos ao esquema apresentado, inserindo novas ideias e indicando suas possíveis relações. Peça aos alunos que registrem essas discussões, compondo uma síntese da unidade.

Plotando funções do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ e $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$ com o GeoGebraPrim

Observe como podemos plotar funções do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ e $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$ no GeoGebraPrim.

- $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$

Passo 1: No menu **Disposições**, clique em **Álgebra** e **Gráficos**. Em seguida, no menu **Opções**, clique em **Arredondamento** e, logo após, em **2 Casas Decimais**.

Passo 2: Selecione a ferramenta **Controle Deslizante** e clique em algum local da **Janela de Visualização**. Na janela **Controle Deslizante**, clique em **Aplicar**.

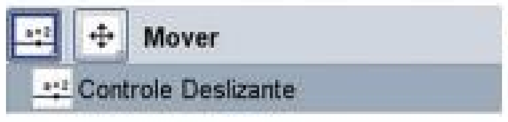
GEOGEBRAPRIM

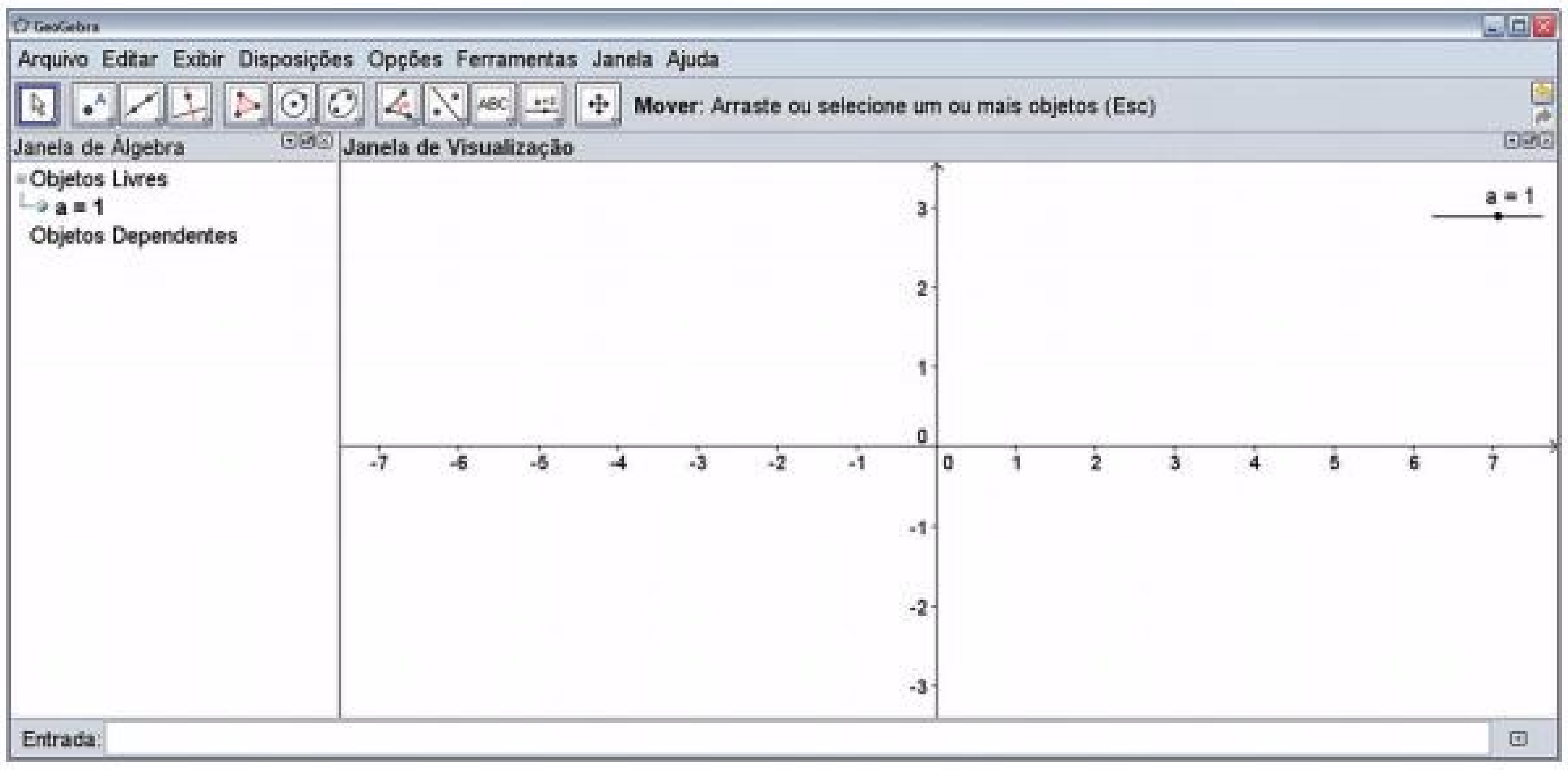
Programa de computador gratuito com recursos dinâmicos voltado para a aprendizagem de Matemática.

Licença: Pode ser copiado, distribuído e transmitido livremente, para fins não comerciais.

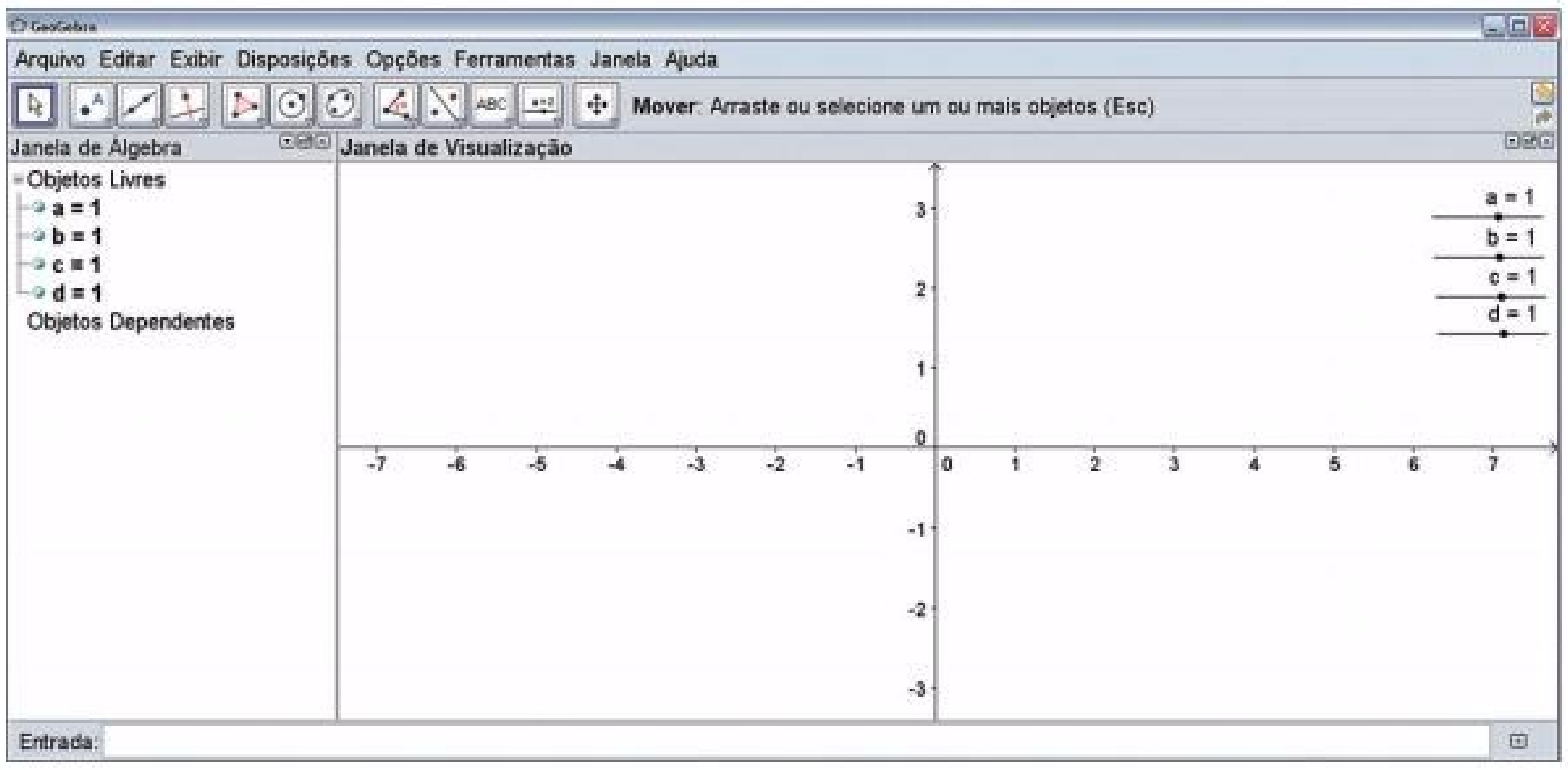
Onde obter: <www.geogebra.org>

Versão utilizada: 4.0.41.0



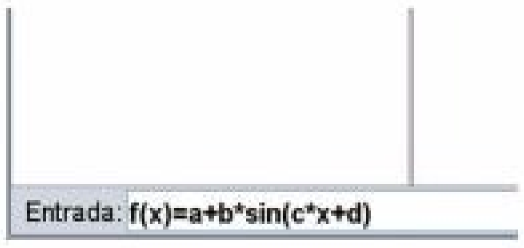


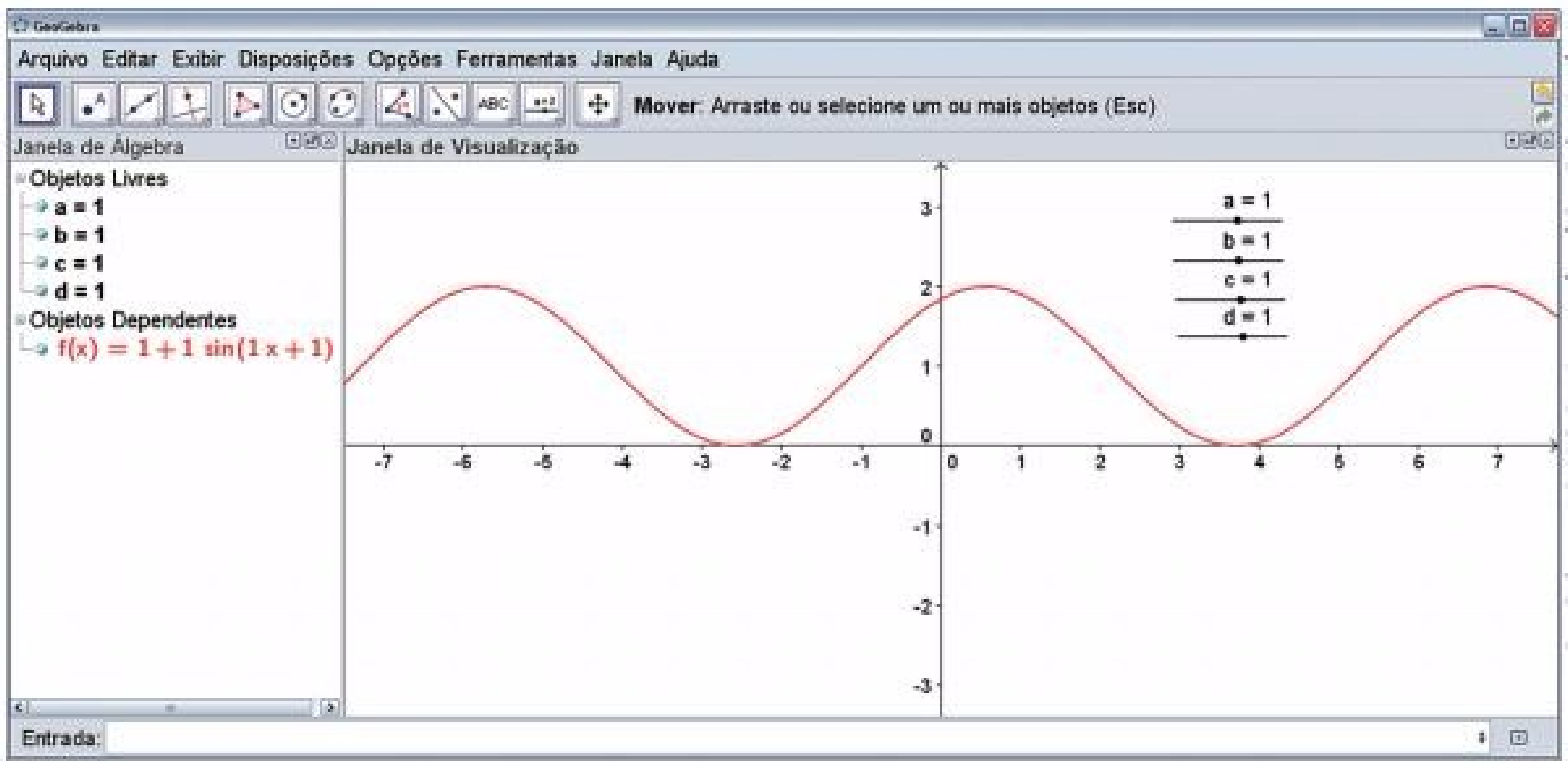
Passo 3: Repita o passo **2** outras 3 vezes para criar os controles deslizantes **b**, **c** e **d**.



Passo 4: Defina a função **f** inserindo **f(x)=a+b*sin(c*x+d)** no campo **Entrada**.

Professor(a): Diga aos alunos que a notação $\sin(x)$ representa a função seno e é equivalente a $\text{sen}\,x$.





Imagens: GeoGebra v. 4.0.41.0. Por International GeoGebra Institute

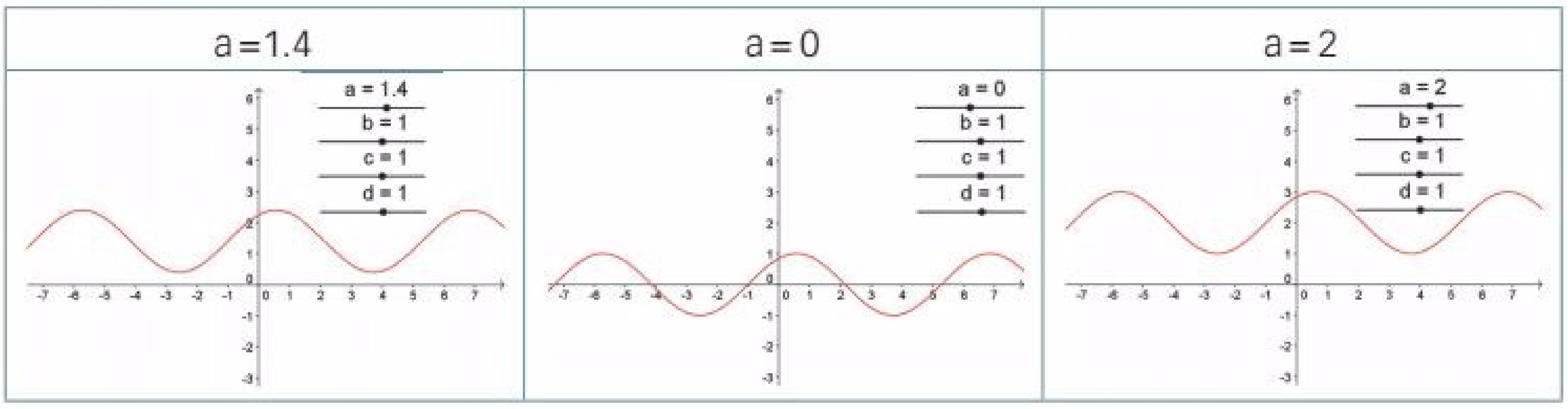
Para mudar a cor e a espessura do gráfico, selecione-o, vá ao menu **Editar** e clique em **Propriedades**.

Para calcular o valor da função para um determinado valor x, por exemplo, $x = 2$, digite no campo **Entrada** o comando **f(2)**.

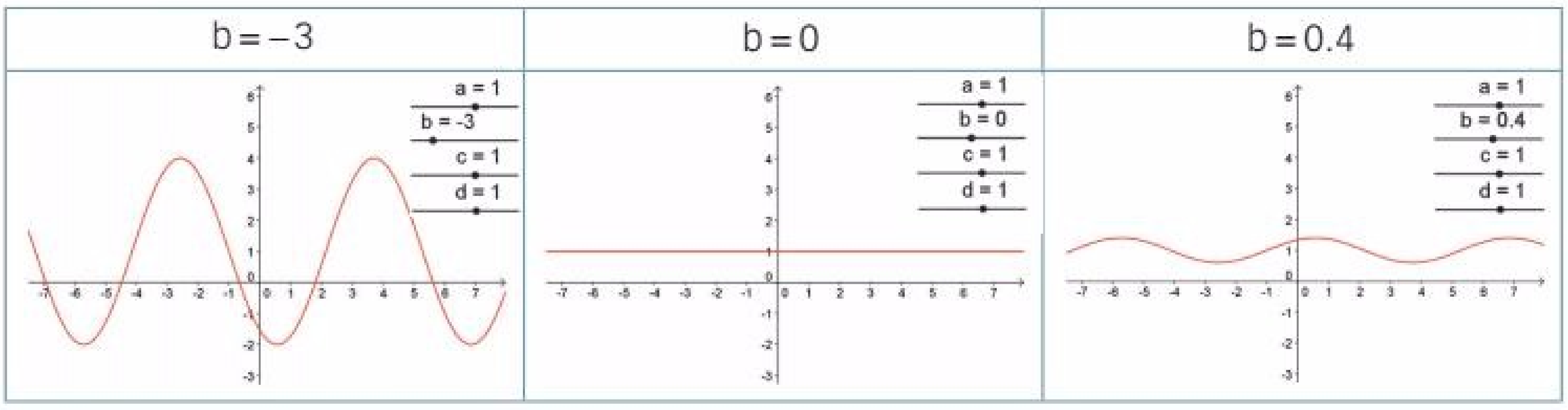
Passo 5: Com a ferramenta **Mover** selecionada, clique e arraste os botões dos controles deslizantes **a**, **b**, **c** e **d**.

> Se preferir, em vez de mover manualmente o botão do controle deslizante, você pode deixar o programa movê-lo automaticamente. Para isso, clique com o botão direito do *mouse* sobre ele e, em seguida, clique em **Animar**. Para voltar a movê-lo manualmente, repita o procedimento.

- b = c = d = 1

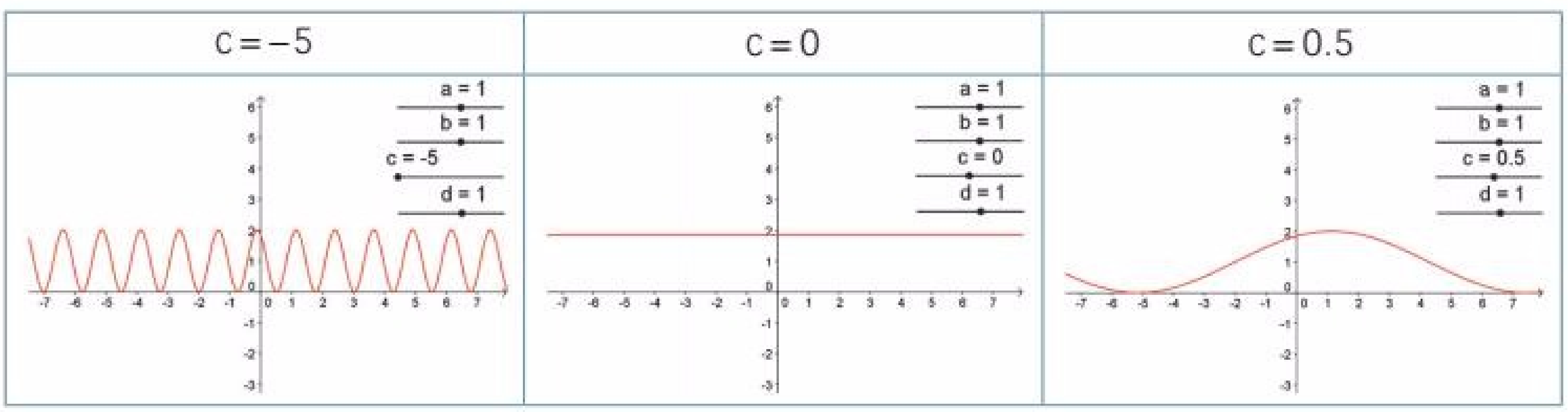


- a = c = d = 1



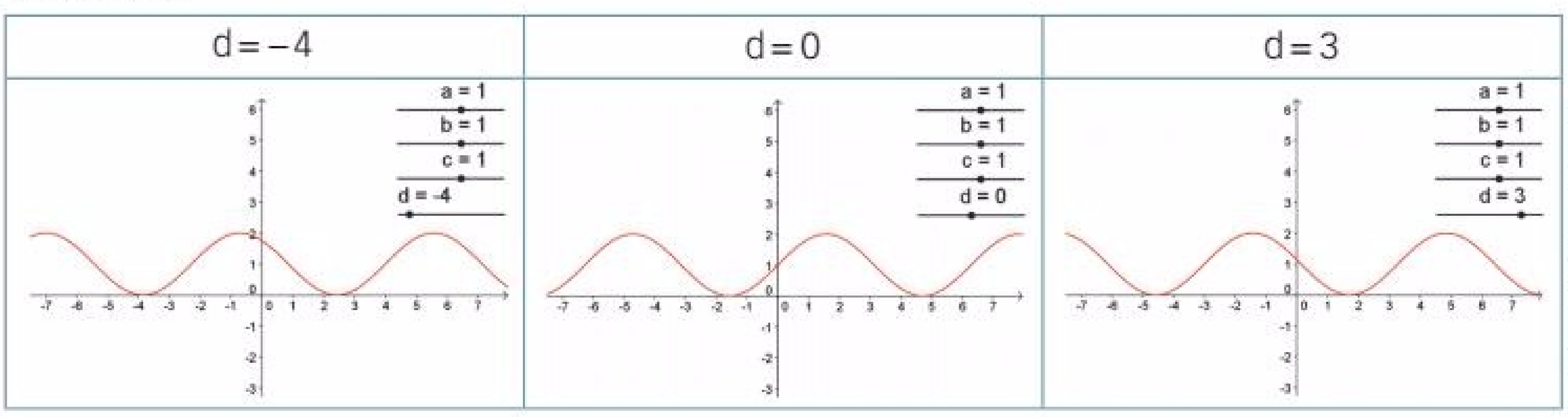
> Note que, quando b = 0, a função **f** se reduz a f(x) = a, que não é trigonométrica, mas constante.

- a = b = d = 1



> Note que, quando c = 0 e d = 1, a função **f** se reduz a f(x) = a + b · sen1, que também é constante.

- a = b = c = 1



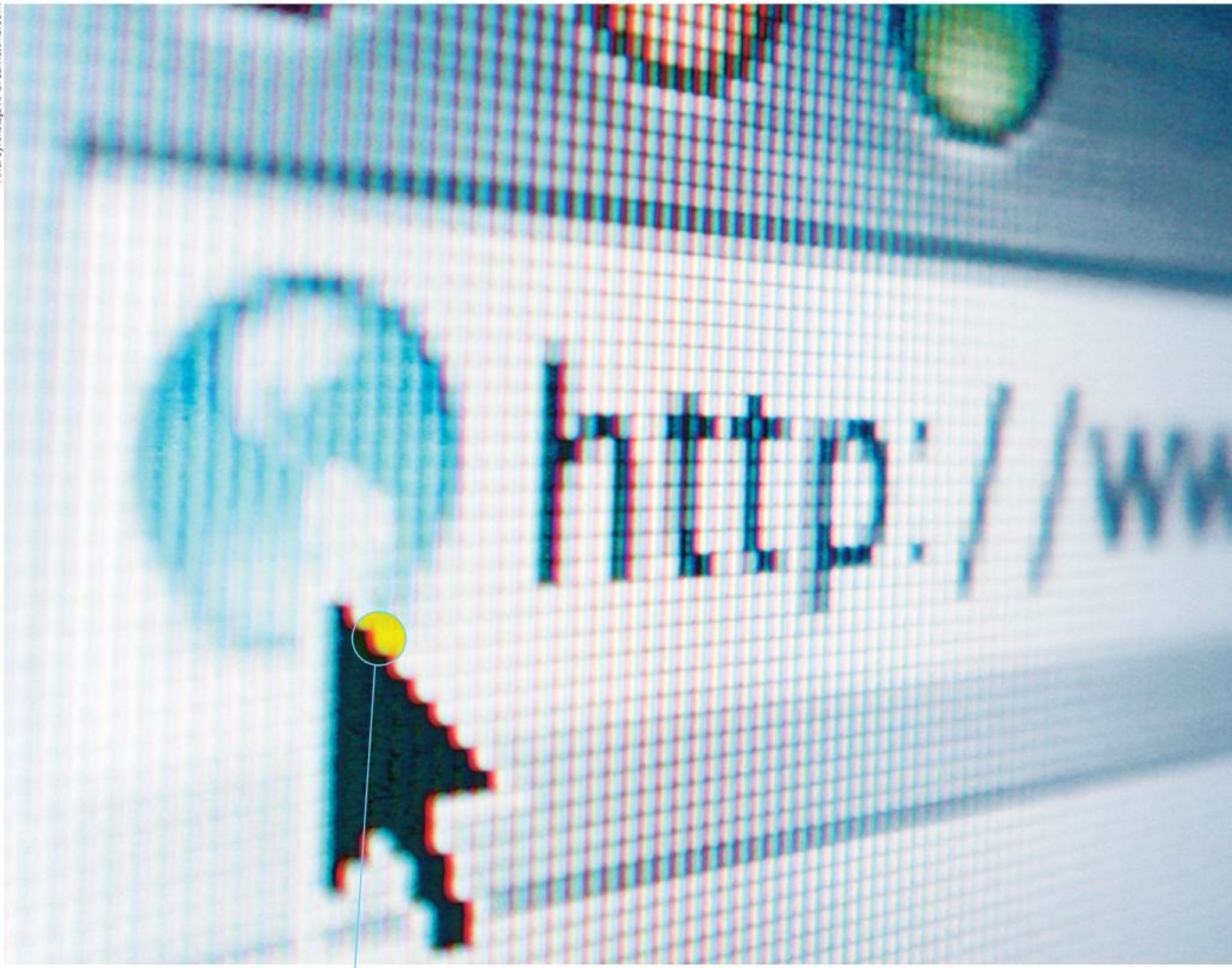
Imagens: GeoGebra v. 4.0.41.0. Por International GeoGebra Institute

- g(x) = a + b · cos(cx + d)

Repita os passos **1**, **2**, **3** e **4** feitos anteriormente, modificando apenas o passo **4**. No lugar de **f(x)=a+b*sin(c*x+d)**, digite **g(x)=a+b*cos(c*x+d)** no campo **Entrada**.

1. Em relação ao gráfico das funções do tipo trigonométricas, escreva as características associadas ao coeficiente: Professor(a): Veja a resposta desta atividade na Assessoria Pedagógica.
   - a
   - b
   - c
   - d
2. Para cada função, calcule o valor aproximado de f(3) com duas casas decimais.
   - f(x) = 2 + sen x f(3) = 2,14
   - f(x) = 5 · sen(2x + 1) f(3) = 3,28
   - f(x) = 4 − 3 · cos(−x − 5) f(3) = 4,44

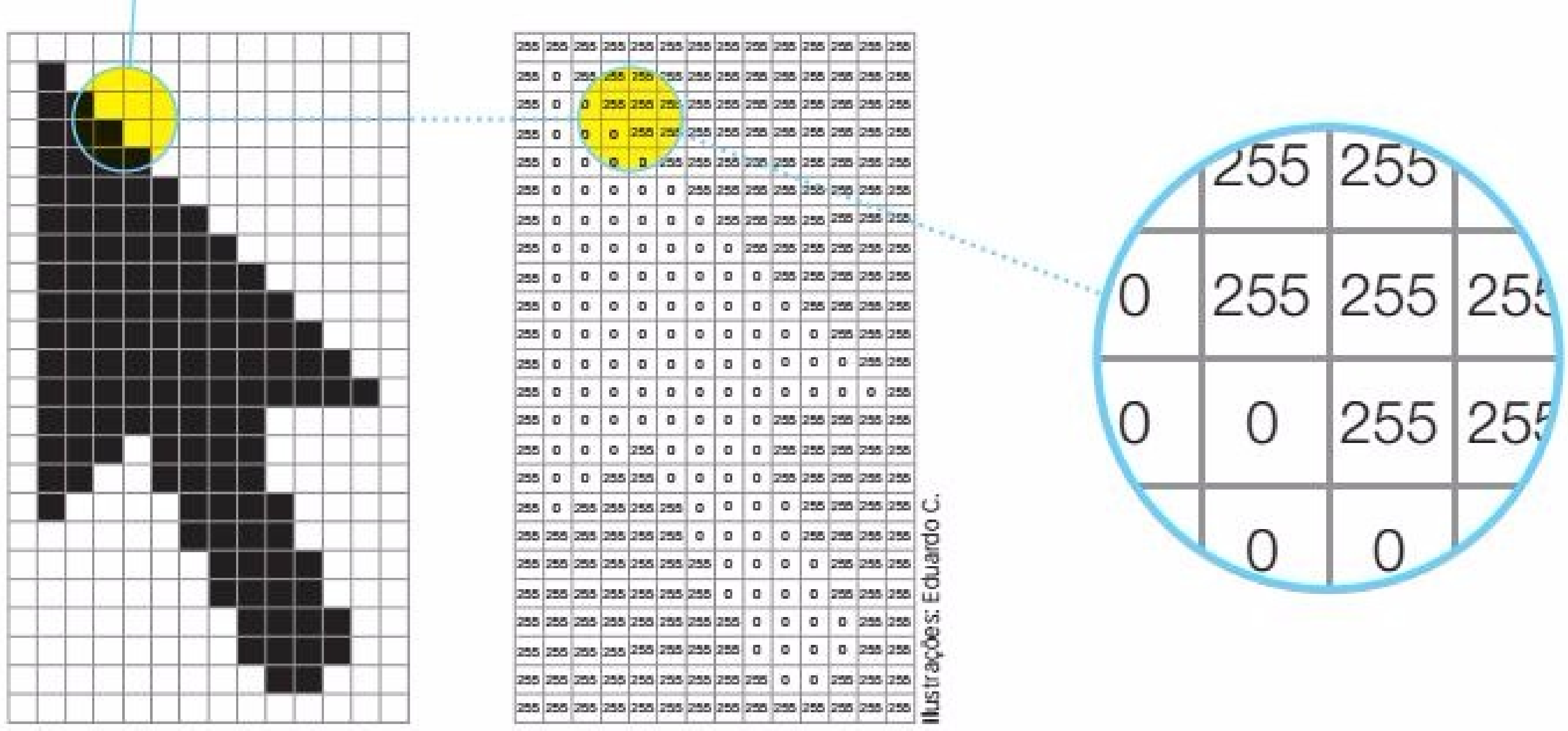
3 SISTEMAS LINEARES E MATRIZES



Andreynikolajew/Dreamstime.com

Informação do *pixel*

Além do sistema RGB, as imagens digitais também podem ser representadas por meio da escala de cinza, na qual o valor 0 é utilizado para a cor preta e o valor 255, para a cor branca, sendo que qualquer valor inteiro nesse intervalo é utilizado para uma tonalidade de cinza. Observe a representação da seta do *mouse* em escala de cinza, utilizando uma matriz com 24 linhas e 14 colunas, e a imagem obtida por meio da substituição das cores correspondentes.

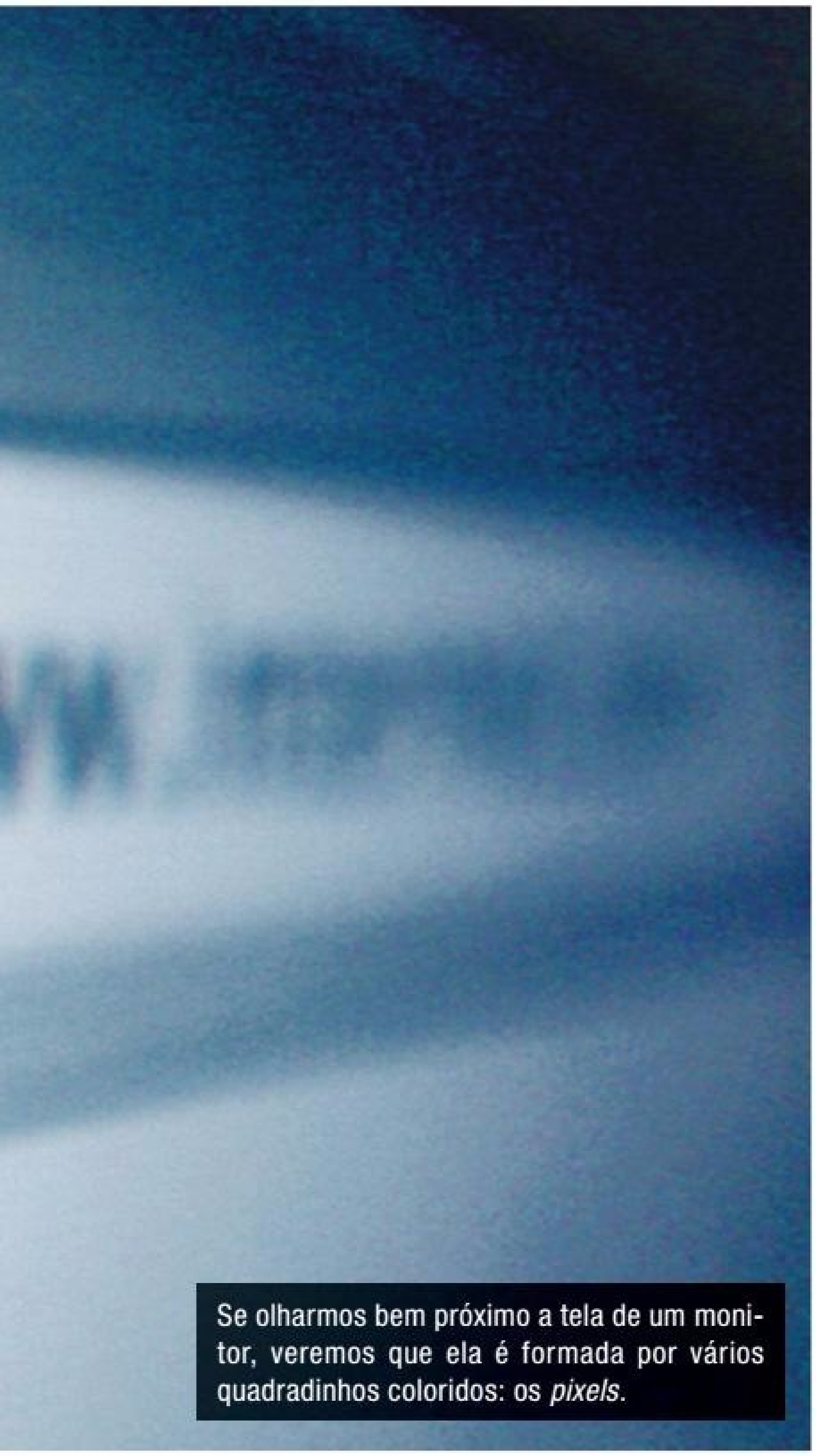


Ilustrações: Eduardo C.

Professor(a): Proponha aos alunos algumas questões relacionadas a esse tema. Algumas sugestões são:

a) Quantos *pixels* possui uma imagem que tem 600 *pixels* de altura e 1200 *pixels* de largura? (Resposta: 720 000 *pixels*)

b) Qual o total de cores possíveis de serem formadas no sistema RGB? (Resposta: $256 \cdot 256 \cdot 256 = 256^3 = 16\,777\,216$ cores)



Se olharmos bem próximo a tela de um monitor, veremos que ela é formada por vários quadradinhos coloridos: os *pixels*.

Pixel

A palavra *pixel* é o acrônimo de *picture element* (ou elemento de imagem, em português), sendo *pix* a abreviatura em inglês para a primeira palavra. É um minúsculo ponto luminoso que, juntamente com outros milhares ou milhões do mesmo tipo, formam as imagens digitais de tela de monitores, celulares, televisores, *notebooks*, *tablets*, máquinas fotográficas e muitos outros equipamentos eletrônicos. Como eles são muito pequenos e estão justapostos, passam sem serem percebidos.

Cada *pixel* pode assumir uma cor que é a combinação de três cores básicas: vermelho, verde e azul. Esse é o sistema padrão de cores RGB (do inglês *Red*: vermelho, *Green*: verde e *Blue*: azul). Por sua vez, cada cor possui 256 tonalidades, variando da mais clara à mais escura, em que 0 indica a ausência e 255 indica a presença máxima dela na combinação. Em geral, podemos indicar a cor de um *pixel* por uma terna (R, G, B) em que cada letra corresponde à quantidade da cor correspondente na mistura. Por exemplo, no sistema RGB, as ternas (135, 088, 164), (254, 231, 021), (120, 180, 066), (255, 255, 255) e (000, 000, 000) correspondem às cores ■, ■, ■, □ e ■, respectivamente.

Dizer que a resolução máxima de um monitor de computador é de 1920×1080 *pixels*, significa que, nessa configuração, tem-se 1920 *pixels* na horizontal e 1080 *pixels* na vertical, isto é, um total de 2 073 600 *pixels* ou aproximadamente 2 *megapixel* (1 *megapixel* corresponde a 1 milhão de *pixels*). Essa disposição em linhas e colunas é denominada **matriz**, assunto que iremos estudar nesta unidade.

Acrônimo: palavra formada pela letra ou sílaba inicial de várias outras palavras sucessivas, por exemplo, Fatec: Faculdade de Tecnologia.

Øystein Litleskare/ Dreamstime.com

Nos dois olhos, temos cerca de 250 milhões de células fotossensíveis, cada uma responsável por captar um ponto luminoso. Fazendo uma analogia com as imagens digitais e supondo uma distribuição uniforme dessas células, com todas elas captando um ponto luminoso, seríamos capazes de processar imagens em 250 *megapixels*.

Nesta unidade você vai...

- identificar uma equação linear e seus coeficientes, incógnitas e termo independente.
- resolver sistemas lineares.
- utilizar o método do escalonamento para resolver sistemas lineares.
- reconhecer uma matriz e identificar sua ordem e elementos, assim como algumas matrizes especiais.
- realizar as operações de adição, subtração e multiplicação com matrizes.

Professor(a): Explique aos alunos que estes são os principais objetivos a serem atingidos por eles nesta unidade. Retome esses objetivos no decorrer dos estudos da unidade e, se julgar necessário, estabeleça também novos objetivos. Na Assessoria Pedagógica encontram-se os objetivos gerais deste nível de ensino, assim como os objetivos específicos desta unidade.

SISTEMAS LINEARES

Em anos anteriores, estudamos situações envolvendo a resolução de sistemas de duas equações com duas incógnitas. Nesta unidade, vamos retomar esse estudo e estender a resolução para sistemas lineares com três equações e três incógnitas.

Observe a situação a seguir.

> Rafael vai realizar uma viagem de 215 km e está calculando quantos litros de combustível vai gastar. O carro que ele utilizará é um modelo *flex*, ou seja, pode ser abastecido com etanol, gasolina ou uma mistura dos dois, e tem um desempenho de 10 km com um litro de gasolina e 7 km com um litro de etanol. Supondo que Rafael não tem preferência por um dos combustíveis e pode utilizar ambos, quantos litros de cada combustível ele utilizará na viagem?


Pavel Losevsky/ Dreamstime.com

Carro sendo abastecido.

Indicando por x a quantidade de litros de gasolina e por y a quantidade de litros de etanol, podemos escrever a seguinte equação para representar essa situação:

quilômetros percorridos por litro de gasolina

quilômetros percorridos por litro de etanol

$$10x + 7y = 215$$

quantidade de litros de gasolina

distância percorrida na viagem

quantidade de litros de etanol

A equação $10x + 7y = 215$ é um exemplo de equação do 1º grau com duas incógnitas.

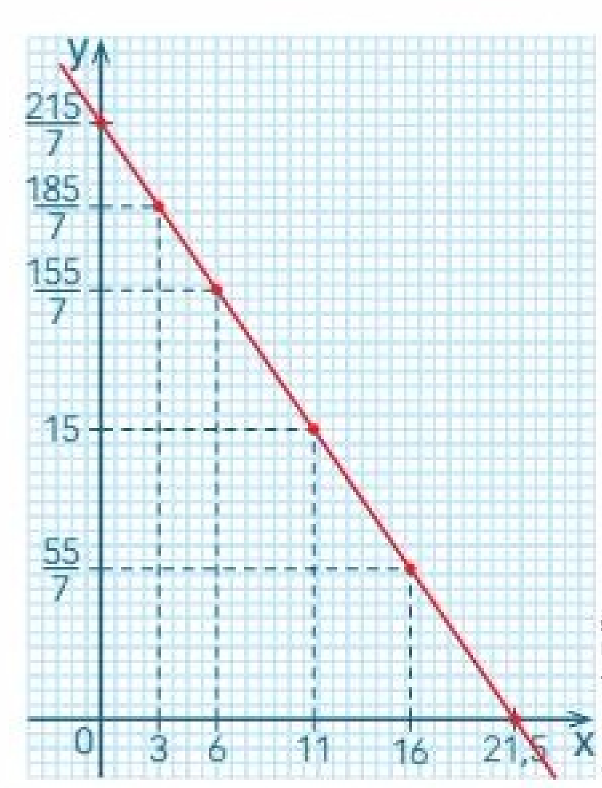
Se Rafael utilizar 11 litros de gasolina ($x = 11$), ele deverá utilizar 15 litros de etanol ($y = 15$) para realizar a viagem, pois substituindo x por 11 na equação obtemos:

$$10x + 7y = 215$$
$$10 \cdot 11 + 7y = 215$$
$$7y = 105$$
$$y = 15$$

Observe no quadro outras soluções para essa equação. Cada uma dessas soluções pode ser representada no plano cartesiano por um par ordenado (x, y).

Podemos atribuir infinitos valores reais a x e obter um valor correspondente a y, ou vice-versa. Então, existem infinitas soluções para a equação, ou seja, podemos representar as soluções por pontos que formam uma reta no plano cartesiano.

x	$10x + 7y = 215$	(x, y)
0	$10 \cdot 0 + 7y = 215 \Rightarrow y = \frac{215}{7}$	$\left(0, \frac{215}{7}\right)$
3	$10 \cdot 3 + 7y = 215 \Rightarrow y = \frac{185}{7}$	$\left(3, \frac{185}{7}\right)$
6	$10 \cdot 6 + 7y = 215 \Rightarrow y = \frac{155}{7}$	$\left(6, \frac{155}{7}\right)$
16	$10 \cdot 16 + 7y = 215 \Rightarrow y = \frac{55}{7}$	$\left(16, \frac{55}{7}\right)$
21,5	$10 \cdot 21{,}5 + 7y = 215 \Rightarrow y = 0$	$(21{,}5; 0)$



Acervo da Editora

Professor(a): Reforce a ideia de que, embora existam infinitas soluções para a equação $10x + 7y = 215$, para a situação apresentada no início do tópico, devemos considerar apenas valores positivos para x e y, visto que eles representam a quantidade de litros de gasolina e de etanol, respectivamente.

Em uma equação linear (ou equação do 1º grau), aparece um sinal de igualdade e pelo menos um número desconhecido, chamado incógnita, elevada ao expoente 1.

Uma equação linear é uma expressão da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$, em que:

- $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais denominados **coeficientes das incógnitas**;
- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as **incógnitas**;
- b é uma constante real denominada **termo independente**.

No caso particular em que $b = 0$, a equação é chamada **equação linear homogênea**.

Exemplo 1: A equação $2x + 3y = 5$ é uma equação linear, em que 2 e 3 são os coeficientes das incógnitas x e y, respectivamente, e 5 é o termo independente. Nesse caso, temos:

- o par ordenado $(1, 1)$ é uma solução da equação, pois: $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$
- o par ordenado $(-2, 3)$ é uma solução da equação, pois: $2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = 5$
- o par ordenado $(0, 2)$ não é solução da equação, pois: $\underbrace{2 \cdot 0 + 3 \cdot 2}_{6} \neq 5$

Exemplo 2: A equação $a - 2b + c = 0$ é uma equação linear homogênea, em que 1, -2 e 1 são os coeficientes das incógnitas a, b e c, respectivamente, e 0 é o termo independente. Nesse caso, temos:

- a terna $(1, 2, 3)$ é uma solução da equação, pois: $1 - 2 \cdot 2 + 3 = 0$
- a terna $(0, 0, 0)$ é uma solução da equação, pois: $0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0$
- a terna $(3, -1, 2)$ não é solução da equação, pois: $\underbrace{3 - 2 \cdot (-1) + 2}_{7} \neq 0$

Exemplo 3: A equação $x^2 + y = z$ não é uma equação linear, pois o expoente da incógnita x é 2.

Exemplo 4: A equação $xy = 0$ não é uma equação linear, pois representa o produto de duas incógnitas. Nesse caso, note que se $x = 0$ então y pode assumir qualquer valor, e vice-versa.

Uma solução de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$ é a **ênupla** de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ que, ao substituirmos em $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, respectivamente, torna a igualdade verdadeira, isto é: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \ldots + a_n\alpha_n = b$

Um conjunto de m equações lineares com n incógnitas é chamado de **sistema linear** $m \times n$. A ênupla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é uma solução de um sistema linear $m \times n$ se for solução de todas as equações do sistema. O conjunto contendo todas as soluções de um sistema linear é chamado **conjunto solução do sistema**.

Caso todas as equações de um sistema linear sejam homogêneas, temos um **sistema linear homogêneo**, sendo a ênupla $(0, 0, 0, \ldots, 0)$ uma das soluções, chamada solução **nula** ou **trivial**.

$m \times n$: lê-se "m por n".

Exemplo 1: $\begin{cases} x + y = 11 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$, sistema linear 2×2 (duas equações e duas incógnitas), nas incógnitas x e y.

O par $(6, 5)$ é solução de todas as equações do sistema, pois $\begin{cases} 6 + 5 = 11 \\ 2 \cdot 6 - 5 = 7 \end{cases}$. Portanto, o par $(6, 5)$ é uma solução do sistema linear.

Já o par $(7, 4)$ é solução de apenas uma das equações, pois $\begin{cases} 7 + 4 = 11 \\ 2 \cdot 7 - 4 \neq 7 \end{cases}$. Portanto, o par $(7, 4)$ não é solução do sistema linear.

Nem sempre um sistema linear homogêneo possui outras soluções além da trivial.

Exemplo 2: $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -2x+5y+4z=0 \\ 5x-8y-7z=0 \end{cases}$, sistema linear 3×3 (três equações e três incógnitas), nas incógnitas x, y e z.

Todas as equações desse sistema são homogêneas, logo a terna $(0, 0, 0)$ é uma das soluções de cada uma delas, pois $\begin{cases} 0+2\cdot 0+0=0 \\ -2\cdot 0+5\cdot 0+4\cdot 0=0 \\ 5\cdot 0-8\cdot 0-7\cdot 0=0 \end{cases}$. Portanto, a terna $(0, 0, 0)$ é uma solução do sistema linear homogêneo.

Além da solução trivial, um sistema linear homogêneo pode ter outras soluções. A terna $(1, -2, 3)$, por exemplo, também é uma solução desse sistema linear, pois

$$\begin{cases} 1+2\cdot(-2)+3=0 \\ -2\cdot 1+5\cdot(-2)+4\cdot 3=0. \\ 5\cdot 1-8\cdot(-2)-7\cdot 3=0 \end{cases}$$

A terna $(6, -2, 1)$ é uma solução do sistema linear apresentado no exemplo 3? Realize os cálculos e verifique. sim

Exemplo 3: $\begin{cases} -x-2y+4z=2 \\ 2x+5y+6z=8 \end{cases}$, sistema linear 2×3 (duas equações e três incógnitas), nas incógnitas x, y e z.

A terna $\left(-10, 5, \frac{1}{2}\right)$ é uma solução de todas as equações do sistema, pois $\begin{cases} -(-10)-2\cdot 5+4\cdot\frac{1}{2}=2 \\ 2\cdot(-10)+5\cdot 5+6\cdot\frac{1}{2}=8 \end{cases}$. A terna $(38, 16, 2)$ também é uma solução de todas as equações do sistema, pois $\begin{cases} -(-10)-2\cdot 5+4\cdot\frac{1}{2}=2 \\ 2\cdot(-10)+5\cdot 5+6\cdot\frac{1}{2}=8 \end{cases}$.

Portanto, as ternas $\left(-10, 5, \frac{1}{2}\right)$ e $(38, 16, 2)$ são algumas das soluções do sistema linear.

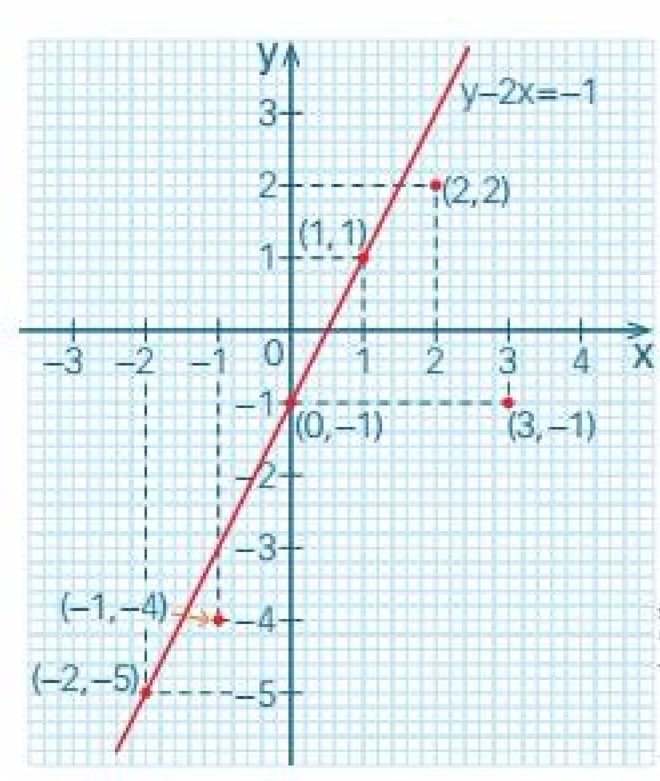
Atividades resolvidas

R1. Represente graficamente a equação linear $y-2x=-1$ e verifique quais dos pares ordenados $(-2, -5)$, $(-1, -4)$, $(0, -1)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ e $(3, -1)$ são soluções dessa equação.

Resolução

Representamos graficamente a equação linear $y-2x=-1$ por uma reta no plano cartesiano. Isolando y obtemos a equação na forma reduzida dessa reta.

$$y-2x=-1 \Rightarrow y=2x-1$$



Acervo da Editora

Os pares ordenados (x, y) pertencentes à reta são soluções da equação linear.

- $(-2,-5) \to -5=2\cdot(-2)-1$
- $(-1,-4) \to -4 \neq \underbrace{2\cdot(-1)-1}_{-3}$
- $(0,-1) \to -1=2\cdot 0-1$
- $(1,1) \to 1=2\cdot 1-1$
- $(2,2) \to 2 \neq \underbrace{2\cdot 2-1}_{3}$
- $(3,-1) \to -1 \neq \underbrace{2\cdot 3-1}_{5}$

Portanto, os pares ordenados $(-2, -5)$, $(0, -1)$ e $(1, 1)$ são soluções da equação linear $y-2x=-1$.

Atividades ▸ Anote as respostas no caderno.

1. Quais das sentenças são equações lineares? b; e

a) $4x+\frac{1}{x}+7=\frac{3}{8}$

b) $8-5y-\sqrt{11}=6$

c) $z+w^4-10k=0$

d) $r+2t\geq -1$

e) $-a+3b-\frac{c}{2}+d=0$

f) $2-\sqrt[3]{n}=n$

▸ Entre as sentenças que você julgou ser equação linear, alguma é homogênea? Qual delas?
sim; e

2. Para cada equação linear escreva os coeficientes, as incógnitas e o termo independente.

a) $3p-9q=2$ coeficientes: 3, −9; incógnitas: *p*, *q*; termo independente: 2

b) $r-\frac{s}{3}+4t=1{,}7$ coeficientes: 1, $-\frac{1}{3}$, 4; incógnitas: *r*, *s*, *t*; termo independente: 1,7

c) $-3x+y+5z-0{,}8w=0$ coeficientes: −3, 1, 5, −0,8; incógnitas: *x*, *y*, *z*, *w*; termo independente: 0

d) $\frac{5u}{6}+v\sqrt{2}=13$ coeficientes: $\frac{5}{6}$, $\sqrt{2}$; incógnitas: *u*, *v*; termo independente: 13

e) $2n-1+m=-3m+4$
coeficientes: 2, 4; incógnitas: *m*, *n*; termo independente: 5

f) $2a-3(b+1)=a+b$
coeficientes: 1, −4; incógnitas: *a*, *b*; termo independente: 3

3. A terna $(1, 3, -2)$ é uma solução de quais das equações lineares? c; d

a) $x+y+z=0$

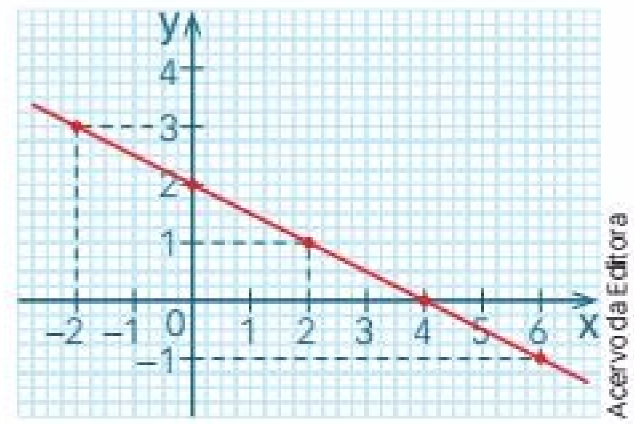
b) $2x-\frac{y}{3}-z=5$

c) $x+y+2z=0$

d) $4x-2y-\frac{z}{2}=-1$

e) $-x+3y+z=2$

4. Observe a representação gráfica de uma equação linear do tipo $ax+by=c$.



Escreva três soluções dessa equação em forma de par ordenado. Possível resposta: (0, 2); (2, 1); (4, 0)

5. Qual deve ser o valor de **k** para que a equação linear $x-6y+2z-\frac{w}{3}=-9$ admita a ênupla $\left(-k, \frac{k}{2}, \frac{k}{4}, 3k\right)$ como uma de suas soluções? k = 2

6. Considere o sistema linear $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ -\frac{3}{2}x-y=0 \end{cases}$.

a) O par $(2, -3)$ é uma solução desse sistema? sim

b) O sistema linear apresentado admite a solução trivial $(0, 0)$? Justifique. Sim, pois é um sistema linear homogêneo.

7. Qual das ternas a seguir é uma solução do sistema linear $\begin{cases} 3x+5y-z=4 \\ x-y+2z=12 \\ -6x+3y-2z=-1 \end{cases}$? c

a) $(1, 2, 9)$

b) $(-10, 10, 16)$

c) $(-1, 3, 8)$

Sistema linear 2x2

Observe a pergunta de Ana em forma de um enigma matemático.

Vamos responder a essa pergunta com o auxílio de um sistema de duas equações com duas incógnitas. Indicando por *x* a quantidade de galinhas e por *y* a quantidade de coelhos no sítio, escrevemos as seguintes equações:

$$\underbrace{x}_{\text{quantidade de galinhas}}+\underbrace{y}_{\text{quantidade de coelhos}}=\overbrace{25}^{\text{quantidade total de galinhas e coelhos}}$$

$$\underbrace{2x}_{\text{quantidade de patas de galinhas}}+\underbrace{4y}_{\text{quantidade de patas de coelhos}}=\overbrace{64}^{\text{quantidade total de patas de galinhas e coelhos}}$$

Resolver o enigma de Ana significa obter o número de galinhas (x) e o número de coelhos (y) que sejam soluções das duas equações simultaneamente. Desse modo, devemos resolver o sistema $\begin{cases} x+y=25 \\ 2x+4y=64 \end{cases}$.

Uma solução de um sistema linear 2×2 é o par ordenado (α_1, α_2), que é solução das duas equações lineares simultaneamente. Há várias maneiras de resolver sistemas desse tipo. Observe duas maneiras de resolver o sistema $\begin{cases} x+y=25 \\ 2x+4y=64 \end{cases}$.

Método da substituição

Esse método consiste em isolar uma das incógnitas em uma das equações e substituir o valor obtido na outra equação. No exemplo da situação anterior, isolamos x na 1ª equação e substituímos na 2ª equação:

- $x+y=25 \Rightarrow x=25-y$
- $2x+4y=64 \Rightarrow 2\cdot\overbrace{(25-y)}^{x}+4y=64 \Rightarrow 50-2y+4y=64 \Rightarrow 2y=14 \Rightarrow \boxed{y=7}$

Por fim, obtemos x substituindo y por 7 em $x+y=25$:

$$x+y=25 \Rightarrow x+7=25 \Rightarrow \boxed{x=18}$$

Portanto, $(18, 7)$ é solução do sistema.

Método da adição

Nesse método, adicionam-se as equações para "eliminar" uma das incógnitas. No exemplo da situação anterior, multiplicamos os dois membros da 1ª equação por (-2) para eliminar uma das incógnitas.

Multiplicar os dois membros de uma equação por um mesmo valor, diferente de zero, não altera a igualdade.

$$\begin{cases} x+y=25 & \cdot(-2) \\ 2x+4y=64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y=-50 \\ 2x+4y=64 \end{cases} \oplus$$

$$0x+2y=14$$

$$y=\frac{14}{2}$$

$$\boxed{y=7}$$

Por fim, obtemos x substituindo y por 7 em $x+y=25$:

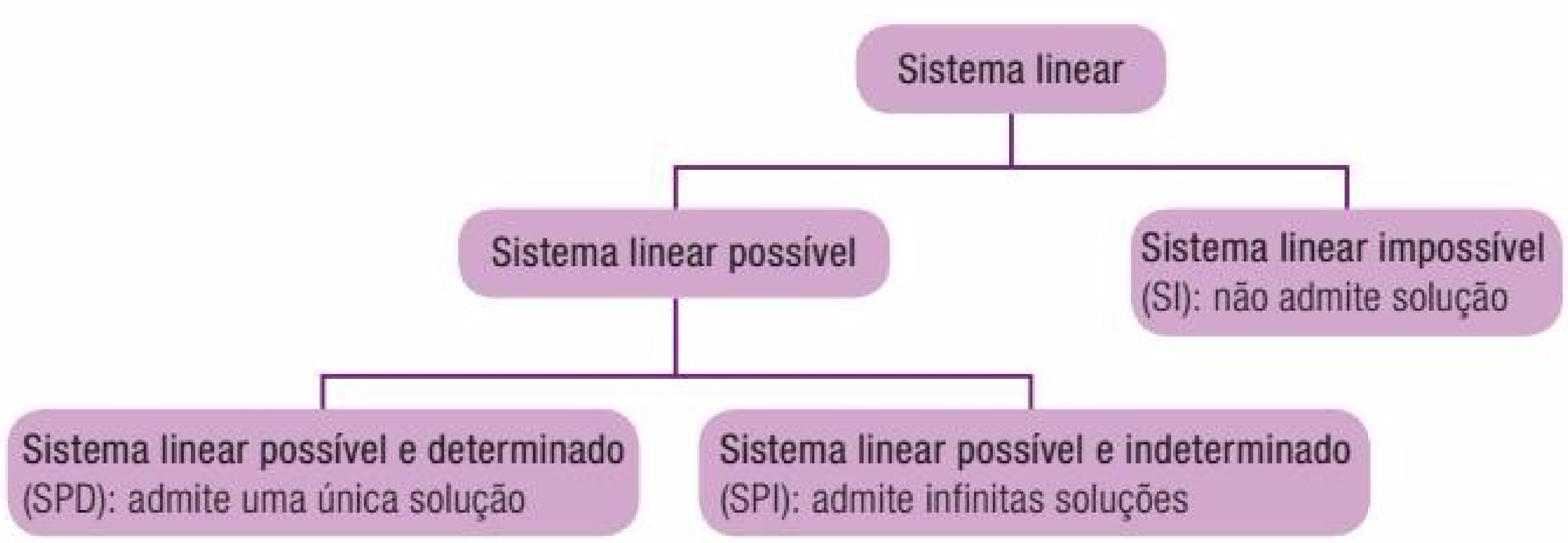
$$x+y=25 \Rightarrow x+7=25 \Rightarrow \boxed{x=18}$$

Portanto, $(18, 7)$ é solução do sistema.

Respondendo à pergunta do enigma, no sítio há 18 galinhas e 7 coelhos.

Classificação de um sistema linear 2x2

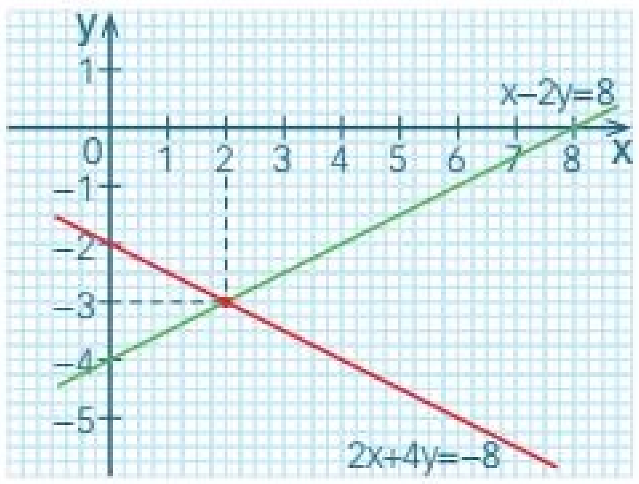
De acordo com o número de soluções de um sistema linear 2×2, podemos classificá-lo da seguinte maneira:



Observe alguns exemplos:

- $\begin{cases} 2x+4y=-8 \\ x-2y=8 \end{cases}$

Na representação gráfica, as retas que correspondem às equações do sistema são concorrentes, ou seja, se cruzam em um único ponto cujas coordenadas correspondem à única solução do sistema. Logo o sistema é **possível** e **determinado** (SPD).



Resolvendo o sistema pelo método da substituição, temos:

› $x-2y=8 \Rightarrow x=8+2y$

› $2x+4y=-8 \Rightarrow 2(8+2y)+4y=-8 \Rightarrow 16+4y+4y=-8 \Rightarrow y=-3$

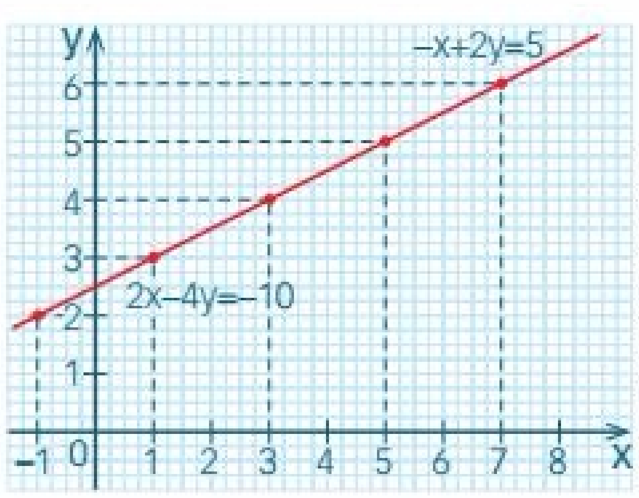
Substituindo y por -3 em $x-2y=8$, obtemos x.

$x-2y=8 \Rightarrow x-2\cdot(-3)=8 \Rightarrow x+6=8 \Rightarrow x=2$

Portanto, a única solução do sistema é o par ordenado $(2,-3)$, e seu conjunto solução é $S=\{(2,-3)\}$.

- $\begin{cases} -x+2y=5 \\ 2x-4y=-10 \end{cases}$

Na representação gráfica, as retas que correspondem às equações do sistema são coincidentes, ou seja, possuem infinitos pontos em comum, e cada um corresponde a uma solução do sistema. Logo o sistema é **possível** e **indeterminado** (SPI).



Ilustrações: Acervo da Editora

No exemplo ao lado a segunda equação é igual à primeira, multiplicada membro a membro por -2.

Resolvendo o sistema pelo método da substituição, temos:

› $-x+2y=5 \Rightarrow 2y=5+x \Rightarrow y=\dfrac{5}{2}+\dfrac{x}{2}$

› $2x-4y=-10 \Rightarrow 2x-4\left(\dfrac{5}{2}+\dfrac{x}{2}\right)=-10 \Rightarrow 2x-10-2x=-10 \Rightarrow 0x=0$

Para qualquer número real x, a sentença $0x=0$ é verdadeira. Considerando $x=k$, com k real, todos os pares ordenados da forma $\left(k, \dfrac{5}{2}+\dfrac{k}{2}\right)$ são soluções do sistema.

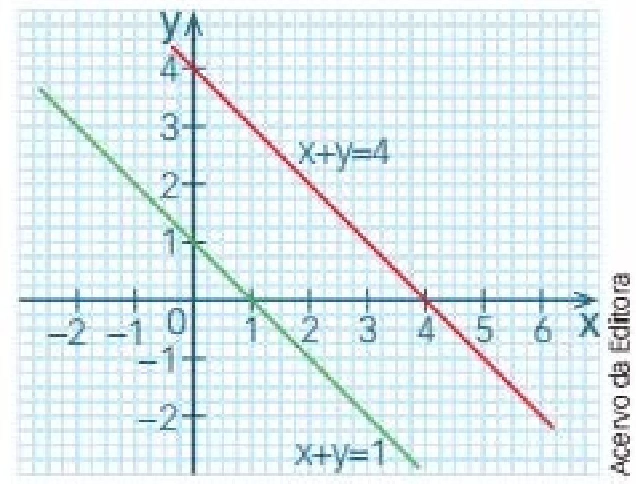
Portanto, o conjunto solução do sistema é $S=\left\{\left(k, \dfrac{5}{2}+\dfrac{k}{2}\right), \text{com } k \in \mathbb{R}\right\}$, e algumas soluções são $(-1,2)$, $(3,4)$ e $(5,5)$.

Professor(a): Na resolução do sistema $\begin{cases} -x+2y=5 \\ 2x-4y=-10 \end{cases}$, a incógnita x foi considerada livre, no entanto, também é possível resolver o sistema considerando y como incógnita livre. Supondo $y=k$, todos os pares da forma $(2k-5, k)$ são soluções do sistema.

Nas equações, $x+y$ representa a soma de dois números, mas, como não é possível obter dois números cuja soma é 1 e 4 ao mesmo tempo, então o sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=4 \end{cases}$ não admite solução.

- $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=4 \end{cases}$

Na representação gráfica, as retas que correspondem às equações do sistema são paralelas, ou seja, não possuem pontos em comum. Logo o sistema é **impossível** (SI).



Acervo da Editora

Aplicando o método da substituição no sistema, temos:

› $x+y=1 \Rightarrow x=1-y$

› $x+y=4 \Rightarrow 1-y+y=4 \Rightarrow 0y=3$

Note que não existe um número real y que satisfaça a equação $0y=3$. Nesse caso, o sistema não admite solução.

Portanto, o conjunto solução do sistema $S=\varnothing$.

Atividades resolvidas

R2. Os Jogos Olímpicos, que ocorrem de quatro em quatro anos, envolvem vários países. O Brasil, por exemplo, conquistou nas edições de 2008, em Pequim, e de 2012, em Londres, um total de 32 medalhas olímpicas. Sabendo que em Londres o Brasil obteve duas medalhas a mais que em Pequim, determine o número de medalhas conquistadas em cada uma dessas edições.

Resolução

Nosso objetivo é determinar o número de medalhas olímpicas conquistadas pelo Brasil em Pequim (P) e em Londres (L). Sabemos que o total de medalhas conquistadas nas duas edições é igual a 32, isto é, $L+P=32$; e que em Londres foram obtidas duas medalhas a mais que em Pequim, isto é, $L-P=2$.

Assim, podemos escrever o sistema linear 2×2 a seguir. Resolvendo-o pelo método da adição, temos:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} L+P=32 \\ L-P=2 \end{cases} \oplus \\ \hline 2L+0P=34 \Rightarrow L=\dfrac{34}{2} \Rightarrow L=17 \end{array}$$

Substituindo L por 17 em $L+P=32$, temos: $L+P=32 \Rightarrow 17+P=32 \Rightarrow P=32-17=15$

Portanto, o número de medalhas olímpicas conquistadas pelo Brasil em Pequim foi 15 e em Londres, 17.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

8. Associe cada sistema a sua representação gráfica. Para isso, escreva a letra e o símbolo romano correspondentes. a-III; b-I; c-IV; d-II

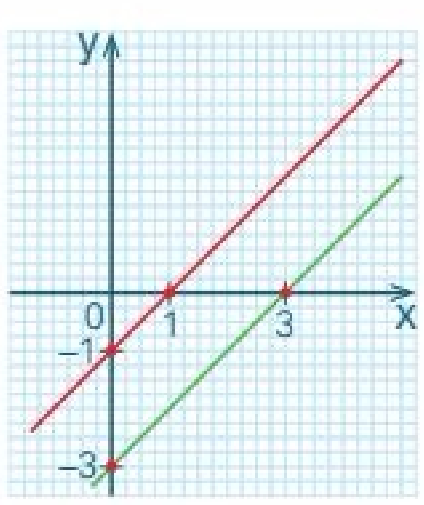
a) $\begin{cases} 2x-y=2 \\ x+\dfrac{y}{2}=5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x+y=-3 \\ 3=3x-3y \end{cases}$

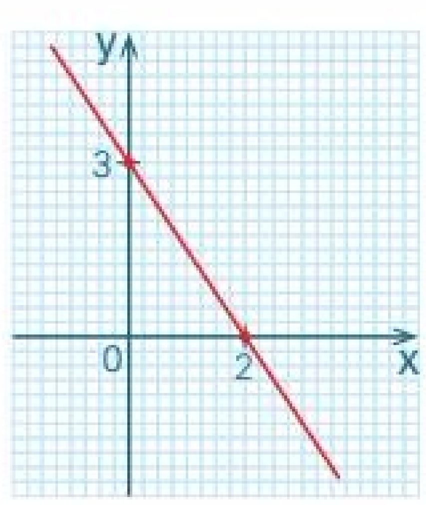
c) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+4y=-9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{3}{2}x+y=3 \\ 2y=6-3x \end{cases}$

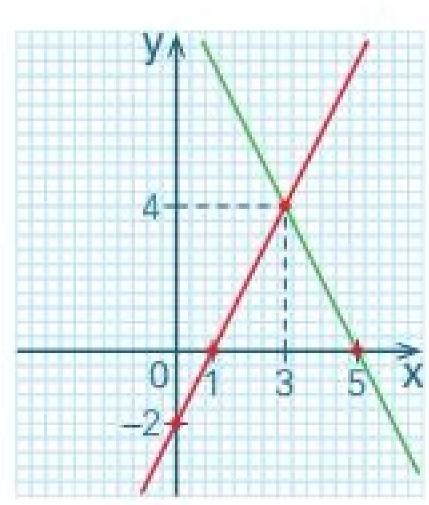
I)



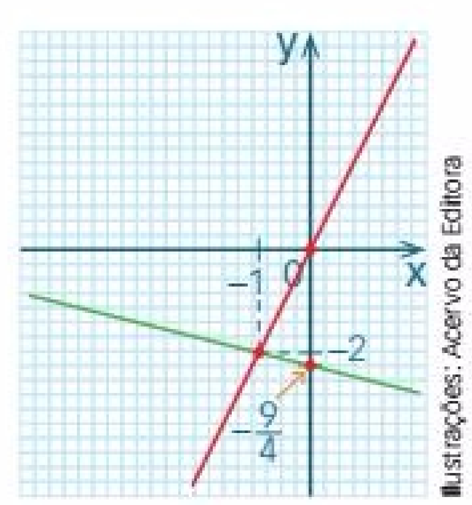
II)



III)



IV)



Ilustrações: Acervo da Editora

9. Resolva cada sistema linear e classifique-o como SPD, SPI ou SI.

a) $\begin{cases} x+2y=6 \\ 3x+4y=14 \end{cases}$ $S=\{(2,2)\}$; SPD

b) $\begin{cases} 4x-7y=21-7x \\ -6x+14y=42 \end{cases}$ $S=\{(5{,}25;5{,}25)\}$; SPD

c) $\begin{cases} 7x+y=49 \\ 4y=61-x \end{cases}$ $S=\{(5,14)\}$; SPD

d) $\begin{cases} 5x-2y=9 \\ -15x+6(1+y)=-21 \end{cases}$ $S=\left\{\left(k,\frac{5k-9}{20}\right),\ \text{com } k\in\mathbb{R}\right\}$; SPI

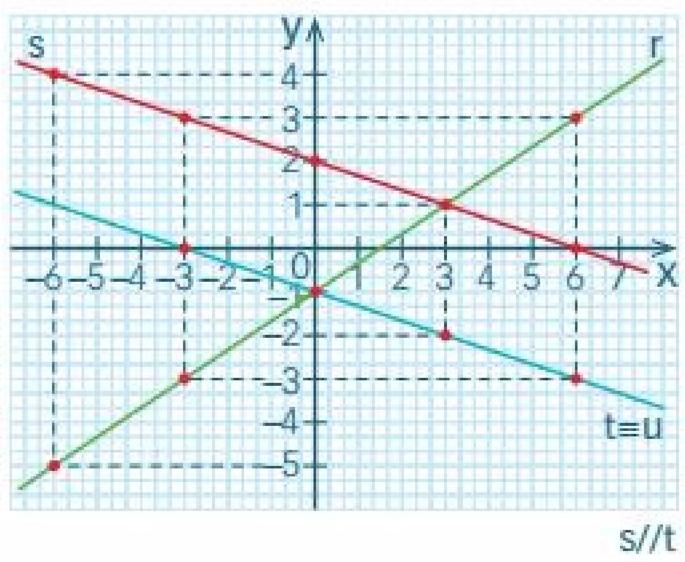
PRODUÇÃO TEXTUAL

10. Descreva os procedimentos que você utilizaria para determinar a solução de cada sistema linear. Em seguida, resolva cada um dos sistemas.

a) $\begin{cases} x+2y=5 \\ -x+4y=7 \end{cases}$ Resposta pessoal. $S=\{(1,2)\}$

b) $\begin{cases} 4x-y=-1 \\ 2x+5y=13 \end{cases}$ Resposta pessoal. $S=\left\{\left(\frac{4}{11},\frac{27}{11}\right)\right\}$

11. O gráfico apresenta algumas retas em um mesmo plano cartesiano.



Acervo da Editora

Determine, caso exista, a solução do sistema linear composto das equações correspondentes às retas:

a) r e s $S=\{(3,1)\}$

b) t e u $S=\left\{\left(\alpha,-\frac{\alpha}{3}-1\right)\right\}$

c) s e u

d) r e t $S=\{(0,-1)\}$

e) t e s

f) r e u $S=\{(0,-1)\}$

12. (Enem) Uma pessoa compra semanalmente, numa mesma loja, sempre a mesma quantidade de um produto que custa R$ 10,00 a unidade. Como já sabe quanto deve gastar, leva sempre R$ 6,00 a mais do que a quantia necessária para comprar tal quantidade, para o caso de eventuais despesas extras. Entretanto, um dia, ao chegar à loja, foi informada de que o preço daquele produto havia aumentado 20%. Devido a esse reajuste, concluiu que o dinheiro levado era a quantia exata para comprar duas unidades a menos em relação à quantidade habitualmente comprada.

A quantia que essa pessoa levava semanalmente para fazer a compra era b

a) R$166,00
b) R$156,00
c) R$ 84,00
d) R$ 46,00
e) R$ 24,00

13. Daniele fez um saque no valor de R$ 150,00 em certo caixa eletrônico que dispunha apenas de cédulas de R$ 20,00 e de R$ 10,00, obtendo 11 cédulas. Quantas eram as cédulas de R$ 20,00? 4 cédulas

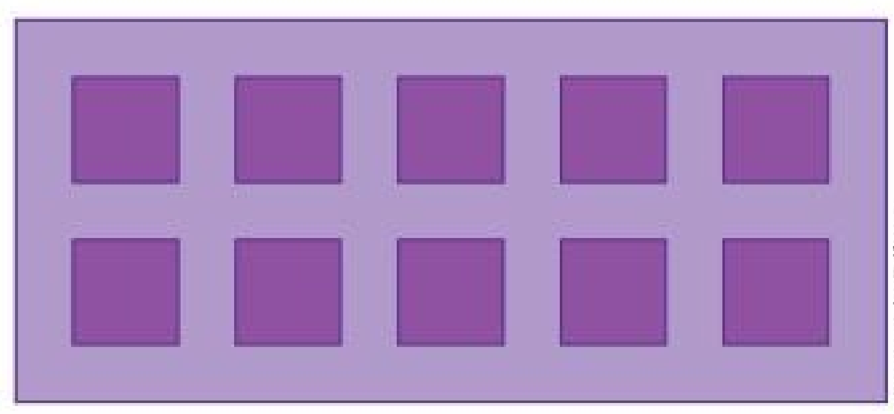
14. O brasileiro Arthur Zanetti sagrou-se campeão olímpico nos jogos de Londres em 2012, na prova individual masculina das argolas, ao superar em 0,100 de ponto o chinês Yibin Chen, até então campeão olímpico e quatro vezes campeão mundial, que ficou com a medalha de prata. Na final, esses dois ginastas somaram juntos 31,700 pontos; desse modo, qual foi a nota que Zanetti obteve para ficar com a medalha de ouro? 15,900

Action Plus Sports Images/ Alamy/ Glow Images

Arthur Zanetti, primeiro ginasta brasileiro a subir no pódio olímpico, em Londres, Inglaterra, 2012.

15. (UFF-RJ) Em uma loja, Pedro comprou duas calças e nove camisas, pagando R$ 451,00 no total. Paulo foi à mesma loja e pagou R$ 207,00 por uma calça e quatro camisas. João comprou, na mesma loja, três calças e nove camisas. Sabendo que cada calça foi vendida por x reais e cada camisa foi vendida por y reais, é correto afirmar que João pagou R$ 500,00? Justifique sua resposta. *

16. (UFG-GO) Deseja-se pintar duas fileiras de cinco quadrados num muro retangular de 5 metros de comprimento por 2,2 metros de altura, conforme a figura abaixo.



Acervo da Editora

Os lados dos quadrados serão paralelos às laterais do muro e as distâncias entre os quadrados e entre cada quadrado e a borda do muro serão todas iguais. Nessas condições, a medida do lado de cada quadrado, em metros, será: b

a) 0,52
b) 0,60
c) 0,64
d) 0,72
e) 0,80

17. (OBMEP) Juliana tem oito cartões de papel retangulares iguais. Se ela enfileirar todos os cartões juntando lados de mesma medida, ela pode obter um retângulo de perímetro 236 cm ou um retângulo de perímetro 376 cm. Qual é a área de cada cartão? d

a) 66 cm²
b) 132 cm²
c) 198 cm²
d) 264 cm²
e) 330 cm²

*Não, pois como ele comprou 3 calças no valor de R$ 59,00 cada mais 9 camisas no valor de R$ 37,00 cada, ele gastou um total de R$ 510,00.

ESCALONAMENTO DE SISTEMAS LINEARES

Vimos que para resolver um sistema de equações 2×2 pelo método da adição, por exemplo, adicionamos as equações para "eliminar" uma das incógnitas. Agora veremos um método semelhante para resolver qualquer sistema linear: o **escalonamento**.

Sistemas lineares escalonados

Um sistema está em sua forma escalonada quando:

- as incógnitas de todas as suas equações estão em uma mesma ordem;
- o primeiro coeficiente não nulo de cada equação está à esquerda do primeiro coeficiente não nulo da equação seguinte.

O sistema linear $\begin{cases} x+3y-z=4 \\ -2y+z=3 \\ y+z=5 \end{cases}$, por exemplo, não está na forma escalonada, pois o primeiro coeficiente não nulo da 2ª equação não está à esquerda do primeiro coeficiente não nulo da 3ª equação.

Caso os coeficientes de uma equação sejam todos nulos, ela deve estar abaixo das demais equações.

Exemplos de sistemas lineares na forma escalonada:

- $\begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ y+5z=2 \\ z=1 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+0y-z=-3 \\ y+z=1 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ z=1 \end{cases}$

Professor(a): Explique aos alunos que não é possível concluir que dois sistemas lineares são equivalentes apenas verificando que eles possuem uma solução em comum.

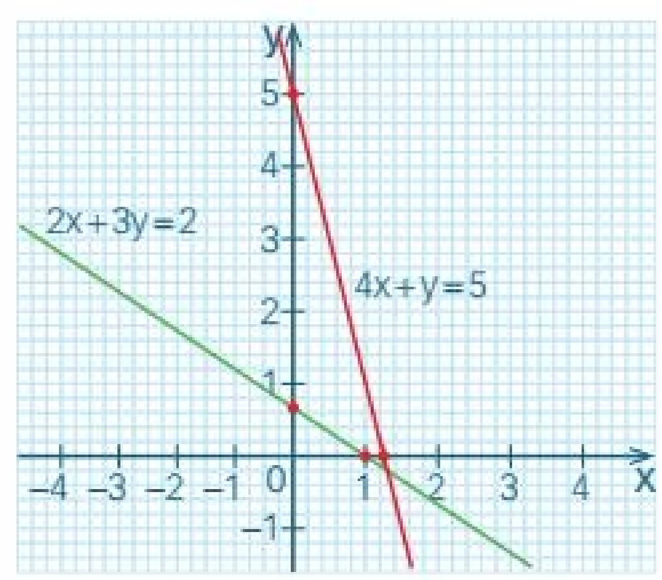
Sistemas lineares equivalentes

Dois sistemas lineares são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução, ou seja, admitem as mesmas soluções.

O sistema $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ -5y=1 \end{cases}$ é a forma escalonada do sistema $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 4x+y=5 \end{cases}$.

Por exemplo, os sistemas $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 4x+y=5 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ -5y=1 \end{cases}$ são equivalentes, pois possuem o mesmo conjunto solução. Observe:

- Representando graficamente o sistema $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 4x+y=5 \end{cases}$, observa-se que as retas correspondentes às suas equações são concorrentes, portanto o sistema possui uma única solução (SPD).



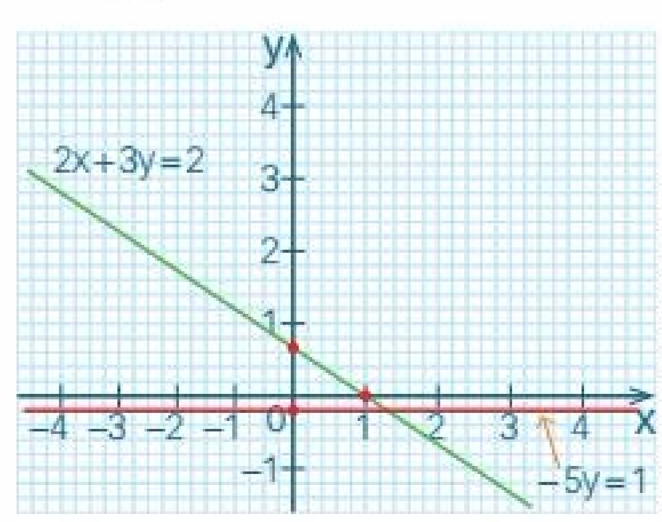
Resolvendo o sistema pelo método da substituição, temos da 1ª equação que $y=\frac{2-2x}{3}$. Substituindo na 2ª equação, obtemos:

$$4x+\left(\frac{2-2x}{3}\right)=5 \Rightarrow 12x-2x+2=15 \Rightarrow 10x=13 \Rightarrow x=\frac{13}{10}$$

Assim, $y=\dfrac{2-2\left(\frac{13}{10}\right)}{3}=-\frac{6}{30}=-\frac{1}{5}$.

Logo, o conjunto solução do sistema é $S=\left\{\left(\frac{13}{10},-\frac{1}{5}\right)\right\}$.

- Representando graficamente o sistema $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ -5y=1 \end{cases}$, observa-se que as retas correspondentes às suas equações são concorrentes, portanto o sistema possui uma única solução (SPD).



Ilustrações: Acervo da Editora

Determinaremos agora a solução do sistema. Da 2ª equação temos que $y = -\frac{1}{5}$. Substituindo o valor de y, na 1ª equação temos:

$$2x + 3\left(-\frac{1}{5}\right) = 2 \Rightarrow 2x = 2 + \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{13}{10}$$

Logo, o conjunto solução do sistema é dado por $S = \left\{\left(\frac{13}{10}, -\frac{1}{5}\right)\right\}$.

Note que os sistemas de fato possuem o mesmo conjunto solução. Consequentemente os sistemas são equivalentes.

Escalonamento

O método do escalonamento se baseia no fato de que todo sistema linear é equivalente ao sistema em sua forma escalonada. Partindo de um sistema em sua forma não escalonada obtém-se um sistema equivalente em sua forma escalonada por meio de uma sequência de operações elementares. Essas operações são:

- Trocar de posição as equações do sistema.
- Adicionar a uma equação do sistema uma outra equação do mesmo sistema multiplicada por um elemento não nulo.
- Multiplicar uma equação por um elemento não nulo.

Agora, vamos determinar a forma escalonada do sistema a seguir e resolvê-lo.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 2y - z = 8 \\ 3x + y - 2z = 9 \end{cases}$$

- Inicialmente, eliminamos a incógnita x na 2ª equação. Para isso, adicionamos, termo a termo, a 1ª equação multiplicada por -2 à 2ª equação.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \quad \cdot(-2) \\ 2x + 2y - z = 8 \quad \oplus \\ 3x + y - 2z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -3z = 4 \\ 3x + y - 2z = 9 \end{cases}$$

- Em seguida, eliminamos a incógnita x na 3ª equação. Para isso, adicionamos, termo a termo, a 1ª equação multiplicada por -3 à 3ª equação.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \quad \cdot(-3) \\ -3z = 4 \quad \oplus \\ 3x + y - 2z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -3z = 4 \\ -2y - 5z = 3 \end{cases}$$

- Para finalizar, trocamos a posição da 3ª equação pela 2ª, obtendo o sistema em sua forma escalonada:

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -3z = 4 \\ -2y - 5z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y - 5z = 3 \\ -3z = 4 \end{cases}$$

Para resolver o sistema em sua forma escalonada:

- inicialmente, resolvemos a 3ª equação e obtemos o valor de z:

$$-3z = 4 \Rightarrow z = -\frac{4}{3}$$

- substituindo z por $-\frac{4}{3}$ na 2ª equação, obtemos o valor de y:

$$-2y - 5\left(-\frac{4}{3}\right) = 3 \Rightarrow -2y + \frac{20}{3} = 3 \Rightarrow -2y = -\frac{11}{3} \Rightarrow y = \frac{11}{6}$$

- finalmente, substituindo z por $-\frac{4}{3}$ e y por $\frac{11}{6}$ na 1ª equação, obtemos o valor de x:

$$x + \frac{11}{6} - \frac{4}{3} = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

A cada etapa do escalonamento de um sistema, obtemos sistemas equivalentes.

Eliminação de Gauss

O método do escalonamento também é conhecido como método de eliminação de Gauss ou eliminação gaussiana, em homenagem ao matemático alemão Carl Friedrich Gauss, que utilizou o método como ferramenta em um de seus trabalhos.

Autor desconhecido. Séc. XIX. Gravura. Coleção particular

Carl F. Gauss (1777-1855)

Note que a única solução do sistema escalonado é a terna $\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{6}, -\frac{4}{3}\right)$. Como o sistema inicial e sua forma escalonada são equivalentes, ou seja, possuem o mesmo conjunto solução, temos que o conjunto solução do sistema inicial é $S = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{6}, -\frac{4}{3}\right)\right\}$.

As operações realizadas com as equações do sistema geram alterações apenas nos valores dos coeficientes das incógnitas e dos termos independentes. Assim, podemos escalonar um sistema utilizando apenas esses valores organizados em linhas e colunas. Essa disposição é denominada **matriz**.

Observe, por exemplo, como associar o sistema estudado anteriormente a uma matriz. Esse tipo de matriz é chamado de **matriz completa do sistema**.

Note que cada linha da matriz completa do sistema corresponde aos coeficientes das variáveis e ao termo independente da respectiva equação.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 2y - z = 8 \\ 3x + y - 2z = 9 \end{cases}$$

Sistema.

$$\begin{array}{cccc|c} \text{1ª coluna} & \text{2ª coluna} & \text{3ª coluna} & \text{4ª coluna} & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & -2 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{1ª linha} \\ \leftarrow \text{2ª linha} \\ \leftarrow \text{3ª linha} \end{array}$$

Matriz completa do sistema.

Com essa representação, podemos realizar as operações de escalonamento do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & -2 & 9 \end{bmatrix} \cdot(-2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 9 \end{bmatrix} \cdot(-3) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

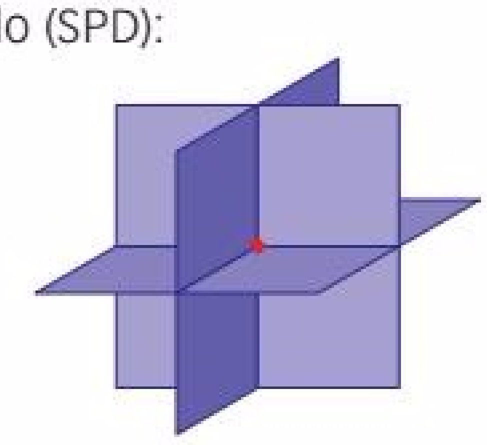
Reescrevendo o sistema, temos $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ \quad -2y - 5z = 3 \\ \qquad -3z = 4 \end{cases}$, cuja conjunto solução já determinado anteriormente $S = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{6}, -\frac{4}{3}\right)\right\}$.

Interpretação gráfica de um sistema linear 3x3

No estudo dos sistemas lineares 2×2, classificamos um sistema em SPD (Sistema linear possível e determinado), SPI (Sistema linear possível e indeterminado) ou SI (Sistema linear impossível), conforme o número de soluções. Além disso, cada equação do tipo $ax + by = c$ é representada por uma reta no plano.

No caso de um sistema linear 3×3, temos equações do tipo $ax + by + cz = d$, e cada uma delas é representada por um plano no espaço. Assim, um sistema 3×3 é representado por três planos no espaço, e para classificar o sistema analisamos as possíveis posições relativas entre os planos.

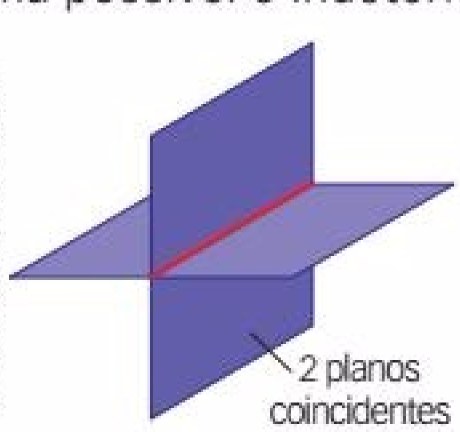
- Sistema possível e determinado (SPD):

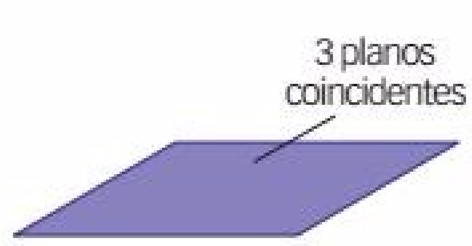


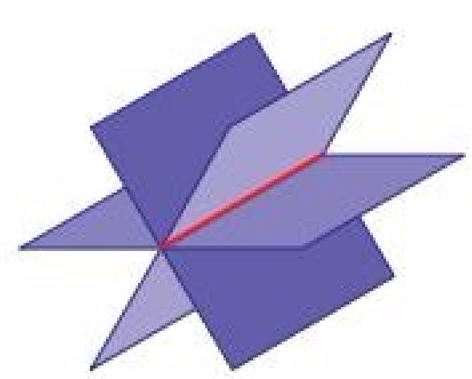
Os três planos se intersectam em um único ponto. O sistema tem solução única.

- Sistema possível e indeterminado (SPI):

Ilustrações: Acervo da Editora

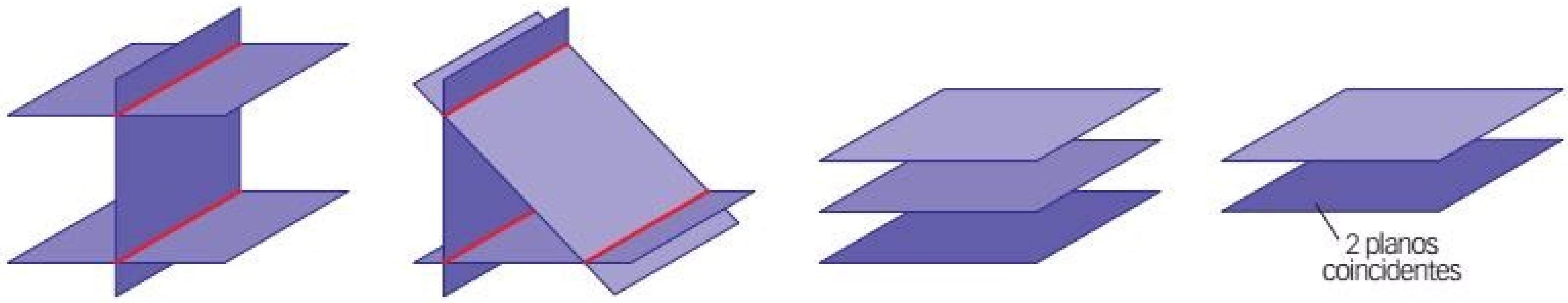






Os três planos se intersectam, mas em infinitos pontos. O sistema é possível e tem infinitas soluções.

- Sistema impossível (SI):



Ilustrações: Acervo da Editora

Os três planos não se intersectam simultaneamente. O sistema é impossível.

a) Qual é a principal diferença entre a representação geométrica de um sistema linear 2×2 e um sistema linear 3×3? Resposta esperada: A representação de um sistema linear 2×2 é feita por meio de um par de retas no plano e a de um sistema linear 3×3, por um trio de planos no espaço.

b) Em um sistema linear 2×2, quando as retas que representam as equações são paralelas, o sistema é SI. Em um sistema linear 3×3, se dois planos que representam as equações são paralelos, já podemos classificar esse sistema como SI? Justifique. Sim, pois não é possível obter um único ponto ou reta comum aos dois planos paralelos, independentemente do plano que representa uma terceira equação.

Atividades resolvidas

R3. Resolva cada sistema linear e classifique-o em SPD, SPI ou SI:

a) $\begin{cases} 2x-3y-z=4 \\ x+2y+z=3 \\ 3x-y-2z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+z=10 \\ x+y+2z=4 \\ 2x-y+3z=12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+3y-2z=11 \\ -x-2y+z=-8 \\ x+5y-4z=17 \end{cases}$

Resolução

a) Realizando as operações elementares, temos:

$$\begin{cases} 2x-3y-z=4 \\ x+2y+z=3 \\ 3x-y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=3 \quad \cdot(-2) \\ 2x-3y-z=4 \\ 3x-y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=3 \quad \cdot(-3) \\ -7y-3z=-2 \\ 3x-y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=3 \\ -7y-3z=-2 \quad \cdot(-1) \\ -7y-5z=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=3 \\ -7y-3z=-2 \\ -2z=-6 \end{cases}$$

Assim, como obtemos um sistema na forma escalonada, equivalente ao sistema inicial, segue que, resolvendo o sistema escalonado, determinamos a solução do sistema inicial.

Obtemos o valor de z a partir da 3ª equação: $-2z=-6 \Rightarrow \boxed{z=3}$

Substituindo z por 3 na 2ª equação, obtemos o valor de y: $-7y-3z=-2 \Rightarrow -7y-3\cdot3=-2 \Rightarrow \boxed{y=-1}$

Agora, substituindo z por 3 e y por -1 na 1ª equação, obtemos o valor de x:

$$x+2y+z=3 \Rightarrow x+2\cdot(-1)+3=3 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Portanto, o conjunto solução do sistema é $S=\{(2,-1,3)\}$. Assim, o sistema é possível e determinado (SPD).

b) Utilizando o método de escalonamento para resolver o sistema, temos: Professor(a): Converse com os alunos a respeito das operações de escalonamento realizadas.

$$\begin{cases} x-2y+z=10 \quad \cdot(-1) \\ x+y+2z=4 \\ 2x-y+3z=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=10 \quad \cdot(-2) \\ 3y+z=-6 \\ 2x-y+3z=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=10 \\ 3y+z=-6 \quad \cdot(-1) \\ 3y+z=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=10 \\ 3y+z=-6 \\ 0y+0z=-2 \end{cases}$$

Note que, para quaisquer valores de y e z, a 3ª equação do sistema escalonado não é verdadeira.

Portanto, o conjunto solução do sistema é $S=\varnothing$, ou seja, o sistema não possui solução. Assim, o sistema é impossível (SI).

c) Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x+3y-2z=11 \\ -x-2y+z=-8 \\ x+5y-4z=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=11 \quad \cdot(-1) \\ y-z=3 \\ x+5y-4z=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=11 \\ y-z=3 \quad \cdot(-2) \\ 2y-2z=6 \end{cases} \Rightarrow$$

Professor(a): Diga aos alunos que o sistema apresentado no item c pode ser escrito de maneira que qualquer uma das incógnitas seja a incógnita livre.

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=11 \\ y-z=3 \\ 0z=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+3y-2z=11 \\ y-z=3 \end{cases}$$

Obtemos um sistema escalonado que possui mais incógnitas que equações com pelo menos um coeficiente não nulo em cada equação. Nesse caso, como a diferença entre a quantidade de incógnitas e equações é 1 $(3-2=1)$, o sistema terá uma incógnita livre, isto é, uma incógnita à qual podemos atribuir livremente qualquer valor real. No sistema acima, a incógnita livre é z, pois qualquer número real satisfaz a equação $0z=0$.

Considerando $z=k$, com $k \in \mathbb{R}$, segue que: $\begin{cases} x+3y-2k=11 \\ y-k=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2k=11 \\ y=3+k \end{cases}$

Substituindo y por $3+k$ em $x+3y-2k=11$, determinamos o valor de x:

$$x+3\cdot(3+k)-2k=11 \Rightarrow x+9+3k-2k=11 \Rightarrow x=11-9-k \Rightarrow x=2-k$$

Portanto, o conjunto solução do sistema é $S=\{(2-k, 3+k, k), \text{ com } k \in \mathbb{R}\}$. Assim, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

Considerando $k=-2$, determine uma das soluções desse sistema. $(4, 1, -2)$

R4. Resolva o sistema $\begin{cases} a+b-2c-3d=0 \\ a-b+c-d=4 \\ 2a+2b+3c+d=7 \\ 3a+2b-c+4d=-3 \end{cases}$.

Resolução

Escrevendo a matriz completa do sistema e realizando as operações de escalonamento, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot(-1) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot(-2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot(-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 5 & 13 & -3 \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 12 & -5 \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{2} & -\frac{17}{2} \end{bmatrix}$$

Reescrevendo o sistema, temos $\begin{cases} a+b-2c-3d=0 \\ -2b+3c+2d=4 \\ 7c+7d=7 \\ \frac{17}{2}d=-\frac{17}{2} \end{cases}$. Segue que:

- O valor de d é obtido a partir da 4ª equação: $\frac{17}{2}d=-\frac{17}{2} \Rightarrow \boxed{d=-1}$
- Substituindo d por -1 na 3ª equação, obtemos o valor de c: $7c+7d=7 \Rightarrow 7c+7\cdot(-1)=7 \Rightarrow \boxed{c=2}$
- Agora, substituindo d por -1 e c por 2 na 2ª equação, obtemos o valor de b:

$$-2b+3c+2d=4 \Rightarrow -2b+3\cdot 2+2\cdot(-1)=4 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

- Por fim, substituindo d por -1, c por 2 e b por 0 na 1ª equação, obtemos o valor de a:

$$a+b-2c-3d=0 \Rightarrow a+0-2\cdot 2-3\cdot(-1)=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Portanto, o conjunto solução do sistema é $S=\{(1,0,2,-1)\}$.

Atividades ▸ Anote as respostas no caderno.

18. Quais dos sistemas lineares a seguir são equivalentes a $\begin{cases} x+2y=0 \\ -3x+y=-7 \end{cases}$? c; e

a) $\begin{cases} x+y=4 \\ x+2y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x+2y=3 \\ x-y=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x+y=-3 \\ 5x-y=11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-\dfrac{y}{3}=2 \\ 2x+2y=-1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-y=2 \\ x+4y=-2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 4x+5y=14 \\ x-3y=-6 \end{cases}$

19. Qual sistema está na forma escalonada? Justifique sua resposta. Professor(a): Veja a resposta desta atividade no final do livro.

a) $\begin{cases} r-s+2t=3 \\ 2r-5t=-4 \\ -6s+t=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4t-4s+t=13 \\ -2s-6t=-9 \\ -4t=0 \end{cases}$

*solução geral: $S=\left\{\left(\dfrac{7+7k}{2}, \dfrac{1-k}{2}, k\right), \text{com } k \in \mathbb{R}\right\}$; SPI

20. Resolva cada sistema linear e classifique-os em SPD, SPI ou SI.

a) $\begin{cases} x+2y-3z=-8 \\ -y+z=3 \\ 3y-z=-5 \end{cases}$

$S=\{(0,-1,2)\}$; SPD

b) $\begin{cases} 5x+4y-z=10 \\ 2x+3z=-4 \\ 2x+3z=7 \end{cases}$

$S=\varnothing$; SI

c) * $\begin{cases} x+y-3z=4 \\ 2y+z=1 \\ -2x+2y+8z=6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+y+4z=3 \\ -4x+y-7z=2 \\ -6x+3y-8z=5 \end{cases}$

$S=\{(2,3,-1)\}$; SPD

21. (Unicamp) Considere o sistema linear nas variáveis reais x, y, z e w, $\begin{cases} x-y=1 \\ y+z=2 \\ w-z=3 \end{cases}$. Logo, a soma $x+y+z+w$ é igual a: d

a) –2 b) 0 c) 6 d) 8

DESAFIO

22. Resolva o sistema $\begin{cases} p+q+r+s=2 \\ -2p+7q-11r+2s=0 \\ p-2q+5r-s=2 \\ 3p-3q+10r+s=6 \end{cases}$ por escalonamento.

$S=\{(-3,2,2,1)\}$

23. Um operário se desloca de casa ao seu trabalho de motocicleta, mas nos dias chuvosos ele utiliza o transporte público. Quando utiliza motocicleta ele gasta, em média, R$ 1,50 a cada dia; e, com o transporte público, gasta R$ 6,00 ao dia. Em determinado mês, em que trabalhou 20 dias, esse operário gastou R$ 43,50 para se deslocar ao trabalho. Por quantos dias ele utilizou a motocicleta para ir ao trabalho? 17 dias

24. (UFPE) Uma fábrica de automóveis utiliza três tipos de aço, A_1, A_2 e A_3, na construção de três tipos de carros, C_1, C_2 e C_3. A quantidade dos três tipos de aço, em toneladas, usados na confecção dos três tipos de carro, está no quadro a seguir:

	C_1	C_2	C_3
A_1	2	3	4
A_2	1	1	2
A_3	3	2	1

Se foram utilizadas 26 toneladas de aço do tipo A_1, 11 toneladas do tipo A_2 e 19 toneladas do tipo A_3, qual o total de carros construídos (dos tipos C_1, C_2 ou C_3)? 9 carros

25. (Unicamp) Considere o sistema linear nas variáveis x, y e z

$$\begin{cases} x+2y+3z=20 \\ 7x+8y-mz=26 \end{cases}$$

onde **m** é um número real. Sejam $a<b<c$ números inteiros consecutivos, tais que $(x,y,z)=(a,b,c)$ é uma solução desse sistema. O valor de **m** é igual a: a

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0

26. Para liquidar o estoque, uma papelaria montou quatro pacotes com alguns materiais escolares a preços promocionais.

A	B
1 caderno 1 caneta 1 borracha 1 lápis	1 caderno 1 caneta 2 borrachas 2 lápis
R$ 5,00	R$ 6,00

C	D
1 caderno 2 canetas 1 borracha 3 lápis	2 cadernos 1 caneta 2 borrachas 2 lápis
R$ 7,00	R$ 9,00

Supondo que o preço de cada item seja o mesmo em todos os pacotes, qual é o valor de uma unidade de cada um dos itens promocionais que compõem o pacote de materiais escolares?
caderno: R$ 3,00; caneta: R$ 1,00; borracha: R$ 0,50; lápis: R$ 0,50

Nem sempre o preço de produtos vendidos em pacotes com mais de um item é vantajoso para o consumidor.

27. (Uerj) Uma família comprou água mineral em embalagens de 20 L, de 10 L e de 2 L. Ao todo, foram comprados 94 L de água, com o custo total de R$ 65,00. Veja na tabela os preços da água por embalagem.

Nessa compra, o número de embalagens de 10 L corresponde ao dobro do número de embalagens de 20 L, e a quantidade de embalagens de 2 L corresponde a **n**.

O valor de **n** é um divisor de: c

a) 32 b) 65 c) 77 d) 81

Divisor: valor que divide outro em partes inteiras sem que haja resto.

Preço da água mineral

Volume da embalagem (L)	Preço (R$)
20	10,00
10	6,00
2	3,00

Fonte: Supermercado.

DESAFIO

28. Ao misturar 8 litros de suco de laranja com 2 litros de suco de acerola, o comerciante obtém um tipo de suco que é vendido por R$ 3,40 o litro. Porém, se ele misturar 1 litro de suco de laranja com 4 litros de suco de acerola, obtém outro tipo de suco, que é vendido por R$ 4,60 o litro. Qual é o preço de 1 litro de suco de laranja? E de um litro do suco de acerola? R$ 3,00; R$ 5,00

Escalonamento no GeoGebraPrim

O GeoGebraPrim realiza o escalonamento de um sistema de equações lineares, auxiliando na resolução do sistema. Observe, por exemplo, a resolução do sistema a seguir:

Inicialmente, escrevemos a matriz completa do sistema.

$$\begin{cases} x+3y-3z-5w=-36 \\ -2x+8y-4z+w=-17 \\ 5x+7y+3z=7 \\ 3x-8y-2z+6w=35 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & -5 & -36 \\ -2 & 8 & -4 & 1 & -17 \\ 5 & 7 & 3 & 0 & 7 \\ 3 & -8 & -2 & 6 & 35 \end{bmatrix}}_{\text{matriz completa do sistema}}$$

GEOGEBRAPRIM

Programa de computador gratuito com recursos dinâmicos voltado para a aprendizagem de Matemática.

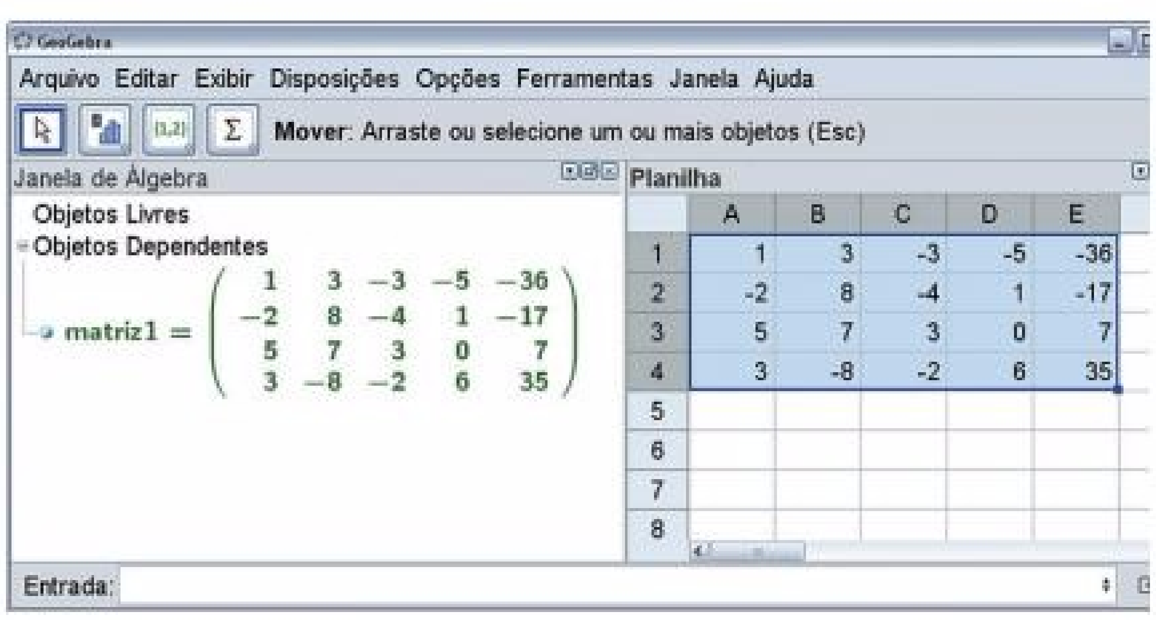
Licença: Pode ser copiado, distribuído e transmitido livremente, para fins não comerciais.

Onde obter: <www.geogebra.org>

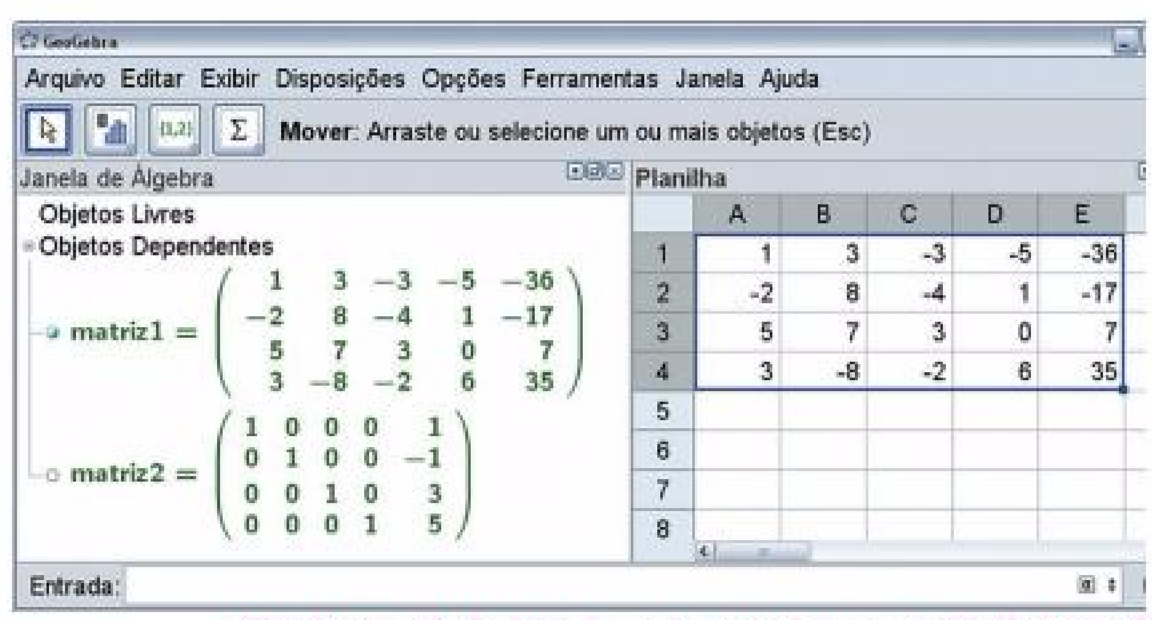
Versão utilizada: 4.0.41.0

Passo 1: Execute o GeoGebraPrim e, no menu **Exibir**, marque somente as opções **Janela de Álgebra** e **Planilha**. Digite os elementos da matriz completa do sistema na janela **Planilha**, da célula A1 até E4.

Passo 2: Selecione as células de A1 até E4. Clique com o botão direito do *mouse* sobre a seleção e, em seguida, clique em **Criar** e em **Matriz**.



Passo 3: No campo **Entrada**, digite o comando **MatrizEscalonada[matriz1]** e, em seguida, pressione *Enter*.



Imagens: GeoGebra v. 4.0.41.0. Por International GeoGebra Institute

Reescrevendo o sistema, temos $\begin{cases} 1x+0y+0z+0w=1 \\ 0x+1y+0z+0w=-1 \\ 0x+0y+1z+0w=3 \\ 0x+0y+0z+1w=5 \end{cases}$.

Segue que $x=1$, $y=-1$, $z=3$ e $w=5$.

Portanto, o conjunto solução do sistema é $S=\{(1,-1,3,5)\}$.

Agora, classifique cada sistema linear como SPD, SPI ou SI, e escreva o conjunto solução daqueles classificados como SPD.*

a) $\begin{cases} 5x+4y=1 \\ 2x-2y=4 \end{cases}$ SPD; $S=\{(1,-1)\}$

b) $\begin{cases} 3x+6y-9z=-48 \\ -5x+9y-3z=-49 \\ x+2y-3z=-16 \end{cases}$ SPI

c) $\begin{cases} x+7y-9z-5w=28 \\ 8x+6y-5z-6w=22 \\ -8x+2y-4z-5w=27 \\ 4x-5y+z+4w=-26 \end{cases}$ SPD; $S=\{(-1,2,0,-3)\}$

*Professor(a): Outros itens que podem ser trabalhados são:

d) $\begin{cases} 8x-6y=14 \\ -4x+3y=7 \end{cases}$; SI

e) $\begin{cases} -4x-y-4z+7w=19 \\ -3x-5y+4w=19 \\ 3x+3y-3z+5w=-2 \\ x+3y+6z+w=3 \end{cases}$; SPD; $S=\{(-2,-1,1,2)\}$

f) $\begin{cases} -6x-8z-w=9 \\ -4x-4y+6z+10w=-34 \\ 7x-7y+7z-9w=6 \\ 2x+2y-3z-5w=17 \end{cases}$; SPI

MATRIZES

Até agora resolvemos sistemas 2×2 por diferentes métodos, como o método da substituição. Resolvemos também sistemas 3×3 e 4×4 pelo método de escalonamento.

Mas esses não são os únicos métodos para a resolução de um sistema linear. Porém, antes de estudarmos novos métodos, estudaremos as matrizes e suas operações básicas, para que na próxima unidade possamos utilizá-las como ferramentas na resolução de sistemas lineares.

Além de ser aplicado na resolução de sistemas, o estudo de matrizes possui outras aplicações, e algumas delas serão abordadas nesta unidade.

Observe a tabela na planilha eletrônica a seguir.

	A	B	C	D	E
1	Notas dos alunos em Matemática (2016)				
2	Nome	1º Bimestre	2º Bimestre	3º Bimestre	
3	Adriano	8,5	7,9	7,5	
4	Camila	9,3	8,5	7,3	
5	Juliano	8,2	9,0	8,5	
6	Maria	7,9	8,2	9,5	
7					

Gilberto Alicio

Fonte: Secretaria da escola.

Uma tabela desse tipo, com os valores organizados em 4 linhas e 3 colunas, é denominada matriz de ordem 4×3 (lemos "quatro por três") e pode ser representada, simplificadamente, por:

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} \text{1ª coluna} & \text{2ª coluna} & \text{3ª coluna} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 8{,}5 & 7{,}9 & 7{,}5 \\ 9{,}3 & 8{,}5 & 7{,}3 \\ 8{,}2 & 9{,}0 & 8{,}5 \\ 7{,}9 & 8{,}2 & 9{,}5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{1ª linha} \\ \leftarrow \text{2ª linha} \\ \leftarrow \text{3ª linha} \\ \leftarrow \text{4ª linha} \end{array} \end{array}$$

Uma matriz de ordem (ou tipo) $m \times n$, com m e n naturais e não nulos, é uma lista com $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas.

Planilha eletrônica

Uma planilha eletrônica é um programa de computador em que as informações (textos, números ou fórmulas pré-definidas pelo programa) são registradas em células organizadas em linhas e colunas, como em uma matriz. Além de ser bastante utilizada para controle de gastos, aplicações financeiras e pequenos bancos de dados, nela também podem ser trabalhadas as operações com matrizes.

Exemplos:

- Matriz de ordem 3×2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Matriz de ordem 1×6:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

- Matriz de ordem 2×4:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de ordem 3×1:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Uma matriz que possui apenas uma linha é denominada **matriz linha**. Já uma matriz que possui apenas uma coluna é denominada **matriz coluna**.

Indicamos uma matriz por uma letra maiúscula e cada um dos seus elementos por uma letra minúscula acompanhada de dois índices: o primeiro corresponde à linha, e o segundo corresponde à coluna em que o elemento está posicionado. Convenciona-se que a ordenação das linhas seja dada de cima para baixo, e das colunas da esquerda para a direita.

Por exemplo, na matriz que representa as notas dos alunos em Matemática, temos:

Elemento da 2ª linha e 2ª coluna, o qual indicamos por a_{22} (lemos "**a** dois dois").

Elemento da 1ª linha e 3ª coluna, o qual indicamos por a_{13} (lemos "**a** um três").

$$M = \begin{bmatrix} 8{,}5 & 7{,}9 & 7{,}5 \\ 9{,}3 & 8{,}5 & 7{,}3 \\ 8{,}2 & 9{,}0 & 8{,}5 \\ 7{,}9 & 8{,}2 & 9{,}5 \end{bmatrix}$$

Elemento da 3ª linha e 1ª coluna, o qual indicamos por a_{31} (lemos "**a** três um").

Elemento da 4ª linha e 3ª coluna, o qual indicamos por a_{43} (lemos "**a** quatro três").

Uma matriz **A** de ordem $m \times n$ é representada da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O elemento a_{ij} está posicionado na i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz. De maneira abreviada, podemos escrever a matriz **A** por: $A = (a_{ij})_{m \times n}$, com i e j números naturais tal que $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$

Igualdade de matrizes

Se duas matrizes, **A** e **B**, de mesma ordem, têm os elementos de mesma posição iguais, dizemos que essas matrizes são iguais, ou seja, $A = B$. Consequentemente, se duas matrizes, **A** e **B**, são de ordens diferentes ou se pelo menos um elemento de **A** é diferente do elemento de mesma posição de **B**, então dizemos que essas matrizes são diferentes, isto é, $A \neq B$. Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & \frac{10}{2} \\ \frac{6}{2} & \frac{-2}{2} \\ \frac{8}{2} & \frac{0}{2} \end{bmatrix}$$

As matrizes são iguais, pois são de mesma ordem e os elementos correspondentes são iguais.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

As matrizes são diferentes, pois são de ordens diferentes.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

As matrizes são diferentes, pois, embora tenham a mesma ordem, nem todos os elementos correspondentes são iguais, pois $e_{21} \neq f_{21}$.

Professor(a): Verifique se os alunos perceberam que os elementos da matriz **B** podem ser simplificados.

Algumas matrizes especiais

Existem matrizes que recebem nomes específicos. Observe algumas delas a seguir.

Matriz quadrada

É a matriz na qual o número de linhas é igual ao de colunas, ou seja, é uma matriz de ordem $n \times n$. Nesse caso, dizemos simplesmente matriz quadrada de ordem n e indicamos por A_n.

Nesse tipo de matriz, os elementos a_{ij} tais que $i = j$ formam a **diagonal principal**. Já os elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$ formam a **diagonal secundária**.

Exemplos:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 15 & -10 \end{bmatrix}$$

diagonal secundária — diagonal principal

Matriz quadrada de ordem 2.

$$B_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 11 \\ 5 & 2 & 6 \\ 7 & 15 & 25 \end{bmatrix}$$

diagonal secundária — diagonal principal

Matriz quadrada de ordem 3.

$$C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonal secundária — diagonal principal

Matriz quadrada de ordem 4.

Matriz identidade

É a matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são iguais a 0. Indicamos uma matriz identidade de ordem n por I_n.

Exemplos:

$$I_1 = [1]$$

Matriz identidade de ordem 1.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz identidade de ordem 2.

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz identidade de ordem 4.

Matriz nula

É a matriz cujos elementos são todos iguais a zero. Indicamos uma matriz nula de ordem $m \times n$ por $0_{m\times n}$, ou simplesmente por 0_n, caso a matriz nula seja quadrada.

Exemplos:

$$0_{1\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz nula de ordem 1×2.

$$0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz nula de ordem 2.

$$0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz nula de ordem 2×3.

Matriz transposta

Dada uma matriz **A** de ordem $m \times n$, denomina-se **matriz transposta** de **A** a matriz de ordem $n \times m$, a qual indicamos por A^t, de tal modo que as linhas de **A** são ordenadamente iguais às colunas de A^t. Em outras palavras, é a matriz que obtemos trocando ordenadamente as linhas pelas colunas de uma matriz.

Exemplos:

$$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t_{1\times 4} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

No caso em que a matriz quadrada **A** é igual à sua transposta A^t, isto é $A = A^t$, dizemos que **A** é uma **matriz simétrica**. Por exemplo:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Note que os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são iguais.

Matriz triangular

É a matriz quadrada de ordem **n** cujos elementos acima ou abaixo da diagonal principal são nulos.

Professor(a): Uma matriz triangular pode ser classificada como matriz triangular superior, quando os elementos nulos estão abaixo da diagonal principal, ou matriz triangular inferior, quando os elementos nulos estão acima da diagonal principal.

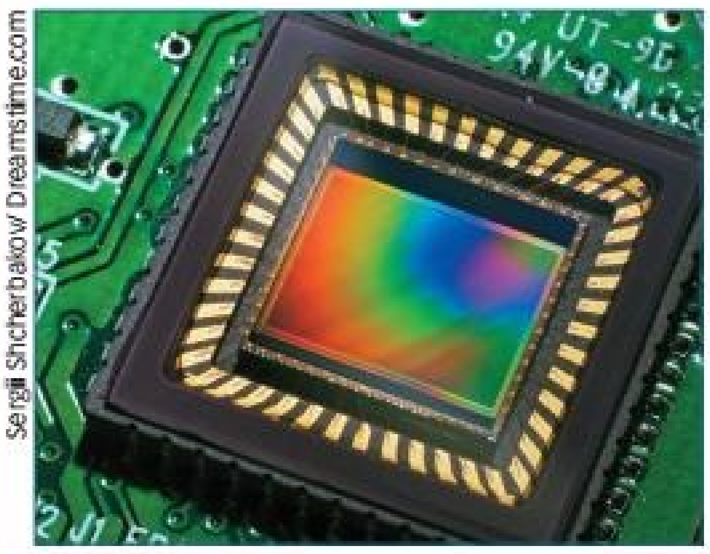
Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

COMO FUNCIONA A câmera fotográfica digital

Até a década de 1990, reinavam no mercado as câmeras fotográficas analógicas. A partir dessa década elas foram perdendo espaço para as popularizadas câmeras fotográficas digitais.

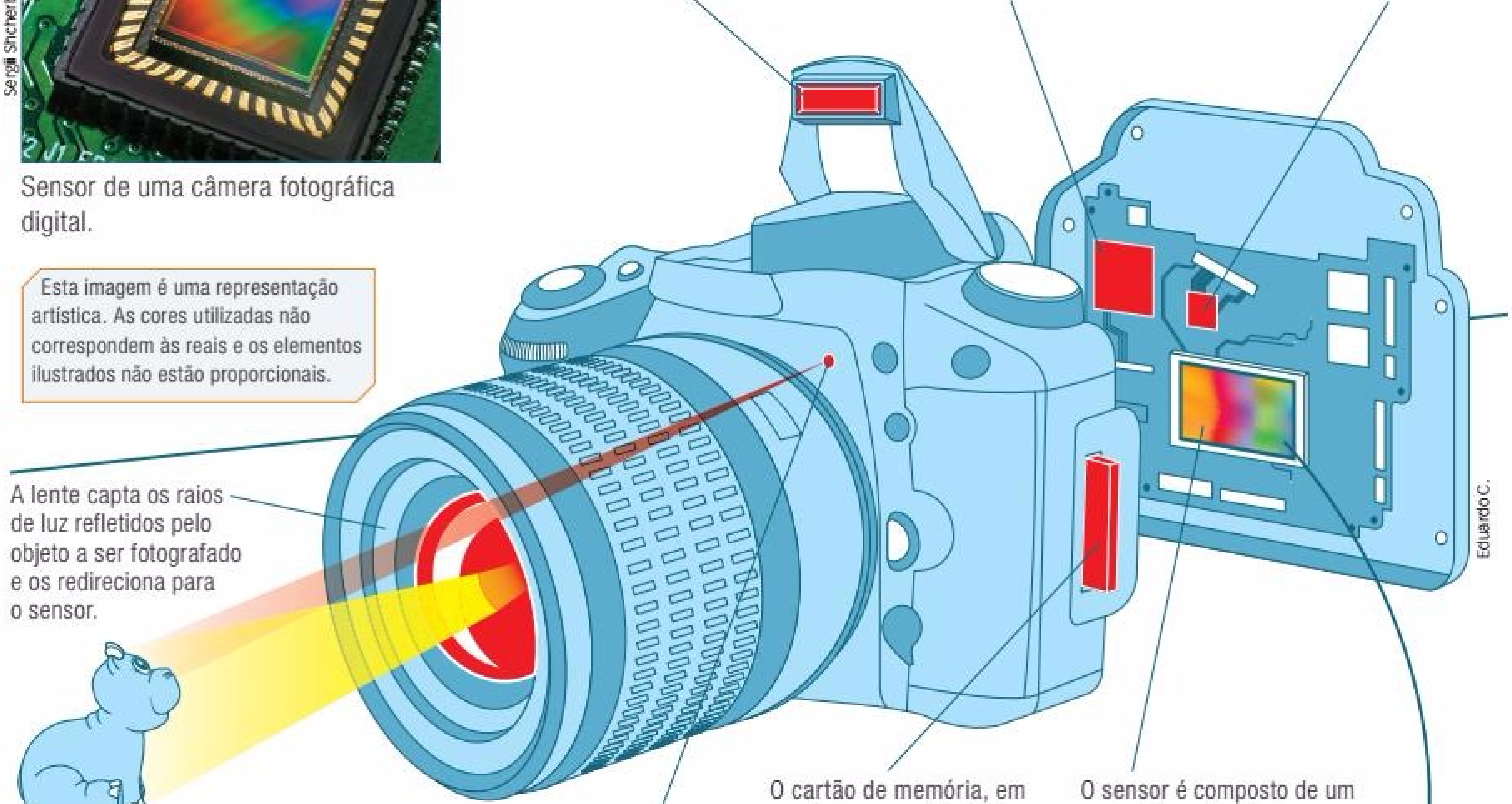
Nas analógicas, a luz entra através da lente e se focaliza em um filme fotográfico virgem. A luz reage com componentes químicos presentes no filme, possibilitando a obtenção da imagem. Nas digitais, o processo é semelhante, porém, em vez de um filme, a luz é convertida em cargas elétricas em um sensor composto de um material semicondutor. Observe alguns detalhes de uma câmera fotográfica digital.



Sergii Shcherbakow/Dreamstime.com

Sensor de uma câmera fotográfica digital.

Esta imagem é uma representação artística. As cores utilizadas não correspondem às reais e os elementos ilustrados não estão proporcionais.



Eduardo C.

Um *megapixel* corresponde a um milhão de *pixels*.

Para uma foto de boa qualidade, são necessários foco coerente, correção de cores e brilho apropriado. Em geral, as câmeras profissionais nesses quesitos são muito superiores às compactas. Suas principais vantagens são: lentes de melhor qualidade, sensor e microprocessador mais robustos e maior controle sobre as funções da câmera.

Eduardo Carriça dos Santos/ ASC Imagens

Em geral, quanto maior o número de *pixels* no sensor, maior será a **imagem** final obtida pela câmera e maior sua resolução, permitindo ampliações com boa qualidade.

Professor(a): Cabe acrescentar que maior resolução não implica em fotos melhores. A resolução está relacionada à ampliação que será feita na imagem final. Para se ter uma ideia, uma fotografia com 15 cm × 10 cm precisa de apenas 1 MP para ser impressa com qualidade. A olho nu ela não apresentaria diferenças significativas se comparada com uma fotografia com o mesmo tamanho e com, por exemplo, 5 MP.

Atividades resolvidas

R5. Explicite a matriz quadrada **A** de ordem 2, tal que $A_{ij} = i + 3j$.

Resolução

Como a matriz **A** é quadrada de ordem 2, segue que:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Podemos então determinar os elementos que constituem a matriz **A** a partir da lei de formação, $A_{ij} = i + 3j$:

- $a_{11} = 1 + 3 \cdot 1 = 4$
- $a_{21} = 2 + 3 \cdot 1 = 5$
- $a_{12} = 1 + 3 \cdot 2 = 7$
- $a_{22} = 2 + 3 \cdot 2 = 8$

Portanto, $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$.

R6. Explicite a matriz $B = (b_{ij})_{2\times 3}$, tal que $b_{ij} = \begin{cases} i^2, \text{ se } i < j \\ 0, \text{ se } i = j \\ j^2, \text{ se } i > j \end{cases}$.

Resolução

Como a matriz **B** é de ordem 2×3, temos:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

Como são três sentenças que definem a matriz **B**, vamos determinar cada elemento conforme sua sentença correspondente:

- se $i < j$:
  $b_{12} = 1^2 = 1$
  $b_{13} = 1^2 = 1$
  $b_{23} = 2^2 = 4$
- se $i = j$:
  $b_{11} = 0$
  $b_{22} = 0$
- se $i > j$:
  $b_{21} = 1^2 = 1$

Portanto, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

R7. Determine x e y de modo que a igualdade de matrizes $\begin{bmatrix} 2x-7 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & y+9 \end{bmatrix}$ seja verdadeira.

Resolução

Basta determinar x e y, de modo que os elementos de mesma posição sejam iguais, e consequentemente as matrizes também:

- $2x - 7 = -3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \boxed{x = 2}$
- $y + 9 = 5 \Rightarrow \boxed{y = -4}$

Note que, substituindo x por 2 em $2x - 7$ e y por -4 em $y + 9$, concluímos que a igualdade inicial é verdadeira:

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Portanto, $x = 2$ e $y = -4$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

29. Escreva dois exemplos, diferentes dos já apresentados, de matriz: Resposta pessoal.

a) linha.
b) quadrada.
c) transposta.
d) simétrica.
e) identidade.
f) nula.
g) triangular.

30. Associe cada matriz a sua transposta escrevendo a letra e o número romano correspondentes.
a-II; b-I; c-III

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

I) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

II) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

III) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

31. Dada a matriz **A**, responda.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & \pi & 0 & \frac{7}{8} \\ 1,5 & 8 & 19 & \sqrt{3} & -4 \end{bmatrix}$$

a) Qual é a ordem dessa matriz? 2×5

b) Que elemento está na posição:

- a_{13}? π
- a_{24}? $\sqrt{3}$
- a_{21}? 1,5
- a_{12}? -6

c) Qual é a posição ocupada pelo elemento:

- π? a_{13}
- -4? a_{25}
- 8? a_{22}
- $\frac{7}{8}$? a_{15}

d) Qual será a ordem da matriz **A** transposta? 5×2

32. Observe a tabela.

Cinco primeiros colocados ao final do campeonato brasileiro de futebol da série A, em 2015

Equipe	Vitórias	Empates	Derrotas
Corinthians/SP	24	9	5
Atlético/MG	21	6	11
Grêmio/RS	20	8	10
São Paulo/SP	18	8	12
Internacional/RS	17	9	12

Fonte: Confederação Brasileira de Futebol. Disponível em: <www.cbf.com.br/competicoes/brasileiro-serie-a/classificacao/2015#.Vp0Jc5orIdU>. Acesso em: 18 jan. 2016.

O campeonato brasileiro de futebol da série A de 2015 foi disputado por 20 equipes.

Professor(a): Veja a resposta desta atividade no final do livro.

a) Escreva uma matriz **F** que represente os dados da tabela.

b) Determine F^t.

c) Qual é a posição do elemento da matriz **F** que representa a quantidade de empates da equipe do São Paulo/SP? E na matriz F^t?

d) Escreva a matriz transposta de **F** na forma de tabela.

33. Determine a palavra que se obtém ao organizar os elementos da matriz **A** da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} R & T & N & C \\ G & U & A & O \\ L & E & D & Z \\ B & V & J & I \end{bmatrix}$$

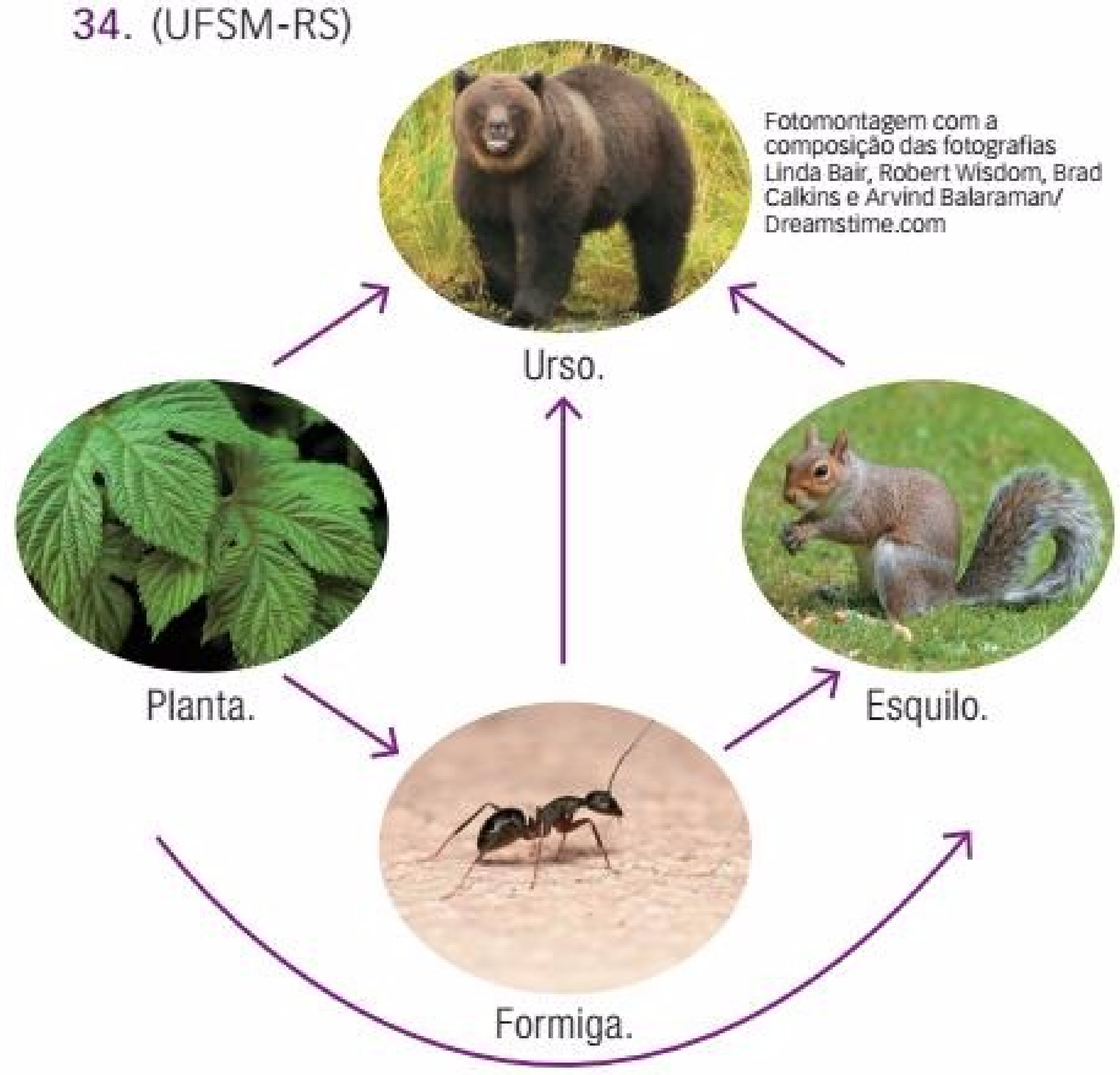
a) $a_{22}a_{42}a_{23}$ UVA

b) $a_{14}a_{23}a_{43}a_{22}$ CAJU

c) $a_{21}a_{24}a_{44}a_{23}a_{41}a_{23}$ GOIABA

d) $a_{23}a_{41}a_{23}a_{14}a_{23}a_{12}a_{32}$ ABACATE

34. (UFSM-RS)



Fotomontagem com a composição das fotografias Linda Bair, Robert Wisdom, Brad Calkins e Arvind Balaraman/ Dreamstime.com

Urso adulto: de 1,8 m a 2 m de comprimento.
Esquilo adulto: de 20 cm a 31,5 cm de corpo e 20 cm a 31 cm de cauda.
Formiga adulta: de 6 mm a 14 mm de comprimento.

O diagrama dado representa a cadeia alimentar simplificada de um determinado ecossistema. As setas indicam a espécie de que a outra espécie se alimenta.

Atribuindo valor 1 quando uma espécie se alimenta de outra, e zero quando ocorre o contrário, tem-se o seguinte quadro:

	Urso	Esquilo	Inseto	Planta
Urso	0	1	1	1
Esquilo	0	0	1	1
Inseto	0	0	0	1
Planta	0	0	0	0

A matriz $A = (a_{ij})_{4\times4}$, associada ao quadro, possui a seguinte lei de formação: c

a) $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \le j \\ 1, \text{ se } i > j \end{cases}$

b) $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i = j \\ 1, \text{ se } i \ne j \end{cases}$

c) $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \ge j \\ 1, \text{ se } i < j \end{cases}$

d) $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \ne j \\ 1, \text{ se } i = j \end{cases}$

e) $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i < j \\ 1, \text{ se } i > j \end{cases}$

35. Explicite a matriz. Professor(a): Veja a resposta desta atividade no final do livro.

a) $A = (a_{ij})_{1\times3}$, tal que $a_{ij} = i + j$

b) $B = (b_{ij})_{2\times2}$, tal que $b_{ij} = 2i - j$

c) $C = (c_{ij})_{3\times2}$, tal que $c_{ij} = \frac{i}{j}$

d) $D = (d_{ij})_{4\times1}$, tal que $d_{ij} = \begin{cases} \sqrt{i}, \text{ se } i > j \\ (i+j)^2, \text{ se } i \le j \end{cases}$

36. Determine os valores das incógnitas para que as igualdades de matrizes sejam verdadeiras.

a) $\begin{bmatrix} -5 & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & x+1 \end{bmatrix}$ $x = 1$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3-2y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z-2 \\ y & 0 \end{bmatrix}$ $y = 1;\ z = 0$

c) $\begin{bmatrix} 1 & \operatorname{sen}\alpha \\ \cos\beta & 0 \\ \operatorname{tg}\delta & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ -1 & 0 \\ \operatorname{tg}\delta & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

Professor(a): Veja a resposta deste item no final do livro.

37. (Ufla-MG) Matrizes são arranjos retangulares de números e possuem inúmeras utilidades. Considere seis cidades, **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F**; vamos indexar as linhas e colunas de uma matriz 6×6 por essas cidades e colocar 1 na posição definida pela linha **X** e coluna **Y**, se a cidade **X** possui uma estrada que a liga diretamente à cidade **Y**, e vamos colocar 0 (zero), caso **X** não esteja ligada diretamente por uma estrada à cidade **Y**. Colocaremos também 1 na diagonal principal.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Indique a alternativa INCORRETA. b

a) É possível ir, passando por outras cidades, da cidade **C** até a cidade **E**.

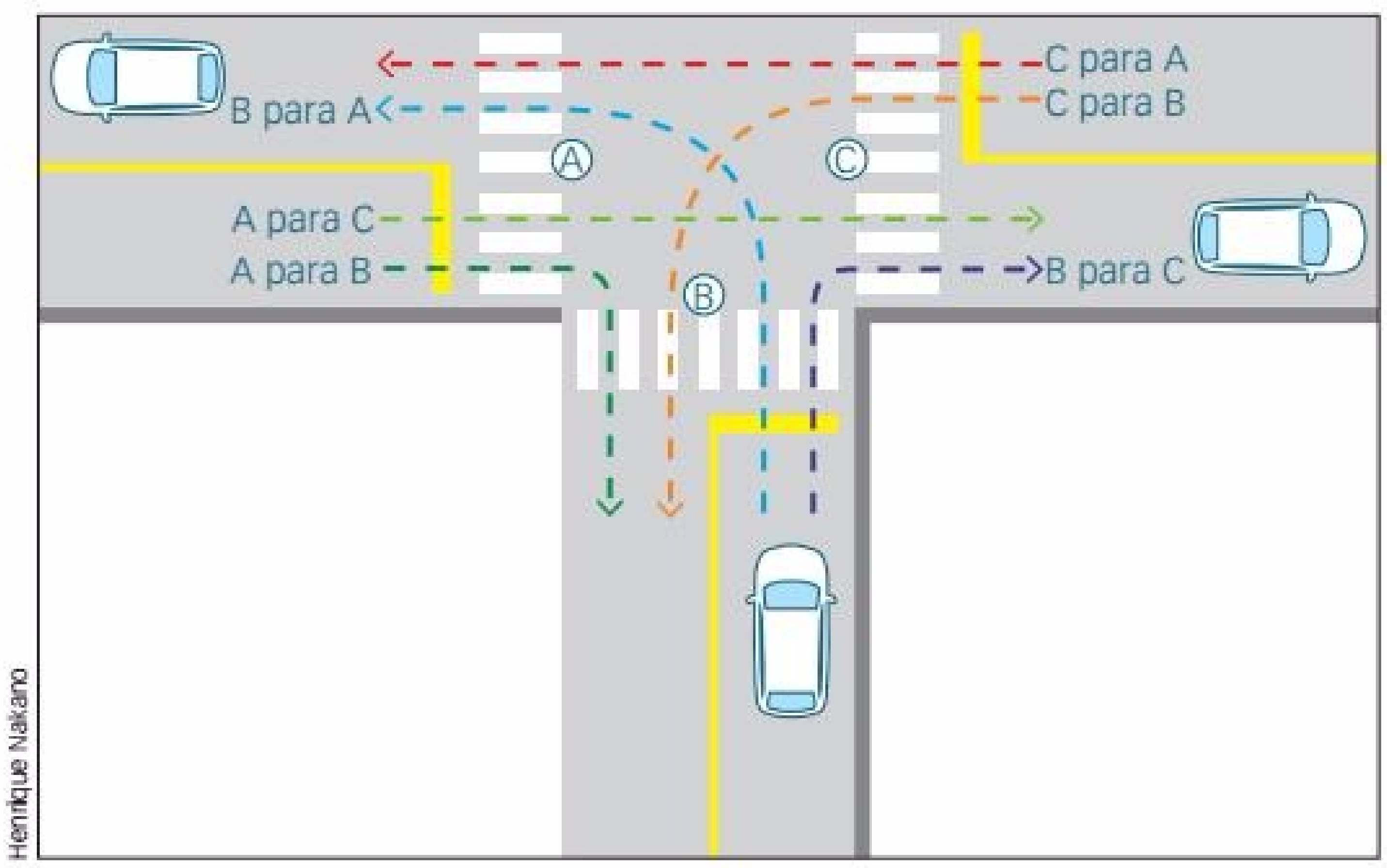
b) É possível ir, passando por outras cidades, da cidade **A** até a cidade **C**.

c) A matriz ao lado é simétrica.

d) Existem dois caminhos diferentes para ir da cidade **A** para a cidade **D**.

Semáforos e matrizes

O esquema representa o encontro de duas vias de mão dupla em que o fluxo de veículos que passam pelos pontos **A**, **B** e **C** é organizado por três semáforos.



Henrique Nakano

Esta imagem é uma representação artística. As cores utilizadas não correspondem às reais e os elementos ilustrados não estão proporcionais.

Na matriz a seguir, os valores indicam o tempo, em minutos, que cada semáforo fica aberto (verde) a cada período de 2 minutos, no sentido de acesso da via indicada pela linha para a via indicada pela coluna da matriz. O valor 1,5 indicado pelo elemento a_{12}, por exemplo, indica que o semáforo que dá acesso da via **A** (linha **A**) para a via **B** (coluna **B**) fica aberto 1,5min a cada período de 2min.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1{,}5 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 1 \\ 1{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) Quanto tempo fica aberto o semáforo que dá acesso de:

- **B** para **C**, considerando um período de 2min? 1min
- **C** para **B**, considerando um período de 2min? 0,5min
- **A** para **C**, considerando um período de 2min? 1min

b) Considerando que entrem em cada via até 20 veículos por minuto, qual a quantidade máxima de veículos que podem ir de:

- **C** para **A**, em 6min? 90 veículos
- **B** para **A**, em 30min? 150 veículos
- **A** para **B**, em 3h? 2700 veículos

Origem do semáforo

Em 1868, nas esquinas movimentadas de Londres, na Inglaterra, surgiram os primeiros semáforos com lanternas verdes e vermelhas para organizar o fluxo de carruagens e pedestres. Em 1914, na cidade de Cleveland, Estados Unidos, teve início a utilização dos mesmos sinais com luz elétrica, que eram controlados por guardas.

Vacclaw/ Dreamstime.com

Semáforo.

OPERAÇÕES COM MATRIZES

As matrizes possuem uma estrutura própria em relação às operações de adição, multiplicação e inversão. Vamos estudar a seguir cada uma dessas operações.

Adição de matrizes

As tabelas apresentam o número de faltas de três alunos no primeiro e no segundo semestre de 2016, em quatro disciplinas.

Número de faltas dos alunos no 1º semestre (2016)

	Matemática	Língua Portuguesa	Geografia	História
Camila	2	1	1	0
Douglas	1	2	3	1
Renata	0	1	1	2

Fonte: Secretaria da escola.

Número de faltas dos alunos no 2º semestre (2016)

	Matemática	Língua Portuguesa	Geografia	História
Camila	1	0	0	1
Douglas	2	1	2	0
Renata	1	4	1	1

Fonte: Secretaria da escola.

Como podemos representar o número de faltas, em 2016, desses três alunos em cada disciplina?

Intuitivamente, sabemos que é preciso adicionar, para cada aluno, o número de faltas no 1º e no 2º semestre em cada disciplina. Nesse caso, representando as tabelas por meio de matrizes e adicionando os elementos correspondentes, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 1+0 & 1+0 & 0+1 \\ 1+2 & 2+1 & 3+2 & 1+0 \\ 0+1 & 1+4 & 1+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ao adicionarmos os elementos correspondentes das duas matrizes, obtemos uma nova matriz que representa a soma das matrizes. Nessa nova matriz, podemos verificar, por exemplo, que foram 3 as faltas de Camila na disciplina de Matemática nesses semestres.

> Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, de mesma ordem $m \times n$, a soma $A + B$ é igual à matriz $C = (c_{ij})$, também de ordem $m \times n$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemplos:

- Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, temos:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 0+(-1) \\ -5+2 & 6+5 \\ 2+0 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 11 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

- Dadas as matrizes $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$, temos:

$$C + D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que, no segundo exemplo, $C + D$ resulta em uma matriz nula. Nesse caso, dizemos que **D** é a **matriz oposta** de **C** e vice-versa. Note que cada elemento de **C** é oposto ao elemento correspondente em **D** e vice-versa.

> Dada uma matriz **A** de ordem $m \times n$, denomina-se **matriz oposta** de **A** a matriz também de ordem $m \times n$ que, adicionada a **A**, resulta em uma matriz nula de mesma ordem. Indicamos a matriz oposta de **A** por $-A$.

A adição de matrizes apresenta algumas propriedades. Considerando as matrizes **A**, **B** e **C** de mesma ordem, as propriedades a seguir podem ser demonstradas:

- Propriedade comutativa: $A+B=B+A$
- Propriedade associativa: $(A+B)+C=A+(B+C)$
- Elemento neutro: $A+0=A$, em que **0** representa uma matriz nula de mesma ordem de **A**.
- Elemento oposto: $A+(-A)=0$, em que **0** representa uma matriz nula de mesma ordem de **A**.

Professor(a): Solicite aos alunos que exemplifiquem cada uma das propriedades apresentadas. Veja na Assessoria Pedagógica algumas sugestões.

Subtração de matrizes

Sejam **A** e **B** duas matrizes de mesma ordem. Ao calcularmos a adição de **A** com o oposto de **B**, ou seja, $A+(-B)$, obtemos a diferença entre **A** e **B**, isto é, $A+(-B)=A-B$. Definimos subtração de matrizes do seguinte modo:

> Dadas duas matrizes $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$, de mesma ordem $m \times n$, a diferença $A-B$ é igual à matriz $C=(c_{ij})$, também de ordem $m \times n$, tal que $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$.

Professor(a): Reforce com os alunos que, para adicionar ou subtrair matrizes, é necessário que as matrizes sejam de mesma ordem.

Exemplos:

- Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, temos:

$$A-B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2-1 & 1-2 \\ -5-2 & 3-3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$$

- Dadas as matrizes $C=\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ e $D=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$, temos:

$$C-D=\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2-1 \\ 5-3 \\ -4-6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Atividades resolvidas

R8. Determine o valor da expressão $[(-A)+C]+[B+(-C)]$, dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Resolução

Simplificaremos a expressão inicial utilizando as propriedades de adição de matrizes:

$$[(-A)+C]+[B+(-C)]\overset{\text{propriedade comutativa e propriedade associativa}}{=}[(-A)+B]+[C+(-C)]\overset{\text{elemento oposto}}{=}[(-A)+B]+0_2=B+(-A)\overset{\text{elemento neutro e propriedade comutativa}}{=}B-A$$

Logo,

$$[(-A)+C]+[B+(-C)]=B-A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-(-1) & 2-5 \\ -5-0 & 4-3 \end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}}$$

Atividades ▶ Anote as respostas no caderno.

38. Calcule.

a) $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 11 & 10 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 10 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 12 & -1 & 8 \\ 15 & 9 & -13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 6 & -8 \\ 1 & 11 & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 22 & 5 & 0 \\ 16 & 20 & -8 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 19 & 26 & 14 \\ 11 & 6 & 32 \\ 45 & 12 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 16 & 3 \\ 7 & -6 & 5 \\ 15 & 3 & -11 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 10 & 11 \\ 4 & 12 & 27 \\ 30 & 9 & 18 \end{bmatrix}$

39. Associe cada matriz a sua oposta escrevendo a letra e o número romano correspondentes.
a-I; b-IV; c-III; d-II

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 & -6 & -1 \\ 6 & -9 & 8 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & -6 & -1 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & -9 & 8 \end{bmatrix}$

I) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$

II) $\begin{bmatrix} -5 & 6 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \\ -6 & 9 & -8 \end{bmatrix}$

III) $\begin{bmatrix} -5 & 6 & 1 \\ -6 & 9 & -8 \\ 3 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

IV) $\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

40. Observe as tabelas.

População da região Sul do Brasil, em 2000

	Rio Grande do Sul	Santa Catarina	Paraná
Homens	4 994 719	2 669 311	4 737 420
Mulheres	5 193 079	2 687 049	4 826 038

Fonte: IBGE. Disponível em: <www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/censo2000/tabelagrandes_regioes211.shtm>. Acesso em: 20 jan. 2016.

População da região Sul do Brasil, em 2010

	Rio Grande do Sul	Santa Catarina	Paraná
Homens	5 202 057	3 100 360	5 130 994
Mulheres	5 488 872	3 148 076	5 313 532

Fonte: IBGE. Disponível em: <www.sidra.ibge.gov.br/bda/tabela/listabl.asp?z=t&o=25&i=P&c=1378>. Acesso em: 20 jan. 2016.

Professor(a): Veja a resposta desta atividade no final do livro.

a) Utilizando as linhas para representar o sexo dos habitantes e as colunas para representar a unidade de federação, escreva as matrizes **A** e **B** que indicam a população da região Sul do Brasil no ano de 2000 e 2010, respectivamente.

b) Calcule B – A.

c) O que representa a matriz formada pelo resultado da operação B – A?

Professor(a): Diga aos alunos que utilizem a calculadora para auxiliar nos cálculos. Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

41. Uma pesquisa realizada com alguns alunos do Ensino Médio de duas escolas tinha o objetivo de indicar o tipo de computador que eles preferiam utilizar para estudar fora da sala de aula. Os resultados de cada escola foram organizados em planilhas eletrônicas.

	A	B	C	D
1	Escola X			
2	Tipo de computador	1º ano	2º ano	3º ano
3	mesa	12	8	14
4	portátil	6	11	13
5				

	A	B	C	D
1	Escola Y			
2	Tipo de computador	1º ano	2º ano	3º ano
3	mesa	10	11	15
4	portátil	14	12	12
5				

Ilustrações: Gilberto Alicio

a) Determine a matriz **Z** que representa a preferência pelo tipo de computador, de acordo com o nível de escolaridade dos alunos entrevistados dessas duas escolas. $Z = \begin{bmatrix} 22 & 19 & 29 \\ 20 & 23 & 25 \end{bmatrix}$

b) Considerando essas duas escolas, em qual ano do Ensino Médio 25 entrevistados preferem computadores portáteis? 3º ano

42. Calcule o valor de x, y e z de modo que cada igualdade seja verdadeira.

a) $\begin{bmatrix} 3 & x \\ 4 & z^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2x \\ y & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $x = 2$; $y = -5$; $z = -1$ ou $z = 1$

b) $\begin{bmatrix} x & -y & \frac{z}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$
$x = 7$; $y = -\frac{1}{2}$; $z = 5$

c) $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4x \\ 6 \\ y^2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ -6 \\ \frac{z}{3} \end{bmatrix}$ $x = \frac{2}{3}$; $y = -1$ ou $y = 0$; $z = \frac{3}{2}$

43. Seja $A = (a_{ij})_{2\times3}$ tal que $a_{ij} = 3i - 2j$, e $B = (b_{ij})_{3\times2}$ tal que $b_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i \geq j \\ 3i - j, \text{ se } i < j \end{cases}$, calcule:

a) $A^t + B$ $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A - B^t$ $\begin{bmatrix} -1 & -4 & -7 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

▶ É possível calcular $A^t + B^t$? Justifique.
Não, pois as matrizes são de ordens diferentes, sendo A^t de ordem 3×2 enquanto B^t é de ordem 2×3.

DESAFIO

44. Escreva a matriz obtida pela adição de $\underbrace{I_2 + I_2 + I_2 + \ldots + I_2}_{n \text{ vezes}}$. $\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$

Multiplicação de número real por matriz

A tabela apresenta os preços de três modelos de veículos populares de certa montadora, nas versões 2 portas e 4 portas.

Preço dos veículos populares em 2016

	Versão 2 portas	Versão 4 portas
Modelo A	R$ 23 650,00	R$ 25 530,00
Modelo B	R$ 25 790,00	R$ 27 650,00
Modelo C	R$ 27 990,00	R$ 29 870,00

Fonte: Montadora de veículos.

Para estimular as vendas a montadora divulgou que os modelos apresentados na tabela serão oferecidos com desconto de 9%.

Uma maneira de calcular o preço de cada veículo com o desconto de 9% é multiplicar cada valor da tabela por $\underbrace{0{,}91}_{91\%}$.

Considerando o valor do veículo antes do desconto igual a 100%, então, com um desconto de 9%, temos:

$$100\% - 9\% = \underbrace{91\%}_{\frac{91}{100}=0{,}91}$$

Nesse caso, representando a tabela por meio de uma matriz e multiplicando cada elemento por 0,91, temos:

$$0{,}91\cdot\begin{bmatrix} 23\,650 & 25\,530 \\ 25\,790 & 27\,650 \\ 27\,990 & 29\,870 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}91\cdot 23\,650 & 0{,}91\cdot 25\,530 \\ 0{,}91\cdot 25\,790 & 0{,}91\cdot 27\,650 \\ 0{,}91\cdot 27\,990 & 0{,}91\cdot 29\,870 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21\,521{,}5 & 23\,232{,}3 \\ 23\,468{,}9 & 25\,161{,}5 \\ 25\,470{,}9 & 27\,181{,}7 \end{bmatrix}$$

Ao multiplicarmos cada elemento de uma matriz por um número real, obtemos uma nova matriz que representa a multiplicação desse número real pela matriz. Nessa nova matriz, podemos verificar, por exemplo, que o veículo de modelo **B**, versão 4 portas, será comercializado por R$ 25 161,50.

Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$, e um número real **k**, o produto $k \cdot A$ é igual à matriz $B = (b_{ij})$, também de ordem $m \times n$, tal que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

A multiplicação de um número real por uma matriz apresenta algumas propriedades. Dadas as matrizes **A** e **B** de mesma ordem e **r** e **s** números reais, as propriedades a seguir podem ser demonstradas:

- $r\cdot(A+B) = r\cdot A + r\cdot B$
- $r\cdot(s\cdot A) = (r\cdot s)\cdot A$
- $(r+s)\cdot A = r\cdot A + s\cdot A$
- $(r\cdot A)^t = r\cdot A^t$

Professor(a): Solicite aos alunos que exemplifiquem cada uma dessas propriedades. Veja na Assessoria Pedagógica algumas sugestões.

Multiplicação de matrizes

Estudamos a adição de matrizes, a subtração de matrizes e a multiplicação de um número real por matriz. Agora, vamos estudar a multiplicação de matrizes. Observe o exemplo a seguir.

A pizzaria **Bom Sabor**, em determinada promoção, oferece *pizzas* de três tamanhos diferentes: pequena (4 fatias), média (6 fatias) e grande (8 fatias). A seguir, são apresentadas as quantidades de *pizzas* vendidas no sábado e no domingo na promoção e o preço de cada uma delas.

Quantidades de *pizzas* vendidas durante uma promoção, em 2016

	Pequena	Média	Grande
Sábado	42	80	52
Domingo	38	65	40

Fonte: Pizzaria Bom Sabor.

Preços das *pizzas*	
Pequena	R$ 12,50
Média	R$ 18,90
Grande	R$ 24,00

Fonte: Pizzaria Bom Sabor.

Para calcular quanto a pizzaria arrecadou com as vendas das *pizzas* em cada dia (sábado e no domingo), devemos multiplicar cada quantidade vendida pelo respectivo preço e, em seguida, somá-los do seguinte modo:

- Sábado: $42 \cdot 12{,}50 + 80 \cdot 18{,}90 + 52 \cdot 24{,}00 = 3\,285{,}00 \rightarrow$ R$ 3 285,00
- Domingo: $38 \cdot 12{,}50 + 65 \cdot 18{,}90 + 40 \cdot 24{,}00 = 2\,663{,}50 \rightarrow$ R$ 2 663,50

Podemos representar esses resultados como ao lado.

Valor total arrecadado	
Sábado	R$ 3 285,00
Domingo	R$ 2 663,50

Fonte: Pizzaria Bom Sabor.

Portanto, a pizzaria arrecadou R$ 3 285,00 no sábado e R$ 2 663,50 no domingo.

Nesse caso, representando as quantidades de *pizzas* vendidas, os preços das *pizzas* e o valor total arrecadado em cada dia por meio das matrizes **A**, **B** e **C**, respectivamente, temos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 42 & 80 & 52 \\ 38 & 65 & 40 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 12{,}50 \\ 18{,}90 \\ 24{,}00 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 42 \cdot 12{,}50 + 80 \cdot 18{,}90 + 52 \cdot 24{,}00 \\ 38 \cdot 12{,}50 + 65 \cdot 18{,}90 + 40 \cdot 24{,}00 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3\,285{,}00 \\ 2\,663{,}50 \end{bmatrix}}_{C}$$

A matriz **C**, obtida desse modo, é denominada **matriz produto de A por B**. Note que o elemento c_{11} da matriz **C** é dado pela soma dos produtos dos elementos da linha 1 de **A** pelos elementos da coluna 1 de **B**, tomados ordenadamente. Já o elemento c_{21} da matriz **C** é dado pela soma dos produtos dos elementos da linha 2 de **A** pelos elementos da coluna 1 de **B**, tomados ordenadamente.

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})$, de ordem $m \times n$, e $B = (b_{ij})$, de ordem $n \times p$, o produto $A \cdot B$ é a matriz $C = (c_{ij})$, de ordem $m \times p$, em que cada elemento c_{ij} é a soma dos produtos dos elementos da i-ésima linha de **A** pelos elementos da j-ésima coluna de **B**, tomados ordenadamente.

O produto $A \cdot B$ só é possível se o número de colunas de **A** for igual ao número de linhas de **B**.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Exemplos:

- Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

  Como **A** é de ordem 2×3 e **B** é de ordem 3×2, temos que $C = A \cdot B$ existe e é de ordem 2×2, tal que:

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2} = C_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-4) + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 6 \\ -3 \cdot 1 + 5 \cdot (-4) + 6 \cdot 5 & -3 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 7 & 46 \end{bmatrix}$$

- Sejam as matrizes $C=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ e $D=\begin{bmatrix}3 & -4\end{bmatrix}$.

Como **C** é de ordem 2×1 e **D** é de ordem 1×2, temos que $E=C\cdot D$ existe e é de ordem 2×2, tal que:

$$C_{2\times 1}\cdot D_{1\times 2}=E_{2\times 2}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 3 & 1\cdot(-4)\\ 2\cdot 3 & 2\cdot(-4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 6 & -8\end{bmatrix}$$

A multiplicação de matrizes também apresenta algumas propriedades. Considerando as matrizes **A**, **B** e **C**, as propriedades a seguir podem ser demonstradas:

- Propriedade associativa: $\left(A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}\right)\cdot C_{p\times q}=A\cdot(B\cdot C)$
- Propriedade distributiva à esquerda: $\left(A_{m\times n}+B_{m\times n}\right)\cdot C_{n\times p}=A\cdot C+B\cdot C$
- Propriedade distributiva à direita: $A_{m\times n}\cdot\left(B_{n\times p}+C_{n\times p}\right)=A\cdot B+A\cdot C$
- Elemento neutro: $A_{m\times n}\cdot I_n=A$ e $I_m\cdot A_{m\times n}=A$, em que **I** é a matriz identidade. Professor(a): Solicite aos alunos que exemplifiquem cada uma dessas propriedades. Veja na Assessoria Pedagógica algumas sugestões.

Dadas as matrizes **A** e **B**, e supondo que a multiplicação $A\cdot B$ esteja definida, a propriedade comutativa $A\cdot B=B\cdot A$ não é válida para a multiplicação de matrizes. Considerando, por exemplo, as matrizes

$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ -5 & 1\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}6 & 8\\ -2 & 10\end{bmatrix}$,

temos:

- $A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & 66\\ -32 & -30\end{bmatrix}$
- $B\cdot A=\begin{bmatrix}-28 & 38\\ -54 & 0\end{bmatrix}$

Logo, $A\cdot B\neq B\cdot A$, ou seja, a propriedade comutativa não é válida.

Atividades resolvidas

R9. Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}7 & -1\\ 0 & 6\end{bmatrix}$, determine o valor da expressão $3A-2B$.

Resolução

$$3A-2B=3\cdot\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 1\end{bmatrix}-2\cdot\begin{bmatrix}7 & -1\\ 0 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 15\\ 9 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}14 & -2\\ 0 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 17\\ 9 & -9\end{bmatrix}$$

R10. Determine os valores das incógnitas x e y, de maneira que a igualdade $\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x & 1\\ 4 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 7\end{bmatrix}$ seja verdadeira.

Resolução

Pela multiplicação e igualdade de matrizes, temos:

- $2\cdot x+(-1)\cdot 4=2$
- $2\cdot 1+(-1)\cdot y=7$

Resolvendo essas equações, determinamos os valores de x e y:

- $2\cdot x+(-1)\cdot 4=2\Rightarrow 2x-4=2\Rightarrow 2x=6\Rightarrow x=3$
- $2\cdot 1+(-1)\cdot y=7\Rightarrow 2-y=7\Rightarrow -y=5\Rightarrow y=-5$

Note que, substituindo x por 3 e y por -5 na matriz $\begin{bmatrix}x & 1\\ 4 & y\end{bmatrix}$, segue que a igualdade inicial é verdadeira:

$$\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 3+(-1)\cdot 4 & 2\cdot 1+(-1)\cdot(-5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 7\end{bmatrix}$$

R11. (UFSM-RS) Ao comprar os produtos necessários para fazer uma feijoada, uma dona de casa resolveu pesquisar preços em três supermercados. A matriz **P** dos preços está representada a seguir: a primeira linha mostra os preços por kg do supermercado **A**; a segunda, os do supermercado **B**; a terceira, os do supermercado **C**. Esses preços são relativos, respectivamente, aos produtos feijão, linguiça, tomate e cebola.

$$P=\begin{bmatrix}2{,}05 & 9{,}89 & 2{,}48 & 1{,}78\\ 1{,}93 & 11{,}02 & 2{,}00 & 1{,}60\\ 1{,}70 & 10{,}80 & 2{,}40 & 1{,}20\end{bmatrix}\quad Q=\begin{bmatrix}5\\3\\2\\3\end{bmatrix}$$

Sabendo que a matriz **Q** representa as quantidades necessárias, respectivamente, de feijão, linguiça, tomate e cebola, a dona de casa economizará mais se efetuar as compras no supermercado

a) A b) B c) C d) A ou B indiferentemente e) A ou C indiferentemente

Resolução

Queremos determinar em qual supermercado a dona de casa economizará mais, logo, devemos calcular quanto ela gastará se efetuar as compras em **A**, **B** ou **C**.

Para isso, adicionamos o produto entre os preços, por kg, de cada alimento pela quantidade necessária respectiva nos supermercados **A**, **B** e **C**, ou seja, calculamos o produto P·Q:

$$\begin{bmatrix} 2{,}05 & 9{,}89 & 2{,}48 & 1{,}78 \\ 1{,}93 & 11{,}02 & 2{,}00 & 1{,}60 \\ 1{,}70 & 10{,}80 & 2{,}40 & 1{,}20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}05\cdot 5+9{,}89\cdot 3+2{,}48\cdot 2+1{,}78\cdot 3 \\ 1{,}93\cdot 5+11{,}02\cdot 3+2{,}00\cdot 2+1{,}60\cdot 3 \\ 1{,}70\cdot 5+10{,}80\cdot 3+2{,}40\cdot 2+1{,}20\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50{,}22 \\ 51{,}51 \\ 49{,}30 \end{bmatrix}$$

A matriz obtida representa quanto a dona de casa gastará em cada supermercado:

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 50{,}22 \\ 51{,}51 \\ 49{,}30 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow A \\ \leftarrow B \\ \leftarrow C \end{matrix} \end{array}$$

Portanto, o supermercado **C** é aquele em que a dona de casa fará maior economia, logo, a resposta correta é **c**.

> Note que a multiplicação das matrizes **P** e **Q** é possível porque o número de colunas de **P** é igual ao número de linhas de **Q**. Note também que a matriz produto P·Q tem o mesmo número de linhas de **P** e de colunas de **Q**.

Atividades
Anote as respostas no caderno.

45. Determine o valor de x, y e z de modo que cada igualdade seja verdadeira.

a) $2\cdot\begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ y \\ 4 \end{bmatrix}$ $x=-3;\ y=2;\ z=1$

b) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{y}{3} & 0 \end{bmatrix}\cdot(-6) = \begin{bmatrix} 2x & -5 & z \end{bmatrix}$ $x=-3;\ y=\frac{5}{2};\ z=0$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\cdot\begin{bmatrix} \frac{x}{2} & 0 \\ -y & z \end{bmatrix}$ $x=3;\ y=-9;\ z=-3$

d) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & y & z \\ x & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 6 \\ -1 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ $x=-1;\ y=0;\ z=-2$

46. A matriz **S** associa sua 1ª linha à quantidade de proteínas, em gramas, e a 2ª linha à quantidade de fibra alimentar, em gramas, que um copo de 200 mL de três marcas de suco à base de soja oferece.

$$S=\begin{bmatrix} 5{,}2 & 5 & 4{,}8 \\ 1{,}9 & 2{,}1 & 1{,}8 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz que indica a quantidade de proteínas e fibra alimentar que cada uma dessas marcas de suco oferece em cada embalagem de 1 L. $\begin{bmatrix} 26 & 25 & 24 \\ 9{,}5 & 10{,}5 & 9 \end{bmatrix}$

Benefícios da soja

Existem vários benefícios à saúde relacionados ao consumo de soja; um deles é a melhora nos níveis de colesterol e prevenção da osteoporose. A soja é uma opção de alimento para pessoas que não podem ingerir leite por possuírem intolerância à lactose, por exemplo.

Soja.

Johnfoto/Dreamstime.com

47. Calcule.

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 12 & 0 \\ -14 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix}$

48. Cada item apresenta uma multiplicação entre matrizes. Para as multiplicações que são possíveis, escreva a ordem das matrizes obtidas.

a) $A_{3\times4} \cdot B_{3\times4}$ c) $E_{3\times3} \cdot F_{4\times3}$ e) $J_{7\times2} \cdot K_{2\times2}$ 7×2

b) $C_{1\times5} \cdot D_{5\times2}$ 1×2 d) $G_{2\times3} \cdot H_{3\times6}$ 2×6 f) $L_{4\times1} \cdot M_{3\times4}$

49. Dados $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e

$C=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, determine: Professor(a): Veja a resposta desta atividade no final do livro.

a) 3A c) $A \cdot B$ e) $2C \cdot A$

b) $B - C^t$ d) $B \cdot C$ f) $(B \cdot C) \cdot A$

50. (UEL-PR) Uma indústria utiliza borracha, couro e tecido para fazer três modelos de sapatos. A matriz **Q** fornece a quantidade de cada componente na fabricação dos modelos de sapatos, enquanto a matriz **C** fornece o custo unitário, em reais, destes componentes. Dados:

$$Q=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{borracha} & \text{couro} & \text{tecido} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{modelo 1} \\ \text{modelo 2} \\ \text{modelo 3} \end{array}$$

$$C=\begin{bmatrix} 10 \\ 50 \\ 30 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{borracha} \\ \text{couro} \\ \text{tecido} \end{array}$$

A matriz **V** que fornece o custo final, em reais, dos três modelos de sapatos é dada por: e

a) $V=\begin{bmatrix} 110 \\ 120 \\ 80 \end{bmatrix}$ c) $V=\begin{bmatrix} 80 \\ 110 \\ 80 \end{bmatrix}$ e) $V=\begin{bmatrix} 100 \\ 110 \\ 80 \end{bmatrix}$

b) $V=\begin{bmatrix} 90 \\ 100 \\ 60 \end{bmatrix}$ d) $V=\begin{bmatrix} 120 \\ 110 \\ 100 \end{bmatrix}$

51. (FGV-SP) Uma fábrica decide distribuir os excedentes de três produtos alimentícios **A**, **B** e **C** a dois países da América Central, P_1 e P_2. As quantidades, em toneladas, são descritas mediante a matriz **Q**:

$$Q=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 200 & 100 & 150 \\ 100 & 150 & 200 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow P_1 \\ \leftarrow P_2 \end{array}$$

Para o transporte aos países de destino, a fábrica recebeu orçamentos de duas empresas, em reais por tonelada, como indica a matriz **P**:

$$P=\begin{bmatrix} 500 & 300 \\ 400 & 200 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1^{\underline{a}} \text{ empresa} \\ \leftarrow 2^{\underline{a}} \text{ empresa} \end{array}$$

a) Efetue o produto das duas matrizes, na ordem que for possível. O que representa o elemento a_{13} da matriz produto? Preço, em reais, que a empresa 1 cobra para transportar o produto C aos dois países.

b) Que elemento da matriz produto indica o custo de transportar o produto **A**, com a segunda empresa, aos dois países? a_{21}

c) Para transportar os três produtos aos dois países, qual empresa deveria ser escolhida, considerando que as duas apresentam exatamente as mesmas condições técnicas? Por quê? A empresa 2, pois seu preço é menor que o da empresa 1.

52. (UFG-GO) Uma metalúrgica produz parafusos para móveis de madeira em três tipos, denominados *soft*, escareado e sextavado, que são vendidos em caixas grandes, com 2 000 parafusos, e pequenas, com 900, cada caixa contendo parafusos dos três tipos. A tabela **1**, a seguir, fornece a quantidade de parafusos de cada tipo contida em cada caixa, grande ou pequena. A tabela **2** fornece a quantidade de caixas de cada tipo produzida em cada mês do primeiro trimestre de um ano.

Tabela 1: quantidade de parafusos segundo os tipos de parafusos e caixas

Parafuso \ Caixa	Pequena	Grande
Soft	200	500
Escareado	400	800
Sextavado	300	700

Fonte: Metalúrgica.

Tabela 2: quantidade produzida por mês segundo o tipo de caixa

Caixa \ Mês	JAN.	FEV.	MAR.
Pequena	1 500	2 200	1 300
Grande	1 200	1 500	1 800

Fonte: Metalúrgica.

Associando as matrizes $A=\begin{bmatrix} 200 & 500 \\ 400 & 800 \\ 300 & 700 \end{bmatrix}$ e

$B=\begin{bmatrix} 1\,500 & 2\,200 & 1\,300 \\ 1\,200 & 1\,500 & 1\,800 \end{bmatrix}$ às tabelas **1** e **2**, respectivamente, o produto $A \cdot B$ fornece: c

a) o número de caixas fabricadas no trimestre.

b) a produção do trimestre de um tipo de parafuso, em cada coluna.

c) a produção mensal de cada tipo de parafuso.

d) a produção total de parafusos por caixa.

e) a produção média de parafusos por caixa.

Matriz inversa

Sabemos, por exemplo, que o inverso de 5 é $\frac{1}{5}$ e que o inverso de $\frac{2}{3}$ é $\frac{3}{2}$, pois:

$$5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1 \quad \text{e} \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

Temos que o inverso de um número real **a** não nulo é o número $\frac{1}{a}$, que indicamos por a^{-1}, de tal modo que o produto entre **a** e a^{-1} é o **elemento neutro** da **multiplicação com números reais**, isto é, $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Podemos usar esse mesmo raciocínio para as matrizes quadradas, ou seja, a **inversa** de uma matriz quadrada **A** de ordem *n* é a matriz A^{-1}, de tal modo que o produto entre **A** e A^{-1} é o **elemento neutro** da **multiplicação com matrizes**, isto é, $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$. Lembre-se de que a matriz I_n é a matriz identidade de ordem *n*.

Quando uma matriz quadrada possui inversa, dizemos que essa matriz é **invertível** (ou inversível). Já quando a matriz não possui inversa, dizemos que ela é **não invertível** (ou não inversível).

Exemplo:

- Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, temos:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) & 5 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) & 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 3 & 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 \\ (-3) \cdot 5 + 5 \cdot 3 & (-3) \cdot 3 + 5 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $A \cdot B = B \cdot A = I_2$, então a matriz **A** é invertível e sua inversa é $A^{-1} = B$. Temos ainda que a matriz **B** é invertível e sua inversa é $B^{-1} = A$.

Atividades resolvidas

R12. Caso exista, determine a matriz inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução

Se existir, a inversa da matriz **A** será a matriz $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, onde $A \cdot X = X \cdot A = I_2$, ou seja:

$$A \cdot X = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4a - 2c & 4b - 2d \\ 3a + c & 3b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela igualdade de matrizes, podemos escrever os seguintes sistemas:

- $\begin{cases} 4a - 2c = 1 \\ 3a + c = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} 4b - 2d = 0 \\ 3b + d = 1 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas:

- $\begin{cases} 4a - 2c = 1 \\ 3a + c = 0 \quad \cdot(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2c = 1 \\ 6a + 2c = 0 \end{cases} \oplus$

$$10a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{10}}$$

$$4a - 2c = 1 \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{10} - 2c = 1 \Rightarrow \boxed{c = -\frac{3}{10}}$$

- $\begin{cases} 4b - 2d = 0 \\ 3b + d = 1 \quad \cdot(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b - 2d = 0 \\ 6b + 2d = 2 \end{cases} \oplus$

$$10b = 2 \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{5}}$$

$$4b - 2d = 0 \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{5} - 2d = 0 \Rightarrow \boxed{d = \frac{2}{5}}$$

Logo, temos que $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$.

Em seguida, verificamos se $X \cdot A = I_2$:

$$X \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}+\frac{3}{5} & -\frac{1}{5}+\frac{1}{5} \\ -\frac{6}{5}+\frac{6}{5} & \frac{3}{5}+\frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Como $A \cdot X = X \cdot A = I_2$, temos que a matriz **A** é invertível e sua inversa é $A^{-1} = X = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$.

R13. Verifique se a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 20 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$ possui matriz inversa.

Resolução

Se existir, a matriz inversa de **A** será do tipo $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, em que $A \cdot B = B \cdot A = I_2$, ou seja:

$$A \cdot B = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 20 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4a+20c & 4b+20d \\ 2a+10c & 2b+10d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela igualdade de matrizes, podemos escrever os seguintes sistemas:

- $\begin{cases} 4a+20c=1 \\ 2a+10c=0 \end{cases}$
- $\begin{cases} 4b+20d=0 \\ 2b+10d=1 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas:

- $\begin{cases} 4a+20c=1 \\ 2a+10c=0 \quad \cdot(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+20c=1 \\ -4a-20c=0 \end{cases} \oplus$

  $0=1$ (impossível)

- $\begin{cases} 4b+20d=0 \\ 2b+10d=1 \quad \cdot(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b+20d=0 \\ -4b-20d=-2 \end{cases} \oplus$

  $0=-2$ (impossível)

Como os sistemas são impossíveis, não podemos determinar os elementos da matriz **B**.

Portanto, podemos afirmar que a matriz **A** não é invertível, ou seja, não admite matriz inversa.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

53. Caso exista, determine a matriz inversa de cada matriz.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $D^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

54. Mostre que a matriz $B = \begin{bmatrix} -1 & 0{,}5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é a inversa de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Professor(a): Veja a resposta desta atividade na Assessoria Pedagógica.

55. Sejam as matrizes invertíveis $A = (a_{ij})_{2\times2}$, tal que $a_{ij} = i + j^2$, e $B = (b_{ij})_{2\times2}$, tal que $b_{ij} = 4i - j$, calcule:

a) $(B^{-1})^t$

b) $A^{-1} \cdot B$

c) $(A^{-1} \cdot B^{-1})^t$

Professor(a): Veja a resposta desta atividade no final do livro.

Professor(a): Verifique se os alunos perceberam que $I_n \cdot X = X$, porque I_n é o elemento neutro da multiplicação de matrizes.

56. Observe uma maneira de resolver, sem conhecer seus elementos, a equação matricial $A \cdot X = B$, sendo **A** e **B** matrizes quadradas de ordem *n* e invertíveis.

Multiplicando A^{-1} em ambos os lados da igualdade pela esquerda, temos:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{I_n} \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Portanto, a solução da equação matricial $A \cdot X = B$ é $X = A^{-1} \cdot B$.

Agora, resolva as seguintes equações matriciais:

a) $X \cdot A \cdot B = B$ $X = A^{-1}$

b) $A \cdot B \cdot X = I_n$ $X = B^{-1} \cdot A^{-1}$

c) $A^2 \cdot X = A \cdot B$ $X = A^{-1} \cdot B$

57. Calcule a inversa da matriz **M**.

$$M = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Toda matriz diagonal **M** de ordem *n*, em que $m_{11} = m_{22} = m_{33} = \ldots = m_{nn}$, também é chamada de **matriz escalar**.

Professor(a): Veja a resposta desta atividade no final do livro.

58. (Unicamp) Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$, onde **a** e **b** são números reais. Se $A^2 = A$ e **A** é invertível, então: b

a) $a=1$ e $b=1$

b) $a=1$ e $b=0$

c) $a=0$ e $b=0$

d) $a=0$ e $b=1$

59. Dadas as matrizes invertíveis $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, determine: Professor(a): Veja a resposta desta atividade no final do livro.

a) A^{-1}

b) $A \cdot B^{-1}$

c) $B^{-1}+I_2$

d) $A^{-1}-B^{-1}$

60. Determine os valores de *x* e *y* sabendo que a matriz $C=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ é a inversa da matriz $D=\begin{bmatrix} x & -1 \\ y & 2 \end{bmatrix}$.

$x=3$; $y=-5$

Professor(a): Veja na Assessoria Pedagógica orientações para o trabalho com a seção Sobre a unidade.

Sobre a unidade | Anote as respostas no caderno.

1. O que você estudou nesta unidade? Você considera que atingiu os objetivos propostos no início da unidade? Se não, o que fará para atingir os objetivos?

2. Qual dos conteúdos estudados nesta unidade você considera que deve estudar um pouco mais?

3. Se um amigo lhe pedisse para explicar o que é uma matriz de ordem $m \times n$, que explicação você daria?

4. Você concorda com a frase a seguir? Justifique.

"A ideia de matriz vai além de matriz numérica."

5. Converse com seus colegas a respeito de situações em que os conteúdos estudados nesta unidade estão presentes. Se necessário, realizem uma pesquisa.

1. Resposta esperada: Sistemas lineares, escalonamento de sistemas lineares, matrizes, algumas matrizes especiais, operações com matrizes. Resposta pessoal. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

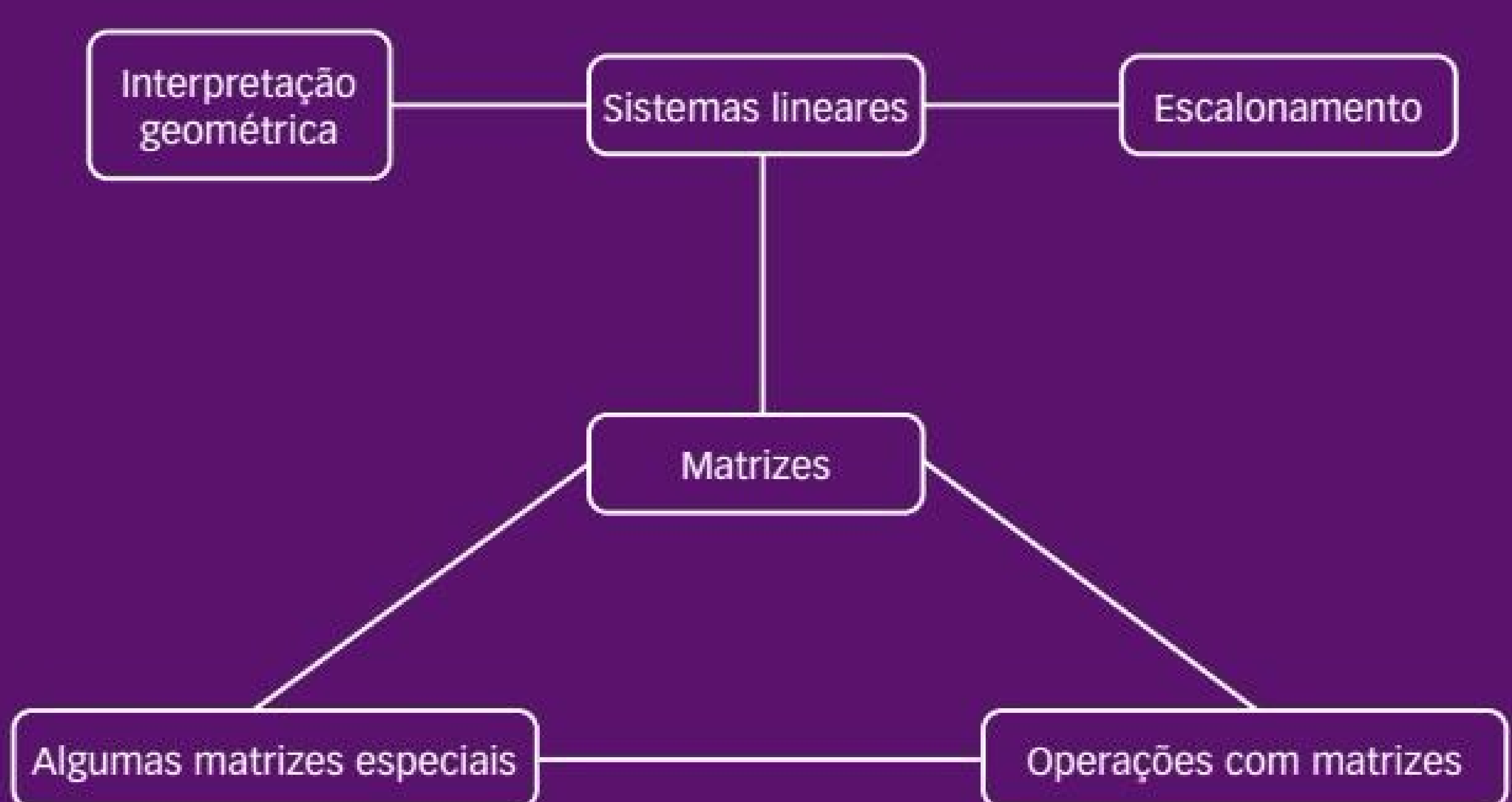
3. Resposta esperada: Uma matriz de ordem $m \times n$, com m e n naturais e não nulos, é uma lista com $m \cdot n$ elementos, dispostos em m linhas e n colunas.

4. Resposta esperada: Sim, pois a ideia de matrizes é dispor uma lista de elementos em m linhas e n colunas, sejam esses elementos numéricos ou não numéricos. Por exemplo, podemos organizar os alunos de uma turma em m linhas e n colunas; as imagens digitais são constituídas por *pixels* organizados em linhas e colunas.

5. Possível resposta: Os conteúdos desta unidade estão presentes em situações como: imagens digitais constituídas por *pixels*; organização de um conjunto de dados em tabelas; trabalho com planilhas eletrônicas; rotação no plano cartesiano; codificação e decodificação de mensagens.

Ideias matemáticas

O esquema a seguir relaciona algumas das ideias matemáticas estudadas nesta unidade. Converse com seus colegas e professor(a) a respeito de como essas e outras ideias abordadas na unidade estão relacionadas. Em seguida, faça um texto descrevendo as relações existentes entre elas e dê sugestões para complementar e melhorar a organização deste esquema.



Professor(a): Converse com os alunos de maneira que retomem os objetivos propostos no início da unidade e verifique, por exemplo, se compreenderam a definição de matrizes. Auxilie-os a listar as principais ideias matemáticas presentes na unidade e a buscar relações entre elas, como a relação entre matrizes e sistemas lineares. Com base nas ideias listadas e relações estabelecidas, oriente-os a propor aprimoramentos ao esquema apresentado, inserindo novas ideias e indicando suas possíveis relações. Peça aos alunos que registrem essas discussões, compondo uma síntese da unidade.

Revise os conteúdos estudados nesta unidade e anote os pontos que julgar mais relevantes. Com isso, organize um resumo para auxiliá-lo(a) na compreensão dos conteúdos.

Matrizes no Calc

O Calc permite trabalhar com matrizes, realizar operações, entre outros. Observe alguns exemplos.

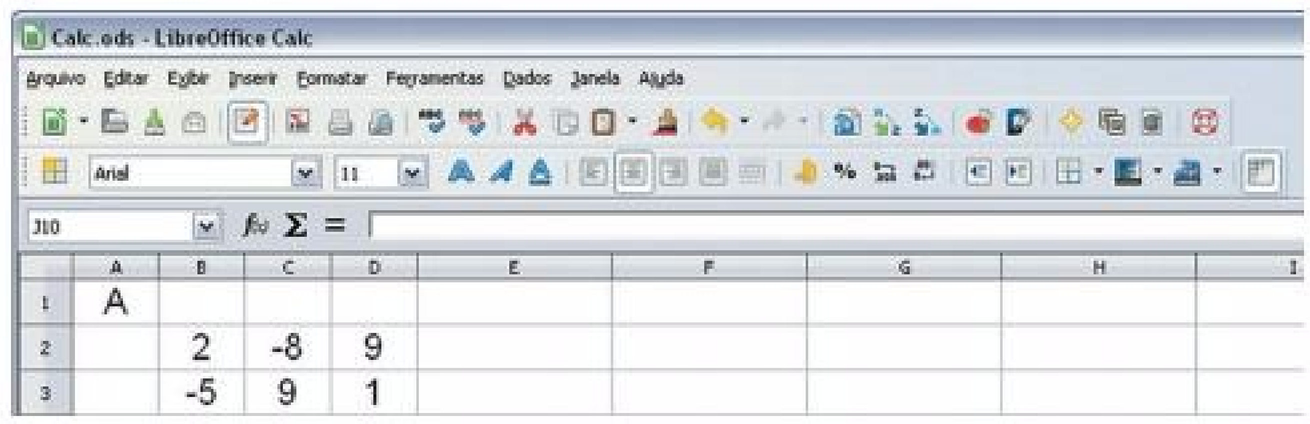
> **CALC**
>
> Planilha eletrônica que faz parte do pacote LibreOffice, desenvolvido pela The Document Foundation, uma organização sem fins lucrativos.
>
> Licença: Pode ser copiado, distribuído, modificado e reestruturado, além de poder utilizá-lo para criar obras derivadas.
>
> Onde obter: <http://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/>
>
> Versão utilizada: 3.5.3.2

Introduzindo uma matriz dados seus elementos

Observe como podemos introduzir a matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & -8 & 9 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ no Calc.

Passo 1: No menu **Editar**, clique em **Selecionar tudo**. No menu **Formatar**, clique em **Células**. Na aba **Alinhamento**, selecione **Centro** para o campo **Horizontal** e **No meio** para o campo **Vertical**. Marque a opção **Quebra automática de texto**. Na aba **Fonte**, escolha **11** no campo **Tamanho**. Por fim, clique em **OK**.

Passo 2: Digite o texto **A** na célula A1. Em seguida, insira um elemento da matriz em cada célula, de B2 até D3.

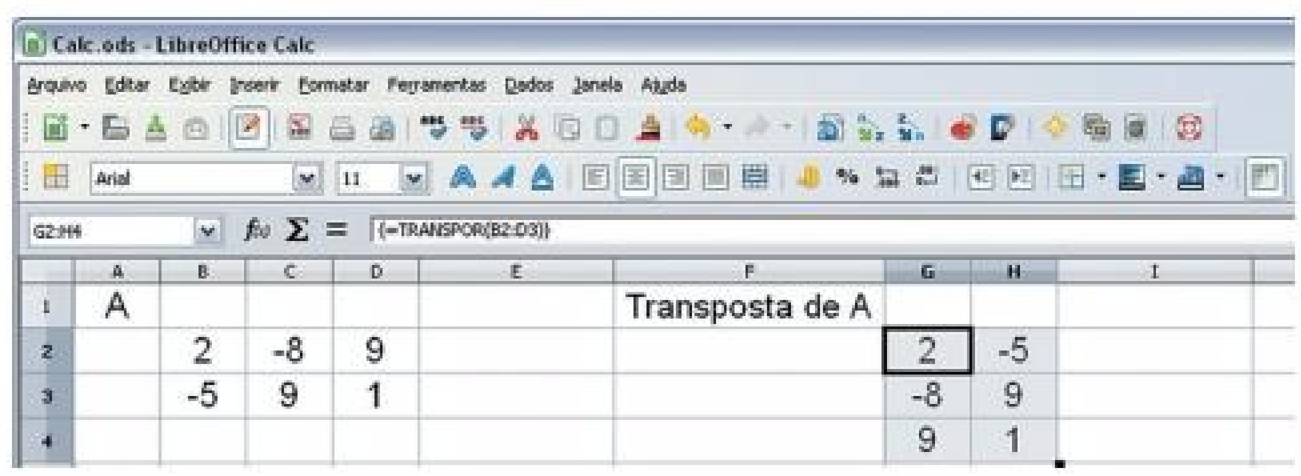


Transposta de uma matriz

Observe como podemos transpor a matriz **A** inserida no passo 2.

Passo 3: Digite o texto **Transposta de A** na célula F1. Em seguida, selecione a célula G2 e, no menu **Inserir**, clique em **Função**. Na categoria **Matriciais,** selecione a função **TRANSPOR** e clique em **Próximo**. No campo **matriz,** digite **B2:D3** e, em seguida, clique em **OK**.

> O comando **B2:D3** tem a finalidade de selecionar as células de B2 até D3, que correspondem à matriz **A**.



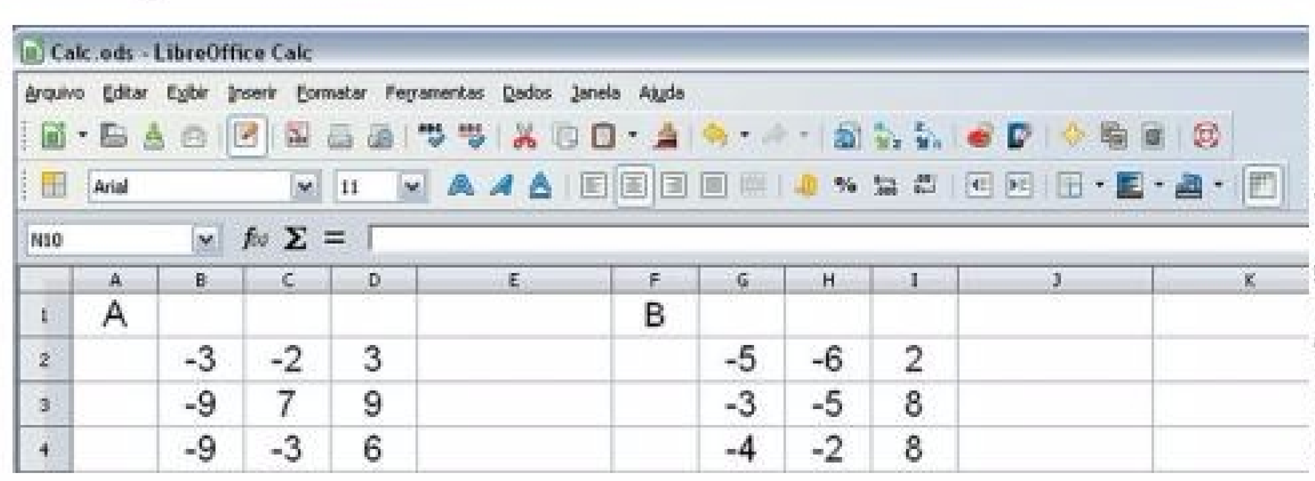
Portanto, $A^t=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -8 & 9 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$.

Operações com matrizes

Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -9 & 7 & 9 \\ -9 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} -5 & -6 & 2 \\ -3 & -5 & 8 \\ -4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$, veja como podemos calcular $A+B$, $A-B$, $2\cdot A$ e $A\cdot B$.

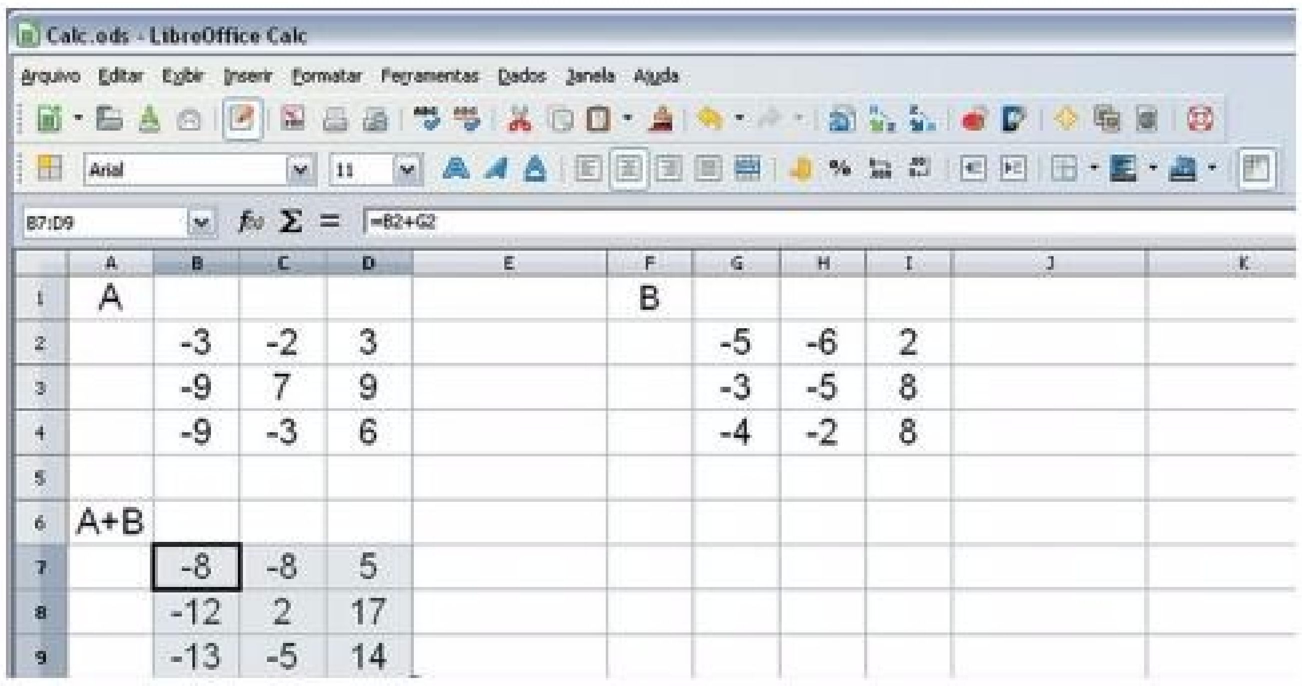
Passo 4: No menu **Editar,** clique em **Selecionar tudo**. No mesmo menu, clique em **Excluir conteúdo** e, em seguida, clique em **OK**.

Passo 5: Introduza a matriz **A** da célula B2 até D4 e a matriz **B** de G2 até I4.



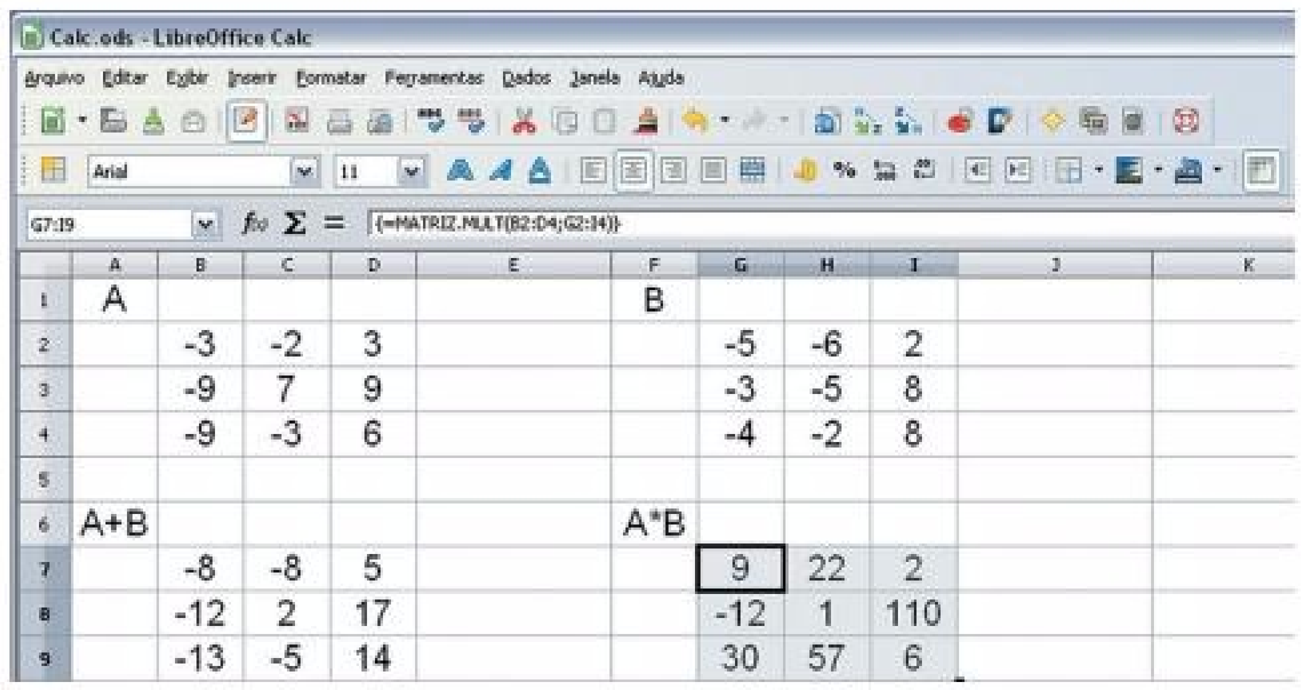
Imagens: LibreOffice Calc v. 3.5.3.2. Por The Document Foundation

Passo 6: Digite o texto **A + B** na célula A6. Na célula B7, insira o comando **= B2 + G2**, em seguida, arraste a **Alça de preenchimento** até a célula B9. Por fim, arraste a **Alça de preenchimento** até a célula D9.



> As operações $A - B$ e $2 \cdot A$ são realizadas de maneira semelhante a $A + B$. Basta substituir o comando **= B2 + G2** por **= B2 − G2** e **= 2*B2**, respectivamente.

Passo 7: Digite o texto **A*B** na célula F6. Com a célula G7 selecionada, no menu **Inserir**, clique em **Função**. Na categoria **Matriciais**, selecione a função **MATRIZ.MULT** e clique em **Próximo**. No primeiro campo **matriz**, digite **B2 : D4** e, no segundo, **G2 : I4**. Por fim, clique em **OK**.



Resolução de sistemas lineares com matrizes

Um sistema linear também pode ser representado por meio de uma equação matricial do tipo $A \cdot X = B$. Observe, por exemplo, como representar o sistema 4×4 a seguir:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 5 \\ 2x + y - z + w = 9 \\ x + 3y + z - w = 1 \\ x - y + 2z + 4w = 11 \end{cases}$$

Sistema.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{matriz incompleta do sistema}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}}_{\text{matriz das incógnitas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix}}_{\text{matriz dos termos independentes}}$$

Equação matricial.

Desse modo, resolver o sistema equivale a determinar a matriz **X**. Multiplicando A^{-1} em ambos os lados da igualdade pela esquerda, temos:

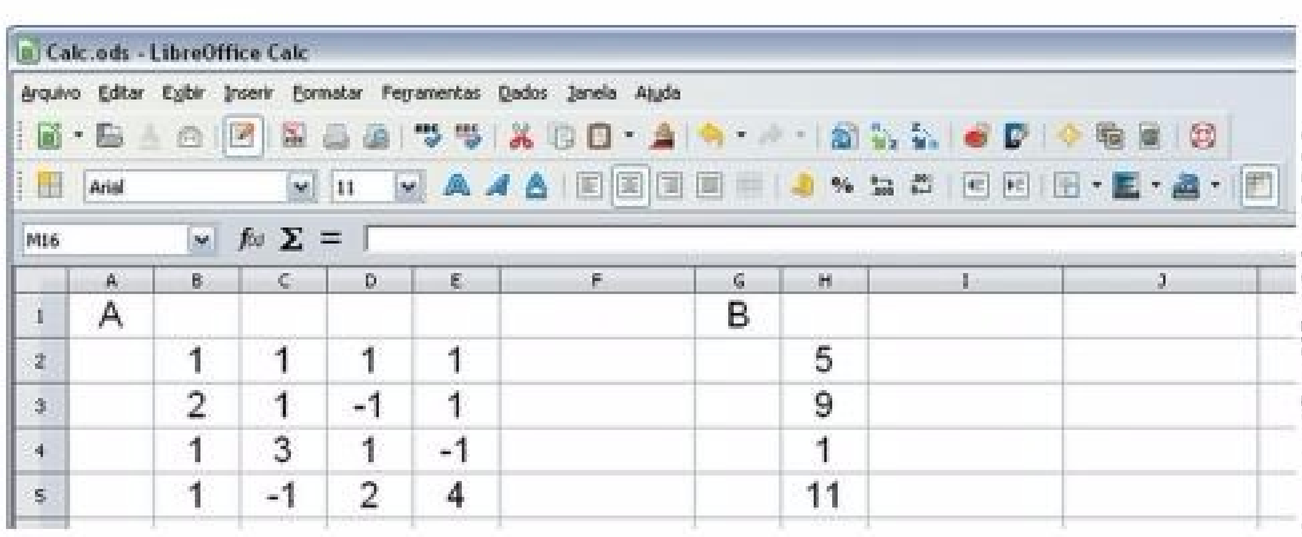
$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{I_4} \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Professor(a): Verifique se os alunos perceberam que $I_4 \cdot X = X$, porque I_4 é o elemento neutro da multiplicação de matrizes.

Portanto, resta calcular o produto $A^{-1} \cdot B$. Observe no Calc como podemos realizar essa operação.

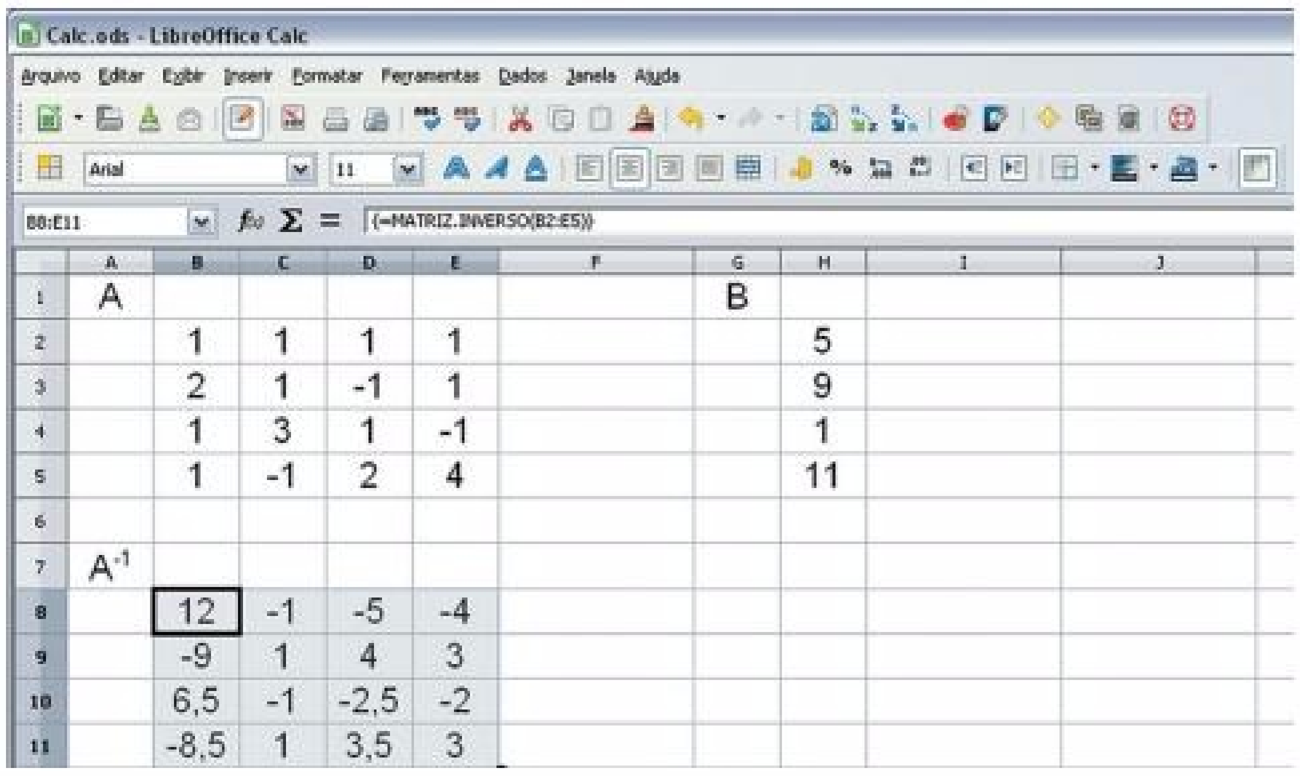
Passo 1: No menu **Editar,** clique em **Selecionar tudo**. No menu **Formatar,** clique em **Células**. Na aba **Alinhamento**, selecione **Centro** para o campo **Horizontal** e **No meio** para o campo **Vertical**. Marque a opção **Quebra automática de texto**. Na aba **Fonte**, escolha **11** no campo **Tamanho**. Por fim, clique em **OK**.

Passo 2: Introduza a matriz **A** da célula B2 até E5 e a matriz **B** de H2 até H5.



Imagens: LibreOffice Calc v. 3.5.3.2. Por The Document Foundation

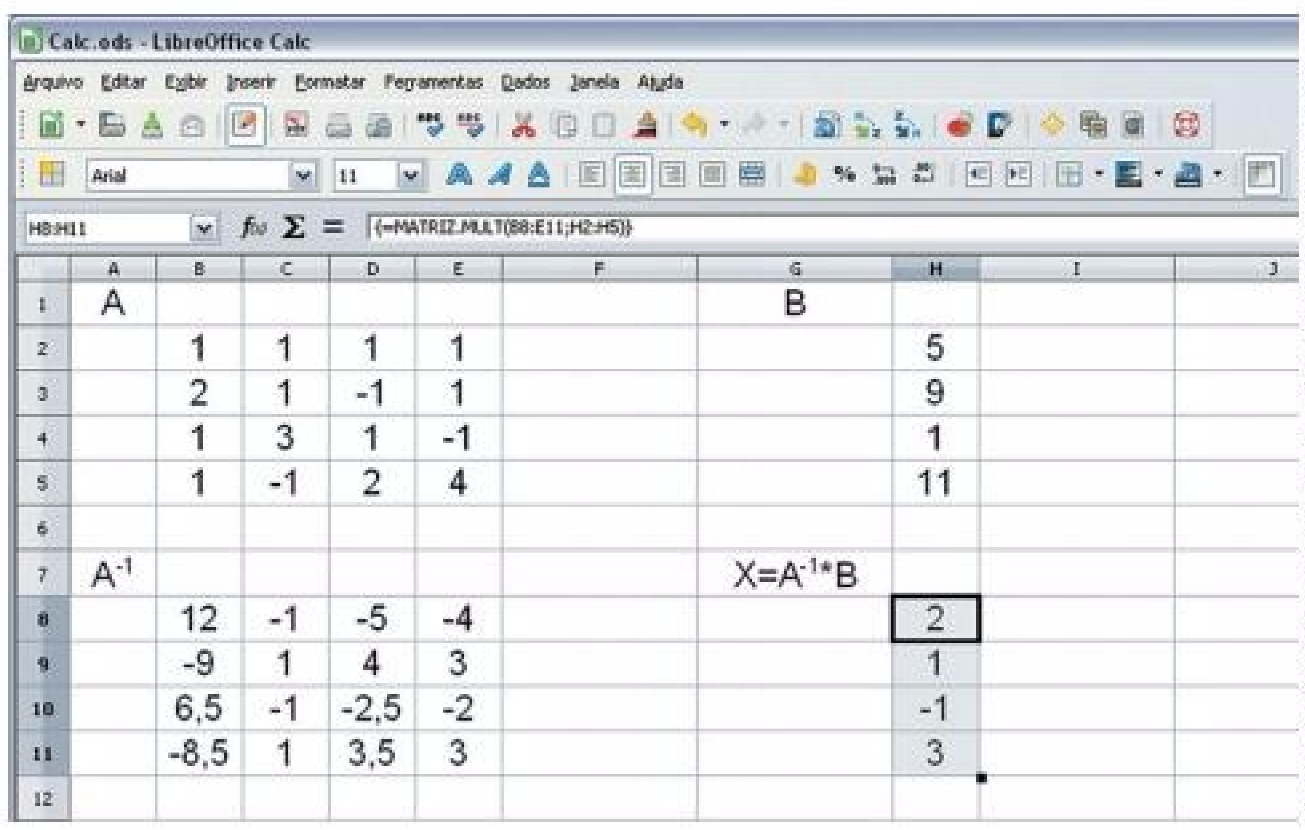
Passo 3: Digite o texto **A^{-1}** na célula A7. Selecione a célula B8 e, no menu **Inserir**, clique em **Função**. Na categoria **Matriciais**, selecione a função **MATRIZ.INVERSO** e clique em **Próximo**. No campo **matriz**, digite **B2 : E5** e, em seguida, clique em **OK**.



Professor(a): Diga aos alunos que para escrever **A^{-1}** basta digitar **A−1**, selecionar **−1** e, no menu **Formatar**, clicar em **Caractere**. Em seguida, na aba **Posição da fonte**, selecionar **Sobrescrito** e clicar em **OK**.

A matriz A^{-1} pode não existir em alguns casos. Quando isso acontecer, o Calc vai mostrar uma mensagem de erro. Nesses casos, o sistema não pode ser resolvido por esse método, pois ele é possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI).

Passo 4: Digite o texto **$X = A^{-1} * B$** na célula G7. Com a célula H8 selecionada clique em **Função** no menu **Inserir**. Na categoria **Matriciais**, selecione a função **MATRIZ.MULT** e clique em **Próximo**. No primeiro campo **matriz,** digite **B8 : E11** e, no segundo, **H2 : H5**. Por fim, clique em **OK**.



Imagens: LibreOffice Calc v. 3.5.3.2. Por The Document Foundation

Assim, $x = 2$, $y = 1$, $z = -1$ e $w = 3$. Portanto, o conjunto solução do sistema é dado por $S = \{(2, 1, -1, 3)\}$.

1. Determine a transposta de cada matriz a seguir.
   - $A = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -9 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 9 & -9 & 5 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$
   - $B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 & -1 \\ -6 & 5 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -3 & 5 \\ -3 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

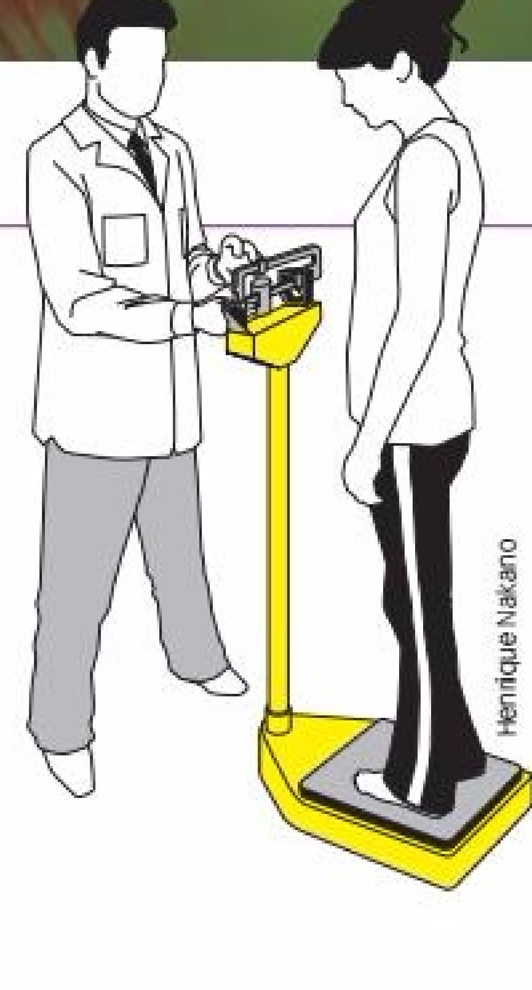
2. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -5 \\ 5 & 1 & 8 \\ -9 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 9 & 8 & -3 \\ 0 & 9 & 7 \\ -5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, calcule:
   - $A + B$ $\begin{bmatrix} 16 & 7 & -8 \\ 5 & 10 & 15 \\ -14 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
   - $B - A$ $\begin{bmatrix} 2 & 9 & 2 \\ -5 & 8 & -1 \\ 4 & -2 & -9 \end{bmatrix}$
   - $A \cdot B$ $\begin{bmatrix} 88 & 52 & -13 \\ 5 & 41 & -32 \\ -111 & -69 & 16 \end{bmatrix}$
   - $3A - 4B$ $\begin{bmatrix} -15 & -35 & -3 \\ 15 & -33 & -4 \\ -7 & 7 & 30 \end{bmatrix}$

3. Para cada sistema linear, escreva a equação matricial correspondente e, em seguida, resolva o sistema utilizando a matriz inversa, se possível. Professor(a): Veja a resposta desta atividade na Assessoria Pedagógica.
   - $\begin{cases} -a + b - c - d + e = 3 \\ a - b - c - d + e = 9 \\ a - b - c + d + e = 1 \\ -a + b + c - d + e = 9 \\ -a - b + c - d - e = 3 \end{cases}$
   - $\begin{cases} a + 8c - 6d - 3e = 21 \\ -9a - 9b - 3c - 12d + 9e = -48 \\ -4a + 5b - 6c + 5d + 7e = -10 \\ 6a + 3c + 4d - 2e = 15 \\ -3a - 3b - c - 4d + 3e = -16 \end{cases}$ Professor(a): Diga aos alunos que, apesar de não existir a inversa da matriz incompleta do sistema, ele é possível e indeterminado (SPI).

4 DETERMINANTES E RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Monika Gn/ Dreamstime.com

Profissão: nutricionista



Henrique Nakano

Esta imagem é uma representação artística. As cores utilizadas não correspondem às reais.

A profissão de nutricionista foi regulamentada em 17 de setembro de 1991. Entre outras responsabilidades, o nutricionista foi incumbido de planejar, organizar, dirigir, supervisionar e avaliar serviços de alimentação e nutrição. Na prática, a atuação dos nutricionistas ocorre na área clínica, na saúde coletiva, na indústria de alimentos e na segurança alimentar. A cada uma delas ele fornece consultoria e assessoria nutricional. Além disso, ele pode atuar em docência, pesquisa científica e nutrição esportiva.

Professor(a): Diga aos alunos que, entre as informações presentes nas tabelas nutricionais, as mais comuns são:

- valor energético, que é a energia proveniente de carboidratos, proteínas e gorduras;
- carboidratos, cuja principal função é fornecer energia ao organismo;
- proteínas, que participam da construção e manutenção de células e órgãos;
- gorduras totais, que é a soma de todas as gorduras;
- gorduras saturadas, de origem essencialmente animal;
- gorduras *trans*, encontradas geralmente em alimentos industrializados;
- fibra alimentar, que é um importante regulador do funcionamento intestinal;
- sódio, cuja principal fonte conhecida é o sal de cozinha;
- percentual de valores diários (%VD), que geralmente é o percentual em relação a uma dieta diária de 2000 kcal.

Professor(a): Estudos mostram que a maior parte das pessoas que leem as informações presentes nas tabelas nutricionais são aquelas que têm doenças diretamente influenciadas pela alimentação, como diabetes. Entre as que não leem, a principal justificativa é a incredulidade nas informações.

Comer frutas e verduras é um hábito alimentar saudável, por isso procure incluir alimentos desses dois grupos em sua alimentação diária. Dê preferência aos produtos de época e cultivados em sua região, pois em geral são mais frescos e custam menos.

Alimentação saudável

Ter uma vida saudável, em geral, é consequência de uma série de fatores, como alimentação balanceada, controle de peso e prática regular de exercícios físicos. Segundo nutricionistas, tudo começa com uma boa alimentação, que deve ser adequada às diferentes fases e condições de vida, composta de alimentos de qualidade e em quantidade suficiente para atender às necessidades nutricionais de cada pessoa, evitando excessos.

Na hora de escolher os alimentos, é importante conhecer os nutrientes que eles fornecem. Segundo a Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa), a tabela nutricional é de presença obrigatória nos rótulos dos produtos alimentícios industrializados.

Além de informar o consumidor, a tabela nutricional é essencial para os nutricionistas. A partir dela, eles podem prescrever uma dieta adequada às necessidades alimentares dos pacientes. Suponha que um paciente necessite consumir 2,5 mg de cálcio, 45 mg de ferro, 350 mg de magnésio e 10 mg de cobre diariamente. Suponha também que os alimentos *a*, *b*, *c* e *d* possuam por porção, respectivamente, 0,5 mg, 0,5 mg, 0,1 mg e 0,3 mg de cálcio, 5 mg, 5 mg, 7 mg e 11 mg de ferro, 40 mg, 70 mg, 25 mg e 50 mg de magnésio e 0,2 mg, 1,2 mg, 1,7 mg e 2,8 mg de cobre. Para determinar a quantidade de porções a serem consumidas de cada alimento, *a*, *b*, *c* e *d*, um nutricionista pode escrever e resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 0{,}5a+0{,}5b+0{,}1c+0{,}3d=2{,}5 \\ 5a+5b+7c+11d=45 \\ 40a+70b+25c+50d=350 \\ 0{,}2a+1{,}2b+1{,}7c+2{,}8d=10 \end{cases}$$

Professor(a): Proponha aos alunos algumas questões relacionadas a esse tema. Algumas sugestões são:

a) Qual a importância de ler a tabela nutricional dos alimentos? (Resposta esperada: Informar-se das quantidades de cada componente nutricional do alimento e determinar quantidades dele que podem ser consumidas para se adequar à dieta.)

b) O que significam os números *a*, *b*, *c* e *d* que são solução do sistema linear apresentado no texto? (Resposta: São as quantidades de porções a serem consumidas dos alimentos *a*, *b*, *c* e *d*. Nesse exemplo, o paciente irá consumir 1 porção de *a*, 3 porções de *b*, 2 porções de *c* e 1 porção de *d*.)

Ao resolver esse sistema, obtém-se $a=1$, $b=3$, $c=2$ e $d=1$

Ministério da Saúde/Governo Federal

Cartaz de uma campanha lançada pelo Ministério da Saúde e pelo Ministério da Pesca e Aquicultura com o objetivo de incentivar a inclusão do pescado na alimentação regular dos brasileiros.

Nesta unidade você vai...

- › compreender algumas técnicas para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada.
- › utilizar o determinante como uma ferramenta para a resolução de sistemas lineares.
- › resolver sistemas lineares por meio da regra de Cramer.

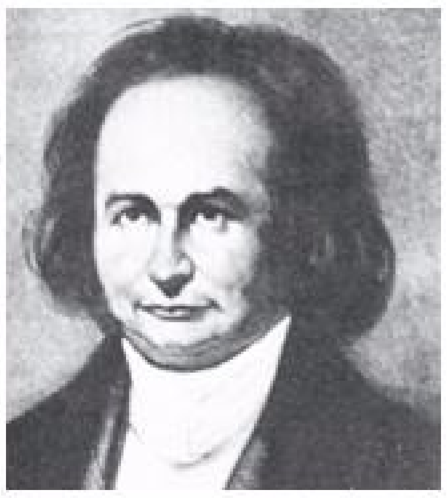
Professor(a): Explique aos alunos que estes são os principais objetivos a serem atingidos por eles nesta unidade. Retome esses objetivos no decorrer dos estudos da unidade e, se julgar necessário, estabeleça também novos objetivos. Na Assessoria Pedagógica encontram-se os objetivos gerais deste nível de ensino, assim como os objetivos específicos desta unidade.

DETERMINANTES

Na unidade anterior, vimos como resolver alguns sistemas lineares. Estudamos também as matrizes e suas operações. Agora, vamos estudar o **determinante** de uma matriz quadrada, que é um número real associado à matriz.

A teoria dos determinantes se desenvolveu, principalmente, graças aos estudos de dois grandes matemáticos do século XIX: Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) e Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Essa teoria permitiu o desenvolvimento de técnicas avançadas de resolução de problemas de diversas áreas, como da computação.

Autor desconhecido. Séc. XIX. Coleção particular



Carl Gustav Jacob Jacobi

Rosselin. Séc. XIX. Biblioteca do Instituto de Astronomia da Universidade de Cambridge, Cambridge

Augustin-Louis Cauchy

Podemos associar os coeficientes das incógnitas de um sistema linear $n \times n$ a uma matriz quadrada. Chamamos **matriz incompleta do sistema** a matriz formada apenas pelos coeficientes das incógnitas, e **matriz completa do sistema** a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas e pelos termos independentes. Por exemplo:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+3z=-9 \\ x-3y-z=-2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -9 \\ 1 & -3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Sistema. Matriz incompleta do sistema. Matriz completa do sistema.

Também podemos representar esse sistema por meio de um produto de matrizes:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{matriz incompleta do sistema}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{matriz das incógnitas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\text{matriz dos termos independentes}}$$

Essa maneira de representar um sistema é chamada **forma matricial do sistema**.

O determinante de uma matriz quadrada **A** é um número real, que indicamos por $\det A$. Caso o determinante da matriz incompleta de um sistema linear seja diferente de zero, podemos afirmar que esse sistema possui uma única solução. Para esses casos, estudaremos nesta unidade a **regra de Cramer**, por meio da qual é possível determinar a solução de um sistema linear com base no cálculo de determinantes.

É possível calcular o determinante apenas de uma matriz quadrada.

Nesta unidade vamos estudar como calcular o determinante de uma matriz de ordem 1, 2 ou 3. No entanto, é possível calcular o determinante de qualquer matriz de ordem n.

Determinante de uma matriz de ordem 1

O determinante de uma matriz de ordem 1 é o próprio elemento da matriz, ou seja, dada a matriz $A=[a_{11}]$, temos que $\det A = a_{11}$.

Exemplos:

$A=[3] \Rightarrow \det A = 3$ $\qquad$ $B=[-25] \Rightarrow \det B = -25$

Determinante de uma matriz de ordem 2

Vamos resolver por escalonamento o sistema linear $\begin{cases} ax+by=r \\ cx+dy=s \end{cases}$, de incógnitas x e y:

$$\begin{cases} ax+by=r \\ cx+dy=s \quad \cdot(a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+by=r \quad \cdot(-c) \\ acx+ady=as \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax+by=r \\ \cancel{acx}-\cancel{acx}+ady-bcy=as-cr \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+by=r \\ (ad-bc)y=as-cr \end{cases}$$

A resolução de um sistema linear por escalonamento foi estudada na unidade anterior.

Se o coeficiente de y da segunda equação for diferente de zero $(ad-cb \neq 0)$, podemos determinar o valor de y e, em seguida, o valor de x, que serão únicos. Teremos então um sistema com uma única solução, ou seja, um sistema possível e determinado (SPD). Caso $ad-cb=0$, teremos um sistema possível e indeterminado (SPI) ou um sistema impossível (SI), sendo necessária maior investigação para determinar a quantidade de soluções.

Professor(a): Explique aos alunos que, caso o coeficiente de y da segunda equação seja igual a zero $(ad-cb=0)$, o sistema $\begin{cases} ax+by=r \\ (ad-bc)y=as-cr \end{cases}$ será: possível e indeterminado (SPI) se $as-cr=0$; ou impossível (SI) se $as-cr \neq 0$.

O valor da expressão $ad-bc$ é chamado de determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, em que **a**, **b**, **c** e **d** são coeficientes do sistema de equações.

> O determinante de uma matriz de ordem 2 é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, ou seja, dada a matriz $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, temos que:
>
> $$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Note que para representar a matriz utilizamos colchetes. Já para representar o determinante dessa matriz, substituímos os colchetes por barras verticais. Lembrando que a matriz é uma tabela e o determinante, um número.

Exemplos:

Para cada sistema de equações, calcule o determinante da matriz dos coeficientes e verifique se o sistema possui uma única solução.

- $\begin{cases} x+2y=1 \\ 3x-4y=0 \end{cases}$ Professor(a): A única solução deste sistema é o par ordenado $\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{10}\right)$.

  Sendo **A** a matriz dos coeficientes, temos:

  $$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-4)-2\cdot 3=-10$$

  Como o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero $(\det A=-10)$, esse sistema possui uma única solução.

- $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ 4x+2y=3 \end{cases}$

  $$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2-1\cdot 4=0$$

  Como o determinante da matriz dos coeficientes é igual a zero $(\det A=0)$, o sistema não possui uma única solução. Nesse caso, o sistema não possui solução ou possui infinitas soluções.

Para verificar a quantidade de soluções desse sistema, devemos utilizar outro método, como o escalonamento.

Determinante de uma matriz de ordem 3

Resolvendo por escalonamento o sistema de equações $\begin{cases} ax+by+cz=r \\ dx+ey+fz=s \\ gx+hy+iz=t \end{cases}$, de incógnitas x, y, z, temos:

$$\begin{cases} ax+by+cz=r \\ dx+ey+fz=s \\ gx+hy+iz=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+by+cz=r \\ 0x+(ae-bd)y+(af-dc)z=as-dr \\ 0x+0y+(aei+bfg+cdh-ceg-afh-bdi)z=aet+bsg+rdh-ger-hsa-tdb \end{cases}$$

Forma matricial do sistema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}}_{\text{matriz dos coeficientes}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{matriz das incógnitas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix}}_{\text{matriz dos termos independentes}}$$

Se o coeficiente de z da terceira equação for diferente de zero ($aei+bfg+cdh-ceg-afh-bdi \neq 0$), podemos determinar o valor de z e, em seguida, o valor de y e de x, que serão únicos. Teremos então um sistema possível e determinado (SPD). Caso $aei+bfg+cdh-ceg-afh-bdi=0$, teremos um sistema possível e indeterminado (SPI) ou um sistema impossível (SI), sendo necessária maior investigação para determinar a quantidade de soluções.

O valor de $aei+bfg+cdh-ceg-afh-bdi$ é definido como o determinante da matriz formada pelos coeficientes do sistema de equações.

O determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ é dado por:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

De maneira prática, para calcularmos o determinante de uma matriz de ordem 3, utilizaremos a seguinte regra, denominada **regra de Sarrus**:

1) Repetimos a 1ª e a 2ª coluna à direita da matriz.

2) Em seguida, multiplicamos os elementos na direção paralela à diagonal principal, como indicado.

3) Por fim, multiplicamos os elementos na direção paralela à diagonal secundária, como indicado, e multiplicamos o resultado por (−1).

Professor(a): Verifique se os alunos perceberam que as multiplicações são realizadas apenas nas diagonais e nas direções paralelas que possuem 3 elementos. Não multiplicamos nas direções paralelas com 2 elementos ou 1 elemento.

$$\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} -(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}) & & a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ -(a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}) & & a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ -(a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}) & & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \end{array}$$

Calculamos o determinante adicionando esses valores.

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Exemplo:

Aplicando a regra de Sarrus, calcule o determinante da matriz dos coeficientes e verifique se o sistema $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x+5y-4z=6 \\ x+2y+z=-2 \end{cases}$ possui uma única solução.

$$\begin{array}{ccc:cc} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -(0 \cdot 5 \cdot 1)=0 & & 0 \cdot 3 \cdot 2=0 \\ -(2 \cdot (-4) \cdot 2)=16 & & 1 \cdot (-4) \cdot 1=-4 \\ -(1 \cdot 3 \cdot 1)=-3 & & 2 \cdot 5 \cdot 1=10 \end{array}$$

$$0-4+10+0+16-3=19$$

Como o determinante das matrizes dos coeficientes é diferente de zero ($19 \neq 0$), o sistema possui uma única solução, ou seja, esse sistema é possível e determinado.

Professor(a): A única solução deste sistema é a terna $\left(\frac{41}{19}, -\frac{25}{19}, -\frac{29}{19}\right)$.

O que podemos concluir caso o determinante da matriz dos coeficientes seja igual a zero?

Que o sistema possui infinitas soluções ou não possui soluções.

Atividades resolvidas

R1. Mostre que, trocando de posição as colunas ou as linhas de uma matriz quadrada **A** de ordem 2, o determinante obtido em ambos os casos é oposto ao det A.

Resolução

Seja a matriz $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então $\det A=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$.

- 1º caso

Trocando as colunas de **A**, temos $A_1=\begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$.

Logo, $\det A_1=\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}=\underbrace{bc-ad}_{-\det A}$.

Portanto, $\det A=-\det A_1$.

- 2º caso

Trocando as linhas de **A**, temos $A_2=\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$.

Logo, $\det A_2=\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}=cb-da=\underbrace{bc-ad}_{-\det A}$.

Portanto, $\det A=-\det A_2$.

Caso seja realizada a troca de posição das colunas e das linhas simultaneamente, temos que $A_3=\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$.

Logo, $\det A_3=\begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}=da-cb=\underbrace{ad-bc}_{\det A}$.

Portanto, $\det A=\det A_3$.

Para cada troca realizada, obtém-se o oposto do determinante da matriz.

Professor(a): Verifique se os alunos perceberam que, ao se fazer uma quantidade ímpar de trocas, obtém-se o oposto do determinante da matriz, mas, caso seja realizada uma quantidade par de trocas, o determinante será o mesmo da matriz.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Calcule o determinante de cada matriz.

a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ $\det A=-3$

b) $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ $\det B=0$

c) $C=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ $\det C=-9$

d) $D=\begin{bmatrix} 5 & -9 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ $\det D=5$

2. (UERN) Sejam as matrizes $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ x & 4 & 1 \\ -1 & 6 & y \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 6 & y & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ x & -1 & 1 \end{bmatrix}$, cujos determinantes são, respectivamente, iguais a 63 e 49. Sendo $y=x+3$, então a soma dos valores de x e y é: a

a) 7 b) 8 c) 10 d) 12

3. Calcule o determinante de cada uma das matrizes

$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e

$C=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

*As três matrizes apresentaram uma linha na qual todos os elementos são iguais a zero e também o mesmo determinante, que é zero.

Quais regularidades você percebeu em relação às matrizes e seus determinantes? $\det A=\det B=\det C=0$*

Escreva uma matriz genérica 3×3 com a mesma característica das anteriores e verifique se essa regularidade é uma regra geral.

Professor(a): Veja a resposta desta questão no final do livro.

4. Sejam as matrizes

$A=(a_{ij})_{2\times2}$, tal que $\begin{cases} i+j, \text{ se } i<j \\ i-j, \text{ se } i>j, \text{ e} \\ 0, \text{ se } i=j \end{cases}$

$B=(b_{ij})_{2\times2}$, tal que $\begin{cases} i-j, \text{ se } i<j \\ i+j, \text{ se } i>j. \\ 1, \text{ se } i=j \end{cases}$

Explicite as matrizes **A** e **B** e resolva: $A=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

a) $\det(A\cdot B)$ $\det(A\cdot B)=-12$

b) $\det(A-B)$ $\det(A-B)=9$

c) $\det(B-A)$ $\det(B-A)=9$

5. Na matriz $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, temos um par de linhas iguais, e na matriz $B=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, temos um par de colunas iguais.

Calculando o determinante dessas matrizes, obtemos $\det A=0$ e $\det B=0$. Escreva outras duas matrizes, **C** e **D**, de maneira que uma delas possua um par de linhas iguais e a outra, um par de colunas iguais, e verifique o valor do determinante de cada uma delas. Quais regularidades você percebeu em relação às matrizes e seus determinantes?**

**Resposta esperada: Quando uma matriz apresenta um par de linhas ou de colunas iguais, seu determinante é igual a zero.

Utilizando uma matriz genérica, demonstre que a propriedade observada acima é válida para qualquer matriz 3×3.

Professor(a): Veja a resposta desta questão na Assessoria Pedagógica.

Teorema de Binet e teorema de Jacobi

Agora, estudaremos duas importantes propriedades dos determinantes.

- **Teorema de Binet**:

Dadas duas matrizes quadradas **A** e **B**, de mesma ordem, temos que $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Por exemplo, dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, temos:

› $A \cdot B = \begin{bmatrix} -3 & 15 \\ 1 & 18 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} -3 & 15 \\ 1 & 18 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 18 - 1 \cdot 15 = -69$

› $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot 7 = -23$

› $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 0 \cdot (-1) = 3$

› $\det A \cdot \det B = (-23) \cdot 3 = -69$

Observe que $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Professor(a): Diga aos alunos que, para verificar que uma relação não é válida, basta apresentar um exemplo. Mas isso não é válido para provar que um teorema é verdadeiro, ou seja, não é possível provar um teorema por meio de exemplos.

- Verifique que a relação $\det(A + B) = \det A + \det B$ não é válida.

Temos que:

$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A + B) =$

$= \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot 9 - 5 \cdot 6 = -3$

$\det A + \det B = (-23) + 3 = -20$

Portanto, $\underbrace{\det(A + B)}_{-3} \neq \underbrace{\det A + \det B}_{-20}$.

- **Teorema de Jacobi**:

Em uma matriz **A** de ordem $n \geq 2$, se adicionarmos a uma linha (ou coluna) os elementos correspondentes de outra linha (ou coluna) previamente multiplicados por um número real, o determinante da matriz não se altera.

Por exemplo, dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 10 \\ 4 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 10 \cdot (-1) \cdot 1 + \underbrace{0 \cdot 4 \cdot (-2)}_{0} + 10 \cdot 4 \cdot 2 - (-2) \cdot (-1) \cdot 10 - 2 \cdot 4 \cdot 10 - \underbrace{1 \cdot 4 \cdot 0}_{0} \\ &= -10 + 80 - 20 - 80 \\ &= -30 \end{aligned}$$

Agora, observe que multiplicando a 1ª coluna por -1 e a somando à 3ª coluna, obtemos a matriz **B**:

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = 10 \cdot (-1) \cdot 3 + \underbrace{0 \cdot 0 \cdot (-2)}_{0} + \underbrace{0 \cdot 4 \cdot 2}_{0} - \underbrace{(-2) \cdot (-1) \cdot 0}_{0} - \underbrace{2 \cdot 0 \cdot 10}_{0} - \underbrace{3 \cdot 4 \cdot 0}_{0} = -30$$

Observe que $\det(A) = \det(B)$, ou seja, o determinante da matriz não se alterou.

- Lembre-se de que, para escalonar um sistema linear, realizamos algumas operações, como adicionar, membro a membro, uma equação à outra, multiplicada ou dividida por um número diferente de zero.

Note que a matriz **B** é uma matriz triangular. Em uma matriz triangular qualquer, temos que seu determinante é dado pela multiplicação dos elementos de sua diagonal principal.

De fato, considerando a matriz triangular $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$, temos que:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot 0 + a_{13} \cdot 0 \cdot 0 - a_{13} \cdot a_{22} \cdot 0 - a_{11} \cdot a_{23} \cdot 0 - a_{12} \cdot 0 \cdot a_{33} \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \end{aligned}$$

- Mostre que, se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, então $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$.

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + 0 \cdot 0 \cdot a_{31} + 0 \cdot a_{21} \cdot a_{32} - 0 \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot 0 \cdot a_{32} - 0 \cdot a_{21} \cdot a_{33} \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \end{aligned}$$

Atividades resolvidas

R2. Mostre que se uma matriz **A** de ordem n, com $n \geq 1$, for invertível, então $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Resolução

Considerando a matriz **A** invertível, pela definição de matriz inversa, temos que $A \cdot A^{-1} = I$. Desse modo:

$$\det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det I_n \underset{\substack{\text{Teorema} \\ \text{de Binet}}}{\Rightarrow} \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Professor(a): Diga aos alunos que $\det I_n = 1$, pois a matriz identidade I_n é triangular, deste modo, seu determinante é dado pela multiplicação dos elementos de sua diagonal principal, ou seja: $\det I_n = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$.

Portanto, $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Com base nesse resultado, que é uma consequência do teorema de Binet, é possível afirmar que uma matriz **A** admite inversa apenas quando $\det A \neq 0$.

R3. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 10 & 2 & 12 \end{bmatrix}$.

Resolução

Multiplicando a 1ª linha por (-2) e a somando à 3ª linha, obtemos a matriz **C**:

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora, multiplicando a 2ª coluna por (-3) e somando à 1ª coluna, obtemos a matriz **B**:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Pelo teorema de Jacobi, temos que $\det(A) = \det(B)$. Como a matriz **B** é triangular, temos:

$$\det(A) = \det(B) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$$

Portanto, $\det(A) = 2$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

6. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $\det A$ $\det A = -1$

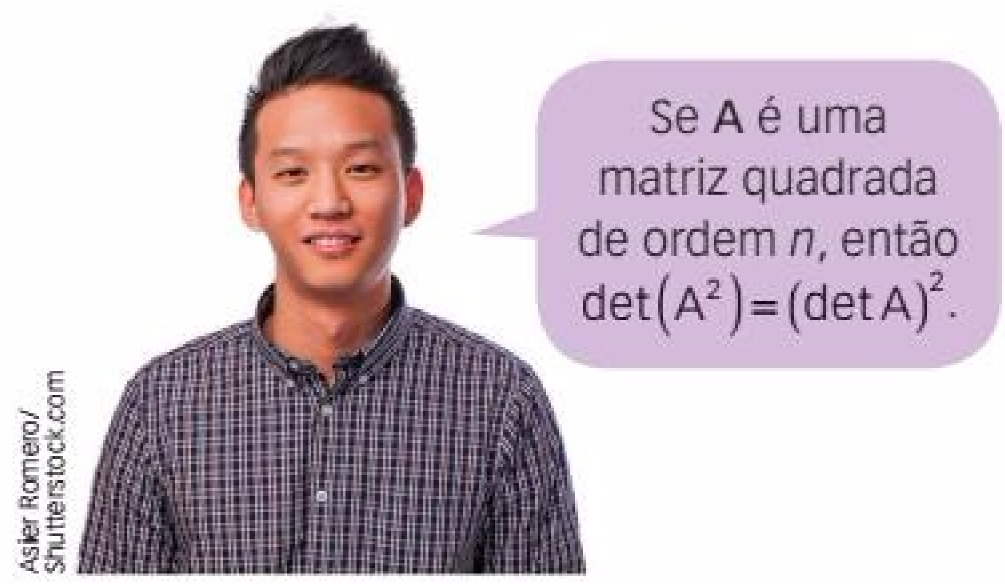
b) $\det B$ $\det B = 3$

c) $\det C$ $\det C = -1$

d) $\det(A \cdot C)$ $\det(A \cdot C) = 1$

e) $\det(B \cdot C)$ $\det(B \cdot C) = -3$

7. Durante a resolução de uma atividade sobre determinantes de matrizes, Rogério concluiu o seguinte:



Asier Romero/Shutterstock.com

A conclusão de Rogério foi correta? Justifique.

Sim, pois $\det\left(A^2\right) = \det(A \cdot A) = \det A \cdot \det A = (\det A)^2$

8. (UPM-SP) Dadas as matrizes $A=(a_{ij})_{3\times3}$ tal que

$$\begin{cases} a_{ij}=10, \text{ se } i=j \\ a_{ij}=0, \text{ se } i\neq j \end{cases}$$

e $B=(b_{ij})_{3\times3}$ tal que

$$\begin{cases} b_{ij}=3, \text{ se } i=j \\ b_{ij}=0, \text{ se } i\neq j \end{cases},$$

o valor de $\det(A\cdot B)$ é: a

a) 27×10^3

b) 9×10^3

c) 27×10^2

d) $3^2\times10^2$

e) 27×10^4

9. Considere a afirmação:

> Uma matriz **A**, quadrada, de ordem *n* só é invertível se seu determinante for diferente de zero.

Essa afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique.
Verdadeira; A é invertível, então $\det A\cdot\det A^{-1}=1$, logo, $\det A\neq0$.

10. Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $\det A$ −24

b) $\det B$ 8

c) $\det A\cdot B$ −192

11. (Unicamp) Considere a matriz quadrada de ordem 3,

$A=\begin{bmatrix} \cos x & 0 & -\operatorname{sen} x \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} x & 0 & \cos x \end{bmatrix}$, onde *x* é um número real.

Podemos afirmar que: d

a) **A** não é invertível para nenhum valor de *x*.

b) **A** é invertível para um único valor de *x*.

c) **A** é invertível para exatamente dois valores de *x*.

d) **A** é invertível para todos os valores de *x*.

Calculando o determinante de uma matriz com o Calc

Observe como podemos calcular o determinante da matriz $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 8 & 6 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ utilizando o Calc.

Passo 1: No menu **Editar**, clique em **Selecionar tudo**. No menu **Formatar**, clique em **Células**. Na aba **Alinhamento**, selecione **Centro** para o campo **Horizontal** e **No meio** para o campo **Vertical**. Marque a opção **Quebra automática de texto**. Na aba **Fonte**, escolha **11** no campo **Tamanho**. Por fim, clique em **OK**.

Passo 2: Introduza a matriz **A** na planilha do Calc, da célula B2 até a célula D4.

Passo 3: Digite o texto **Det(A)=** na célula E5 e, na célula F5, insira o comando **=MATRIZ.DETERM(B2 : D4)**.

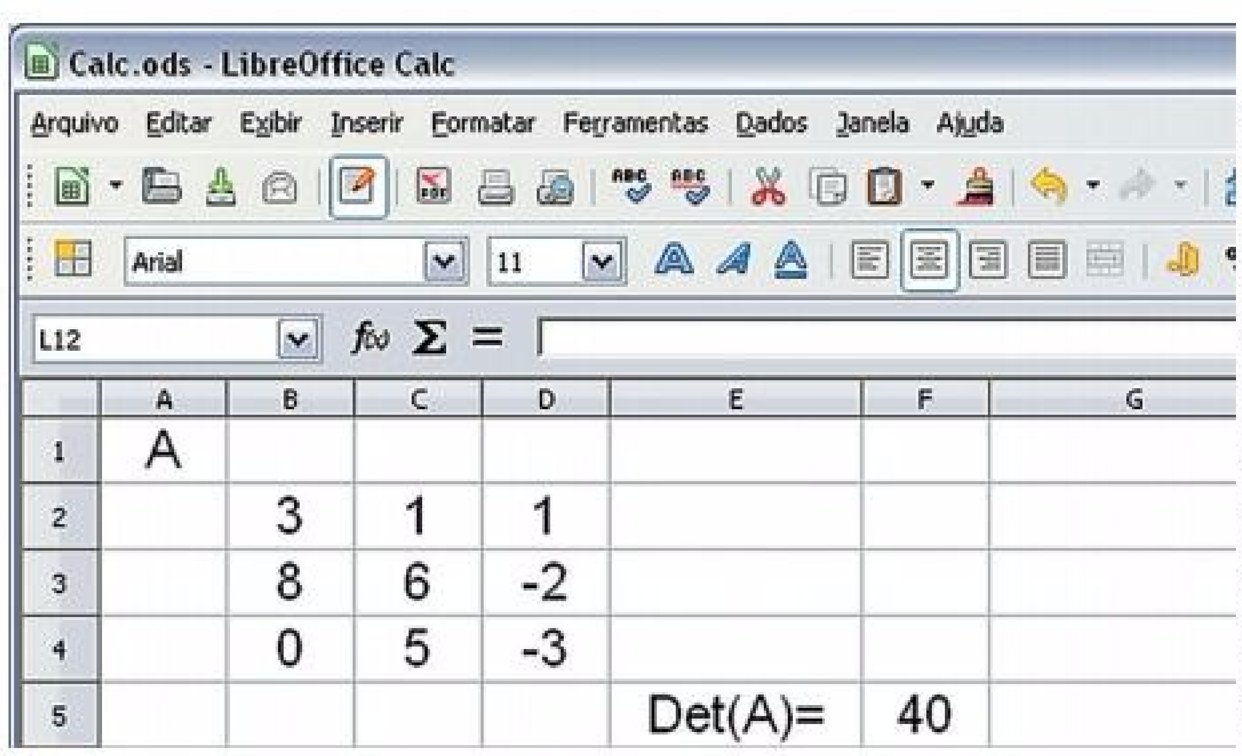
CALC

Planilha eletrônica que faz parte do pacote LibreOffice, desenvolvido pela The Document Foundation, uma organização sem fins lucrativos.

Licença: Pode ser copiado, distribuído, modificado e reestruturado, além de poder utilizá-lo para criar obras derivadas.

Onde obter: <http://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/>

Versão utilizada: 3.5.3.2



LibreOffice Calc v. 3.5.3.2. Por The Document Foundation

Agora, calcule o determinante de cada matriz a seguir.

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ 66

b) $B=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -7 \\ -7 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ 75

c) $C=\begin{bmatrix} 9 & -5 & -9 \\ -2 & 4 & 2 \\ -7 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ −234

COMO FUNCIONA — O carro *flex*

O princípio básico de funcionamento de um motor a combustão é transformar a energia gerada em uma pequena câmara de explosão em energia mecânica, capaz de gerar movimento, que é transmitido para as rodas do veículo. Na câmara de explosão a razão ar/combustível (ou relação estequiométrica) tem de ser exata, por exemplo, 14,7 partes de ar para cada parte de gasolina ou 9 partes de ar para cada parte de etanol.*

Mas como um único motor pode funcionar com gasolina, etanol ou a mistura dos dois combustíveis com características tão diferentes? O que tornou isso possível foi o gerenciamento eletrônico do motor, realizado por um módulo de controle eletrônico.

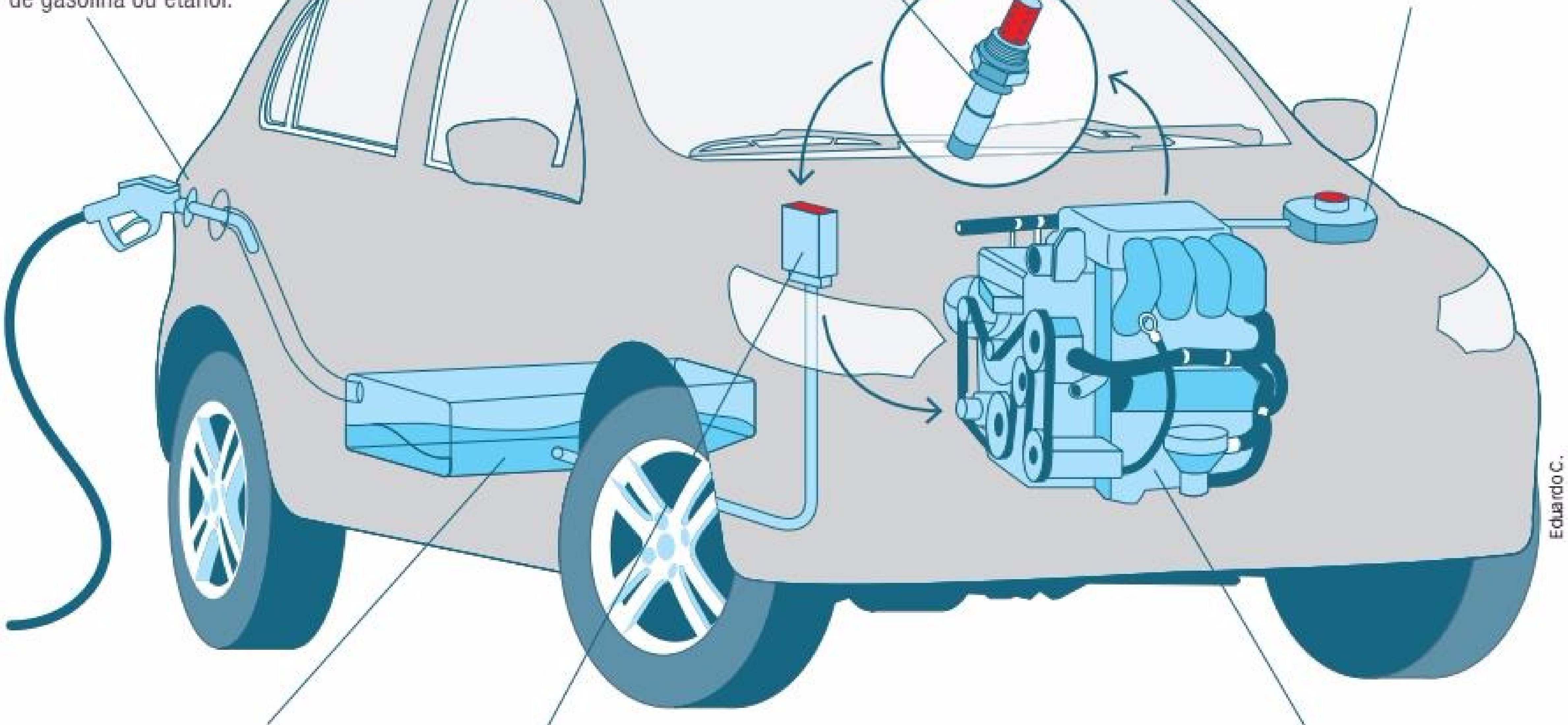
*Professor(a): Diga aos alunos que essa relação varia de acordo com a mistura utilizada para produzir a gasolina ou o etanol. De modo geral, o etanol necessita de menor quantidade de oxigênio na câmara de combustão por este já conter um átomo de oxigênio em sua fórmula molecular. A fórmula molecular da gasolina pode variar, sendo, em média, C_8H_{18} (8 átomos de carbono e 18 de hidrogênio), e a do etanol é C_2H_6O (2 átomos de carbono, 6 de hidrogênio e um de oxigênio).

Esta imagem é uma representação artística. As cores utilizadas não correspondem às reais e os elementos ilustrados não estão proporcionais.

A **sonda lambda** é o sensor que lê a quantidade de oxigênio nos gases emitidos pela queima do combustível e repassa essas informações ao **módulo de controle eletrônico** (do inglês, *Electronic Counter Measures*), conhecido como ECM.

Um pequeno reservatório de gasolina no compartimento do motor e uma bomba elétrica permitem que uma pequena quantidade de gasolina seja introduzida automaticamente no motor para colocá-lo em movimento em dias frios, pois a gasolina evapora e chega ao motor mais facilmente que o etanol nessas condições.

O nome *flex* vem da palavra flexível, que caracteriza os carros que podem ser abastecidos com qualquer proporção de gasolina ou etanol.



O tanque de combustível é um pouco maior que o dos carros com motor a gasolina, para aumentar a autonomia para o etanol, visto que ele consome mais combustível por quilômetro rodado.

Com base nas informações da sonda lambda e em outras informações obtidas por demais sensores (como o quanto o acelerador está aberto, as rotações por minuto do motor, entre outras), o programa de computador instalado no ECM calcula a proporção de gasolina e etanol na mistura dos combustíveis e determina o ajuste necessário para a relação ar/combustível que irá entrar no cilindro, de forma rápida e imperceptível, buscando sempre a melhor combustão.

Além do módulo de controle eletrônico, o motor *flex* recebe alterações nos materiais dos componentes internos, já que o etanol é mais corrosivo e não lubrifica tanto quanto a gasolina.

A quilometragem percorrida utilizando o etanol é cerca de 30% menor do que com a gasolina. Desse modo, conhecendo os preços ou a quantidade de cada tipo de combustível no tanque, o condutor de um carro *flex* pode realizar alguns cálculos envolvendo um sistema de equações lineares e, além de determinar a autonomia do veículo, ele pode escolher qual opção é mais vantajosa financeiramente, dada a instabilidade dos preços. No entanto, além do preço mais baixo, o benefício ambiental é o grande atrativo na escolha do etanol ao abastecer.

Ao contrário dos combustíveis fósseis, os biocombustíveis vêm de fontes renováveis, ou seja, podem ser produzidos sem esgotar os recursos naturais do planeta. Além disso, a maior parte dos combustíveis fósseis está restrita a poucos países, forçando os demais a importarem, em alguns casos, mais de 50% do combustível que consomem. Outra vantagem dos combustíveis alternativos se refere à poluição causada, visto que o etanol, por exemplo, emite cerca de 73% menos CO_2 na atmosfera que a gasolina. A combustão de 1 litro de gasolina libera cerca de 2,28kg de CO_2, enquanto 1 litro de etanol libera 0,56kg de CO_2.

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES PELA REGRA DE CRAMER

Estudamos anteriormente que para analisar se um sistema linear é possível e determinado, ou seja, se possui uma única solução, basta calcular o determinante da matriz incompleta do sistema. Caso o determinante seja diferente de zero, tem-se um SPD. Para verificar se o sistema é SPI ou SI, utilizamos outros métodos, como o escalonamento.

Agora, estudaremos a **regra de Cramer**, que permite obter a solução de sistemas possíveis e determinados. Para resolver pela regra de Cramer o sistema $\begin{cases} ax+by=r \\ cx+dy=s \end{cases}$, de incógnitas x e y, inicialmente escrevemos sua forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matriz}\\\text{incompleta}\\\text{do sistema}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matriz}\\\text{das}\\\text{incógnitas}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matriz}\\\text{dos termos}\\\text{independentes}}}$$

Então, efetuamos:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} \text{ e } y = \frac{\det A_y}{\det A}$$

Para que as razões $\frac{\det A_x}{\det A}$ e $\frac{\det A_y}{\det A}$ sejam definidas nos reais, devemos ter $\det A \neq 0$.

em que:

- $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$
- $\det A_x = \begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix}$
- $\det A_y = \begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix}$

Vamos verificar que a regra de Cramer é válida para qualquer sistema linear 2×2. Resolvendo o sistema linear $\begin{cases} ax+by=r \\ cx+dy=s \end{cases}$ por escalonamento, temos:

A resolução de um sistema linear por escalonamento foi estudada na unidade anterior.

$$\begin{cases} ax+by=r \\ cx+dy=s \quad \cdot(a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+by=r \quad \cdot(-c) \\ acx+ady=as \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax+by=r \\ \cancel{acx}-\cancel{acx}+ady-bcy=as-cr \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+by=r \\ (ad-bc)y=as-cr \end{cases}$$

Supondo $\det A = ad-bc \neq 0$, resolvemos a 2ª equação e obtemos o valor de y:

$$(ad-bc)y=as-cr \Rightarrow \boxed{y=\frac{as-cr}{ad-bc}=\frac{\det A_y}{\det A}}$$

Substituindo $y=\frac{as-cr}{ad-bc}$ na 1ª equação, obtemos o valor de x:

$$ax+by=r \Rightarrow ax+b\left(\frac{as-cr}{ad-bc}\right)=r \Rightarrow ax+\frac{abs-bcr}{ad-bc}=r \Rightarrow ax=r-\frac{abs-bcr}{ad-bc} \Rightarrow$$

$$ax=\frac{adr-\cancel{bcr}-abs+\cancel{bcr}}{ad-bc} \Rightarrow \cancel{a}x=\frac{\cancel{a}(dr-bs)}{ad-bc} \Rightarrow \boxed{x=\frac{dr-bs}{ad-bc}=\frac{\det A_x}{\det A}}$$

Portanto, o sistema é possível e determinado se $\det A \neq 0$ e a única solução é o par ordenado (x, y), tal que $x=\frac{\det A_x}{\det A}$ e $y=\frac{\det A_y}{\det A}$, isto é, a regra de Cramer é válida para um sistema linear 2×2.

Podemos realizar a verificação da regra de Cramer para um sistema linear $n \times n$.

Um sistema linear $n \times n$, em que **A** é a matriz incompleta do sistema, é possível e determinado se $\det A \neq 0$. Nesse caso, a única solução $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ do sistema é dada por:

$$x_1 = \frac{\det A_{x_1}}{\det A},\ x_2 = \frac{\det A_{x_2}}{\det A},\ x_3 = \frac{\det A_{x_3}}{\det A}, \dots,\ x_n = \frac{\det A_{x_n}}{\det A}$$

em que:

- A_{x_1}: matriz obtida substituindo em **A** os coeficientes da primeira incógnita pelos termos independentes.
- A_{x_2}: matriz obtida substituindo em **A** os coeficientes da segunda incógnita pelos termos independentes.

⋮

- A_{x_n}: matriz obtida substituindo em **A** os coeficientes da n-ésima incógnita pelos termos independentes.

Exemplo:

Resolução do sistema linear $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = -9 \\ x - 3y - z = -2 \end{cases}$ pela regra de Cramer.

Inicialmente, representamos esse sistema em sua forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{matriz incompleta do sistema}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{matriz das incógnitas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\text{matriz dos termos independentes}}$$

Calculando $\det A$, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 10$$

Caso seja obtido $\det A = 0$, não podemos continuar a resolução do sistema pela regra de Cramer, e o sistema será impossível ou indeterminado.

Como $\det A = 10 \neq 0$, o sistema é possível e determinado e sua solução é dada por (x, y, z), com $x = \frac{\det A_x}{\det A}$, $y = \frac{\det A_y}{\det A}$ e $z = \frac{\det A_z}{\det A}$.

Calculando $\det A_x$, $\det A_y$ e $\det A_z$, temos:

- $A_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -9 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -9 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 10$

- $A_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -9 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -9 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 20$

- $A_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -9 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -9 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -30$

Segue que:

- $x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{10}{10} = 1$
- $y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{20}{10} = 2$
- $z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{-30}{10} = -3$

Portanto, a única solução do sistema é a terna $(1, 2, -3)$.

12. Represente cada sistema em sua forma matricial.
Professor(a): Veja a resposta desta atividade no final do livro.

▸ Em cada item, indique a matriz incompleta, a matriz das incógnitas e a matriz dos termos independentes.

a) $\begin{cases} 2x+3y=-6 \\ 3x-y=8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x-7y+2z=-15 \\ x-2y+z=12 \\ 4x+2y-2z=18 \end{cases}$

13. Resolva cada um dos sistemas lineares a seguir.

a) $\begin{cases} 2x+y-z=-2 \\ x-4y+2z=11 \\ 3x-3y-z=3 \end{cases}$
$S=\{(1,-1,3)\}$

b) $\begin{cases} 4x-2y+z=7 \\ -3x+3y-5z=6 \\ 4x-2y+z=10 \end{cases}$
$S=\varnothing$

c) $\begin{cases} 4x+2y-3z=3 \\ 2x-y+5z=10 \\ -5x-2y+2z=-7 \end{cases}$
$S=\{(-5,25,9)\}$

14. Considere as matrizes $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, tal que $A \cdot C = B$. Escreva um sistema que permita calcular os valores de x, y e z e determine esses valores.
Professor(a): Veja a resposta desta atividade no final do livro.

15. (EsPCEx-SP) Os números das contas bancárias ou dos registros de identidade costumam ser seguidos por um ou dois dígitos, denominados dígitos verificadores, que servem para conferir sua validade e prevenir erros de digitação.

Em um grande banco, os números de todas as contas são formados por algarismos de 0 a 9, na forma abcdef-*xy*, em que a sequência (abcdef) representa, nessa ordem, os algarismos do número da conta, e *x* e *y*, nessa ordem, representam os dígitos verificadores.

Para obter os dígitos *x* e *y*, o sistema de processamento de dados do banco constrói as seguintes matrizes:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} (a-b) \\ (c-d) \\ (e-f) \end{bmatrix}$$

Os valores de *x* e *y* são obtidos pelo resultado da operação matricial $A \cdot B = C$, desprezando-se o valor de *z*. Assim, os dígitos verificadores correspondentes à conta-corrente de número 356281 são: e

a) 34
b) 41
c) 49
d) 51
e) 54

16. (Unicamp-SP) Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha-de-caju e castanha-do-pará. Sabe-se que o quilograma de amendoim custa R$ 5,00, o quilograma de castanha-de-caju, R$ 20,00, e o quilograma de castanha-do-pará, R$ 16,00. Cada lata deve conter meio quilograma da mistura, e o custo total dos ingredientes de cada lata deve ser de R$ 5,75. Além disso, a quantidade de castanha-de-caju em cada lata deve ser igual a um terço da soma das outras duas.

Nesse caso, as quantidades de cada ingrediente por lata são: c

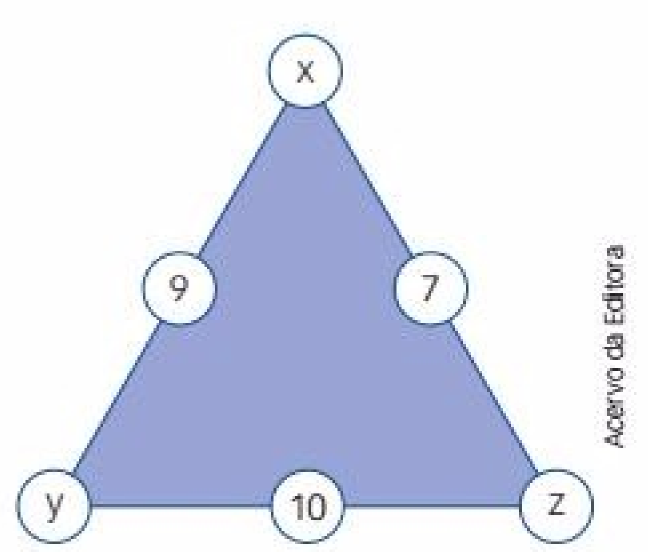
a) 270 g de amendoim, 125 g de castanha-de-caju e 105 g de castanha-do-pará.
b) 270 g de amendoim, 172,5 g de castanha-de-caju e 57,5 g de castanha-do-pará.
c) 250 g de amendoim, 125 g de castanha-de-caju e 125 g de castanha-do-pará.
d) 228 g de amendoim, 100 g de castanha-de-caju e 72 g de castanha-do-pará.

17. Observe as notas e a média final de certo aluno em três etapas de avaliação de um curso composto das disciplinas Matemática, Português e Informática.

Etapa de avaliação	Matemática	Português	Informática	Média final
1º	9	6	7	7,7
2º	8	5	9	7,3
3º	5	9	7	6,6

Sabendo que as notas das disciplinas têm pesos *x*, *y* e *z*, respectivamente, com $x+y+z=10$, determine esses valores. $x=5$; $y=3$; $z=2$

18. Na imagem, os vértices do triângulo estão representados pelas letras *x*, *y* e *z*. A soma dos números indicados em cada um dos lados desse triângulo é igual a 30.



Construa um sistema que permita calcular os valores de *x*, *y* e *z* e, em seguida, resolva o sistema determinando esses valores. $x=12$; $y=9$; $z=11$

19. (UFU-MG) A prefeitura de uma cidade, preocupada com o meio ambiente e com o problema da falta de espaço físico adequado destinado a depósitos de lixo, criou uma cooperativa de reciclagem em parceria com os moradores de baixa renda. O **quadro 1** fornece os preços de venda (em reais) de cada quilograma de papel, vidro e plástico referentes à primeira semana dos meses de setembro de 2009 e setembro de 2010; o **quadro 2** expressa a quantidade total (em kg) vendida desses três materiais na primeira semana dos meses mencionados acima e o rendimento (em reais) referentes à venda dos materiais reciclados, obtidos nas referidas semanas.

Quadro 1

	Papel	Vidro	Plástico
Set./2009	0,30	0,20	0,50
Set./2010	0,40	0,30	1,0

Quadro 2

	Quantidade (kg)	Rendimento (reais)
Set./2009	8 000	R$ 2 580,00
Set./2010	9 000	R

Sabe-se que, na primeira semana de setembro de 2010, foram vendidos 50% a mais de papel do que o vendido na primeira semana de 2009, e iguais quantidades, que aquelas comercializadas na primeira semana de 2009, de vidro e plástico.

Interprete e analise o texto dado, descrevendo expressões matemáticas que conduzam ao valor de **R**. Determine-o.

$\begin{cases} x + y + z = 8\,000 \\ 0{,}3x + 0{,}2y + 0{,}5z = 2\,580 \\ 1{,}5x + y + z = 9\,000 \end{cases}$; R = R$ 4 820,00

Professor(a): Veja na Assessoria Pedagógica orientações para o trabalho com a seção Sobre a unidade.

Sobre a unidade | Anote as respostas no caderno.

1. O que você estudou nesta unidade? Você considera que atingiu os objetivos propostos no início da unidade? Se não, o que fará para atingir os objetivos?
2. Qual dos conteúdos estudados nesta unidade você considera que deve estudar um pouco mais?
3. Se um amigo pedisse a você que explicasse o que é determinante, que explicação você daria?
4. Na unidade anterior, estudamos como resolver um sistema linear por meio de escalonamento. Já nesta unidade, estudamos outro método: a regra de Cramer. Realize uma comparação entre esses métodos de resolução de sistemas lineares.
5. Converse com seus colegas a respeito de situações em que os conteúdos estudados nesta unidade estão presentes. Se necessário, realizem uma pesquisa.

1. Resposta esperada: Determinantes, resolução de sistemas lineares, regra de Sarrus, teorema de Binet, teorema de Jacobi, regra de Cramer. Resposta pessoal. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.
3. Resposta esperada: O determinante de uma matriz quadrada é um número real associado a essa matriz. Esse número real é obtido por meio de operações realizadas com os elementos da própria matriz.
4. Possível resposta: Em relação ao escalonamento, a regra de Cramer tem a vantagem de fornecer diretamente os valores das incógnitas do sistema linear como razões de dois determinantes. Utilizando a regra de Cramer, é possível verificar se um sistema linear é SPD; já por meio de escalonamento, podemos verificar se um sistema linear é SPD; SPI ou SI. A regra de Cramer pode ser aplicada apenas se o sistema linear for SPD, ou seja, quando possui uma única solução. O escalonamento pode ser aplicado a qualquer sistema linear. Em geral, a resolução por meio da regra de Cramer apresenta cálculos mais trabalhosos em relação ao escalonamento.
5. Possível resposta: Os conteúdos desta unidade estão presentes em situações nas quais é necessário resolver um sistema linear.

Ideias matemáticas

O esquema a seguir relaciona algumas das ideias matemáticas estudadas nesta unidade. Converse com seus colegas e professor(a) a respeito de como essas e outras ideias abordadas na unidade estão relacionadas. Em seguida, faça um texto descrevendo as relações existentes entre elas e dê sugestões para complementar e melhorar a organização desse esquema.

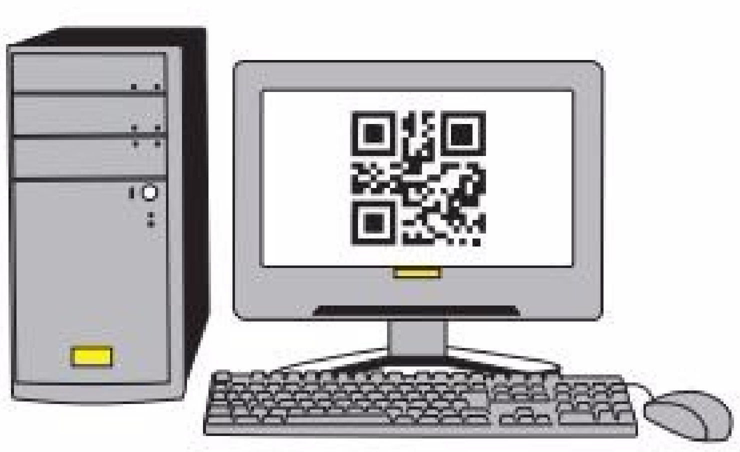
Revise os conteúdos estudados nesta unidade e anote os pontos que julgar mais relevantes. Com isso, organize um resumo para auxiliá-lo(a) na compreensão dos conteúdos.

Professor(a): Converse com os alunos de maneira que retomem os objetivos propostos no início da unidade e verifique, por exemplo, se compreenderam a definição de determinantes. Auxilie-os a listar as principais ideias matemáticas presentes na unidade e a buscar relações entre elas, como a relação entre determinantes e a resolução de sistemas lineares. Com base nas ideias listadas e relações estabelecidas, oriente-os a propor aprimoramentos ao esquema apresentado, inserindo novas ideias e indicando suas possíveis relações. Peça aos alunos que registrem essas discussões, compondo uma síntese da unidade.

5 ANÁLISE COMBINATÓRIA

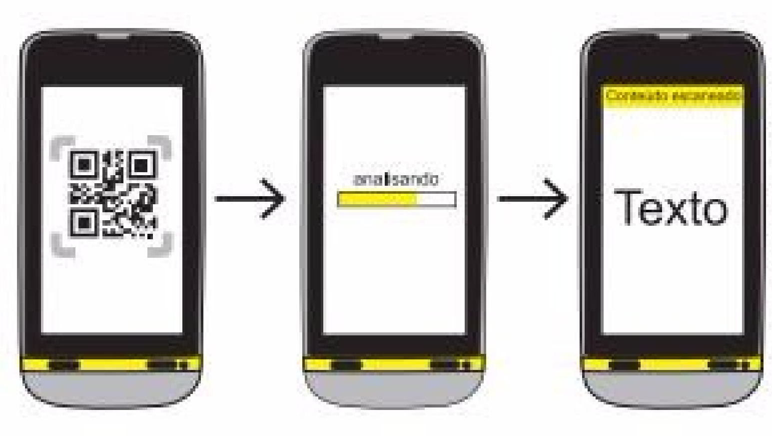
Rangizzz/ Dreamstime.com

Sistema de códigos QR



A mensagem é codificada por um programa de computador. Geralmente, são endereços eletrônicos que redirecionam o acesso ao conteúdo publicado em algum *site*, mas também pode ser um texto, um número de telefone, bem como informações pessoais detalhadas.

Os códigos são impressos em jornais e revistas. Cada vez mais eles estão ganhando espaço em propagandas. Também podem ser utilizados em cartões de visita, facilitando a inserção desses dados em agendas de telefones celulares.

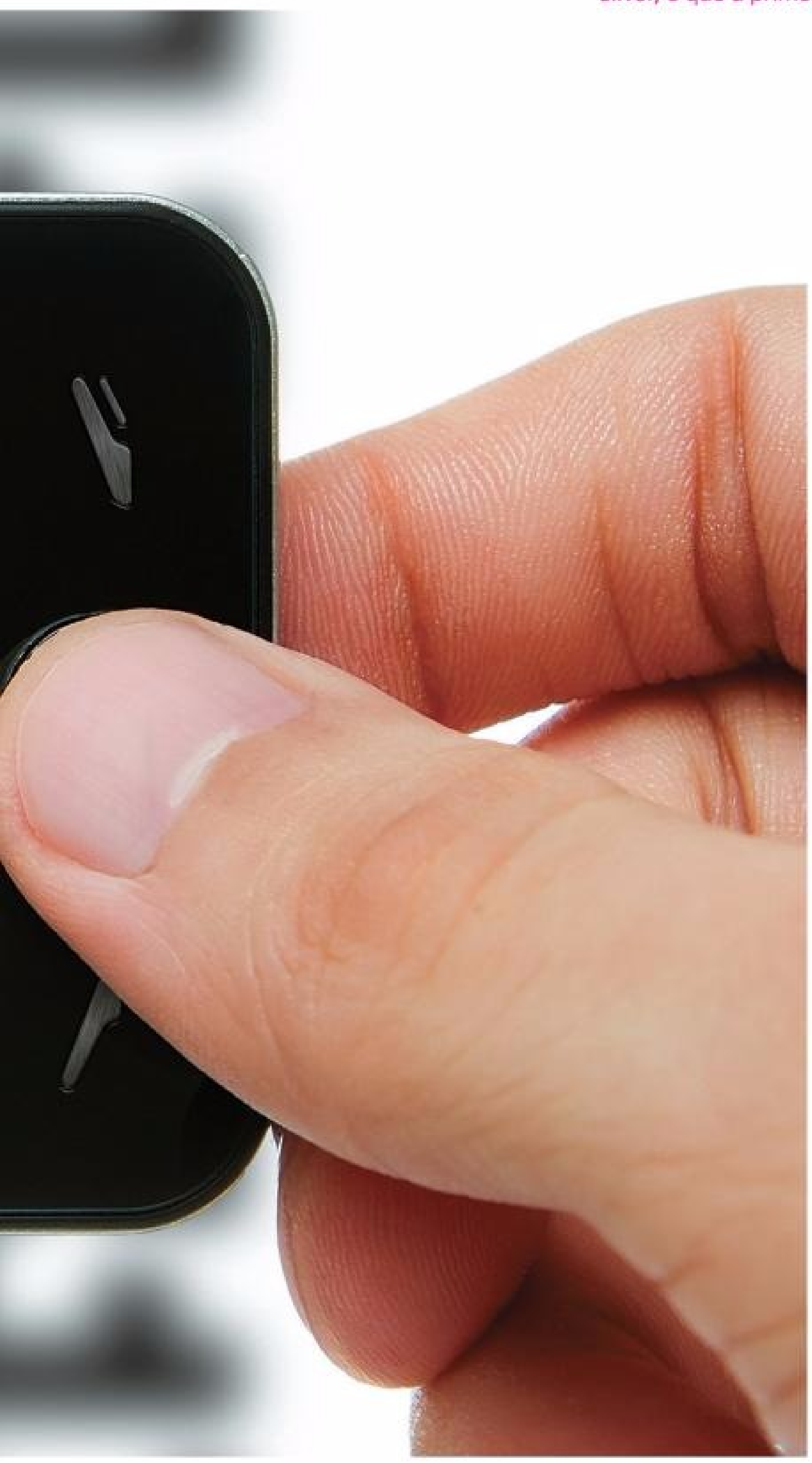


Ilustrações: Henrique Nakano

A leitura pode ser feita pela câmera fotográfica de um celular ou *tablet*, como se fosse o enquadramento de uma foto, desde que tenha instalado um aplicativo para decodificar a mensagem.

As imagens apresentadas são representações artísticas. As cores utilizadas não correspondem às reais e os elementos ilustrados não estão proporcionais.

Professor(a): Proponha aos alunos algumas questões relacionadas a esse tema. Algumas sugestões são:
a) Supondo que determinado tipo de código consiga armazenar apenas 5 caracteres numéricos (de 0 a 9), qual é o número de mensagens diferentes que podem ser codificadas com esse tipo de código? (Resposta: 100 000 mensagens)
b) Cite algumas vantagens dos códigos QR com relação aos códigos de barras. (Resposta esperada: Menor espaço de impressão e maior capacidade de armazenamento.)
Professor(a): Verifique se os alunos reconhecem que uma das principais funções do código de barras é a identificação de produtos.
Professor(a): Diga aos alunos que o código de barras foi inventado pelos americanos Norman Woodland e Bernard Silver, e que a primeira instalação de um leitor de código de barras em um supermercado ocorreu em 1974.



O que é um código QR?

Você já viu um código QR? Esses códigos se parecem mais com um enigma matemático do que com uma maneira rápida e segura de transmitir informações visuais a equipamentos como um telefone celular ou *tablet*.

Há tempos já conhecemos os códigos de barras, que estão estampados, por exemplo, em praticamente todos os produtos à venda em um supermercado.

Com finalidade semelhante à do código de barras, surgiu o código bidimensional QR (das iniciais de *Quick Response*, que em inglês significa resposta rápida). Por ser facilmente decodificado e com alta velocidade, ele já ganhou a simpatia de muitos usuários. Criado pela companhia japonesa Denso--Wave em 1994, esse concorrente do código de barras pode parecer uma imagem estranha e sem sentido, mas, quando usamos um decodificador, podemos ter acesso aos dados nela registrados.

E não é pouca coisa que pode ser armazenada por esse tipo de código. Para se ter uma ideia, um código QR é capaz de armazenar 7089 caracteres numéricos ou 4296 alfanuméricos (mistura de letras e números), além de outros tipos de símbolos. Isso só é possível porque o código QR, ao contrário do código de barras, traz as informações combinadas tanto na direção vertical quanto na horizontal, e cada região tem sua própria função para que os dados não sejam interpretados de modo errôneo.

A variedade de informação que pode ser armazenada em um código QR é vasta. Ele pode conter desde mensagens de texto até endereços eletrônicos. Por esses e outros motivos, muitas empresas já o utilizam para fazer propaganda. Em geral elas disponibilizam nele o endereço eletrônico da empresa com ofertas aos clientes.

Henrique Nakano

Caso tenha um decodificador de códigos QR, você pode verificar que a mensagem codificada nesse símbolo é: Matemática.

Nesta unidade você vai...

- conhecer as técnicas de contagem, permutação, arranjo e combinação.
- utilizar o fatorial em situações em que aparecem multiplicações de números naturais consecutivos.
- identificar situações em que é necessário utilizar permutação com elementos repetidos.
- reconhecer os elementos e as propriedades do triângulo de Pascal.
- desenvolver o binômio de Newton.

Professor(a): Explique aos alunos que estes são os principais objetivos a serem atingidos por eles nesta unidade. Retome esses objetivos no decorrer dos estudos da unidade e, se julgar necessário, estabeleça também novos objetivos. Na Assessoria Pedagógica encontram-se os objetivos gerais deste nível de ensino, assim como os objetivos específicos desta unidade.

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Tocadores portáteis e o uso de fones de ouvido

O tipo de arquivo de áudio mp3 popularizou-se no final da década de 1990 por ocupar aproximadamente a décima parte do espaço ocupado pelos formatos mais utilizados até então. Em geral, é necessário o uso de fones de ouvido, pois muitos dos tocadores portáteis não possuem alto-falantes. O recomendado é não deixar o volume ultrapassar a metade da capacidade total do aparelho, visto que a exposição prolongada ao som alto causa perda e danos progressivos da audição.

Se você possui um tocador de música portátil com 10 músicas diferentes, de quantas maneiras distintas é possível ouvi-las em sequência, ou seja, quantas listas com 10 músicas cada podemos formar? Estime essa quantidade.

Representando cada música por uma letra, vamos escrever algumas dessas listas:

ABCDEFGHIJ	BACDEFGHIJ	CABDEFGHIJ	DABCEFGHIJ
ABDCEFGHIJ	BADCEFGHIJ	CADBEFGHIJ	DACBEFGHIJ
ACBDEFGHIJ	BCADEFGHIJ	CBADEFGHIJ	DBACEFGHIJ
ACDBEFGHIJ	BCDAEFGHIJ	CBDAEFGHIJ	DBCAEFGHIJ
ADCBEFGHIJ	BDACEFGHIJ	CDABEFGHIJ	DCABEFGHIJ
ADBCEFGHIJ	BDCAEFGHIJ	CDBAEFGHIJ	DCBAEFGHIJ

Note que já formamos 24 listas distintas mudando apenas a ordem das 4 primeiras músicas. Podemos continuar até escrever todas as listas possíveis, porém, seria muito trabalhoso. Para se ter uma ideia, temos 3 628 800 possibilidades de listas com 10 músicas diferentes em sequência.

Problemas como esse envolvem métodos para calcular a quantidade de agrupamentos que podemos formar com os elementos de um conjunto. Esses métodos fazem parte da **Análise combinatória**, que estudaremos nesta unidade.

Professor(a): Escreva na lousa algumas quantidades estimadas pelos alunos. É possível que nenhuma delas se aproxime do valor exato; nesse caso, leve-os a perceber que, embora sejam poucas músicas, são muitas as possibilidades de ordená-las em uma lista.

Princípio fundamental da contagem

De quantas maneiras Maurício pode compor um conjunto com uma camiseta e uma bermuda?

Carlos Nascimento

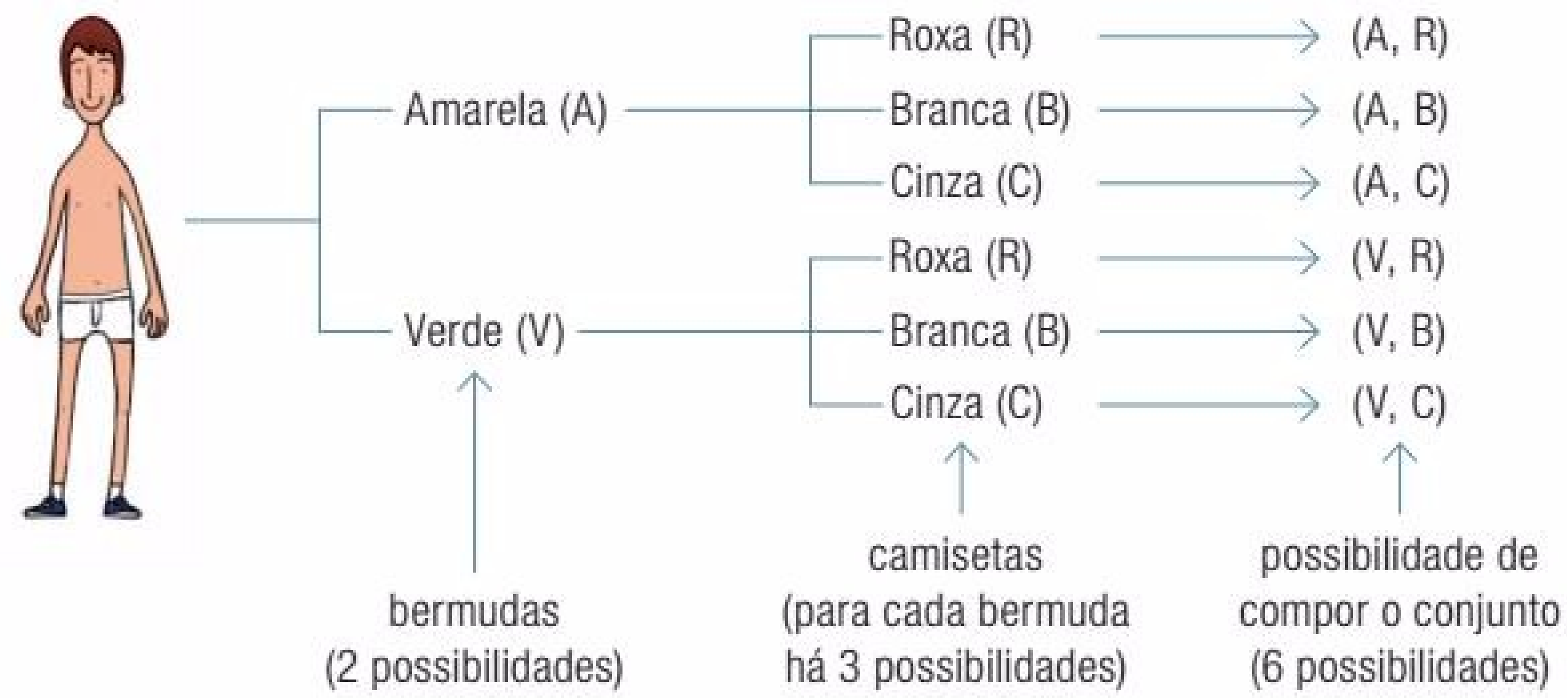
Para responder a essa pergunta, vamos utilizar o **princípio fundamental da contagem** ou **princípio multiplicativo**. Para isso, podemos:

1) Escrever todas as possibilidades.

Nesta unidade, estudaremos como resolver situações desse tipo, que envolvem contagens.

bermuda amarela, camiseta roxa
bermuda amarela, camiseta branca
bermuda amarela, camiseta cinza
bermuda verde, camiseta roxa
bermuda verde, camiseta branca
bermuda verde, camiseta cinza

2) Construir um diagrama, chamado **diagrama de árvore** ou **árvore de possibilidades**.

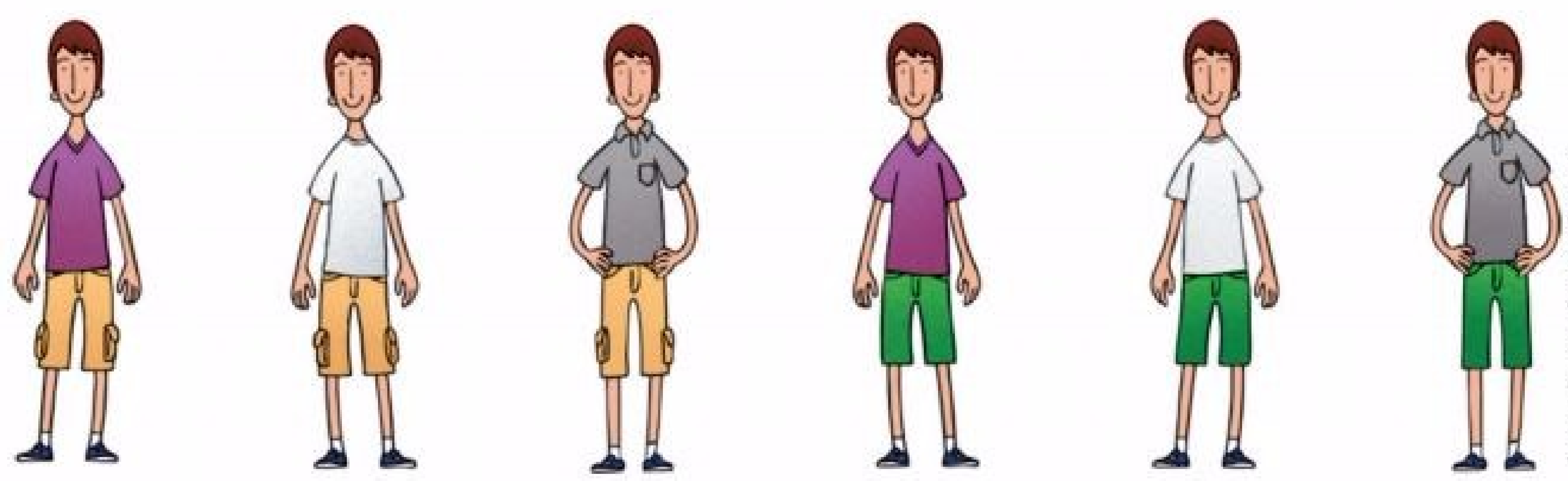


3) Construir uma tabela de dupla entrada.

Possibilidades de compor o conjunto

Bermuda \ Camiseta	Roxa (R)	Branca (B)	Cinza (C)
Amarela (A)	(A, R)	(A, B)	(A, C)
Verde (V)	(V, R)	(V, B)	(V, C)

4) Fazer um desenho.



Ilustrações: Carlos Nascimento

5) Realizar uma multiplicação.

É importante perceber que há várias estratégias para resolver um problema desse tipo, e as sugeridas anteriormente são apenas algumas delas. Nesse caso, ao escolher uma das 2 bermudas, esta pode ser combinada com qualquer uma das 3 camisetas, ou, então, ao escolher uma das 3 camisetas, esta pode ser combinada com qualquer uma das 2 bermudas. Desse modo, o total de possibilidades é dado pela seguinte multiplicação:

$$\underbrace{2}_{\text{quantidade de bermudas}} \cdot \overbrace{3}^{\text{quantidade de camisetas}} = 6 \longleftarrow \text{possibilidades}$$

De modo geral, temos:

> Dados dois acontecimentos sucessivos (quando um deles ocorre após o outro) e independentes (quando a ocorrência de cada um deles não afeta a ocorrência do outro), de tal modo que se o 1º deles pode ocorrer de **m** maneiras distintas e, para cada uma dessas maneiras, o 2º acontecimento pode ocorrer de **n** maneiras distintas, a quantidade de maneiras de ocorrerem os dois acontecimentos é dada pelo produto $m \cdot n$. Esse princípio é chamado **princípio fundamental da contagem** (PFC).

Embora o princípio fundamental da contagem seja a ideia básica dos métodos de contagem, algumas situações possuem características específicas na forma de organizar as contagens, chamadas **permutações**, **arranjos** e **combinações**, que iremos estudar a seguir. Mas, antes, vamos definir o **fatorial** de um número.

Nessa situação, a escolha da camiseta e a escolha da bermuda são acontecimentos sucessivos e independentes, isto é, a escolha da camiseta ocorre após a escolha da bermuda ou vice-versa; além disso, a escolha de uma delas não afeta a escolha da outra.

Das diferentes estratégias apresentadas para responder à pergunta inicial, qual delas você considera a mais prática? Justifique. Resposta esperada: Da multiplicação. Resposta pessoal.

Professor(a): Verifique se os alunos perceberam que a multiplicação é a maneira mais prática de resolver a situação apresentada, e isso se torna mais evidente à medida que a quantidade de acontecimentos aumenta.

Princípio aditivo de contagem

Além do princípio multiplicativo, existe o **princípio aditivo de contagem**. Nele, dados dois acontecimentos independentes (quando a ocorrência de um deles não afeta a ocorrência do outro), de tal modo que um deles pode ocorrer de **m** maneiras distintas e o outro, de **n** maneiras distintas, a quantidade de maneiras de ocorrer um acontecimento ou o outro acontecimento é dado por $m+n$. Observe a situação a seguir.

> Certo restaurante oferece 3 opções de prato com carne grelhada, 1 opção de prato vegetariano e 2 opções de prato com peixe. Quantas são as possibilidades de um cliente escolher apenas um prato nesse restaurante?

Note que nessa situação o cliente pode escolher qualquer um dos pratos disponíveis. Assim, o total de possibilidades de um cliente escolher um prato com carne grelhada ou um prato vegetariano ou um prato com peixe é dado pelo princípio aditivo:

quantidade de pratos com peixe

$$3+1+2=6 \longleftarrow \text{possibilidades}$$

quantidade de pratos com carne grelhada

quantidade de pratos vegetarianos

Agora, determine a solução de cada situação e indique o princípio de contagem adequado: multiplicativo ou aditivo.

a) Cláudia vai escolher uma sobremesa entre três tipos de sorvete ou quatro tipos de frutas. Quantas são as opções de sobremesas que Cláudia pode escolher? 7 opções; aditivo

b) Marcos tem a possibilidade de escolher um suco com água ou leite e um sabor entre oito disponíveis. Quantas opções de sucos estão à disposição de Marcos? 16 opções; multiplicativo

c) Vagner pode comprar um entre quatro pares de tênis ou um entre dois modelos de sandálias. De quantas maneiras distintas Vagner pode fazer essa escolha? 6 maneiras; aditivo

d) Em certa semana, entraram em cartaz seis filmes e três peças teatrais. De quantas maneiras distintas uma pessoa pode escolher um filme e uma peça teatral? 18 maneiras; multiplicativo

FATORIAL

Em situações envolvendo contagens, é comum aparecer multiplicações entre números naturais consecutivos. Para representá-los, vamos utilizar o fatorial, cuja notação é $n!$ (lemos "fatorial de **n**" ou "**n** fatorial").

> O fatorial de um número $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$, é o produto de **n** por seus antecessores naturais até 1, ou seja:
>
> $$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
>
> Para o caso em que $n=0$ ou $n=1$, definimos que:
>
> $$0! = 1 \qquad 1! = 1$$

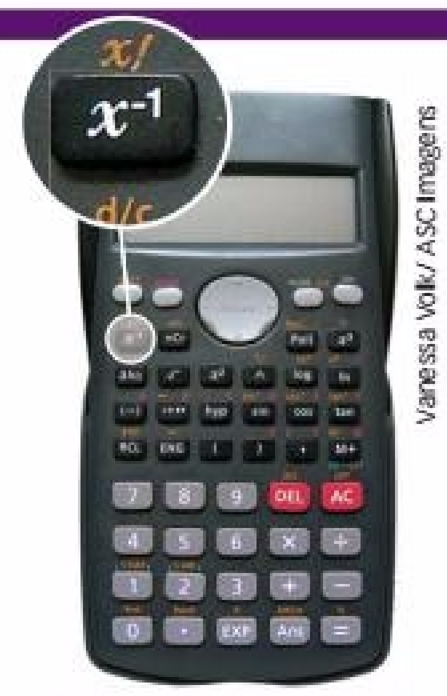
Exemplos:

- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
- $9! = 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$

Note ainda que podemos escrever $n! = n \cdot (n-1)!$, para $n \geq 1$. Veja os exemplos:

- $5! = 5 \cdot \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{4!} = 5 \cdot 4!$
- $8! = 8 \cdot \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{7!} = 8 \cdot 7!$

Fatorial com a calculadora científica



Vanessa Volk/ ASC Imagens

A maioria dos modelos de calculadoras científicas possui uma função que permite o cálculo do fatorial de um número natural. Em geral, esse comando é indicado por x!, que em alguns modelos é apresentado como segunda função da tecla x^{-1}. Para ativar o fatorial nesse tipo de calculadora, é necessário digitar a tecla [SHIFT].

Veja como determinar, por exemplo, o fatorial de 8 utilizando a calculadora científica.

- Inicialmente, registre o número 8 e ative a função fatorial digitando as teclas [SHIFT] e [x! x^{-1}]. Por fim, digite a tecla [% =].

[8] → [SHIFT] → [x! x^{-1}] → [% =]

Eduardo C.

Portanto, o fatorial de 8 é 40 320.

Agora, utilize uma calculadora científica e calcule:

Professor(a): Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

a) 10! 3628800 b) $3\cdot 9!$ 1088640 c) $(6!)^2$ 518400 d) $3!+7!$ 5046 e) $\frac{14!}{100}$ 871782912 f) $\frac{20!}{15!}$ 1860480

Atividades resolvidas

R1. Em certo restaurante especializado em massas, o cliente tem as seguintes opções para compor um prato de macarrão:

Massas
Espaguete
Parafuso

Molhos
Branco
Vermelho

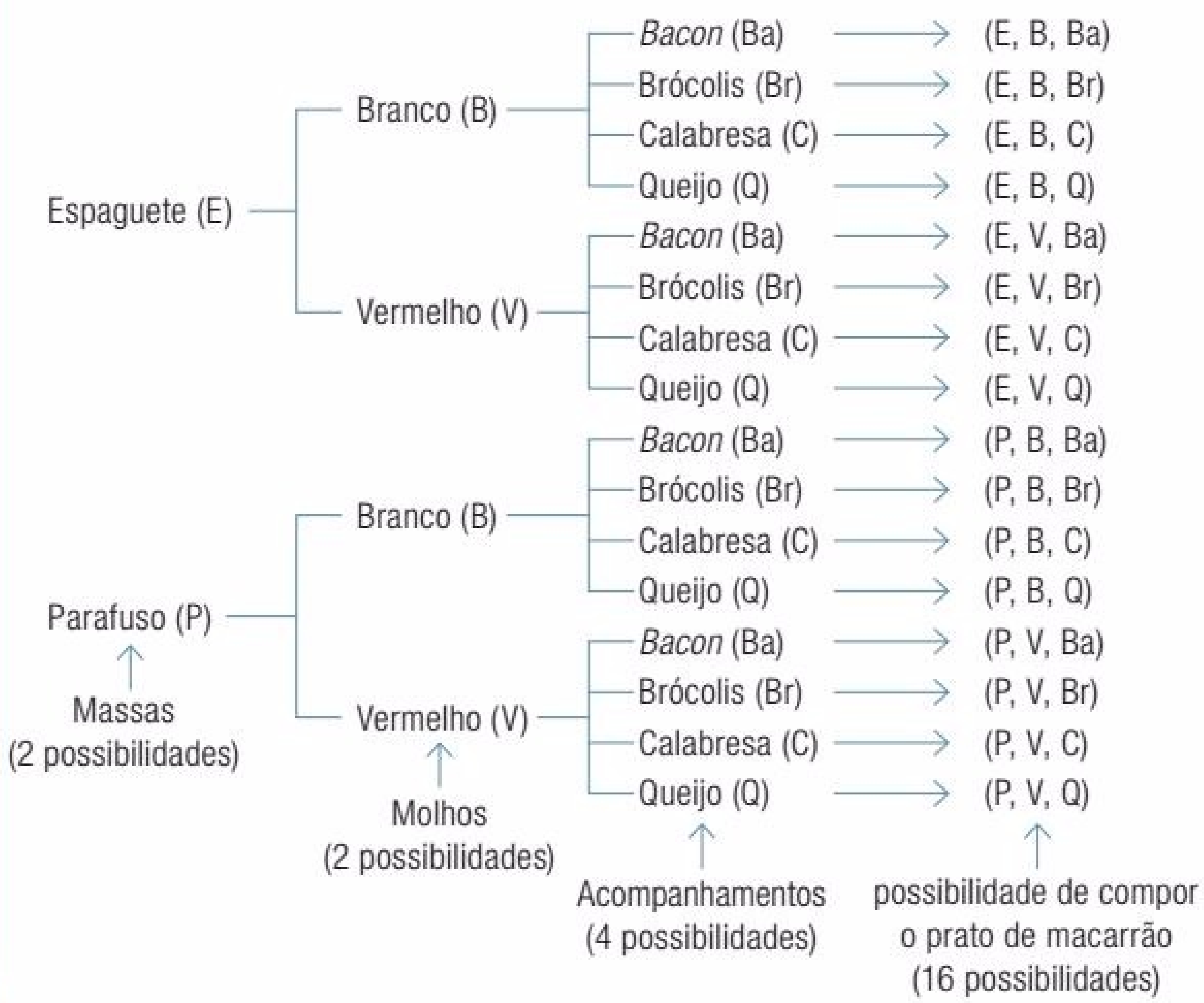
Acompanhamentos
Bacon
Brócolis
Calabresa
Queijo

Nessa situação, a escolha da massa, do molho e do acompanhamento são acontecimentos sucessivos e independentes.

De quantas maneiras distintas o cliente pode compor o prato escolhendo um tipo de massa, um tipo de molho e um tipo de acompanhamento?

Resolução

Podemos resolver essa questão por diferentes estratégias, e uma delas é o diagrama de árvores.



Pelo diagrama, temos 16 maneiras distintas de compor o prato de macarrão.

Outra estratégia é utilizar o princípio fundamental da contagem, já que temos três acontecimentos sucessivos e independentes. Desse modo, o total de maneiras distintas é:

$$\underbrace{2}_{\text{quantidade de massas}}\cdot\overbrace{2}^{\text{quantidade de molhos}}\cdot\underbrace{4}_{\text{quantidade de acompanhamentos}}=\underbrace{16}_{\text{possibilidades}}$$

O princípio fundamental da contagem é válido para dois ou mais acontecimentos sucessivos independentes.

R2. Simplifique a expressão $\dfrac{(n+1)!}{n!+(n-1)!}$.

Resolução

$$\frac{(n+1)!}{n!+(n-1)!}=\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{n\cdot(n-1)!+(n-1)!}=\frac{\cancel{(n+1)}\cdot n\cdot\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{(n-1)!}}=\boxed{n}$$

Na expressão $n\cdot(n-1)!+(n-1)!$, colocamos $(n-1)!$ em evidência e obtivemos $(n+1)\cdot(n-1)!$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. (Enem) Numa cidade, cinco escolas de samba (**I**, **II**, **III**, **IV** e **V**) participaram do desfile de Carnaval. Quatro quesitos são julgados, cada um por dois jurados, que podem atribuir somente uma dentre as notas 6, 7, 8, 9 ou 10. A campeã será a escola que obtiver maior pontuação na soma de todas as notas emitidas. Em caso de empate, a campeã será a que alcançar a maior soma das notas atribuídas pelos jurados no quesito Enredo e Harmonia. Veja as notas do desfile desse ano no momento em que faltava somente a divulgação das notas do jurado **B** no quesito Bateria.

Quesitos	1. Fantasia e Alegoria		2. Evolução e Conjunto		3. Enredo e Harmonia		4. Bateria		Total
Jurado	A	B	A	B	A	B	A	B	
Escola I	6	7	8	8	9	9	8		55
Escola II	9	8	10	9	10	10	10		66
Escola III	8	8	7	8	6	7	6		50
Escola IV	9	10	10	10	9	10	10		68
Escola V	8	7	9	8	6	8	8		54

Quantas configurações distintas das notas a serem atribuídas pelo jurado **B** no quesito Bateria tornariam campeã a Escola **II**? c

a) 21　b) 90　c) 750　d) 1 250　e) 3 125

2. Uma prova é composta de sete questões de múltipla escolha, e cada questão tem cinco alternativas, sendo apenas uma correta. Supondo que seja marcada apenas uma alternativa em cada questão, determine a quantidade de possibilidades de responder a essa prova. 78 125 possibilidades

3. (UFG-GO) Os computadores digitais codificam e armazenam seus programas na forma binária. No código binário, que é um sistema de numeração posicional, as quantidades são representadas somente com dois algarismos: zero e um. Por exemplo, o código 101011001, no sistema binário, representa o número 345, do sistema de numeração decimal. Assim sendo, calcule quantos códigos binários podem ser escritos com exatamente nove algarismos, considerando que o primeiro algarismo do código binário é 1. 256

4. Um *shopping center* tem sete acessos do térreo ao primeiro piso, quatro acessos do primeiro piso ao segundo piso e mais quatro acessos do segundo piso à praça de alimentação, que se localiza no terceiro piso. Utilizando esses acessos, de quantas maneiras distintas uma pessoa pode se deslocar do:

a) primeiro piso para a praça de alimentação? 16 maneiras

b) térreo para a praça de alimentação? 112 maneiras

DESAFIO

5. Com os elementos do conjunto $A=\{0,1,4,7,8\}$, quantos números:

a) de cinco algarismos distintos podem ser formados? 96

b) ímpares de três algarismos podem ser formados? 40

c) pares de três algarismos distintos, não divisíveis por cinco, podem ser formados? 18

6. Simplifique as expressões.

a) $\dfrac{11!}{7!}$ 7 920　b) $\dfrac{20!13!}{19!12!}$ 260　c) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ n^2-n　d) $\dfrac{(n+3)!}{(n+4)!}$ $\dfrac{1}{n+4}$

Professor(a): Oriente os alunos a utilizar a calculadora científica na verificação dos resultados obtidos nos itens a e b. Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

PERMUTAÇÃO SIMPLES

No início da unidade, vimos que há 3628800 maneiras distintas de ordenar 10 músicas diferentes. Permutar significa trocar de posição, e foi exatamente isso que fizemos com as 10 músicas, a fim de criar cada uma das listas. Nesse caso, estamos realizando uma **permutação simples** de 10 elementos.

A palavra **simples** caracteriza que em cada lista não haverá repetição de elementos.

> Permutação simples de n elementos distintos é qualquer agrupamento ordenado formado por esses n elementos. Pelo princípio fundamental da contagem, a quantidade de permutações simples de n elementos é n!, que indicamos por:
>
> $$P_n = n!$$
>
> Definimos:
>
> $$P_0 = 1 \qquad P_1 = 1$$

Desse modo, verifica-se que $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$.

ARRANJO SIMPLES

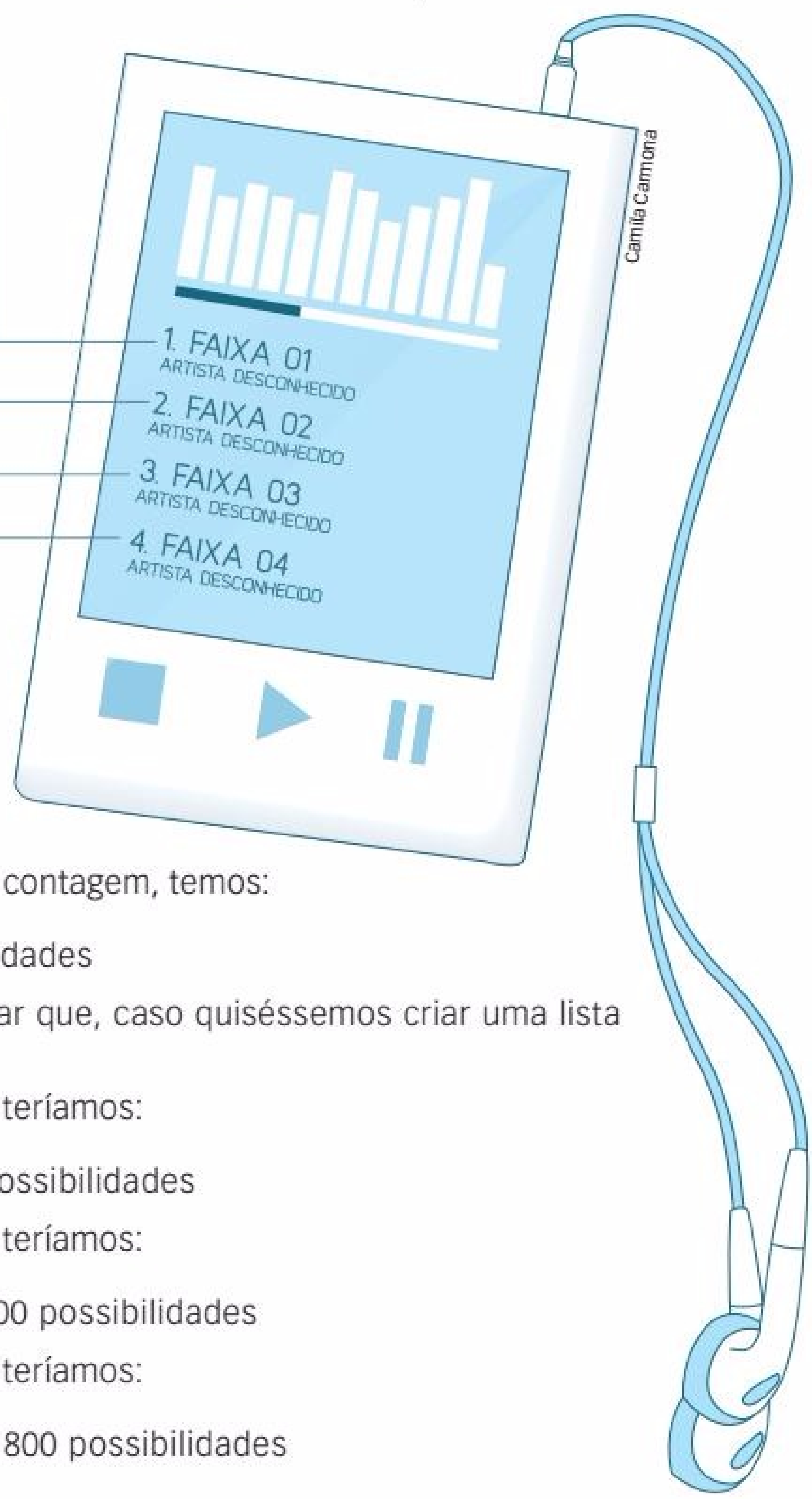
Como faríamos se quiséssemos criar uma lista com apenas 4 das 10 músicas disponíveis? Nesse caso, estamos realizando um **arranjo simples** de 10 elementos tomados 4 a 4. Indicamos a quantidade de arranjos desse tipo por $A_{10,4}$ ou A_{10}^{4}, que podemos calcular da seguinte maneira:

Vamos começar escolhendo a 1ª música. Temos 10 possibilidades de escolha.

Em seguida, escolhemos a 2ª música. Temos $\underbrace{9}_{10-1}$ possibilidades de escolha, pois a 1ª música da lista já foi escolhida.

Agora, escolhemos a 3ª música. Temos $\underbrace{8}_{10-2}$ possibilidades de escolha, pois a 1ª e a 2ª música da lista já foram escolhidas.

Por fim, escolhemos a 4ª música. Temos $\underbrace{7}_{10-3}$ possibilidades de escolha, pois a 1ª, a 2ª e a 3ª música da lista já foram escolhidas.



Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, temos:

$A_{10,4} = \overbrace{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}^{\text{4 fatores}} = 5\,040 \rightarrow 5\,040$ possibilidades

De modo semelhante, podemos verificar que, caso quiséssemos criar uma lista com:

- apenas 5 das 10 músicas disponíveis, teríamos:

  $A_{10,5} = \overbrace{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}^{\text{5 fatores}} = 30\,240 \rightarrow 30\,240$ possibilidades

- apenas 6 das 10 músicas disponíveis, teríamos:

  $A_{10,6} = \overbrace{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}^{\text{6 fatores}} = 151\,200 \rightarrow 151\,200$ possibilidades

- apenas 7 das 10 músicas disponíveis, teríamos:

  $A_{10,7} = \overbrace{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}^{\text{7 fatores}} = 604\,800 \rightarrow 604\,800$ possibilidades

Vale destacar que duas listas diferem uma da outra se tiverem músicas diferentes (Exemplo: AB e AE) ou, então, se as músicas estiverem em ordens diferentes (Exemplo: AB e BA), isto é, **em um arranjo simples, a ordem dos elementos é importante**.

Para um arranjo simples de **n** elementos tomados **p** a **p**, podemos construir o seguinte quadro:

Escolha	Quantidade de possibilidades
Do 1º elemento.	n
Do 2º elemento, depois de escolhido o 1º	$n-1$
Do 3º elemento, depois de escolhidos o 1º e o 2º	$n-2$
...	...
Do p-ésimo elemento, depois de escolhidos os anteriores	$n-(p-1)$

Segue que, pelo princípio fundamental da contagem, a quantidade de arranjos simples de **n** elementos tomados **p** a **p** é o produto de **p** fatores decrescentes em 1 unidade a partir de **n**, ou seja:

$$A_{n,p} = \overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(p-1)]}^{\text{p fatores}}$$

com $0 < p \leq n$ e $A_{n,0} = 1$.

Ao multiplicarmos por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, o resultado não se altera. Por quê?

Porque $\forall n, p \in \mathbb{N}$, temos $(n-p)! \neq 0$ e $\frac{(n-p)!}{(n-p)!} = 1$, e 1 é o elemento neutro da multiplicação.

Para escrever essa fórmula por meio de fatoriais, multiplicamos por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(p-1)] \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(p-1)] \cdot (n-p)!}{(n-p)!} =$$

$$= \frac{n \cdot \overbrace{(n-1)}^{\text{antecessor de n}} \cdot \overbrace{(n-2)}^{\text{antecessor de n−1}} \cdot \ldots \cdot [n-(p-1)] \cdot \overbrace{(n-p)}^{\text{antecessor de n−(p−1)}} \cdot \overbrace{[n-(p+1)]}^{\text{antecessor de (n−p)}} \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Note que uma permutação é um caso particular de arranjo quando $n = p$.

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Arranjo simples de **n** elementos distintos tomados **p** a **p**, com $0 \leq p \leq n$, é qualquer agrupamento **ordenado** formado por **p** elementos escolhidos entre esses **n** elementos. Indicamos a quantidade de arranjos simples por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplos:

- Arranjo simples de 5 elementos tomados 2 a 2.

$$A_{5,2} = \overbrace{5 \cdot 4}^{\text{2 fatores}} = 20 \text{ ou } A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 5 \cdot 4 = 20$$

- Arranjo simples de 8 elementos tomados 3 a 3.

$$A_{8,3} = \overbrace{8 \cdot 7 \cdot 6}^{\text{3 fatores}} = 336 \text{ ou } A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

- Arranjo simples de 9 elementos tomados 5 a 5.

$$A_{9,5} = \overbrace{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}^{\text{5 fatores}} = 15\,120 \text{ ou } A_{9,5} = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$$

Arranjo simples com a calculadora científica

Vanessa Volk / ASC Imagens

A maioria dos modelos de calculadoras científicas possui uma função que permite o cálculo do arranjo simples. Em geral, esse comando é indicado por **nPr**, que em alguns modelos é apresentado como segunda função da tecla **nCr**. Para ativar o arranjo simples nesse tipo de calculadora, é necessário digitar a tecla SHIFT.

Observe como determinar, por exemplo, $A_{9,4}$ utilizando a calculadora científica:

- inicialmente registre o número 9, depois ative a função arranjo simples digitando as teclas SHIFT e nCr (nPr) e registre o número 4. Por fim, digite a tecla =.

9 → SHIFT → nCr (nPr) → 4 → =

Eduardo C.

Portanto, o arranjo de 9 elementos tomados 4 a 4 é 3024.

Agora, utilizando uma calculadora científica, calcule: Professor(a): Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

a) $A_{12,5}$ 95040 b) $A_{17,6}$ 8910720 c) $A_{13,4} - A_{8,3}$ 16824 d) $\frac{A_{20,6}}{50}$ 558144 e) $A_{6,3} \cdot A_{27,1}$ 3240 f) $\frac{A_{43,21}}{A_{25,19}}$ 2494979008

Atividades resolvidas

R3. Os **anagramas** são palavras formadas com base na troca de ordem das letras de outra palavra. A palavra OTGA, por exemplo, é um anagrama da palavra GATO.

Agora, considerando a palavra LIVRO, responda.

a) Qual a quantidade total de anagramas que podem ser formados?

b) Quantos dos possíveis anagramas começam com a letra **R**?

Resolução

a) Como os anagramas da palavra LIVRO são obtidos com base na troca de ordem das letras e não temos letras repetidas, então cada anagrama é uma permutação das 5 letras:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \rightarrow 120 \text{ anagramas}$$

Portanto, a palavra LIVRO possui 120 anagramas.

b) Como queremos contar os anagramas que iniciam com a letra **R**, devemos fixar essa letra e permutar apenas as 4 letras restantes:

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \rightarrow 24 \text{ anagramas}$$

Portanto, a palavra LIVRO possui 24 anagramas que começam com a letra **R**.

R4. Uma comissão de formatura deve ser composta de dois pais, que ocuparão os cargos de conselheiro e contador, e três formandos, que ocuparão os cargos de presidente, vice-presidente e secretário. Sabendo que são 10 os pais e 15 os formandos que desejam participar dessa comissão, independente do cargo, determine a quantidade de comissões distintas que podem ser formadas.

Resolução

Temos que escolher 2 pais entre um grupo de 10 e escolher 3 formandos em um grupo de 15. Note que na comissão de formatura há distinção de cargos, então, se compusermos uma comissão em que um dos pais ocupe o cargo de conselheiro e outra comissão em que ele ocupe o cargo de contador, teremos duas comissões diferentes. Isso ocorre para qualquer um dos cargos.

Logo, para determinarmos a quantidade de comissões distintas, utilizaremos a fórmula do arranjo, e a quantidade de comissões distintas será dada pelo produto da quantidade de arranjo de 10 pais, tomados 2 a 2, pela quantidade de arranjo de 15 formandos, tomados 3 a 3:

Quantidade de arranjos de 10 pais, tomados 2 a 2: $A_{10,2}$
Quantidade de arranjos de 15 formandos, tomados 3 a 3: $A_{15,3}$

$$A_{10,2} \cdot A_{15,3} = \frac{10!}{(10-2)!} \cdot \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} \cdot \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \cancel{12!}}{\cancel{12!}} =$$
$$= 10 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = 245\,700$$

Portanto, é possível formar 245700 comissões distintas.

7. Calcule. Professor(a): Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

a) $A_{4,2}$ 12
c) $A_{5,4}$ 120
e) $A_{5,3} - A_{100,0}$ 59
b) $A_{3,3}$ 6
d) $A_{7,2} + A_{4,3}$ 66
f) $A_{60,1} - A_{25,2} + A_{10,3}$ 180

▶ Com o auxílio de uma calculadora científica, verifique se suas respostas estão corretas.

8. Quantos anagramas distintos é possível formar com a palavra:

a) LUA? 6
c) FEIRA? 120
b) CUBO? 24
d) CAMELO? 720

9. (PUC-RS) Uma melodia é uma sequência de notas musicais. Para compor um trecho de três notas musicais sem repeti-las, um músico pode utilizar as sete notas que existem na escala musical. A quantidade de melodias diferentes possíveis de serem escritas é: d

a) 3
c) 35
e) 5 040
b) 21
d) 210

10. A senha que abre o cadeado ao lado é composta de três algarismos distintos de 0 a 9.


Staceymay/Dreamstime

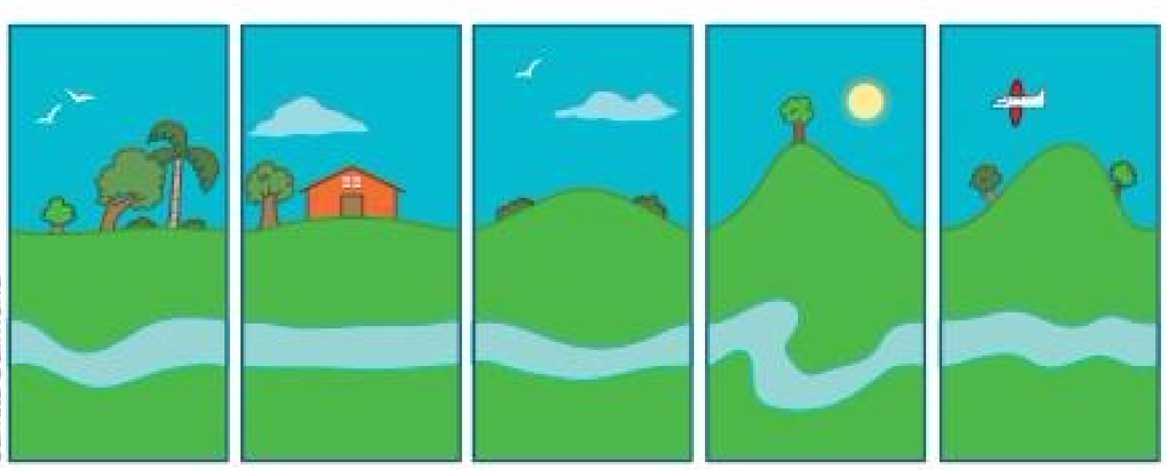
Cadeado.

Supondo que uma pessoa saiba dessa informação, mas não saiba a senha e pretenda abri-lo testando as possíveis senhas, responda:

a) No máximo, quantas senhas essa pessoa precisa testar? 720 senhas

b) Sabendo que ela gastaria 4 segundos para testar cada senha, em quantos minutos, no máximo, ela abrirá o cadeado? 48min

11. (OBMEP) Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura. Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma mesma paisagem se repita? d

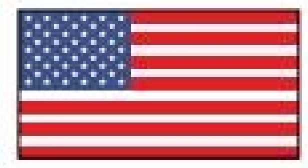
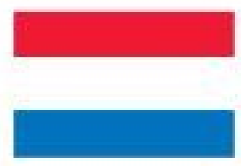
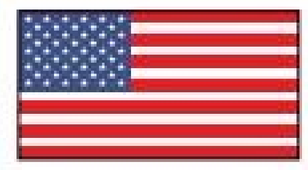
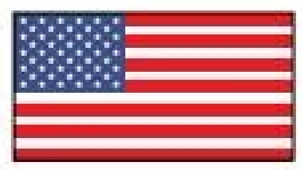

Camila Carmona

a) uma semana
d) quatro meses
b) um mês
e) seis meses
c) dois meses

TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

12. Veja os atletas que participaram da final de uma das provas do atletismo, nos Jogos Olímpicos de Londres em 2012.

Participantes da final masculina dos 100 m rasos nos Jogos Olímpicos de 2012

País	Atleta	País	Atleta
 Jamaica	Asafa Powell	 Estados Unidos	Ryan Bailey
 Holanda	Churandy Martina	 Estados Unidos	Tyson Gay
 Estados Unidos	Justin Gatlin	 Jamaica	Usain Bolt
 Trinidad e Tobago	Richard Thompson	 Jamaica	Yohan Blake

Ilustrações: Acervo da Editora

Fonte: London 2012 Olympics. Disponível em: <www.london2012.com>. Acesso em: 30 mar. 2016.

Sabendo que o pódio olímpico dessa prova é composto dos três primeiros colocados, de quantas maneiras distintas o pódio poderia ser composto? 336 maneiras

▶ Configuração do pódio

Na prova apresentada, a medalha de bronze ficou com o americano Justin Gatlin, a prata, com o jamaicano Yohan Blake, e o ouro, também com um jamaicano, Usain Bolt, que se tornou bicampeão olímpico da prova, além de bater o próprio recorde olímpico.

Steve Russell/Getty Images

Usain Bolt, na prova dos 100 metros, defendendo seu título olímpico com novo recorde nos Jogos Olímpicos 2012, em Londres, Inglaterra.

COMBINAÇÃO SIMPLES

Anteriormente estudamos que a ordem dos elementos interfere diretamente na quantidade dos arranjos ou permutações. Por exemplo, ao formar um número com três algarismos, consideramos o número 123 e o número 321, porque são números distintos, mesmo sendo formados pelos mesmos algarismos.

Agora, vamos estudar a **combinação simples** de **n** elementos tomados **p** a **p**. Na combinação, a ordem dos elementos não é importante, isto é, dois agrupamentos diferem um do outro somente se tiverem elementos diferentes.

Dizemos que o arranjo simples é um agrupamento ordenado, e a combinação simples é um agrupamento não ordenado.

Observe a seguinte situação:

Luana dispõe de 4 frutas para fazer uma vitamina: abacate (A), banana (B), caju (C) e damasco (D). Quantas são as possibilidades de fazer uma vitamina com três dessas frutas?

Abacate.

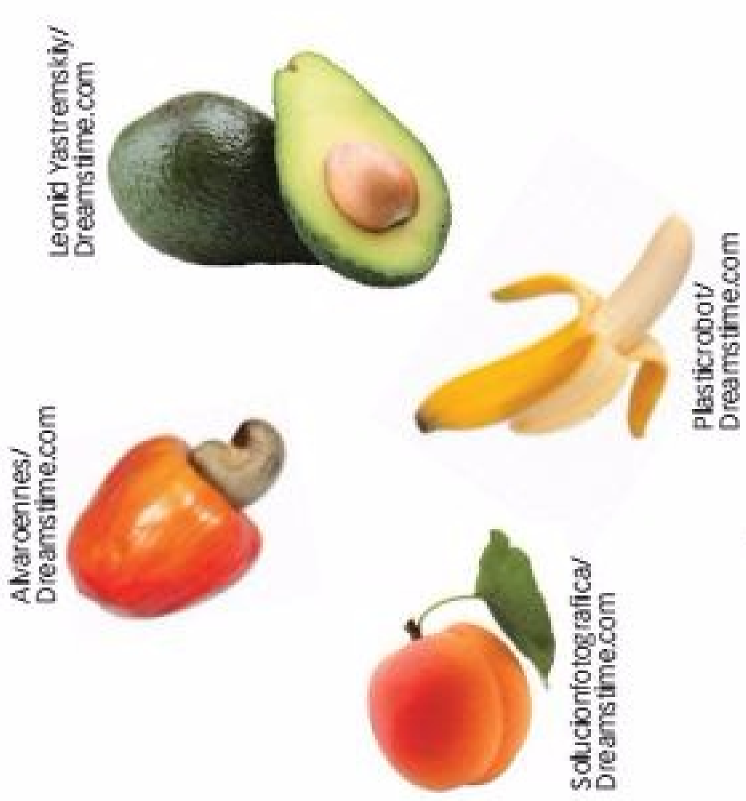
Banana.

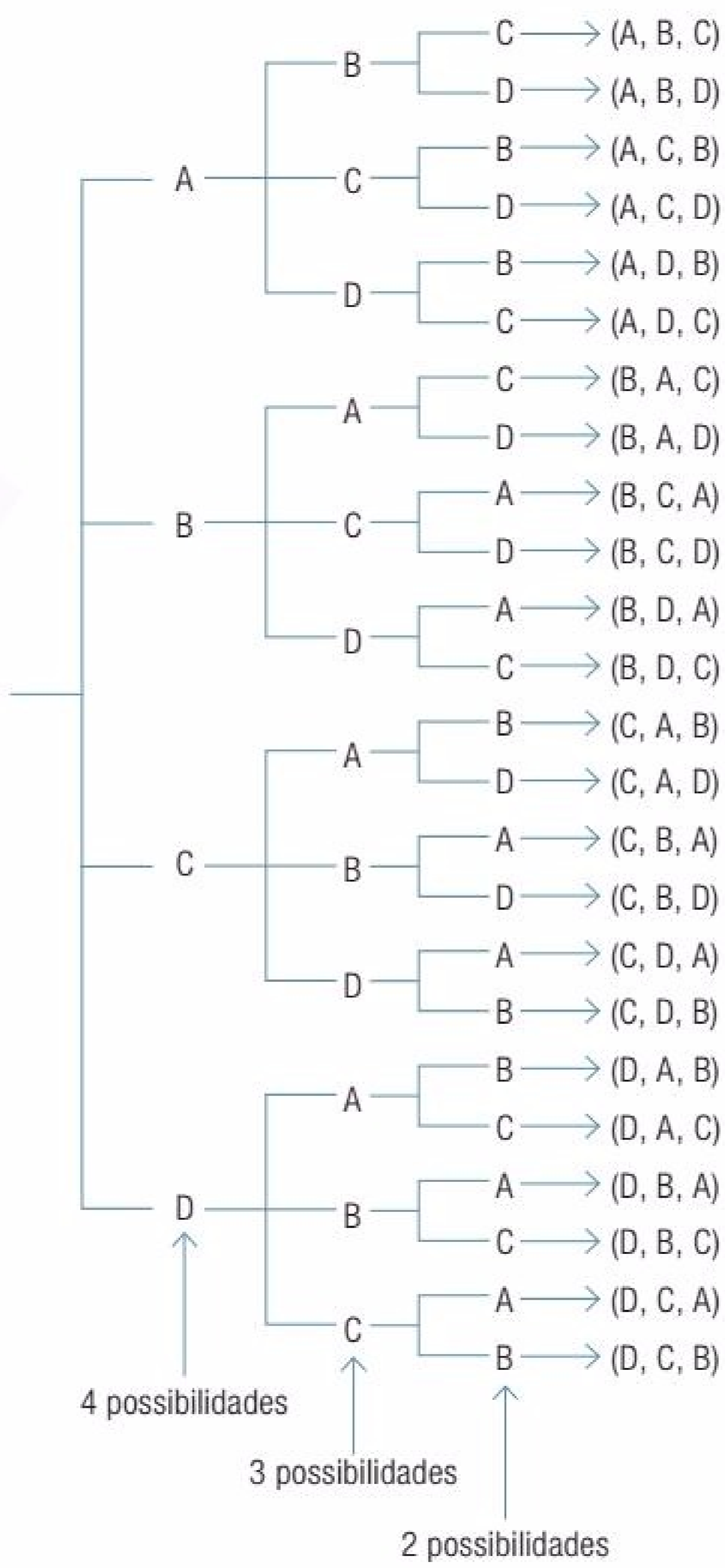
Caju.

Damasco.

Nessa situação, a ordem em que as frutas são escolhidas é importante?
Resposta esperada: Não.

Representando todas as possibilidades por um diagrama, temos:





Considerando todos esses resultados, temos um total de $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ possibilidades. Porém, analisando essa situação, podemos perceber que se Luana escolher, por exemplo, as frutas abacate, banana e caju, ela irá obter um único tipo de vitamina, não importando a ordem de escolha das frutas. No esquema, podemos verificar que essas três frutas formam seis possibilidades, que se diferenciam apenas pela ordem de escolha: (ABC), (BCA), (ACB), (BAC), (CAB) ou (CBA).

Assim, essas seis possibilidades não podem ser consideradas como diferentes vitaminas, mas sim como um único tipo de vitamina.

Mas como fazer que a ordem não interfira na quantidade de possibilidades? Nesse caso, como as 24 possibilidades estão levando em conta a ordem em que foram escolhidas, e as mesmas três frutas podem ser permutadas de $P_3 = 3!$ maneiras distintas, devemos dividir esse total por $3!$, isto é, $\frac{24}{3!} = \frac{24}{6} = 4$, e então teremos apenas 4 possibilidades de vitaminas, e não 24.

Escrevendo essas 4 possibilidades, temos:

Abacate, banana e caju (ABC).

Abacate, banana e damasco (ABD).

Abacate, caju e damasco (ACD).

Banana, caju e damasco (BCD).

Fotos: Leonid Yastremskiy, Plasticrobot, Alvaroennes e Solucionfotografica por Dreamstime.com

Portanto, Luana tem 4 possibilidades de vitamina com 3 dessas frutas. Cada uma dessas possibilidades corresponde a uma combinação simples de 4 frutas, tomadas 3 a 3, que indicamos por $C_{4,3}$, C_4^3 ou $\binom{4}{3}$.

A quantidade de combinações simples de **n** elementos tomados **p** a **p** é igual à quantidade total de arranjos simples dos **n** elementos tomados **p** a **p**, dividido pela quantidade de permutações possíveis dos **p** elementos.

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Combinação simples de **n** elementos distintos tomados **p** a **p**, com $0 \leq p \leq n$, é qualquer agrupamento **não ordenado** formado por **p** elementos escolhidos entre esses **n** elementos. Indicamos a quantidade de combinações simples por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplos:

- Combinação simples de 5 elementos tomados 2 a 2.

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3!}} = \frac{20}{2} = 10$$

- Combinação simples de 7 elementos tomados 3 a 3.

$$C_{7,3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{4!}} = \frac{210}{6} = 35$$

Combinação simples com a calculadora científica

A maioria dos modelos de calculadoras científicas possui uma função que permite o cálculo da combinação simples. Em geral, esse comando é indicado por **nCr**, primeira função da tecla do arranjo simples, visto anteriormente.

Vanessa Volk/ ASC Imagens

Observe como determinar, por exemplo, $C_{11,5}$ utilizando a calculadora científica.

- Inicialmente, registre o número 11, depois ative a função combinação simples digitando a tecla nCr e registre o número 5. Por fim, digite a tecla =.

S-SUM 1 → S-SUM 1 → nPr nCr → 5 → % =

Eduardo C.

Portanto, a combinação de 11 elementos tomados 5 a 5 é 462.

Agora, utilizando uma calculadora científica, calcule:

a) $C_{10,6}$ 210

b) $C_{23,9}$ 817 190

c) $\dfrac{C_{38,31}}{2!}$ 6 310 128

d) $C_{13,10}+C_{19,9}$ 92 664

e) $C_{44,41}\cdot C_{57,0}$ 13 244

f) $C_{103,99}-C_{77,74}$ 4 348 125

Professor(a): Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

Atividades resolvidas

R5. De quantas maneiras distintas é possível sortear um grupo de 4 pessoas de um total de 20 indivíduos?

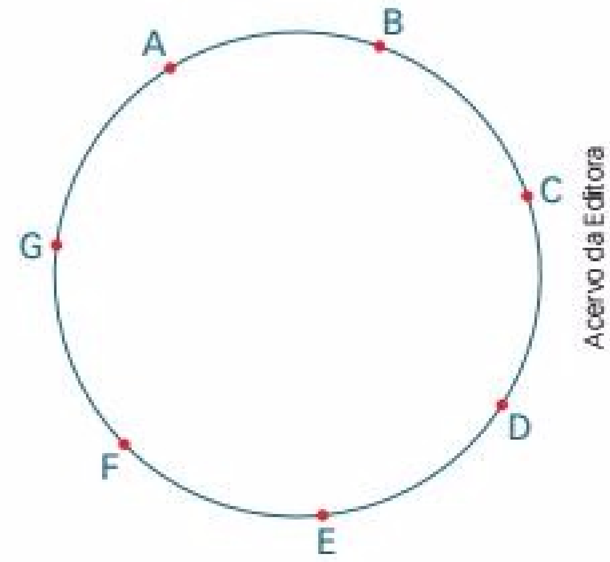
Resolução

Um grupo se diferencia de outro pelas pessoas que o compõem e não pela ordem em que essas pessoas são sorteadas. Desse modo, a quantidade de maneiras distintas de sortear um grupo pode ser determinado pela combinação dos 20 indivíduos tomados 4 a 4, assim:

$$C_{20,4}=\frac{20!}{4!(20-4)!}=\frac{20!}{4!16!}=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot \cancel{16!}}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{16!}}=4\,845$$

Portanto, é possível sortear 4 pessoas de um grupo de 20 de 4845 maneiras distintas.

R6. Na circunferência a seguir estão indicados sete pontos.



a) Determine a quantidade de segmentos que podem ser traçados ligando os pontos indicados na circunferência 2 a 2.

b) Quantos triângulos podem ser obtidos utilizando os pontos destacados sobre a circunferência como vértices?

Resolução

a) A ordem das extremidades dos segmentos não faz diferença, pois $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ representam o mesmo segmento, por exemplo. Assim, a quantidade de segmentos pode ser obtida pela combinação dos 7 pontos tomados 2 a 2.

$$C_{7,2}=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7!}{2!5!}=\frac{7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{5!}}=21$$

Portanto, é possível traçar 21 segmentos ligando os pontos indicados na circunferência.

b) Nesse caso, não há pontos alinhados; assim, com quaisquer 3 pontos é possível obter um triângulo. Temos ainda que, por exemplo, ΔABC e ΔCBA representam o mesmo triângulo. Desse modo, a quantidade de triângulos pode ser obtida pela combinação dos 7 pontos tomados 3 a 3.

$$C_{7,3}=\frac{7!}{3!(7-3)!}=\frac{7!}{3!4!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{4!}}=35$$

Portanto, é possível obter 35 triângulos utilizando os pontos indicados na circunferência.

R7. (UFSCar-SP) Considere o conjunto $C=\{2, 8, 18, 20, 53, 124, 157, 224, 286, 345, 419, 527\}$. O número de subconjuntos de três elementos de **C** que possuem a propriedade "soma dos três elementos é um número ímpar" é:

a) 94

b) 108

c) 115

d) 132

e) 146

Resolução

A adição possui a propriedade comutativa, assim, para escolher três elementos desse conjunto que serão adicionados, podemos utilizar a combinação simples tomando 3 a 3. Porém, a soma de três números naturais é ímpar somente quando os três números são ímpares ou quando um número for ímpar e os demais, pares. Nesse conjunto, temos 5 números ímpares e 7 números pares, logo:

$$C_{5,3}+C_{5,1}\cdot C_{7,2}=\frac{5!}{3!(5-3)!}+\frac{5!}{1!(5-1)!}\cdot\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}2\cdot 1}+\frac{5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}}\cdot\frac{7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{5!}}=115$$

Portanto, há 115 subconjuntos de **C**, compostos de três elementos, que possuem soma ímpar, isto é, a alternativa correta é **c**.

$$\overbrace{C_{5,3}}^{\text{quantidade de combinações com três números ímpares}}+\underbrace{C_{5,1}\cdot C_{7,2}}_{\text{quantidade de combinações com um número ímpar e dois números pares}}$$

Atividades ▶ Anote as respostas no caderno.

Professor(a): Oriente os alunos a utilizar a calculadora científica na verificação dos resultados obtidos nos itens **a** e **b**. Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

13. Simplifique as expressões.

a) $C_{3,1} \cdot C_{8,2}$ 84

b) $\dfrac{C_{36,30}}{C_{36,6}}$ 1

c) $C_{n,p} \cdot (n-p)!$ $\dfrac{n!}{p!}$

d) $C_{n+1,n}$ $(n+1)$

e) $\dfrac{p!}{P_n} \cdot C_{n,p}$ $\dfrac{1}{(n-p)!}$

f) $\dfrac{C_{n,p}}{A_{n,p}}$ $\dfrac{1}{p!}$

14. Temos que:

$$C_{n,p} = C_{n,n-p}$$

Calculando, por exemplo, $C_{5,3}$ e $C_{5,2}$ é possível verificar que $C_{5,\underbrace{3 = C_{5,2}}_{3+2=5}} = 10$.

Agora, sem efetuar cálculos, determine quais combinações possuem o mesmo resultado. c-e; b-d; a-f

a) $C_{10,7}$

b) $C_{10,1}$

c) $C_{10,4}$

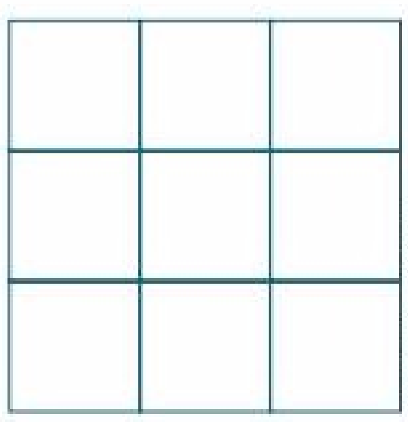
d) $C_{10,9}$

e) $C_{10,6}$

f) $C_{10,3}$

▶ Mostre que $C_{n,p} = C_{n,n-p}$.*

15. (Furg-RS) Em um painel fixo em uma parede, representado pela figura abaixo, um artista pinta de amarelo apenas 3 dos 9 quadradinhos. O número de maneiras distintas que esse artista poderá pintar é: c



Acervo da Editora

a) 9
b) 27
c) 84
d) 81
e) 243

16. Um campeonato de handebol foi disputado em turno único, ou seja, cada equipe jogou apenas uma vez contra cada um dos adversários, totalizando 66 partidas. A equipe campeã foi a que somou o maior número de pontos ao final de todas as rodadas. Quantas equipes participaram desse campeonato? 12 equipes

17. Para representar uma turma de 22 alunos do 2º ano em certo evento, serão sorteados quatro alunos, dois meninos e duas meninas. De quantos modos distintos podem ser escolhidos esses alunos, sabendo que há duas meninas a mais que meninos nessa turma? 2 970 modos distintos

18. Leia a tirinha.

Fernando Gonsales

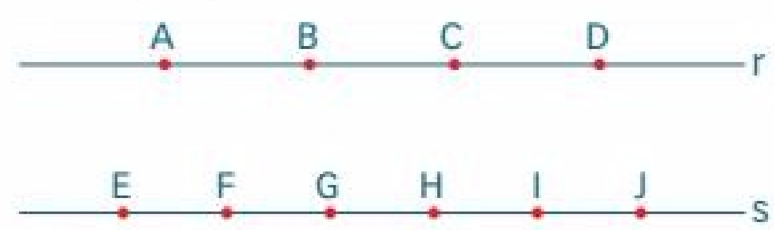
GONSALES, Fernando. *Níquel Náusea*. São Paulo: VHD Diffusion, 1993. p. 7.

Supondo que os ratinhos formem duas equipes de revezamento, com 15 integrantes cada, de quantas maneiras diferentes podem ser formadas essas duas equipes? 155 117 520

19. (Ufam) Um time de futsal é constituído de 5 jogadores, sendo 1 no gol, 2 na defesa e 2 na frente. Se o treinador dispõe de 2 goleiros, 4 defensores e 5 jogadores de frente, então, o número de maneiras possíveis de formar esse time é igual a: a

a) 120
b) 80
c) 320
d) 90
e) 480

20. Sobre as retas paralelas **r** e **s** estão destacados 4 e 6 pontos, respectivamente.



Acervo da Editora

Quantos triângulos podem ser formados utilizando os pontos destacados nas retas como vértices? 96

21. (Uesc-BA) Entre os 7 funcionários de uma firma de segurança, o número de modos que se pode formar uma equipe que contenha, no mínimo, 2 pessoas é: c

a) 24
b) 31
c) 120
d) 121
e) 128

PRODUÇÃO TEXTUAL

22. Escreva uma atividade em que seja necessário utilizar combinação simples para obter a resposta e dê para um colega resolver. Em seguida, verifique se a resposta que ele obteve está correta. Resposta pessoal.

$^*C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \dfrac{n!}{(n-p)![n-n+p]!} = \dfrac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!} = C_{n,n-p}$

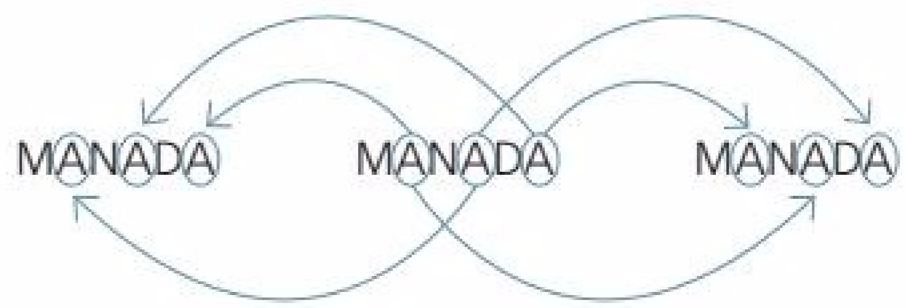
Professor(a): Diga aos alunos que essa propriedade pode ser utilizada para simplificar alguns cálculos de combinação simples.

PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS

Até agora, vimos situações com métodos de contagens do tipo permutações simples, arranjos simples e combinações simples. Nesses casos, a palavra **simples** caracteriza que em cada agrupamento não há repetição de elementos. Podemos calcular, por exemplo, os anagramas da palavra ALINE por $P_5 = 5!$, pois todas as letras são distintas.

Mas quantos anagramas possui a palavra AMANDA? Note que essa palavra possui letras repetidas.

Nesse caso, se todas as letras fossem diferentes, teríamos $P_6 = 6!$ anagramas, ou seja, 720 anagramas. No entanto, temos três letras **A** que se repetem.



Trocando de posição as letras repetidas obtemos o mesmo anagrama.

A quantidade de anagramas da palavra AMANDA será menor que 6!.

Ao permutarmos essas três letras repetidas, cada anagrama se repetirá 3! vezes. Assim, para obtermos o total de anagramas, devemos dividir o total de 6! por 3!, isto é:

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$$

Portanto, é possível formar 120 anagramas com a palavra AMANDA.

A quantidade de permutações de **n** elementos com $n \geq 1$, em que o primeiro deles se repete n_1 vezes, o segundo se repete n_2 vezes e assim sucessivamente, é dado por:

$$P_n^{(n_1, n_2, \ldots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}, \text{ com } n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

Exemplos:

- Quantidade de anagramas da palavra ARARA:

Professor(a): Diga aos alunos que não consideramos a acentuação gráfica nos anagramas.

$$P_5^{(3,2)} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

- Quantidade de anagramas da palavra MATEMÁTICA:

$$P_{10}^{(2,3,2,1,1,1)} = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 151200$$

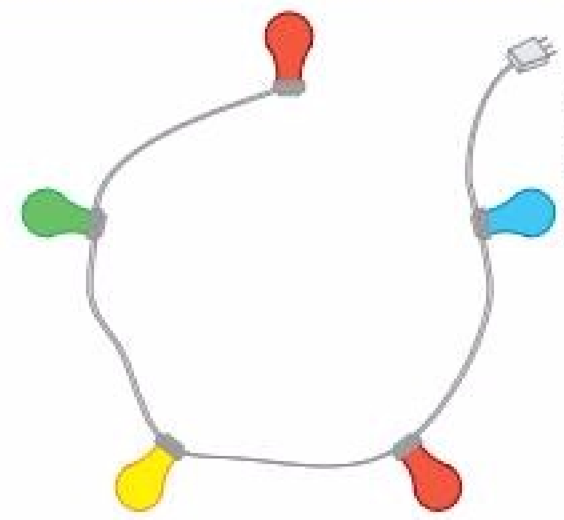
No caso do anagrama da palavra MATEMÁTICA, podemos simplificar a notação deixando de escrever os elementos que aparecem apenas uma vez. Nesse caso, teríamos:

$$P_{10}^{(2,3,2)} = \frac{10!}{2!3!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1} = 151200$$

Atividades resolvidas

R8. Um adorno natalino recebe cinco lâmpadas, sendo que duas delas possuem a mesma cor, como mostra o exemplo.

Dispondo apenas dessas lâmpadas, de quantas maneiras distintas é possível distribuí-las?



Gilberto Alicio

Resolução

As 5 lâmpadas podem ser distribuídas em qualquer ordem, no entanto, duas delas possuem a mesma cor. Assim, a quantidade de maneiras distintas de distribuí-las pode ser calculada pela permutação das 5 lâmpadas, sendo 2 delas repetidas.

$$P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60$$

Portanto, há 60 maneiras distintas de distribuir essas 5 lâmpadas.

Atividades ▶ Anote as respostas no caderno.

23. Determine a quantidade de anagramas de cada palavra.

a) BANANA 60

b) ATIVIDADE 45 360

c) JABUTICABEIRA 259 459 200

d) ASSESSORIA 75 600

CALCULADORA Professor(a): Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

24. Geralmente, as calculadoras científicas não possuem uma tecla específica para o cálculo de permutação com repetição. Por exemplo, para calcular $P_7^{(3,2)}$, é preciso substituir na fórmula e só depois efetuar os cálculos.

$$P_7^{(3,2)} = \frac{7!}{3!2!}$$

Na calculadora, digite:

7 → SHIFT → x^{-1} (x!) → ÷ → (→

→ 3 → SHIFT → x^{-1} (x!) → × →

→ 2 → SHIFT → x^{-1} (x!) →) → = (%)

Eduardo C.

Agora, utilizando uma calculadora científica, calcule:

a) $P_9^{(4,2)}$ 7 560

b) $P_{15}^{(6,3,2)}$ 151 351 200

c) $P_{20}^{(9,7,4)}$ 55 426 800

d) $P_{12}^{(4,3,1,1,1,1,1)}$ 3 326 400

e) $P_{19}^{(8,6,4)}$ 174 594 420

f) $P_{11}^{(3,3,3,2)}$ 92 400

DESAFIO

25. Quantas soluções inteiras não negativas a equação $x + y + z = 9$ admite? 55 Professor(a): Solicite aos alunos que descrevam os procedimentos que utilizaram para responder a essa pergunta.

26. Quantos números de sete algarismos formados a partir dos algarismos do número 7 845 747:

a) são pares? 180

b) são ímpares? 240

c) são divisíveis por 5? 60

d) possuem os algarismos 8 e 5 juntos? 120

27. (Unesp) A figura mostra a planta de um bairro de uma cidade. Uma pessoa quer caminhar do ponto **A** ao ponto **B** por um dos percursos mais curtos. Assim, ela caminhará sempre nos sentidos "de baixo para cima" ou "da esquerda para a direita". O número de percursos diferentes que essa pessoa poderá fazer de **A** até **B** é: d

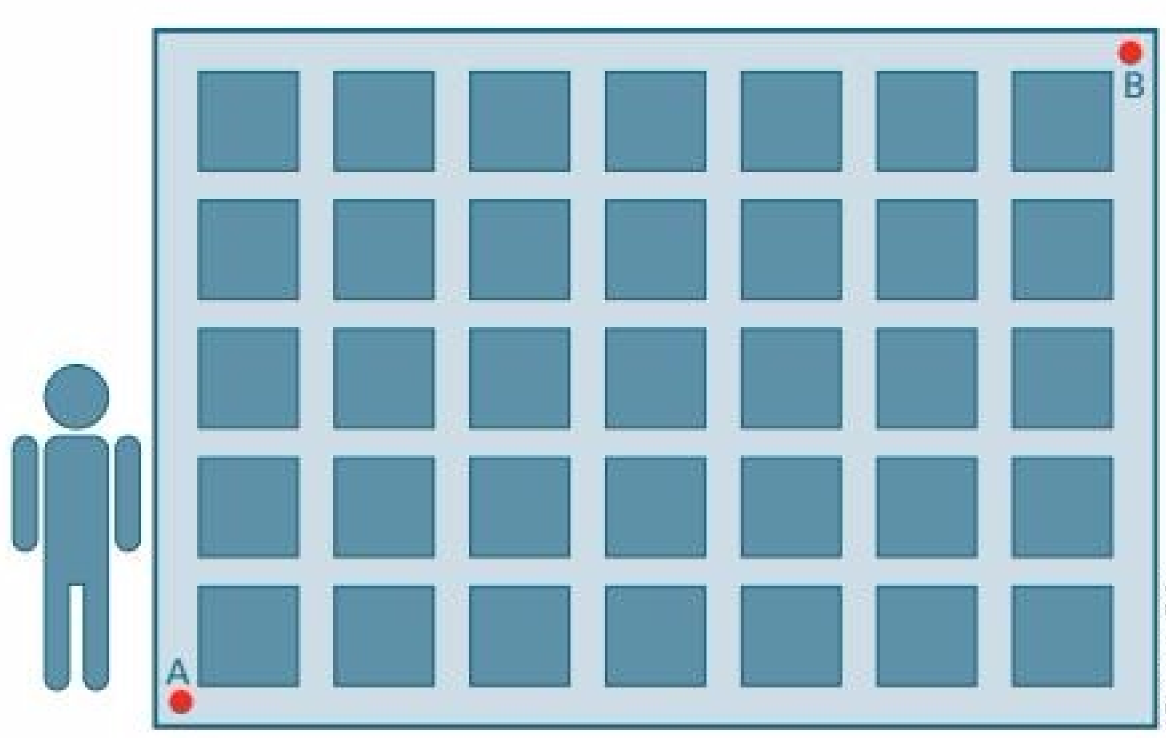
a) 95 040

b) 40 635

c) 924

d) 792

e) 35



Gilberto Alicio

TRIÂNGULO DE PASCAL

Blaise Pascal

Nascido na província francesa de Auvergne, Pascal foi considerado um prodígio matemático de seu tempo. Apesar da saúde fragilizada e da curta vida, inventou a primeira máquina de calcular, lançou a teoria da probabilidade juntamente com Pierre de Fermat (1601-1665), é responsável por importantes resultados, como o "Princípio da Hidrodinâmica de Pascal", e por divulgar o triângulo numérico conhecido atualmente como "Triângulo de Pascal".

Escola Inglesa, Séc. XIX. Gravura. Coleção particular

Blaise Pascal (1623-1662).

Estudamos anteriormente que a combinação simples de **n** elementos distintos tomados **p** a **p** é um tipo de agrupamento não ordenado, que indicamos por $C_{n,p}$ ou $\binom{n}{p}$, tal que:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Vejamos alguns casos:

- $C_{n,0} = \binom{n}{0} = \frac{n!}{\underbrace{0!}_{1}(n-0)!} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = 1$
- $C_{n,n} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\,\underbrace{0!}_{1}} = 1$
- $C_{n,1} = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{1 \cdot \cancel{(n-1)!}} = n$

Desses casos, temos que, com qualquer quantidade **n** de elementos, é possível realizar uma única combinação com nenhum elemento $(C_{n,0} = 1)$ ou uma única combinação com todos os elementos $(C_{n,n} = 1)$. Além disso, é possível realizar **n** combinações possíveis com os **n** elementos tomados 1 a 1 $(C_{n,1} = n)$. Exemplos:

- $\binom{9}{0} = \frac{9!}{\underbrace{0!}_{1}(9-0)!} = \frac{\cancel{9!}}{\cancel{9!}} = 1$
- $\binom{6}{6} = \frac{6!}{6!(6-6)!} = \frac{\cancel{6!}}{\cancel{6!}\,\underbrace{0!}_{1}} = 1$
- $\binom{8}{1} = \frac{8!}{1!(8-1)!} = \frac{8 \cdot \cancel{7!}}{1 \cdot \cancel{7!}} = 8$

Agora, vamos organizar em linhas e colunas as combinações que podemos realizar com $0, 1, 2, 3, \ldots, n$ elementos, tomados **p** a **p**, com $0 \le p \le n$. Para isso, utilizaremos a notação $\binom{n}{p}$:

$$\begin{array}{lllllll}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
\ldots
\end{array}$$

Cada número $\binom{n}{p}$ é chamado **coeficiente binomial** ou **número binomial** (lemos: "binomial de **n** sobre **p**").

Substituindo por seus respectivos valores, temos:

$$
\begin{array}{lllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\dots
\end{array}
$$

Note que a disposição dos valores lembra um triângulo.

O "triângulo" numérico formado por esses valores é chamado **Triângulo de Pascal**. Ele pode ser utilizado, por exemplo, para calcular os coeficientes de uma potência da forma $(x+y)^n$, com x e y reais e **n** natural, chamada **Binômio de Newton**, como veremos no próximo tópico. Mas, antes, vamos destacar algumas propriedades do Triângulo de Pascal.

- **1ª propriedade**: Em uma linha qualquer do triângulo, dois números equidistantes são iguais.

$$C_{n,p} = C_{n,n-p} \Rightarrow \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \text{ sendo } p + (n-p) = n$$

Exemplos:

$$
\begin{array}{cccccc}
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}
$$

- **2ª propriedade (Relação de Stifel)**: A soma de dois números do triângulo localizados lado a lado é igual ao número localizado imediatamente abaixo do da direita.

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}, \text{ para } n \geq 2$$

Exemplos:

$$
\begin{array}{lllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & \boxed{3} & \boxed{3} & 1 \\
1 & 4 & \boxed{6} & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & \boxed{10} & \boxed{5} & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & \boxed{15} & 6 & 1 \\
\dots
\end{array}
$$

$$\underset{3}{\binom{3}{1}} + \underset{3}{\binom{3}{2}} = \underset{6}{\binom{4}{2}}$$

$$\underset{10}{\binom{5}{3}} + \underset{5}{\binom{5}{4}} = \underset{15}{\binom{6}{4}}$$

- **3ª propriedade**: Na linha **n** do triângulo, a soma dos números é igual a 2^n.

$$\text{Linha } \mathbf{n} \rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Exemplos:

Linha **0** $\rightarrow 1 = 2^0$

Linha **1** $\rightarrow 1 + 1 = 2 = 2^1$

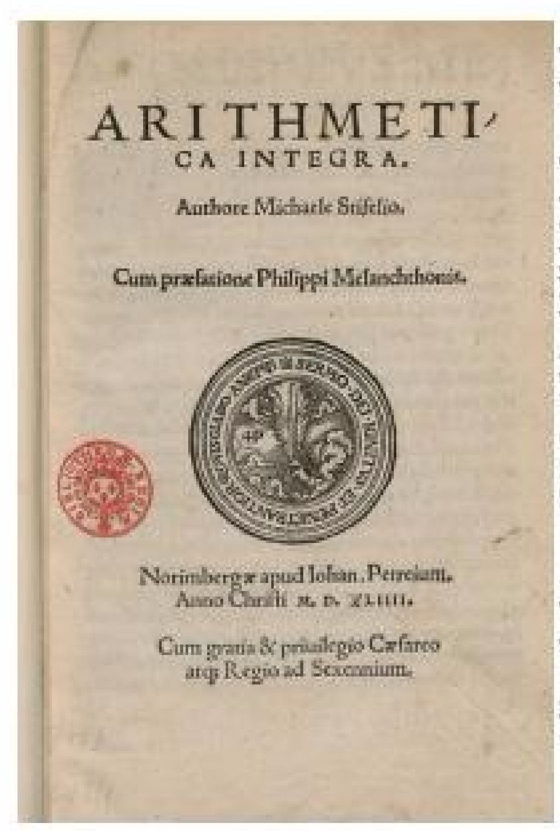
Linha **2** $\rightarrow 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$

Linha **3** $\rightarrow 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$

Linha **4** $\rightarrow 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

Michael Stifel

Michael Stifel (1486-1567) é citado como o mais importante algebrista alemão do século XVI e um dos autores que divulgaram os símbolos + e −, utilizados em sua obra *Arithmetica integra*.



Arithmetica integra, 1544. Por Michael Stifel. Coleção particular

Folha de rosto da obra *Arithmetica integra*.

Atividades resolvidas

R9. Qual é o valor da expressão $\binom{11}{11}+\binom{8}{2}-\binom{6}{1}+\binom{17}{0}$?

Resolução

$$\underbrace{\binom{11}{11}}_{\text{1, pois } C_{n,n}=1}+\binom{8}{2}-\underbrace{\binom{6}{1}}_{\text{6, pois } C_{n,1}=n}+\underbrace{\binom{17}{0}}_{\text{1, pois } C_{n,0}=1}=1+\frac{8!}{2!(8-2)!}-6+1=\frac{8!}{2!6!}-4=\frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{6!}}-4=28-4=24$$

R10. Determine o valor de x, com $x \in \mathbb{N}$ para que a igualdade $\binom{8}{3x}=\binom{8}{2x+3}$ seja verdadeira.

Resolução

Para verificar se dois números binomiais são iguais, é necessário analisar dois casos.

- 1º caso

$$3x = 2x + 3 \Rightarrow x = 3$$

Não convém, pois para $x = 3$ tem-se $\binom{8}{9}=\binom{8}{9}$, o que não caracteriza um número binomial, já que, nesse caso, $n < p$.

- 2º caso

Pela 1ª propriedade do Triângulo de Pascal, temos que $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$. Logo:

$$3x = 8-(2x+3) \Rightarrow 3x = 5-2x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1$$

Portanto, $x = 1$ torna a igualdade verdadeira, pois $\binom{8}{3}=\binom{8}{5}$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

28. Calcule.

a) $\binom{8}{6}$ 28

b) $\binom{21}{0}$ 1

c) $\binom{35}{35}$ 1

d) $\binom{9}{0}+\binom{9}{1}$ 10

e) $\binom{7}{3}+\binom{7}{4}$ 70

f) $\binom{11}{5}+\binom{12}{5}+\binom{11}{6}$ 1716

29. No Triângulo de Pascal, qual é a soma dos números correspondente à:

a) linha 3? 8

b) linha 8? 256

c) linha 12? 4096

d) linha 23? 8388608

Se necessário utilize a calculadora para auxiliar nos cálculos.

Professor(a): Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

30. Determine o valor de $x \in \mathbb{N}$ de modo que as igualdades sejam verdadeiras.

a) $\binom{6}{4}=\binom{x}{4}$ 6

b) $\binom{9}{x}=\binom{9}{3}$ 3 ou 6

c) $\binom{12}{9}+\binom{12}{x}=\binom{13}{10}$ 2 ou 10

d) $\binom{7}{x}=\binom{8}{5}-\binom{7}{4}$ 2 ou 5

e) $\binom{25}{0}+\binom{25}{1}+\binom{25}{2}+\ldots+\binom{25}{25}=2^{10}\cdot 2^{x}$ 15

31. Os números que compõem o quadro em destaque devem obedecer à lei de formação do Triângulo de Pascal.

Qual é o número que deve ser inserido na célula:

a) C3? 165

b) D3? 55

c) D2? 10

d) C2? 45

	A	B	C	D	E
1					
2		120			
3		330			
4		792	495	220	
5					

Gilberto Alicio

32. (Unicentro-PR) O valor de x que satisfaz a igualdade entre os números binomiais $\binom{14}{x^2-2}$ e $\binom{14}{2x+1}$ é: c

a) 5

b) 4

c) 3

d) 2

e) 1

BINÔMIO DE NEWTON

Toda potência do tipo $(x+y)^n$, com x e y reais e **n** natural, é chamada **Binômio de Newton**. Estudamos em anos anteriores o produto notável $(x+y)^2$, e a partir dele podemos desenvolver as potências $(x+y)^3$ e $(x+y)^4$.

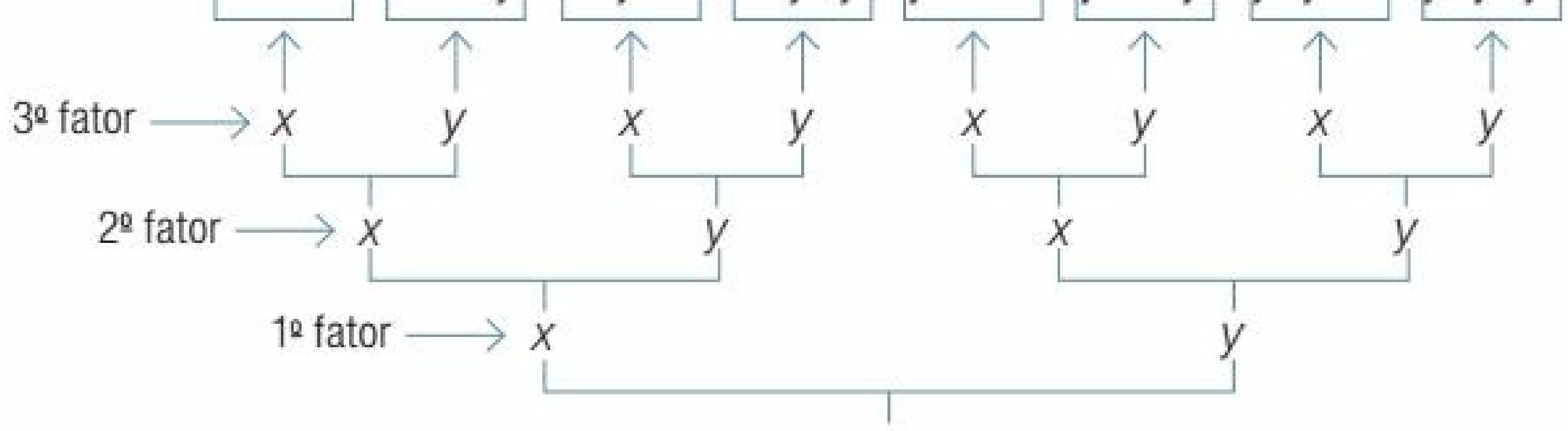
- $(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x^2+2xy+y^2$
- $(x+y)^3=(x+y)^2(x+y)=(x^2+2xy+y^2)(x+y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
- $(x+y)^4=(x+y)^3(x+y)=(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)(x+y)=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

Podemos desenvolver a potência $(x+y)^n$ a partir do resultado do desenvolvimento de $(x+y)^{n-1}$. No entanto, quanto maior o valor de n, mais esse processo se torna trabalhoso. Estudaremos então uma fórmula que permite desenvolver $(x+y)^n$ de maneira mais prática.

Note que, para $n=3$, por exemplo, temos $(x+y)^3=(x+y)(x+y)(x+y)$. Pela propriedade distributiva da multiplicação, escolhendo x ou y em cada soma, teremos três fatores que resultarão nos possíveis produtos: x^3, x^2y, xy^2 ou y^3. Para determinar quantas vezes cada um vai aparecer, isto é, determinar o coeficiente da soma de todos eles, utilizaremos uma árvore de possibilidades:

- $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

$$=x\cdot x\cdot x+x\cdot x\cdot y+x\cdot y\cdot x+x\cdot y\cdot y+y\cdot x\cdot x+y\cdot x\cdot y+y\cdot y\cdot x+y\cdot y\cdot y$$



De maneira semelhante, construa uma árvore de possibilidades para o desenvolvimento de $(x+y)^2$.

Professor(a): Sugira aos alunos que construam a árvore de possibilidades para o desenvolvimentos de $(x+y)^4$.

Considerando a quantidade de vezes em que x e y aparecem em cada produto, nota-se que:

- Há apenas 1 maneira de obter o produto x^3, que é $x\cdot x\cdot x$, logo, o coeficiente de x^3 é 1. De fato, a quantidade de maneiras possíveis de compor um produto de 3 fatores, em que o fator x se repete 3 vezes e o fator y se repete 0 vez, corresponde a $P_3^{(3,0)}=\dfrac{3!}{0!\cdot 3!}=\dfrac{3!}{0!(3-0)!}=\dbinom{3}{0}=1$.
- Há 3 maneiras de obter o produto x^2y, que são $x\cdot x\cdot y$, $x\cdot y\cdot x$ e $y\cdot x\cdot x$, logo, o coeficiente de x^2y é 3. De fato, a quantidade de maneiras possíveis de compor um produto de 3 fatores, em que o fator x se repete 2 vezes e o fator y se repete 1 vez, corresponde a $P_3^{(2,1)}=\dfrac{3!}{1!\cdot 2!}=\dfrac{3!}{1!(3-1)!}=\dbinom{3}{1}=3$.
- Há 3 maneiras de obter o produto xy^2, que são $x\cdot y\cdot y$, $y\cdot x\cdot y$ e $y\cdot y\cdot x$, logo, o coeficiente de xy^2 é 3. De fato, a quantidade de maneiras possíveis de compor um produto de 3 fatores, em que o fator x se repete 1 vez e o fator y se repete 2 vezes, corresponde a $P_3^{(1,2)}=\dfrac{3!}{2!\cdot 1!}=\dfrac{3!}{2!(3-2)!}=\dbinom{3}{2}=3$.
- Há apenas 1 maneira de obter o produto y^3, que é $y\cdot y\cdot y$, logo, o coeficiente de y^3 é 1. De fato, a quantidade de maneiras possíveis de compor um produto de 3 fatores, em que o fator x se repete 0 vez e o fator y se repete 3 vezes, corresponde a $P_3^{(0,3)}=\dfrac{3!}{3!\cdot 0!}=\dfrac{3!}{3!(3-3)!}=\dbinom{3}{3}=1$.

A quantidade de maneiras possíveis de compor um produto de **n** fatores em que o fator x se repete $n-p$ vezes e o fator y se repete **p** vezes corresponde a $P_n^{(n-p,\,p)}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}=\dbinom{n}{p}$.

Logo:

$$(x+y)^3=\binom{3}{0}x^3+\binom{3}{1}x^2y+\binom{3}{2}xy^2+\binom{3}{3}y^3$$

No desenvolvimento de $(x+y)^n$, teremos os possíveis produtos: x^n, $x^{n-1}y$, $x^{n-2}y^2$,..., ou y^n. Nesse caso, seguindo o raciocínio anterior, é possível verificar que há $\binom{n}{0}$ maneiras de obter o produto x^n; $\binom{n}{1}$ maneiras de obter o produto $x^{n-1}y$; $\binom{n}{2}$ maneiras de obter o produto $x^{n-2}y^2$; e assim sucessivamente, até $\binom{n}{n}$ maneiras de obter o produto y^n.

Assim, para os primeiros Binômios de Newton, podemos escrever os coeficientes de cada termo do seguinte modo:

$$(x+y)^0 = \binom{0}{0}x^0y^0$$

$$(x+y)^1 = \binom{1}{0}x^1y^0 + \binom{1}{1}x^0y^1$$

$$(x+y)^2 = \binom{2}{0}x^2y^0 + \binom{2}{1}x^1y^1 + \binom{2}{2}x^0y^2$$

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3y^0 + \binom{3}{1}x^2y^1 + \binom{3}{2}x^1y^2 + \binom{3}{3}x^0y^3$$

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4y^0 + \binom{4}{1}x^3y^1 + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}x^1y^3 + \binom{4}{4}x^0y^4$$

$$(x+y)^5 = \binom{5}{0}x^5y^0 + \binom{5}{1}x^4y^1 + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}x^1y^4 + \binom{5}{5}x^0y^5$$

Fórmula do Binômio de Newton:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^ny^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{p}x^{n-p}y^p + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{\overbrace{n-(n-1)}^{1}}y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0y^n$$

para **n** e **p** naturais e x e y reais.

Com base nessa fórmula, podemos destacar algumas características:

- Os expoentes de x decrescem de 1 em 1, de **n** até 0, enquanto os expoentes de y crescem de 1 em 1, de 0 até **n**.
- O desenvolvimento de $(x+y)^n$ possui $n+1$ termos. Para cada um desses termos, a soma dos expoentes de x e y é igual a **n**.
- Os coeficientes do desenvolvimento de $(x+y)^n$ são os números da linha **n** do Triângulo de Pascal. Professor(a): Lembre os alunos de que a primeira linha do triângulo de Pascal é a linha 0.

$$(x+y)^0 = 1$$

$$(x+y)^1 = 1x + 1y$$

$$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2 \quad \rightarrow$$

$$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$$

$$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1

A fórmula do Binômio de Newton é válida também para $(x-y)^n$, pois basta escrevermos $(x-y)^n$ como $[x+(-y)]^n$.

Atividades resolvidas

R11. Desenvolva o binômio:

a) $(-a+b)^4$

b) $(2-3c)^3$

Resolução

a) $(-a+b)^4 = \underbrace{\binom{4}{0}}_{1}(-a)^4 \cdot b^0 + \underbrace{\binom{4}{1}}_{4}(-a)^3 \cdot b^1 + \underbrace{\binom{4}{2}}_{6}(-a)^2 \cdot b^2 + \underbrace{\binom{4}{3}}_{4}(-a)^1 \cdot b^3 + \underbrace{\binom{4}{4}}_{1}(-a)^0 \cdot b^4 =$

$= a^4 + 4(-a^3)b + 6a^2b^2 + 4(-a)b^3 + b^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

Portanto, $(-a+b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

b) $(2-3c)^3 = \underbrace{\binom{3}{0}}_{1}2^3 \cdot (-3c)^0 + \underbrace{\binom{3}{1}}_{3}2^2 \cdot (-3c)^1 + \underbrace{\binom{3}{2}}_{3}2^1 \cdot (-3c)^2 + \underbrace{\binom{3}{3}}_{1}2^0 \cdot (-3c)^3 =$

$= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot (-3c) + 3 \cdot 2 \cdot (-3c)^2 + (-3c)^3 = 8 - 36c + 54c^2 - 27c^3$

Portanto, $(2-3c)^3 = 8 - 36c + 54c^2 - 27c^3$.

R12. Dado o binômio $(2x+y)^7$, determine o:

a) termo em que a potência de y seja igual a 4.

b) termo independente de x.

Resolução

Para determinar um termo qualquer de um binômio, não é necessário desenvolvê-lo na íntegra. Indicando cada termo por **T** e analisando o desenvolvimento do binômio $(x+y)^n$, temos:

$$(x+y)^n = \underbrace{\binom{n}{0}x^n y^0}_{T_{0+1}} + \underbrace{\binom{n}{1}x^{n-1}y^1}_{T_{1+1}} + \underbrace{\binom{n}{2}x^{n-2}y^2}_{T_{2+1}} + \underbrace{\binom{n}{3}x^{n-3}y^3}_{T_{3+1}} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{p}x^{n-p}y^p}_{T_{p+1}} + \ldots$$

Note que para cada valor de **p**, com $0 \leq p \leq n$, o termo $\binom{n}{p}x^{n-p}y^p$ ocupa a posição $(p+1)$, isto é, $T_{p+1} = \binom{n}{p}x^{n-p}y^p$, que recebe o nome de **fórmula do termo geral do Binômio de Newton**.

a) Para calcular o termo do binômio $(2x+y)^7$ em que a potência de y seja igual a 4, é necessário admitir $p = 4$ para utilizarmos a fórmula do Binômio de Newton.

$$T_{\underbrace{4+1}_{5}} = \binom{7}{4} \cdot (2x)^{7-4} y^4 = 35 \cdot 8x^3y^4 = 280x^3y^4$$

Portanto, o termo é $280x^3y^4$.

b) O termo independente de x é aquele em que se tem x^0, isto é:

$$x^{7-p} = x^0 \Rightarrow 7 - p = 0 \Rightarrow p = 7$$

Utilizando a fórmula do Binômio de Newton, temos:

$$T_{7+1} = \binom{7}{7} \cdot (2x)^{7-7} y^7 = 1 \cdot (2x)^0 y^7 = y^7$$

Portanto, y^7 é o termo independente de x.

R13. Se a soma dos coeficientes do binômio $(2x+y)^m$ é 512, então qual deve ser o valor de **m**?

Resolução

Desenvolvendo o binômio, temos:

$$(2x+y)^m = \binom{m}{0}(2x)^m y^0 + \binom{m}{1}(2x)^{m-1}y^1 + \cdots + \binom{m}{m-1}(2x)^1 y^{m-1} + \binom{m}{m}(2x)^0 y^m$$

$$= \binom{m}{0}2^m x^m + \binom{m}{1}2^{m-1}x^{m-1}y^1 + \cdots + \binom{m}{m-1}2xy^{m-1} + \binom{m}{m}y^m$$

Tomando $x=1$ e $y=1$, obtemos:

$$(2+1)^m = \underbrace{\binom{m}{0}2^m + \binom{m}{1}2^{m-1} + \cdots + \binom{m}{m-1}2 + \binom{m}{m}}_{\text{soma dos coeficientes}}$$

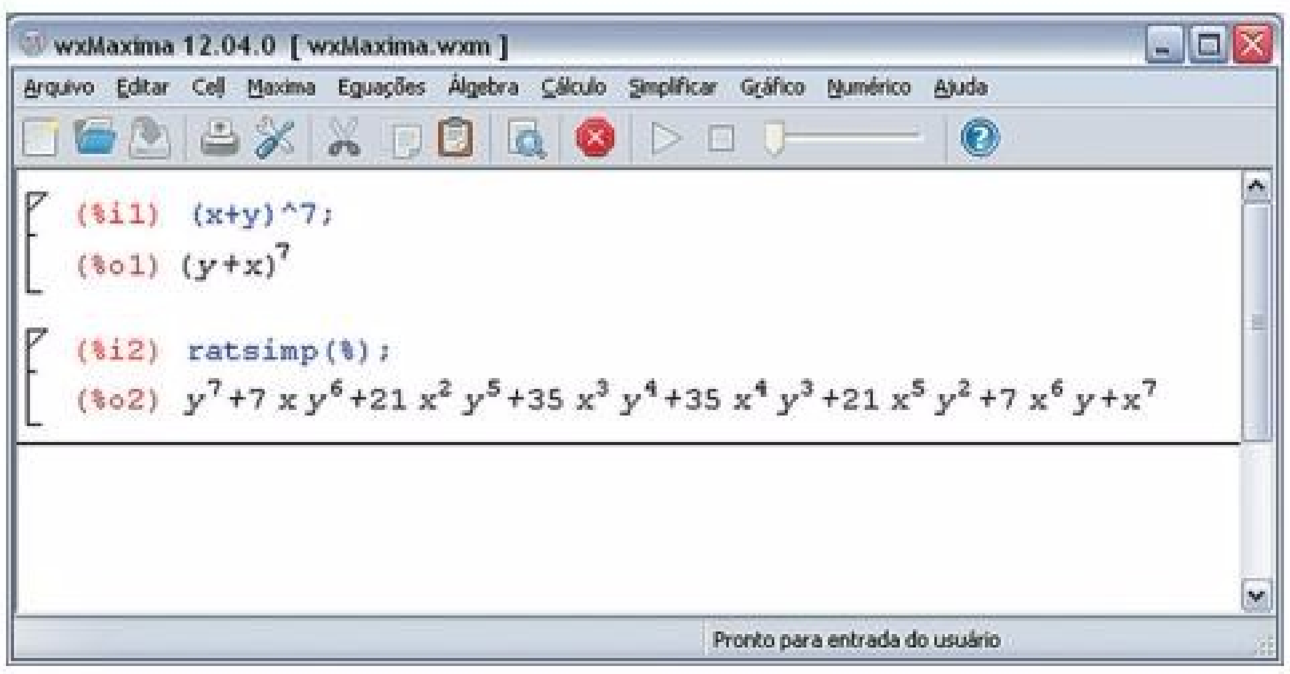
Consequentemente:

$$3^m = 512 \Rightarrow 3^m = 3^8$$

Portanto, $m = 8$.

O Binômio de Newton no wxMaxima

Para desenvolver o binômio $(x+y)^7$ utilizando o wxMaxima, inicialmente execute o programa e digite o binômio. Em seguida, no menu **Simplificar**, clique na opção **Expandir expressão** e obtenha o resultado.



wxMAXIMA

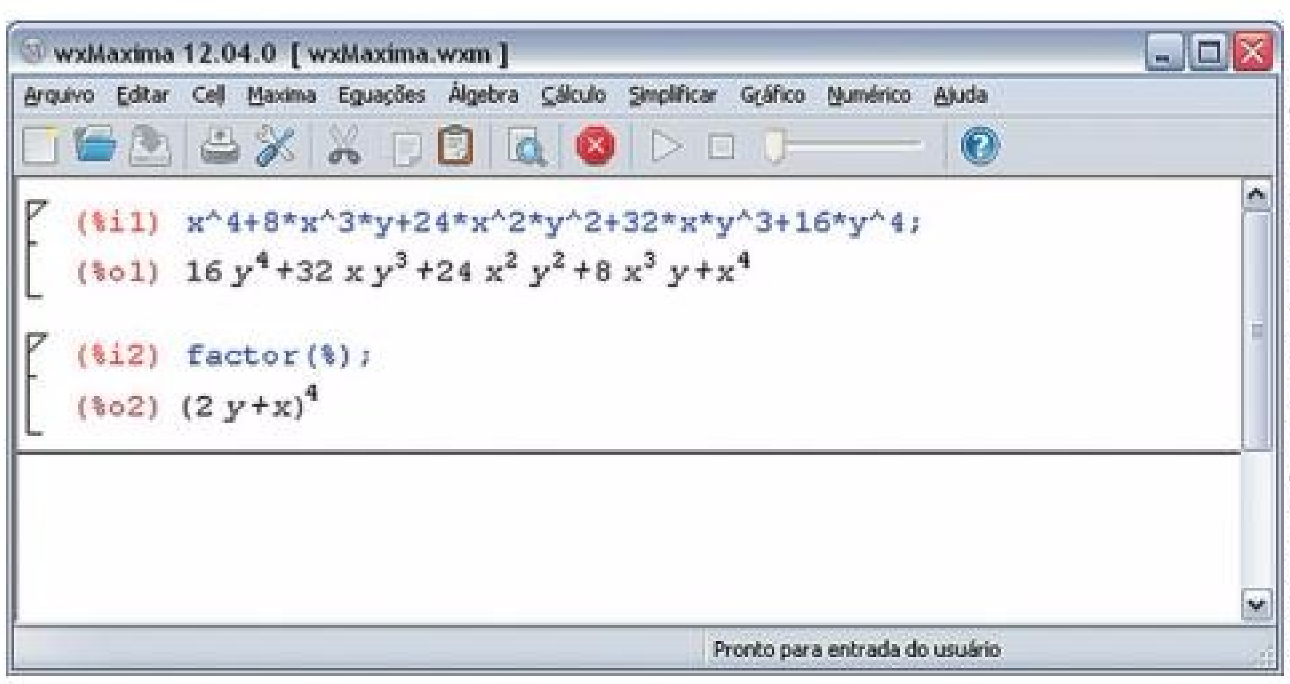
O wxMaxima é uma interface gráfica criada para o Maxima, um sistema de computação algébrica derivado do sistema Macsyma, desenvolvido no MIT entre os anos de 1968 e 1982 como parte do Projecto MAC.

Licença: O wxMaxima é livre para uso pessoal e comercial. Ele pode ser copiado, distribuído, modificado e reestruturado, assim como utilizado para criar obras derivadas.

Onde obter: <http://andrejv.github.com/wxmaxima/index.html>

Versão utilizada: 12.04.0

Para escrever o binômio $x^4+8x^3y+24x^2y^2+32xy^3+16y^4$ em sua forma fatorada, execute o wxMaxima e digite os termos do binômio. Em seguida, no menu **Simplificar**, clique na opção **Fatorar expressão** e obtenha o resultado.



Imagens: wxMaxima v. 12.04.0. Por Andrej Vodopivec

Agora, utilize o wxMaxima e desenvolva os binômios que estão escritos na forma fatorada, e fatore os binômios escritos na forma expandida.

a) $(3x+y)^3$ $27x^3+27x^2y+9xy^2+y^3$

b) $(x+1)^5$ $x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$

c) $\left(\frac{x}{3}-y\right)^8$ $\frac{x^8}{6561}-\frac{8x^7y}{2187}+\frac{28x^6y^2}{729}-\frac{56x^5y^3}{243}+\frac{70x^4y^4}{81}-\frac{56x^3y^5}{27}+\frac{28x^2y^6}{9}-\frac{8xy^7}{3}+y^8$

d) $8x^3-24x^2y+24xy^2-8y^3$ $-8(y-x)^3$

e) $x^6+3x^5y+\frac{15x^4y^2}{4}+\frac{5x^3y^3}{2}+\frac{15x^2y^4}{16}+\frac{3xy^5}{16}+\frac{y^6}{64}$ $\frac{(y+2x)^6}{64}$

f) $y^7-14y^6+84y^5-280y^4+560y^3-672y^2+448y-128$ $(y-2)^7$

Atividades Anote as respostas no caderno.

Professor(a): Veja a resposta desta atividade no final do livro.

33. Desenvolva cada um dos binômios.

a) $(z+w)^5$

b) $(xy+z)^4$

c) $\left(\sqrt{x}-z\right)^6$

d) $\left(1-\dfrac{w}{2}\right)^4$

34. Qual é a soma dos coeficientes dos termos no desenvolvimento do binômio:

a) $(2a+3b)^7$? 78 125

b) $\left(\dfrac{c}{2}-2d\right)^5$? $-\dfrac{243}{32}$

c) $\left(\sqrt[3]{m}+2n\right)^4$? 81

d) $\left(3p-\dfrac{1}{q}\right)^8$? 256

35. Se a soma dos coeficientes do binômio $\left(\dfrac{7}{x}-3\sqrt{y}\right)^p$ é 4 096, então qual deve ser o valor de **p**? $p=6$

36. Ao desenvolver o binômio $\left(x+y^2\right)^{14}$, qual será o:

a) termo central? $3\,432x^7y^{14}$

b) termo independente de x? y^{28}

c) coeficiente de x^9y^{10}? 2002

37. (UEPB) Se o coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $(x+k)^8$ é 7, o valor de 4k será: b

a) $\dfrac{1}{2}$

b) 2

c) 4

d) $\dfrac{3}{2}$

e) 3

38. Mostre que a soma dos coeficientes do binômio $(x-y)^n$ é igual a zero para todo **n**.

Professor(a): Veja a resposta desta atividade na Assessoria Pedagógica.

39 . (FGV-SP) A soma dos coeficientes de todos os termos do desenvolvimento de $(x-2y)^{18}$ é igual a: b

a) 0

b) 1

c) 19

d) −1

e) −19

40. Dado o binômio $(2a-3b)^8$, determine:

a) a quantidade de termos após desenvolvê-lo. 9

b) o termo em que o expoente de b é igual a 6. $81\,648a^2b^6$

c) o coeficiente do termo central. 90 720

d) o termo independente de b. $256a^8$

Professor(a): Veja na Assessoria Pedagógica orientações para o trabalho com a seção Sobre a unidade.

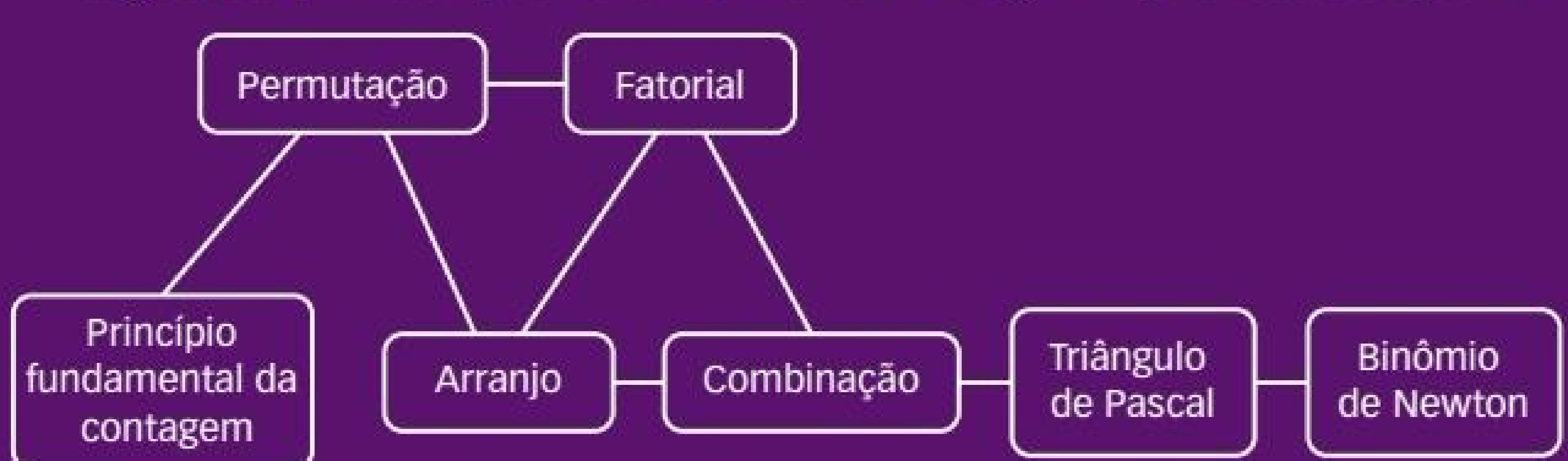
Sobre a unidade | Anote as respostas no caderno.

1. O que você estudou nesta unidade? Você considera que atingiu os objetivos propostos no início da unidade? Se não, o que fará para atingir os objetivos?
2. Qual dos conteúdos estudados nesta unidade você considera que deve estudar um pouco mais?
3. Se um amigo pedisse a você que explicasse o que são arranjo simples e combinação simples, qual explicação você daria?
4. No princípio fundamental da contagem, o que significa dizer que dois acontecimentos são sucessivos e independentes?
5. Converse com seus colegas a respeito de situações em que os conteúdos estudados nesta unidade estão presentes. Se necessário, realizem uma pesquisa.

1. Resposta esperada: Princípio fundamental da contagem, fatorial, permutação simples, arranjo simples, combinação simples, permutação com elementos repetidos, triângulo de Pascal, binômio de Newton. Resposta pessoal. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.
3. Resposta esperada: Arranjo simples de n elementos distintos tomados p a p, com $0 \le p \le n$, é qualquer agrupamento ordenado formado por p elementos escolhidos entre esses n elementos. Nesse caso, leva-se em consideração a ordem dos elementos do agrupamento, isto é, trocando a ordem dos elementos obtemos um novo agrupamento. Combinação simples de n elementos distintos tomados p a p, com $0 \le p \le n$, é qualquer agrupamento não ordenado formado por p elementos escolhidos entre esses n elementos. Nesse caso, a ordem dos elementos não é importante, isto é, a troca na ordem dos elementos não gera um novo agrupamento.
4. Resposta esperada: Dois acontecimentos são sucessivos quando um deles ocorre após o outro, e são independentes quando a ocorrência de cada um deles não afeta a ocorrência do outro.
5. Possível resposta: Os conteúdos desta unidade estão presentes em situações como: a quantidade de possibilidades de apostas em uma loteria; o número de jogos entre as equipes em uma competição; as maneiras diferentes que um cliente tem para escolher um prato em certo restaurante.

Ideias matemáticas

O esquema a seguir relaciona algumas das ideias matemáticas estudadas nesta unidade. Converse com seus colegas e professor(a) a respeito de como essas e outras ideias abordadas na unidade estão relacionadas. Em seguida, faça um texto descrevendo as relações existentes entre elas e dê sugestões para complementar e melhorar a organização desse esquema.



Revise os conteúdos estudados nesta unidade e anote os pontos que julgar mais relevantes. Com isso, organize um resumo para auxiliá-lo(a) na compreensão dos conteúdos.

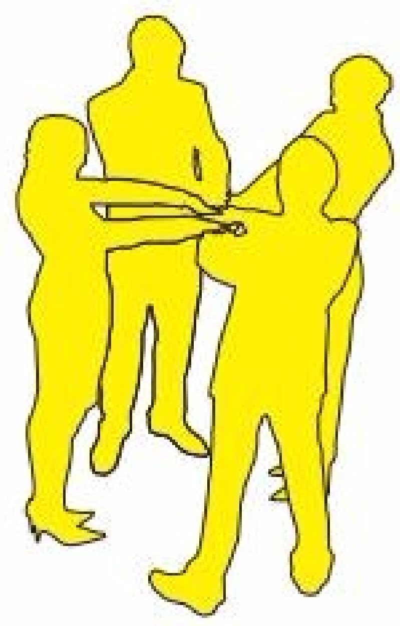
Professor(a): Converse com os alunos de maneira que retomem os objetivos propostos no início da unidade e verifique, por exemplo, se compreenderam a ideia do princípio fundamental da contagem. Auxilie-os a listar as principais ideias matemáticas presentes na unidade e a buscar relações entre elas, como a relação entre a combinação simples e o Triângulo de Pascal. Com base nas ideias listadas e relações estabelecidas, oriente-os a propor aprimoramentos ao esquema apresentado, inserindo novas ideias e indicando suas possíveis relações. Peça aos alunos que registrem essas discussões, compondo uma síntese da unidade.

6 PROBABILIDADE

Tino Soriano/ National Geographic/ Glow Images

Como se tornar um doador de medula óssea:

Ilustrações: Henrique Nakano



Para ser doador, é necessário ter entre 18 e 55 anos e boa condição de saúde.

Comparecer a um hemocentro para cadastramento e coleta de sangue para testes.

Os resultados dos testes são inseridos em um sistema informatizado, que compara os resultados dos exames buscando um doador compatível ao paciente.

Caso seja compatível, o doador será avisado e decidirá se realizará a doação ou não. Assim, é importante manter seus dados atualizados para que, em caso de compatibilidade, você seja rapidamente localizado.

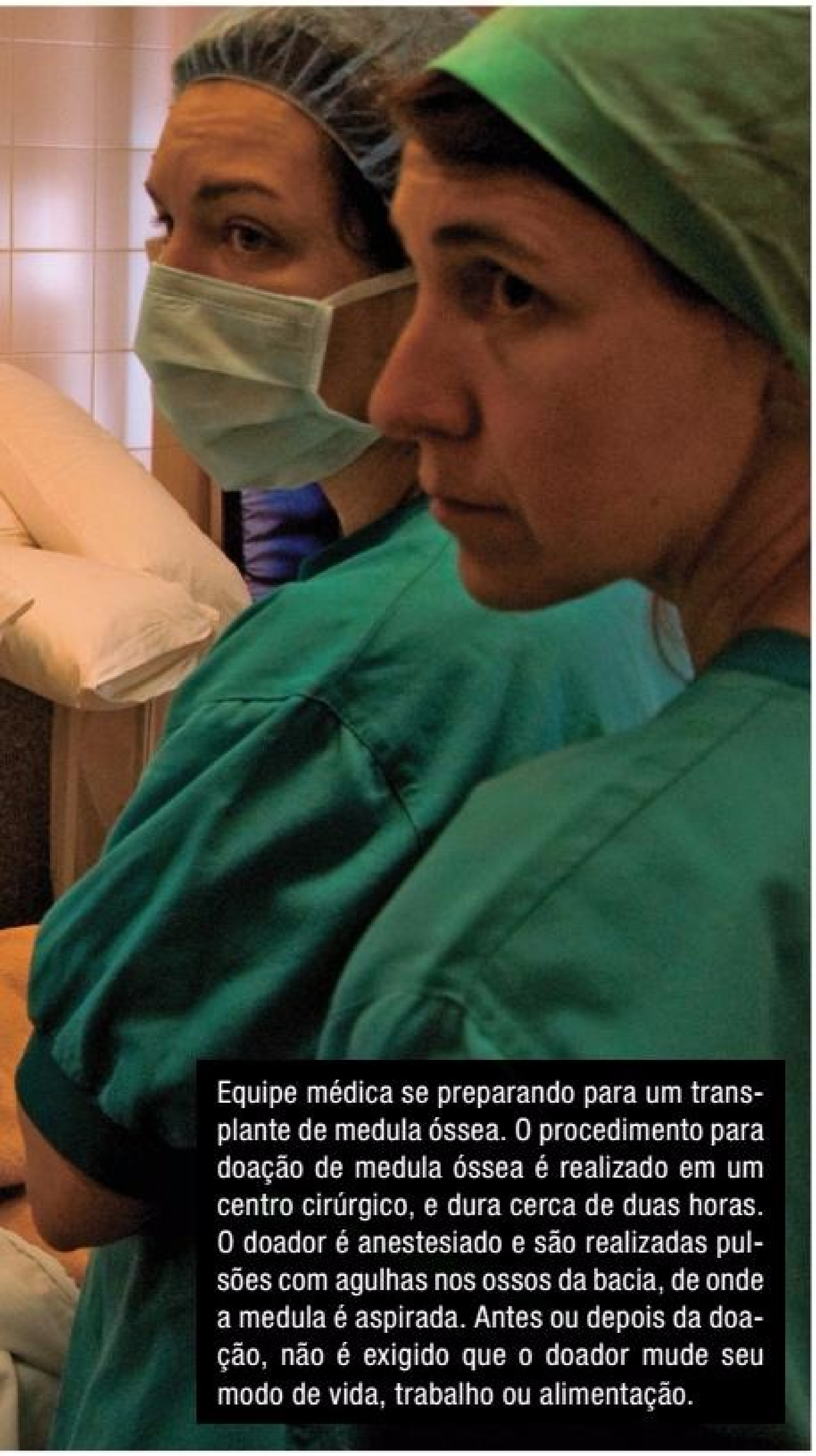
As imagens apresentadas são representações artísticas. As cores utilizadas não correspondem às reais e os elementos ilustrados não estão proporcionais.

Professor(a): Diga aos alunos que as hemácias (ou glóbulos vermelhos) são responsáveis por transportar oxigênio para os tecidos e retirar deles o dióxido de carbono, transportando-o para os pulmões; os leucócitos (ou glóbulos brancos) são responsáveis pela defesa do organismo contra infecções; e as plaquetas compõem o sistema de coagulação do sangue.

Professor(a): Proponha aos alunos algumas questões relacionadas a esse tema. Algumas sugestões são:

a) De acordo com o texto, é mais provável encontrar um doador de medula óssea compatível entre irmãos ou no banco de medula? Por quê? (Resposta esperada: Entre irmãos, pois a chance de compatibilidade entre eles é de 1 para 4, muito maior que 1 para 300000, no banco de medula.)

b) Como a chance de encontrar um doador compatível entre irmãos é de 1 para 4, é possível dizer que uma pessoa com 4 irmãos terá, certamente, compatibilidade com algum deles? Justifique. (Resposta esperada: Não. As chances são grandes, porém não é certo que um dos irmãos seja compatível, pois existe a chance de 3 para 4 para incompatibilidade.)



Equipe médica se preparando para um transplante de medula óssea. O procedimento para doação de medula óssea é realizado em um centro cirúrgico, e dura cerca de duas horas. O doador é anestesiado e são realizadas pulsões com agulhas nos ossos da bacia, de onde a medula é aspirada. Antes ou depois da doação, não é exigido que o doador mude seu modo de vida, trabalho ou alimentação.

Transplante de medula óssea

A medula óssea é um tecido gelatinoso encontrado no interior dos ossos. Sua função, basicamente, é produzir três tipos de células sanguíneas: as hemácias, os leucócitos e as plaquetas.

Em pessoas saudáveis, a medula óssea é renovada pelo próprio organismo. Porém, há doenças que afetam a medula e, em alguns casos, o transplante é o tratamento mais adequado. Uma das situações em que o transplante de medula pode ser necessário é no tratamento da leucemia, um tipo de câncer que altera a produção de células pela medula. Com a utilização de quimioterapia e radioterapia, a medula óssea é propositalmente "destruída", preparando o organismo do paciente para receber a medula saudável.

O transplante de medula óssea é um procedimento considerado simples pelos médicos. É retirada uma pequena quantidade de células da medula óssea do doador e injetada na corrente sanguínea do receptor. Em pouco tempo essas células são transportadas pelo sangue até o interior dos ossos, onde começam a se multiplicar e a retomar sua atividade de produção de células sanguíneas. Quanto ao doador, sua recuperação é bastante rápida. Em quinze dias, aproximadamente, seu organismo repõe a medula óssea retirada.

Apesar de simples, o transplante sempre esbarra em um inimigo quase onipresente: a incompatibilidade. É necessário que doador e receptor sejam totalmente compatíveis. Em geral, pai e mãe não são compatíveis, pois cada um possui apenas metade do material genético do filho. Primeiramente são consultados os irmãos, nos quais a probabilidade de compatibilidade é de 1 para 4. Caso não haja compatibilidade na família, são realizadas pesquisas nos bancos de medula, onde se estima que a probabilidade de se encontrar um doador é de 1 para 300000.

Professor(a): Diga aos alunos que a medula óssea é também conhecida popularmente como tutano.

Transplantes de medula óssea por ano no Brasil – 2010 a 2014

Fonte: Associação Brasileira de Transplante de Órgãos. Disponível em: <www.abto.org.br/abtov03/Upload/file/RBT/2015/rbt201508052015-lib.pdf>. Acesso em: 18 jan. 2016.

Nesta unidade você vai...

- determinar o espaço amostral de um experimento aleatório e os seus eventos.
- calcular a probabilidade da ocorrência ou não ocorrência de um evento.
- identificar eventos independentes.
- calcular a probabilidade da união de dois eventos e a probabilidade condicional.
- empregar a Lei binomial das probabilidades.

Professor(a): Explique aos alunos que estes são os principais objetivos a serem atingidos por eles nesta unidade. Retome esses objetivos no decorrer dos estudos da unidade e, se julgar necessário, estabeleça também novos objetivos. Na Assessoria Pedagógica encontram-se os objetivos gerais deste nível de ensino, assim como os objetivos específicos desta unidade.

PROBABILIDADE

Professor(a): O cálculo da probabilidade de que, em um grupo de pessoas, ao menos duas delas façam aniversário no mesmo dia é apresentado no final do próximo tópico, com a atividade **Paradoxo dos aniversários**.

Qual a probabilidade de que, em uma sala de aula com 30 alunos, dois deles façam aniversário no mesmo dia? Podemos pensar que há poucas chances de isso acontecer, afinal, são apenas 30 alunos, e no ano há 365 dias (sem levar em consideração os anos bissextos). No entanto, realizando os cálculos, podemos verificar que essa probabilidade é maior que 70%, ou seja, a cada 10 salas de aula com 30 alunos, é esperado que em mais de 7 delas dois alunos façam aniversário no mesmo dia.

Note que é mais provável que em uma sala haja dois alunos aniversariantes no mesmo dia do que todos comemorando em dias diferentes.

De maneira semelhante, podemos efetuar os cálculos e verificar que, em uma sala com 60 alunos, a probabilidade de que pelo menos dois deles façam aniversário no mesmo dia é quase 100%.

Nessa e em outras situações, é comum ouvirmos frases do tipo "qual a probabilidade" de certo acontecimento ocorrer. Estudaremos nesta unidade situações em que são utilizados cálculos para determinar as chances de ocorrer os mais variados tipos de acontecimentos. Mas, antes, vamos definir alguns conceitos importantes: **experimento aleatório**, **espaço amostral** e **evento**.

Carlos Nascimento

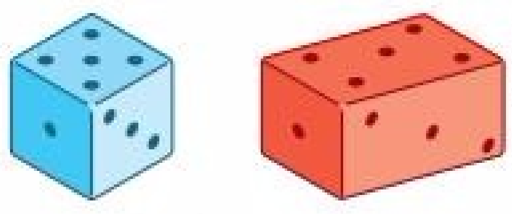
Experimento aleatório

O lançamento de um dado honesto (não viciado) é um experimento em que não podemos prever o resultado, ou seja, não se sabe se a face voltada para cima será a de 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 pontos, mesmo lançando-o várias vezes e sob as mesmas condições. Quando isso acontece, dizemos que se trata de um **experimento aleatório**.

Todo experimento que, mesmo repetido várias vezes sob as mesmas condições, apresenta resultados imprevisíveis é chamado **experimento aleatório**.

Nos experimentos aleatórios com dados, moedas, roletas, entre outros, exceto quando for dito o contrário, estamos considerando esses objetos sem qualquer vício, isto é, sem modificações de forma que se possa manipular os resultados. Nesse caso, dizemos que são **honestos** ou **não viciados**.

Para exemplificar, vamos considerar dois dados: o azul (honesto) e o vermelho (viciado), como na imagem ao lado.



Gilberto Alicio

Ao lançar o dado azul, as chances de ocorrer qualquer uma das faces é a mesma. Quando todas as ocorrências possíveis têm a mesma chance de acontecer, chamamos de **eventos equiprováveis**.

Por outro lado, ao lançar o dado vermelho, por causa do seu formato, a chance de ocorrer a face com 5 pontos é maior do que a chance de ocorrer a face com 1 ponto, por exemplo. Como as ocorrências possíveis têm diferentes chances de acontecer, não temos eventos equiprováveis.

Outro tipo de dado viciado, não tão evidente como o apresentado, é aquele que seu centro de massa se aproxima de uma das faces, fazendo com que ela tenha maiores chances de ficar voltada para baixo. Esse princípio é o mesmo da peteca, que tende a cair sempre com a base para baixo, pois possui maior massa.

Centro de massa: ponto no qual se concentra a massa de um corpo.

Veja outros exemplos de experimentos aleatórios:

- Lançamento de uma moeda não viciada.
- Resultado de uma loteria.
- Retirada sem ver de uma ficha de uma urna.

Espaço amostral

No lançamento de um dado, temos 6 possíveis resultados. Chamamos o conjunto desses resultados de **espaço amostral**.

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado **espaço amostral**. Em geral, indicamos o espaço amostral por Ω (lemos "ômega").

Por exemplo:

- Ao lançarmos uma moeda, temos $\Omega = \{C, K\}$, em que **C** representa a face "cara" e **K**, a face "coroa".
- Ao lançarmos duas moedas, temos $\Omega = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$.

Cara ou coroa?

Em 1727, foram cunhadas as primeiras moedas no Brasil com a figura do rei em uma das faces, e com as armas da Coroa Portuguesa na outra. Essas moedas deram origem à expressão popular "cara ou coroa" e ficaram conhecidas como série dos escudos.

Banco Central do Brasil. Disponível em: <www.bcb.gov.br/Pre/PEF/PORT/publicacoes_DinheironoBrasil.pdf>. Acesso em: 18 jan. 2016.

Captura via escâner

Moeda da série dos escudos de 1727.

Evento

Evento ou acontecimento é um subconjunto de resultados do espaço amostral.

Todo subconjunto de um espaço amostral Ω é chamado **evento**. Em geral, indicamos um evento por uma letra maiúscula.

Ainda em relação ao lançamento de um dado, alguns exemplos de possíveis eventos do espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ são:

- **A**: ocorrência do número 4.

  $$A = \{4\}$$

  Note que o evento **A** é representado por um conjunto unitário. Nesse caso, dizemos que é um evento **simples** ou **unitário**.
- **B**: ocorrência de um número par.

  $$B = \{2, 4, 6\}$$
- **C**: ocorrência de um número maior que 3.

  $$C = \{4, 5, 6\}$$
- **D**: ocorrência de um número maior que 1.

  $$D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

  Note que, embora a ocorrência do evento **D** seja muito provável, não podemos afirmar que ele irá ocorrer sempre. Nesse caso, podemos afirmar que ele irá ocorrer com frequência alta.

Professor(a): Diga aos alunos que, quando a ocorrência de um evento simples ou unitário é pouco provável, não podemos afirmar que ele nunca irá ocorrer, mas sim que ele irá ocorrer com frequência baixa.

- **E**: ocorrência de um número menor que 7.

  $$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

  Note que o evento **E** é igual ao espaço amostral, isto é, $E = \Omega$. Nesse caso, dizemos que **E** é um evento **certo**.
- **F**: ocorrência de um número maior que 6.

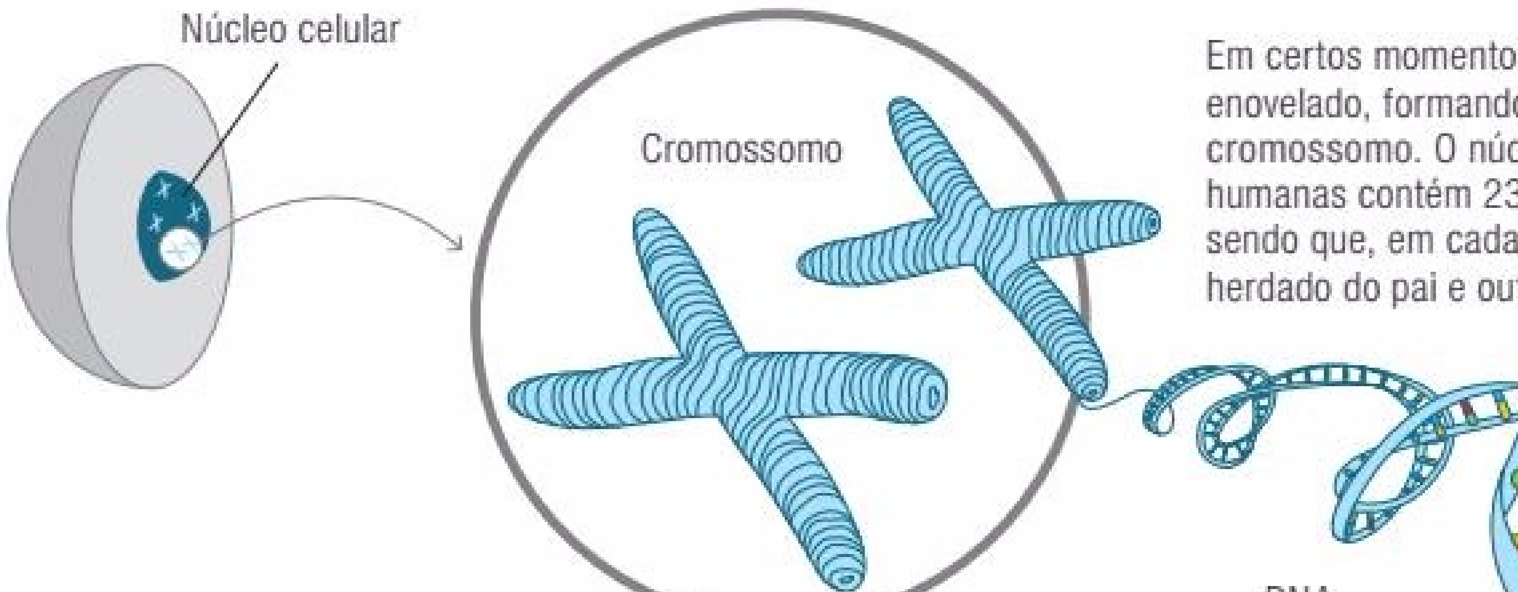
  $$F = \varnothing$$

  Note que o evento **F** é representado por um conjunto vazio, pois não há números maiores que 6 no espaço amostral. Nesse caso, dizemos que é um evento **impossível**.

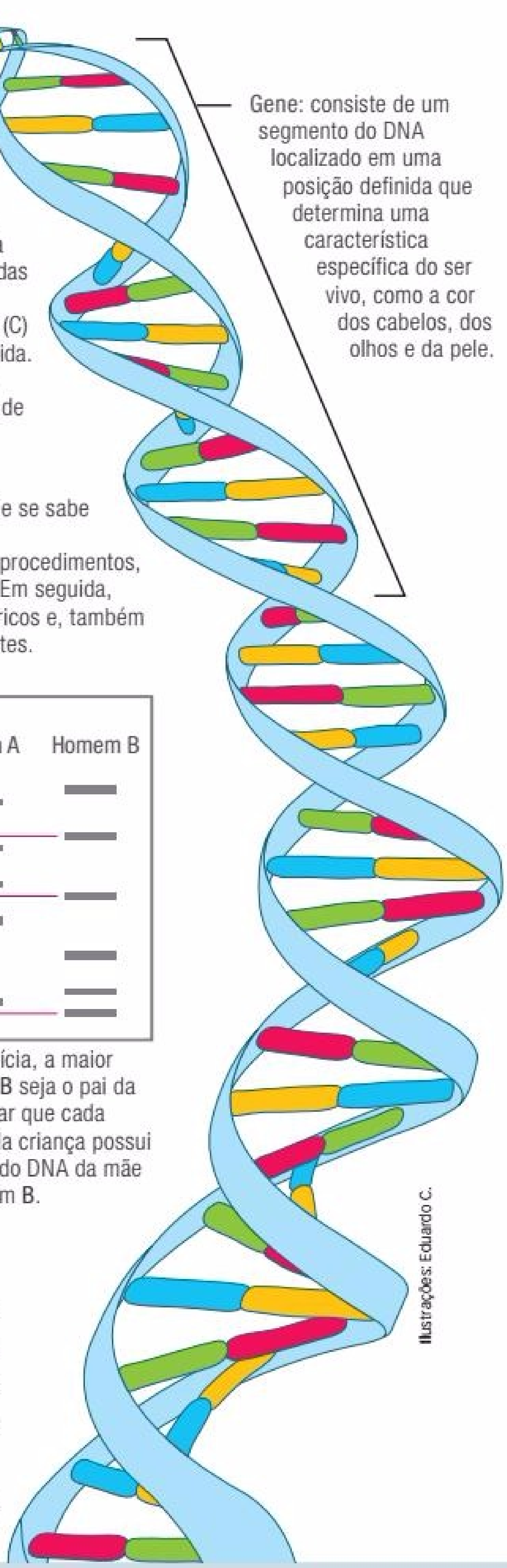
COMO FUNCIONA O teste de DNA

O DNA pode ser entendido como o verdadeiro documento de identidade de um organismo celular, pois a combinação das estruturas que formam essa molécula é única e exclusiva para cada ser vivo.

Como se trata de uma herança genética dos pais biológicos, sendo metade vinda do pai e metade da mãe, é possível verificar, por exemplo, se um homem é realmente o pai de uma criança, no chamado teste de DNA ou teste de paternidade, com aproximadamente 100% de acerto, ou seja, a probabilidade de um teste desse tipo falhar é muito pequena.

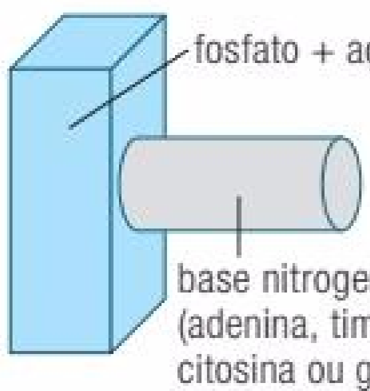


Em certos momentos, o DNA encontra-se enovelado, formando uma estrutura chamada cromossomo. O núcleo da maioria das células humanas contém 23 pares de cromossomos, sendo que, em cada par, um cromossomo é herdado do pai e outro da mãe.



Gene: consiste de um segmento do DNA localizado em uma posição definida que determina uma característica específica do ser vivo, como a cor dos cabelos, dos olhos e da pele.

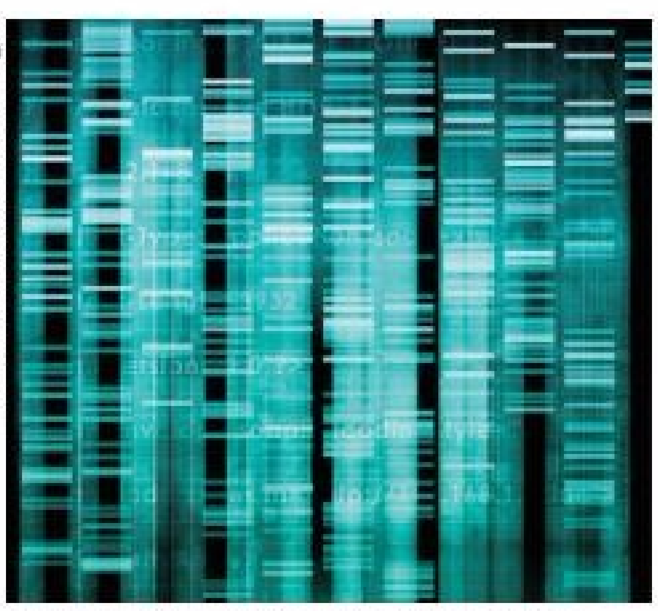
Nucleotídeo



DNA (ácido desoxirribonucleico) é uma molécula em que estão codificadas as informações genéticas do ser vivo. Ela é formada por nucleotídeos, que se repetem ao longo de duas cadeias unidas por atração química entre as bases nitrogenadas. Obrigatoriamente, a adenina (A) se une à timina (T) e a citosina (C) se une à guanina (G), com formato que lembra uma escada torcida. Essa molécula é exclusiva de cada ser vivo, porém, a diferença entre um ser humano e outro é mínima, mesmo existindo cerca de 3 bilhões de pares de nucleotídeos em cada DNA.

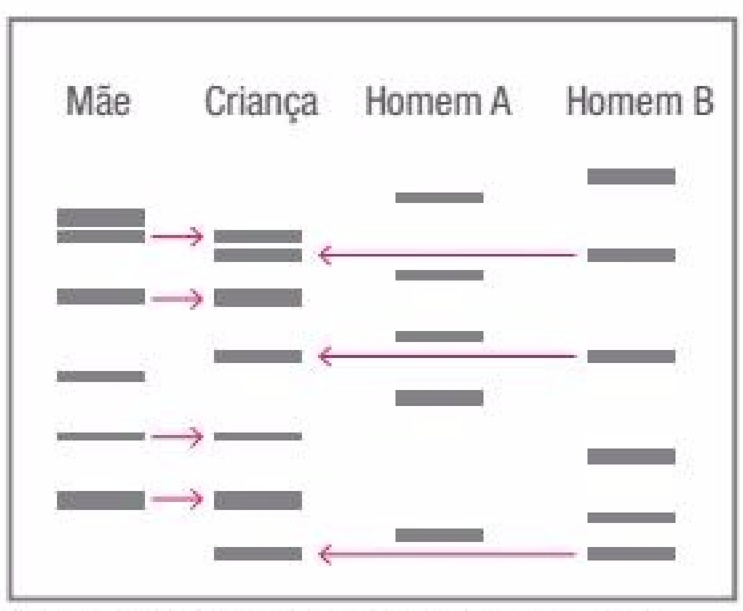
Para um teste de paternidade, por exemplo, são escolhidos trechos específicos da sequência, onde se sabe que existe grande variação entre as pessoas.
O DNA da criança, da mãe e dos supostos pais é extraído do núcleo celular e submetido a alguns procedimentos, como separação das sequências desejadas, ampliação e marcação com uma espécie de corante. Em seguida, com uma técnica chamada eletroforese, os fragmentos de DNA são separados por processos elétricos e, também por causa da diferença de tamanho, aqueles idênticos acabam por ocupar posições correspondentes.

kenton/ Shutterstock/ Glow Images



Eletroforese utilizada para identificar fragmentos de DNA.

Sendo uma herança genética, se um fragmento presente no DNA da criança não possuir um correspondente no DNA da mãe, foi então obrigatoriamente herdado do pai.



Note que nessa impressão fictícia, a maior probabilidade é que o homem **B** seja o pai da criança, pois podemos observar que cada fragmento no trecho do DNA da criança possui um correspondente no trecho do DNA da mãe ou no trecho do DNA do homem **B**.

As imagens apresentadas são representações artísticas. As cores utilizadas não correspondem às reais e os elementos ilustrados não estão proporcionais.

Ilustrações: Eduardo C.

Descoberta do DNA

James Watson (um geneticista microbiano americano) e Francis Crick (um físico inglês) descobriram a estrutura do DNA em 1953. Seu modelo da estrutura do DNA foi revolucionário. Eles propuseram uma definição de gene em termos químicos e, fazendo isso, abriram o caminho para a compreensão da ação genética e da hereditariedade a nível molecular. [...]

GRIFFITHS, Anthony J. F. et al. *Introdução à genética*. Trad. Paula A. Motta. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2008. p. 225.

Atividades resolvidas

R1. Alex, Bruno e Caio são os únicos clientes de uma loja classificados para participar do sorteio de três prêmios. Determine:

a) o evento **D**, da ocorrência de Bruno ser o 1º sorteado.

b) o evento **E**, da ocorrência de Alex ser o 2º ou 3º sorteado.

Resolução

Inicialmente, vamos determinar o espaço amostral. Indicando Alex por **A**, Bruno por **B** e Caio por **C**, temos:

$$\Omega = \{(A,B,C),(A,C,B),(B,A,C),(B,C,A),(C,A,B),(C,B,A)\}$$

a) Como **D** denota o evento "ocorrência de Bruno ser o 1º sorteado", temos:

$$D = \{(B,A,C),(B,C,A)\}$$

b) Como **E** denota o evento "ocorrência de Alex ser o 2º ou 3º sorteado", temos:

$$E = \{(B,A,C),(B,C,A),(C,A,B),(C,B,A)\}$$

R2 Considerando o lançamento de dois dados, um verde e outro vermelho, escreva o espaço amostral que representa os pontos das faces voltadas para cima. Em seguida, determine o evento:

a) **A**, da ocorrência da mesma quantidade de pontos em ambos os dados.

b) **B**, de a soma dos pontos ser 7.

c) **C**, de a multiplicação dos pontos ser 12.

d) **D**, de a soma dos pontos ser 13.

Resolução

Nesse caso, uma maneira de escrever o espaço amostral do lançamento dos dois dados é construir uma tabela de dupla entrada.

		Dado verde					
Dado vermelho		(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
		(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
		(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
		(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
		(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
		(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Ilustrações: Camila Carmona

É mais provável a ocorrência da mesma quantidade de pontos em ambos os dados ou de quantidades diferentes? Justifique.

Quantidades de pontos diferentes, pois o número de possibilidades é maior que o da ocorrência da mesma quantidade de pontos.

Note que o espaço amostral é composto de $\underbrace{36}_{6\cdot 6}$ elementos e que a ocorrência de 1 no dado vermelho e 6 no dado verde $(1, 6)$ é diferente da ocorrência de 6 no dado vermelho e 1 no dado verde $(6, 1)$, por exemplo.

Portanto, o espaço amostral é $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),\ldots,(6,4),(6,5),(6,6)\}$.

a) Ocorrência da mesma quantidade de pontos em ambos os dados: $A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$.

b) A soma dos pontos ser 7: $B = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.

c) A multiplicação dos pontos ser 12: $C = \{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}$.

d) A soma dos pontos ser 13 é um evento impossível, pois a maior soma possível é 12. Portanto, $D = \varnothing$.

Atividades ▶ Anote as respostas no caderno.

1. Em partidas de futebol, utilizando uma moeda, o árbitro sorteia o time que irá começar com a bola e em que lado do campo cada um deles começará jogando. Observe a tirinha a seguir.

CEDRAZ, Antônio Luiz Ramos. *Turma do Xaxado*. Disponível em: <www.xaxado.com.br>. Acesso em: 30 mar. 2016.

a) Escreva o espaço amostral Ω do sorteio realizado pelo árbitro antes do início da partida. $\Omega = \{C, K\}$

b) O sorteio realizado pelo árbitro é um exemplo de evento aleatório? E a disputa proposta pelo personagem Arturzinho, é um evento aleatório? Justifique. sim; Não, pois o resultado dessa disputa não depende somente da sorte, mas sim da habilidade de cada um dos jogadores no jogo de xadrez.

2. Em uma urna foram colocadas 5 bolas idênticas numeradas de 1 a 5. Duas bolas são sorteadas com reposição, ou seja, a primeira bola sorteada é colocada de volta na urna, e, em seguida, o sorteio da segunda bola é realizado. $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)\}$

a) Escreva o espaço amostral Ω desse experimento.

b) Determine o evento **A**, da ocorrência de dois números ímpares. $A = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$

c) Qual o evento **B**, de ser sorteada duas vezes a mesma bola? $B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$

d) Determine o evento **C**, de os dois números sorteados serem menores que 3. $C = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

3. Em um jogo, dois dados, um azul e um amarelo, são lançados simultaneamente. Determine:

a) o espaço amostral Ω. $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

b) o evento **A**, de o valor obtido no dado amarelo ser maior que o valor obtido no dado azul. $A = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)\}$

c) o evento **B**, de a soma dos valores ser maior ou igual a 10. $B = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

d) o evento **C**, de a soma dos valores ser igual a 1. $C = \varnothing$

e) o evento **D**, de a diferença dos valores, em módulo, ser maior que 3. $D = \{(1,5), (1,6), (2,6), (5,1), (6,1), (6,2)\}$

4. Na tirinha a seguir, os dois cavalos estão jogando par ou ímpar. Em sua opinião, por que ambos escolheram par? Resposta esperada: Porque o espaço amostral é $\Omega = \{2\}$, portanto, um número ímpar é um evento impossível.

GONSALES, Fernando. *Níquel Náusea: botando os bofes para fora*. São Paulo: Devir, 2002. p. 19.

5. Três moedas são lançadas simultaneamente. Determine:

a) o espaço amostral desse lançamento. $\Omega = \{(C,C,C), (C,C,K), (C,K,C), (C,K,K), (K,C,C), (K,C,K), (K,K,C), (K,K,K)\}$

b) o evento **A**, de todas as faces voltadas para cima serem iguais. $A = \{(C,C,C), (K,K,K)\}$

c) o evento **B**, de pelo menos uma moeda cair com a face "cara" voltada para cima. $B = \{(C,C,C), (C,C,K), (C,K,C), (C,K,K), (K,C,C), (K,C,K), (K,K,C)\}$

▶ Represente a face "cara" por **C** e face "coroa" por **K**.

Probabilidade de ocorrer um evento

Vimos que, no lançamento de um dado honesto, há 6 resultados possíveis. Qual é a probabilidade de obter 5 pontos em um lançamento?

Nesse caso, temos um experimento aleatório cujo espaço amostral é dado por $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ e o evento simples "obter 5 pontos", dado por $A=\{5\}$. Como o evento **A** tem somente 1 elemento, dizemos que a chance de obter 5 pontos é de 1 em 6, ou que a probabilidade é de:

$$\boxed{1 \text{ em } 6} \text{ ou } \boxed{\frac{1}{6}} \text{ ou } \boxed{16{,}\overline{6}\%}$$

E qual a probabilidade de, ao lançar o dado, obter um número ímpar? Nesse caso, o espaço amostral é o mesmo, mas o evento é $B=\{1,3,5\}$. Como o evento **B** tem 3 elementos, dizemos que as chances de obter um número ímpar é de 3 em 6, ou que a probabilidade é de:

$$\boxed{3 \text{ em } 6} \text{ ou } \boxed{\frac{3}{6}=\frac{1}{2}} \text{ ou } \boxed{50\%}$$

A probabilidade de ocorrer um evento **A** de um espaço amostral **Ω** finito é dado por:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

em que $n(A)$ e $n(\Omega)$ representam a quantidade de elementos de **A** e de **Ω**, respectivamente.

Teoria das probabilidades

O estudo das possibilidades teve início com base nas análises de situações nos jogos de azar, realizadas por matemáticos como Nicolo Tartaglia (por volta de 1499-1557) e Girolamo Cardano (1501-1576). Mas as bases da teoria da probabilidade como conhecemos hoje foram fundamentadas por Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), cujo ponto de partida está ligado a um problema proposto por Chevalier de Méré (c.1645).

É importante ressaltar que a probabilidade assim definida só é válida se todos os elementos de **Ω** tiverem a mesma chance de ocorrer, isto é, se **Ω** é um **espaço amostral equiprovável**, finito e não vazio.

Note que, se **A** é um evento qualquer do espaço amostral, então $\varnothing \subset A \subset \Omega$. Segue que, em relação à quantidade de elementos de **A**, temos:

$$n(\varnothing) \leq n(A) \leq n(\Omega)$$

Dividindo cada membro dessa desigualdade por $n(\Omega)$, temos:

$$\frac{\overbrace{n(\varnothing)}^{0}}{n(\Omega)} \leq \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \Rightarrow \boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$$

Portanto, a probabilidade de ocorrer um evento **A** varia de 0 a 1, ou seja, de 0% a 100%. Nos casos em que:

- **A** é um evento **impossível**, isto é, $A=\varnothing$, temos:

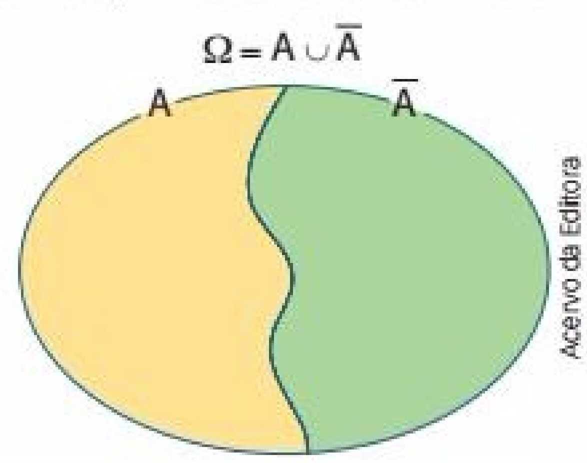
$$P(A)=P(\varnothing)=\frac{\overbrace{n(\varnothing)}^{0}}{n(\Omega)}=0$$

- **A** é um evento **certo**, isto é, $A=\Omega$, temos:

$$P(A)=P(\Omega)=\frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}=1$$

Probabilidade de não ocorrer um evento

Como o evento **A** é subconjunto do espaço amostral **Ω**, então o **complementar de A em relação a Ω**, o qual indicamos por $\overline{A}$, é o conjunto formado pelos elementos que não pertencem a **A**, ou seja, $\overline{A}=\Omega-A$. Em outras palavras, $\overline{A}$ é o evento "não ocorrer **A**".



Como $n(\overline{A})=n(\Omega)-n(A)$, dividindo os dois membros da igualdade por $n(\Omega)$, temos:

$$\frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=\frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}-\frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow \boxed{P(\overline{A})=1-P(A)}$$

A probabilidade de não ocorrer um evento **A** de um espaço amostral **Ω** finito é dado por:

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

em que $\overline{A}$ é o **complementar** de **A** em relação a **Ω**, ou o evento "não ocorrer **A**".

Atividades resolvidas

R3. (Enem) A queima de cana aumenta a concentração de dióxido de carbono e de material particulado na atmosfera, causa alteração do clima e contribui para o aumento de doenças respiratórias. O quadro a seguir apresenta números relativos a pacientes internados em um hospital no período da queima da cana.

Pacientes	Problemas respiratórios causados pelas queimadas	Problemas respiratórios resultantes de outras causas	Outras doenças	Total
Idosos	50	150	60	260
Crianças	150	210	90	450

Selecionando-se aleatoriamente um paciente internado nesse hospital por problemas respiratórios causados pelas queimadas, a probabilidade de que ele seja uma criança é igual a:

a) 0,26, o que sugere a necessidade de implementação de medidas que reforcem a atenção ao idoso internado com problemas respiratórios.

b) 0,50, o que comprova ser de grau médio a gravidade dos problemas respiratórios que atingem a população nas regiões das queimadas.

c) 0,63, o que mostra que nenhum aspecto relativo à saúde infantil pode ser negligenciado.

d) 0,67, o que indica a necessidade de campanhas de conscientização que objetivem a eliminação das queimadas.

e) 0,75, o que sugere a necessidade de que, em áreas atingidas pelos efeitos das queimadas, o atendimento hospitalar no setor de pediatria seja reforçado.

Resolução

Considerando o evento **A** "ser uma criança internada por problemas respiratórios causados pelas queimadas", $n(A)=150$. O espaço amostral é composto de todos os pacientes com problemas respiratórios causados pelas queimadas; assim:

$$n(\Omega)=50+150=200$$

Segue que:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{150}{200}=0,75$$

Portanto, a probabilidade de ser selecionado um paciente internado por problemas respiratórios causados pelas queimadas e ser uma criança é de 0,75 ou 75%. A alternativa correta é **e**.

R4. O professor de Matemática de certa turma vai sortear 2 livros para dois dos 25 alunos da turma. Sabendo que nesse dia faltaram exatamente 3 alunos, qual é a probabilidade de sortear apenas alunos que estão presentes na aula?

Resolução

A quantidade de maneiras distintas de sortear 2 alunos dessa turma é dada pela combinação dos 25 alunos tomados 2 a 2, isto é, $C_{25,2}$.

$$n(\Omega)=C_{25,2}=\frac{25!}{2!(25-2)!}=\frac{25\cdot 24\cdot \cancel{23!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{23!}}=300$$

A quantidade de maneiras de sortear 2 alunos dessa turma que estão presentes é dada pela combinação dos 22 alunos presentes tomados 2 a 2, isto é, $C_{22,2}$. Considerando o evento **A** "alunos presentes na aula", temos:

$$n(A)=C_{22,2}=\frac{22!}{2!(22-2)!}=\frac{22\cdot 21\cdot \cancel{20!}}{2\cdot 1\cdot \cancel{20!}}=231$$

Calculando $P(A)$, obtemos:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{231}{300}=0,77$$

Portanto, a probabilidade de sortear 2 alunos que estão presentes na aula é de 0,77 ou 77%.

R5. O gerente de uma lanchonete realizou uma pesquisa com alguns de seus clientes para investigar a preferência em relação às vitaminas servidas. Dos 50 entrevistados:

- 39 gostam de vitamina de abacate.
- 33 gostam de vitamina de banana.
- 29 gostam de vitamina de mamão.
- 23 gostam de vitamina de abacate com banana.
- 21 gostam de vitamina de abacate com mamão.
- 18 gostam de vitamina de banana com mamão.
- 11 gostam de vitamina das três frutas juntas.

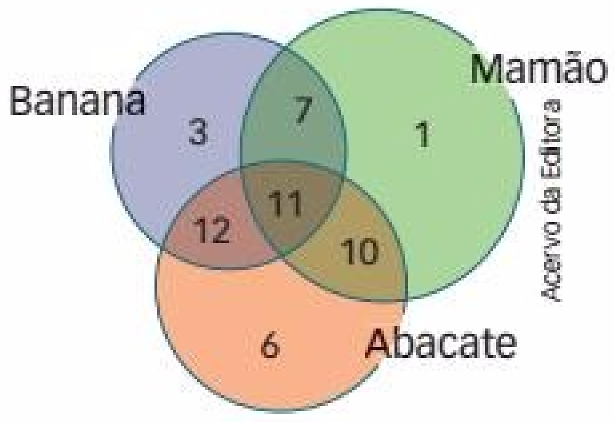
Ao sortear um desses clientes, qual é a probabilidade de que ele:

a) goste de vitamina somente de abacate?

b) não goste de vitamina de mamão?

Resolução

Primeiramente, vamos organizar as informações apresentadas em um diagrama.



a) Considerando o evento **A** "gostar de vitamina somente de abacate", $n(A)=6$. Desse modo, a probabilidade de o cliente gostar de vitamina somente de abacate é:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{6}{50}=0{,}12 \text{ ou } 12\%$$

b) Considerando o evento **B** "gostar de vitamina de mamão", $n(B)=29$. Desse modo, a probabilidade de o cliente não gostar de vitamina de mamão é:

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-\frac{n(B)}{n(\Omega)}=1-\frac{29}{50}=0{,}42 \text{ ou } 42\%$$

Professor(a): Diga aos alunos que estamos considerando que os 365 possíveis aniversários em um ano são equiprováveis, isto é, têm a mesma chance de ocorrer. No entanto, na prática isso não acontece por causa de alguns fatores, como o nascimento de gêmeos.

Paradoxo dos aniversários

Em algumas situações a Matemática apresenta resultados irrefutáveis, que muitas vezes são difíceis à nossa aceitação intuitiva. Um bom exemplo é o problema dos aniversários. A questão consiste basicamente no seguinte: Qual a probabilidade de ao menos duas pessoas de um grupo de **n** pessoas fazerem aniversário no mesmo dia?

Para $n=366$ pessoas, essa probabilidade é de 100% (considerando um ano de 365 dias). Porém, se pensarmos em uma quantidade pequena de pessoas, por exemplo, 23, intuitivamente essa probabilidade pode parecer quase nula. Mas aí está o engano!

Em um grupo de apenas 23 pessoas, a probabilidade de que duas delas façam aniversário no mesmo dia é de aproximadamente 50,7%.

Para realizar os cálculos, consideramos um ano de 365 dias e representamos por **A** o evento de ocorrência em que ao menos duas pessoas, em um grupo de 23, façam aniversário no mesmo dia. A probabilidade de ocorrência de **A** é dada pela probabilidade de 2 pessoas, 3 pessoas, 4 pessoas,..., 23 pessoas fazerem aniversário no mesmo dia. Assim, é mais simples calcularmos $\overline{A}$, ou seja, a probabilidade de nenhuma pessoa do grupo fazer aniversário no mesmo dia de outra. Para a ocorrência de $\overline{A}$, a 1ª pessoa deve fazer aniversário em um dos 365 dias do ano, a 2ª, em um dos 364 restantes, a 3ª, em um dos 363 e assim por diante, até que a 23ª comemore o aniversário em um dos 343 dias restantes. Dessa forma, temos que $n(\overline{A})=365\cdot 364\cdot 363\cdot \ldots \cdot 343$ e que $n(\Omega)=\underbrace{365\cdot 365\cdot 365\cdot \ldots \cdot 365}_{23 \text{ vezes}}=365^{23}$, em que Ω é o espaço amostral do evento $\overline{A}$.

Portanto, temos:

$$P(\overline{A})=\frac{365\cdot 364\cdot 363\cdot \ldots \cdot 343}{365^{23}}\simeq 0{,}493$$

Como $P(A)=1-P(\overline{A})$, temos que $P(A)\simeq 1-0{,}493 \Rightarrow P(A)\simeq 0{,}507$

Portanto, a probabilidade de que, em um grupo de 23 pessoas, ao menos duas pessoas façam aniversário em um mesmo dia é maior que 50%.

Agora, utilizando uma calculadora, determine a probabilidade de ao menos duas pessoas fazerem aniversário no mesmo dia em um grupo de: Professor(a): Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

a) 8 pessoas. aproximadamente 7,43%

b) 9 pessoas. aproximadamente 9,46%

c) 10 pessoas. aproximadamente 11,69%

d) 11 pessoas. aproximadamente 14,11%

O aumento da probabilidade é diretamente proporcional ao aumento da quantidade de pessoas do grupo? Justifique. Não, pois o aumento da quantidade de pessoas é constante, e o da probabilidade não é.

6. Em uma urna foram colocadas 10 bolas idênticas numeradas de 1 a 10. Ao retirar uma das bolas, aleatoriamente, determine a probabilidade de ela conter:

a) o número 1. 1 em 10 ou $\frac{1}{10}$ ou 10%

b) o número 0. 0

c) um número maior que 3 e menor que 8. 4 em 10 ou $\frac{2}{5}$ ou 40%

d) um múltiplo de 2. 5 em 10 ou $\frac{1}{2}$ ou 50%

e) um número maior ou igual a 9. 2 em 10 ou $\frac{1}{5}$ ou 20%

7. Qual a probabilidade de Lucas fazer parte de uma comissão composta de cinco alunos, sorteados entre os 20 alunos de sua turma? 25%

8. Considere todos os números de cinco algarismos distintos formados com os elementos do conjunto $A=\{1,2,5,6,8\}$. Calcule a probabilidade de, ao sortear um deles, este ser:

a) o número 85 216. 1 em 120 ou $\frac{1}{120}$ ou $0,8\overline{3}\%$

b) um número par. 72 em 120 ou $\frac{72}{120}$ ou 60%

c) um número ímpar. 48 em 120 ou $\frac{48}{120}$ ou 40%

d) um número múltiplo de 5. 24 em 120 ou $\frac{24}{120}$ ou 20%

e) um número maior que 12 586. 118 em 120 ou $\frac{118}{120}$ ou $98,\overline{3}\%$

f) um número menor ou igual a 86 152. 116 em 120 ou $\frac{116}{120}$ ou $96,\overline{6}\%$

9. Uma senha de computador é composta de 6 algarismos dentre os 10 disponíveis. Qual a probabilidade de, ao digitar aleatoriamente os 6 algarismos, o usuário acertar essa senha? 1 em 1 000 000 ou $\frac{1}{1\,000\,000}$ ou 0,0001%

10. (UFPR) André, Beatriz e João resolveram usar duas moedas comuns, não viciadas, para decidir quem irá lavar a louça do jantar lançando as duas moedas simultaneamente, uma única vez. Se aparecerem duas coroas, André lavará a louça; se aparecerem duas caras, Beatriz lavará a louça; e se aparecerem uma cara e uma coroa, João lavará a louça. A probabilidade de que João venha a ser sorteado para lavar a louça é de: e

a) 25%
b) 27,5%
c) 30%
d) 33,3%
e) 50%

11. Dado o conjunto $C=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$, temos que o conjunto das partes de **C** é dado por P(C), em que esse é o conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto **C**.

a) Quantos elementos possui o conjunto P(C)? 1024

b) Quantos são os subconjuntos de **C** que possuem exatamente três elementos? 120

c) Qual a probabilidade de sortear um subconjunto de **C**, e esse subconjunto possuir exatamente três elementos? aproximadamente 11,72%

Professor(a): Se julgar necessário, diga aos alunos que, dos artrópodes citados na atividade, são insetos: besouro, barata, formiga, abelha e gafanhoto.

12. (Fuvest-SP) Francisco deve elaborar uma pesquisa sobre dois artrópodes distintos. Eles serão selecionados, ao acaso, da seguinte relação: aranha, besouro, barata, lagosta, camarão, formiga, ácaro, caranguejo, abelha, carrapato, escorpião e gafanhoto.

Qual é a probabilidade de que ambos os artrópodes escolhidos para a pesquisa de Francisco não sejam insetos? c

a) $\frac{49}{144}$
b) $\frac{14}{33}$
c) $\frac{7}{22}$
d) $\frac{5}{22}$
e) $\frac{15}{144}$

Artrópodes: o filo de animais invertebrados que, entre outras características, têm o corpo segmentado e os membros articulados.

PRODUÇÃO TEXTUAL

13. Com base nas informações a seguir, escreva uma atividade sobre probabilidade e entregue para um colega resolver. Depois, verifique se a resolução está correta. Resposta pessoal.

Resultado da votação entre os funcionários da empresa para a escolha do prato principal da confraternização

Prato	Quantidade de funcionários
Lasanha	40
Feijoada	25
Churrasco	60
Salmão grelhado	25

Fonte: Administração da empresa.

EM GRUPO

14. (Uerj) Três modelos de aparelhos de ar-condicionado, I, II e III, de diferentes potências, são produzidos por um determinado fabricante. Uma consulta sobre intenção de troca de modelo foi realizada com 1 000 usuários desses produtos. Observe a matriz **A**, na qual cada elemento a_{ij} representa o número daqueles que pretendem trocar do modelo *i* para o modelo *j*.

$$A=\begin{pmatrix} 50 & 150 & 200 \\ 0 & 100 & 300 \\ 0 & 0 & 200 \end{pmatrix}$$

Selecionando-se aleatoriamente um dos usuários consultados, a probabilidade de que ele não pretenda trocar seu modelo de ar-condicionado é igual a: b

a) 20%
b) 35%
c) 40%
d) 65%

DESAFIO

15. Os produtos de uma pequena empresa são analisados de forma independente por quatro técnicos. Cada um dos técnicos analisa o produto e julga se ele apresenta ou não defeitos. Os aparelhos atestados como defeituosos são descartados, e a probabilidade de cada técnico, durante sua análise, atestar um aparelho que tenha defeito como sendo defeituoso é de 75%. Qual a probabilidade de um aparelho defeituoso ser detectado por pelo menos um dos técnicos? aproximadamente 99,61%

16. Um banco de sangue de determinada cidade recebe uma média de 300 doadores mensais. Observe na tabela os dados de setembro de 2016.

Doadores de sangue no mês de setembro de 2016 de acordo com o tipo sanguíneo

Tipo sanguíneo	Quantidade de doadores
A	80
B	60
AB	130
O	30

Fonte: Administração do banco de sangue.

a) Qual a probabilidade de uma pessoa, dentre as que doaram sangue em setembro de 2016, se selecionada ao acaso, ter o tipo sanguíneo **A**? aproximadamente 27%

b) Qual a probabilidade de uma pessoa, dentre as que doaram sangue em setembro de 2016, se selecionada ao acaso, não ter o tipo sanguíneo **O**? 90%

Doação de sangue

As transfusões de sangue são essenciais para pacientes que se submetem a alguns tipos de intervenção cirúrgica ou são vítimas de acidentes em que ocorrem grandes perdas de sangue. Temos ainda os pacientes portadores de hemofilia, que necessitam de transfusões com grande frequência.

Procure um hemocentro e seja um doador. Em geral, qualquer pessoa com idade entre 16 e 69 anos, com no mínimo 50 kg e em boas condições de saúde, pode ser um doador. Não se esqueça de levar um documento oficial com foto, pois ele será solicitado.

Doar sangue é um procedimento simples, seguro e ajuda a salvar vidas. Professor(a): Diga aos alunos que menores entre 16 e 17 anos precisam de autorização e da presença de um responsável para realizar a doação. E que pessoas com até 69 anos só podem ser doadoras se a 1ª doação tiver sido feita antes dos 60 anos.

Ministério da Saúde/ Governo Federal

Peça de campanha do *Ministério da Saúde*.

17. Uma pesquisa, referente ao uso da internet, foi realizada com os 240 alunos do curso de Matemática de uma universidade. Foi feita a seguinte pergunta: "Quais tipos de *site* você mais acessa durante o tempo que passa conectado à internet?". Na tabela a seguir estão as opções de resposta e a quantidade de alunos que escolheu cada uma delas.

***Sites* acessados pelos alunos do curso de Matemática de certa universidade durante o tempo que ficam conectados à internet, 2016**

Site	Quantidade de alunos
Redes sociais	100
Sites de busca	40
Sites de notícias	70
Sites de entretenimento (vídeos, músicas etc.)	30

Fonte: Organização do grupo de pesquisa.

a) Selecionando ao acaso um desses estudantes, qual a probabilidade de ele ter respondido:

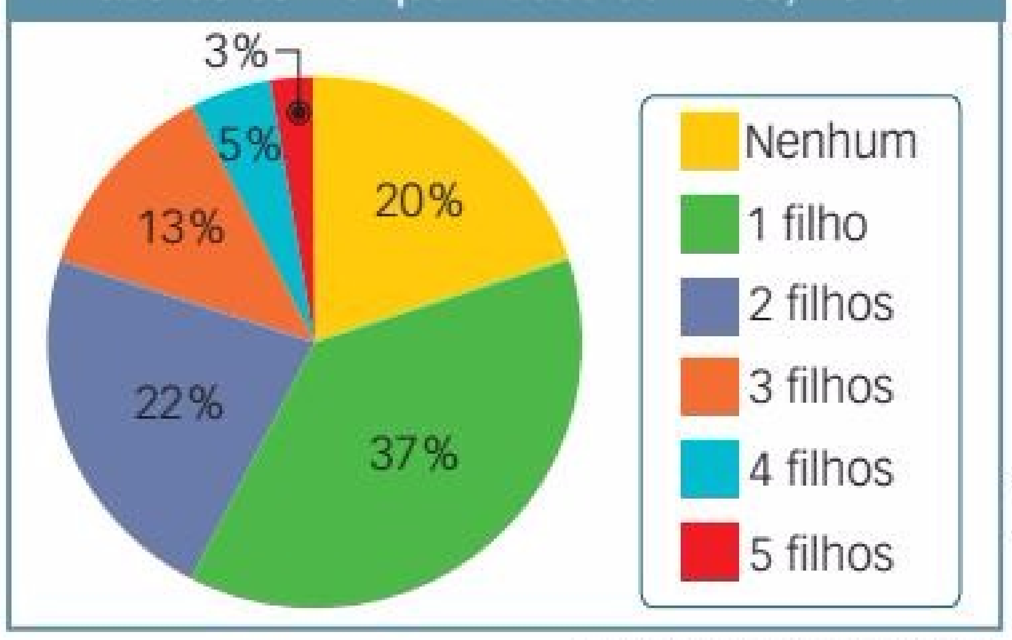
- redes sociais. $41,\overline{6}\%$
- *sites* de busca. $16,\overline{6}\%$
- *sites* de entretenimento. 12,5%

b) Qual a probabilidade de, selecionado ao acaso, um desses estudantes não passar a maior parte do seu tempo na internet conectado a redes sociais? $58,\overline{3}\%$

TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

18. Uma pesquisa realizada em um bairro registrou a quantidade de filhos por mulher. Foram entrevistadas 2000 mulheres, e o resultado foi apresentado no seguinte gráfico de setores.

Porcentagem de mulheres de certo bairro de acordo com a quantidade de filhos, 2016



Acervo da Editora

Fonte: Mulheres entrevistadas.

a) Entre as mulheres que participaram dessa entrevista, quantas têm 2 filhos ou menos? 1580 mulheres

b) Qual a probabilidade de, sorteando-se uma das mulheres entrevistadas, ela tenha:

- nenhum filho? 20%
- pelo menos um filho? 80%
- até dois filhos? 79%
- três filhos ou mais? 21%

*Professor(a): Verifique se os alunos perceberam que, em relação ao total de mulheres entrevistadas, os conjuntos formados pelas mulheres que têm **pelo menos um filho** e pelas mulheres que têm **nenhum filho** são complementares. O mesmo ocorre com os conjuntos formados pelas mulheres que têm **até 2 filhos** e pelas mulheres que têm **3 filhos ou mais**.

19. (Enem) Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emilio Ribas, de São Paulo, a imunização "deve mudar", no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Fonte: Terra. Disponível em: <http://img.terra.com.br>. Acesso em: 26 abr. 2010. (adaptado).

Selecionando-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é: c

a) 8%
b) 9%
c) 11%
d) 12%
e) 22%

20. (FGV-SP) Em um grupo de 300 pessoas sabe-se que:

- 50% aplicam dinheiro em caderneta de poupança.
- 30% aplicam dinheiro em fundos de investimento.
- 15% aplicam dinheiro em caderneta de poupança e fundos de investimento simultaneamente.

Sorteando uma pessoa desse grupo, a probabilidade de que ela não aplique em caderneta de poupança nem em fundos de investimento é: c

a) 0,05
b) 0,20
c) 0,35
d) 0,50
e) 0,65

21. As faces de um dado cúbico foram numeradas: três faces com o número 2, duas faces com o número 1 e uma face com o número 0. Já as faces de um dado tetraédrico foram numeradas com: duas faces com o número 2, uma face com o número 1 e uma face com o número 0. Sabendo que ambos são não viciados e que foram lançados ao mesmo tempo, calcule a probabilidade de a soma dos números nas faces voltadas para baixo:

a) ser igual a 3 $29,1\overline{6}\%$
b) não ser múltiplo de 2 $41,\overline{6}\%$
c) ser maior que 2 $54,1\overline{6}\%$

22. (Enem) Num determinado bairro há duas empresas de ônibus, Andabem e Bompasseio, que fazem o trajeto levando e trazendo passageiros do subúrbio ao centro da cidade. Um ônibus de cada uma dessas empresas parte do terminal a cada 30 minutos, nos horários indicados na tabela.

Horário dos ônibus

Andabem	Bompasseio
...	...
6h	6h10
6h30	6h40
7h	7h10
7h30	7h40
...	...

Fonte: Empresas Andabem e Bompasseio.

Carlos mora próximo ao terminal de ônibus e trabalha na cidade. Como não tem hora certa para chegar ao trabalho nem preferência por nenhuma das empresas, toma sempre o primeiro ônibus que sai do terminal. Nessa situação, pode-se afirmar que a probabilidade de Carlos viajar num ônibus da empresa Andabem é: d

a) um quarto da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.
b) um terço da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.
c) metade da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.
d) duas vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.
e) três vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.

23. Bárbara e Daniela estão jogando dados com seis faces numeradas de 1 a 6. A brincadeira funciona da seguinte maneira: cada uma delas arremessa simultaneamente um dado sobre a mesa; se a soma entre os valores obtidos nos dados for par, Bárbara vence o jogo; se a soma for um número ímpar, Daniela vence. Após perder três partidas em sequência, Daniela diz que não vai jogar mais porque as regras favorecem Bárbara, e utiliza o seguinte argumento: os possíveis resultados para a adição dos valores dos dados são 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12, ou seja, há 5 números ímpares e 6 números pares, portanto a probabilidade de ocorrer um número par e de Bárbara vencer é maior.

a) Escreva o espaço amostral com as possíveis combinações obtidas nos lançamentos dos dados. Professor(a): Veja a resposta deste item no final do livro.

b) O argumento utilizado por Daniela para justificar suas derrotas foi correto? Justifique.
Não, pois a quantidade de pares de números de resultados ímpares e pares é a mesma. Portanto, a probabilidade de ocorrer um número ímpar é igual à de ocorrer um número par.

PROBABILIDADE DA UNIÃO DE DOIS EVENTOS

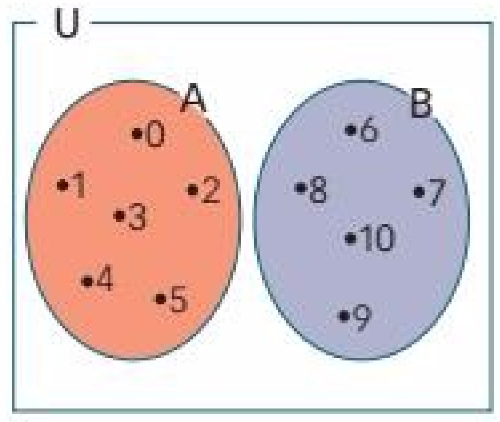
Para definir a probabilidade da união de dois eventos, vamos estudar a quantidade de elementos da união de dois conjuntos. Leia a pergunta a seguir.

> Se um conjunto **A** possui 6 elementos e um conjunto **B** possui 5 elementos, é sempre correto afirmar que o conjunto $A \cup B$ possui $\underbrace{11}_{6+5}$ elementos?

$A \cup B$: lê-se "**A** união **B**".

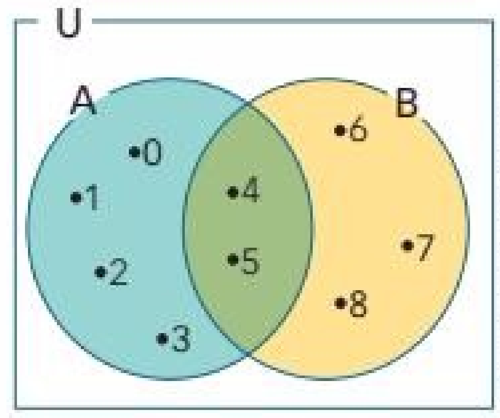
Para responder a essa pergunta, vamos analisar dois exemplos.

Exemplo 1: Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, temos que:



- $n(A) = 6$
- $n(B) = 5$
- $A \cap B = \varnothing$, logo, $n(A \cap B) = 0$
- $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, logo, $n(A \cup B) = 11$

Exemplo 2: Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, temos que:



Ilustrações: Acervo da Editora

- $n(A) = 6$
- $n(B) = 5$
- $A \cap B = \{4, 5\}$, logo, $n(A \cap B) = 2$
- $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, logo, $n(A \cup B) = 9$

Note que, no exemplo **1**, $n(A \cup B) = 11$, ou seja, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. Isso acontece porque os conjuntos **A** e **B** **não possuem elementos em comum**, isto é, são disjuntos.

Já no exemplo **2**, $n(A \cup B) = 9$, ou seja, $n(A \cup B) \neq n(A) + n(B)$. Esse fato ocorre em razão dos elementos que os conjuntos **A** e **B** **possuem em comum**, nesse caso, dois elementos.

Portanto, se um conjunto **A** possui 6 elementos e um conjunto **B** possui 5 elementos, nem sempre é correto afirmar que o conjunto $A \cup B$ possui 11 elementos.

Quando **A** e **B** são conjuntos finitos, tem-se:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Professor(a): Solicite aos alunos que calculem $n(A \cup B)$ nos exemplos **1** e **2**, utilizando a fórmula.

Quando dois conjuntos **A** e **B** são disjuntos, como no exemplo **1**, temos que $A \cap B = \varnothing$, então $n(A \cap B) = 0$. Nesse caso, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Agora, se considerarmos **A** e **B** dois eventos de um mesmo espaço amostral Ω equiprovável, finito e não vazio, temos que $A \cap B$ representa os elementos que satisfazem simultaneamente o evento **A** **e** o evento **B**, ou seja, os elementos da **interseção** dos dois eventos. Por outro lado, $A \cup B$ representa os elementos que satisfazem o evento **A** **ou** o evento **B**, ou seja, os elementos da **união** dos dois eventos.

Nesse caso, dividindo os membros da equação anterior por $n(\Omega)$, temos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A probabilidade de ocorrer o evento **A** ou o evento **B** é igual à probabilidade de ocorrer **A** mais a probabilidade de ocorrer **B** menos a probabilidade de ocorrer **A** e **B**.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Nos casos em que $A \cap B = \varnothing$, isto é, **A** e **B** são disjuntos, temos que $n(A \cap B) = 0$ e $P(A \cap B) = 0$. Consequentemente, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Quando isso acontece, dizemos que os eventos **A** e **B** são **mutuamente exclusivos**.

Atividades resolvidas

R6. Certo experimento consiste em sortear um número de uma urna que contém 10 fichas numeradas de 1 a 10. Calcule a probabilidade de:

a) sortear um número ímpar.

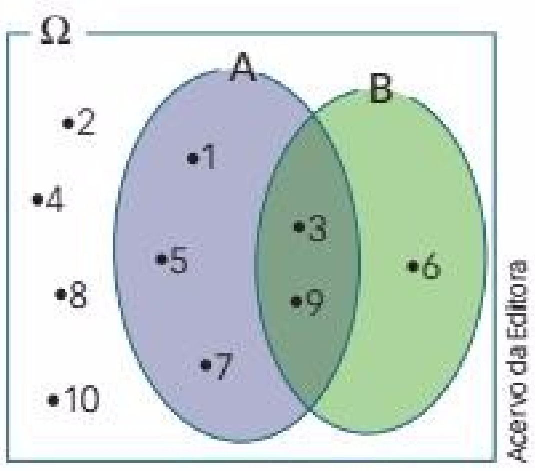
b) sortear um número múltiplo de 3.

c) sortear um número ímpar e múltiplo de 3.

d) sortear um número ímpar ou múltiplo de 3.

Resolução

Considerando os eventos **A** "obter um número ímpar" e **B** "obter um número múltiplo de 3", temos que:



- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e $n(\Omega) = 10$
- $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $n(A) = 5$
- $B = \{3, 6, 9\}$ e $n(B) = 3$
- $A \cap B = \{3, 9\}$ e $n(A \cap B) = 2$

Segue que:

a) $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ou 50%

b) $P(B) = \frac{3}{10}$ ou 30%

c) $P(A \cap B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ ou 20%

Observando o diagrama de Venn, podemos notar que $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$, ou seja, $n(A \cup B) = 6$. Portanto, outra maneira de resolver o item **d** é:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{10} \text{ ou } 60\%$$

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{2}{10} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{6}{10}$ ou 60%

R7. Em um grupo de 15 pessoas, tem-se que: 7 são solteiras, 5 são casadas e 3 são viúvas. Determine a probabilidade de sortear desse grupo uma pessoa casada ou viúva.

Resolução

Sejam $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7$ as pessoas solteiras, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 as casadas e v_1, v_2, v_3 as viúvas. Temos que:

$$\Omega = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, v_1, v_2, v_3\}$$

$$C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$$

$$V = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7\}$$

Note que os eventos são mutuamente exclusivos, pois uma pessoa não pode ser casada e viúva ao mesmo tempo. Então, $C \cap V = \varnothing$. Logo:

$$P(C \cup V) = P(C) + P(V) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} + \frac{n(V)}{n(\Omega)} = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15} \text{ ou } 53,\overline{3}\%$$

Outra maneira de resolver esse problema é utilizando a probabilidade de não ocorrer o evento. Nesse caso, a probabilidade de a pessoa sorteada ser casada ou viúva é dada por 1 menos a probabilidade de a pessoa ser solteira:

$$P(C \cup V) = 1 - P(S) = 1 - \frac{n(S)}{n(\Omega)} = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15} \text{ ou } 53,\overline{3}\%$$

Atividades

Anote as respostas no caderno.

24. Dois dados cúbicos não viciados são jogados simultaneamente sobre uma mesa. Determine a probabilidade de a soma dos valores das faces voltadas pra cima desses dados ser:

- um múltiplo de 2. 50%
- igual a 10 ou igual a 5. $19,\overline{4}\%$
- um múltiplo de 2 ou de 3. $66,\overline{6}\%$
- maior que 10 ou menor que 4. $16,\overline{6}\%$

25. (Unisc-RS) O pelotão de elite da prova final de uma maratona é composto por corredores que representam 3 equipes. As equipes **A**, **B** e **C** possuem, respectivamente, 9, 5 e 6 atletas classificados. Se todos os participantes têm a mesma chance de vencer a corrida, então a probabilidade (expressa percentualmente) de as medalhas de ouro, prata e bronze serem entregues a uma mesma equipe está no intervalo: b

a) $[0, 10[$ b) $[10, 12[$ c) $[12, 14[$ d) $[14, 20[$ e) $[20, 100[$

26. Uma das turmas de certa escola realizou uma pesquisa com 200 alunos do Ensino Médio em relação à área de preferência entre as disciplinas estudadas (exatas, humanas ou biológicas). Observe o resultado dessa pesquisa.

Área de preferência dos alunos do Ensino Médio de certa escola, 2016

Área	Quantidade de alunos
Exatas	85
Humanas	70
Biológicas	100
Exatas e humanas	10
Exatas e biológicas	20
Humanas e biológicas	30
Não tem preferência	5

Fonte: Levantamento realizado pela turma do 2º ano.

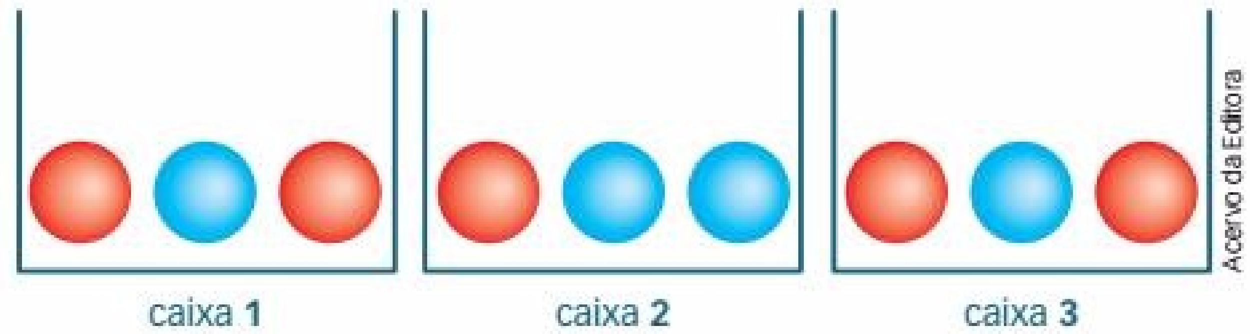
a) Qual a probabilidade de, sorteando um desses alunos, ele não ter preferência entre as áreas? 2,5%

b) Qual a probabilidade de, sorteando um desses alunos, ele ter preferência pelas disciplinas da área de humanas? 35%

c) De acordo com os dados da tabela, qual a probabilidade de, sorteando um desses alunos, ele ter preferência pela área de:

- exatas ou biológicas? 82,5%
- exatas ou humanas? 72,5%

27. Considere três caixas contendo bolas vermelhas e azuis, conforme as figuras.



Uma bola é retirada aleatoriamente da caixa **1** e colocada na caixa **2**. Em seguida, uma bola é retirada aleatoriamente da caixa **2** e colocada na caixa **3**. Qual a probabilidade de que a caixa **3** esteja com 2 bolas vermelhas e 2 bolas azuis? $\frac{7}{12}$

> Para resolver essa atividade, construa uma árvore de possibilidades.

28. Em certa gincana participaram 300 alunos do Ensino Médio, sendo 120 do 1º ano, 95 do 2º ano e 85 do 3º ano. Sorteando um aluno da gincana, qual a probabilidade de ele ser do 2º ou do 3º ano? 60%

29. A turma do 3º ano de certo colégio organizou um bingo para arrecadar fundos para a formatura. No sorteio, será utilizado um globo com 60 bolas numeradas de 1 a 60.

Considerando um sorteio com todas as bolas no globo, calcule a probabilidade de sortear um número:

a) par. 50%

b) múltiplo de 5. 20%

c) par e múltiplo de 5. 10%

d) par ou múltiplo de 5. 60%

30. Um dado e uma moeda são lançados ao mesmo tempo. Qual é a probabilidade de se obter nas faces voltadas para cima:

a) o número 4 no dado e a coroa na moeda? $8,\overline{3}\%$

b) um número par no dado e a cara na moeda? 25%

c) um número menor ou igual a 3 no dado ou a coroa na moeda? 75%

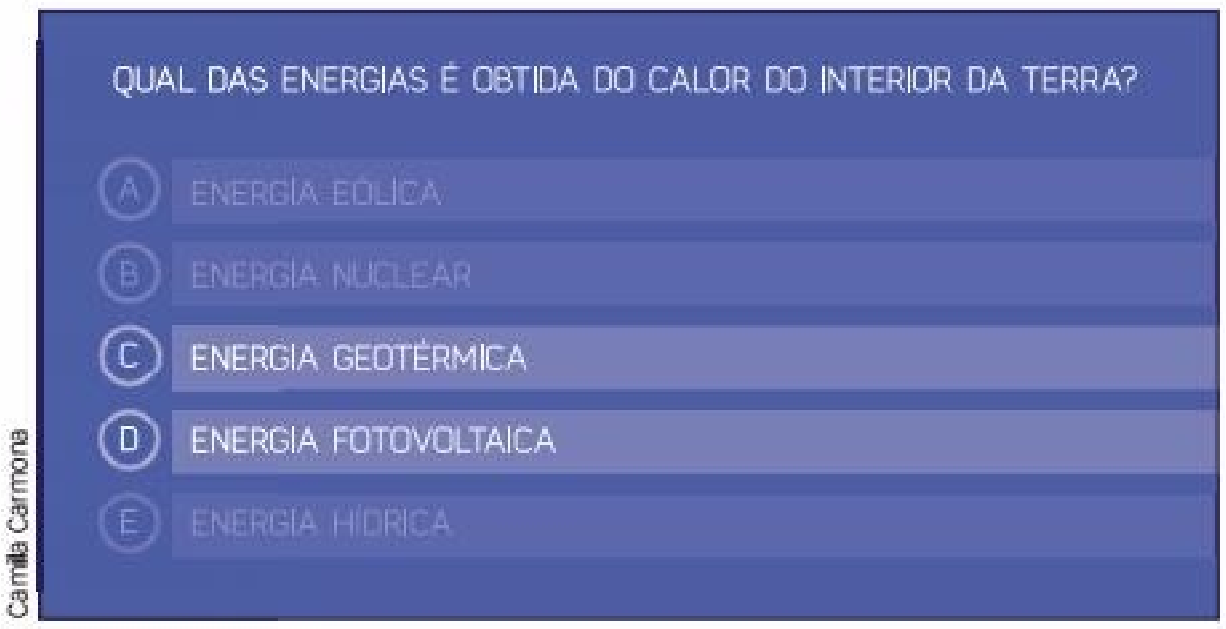
31. (Enem) Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol? a

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{5}{14}$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

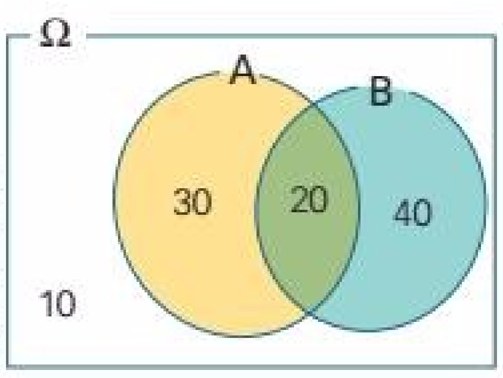
Em um programa de televisão, o participante deve responder a uma pergunta com 5 alternativas, das quais apenas uma é correta. Nesse primeiro momento, ao escolher uma alternativa arbitrariamente, a probabilidade de o participante acertar a resposta é de $\frac{1}{5}$ ou 20%.

No entanto, ele pode utilizar um benefício conquistado durante o programa e solicitar que sejam eliminadas três das alternativas erradas. Feito isso, como o espaço amostral ficou reduzido a apenas duas alternativas, ao escolher uma delas arbitrariamente, a probabilidade de o participante acertar a resposta é de $\frac{1}{2}$ ou 50%.



Camila Carmona

Note que, nesse caso, o espaço amostral foi alterado, o que afeta a probabilidade de o evento ocorrer. Essa é a ideia principal de uma **probabilidade condicional**, em que a probabilidade de um evento ocorrer está condicionada a outra. Observe outra situação.



Acervo da Editora

Dos 100 funcionários de uma empresa, 50 são habilitados na categoria **A** (podem conduzir motocicletas), 60, na categoria **B** (podem conduzir veículos de passeio), 20, na categoria **AB** (podem conduzir motocicletas e veículos de passeio) e 10 não possuem carteira nacional de habilitação, como indicado no diagrama.

Com base nessas informações, vamos calcular:

a) A probabilidade de, ao realizar um sorteio entre todos os funcionários, ele seja habilitado na categoria **AB**:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

Note que, nesse caso, o espaço amostral é **Ω**, pois estamos sorteando um dos funcionários da empresa e calculando a probabilidade de ele ser habilitado na categoria **AB**.

b) A probabilidade de, ao realizar um sorteio entre os funcionários habilitados na categoria **A**, ele também ser habilitado na categoria **B**:

$$\frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

Note que, nesse caso, o espaço amostral é **A**, pois estamos sorteando um dos funcionários habilitados na categoria **A** e calculando a probabilidade de ele também ser habilitado na categoria **B**. Dizemos que a razão $\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ é a **probabilidade condicional de B em relação a A**, a qual indicamos por $P(B|A)$.

c) A probabilidade de, ao realizar um sorteio entre os funcionários habilitados na categoria **B**, ele também ser habilitado na categoria **A**:

$$\frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

Note que, nesse caso, o espaço amostral é **B**, pois estamos sorteando um dos funcionários habilitados na categoria **B** e calculando a probabilidade de ele também ser habilitado na categoria **A**. Dizemos que a razão $\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ é a **probabilidade condicional de A em relação a B**, a qual indicamos por $P(A|B)$.

Se **A** e **B** são eventos não vazios de um mesmo espaço amostral Ω finito, então a probabilidade de ocorrer **A**, sabendo que **B** já ocorreu, é dada por.

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

Também podemos escrever essa relação em função de $P(A\cap B)$ e $P(B)$. Para isso, multiplicamos o lado direito da equação por $\frac{\frac{1}{n(\Omega)}}{\frac{1}{n(\Omega)}}=1$.

$$P(A|B)=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}}\Rightarrow \boxed{P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

Utilizando essa segunda relação, resolva novamente os itens **b** e **c** da situação anterior e verifique que os resultados serão os mesmos.

b: $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(A)}{n(\Omega)}}=\frac{\frac{20}{100}}{\frac{50}{100}}=\frac{2}{5}$

c: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}}=\frac{\frac{20}{100}}{\frac{60}{100}}=\frac{1}{3}$

Eventos independentes

Vimos que a probabilidade de ocorrer o evento **A**, sabendo que o evento **B** ocorreu, é dada por $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. Dessa igualdade, temos:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)}$$

Observe o exemplo.

Em uma urna há 10 fichas numeradas de 1 a 10. Qual a probabilidade de, ao sortear duas fichas sucessivamente sem reposição, a primeira ficha ter um número par e a segunda ficha, um número ímpar?

Considerando o evento **B** "sortear uma ficha com número par na 1ª retirada" e o evento **A** "sortear uma ficha com número ímpar na 2ª retirada", temos:

- Ao sortear a primeira ficha, temos 5 números pares e 5 números ímpares. Logo, a probabilidade de sortear uma ficha com um número par é:

$$P(B)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

- Ao sortear a segunda ficha, sabendo que já retiramos a primeira ficha com um número par, restam 4 números pares e 5 números ímpares. Logo, a probabilidade de sortear uma ficha com um número ímpar é:

$$P(A|B)=\frac{5}{9}$$

Agora, podemos calcular $P(A\cap B)$, que representa a probabilidade de, ao sortear duas fichas sem reposição, a primeira ter um número par e a segunda, um ímpar.

$$P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)=\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{5}{18}$$

No exemplo acima, podemos observar que a concorrência do evento **B** altera a quantidade de fichas com números pares e a quantidade total de fichas na urna, afetando a probabilidade do evento **A**. Nesse caso, dizemos que os eventos são **dependentes**.

E quando a ocorrência de **B** não afeta a probabilidade de ocorrer **A**? Nesses casos, dizemos que os eventos são **independentes** e a probabilidade de ocorrer **A**, sabendo que **B** já ocorreu, é a própria probabilidade de ocorrer **A**, ou seja, $P(A|B)=P(A)$. Segue que:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$$

Observe o seguinte exemplo:

Qual a probabilidade de, ao lançar duas moedas, obtermos cara em ambas?

Considerando o evento **B** "obter cara na 1ª moeda" e o evento **A** "obter cara na 2ª moeda", e representando a face "cara" por C e a face "coroa" por K, temos:

- $\Omega = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$, logo $n(\Omega) = 4$
- $A = \{(C, C), (K, C)\}$, logo $n(A) = 2$
- $B = \{(C, C), (C, K)\}$, logo $n(B) = 2$
- $A \cap B = \{(C, C)\}$, logo $n(A \cap B) = 1$

Calculando $P(A)$, $P(B)$ e $P(A|B)$, obtemos:

- $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

Note que $P(A|B) = P(A) = \frac{1}{2}$, ou seja, a probabilidade de obter cara na 2ª moeda não foi afetada pelo fato de obter cara na 1ª moeda. Logo, os eventos **A** e **B** são independentes.

Assim, também podemos calcular $P(A \cap B)$, que representa a probabilidade de, ao lançar duas moedas, obtermos cara em ambas da seguinte maneira:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Sendo **A** e **B** eventos não vazios de um mesmo espaço amostral Ω, dizemos que os eventos **A** e **B** são **independentes** se, e somente se, $P(A|B) = P(A)$, ou de maneira equivalente:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

No caso de eventos independentes, podemos utilizar essa fórmula para qualquer quantidade de eventos.

Atividades resolvidas

R8. Determine a probabilidade de um casal ter um filho do sexo masculino na segunda gravidez, considerando que na primeira gravidez nasceu uma criança do sexo feminino.

Resolução

O espaço amostral que representa as possibilidades de 2 filhos do casal é dado por:

$$\Omega = \{(M,M), (M,F), (F,M), (F,F)\}$$

M: masculino
F: feminino

Sejam os eventos:

- **A**: o casal ter um filho do sexo masculino.
- **B**: o primeiro filho ser do sexo feminino.

Temos que $P(A) = \frac{1}{2}$ e $P(B) = \frac{1}{2}$. Nesse caso, a probabilidade de se ter exatamente um filho do sexo masculino e o primeiro filho do sexo feminino é:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Note que o evento **A** está condicionado ao evento **B**. Logo, devemos calcular $P(A|B)$, pois queremos determinar a probabilidade de se ter exatamente um filho do sexo masculino, sabendo que o primeiro é do sexo feminino:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Portanto, a probabilidade é de $\frac{1}{2}$ ou 50%.

R9. (Unesp) Duas máquinas **A** e **B** produzem juntas 5 000 peças em um dia. A máquina **A** produz 2 000 peças, das quais 2% são defeituosas. A máquina **B** produz as restantes 3 000 peças, das quais 3% são defeituosas. Da produção total de um dia, uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constatou-se que ela é defeituosa. Qual é a probabilidade de que essa peça escolhida tenha sido produzida pela máquina **A**?

Resolução

Temos que as peças produzidas pela máquina **A** com defeito são: 2% de 2 000, isto é, $0{,}02 \cdot 2\,000 = 40$, e as peças produzidas pela máquina **B** com defeito são: 3% de 3 000, isto é, $0{,}03 \cdot 3\,000 = 90$.

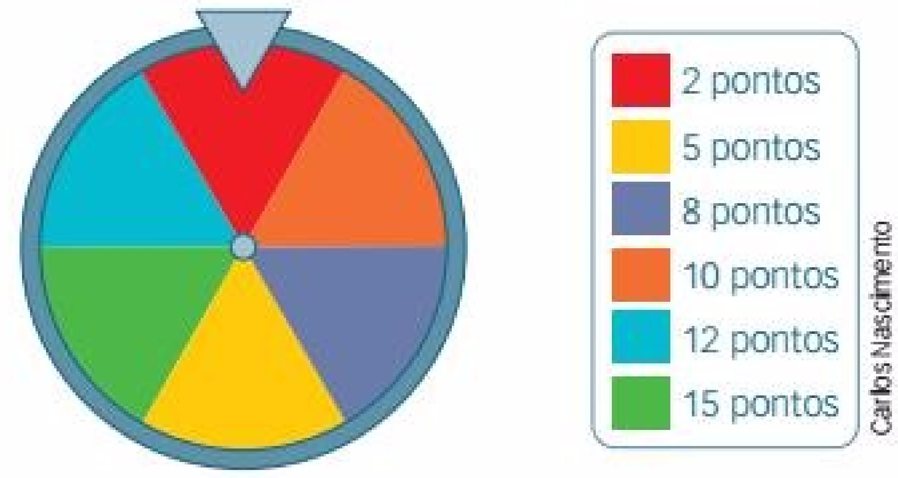
Logo, a quantidade total de peças com defeitos (D) é $\underbrace{130}_{40+90}$.

Note que, nesse caso, o espaço amostral é **D**, pois dentre as peças com defeito, queremos determinar a probabilidade de que a peça escolhida tenha sido produzida pela máquina **A**, ou seja, $P(A|D)$:

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{40}{130} \simeq 0{,}3077$$

Portanto, a probabilidade de que a peça escolhida tenha sido fabricada pela máquina **A** é de $\frac{40}{130}$ ou aproximadamente 30,77%.

R10. Em uma gincana, para ganhar pontos extras, cada equipe participante tem o direito de girar duas vezes a roleta representada abaixo:



Determine a probabilidade de uma equipe obter a pontuação máxima nos dois giros da roleta.

Resolução

Temos que a pontuação máxima obtida ao girar a roleta duas vezes é $15 + 15 = 30$. Logo, para que uma equipe obtenha 30 pontos, é necessário que a roleta pare na cor verde no giro 1 (evento **A**) e no giro 2 (evento **B**).

Note que temos dois eventos independentes, pois um giro não depende do outro. Assim, como a probabilidade de a roleta parar na cor verde é de 1 em 6, segue que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0{,}02\overline{7}$$

Portanto, a probabilidade de uma equipe obter a pontuação máxima ao girar a roleta duas vezes é de $\frac{1}{36}$ ou $2{,}\overline{7}\%$.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

32. Uma loja de calçados registrou a forma de pagamento utilizada por seus clientes durante um dia. Observe no quadro a quantidade de compras realizadas de acordo com o valor e a forma de pagamento.

Forma de pagamento	Compras até R$ 300,00 (T)	Compras acima de R$ 300,00 (M)
Dinheiro (D)	40	20
Cheque (H)	30	35
Cartão (C)	55	80

Considere o evento em que uma das compras é sorteada. Descreva o significado de cada uma das probabilidades a seguir e calcule-a.

Professor(a): Veja a resposta desta atividade no final do livro.

a) $P(T|D)$
b) $P(\overline{H}|M)$
c) $P(C|\overline{M})$
d) $P(M|H)$
e) $P(\overline{D}|\overline{T})$
f) $P(\overline{T}|C)$

33. Quais itens apresentam eventos independentes? a; c; e

a) Jogar uma moeda duas vezes consecutivas.

b) Retirar sem ver uma bola de uma urna, com 10 bolas de 3 cores diferentes, e, sem reposição, retirar outra da mesma cor que a primeira.

c) Lançar um dado cúbico não viciado três vezes consecutivas e obter na face voltada para cima um número maior ou igual a 4.

d) Sortear uma ficha com um número par de dez fichas enumeradas de 1 a 10 e, sem reposição, sortear outra ficha com um número ímpar.

e) Nascimento de um filhote fêmea, após ter nascido um macho.

EM GRUPO

34. Considere um evento em que as 28 peças de um dominó estão com os pontos voltados para baixo. Retira-se ao acaso uma delas e, em seguida, sem reposição, retira-se outra. Qual a probabilidade de a soma dos pontos de cada uma das peças ser igual a 10? aproximadamente 0,26%

35. (ESPM-SP) Numa empresa, 60% são homens, dos quais, 10% são fumantes. Sabe-se que 5% das mulheres são fumantes. Escolhendo-se ao acaso um dos fumantes dessa empresa, a probabilidade de ser uma mulher é igual a: a

a) 25%
b) 15%
c) 10%
d) 30%
e) 20%

Cerca de 50 doenças distintas são causadas pelo consumo de derivados do tabaco, sendo as principais as cardiovasculares, o câncer e os problemas respiratórios.

36. Ao lançar quatro vezes uma mesma moeda, determine a probabilidade de se obter coroa em todos os lançamentos. $\frac{1}{16}$

37. O quadro apresenta a quantidade de alunos matriculados em cada turma de 2º ano de uma escola, de acordo com o sexo.

Turma \ Sexo	Masculino	Feminino
Turma A	25	15
Turma B	18	18
Turma C	10	24
Turma D	22	17

a) Qual a quantidade de alunos matriculados no 2º ano dessa escola? 149

b) Qual a probabilidade de, sorteando-se um dos alunos do 2º ano dessa escola, ele ser do sexo feminino? aproximadamente 49,66%

c) Calcule a probabilidade de, sorteando-se um dos alunos do 2º ano dessa escola, ele ser:

- do sexo masculino sabendo que é da turma C. aproximadamente 29,41%
- do sexo feminino sabendo que é da turma D. aproximadamente 43,59%
- da turma A sabendo que é do sexo masculino. $33,\overline{3}\%$
- da turma B sabendo que é do sexo feminino. $24,\overline{324}\%$

DESAFIO

38. (ITA-SP) Uma urna de sorteio contém 90 bolas numeradas de 1 a 90, sendo que a retirada de uma bola é equiprovável à retirada de cada uma das demais.

a) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas dessa urna. Calcule a probabilidade de o número dessa bola ser um múltiplo de 5 ou de 6. $\frac{1}{3}$

b) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas dessa urna e, sem repô-la, retira-se uma segunda bola. Calcule a probabilidade de o número da segunda bola retirada não ser um múltiplo de 6. $\frac{5}{6}$

39. (Enem) Para verificar e analisar o grau de eficiência de um teste que poderia ajudar no retrocesso de uma doença numa comunidade, uma equipe de biólogos aplicou-o em um grupo de 500 ratos, para detectar a presença dessa doença. Porém, o teste não é totalmente eficaz, podendo existir ratos saudáveis com resultado positivo e ratos doentes com resultado negativo. Sabe-se, ainda, que 100 ratos possuem a doença, 20 ratos são saudáveis com resultado positivo e 40 ratos são doentes com resultado negativo.

Um rato foi escolhido ao acaso, e verificou-se que o seu resultado deu negativo. A probabilidade de esse rato ser saudável é: c

a) $\frac{1}{5}$
b) $\frac{4}{5}$
c) $\frac{19}{21}$
d) $\frac{19}{25}$
e) $\frac{21}{25}$

40. Um casal pretende ter 4 filhos. Determine a probabilidade de os dois últimos filhos do casal serem meninos, sabendo que os dois primeiros são meninas. $\frac{1}{4}$

DESAFIO

41. Em uma empresa com 6200 funcionários, 40% deles têm mais de 35 anos de idade, 23% têm mais de 10 anos de trabalho nessa empresa e 65% são especializados. Dos funcionários com mais de 35 anos de idade, 27,5% têm mais de 10 anos de trabalho na empresa e 17,5% são especializados; dos funcionários com mais de 10 anos de empresa, $\frac{15}{23}$ são especializados e, desses $\frac{15}{23}$ especializados, $\frac{1}{3}$ tem mais de 35 anos de idade.

Calcule a probabilidade de, sorteando-se um dos funcionários dessa empresa:

a) ele ter mais de 10 anos de trabalho e não ser especializado. 8%

b) ele ser especializado, sabendo que ele tem mais de 35 anos de idade. 17,5%

c) ele ter mais de 35 anos de idade, sabendo que ele não é especializado. aproximadamente 94,29%

d) ele ser especializado ou ter mais de 10 anos de trabalho. 73%

e) ele ter mais de 10 anos de trabalho, sabendo que tem até 35 anos de idade. 20%

f) ele ter mais de 35 anos de idade, sabendo que tem mais de 10 anos de trabalho. aproximadamente 47,83%

LEI BINOMIAL DAS PROBABILIDADES

Agora, vejamos como calcular a probabilidade de um mesmo evento **A** ocorrer 1, 2, 3,..., **n** vezes seguidas, sendo cada um dos eventos independente e realizado sob as mesmas condições.

Por exemplo, o casal Sr. e Srª Emory Landon Harrison, do estado de Tenessee, EUA, constituíram uma rara formação familiar: eles tiveram 13 filhos, todos meninos. Considerando que um casal terá 13 filhos, qual a probabilidade de todos os filhos serem do sexo masculino?

Bettmann/ Corbis/ Latinstock

Sr. e Srª Emory Landon Harrison com seus 13 filhos. Note que o mais jovem, com três semanas de vida, está nos braços da mãe. (fotografia de 1º maio de 1955)

Considerando o evento **M** "nascimento de um filho do sexo masculino" e o evento **F** "nascimento de um filho do sexo feminino", temos que os eventos **M** e **F** são independentes. Desse modo, como a probabilidade de ocorrer qualquer um dos sexos é a mesma, calculamos a probabilidade de ocorrer o evento **M** em todos os 13 nascimentos da seguinte maneira:

$$\underbrace{P(M)\cdot P(M)\cdot \ldots \cdot P(M)\cdot P(M)}_{13\text{ fatores}}=\left[P(M)\right]^{13}=\left(\frac{1}{2}\right)^{13}=\frac{1}{8\,192}\simeq 0{,}0001$$

Portanto, a probabilidade é de $\frac{1}{8\,192}$ ou aproximadamente 0,01%.

Agora, observe o casal Sr. e Srª Thomas V. Brennan, do estado de Illinois, EUA, que constituíram outra rara formação familiar. Eles tiveram 11 filhos, sendo cinco meninas e seis meninos, nessa ordem.

Wide World Photos

Professor(a): Diga aos alunos que não há informações sobre a data dessa fotografia.

Sr. e Srª Thomas V. Brennan com seus 11 filhos. Note que eles tiveram cinco meninas e, depois, seis meninos.

Nesse caso, se **F** representa o evento "nascimento de um filho do sexo feminino", então o evento **M** "nascimento de um filho do sexo masculino" é o complementar $\bar{F}$.

$$\boxed{P(\bar{F})=1-P(F)}$$

Assim, em uma formação familiar de 11 filhos, podemos calcular a probabilidade de ocorrer a ordem dos nascimentos dada por $FFFFF\bar{F}\bar{F}\bar{F}\bar{F}\bar{F}\bar{F}$ da seguinte maneira:

$$\underbrace{P(F)\cdot P(F)\cdot P(F)\cdot P(F)\cdot P(F)}_{5\text{ fatores}}\cdot\underbrace{P(\bar{F})\cdot P(\bar{F})\cdot P(\bar{F})\cdot P(\bar{F})\cdot P(\bar{F})\cdot P(\bar{F})}_{6\text{ fatores}}=\left[P(F)\right]^{5}\cdot\left[P(\bar{F})\right]^{6}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6}=\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{64}=\frac{1}{2\,048}\simeq 0{,}0005$$

Portanto, a probabilidade é de $\frac{1}{2\,048}$ ou aproximadamente 0,05%.

Em algumas situações podemos utilizar o complementar de um evento para calcular sua probabilidade de ocorrer.

E no caso de considerarmos qualquer ordem de nascimento, qual a probabilidade de ocorrer cinco meninas e seis meninos em uma formação familiar de 11 filhos?

Para responder a essa pergunta, devemos considerar também outras sequências diferentes da apresentada anteriormente, por exemplo, $F\overline{F}F\overline{F}F\overline{F}F\overline{F}F\overline{F}\overline{F}$, $\overline{F}\overline{F}\overline{F}\overline{F}\overline{F}\overline{F}FFFFF$ ou $\overline{F}\overline{F}FF\overline{F}\overline{F}FF\overline{F}\overline{F}F$. Nesse caso, a quantidade de possibilidades de ocorrer o evento **F** em 5 dos 11 nascimentos pode ser calculado por uma combinação simples $C_{11,5}$:

$$C_{11,5}=\binom{11}{5}=\frac{11!}{5!(11-5)!}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{6!}}=462$$

Assim, há 462 sequências diferentes, e a probabilidade de ocorrer cada uma delas é $\frac{1}{2\,048}$, como já calculamos. Desse modo, em uma formação familiar de 11 filhos, a probabilidade de ocorrer cinco meninas e seis meninos, em qualquer ordem, é dada por:

$$462\cdot\frac{1}{2\,048}=\frac{231}{1\,024}\simeq 0{,}226$$

Portanto, nesse caso, a probabilidade é de $\frac{231}{1\,024}$ ou aproximadamente 22,6%.

A probabilidade de ocorrer o evento **A** em **n** tentativas é $P(A)$, então a probabilidade de ocorrer **p** vezes o evento **A** nas **n** tentativas é:

$$\binom{n}{p}\cdot[P(A)]^{p}\cdot[P(\overline{A})]^{n-p}$$

em que $p\leq n$ e $\overline{A}$ é o evento complementar de **A**.

Atividades resolvidas

R11. No futebol, a penalidade máxima ou o pênalti consiste em um tiro livre a 11 metros da linha do gol. Quem cobra o pênalti tem grandes chances de marcar o gol e, consequentemente, o goleiro não tem grandes chances de defesa, pois ele tem apenas tempo para uma única manobra depois que o pênalti é cobrado. Supondo que um jogador cobre três pênaltis e que a probabilidade de cada pênalti resultar em gol é de 80%, determine:

a) a probabilidade de apenas um dos três pênaltis resultar em gol.

b) a probabilidade de nenhum pênalti resultar em gol.

Resolução

a) Dado o evento **C** "converter o pênalti em gol", temos que a probabilidade desse evento ocorrer é de 80%, ou ainda $P(C)=\frac{4}{5}$. Nesse caso, a probabilidade de que não aconteça o gol é dada por:

$$P(\overline{C})=1-P(C)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$$

Note que se um jogador cobrar três pênaltis e o primeiro for convertido, não significa que o segundo também será. Logo, temos eventos independentes.

Desse modo, a probabilidade de ocorrer 1 vez (p) o evento **C** em 3 tentativas (n) é:

$$\binom{n}{p}\cdot[P(C)]^{p}\cdot[P(\overline{C})]^{n-p}=\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{3-1}=\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{2}=\frac{12}{125}=0{,}096$$

Portanto, a probabilidade de apenas um dos três pênaltis resultar em gol é de $\frac{12}{125}$ ou 9,6%.

b) Como a probabilidade de não converter o pênalti é de $\frac{1}{5}$, isto é, $P(\overline{C})=\frac{1}{5}$, segue que a probabilidade de ocorrer 3 vezes (p) o evento $\overline{C}$ em 3 tentativas (n) é:

$$\binom{n}{p}\cdot[P(\overline{C})]^{p}\cdot[P(C)]^{n-p}=\binom{3}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{3}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{3-3}=\underbrace{\binom{3}{3}}_{1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{3}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^{0}}_{1}=\frac{1}{125}=0{,}008$$

Portanto, a probabilidade de nenhum pênalti resultar em gol é de $\frac{1}{125}$ ou 0,8%.

R12. Em certo concurso, o candidato deve realizar uma prova objetiva composta de 60 questões, cada uma com 5 alternativas, das quais apenas uma é correta. Para ser classificado com um aproveitamento mínimo, ele deve acertar, ao menos, 25% das questões. Determine a probabilidade de um candidato, ao assinalar aleatoriamente as respostas da prova, ser classificado no concurso exatamente com o aproveitamento mínimo.

Resolução

Considerando **A** o evento "marcar a alternativa correta da questão", temos que a probabilidade de esse evento ocorrer é $P(A)=\frac{1}{5}$. Logo, a probabilidade de que não ocorra é $P(\overline{A})=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$. Note que o acerto de uma questão não depende do resultado das demais, isto é, os eventos são independentes.

Desse modo, a probabilidade de ocorrer $\underbrace{15}_{25\%\text{ de }60}$ vezes (p) o evento **A** em 60 tentativas (n) é:

$$\binom{n}{p}\cdot[P(A)]^{p}\cdot[P(\overline{A})]^{n-p}=\binom{60}{15}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{15}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{60-15}=\binom{60}{15}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{15}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{45}\simeq 0{,}076$$

Portanto, a probabilidade é de aproximadamente 7,6%.

Para realizar esse cálculo na calculadora científica, efetuamos:

6 → 0 → nCr → 1 → 5 → × →
→ (→ 1 → ÷ → 5 →) → ^ → 1 → 5 → × →
→ (→ 4 → ÷ → 5 →) → ^ → 4 → 5 → = →

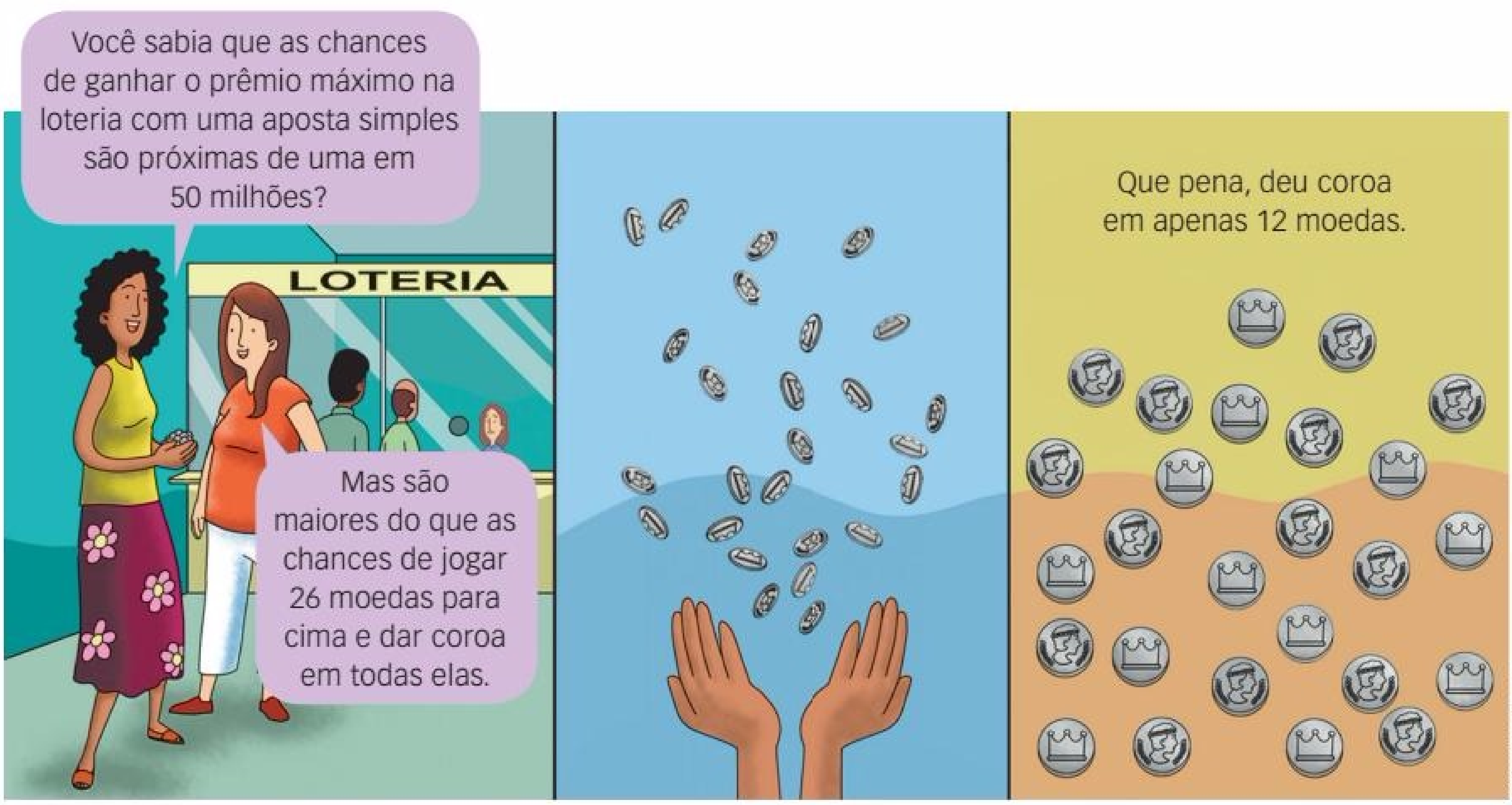
Eduardo C.

Atividades ▸ Anote as respostas no caderno.

42. Os pais de Gabriel constituíram a seguinte formação familiar: eles tiveram 6 filhos, todos meninos. Qual a probabilidade de que uma família com 6 filhos tenha essa formação? $\frac{1}{64}$ ou 1,5625%

CALCULADORA Professor(a): Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

43. No início da unidade, foi apresentada a seguinte tirinha:



Carlos Nascimento

Utilizando uma calculadora científica, determine a probabilidade de, ao jogar 26 moedas para cima, o resultado ser coroa em todas elas. $\frac{1}{67\,108\,864}$ ou aproximadamente 0,0000015%

44. Um casal pretende ter 4 filhos e gostaria que fossem 3 meninas e um menino. Qual a probabilidade de, tendo o casal os 4 filhos, serem 3 meninas e um menino, conforme o desejo deles? 25%

45. Uma moeda é lançada 5 vezes. Qual a probabilidade de se obter cara exatamente em 3 dos 5 lançamentos? 31,25%

46. (Uerj) Uma máquina contém pequenas bolas de borracha de 10 cores diferentes, sendo 10 bolas de cada cor. Ao inserir uma moeda na máquina, uma bola é expelida ao acaso.


Sean Pavone/ Dreamstime.com

Máquina com bolas.

Inserindo-se 3 moedas, uma de cada vez, a probabilidade de que a máquina libere 3 bolas, sendo apenas duas delas brancas, é aproximadamente de: b

a) 0,008
b) 0,025
c) 0,040
d) 0,072

Para resolver essa atividade você utilizou as ideias da lei binomial das probabilidades? Justifique.
Resposta esperada: Não, pois não há reposição das bolas retiradas.

47. Em uma urna foram colocadas 10 bolas vermelhas e 4 bolas azuis. Sorteando-se com reposição 5 bolas da urna, determine a probabilidade de:

a) exatamente três delas serem azuis.
aproximadamente 11,9%
b) ao menos três delas serem azuis.
aproximadamente 14,47%
c) todas serem vermelhas.
aproximadamente 18,59%
d) ao menos duas serem vermelhas.
aproximadamente 97,62%

DESAFIO

48. Um levantamento realizado em uma loja de produtos esportivos concluiu que 30% dos clientes do sexo masculino compram chuteiras. Supondo que em certo dia 20 homens realizaram compras nessa loja, determine a probabilidade de que:

- exatamente 10 tenham comprado chuteiras.
aproximadamente 3,08%
- ao menos 17 tenham comprado chuteiras.
aproximadamente 0,00005%
- menos de 4 tenham comprado chuteiras.
aproximadamente 10,71%

49. (UPE) Um jogo consiste no lançamento de dois dados não viciados de seis faces cada, numeradas de um a seis. Sempre que o primeiro dado lançado tiver um valor (face para cima) estritamente maior que o valor do segundo dado, o jogador **A** vence. Se o valor do primeiro dado for estritamente menor que o do segundo dado, vence o jogador **B**. Em caso de valores iguais, o lançamento é considerado inválido, e os dados são lançados novamente. Nestas condições, em seis partidas válidas, a probabilidade de que o jogador **A** vença, pelo menos, uma das partidas é igual a: d

a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{35}{36}$ c) $\frac{1}{64}$ d) $\frac{63}{64}$ e) $\frac{1}{6}$

50. (Insper-SP) Um país possui 1 000 000 de eleitores, divididos igualmente entre 10 estados. O quadro a seguir mostra o resultado final da votação para a escolha do novo presidente, quando todos os eleitores votaram.

Candidato	Percentual dos eleitores
X	52%
Y	25%
Z	20%
Votos brancos e nulos	3%

Durante a votação, uma pessoa entrevistou 10 eleitores, selecionados aleatoriamente, para tentar prever o resultado da eleição. A probabilidade de que o percentual de eleitores dessa amostra que votaram no candidato Z seja igual ao percentual de votos obtidos por esse candidato na eleição é aproximadamente igual a: c

a) $(0,2)^2 \cdot (0,8)^8$ (ou seja, aproximadamente 1%)
b) $(0,2)^2 + (0,8)^8$ (ou seja, aproximadamente 20%)
c) $45 \cdot (0,2)^2 \cdot (0,8)^8$ (ou seja, aproximadamente 30%)
d) $90 \cdot (0,2)^2 \cdot (0,8)^8$ (ou seja, aproximadamente 60%)
e) $\frac{2 \cdot (0,2) + 8 \cdot (0,8)}{10}$ (ou seja, aproximadamente 68%)

51. Em um pequeno zoológico há algumas espécies de mamíferos, aves e répteis, totalizando 150, 350 e 80 animais, respectivamente. Um visitante desse zoológico tira aleatoriamente 20 fotos de alguns desses animais. Calcule a probabilidade de:

a) exatamente 5 dessas fotos serem de mamíferos.
aproximadamente 20,15%
b) no máximo 4 fotos serem de répteis.
aproximadamente 86,89%
c) pelo menos 18 dessas fotos serem de aves.
aproximadamente 0,39%

52. Determinado teste possui 20 questões, todas com 4 alternativas cada, sendo apenas uma delas correta. Um candidato deve acertar ao menos 80% das questões para passar no teste, ou seja, pode errar, no máximo, 4 questões. Determine a probabilidade de um candidato que, assinalando arbitrariamente as respostas, consiga passar no teste.
aproximadamente 0,000039%

Professor(a): Nas atividades desta página, é conveniente utilizar uma calculadora.

Cálculo de probabilidades na Biologia

As mutações que ocorrem nos seres vivos são totalmente aleatórias e algumas delas levam o portador à morte. Nas plantas, por exemplo, existe o gene **C**, dominante, responsável pela pigmentação verde, e seu alelo recessivo **c** condiciona a ausência dessa pigmentação. Portanto, o homozigoto recessivo **cc** morre ainda na fase jovem, pois as plantas necessitam dessa pigmentação para realizar a fotossíntese. Os heterozigotos **Cc**, de folhas verde-claras, sobrevivem quase normalmente. Considere um cruzamento entre dois heterozigotos, e seus possíveis descendentes, conforme indicado no quadro.

		Heterozigoto de folhas verde-claras	
		C	c
Heterozigoto de folhas verde-claras	C	CC	Cc
	c	Cc	cc

a) Qual a probabilidade de, em 10 descendentes do cruzamento de heterozigotos **Cc**, termos exatamente 8 descendentes heterozigotos **Cc**? aproximadamente 4,39%

b) Calcule a probabilidade de, dos 20 descendentes de um cruzamento de heterozigotos **Cc**, exatamente 8 não chegarem à fase adulta por causa da anomalia genética citada. aproximadamente 6,09%

c) Determine a probabilidade de ao menos 3, de 5 descendentes de heterozigotos **Cc**, serem homozigotos **CC**. aproximadamente 10,35%

Professor(a): Veja na Assessoria Pedagógica orientações para o trabalho com a seção Sobre a unidade.

Sobre a unidade | Anote as respostas no caderno.

1. O que você estudou nesta unidade? Você considera que atingiu os objetivos propostos no início da unidade? Se não, o que fará para atingir os objetivos?
2. Qual dos conteúdos estudados nesta unidade você considera que deve estudar um pouco mais?
3. Se um amigo pedisse a você que explicasse o que é probabilidade de acontecer ou não um evento, que explicação você daria?
4. O que você entende por possibilidade e probabilidade?
5. Converse com seus colegas a respeito de situações em que os conteúdos estudados nesta unidade estão presentes. Se necessário, realizem uma pesquisa.

1. Resposta esperada: Probabilidade, probabilidade de ocorrer ou não um evento, probabilidade da união de dois eventos, probabilidade condicional, eventos independentes, lei binomial das probabilidades. Resposta pessoal. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

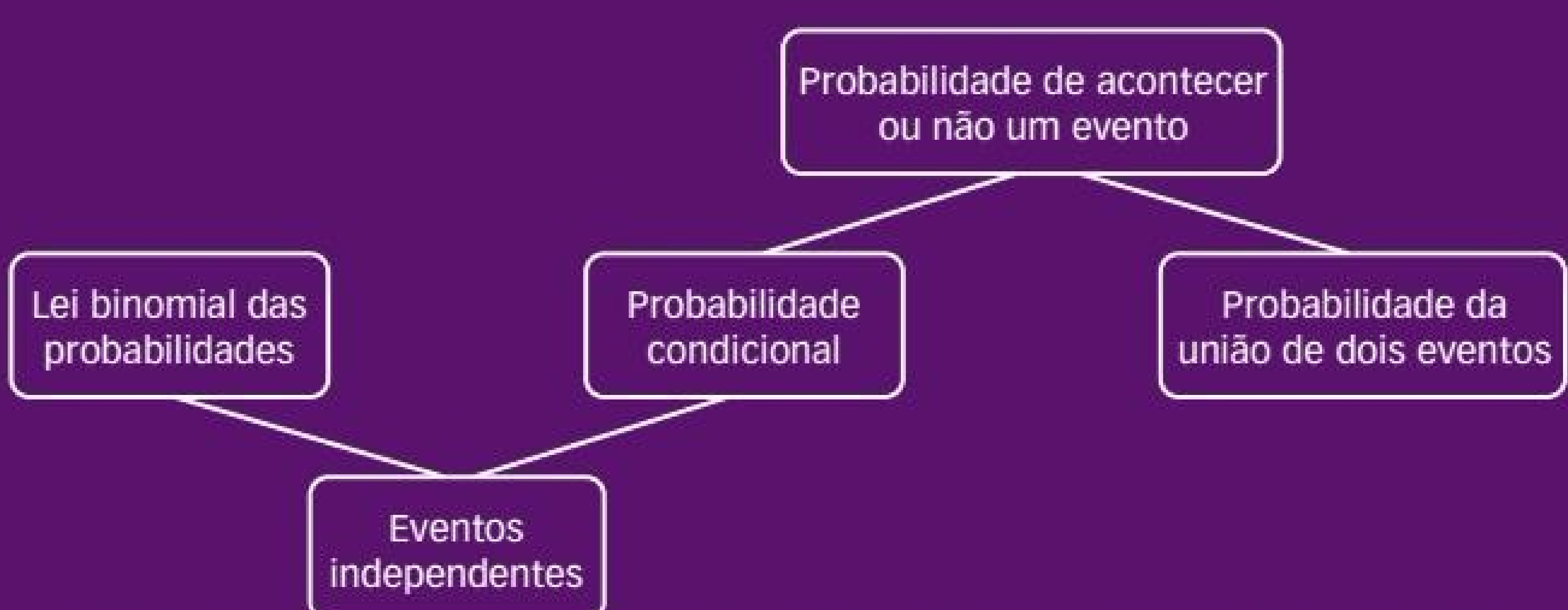
3. Resposta esperada: A probabilidade de ocorrer um evento A de um espaço amostral Ω finito é dada pela razão entre a quantidade de elementos de A e a quantidade de elementos do espaço amostral Ω; a probabilidade de não ocorrer um evento A é dada pela razão entre o número de elementos do complementar de A em relação a Ω e o número de elementos de Ω.

4. Possível resposta: Possibilidade é algo que pode ocorrer; probabilidade é a razão entre a quantidade de casos favoráveis e a quantidade de casos possíveis.

5. Possível resposta: Os conteúdos desta unidade estão presentes em situações como: a probabilidade de encontrar um doador de medula óssea; a probabilidade de lançar um dado não viciado e obter um número ímpar; a probabilidade do nascimento de dois filhos do mesmo sexo.

Ideias matemáticas

O esquema a seguir relaciona algumas das ideias matemáticas estudadas nesta unidade. Converse com seus colegas e professor(a) a respeito de como essas e outras ideias abordadas na unidade estão relacionadas. Em seguida, faça um texto descrevendo as relações existentes entre elas e dê sugestões para complementar e melhorar a organização desse esquema.



Revise os conteúdos estudados nesta unidade e anote os pontos que julgar mais relevantes. Com isso, organize um resumo para auxiliá-lo(a) na compreensão dos conteúdos.

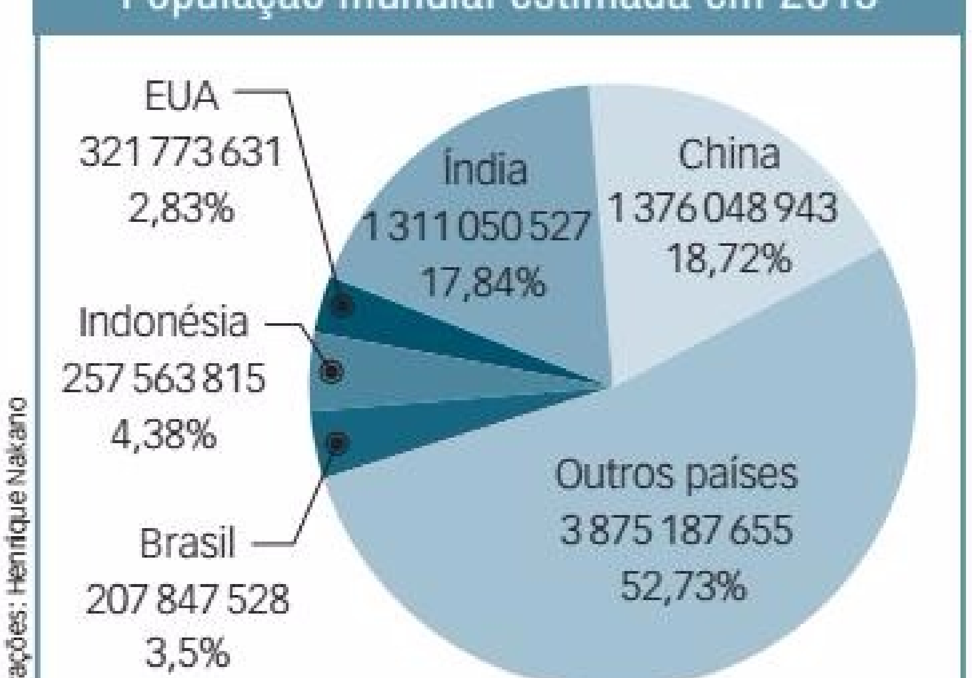
Professor(a): Converse com os alunos de maneira que retomem os objetivos propostos no início da unidade e verifique, por exemplo, se compreenderam a ideia de lei binomial das probabilidades. Auxilie-os a listar as principais ideias matemáticas presentes na unidade e a buscar relações entre elas, como a relação entre a probabilidade condicional e os eventos independentes. Com base nas ideias listadas e relações estabelecidas, oriente-os a propor aprimoramentos ao esquema apresentado, inserindo novas ideias e indicando suas possíveis relações. Peça aos alunos que registrem essas discussões, compondo uma síntese da unidade.

7 ESTATÍSTICA

Andrew Babble/ Shutterstock.com

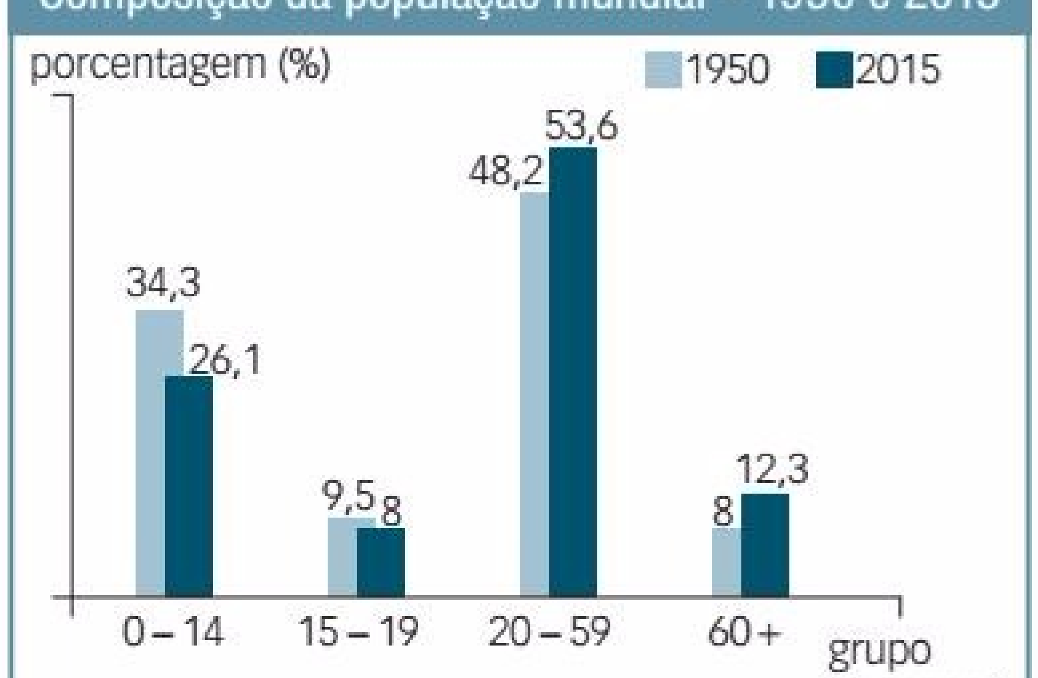
Estatísticas da população

População mundial estimada em 2015



Fonte: United Nations. Disponível em: <http://esa.un.org/unpd/wpp/Download/Standard/Population/>. Acesso em: 20 jan. 2016.

Composição da população mundial – 1950 e 2015



Fonte: United Nations. Disponível em: <http://esa.un.org/unpd/wpp/Download/Standard/Population/>. Acesso em: 27 jan. 2016.

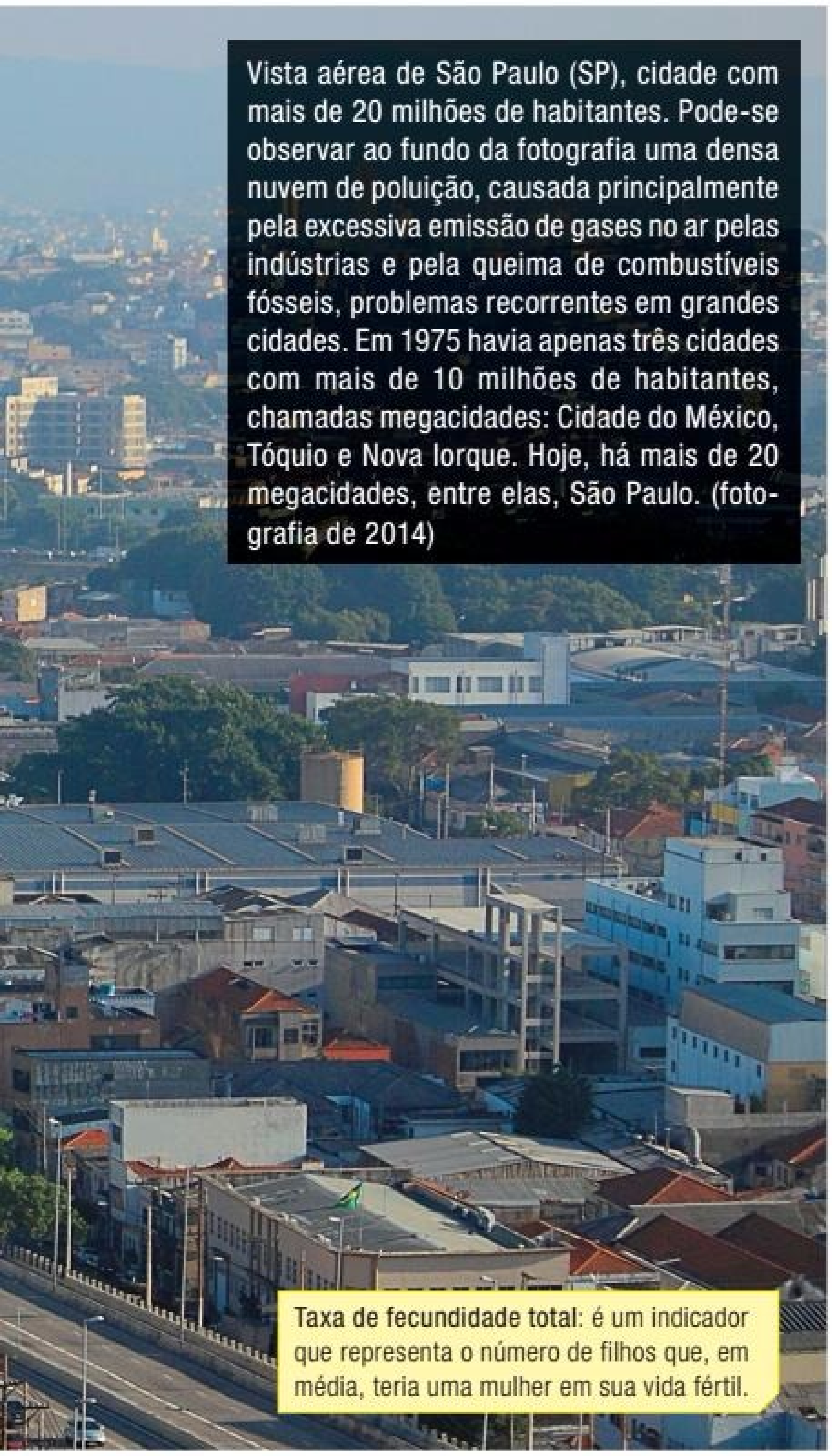
Ilustrações: Henrique Nakano

O aumento da proporção de idosos e a diminuição da proporção de crianças na população é outro problema a ser enfrentado pelas futuras gerações. Uma das consequências diretas disso será maior gasto com previdência social e saúde e menos pessoas para trabalhar.

Professor(a): Proponha aos alunos algumas questões relacionadas a esse tema. Algumas sugestões são:

a) Em média, qual o número de nascimentos no mundo em um ano? (Considere um ano com 365 dias.) (Resposta: 157 680 000 nascimentos)

b) Além da poluição do ar, cite outros problemas mais recorrentes em grandes cidades. (Possíveis respostas: Poluição da água, poluição visual e sonora, congestionamentos, enchentes, falta de áreas verdes, entre outros.)



Vista aérea de São Paulo (SP), cidade com mais de 20 milhões de habitantes. Pode-se observar ao fundo da fotografia uma densa nuvem de poluição, causada principalmente pela excessiva emissão de gases no ar pelas indústrias e pela queima de combustíveis fósseis, problemas recorrentes em grandes cidades. Em 1975 havia apenas três cidades com mais de 10 milhões de habitantes, chamadas megacidades: Cidade do México, Tóquio e Nova Iorque. Hoje, há mais de 20 megacidades, entre elas, São Paulo. (fotografia de 2014)

Taxa de fecundidade total: é um indicador que representa o número de filhos que, em média, teria uma mulher em sua vida fértil.

7 bilhões de pessoas

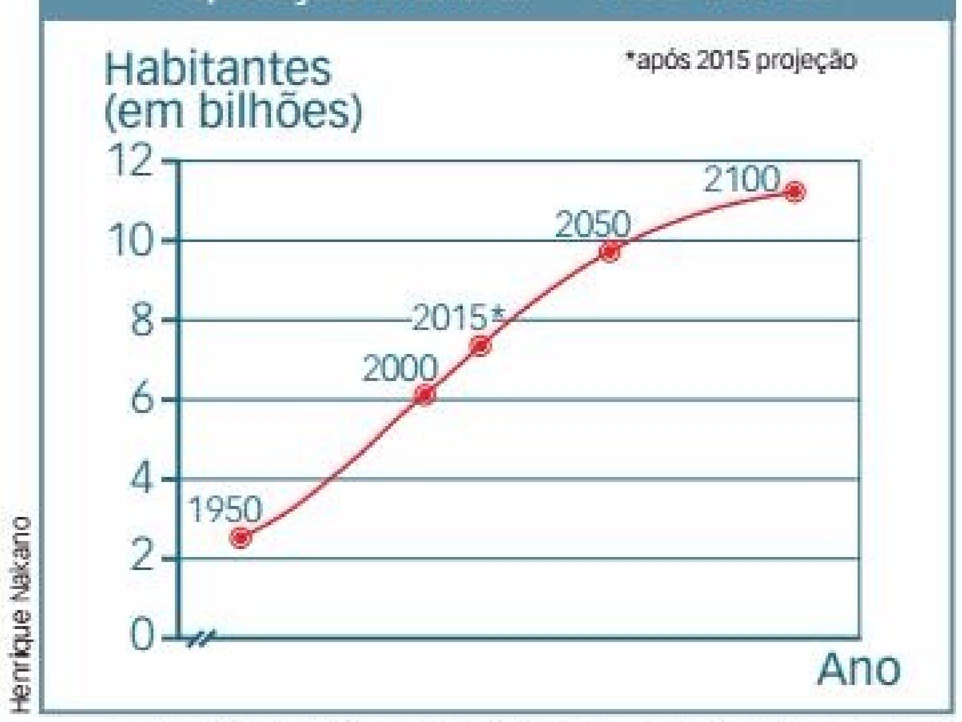
Em estatística, o termo **população** corresponde ao conjunto formado por todos os elementos sob investigação. Mas, caso investigássemos a população mundial, quantos seriam os elementos desse conjunto e quais seriam as suas principais características?

Em 1800, a população mundial atingiu a marca de 1 bilhão de habitantes. Hoje somos mais de 7 bilhões. Após a Segunda Guerra Mundial, a taxa de fecundidade total estava entre 5 e 6 filhos por mulher, o que justifica o rápido aumento da população nesse período. Apesar de essa taxa ter diminuído nas décadas seguintes, estando hoje em 2,5 filhos por mulher, em média nascem 5 bebês por segundo. A taxa de crescimento da população mundial ainda é positiva, ou seja, tudo indica que a população mundial está aumentando.

A China, que possui cerca de 18,72% da população mundial, é o país mais populoso do mundo. Se fosse possível calcular a média aritmética das características de toda a população mundial, obteríamos como resultado uma pessoa com as características de um típico cidadão chinês do sexo masculino. Esse indivíduo teria 28 anos de idade, seria casado, teria um(a) filho(a), não teria completado o Ensino Fundamental, possuiria celular, não possuiria automóvel ou conta bancária e viveria na zona urbana.

Apesar de a população mundial ser numerosa e continuar crescendo, não é a falta de espaço o nosso maior problema, mas a falta de planejamento. Portanto, um dos desafios para as próximas gerações será alcançar o consumo consciente dos recursos naturais, buscando condições para o crescimento sustentável da população mundial.

População mundial – 1950 a 2100



Fonte: United Nations. Disponível em: <http://esa.un.org/unpd/wpp/Download/Standard/Population/>. Acesso em: 20 jan. 2016.

Nesta unidade você vai...

- identificar variáveis estatísticas e classificá-las.
- calcular a probabilidade da ocorrência de um evento.
- calcular medidas de tendência central para dados agrupados e dados não agrupados.
- utilizar e calcular as medidas de dispersão: desvio médio, variância e desvio padrão.
- utilizar a calculadora científica para realizar alguns cálculos estatísticos.

Professor(a): Explique aos alunos que estes são os principais objetivos a serem atingidos por eles nesta unidade. Retome esses objetivos no decorrer dos estudos da unidade e, se julgar necessário, estabeleça também novos objetivos. Na Assessoria Pedagógica encontram-se os objetivos gerais deste nível de ensino, assim como os objetivos específicos desta unidade.

POPULAÇÃO E AMOSTRA

IBGE / Governo Federal

Logomarca do IBGE.

A cada 10 anos, o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) realiza o Censo Demográfico, cujo objetivo é obter informações das características da população brasileira, tais como quantos somos, como somos, onde vivemos e, principalmente, como vivemos. No Censo 2010, foram aplicados dois tipos de questionários: o da **amostra**, aplicado em 11% dos domicílios ocupados; e o questionário simplificado, aplicado em toda a **população** brasileira.

Professor(a): Mais informações acerca do Censo Demográfico e da pesquisa de audiência de TV estão disponíveis na seção Como funciona das unidades de Tratamento da Informação do volume 1 e Estatística do volume 3, respectivamente.

Em estatística, **população** é o conjunto formado por todos os elementos sob investigação. Já a **amostra** diz respeito a um subconjunto ou parte da população. A amostra pode ser utilizada quando não é possível ou é inviável o acesso à população por razão da limitação de tempo ou dinheiro, por exemplo. Em todo caso, se essa amostra for adequadamente selecionada, ela representará proporcionalmente a diversidade da população em estudo.

No Censo 2010, a população representa todos os brasileiros, isto é, a população brasileira, mas o questionário da amostra foi aplicado em 11% dessa população.

Observe outros exemplos:

- O Ibope (Instituto Brasileiro de Opinião Pública e Estatística) realiza uma pesquisa para medir a audiência de TV em âmbito nacional. Nesse caso, a população são todos os telespectadores brasileiros, mas a pesquisa é realizada com uma amostra de menos de 1% dessa população.
- Uma pesquisa estatística deseja investigar a intenção de voto para prefeito de um município com 150 000 eleitores. Nesse caso, a população são todos os eleitores, mas a pesquisa pode ser realizada entrevistando 2 000 deles, se eles forem adequadamente selecionados.

Objeto de pesquisa

Nem sempre o objeto de pesquisa são pessoas. Uma montadora de automóveis, por exemplo, pode realizar uma pesquisa para verificar quantos automóveis apresentam certo defeito de montagem em determinado lote. Nesse caso, o objeto de pesquisa são os automóveis, o lote considerado é a população e os automóveis analisados são a amostra.

Sendo assim, não é necessário coletar dados de toda a população para chegarmos a uma conclusão sobre ela.

Além de coletar e organizar os dados, a estatística também é responsável por inferir sobre uma população, baseando-se unicamente na observação de uma amostra dela. O conjunto de técnicas utilizadas para isso é chamada **Estatística inferencial**.

Inferir: deduzir ou tirar conclusões pelo raciocínio.

De acordo com a pesquisa a ser realizada, devem ser estabelecidos critérios que garantam a representatividade da amostra. No caso de uma pesquisa de intenção de voto para presidente, por exemplo, a quantidade de eleitores de uma amostra é muito pequena se comparada ao total de eleitores. Entretanto, ao contrário do que se espera, a quantidade de pessoas da amostra não é tão importante quanto a seleção desses entrevistados. Essas pessoas devem representar proporcionalmente a diversidade do Brasil. Nessa seleção são considerados aspectos como: região, estado ou município em que a pessoa mora, sexo, idade, escolaridade e classe econômica.

> Nas pesquisas envolvendo amostras, em geral, os resultados são apresentados com uma **margem de erro amostral**. Quando uma pesquisa diz que o candidato obteve 27% das intenções de voto, com margem de erro de 2%, significa que existem grandes chances de ele receber entre $\underbrace{25}_{27-2}$ % e $\underbrace{29}_{27+2}$ % dos votos na eleição.

Variáveis estatísticas

O objetivo dos questionários do Censo Demográfico é obter informações de cada cidadão brasileiro, tais como quantidade, sexo, idade, grau de instrução, renda familiar, tipo de moradia, entre outros. Cada um desses itens é uma **variável estatística**.

Variáveis que apresentam valores quantitativos, que resultam de uma contagem ou que se pode medir, são chamadas **variáveis quantitativas**. Exemplos: idade, altura, massa, número de filhos etc.

As variáveis que não apresentam valores quantitativos, mas estão relacionadas a uma qualidade ou característica, são chamadas **variáveis qualitativas**. Exemplos: estado civil, nível de escolaridade, cor dos olhos etc.

As variáveis quantitativas podem ser classificadas em:

- **Variável quantitativa discreta**: quando as possíveis ocorrências são números inteiros que resultam, em geral, de uma contagem. Por exemplo, número de filhos, número de funcionários etc.
- **Variável quantitativa contínua**: quando as possíveis ocorrências são valores de uma escala contínua de números reais. Por exemplo, a massa de um indivíduo, pois ela pode assumir valores reais como 80 kg, 80,5 kg e 80,54 kg.

Já as variáveis qualitativas podem ser classificadas em:

- **Variável qualitativa ordinal**: quando há uma ordenação para as possíveis ocorrências. Por exemplo, o "nível de escolaridade" de alguns trabalhadores é uma variável qualitativa que pode ser disposta na seguinte ordem: Ensino Fundamental, Ensino Médio, Ensino Superior etc.
- **Variável qualitativa nominal**: quando não há uma ordenação para as possíveis ocorrências. Por exemplo, sexo, estado civil e cor dos olhos.

Podemos representar os tipos de variável estatística no seguinte esquema:

- Variável
  - → Quantitativa
    - → Contínua
    - → Discreta
  - → Qualitativa
    - → Ordinal
    - → Nominal

Atividades resolvidas

R1. A professora de Geografia solicitou aos alunos um trabalho envolvendo o levantamento de dados sobre as três capitais mais populosas do Brasil. Eles apresentaram as seguintes informações:

Dados sobre as três capitais mais populosas do Brasil, em 2010

Capital	Gentílico	População	Área (km^2)	Densidade demográfica (hab./km^2)	Ano de fundação
São Paulo (SP)	paulistano	11 253 503	1 521,11	7 387,69	1554
Rio de Janeiro (RJ)	carioca	6 320 446	1 199,828	5 265,82	1565
Salvador (BA)	soteropolitano	2 675 656	692,82	3 859,44	1549

Fonte: IBGE. Disponível em: <www.cidades.ibge.gov.br/xtras/home.php>. Acesso em: 20 jan. 2016.

- Você reside em alguma das capitais apresentadas? Se não, realize um levantamento com o objetivo de obter essas e outras informações a respeito de seu município e da capital de seu estado.

Professor(a): A resposta depende do município e do estado em que o aluno reside.

Gentílico: nome que designa o lugar em que uma pessoa nasceu ou que habita.

Considerando as variáveis apresentadas, classifique-as em qualitativa ordinal, qualitativa nominal, quantitativa discreta ou quantitativa contínua.

Resolução

Professor(a): Lembre aos alunos que a densidade demográfica representa a quantidade média de pessoas que vivem em cada quilômetro quadrado da região, no caso, o município.

Classificamos as variáveis apresentadas analisando cada uma separadamente.

- Capital: qualitativa nominal, pois não indica uma quantidade e está relacionada a uma qualidade ou característica em que não há uma ordenação.
- Gentílico: qualitativa nominal, pois não indica uma quantidade e está relacionada a uma qualidade ou característica em que não há uma ordenação.
- População: quantitativa discreta, pois indica uma quantidade resultante de uma contagem.
- Área: quantitativa contínua, pois indica uma medida em que os possíveis valores são de uma escala contínua de números reais.
- Densidade demográfica: quantitativa contínua, pois indica uma medida em que os possíveis valores são de uma escala contínua de números reais.
- Ano de fundação: qualitativa ordinal, pois não indica uma quantidade e está relacionada a uma qualidade ou característica em que há uma possível ordenação.

Atividades ▶ Anote as respostas no caderno.

1. Observe a enquete realizada por uma escola de idiomas.

▶ Em sua opinião, qual é o objetivo de uma enquete como essa? Resposta pessoal.

Enquete: pesquisa de opinião sobre determinado assunto.

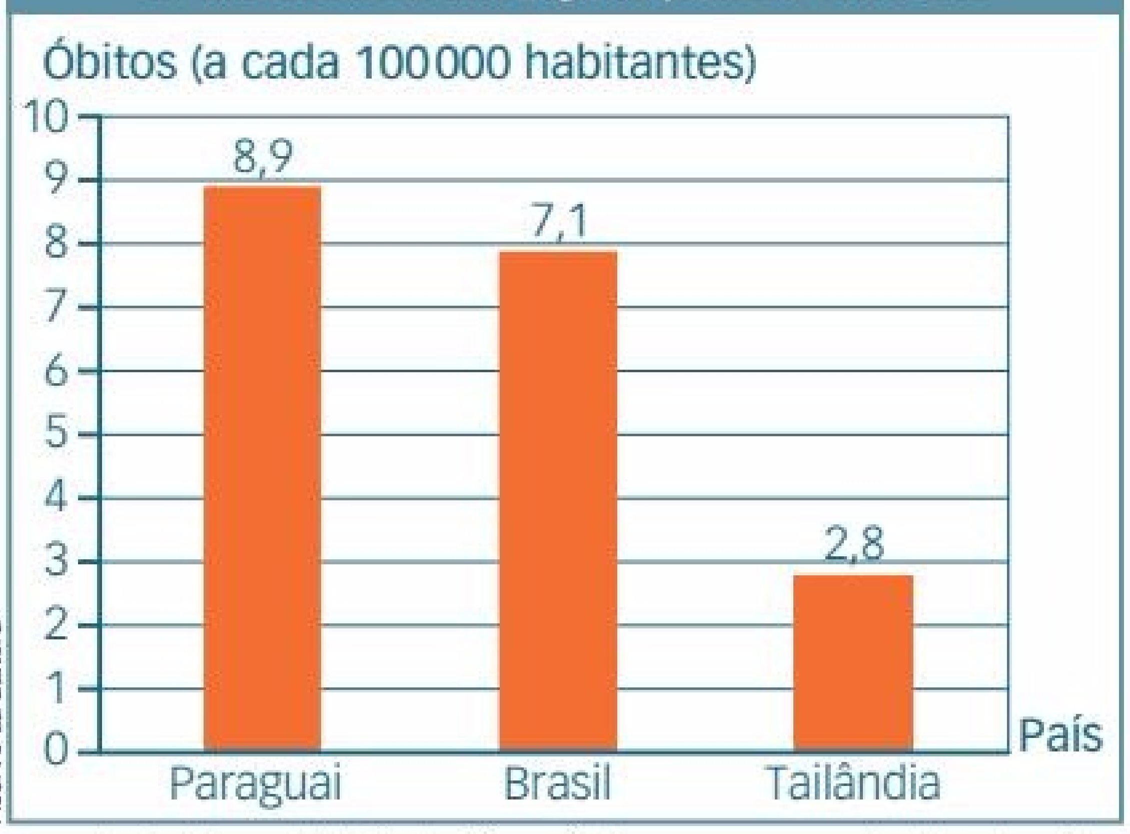
a) Qual é a variável dessa enquete? idioma

b) Como pode ser classificada essa variável? qualitativa nominal

c) Quais valores essa variável pode assumir? Inglês; Espanhol; Francês; Italiano

2. O gráfico mostra a taxa de mortalidade entre vítimas em acidentes de motocicleta do Brasil, do Paraguai e da Tailândia em 2010.

Taxa de mortalidade por acidentes de motocicleta em alguns países, em 2010



Fonte: Mapa da Violência. Disponível em: <www.mapadaviolencia.net.br/pdf2013/mapa2013_transito.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2016.

a) Quais são as variáveis presentes no gráfico? país e óbitos

b) Classifique as variáveis citadas no item anterior em qualitativas ou quantitativas. qualitativa: país; quantitativa: óbitos

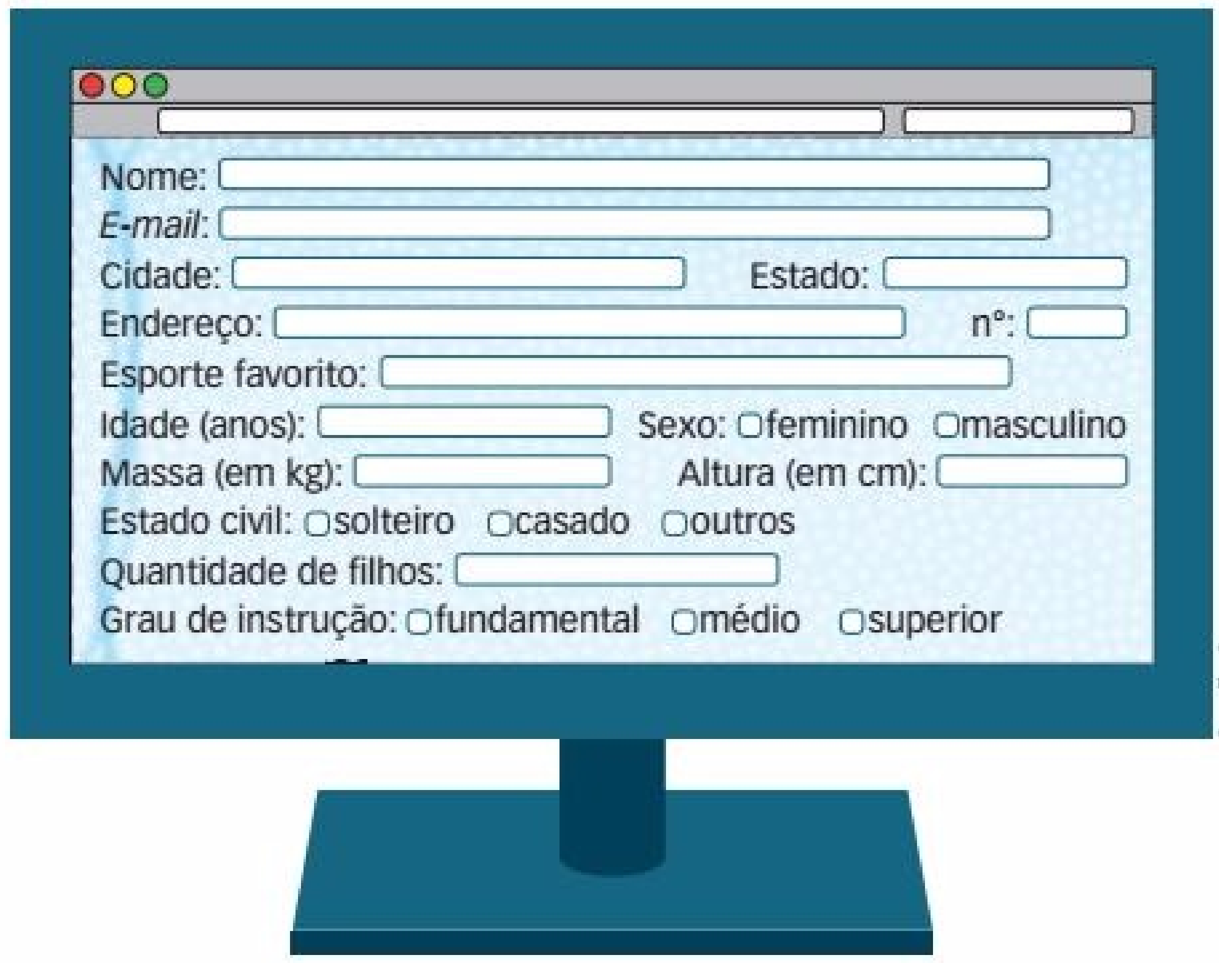
Enfatize a amigos e familiares a importância de sempre utilizar o capacete ao conduzir motocicleta, respeitar os semáforos, os pedestres, a velocidade permitida e nunca pilotar após consumir bebidas alcoólicas.

PRODUÇÃO TEXTUAL

3. Elabore uma enquete, sobre um tema que você julgar interessante, para ser aplicada a uma amostra de alunos de outra turma do Ensino Médio da escola. Classifique as variáveis em qualitativa ordinal, qualitativa nominal, quantitativa discreta ou quantitativa contínua, e escreva os critérios de escolha para determinar a amostra. Resposta pessoal.

Professor(a): Caso os alunos tenham dificuldades em estabelecer critérios para determinar a amostra, diga a eles que pode ser os alunos que sentam mais próximos da lousa, ou alunos de determinada fila, entre outros.

4. Para comprar alguns produtos via internet, é necessário que o consumidor seja cadastrado no respectivo *site*. Para fazer o cadastro em lojas virtuais, é comum que se preencha um formulário. Observe o formulário de cadastro de uma loja virtual de artigos esportivos:



Classifique cada variável presente nesse formulário como: qualitativa ordinal, qualitativa nominal, quantitativa discreta ou quantitativa contínua. *
Professor(a): Veja a resposta desta atividade no final do livro.

▶ De acordo com as informações presentes nesses formulários, geralmente, as lojas virtuais traçam o perfil do cliente para enviar-lhe mensagens e mostrar na página principal do *site*, ao acessá-lo, produtos de seu interesse.

5. Para ingressar no Ensino Médio de uma escola, os alunos respondem a um questionário que contém, entre outras, as seguintes questões:

I) Qual é a renda mensal de sua família? quantitativa contínua

II) Qual é o nível de escolaridade de seus pais? qualitativa ordinal

III) Você pretende ingressar em uma universidade? Por quê? qualitativa nominal

IV) Quantas pessoas da sua família cursaram o ensino superior? quantitativa discreta

V) Você gosta de encarar desafios? qualitativa nominal

VI) Como você avalia sua participação em trabalhos em grupo? qualitativa nominal

VII) Você prefere estudar disciplinas de exatas ou humanas? qualitativa nominal

Cada uma dessas questões define uma variável. Classifique cada variável como: qualitativa ordinal, qualitativa nominal, quantitativa discreta ou quantitativa contínua.

*Professor(a): Explique aos alunos que a variável "idade" é contínua, mas, em geral, a consideramos como discreta, pois a maioria das situações envolvendo a idade de uma pessoa é satisfeita com a idade informada em anos inteiros.

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

Na unidade anterior, estudamos que a probabilidade de obter a face "cara" no lançamento de uma moeda honesta é $\frac{1}{2}$ ou 50%. Mas isso não garante que, ao lançar essa moeda 10 vezes, iremos obter o resultado cara em exatamente 50% dos lançamentos, pois a quantidade de repetições é relativamente baixa. Faça o teste!

No entanto, ao aumentar a quantidade de lançamentos para 100, 1 000, 10 000 etc., espera-se que a frequência relativa da ocorrência do evento "cara" se aproxime cada vez mais de 50%. Observe os resultados obtidos em uma simulação de computador.

Lançamento de moeda.

Simulação do lançamento de uma moeda, em 2016

Número de lançamentos	Frequência absoluta da ocorrência "cara"	Frequência relativa da ocorrência "cara"
10	6	$\frac{6}{10}$ ou 60%
100	47	$\frac{47}{100}$ ou 47%
1 000	490	$\frac{490}{1\,000}$ ou 49%
10 000	5 004	$\frac{5\,004}{10\,000}$ ou 50,04%

Fonte: Números gerados aleatoriamente pelo programa de computador Calc.

A seção **Conexão tecnológica** desta unidade apresenta procedimentos por meio dos quais é possível realizar essa simulação.

Nesse caso, se não soubéssemos como calcular essa probabilidade, poderíamos estimar que é $\frac{1}{2}$ ou 50% com base na análise dos 10 000 lançamentos.

Dessa forma, em situações em que não é possível calcular teoricamente a probabilidade, podemos estimá-la por meio da frequência relativa da ocorrência do evento, considerando várias repetições do experimento. Quanto maior o número de repetições, mais precisa será essa probabilidade estimada, pois haverá uma estabilidade da frequência relativa da ocorrência do evento.

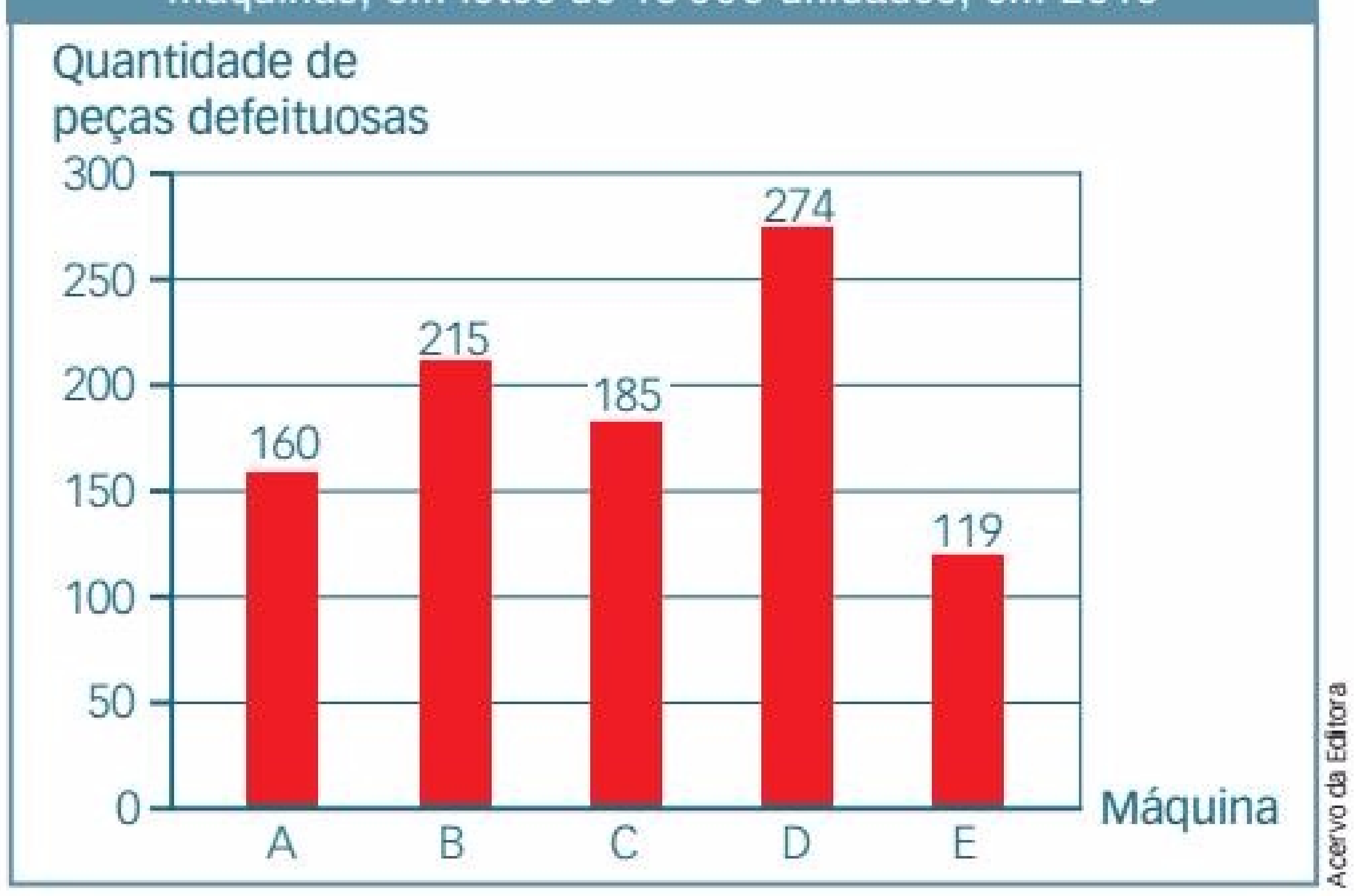
Em algumas situações, em vez de realizarmos várias repetições do experimento, podemos estimar a probabilidade de um evento ocorrer com base em um conjunto de dados amostrais obtidos por meio de registros históricos, por exemplo.

O gráfico a seguir apresenta a quantidade de peças defeituosas em cinco diferentes máquinas. Cada valor é referente a um lote com 15 000 peças do mesmo tipo.

Com base nos dados apresentados, podemos estimar que a probabilidade de ser produzida uma peça defeituosa pela máquina:

- **A** é de $\frac{160}{15\,000} \simeq 0{,}0107$ ou aproximadamente 1,07%.
- **B** é de $\frac{215}{15\,000} \simeq 0{,}0143$ ou aproximadamente 1,43%.
- **C** é de $\frac{185}{15\,000} \simeq 0{,}0123$ ou aproximadamente 1,23%.
- **D** é de $\frac{274}{15\,000} \simeq 0{,}0183$ ou aproximadamente 1,83%.
- **E** é de $\frac{119}{15\,000} \simeq 0{,}0079$ ou aproximadamente 0,79%.

Quantidade de peças defeituosas em cinco diferentes máquinas, em lotes de 15 000 unidades, em 2016



Fonte: Amostragem da fábrica.

COMO FUNCIONA — O seguro de automóveis

Basicamente, o seguro de automóvel funciona como uma indenização no caso de um sinistro parcial ou total ocorrido com o automóvel. No entanto, como não há uma fórmula para calcular a probabilidade de o automóvel sofrer uma colisão, incêndio ou roubo, as seguradoras avaliam alguns fatores de risco, tomando como base as estatísticas observadas e as características do automóvel e do condutor. A partir daí é que uma seguradora determina quanto irá cobrar do cliente (segurado) e quanto terá de pagar de indenização.

Sinistro: no mercado de seguros de automóveis, sinistro é qualquer evento que cause dano ou perda do automóvel. O **sinistro parcial** é quando o dano representa até 75% do valor do automóvel, e o **sinistro total** é caracterizado pela perda total ou furto.

1 Cotação de preços: Por lei, o segurado deve contratar um corretor de seguros, que é um profissional habilitado para fazer a intermediação entre o cliente e a seguradora, explicando cada item da apólice e evitando equívocos que podem levar a seguradora a não pagar a indenização.

3 Custo do seguro: O custo do seguro, chamado de prêmio do seguro, é resultado de um cálculo estatístico que varia de acordo com os fatores de risco analisados no questionário.

2 Aplicação do questionário: Para traçar o perfil do condutor, são questionados: idade, sexo, tempo de habilitação, quilometragem percorrida por mês, quantas pessoas utilizam o automóvel etc. Já para o automóvel, são considerados a incidência de roubos e furtos do modelo e se ele possui dispositivos de segurança, como alarmes e rastreadores por satélite.

4 Vistoria e contratação do seguro: A seguradora solicita uma vistoria prévia para avaliar o estado de conservação do automóvel. Após a aceitação de ambas as partes e o pagamento do prêmio do seguro, a apólice, que é um contrato contendo as condições do seguro, geralmente válido por um ano, é enviada ao segurado.

Professor(a): Diga aos alunos que, em geral, a vistoria é dispensável no caso de automóvel zero quilômetro ou na renovação do seguro.

5 Procedimento em caso de sinistro: O segurado liga para a central de atendimento da seguradora para avisar os sinistros e solicitar os serviços de assistência. Essa central também deve orientar sobre a remoção do automóvel para uma oficina.

As imagens apresentadas são representações artísticas. As cores utilizadas não correspondem às reais e os elementos ilustrados não estão proporcionais.

6 Franquia: É uma participação financeira, previamente estipulada, paga pelo segurado nos casos de sinistro parcial. Por exemplo, se a franquia do seguro é R$ 1 000,00, o segurado irá arcar com esse valor, e caberá à seguradora completar o restante, independentemente do custo total do conserto.

7 Danos a terceiros: É uma cobertura cobrada à parte na apólice que garante o pagamento de consertos a terceiros que foram vítimas de um acidente causado pelo segurado. Nesse caso não é necessário arcar com a franquia.

8 Renovação: Antes do fim da vigência do seguro, o corretor entra em contato com o segurado para oferecer uma renovação do contrato. Nesse caso, os dados são confirmados e, se o segurado não sofreu nenhum sinistro na apólice anterior, ele recebe um benefício em forma de desconto, expresso em classes de bônus.

Henrique Nakano

Professor(a): Diga aos alunos que a franquia é uma forma de participação do segurado no custo de reparo do automóvel. Caso contrário, o segurado acionaria o seguro por qualquer dano, por menor que fosse, o que aumentaria consideravelmente os custos da seguradora.

Atividades resolvidas

R2. Os blocos de concreto utilizados na engenharia civil são produzidos por uma máquina que, utilizando um molde, compacta uma mistura de água, areia, cimento e pó de pedra.

Considere uma máquina que produza diariamente três tipos de blocos de concreto nas quantidades a seguir:

Tipo de bloco	Produção diária
A	2000
B	1200
C	1000


Steven Frame/ Dreamstime.com

Blocos de concreto.

Se a probabilidade de os blocos **A**, **B** e **C** apresentarem defeitos é de respectivamente 0,4%, 0,5% e 0,9%, qual a probabilidade de um bloco, entre o total produzido em um dia, apresentar defeito?

Resolução

Temos que a quantidade total de blocos produzidos em um dia é $2000+1200+1000=4200$. Destes, os que apresentam defeitos são, em média:

- 0,4% do tipo **A**, ou seja, 0,4% de 2000

$$\frac{0,4}{100}\cdot 2000=8$$

- 0,5% do tipo **B**, ou seja, 0,5% de 1200

$$\frac{0,5}{100}\cdot 1200=6$$

- 0,9% do tipo **C**, ou seja, 0,9% de 1000

$$\frac{0,9}{100}\cdot 1000=9$$

Logo, o total de blocos com defeito é 23, pois $8+6+9=23$.

Portanto, a probabilidade de um bloco, entre o total produzido em um dia, apresentar defeito é de:

$$\frac{23}{4200}\simeq 0,0055 \text{ ou aproximadamente } 0,55\%$$

R3. (Enem) Um experimento foi conduzido com o objetivo de avaliar o poder germinativo de duas culturas de cebola, conforme a tabela.

Germinação de sementes de duas culturas de cebola

Culturas	Germinação		Total
	Germinaram	Não germinaram	
A	392	8	400
B	381	19	400
Total	773	27	800

Fonte: BUSSAB, W. O. MORETIN, L. G. *Estatística para as ciências agrárias e biológicas.* (adaptado).

Desejando-se fazer uma avaliação do poder germinativo de uma das culturas de cebola, uma amostra foi retirada ao acaso. Sabendo-se que a amostra retirada germinou, a probabilidade de essa amostra pertencer à Cultura **A** é de:

a) $\frac{8}{27}$ b) $\frac{19}{27}$ c) $\frac{381}{773}$ d) $\frac{392}{773}$ e) $\frac{392}{800}$

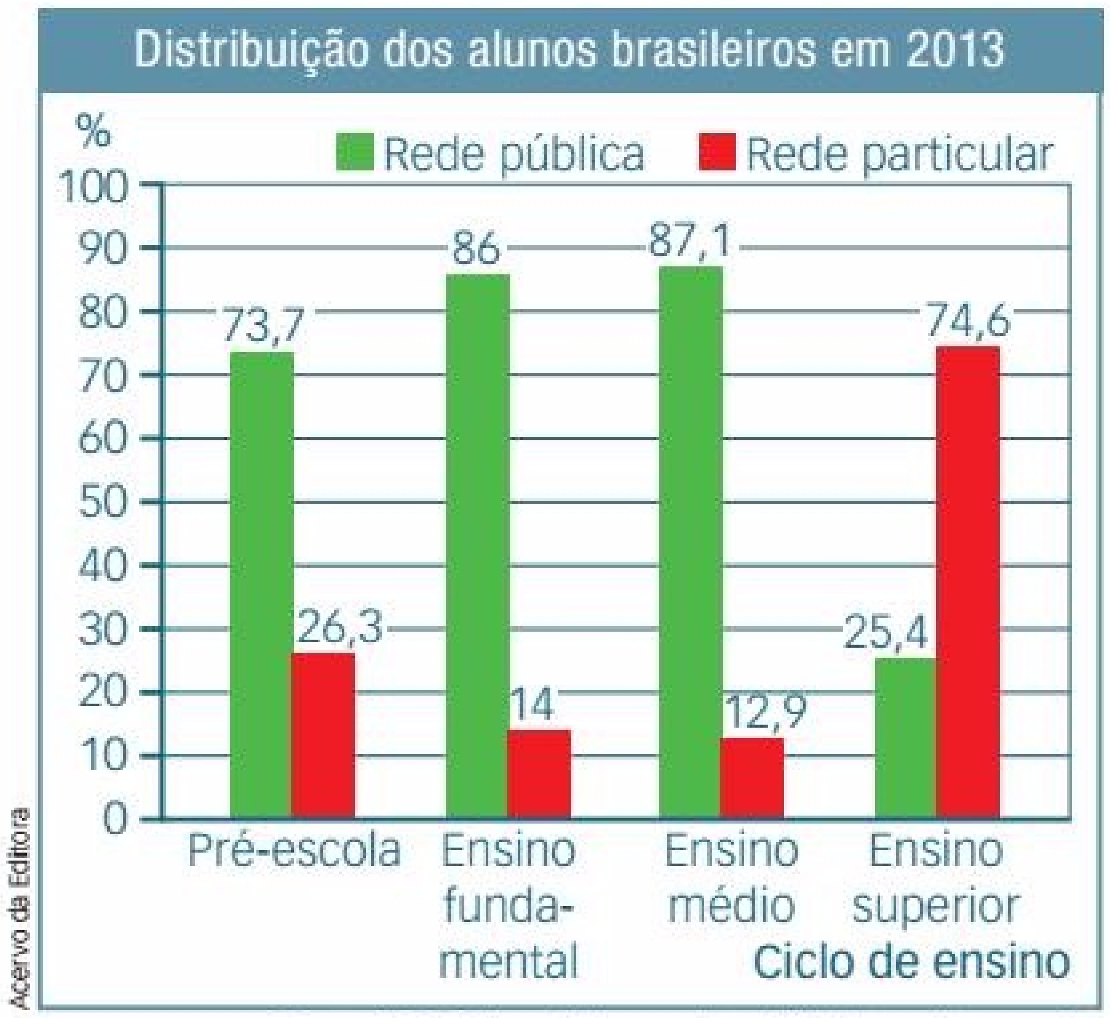
Resolução

Dado os eventos **A**: "amostra pertence à cultura **A**" e **G**: "amostra retirada germinou". Queremos determinar a probabilidade de ocorrer **A** sabendo que **G** já ocorreu, isto é, a probabilidade condicional $P(A|G)$. Logo, com base na tabela, temos:

$$P(A|G)=\frac{n(A\cap G)}{n(G)}=\frac{392}{773}$$

Portanto, a alternativa correta é **d**.

6. A maioria dos alunos brasileiros cursa o ensino básico (pré-escola, ensino fundamental e ensino médio) em escolas públicas e a faculdade em instituições particulares. Segundo dados do IBGE, 76,9% dos alunos do ensino básico estão inseridos na rede pública de ensino, enquanto 74,6% dos alunos do nível superior estudam em faculdades particulares.



Fonte: IBGE. Disponível em: <http://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv94414.pdf>. Acesso em: 1 fev. 2016.

a) Qual é a probabilidade de se sortear um aluno do ensino fundamental que estude na rede pública de ensino? 86%

b) A probabilidade de sortear um aluno da pré-escola que estude na rede particular de ensino é maior do que a de um aluno do ensino médio que estude em uma instituição particular? Justifique. Professor(a): Veja a resposta deste item no final do livro.

c) Sabendo que em 2013 havia cerca de 7,267 milhões de alunos cursando o ensino superior, determine quantos desses alunos estudavam em instituições públicas. 1845818

d) De acordo com o IBGE, dos 201 milhões de pessoas que faziam parte da população brasileira, foram ouvidas 363000 pessoas para compor essa pesquisa.

- Quantas pessoas fizeram parte da amostra dessa pesquisa? Que porcentagem da população essa amostra representa? 363000; aproximadamente 0,18%
- Além da quantidade de pessoas, cite outros critérios que possivelmente foram considerados na escolha das pessoas que fizeram parte dessa amostra. Possíveis respostas: sexo; idade; classe econômica; escolaridade; município em que mora; tipo de residência.

Qual deve ser a principal característica de uma amostra? Resposta esperada: Ela deve representar proporcionalmente a diversidade da população em estudo.

7. (UEG-GO) O gráfico abaixo mostra a evolução da taxa de desemprego nos meses de junho de 2002 a 2011, para o conjunto das seis regiões metropolitanas brasileiras abrangidas pela pesquisa.

Fonte: IBGE. Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 12 ago. 2011.

Selecionando aleatoriamente um dos anos descritos no gráfico utilizado, a probabilidade de que no ano selecionado a taxa de desemprego, no mês de junho, seja superior a 9,3% é igual a: a

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{4}{6}$

8. Um experimento feito com 50 fichas idênticas, que se diferenciavam apenas pela cor, consistia em sortear uma delas, anotar sua cor e devolvê-la ao recipiente que a acondicionava. Feito esse processo 2000 vezes, foram obtidos os seguintes resultados:

Cor da ficha	Quantidade de vezes que foi sorteada
Preta	356
Azul	846
Vermelha	195
Verde	603

Fichas.

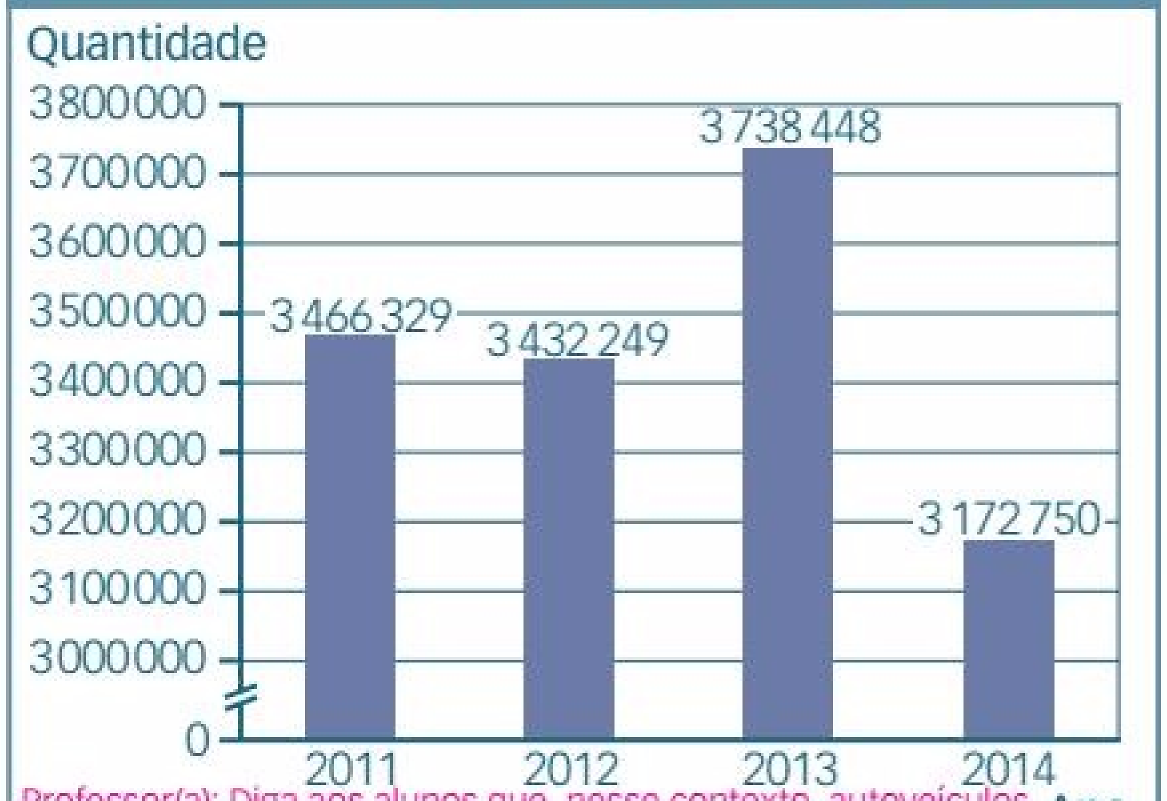
De acordo com os dados apresentados, faça uma estimativa da quantidade de fichas de cada cor presente nesse experimento. Explique os procedimentos que você utilizou para obter tal resultado. 9 fichas pretas, 21 fichas azuis, 5 fichas vermelhas, 15 fichas verdes; Resposta pessoal.

CALCULADORA

Professor(a): Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

9. Observe os gráficos.

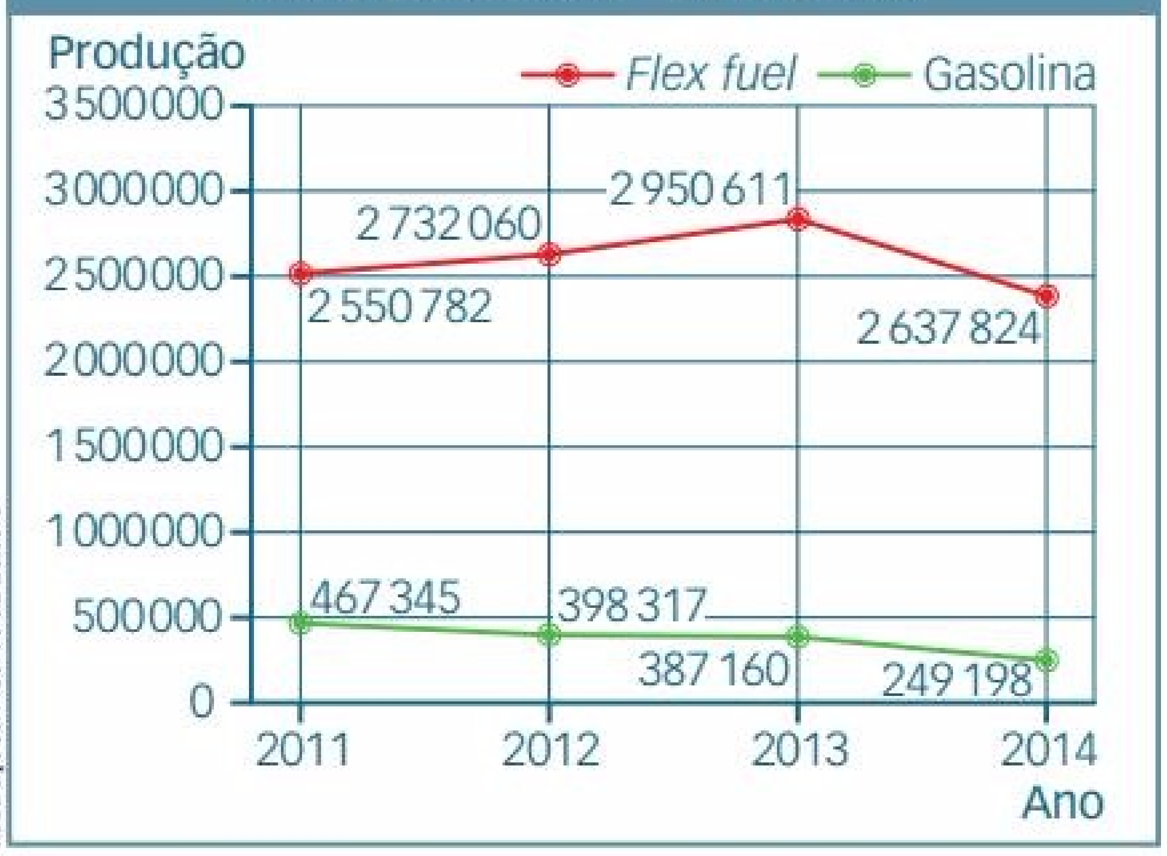
Total de autoveículos produzidos no Brasil – 2011 a 2014



Professor(a): Diga aos alunos que, nesse contexto, autoveículos são todos os automóveis, utilitários, caminhões e ônibus.

Fonte: Anfavea. *Anuário da Indústria Automobilística Brasileira: 2012.* Disponível em: <http://www.anfavea.com.br/anuario2015/Anuario2015.zip>. Acesso em: 20 jan. 2016.

Produção de autoveículos no Brasil de acordo com o combustível – 2011 a 2014



Ilustrações: Acervo da Editora

Fonte: Anfavea. *Anuário da Indústria Automobilística Brasileira: 2012.* Disponível em: <http://www.anfavea.com.br/anuario2015/Anuario2015.zip>. Acesso em: 20 jan. 2016.

a) Sorteando um autoveículo produzido no Brasil em 2011, qual era a probabilidade de ser um movido apenas a gasolina? aproximadamente 13,5%

b) Qual a probabilidade de sortear um autoveículo produzido em 2014 que possua tecnologia *flex fuel*? aproximadamente 83,1%

c) Ao sortear um tipo de autoveículo produzido em 2012, qual a probabilidade de que ele não possua tecnologia *flex fuel* nem seja movido apenas a gasolina? aproximadamente 8,8%

Flex fuel

Professor(a): Diga aos alunos que, além de autoveículos a gasolina e *flex fuel*, também foram produzidos nesse período autoveículos movidos a *diesel*.

A maioria dos autoveículos produzidos no Brasil de 2011 a 2014 possuem tecnologia *flex fuel*, ou seja, podem ser movidos tanto a gasolina quanto a etanol. A utilização dos combustíveis provenientes do petróleo está se tornando cada vez menos viável, pois esse tipo de combustível é altamente poluente e não é obtido de uma fonte de energia renovável.

10. Um dado com formato de tetraedro foi lançado algumas vezes, e os resultados obtidos foram organizados no gráfico.

Resultados do lançamento do dado

Acervo da Editora

Fonte: Experimento com dado.

MilanB/ Shutterstock/ Glow Images

Dado com formato de tetraedro.

Um dado com formato de tetraedro possui quatro possíveis resultados, cada um deles indicado pelo número que se repete nas três faces visíveis.

Você suspeitaria da honestidade desse dado se ele tivesse sido lançado:

a) 15 vezes? Justifique.
Não, pois foram feitos poucos lançamentos.

b) 100000 vezes? Justifique. Sim, pois, em virtude da grande quantidade de lançamentos, a frequência relativa da ocorrência de cada evento deveria estar próxima de 25%.

11. (UFF-RJ) Em julho de 2001 foi feita uma pesquisa de opinião pública sobre transgênicos pelo Ibope. Das duas mil pessoas entrevistadas, 624 "já ouviram falar" de transgênicos, 1323, "nunca ouviram falar" e 53, "não sabem ou não opinaram". A tabela, a seguir, sintetiza o resultado dessa pesquisa quanto à pergunta "Caso você pudesse escolher entre um alimento transgênico e um alimento não transgênico, qual deles escolheria?"

Conhecimento sobre transgênicos, em 2001

Resposta	Já ouviu falar	Nunca ouviu falar
Pessoas entrevistadas	624	1323
Escolheriam alimento transgênico	11%	15%
Escolheriam alimento não transgênico	84%	70%
Não opinaram	5%	15%

Fonte: Greenpeace Brasil. Disponível em: <www.greenpeace.com.br> (adaptado).

Com base nos dados da tabela, pode-se concluir, por exemplo, que 84% das pessoas que "já ouviram falar" de transgênico escolheriam um alimento não transgênico.

Sorteia-se então, ao acaso, uma das duas mil pessoas entrevistadas na pesquisa. Sabendo que a pessoa sorteada nunca ouviu falar de transgênico, pode-se afirmar que a probabilidade desta pessoa ter escolhido um alimento transgênico é igual a: b

a) 10% b) 15% c) 45% d) 70% e) 85%

Professor(a): Diga aos alunos que um organismo é chamado de transgênico quando possui em seu genoma um ou mais genes provenientes de outra espécie transferidos artificialmente.

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Para calcular o salário médio dos funcionários de uma empresa, o gerente fez um levantamento dos salários e organizou a seguinte tabela.

Salário dos funcionários da empresa de acordo com a atividade, em 2016

Função	Salário (R$)	Frequência (f)
Operário	1 050	30
Supervisor	1 310	5
Secretária	1 600	2
Gerente	3 400	1
Diretor	20 000	2

Fonte: Departamento de recursos humanos.

- Para calcular a **média aritmética** de um conjunto de dados, adicionamos os valores e dividimos o resultado pela quantidade de valores adicionados. Nesse caso:

$$\overline{x} = \frac{1\,050 \cdot 30 + 1\,310 \cdot 5 + 1\,600 \cdot 2 + 3\,400 \cdot 1 + 20\,000 \cdot 2}{30 + 5 + 2 + 1 + 2} = \frac{84\,650}{40} = 2\,116{,}25$$

Portanto, o salário médio dos funcionários dessa empresa é R$ 2 116,25.

Note que, nesse caso, a média aritmética não é um indicador representativo da distribuição de salários da empresa, uma vez que o salário da maioria dos funcionários é muito menor que esse valor. Essa distorção se deve ao salário dos diretores, que é muito maior que os outros salários. De fato, se não considerássemos os diretores, teríamos um salário médio de R$ 1 175,00, que fornece uma ideia melhor da distribuição dos salários.

Quando um conjunto de valores possui duas modas, ele é chamado **bimodal**; três modas, **trimodal**; quatro modas, **quadrimodal**; e assim por diante. Quando não há valores que se repetem, dizemos que o conjunto é **amodal**.

- A **moda** (Mo) é o valor de maior frequência no conjunto de dados. Conforme a tabela, temos que Mo = R$ 1 050,00, com frequência 30.
- A **mediana** (Md) "separa" o conjunto de dados organizados em rol em duas partes com a mesma quantidade de valores: uma com valores menores ou iguais a ela, e outra com valores maiores ou iguais a ela. Para uma quantidade ímpar de dados, a mediana corresponde ao termo central; para uma quantidade par de dados, a mediana é a média aritmética dos dois valores centrais.

Para calcular a mediana dos salários da empresa, vamos organizá-los em rol.

1 050	1 050	1 050	1 050	1 050	1 050	1 050	1 050
1 050	1 050	1 050	1 050	1 050	1 050	1 050	1 050
1 050	1 050	1 050	1 050	1 050	1 050	1 050	1 050
1 050	1 050	1 050	1 050	1 050	1 050	1 310	1 310
1 310	1 310	1 310	1 600	1 600	3 400	20 000	20 000

Como há uma quantidade par de funcionários, a mediana corresponde à média aritmética dos valores centrais, em destaque no quadro acima.

$$Md = \frac{1\,050 + 1\,050}{2} = 1\,050$$

Portanto, a mediana é R$ 1 050,00, ou seja, metade dos funcionários dessa empresa recebe um salário menor ou igual a R$ 1 050,00, e a outra metade recebe um salário maior ou igual a R$ 1 050,00.

Note que, nesse caso, ao contrário da média aritmética, a moda e a mediana fornecem uma ideia melhor da distribuição de salários na empresa, uma vez que essas medidas indicam uma tendência de concentração dos valores num conjunto de dados em que há valores atípicos, isto é, valores que se afastam dos demais, como é o caso do salário dos diretores.

Índice de Gini

Nos últimos anos, os esforços das políticas públicas para combater a desigualdade no Brasil e melhorar a condição de vida da população mais pobre vêm tendo reconhecimento internacional. Ao que tudo indica, estamos perto de um marco histórico: o patamar de 0,5 do Índice Gini.

Delfim Martins/ Pulsar Imagens

Desigualdade social do bairro do Morumbi na cidade de São Paulo, em 2013.

Por que essa imagem representa a desigualdade social?
Resposta esperada: Porque muitas pessoas estão vivendo em moradias simples enquanto poucas pessoas estão vivendo em moradias luxuosas.

O Índice de Gini, criado pelo matemático italiano Conrado Gini, é um instrumento para medir o grau de concentração de renda em determinado grupo. Ele aponta a diferença entre os rendimentos dos mais pobres e dos mais ricos. Numericamente, varia de zero a um (alguns apresentam de zero a cem). O valor zero representa a situação de igualdade, ou seja, todos têm a mesma renda. O valor um (ou cem) está no extremo oposto, isto é, uma só pessoa detém toda a riqueza. Na prática, o Índice de Gini costuma comparar os 20% mais pobres com os 20% mais ricos. [...]

Ipea. *Desafios do Desenvolvimento*. Disponível em: <www.ipea.gov.br/desafios/index.php?option=com_content&id=2048:catid=28&Itemid=23>. Acesso em: 1 fev. 2016.

Professor(a): Converse com os alunos a respeito das desigualdades sociais presentes no município ou bairro em que moram. Solicite a eles que citem características que evidenciem essas desigualdades.

a) É correto afirmar que no ano de 2011 o Índice de Gini era maior do que no ano de 2014? Por quê? *

b) Qual é a média do Índice de Gini nos anos apresentados no gráfico? aproximadamente 0,523

c) A tendência do Índice de Gini é aumentar ou diminuir? O que isso representa?
diminuir; Representa que o grau de concentração de renda está diminuindo.

*Sim, porque em 2011 o Índice de Gini era 0,529, enquanto em 2014 era 0,515.

Você gostaria que o Índice de Gini brasileiro estivesse mais perto do zero ou do um? Justifique.
Resposta pessoal.

Acervo da Editora

Fonte: Ipea. Disponível em: <www.ipea.gov.br/portal/images/stories/PDFs/nota_tecnica/151230_nota_tecnica_pnad2014.pdf>. Acesso em: 1 fev. 2016.

Medidas de tendência central para dados agrupados em classes

Agora, veremos como calcular a média aritmética, a moda e a mediana para dados agrupados em intervalos de classes. Observe na tabela as alturas dos alunos da turma 3A do Ensino Médio em 2016.

Altura dos alunos do Ensino Médio – turma 3A, 2016

Altura (em cm)	Frequência (f)
155 ⊢— 160	1
160 ⊢— 165	4
165 ⊢— 170	8
170 ⊢— 175	12
175 ⊢— 180	5
180 ⊢— 185	2
Total	32

Fonte: Planilha do professor de Educação Física.

Inicialmente, calculamos o valor médio (vm) de cada intervalo de classe.

O valor médio de um intervalo de classe é a média aritmética dos extremos do intervalo. No intervalo 160 ⊢— 165, por exemplo, calculamos o valor médio da seguinte maneira:

$$\frac{160+165}{2}=162{,}5$$

Altura dos alunos do Ensino Médio – turma 3A, 2016

Altura (em cm)	Frequência (f)	Valor médio (vm)
155 ⊢— 160	1	157,5
160 ⊢— 165	4	162,5
165 ⊢— 170	8	167,5
170 ⊢— 175	12	172,5
175 ⊢— 180	5	177,5
180 ⊢— 185	2	182,5
Total	32	-

Fonte: Planilha do professor de Educação Física.

- Calculamos a **média aritmética** adicionando o produto de cada frequência pelo valor médio e dividindo esse resultado pela quantidade total de valores.

$$\overline{x}=\frac{1\cdot 157{,}5+4\cdot 162{,}5+8\cdot 167{,}5+12\cdot 172{,}5+5\cdot 177{,}5+2\cdot 182{,}5}{32}=\frac{5\,470}{32}\simeq 170{,}9$$

Portanto, a altura média dos alunos é aproximadamente 170,9 cm.

- A **moda** é o valor médio do intervalo de classes que possui a maior frequência. Conforme a tabela, temos que Mo = 172,5 cm, com frequência 12.
- Como há uma quantidade par de dados, obtemos a **mediana** calculando a média aritmética entre os valores médios correspondentes aos intervalos de classes que contêm os dois termos centrais. Nesse caso, como a quantidade de dados é 32, os termos centrais são o 16º e 17º, ambos pertencentes ao intervalo 170 ⊢— 175. Logo:

$$Md=\frac{172{,}5+172{,}5}{2}=172{,}5$$

Portanto, a mediana das alturas dos alunos é 172,5 cm.

Atividades resolvidas

R4. O técnico de segurança no trabalho de certa empresa coletou a numeração do calçado de todos os funcionários, em março de 2016 para providenciar calçados adequados a cada um deles.

Numeração do calçado dos funcionários de certa empresa, em março de 2016

Número do calçado	Frequência (f)
37	3
39	7
40	8
41	5
42	5
44	1

Fonte: Anotações do técnico de segurança no trabalho.

De acordo com as informações, determine a:

a) média aritmética.

b) moda.

c) mediana.

Resolução

a) $\overline{x} = \dfrac{37 \cdot 3 + 39 \cdot 7 + 40 \cdot 8 + 41 \cdot 5 + 42 \cdot 5 + 44 \cdot 1}{3+7+8+5+5+1} \simeq 40$

*Portanto, a média aritmética do número do calçado dos funcionários da empresa é de aproximadamente 40.

> Note que o cálculo realizado para obter a média aritmética é equivalente a adicionarmos $\underbrace{37+37+37}_{3\ \text{vezes}}+39+\cdots+42+44=1163$ e dividirmos por $3+7+\cdots+5+1=29$.

b) A moda é o número do calçado 40, porque é o valor que possui a maior frequência no conjunto de dados.

c) Para determinar a mediana, é necessário organizar os dados em rol.

37	37	37	39	39	39	39	39	39	39
40	40	40	40	40	40	40	40	41	41
41	41	41	42	42	42	42	42	44	

Portanto, a mediana do número do calçado dos funcionários da empresa é 40.

> Lembre-se de que, quando há uma quantidade ímpar de dados, a mediana corresponde ao termo central do conjunto de dados dispostos em rol. Mas quando há uma quantidade par de dados, a mediana é a média aritmética dos dois valores centrais.

*Professor(a): Note que a média aritmética dos números dos calçados (37, 39, 40, 41, 42, 44) com frequências (3, 7, 8, 5, 5, 1), respectivamente, pode ser interpretada como a média aritmética ponderada dos números dos calçados, com as frequências correspondendo aos pesos.

Professor(a): Diga aos alunos que, dependendo da região do Brasil, o pão francês pode ser chamado de pão de sal, cacetinho, média, pão jacó, pão aguado, filão, entre outros.

R5. Observe a massa de alguns pães franceses, em gramas, de diferentes padarias brasileiras em 2016. Os dados estão organizados em rol.

45	45	46	46	46	47	47	47	47
48	48	48	48	48	49	49	49	49
50	50	50	50	50	50	51	51	51
51	51	52	52	52	53	55	55	55
57	57	57	59	59	59	60	60	60

a) Construa uma tabela que contenha a frequência (f), a frequência relativa (fr) e o valor médio das classes (vm), agrupando os dados em quatro intervalos de classes.

b) De acordo com o item anterior, calcule a média aritmética das massas dos pães.

Resolução

a) Consideramos um valor pouco maior que a amplitude total (15 g); nesse caso, 16 g. Como deve haver quatro intervalos de classes, a amplitude de cada intervalo é:

$$\frac{16}{4} = 4 \rightarrow 4\ \text{g}$$

Assim, podemos determinar cada intervalo de classe a partir do menor valor dos dados.

$45 \vdash \underbrace{49}_{45+4}$ $\quad 49 \vdash \underbrace{53}_{49+4}$ $\quad 53 \vdash \underbrace{57}_{53+4}$ $\quad 57 \vdash \underbrace{61}_{57+4}$

Agora, construímos a tabela de frequências.

Frequência das massas dos pães franceses em diferentes padarias francesas em 2016

Massa (g)	Frequência (f)	Frequência relativa (fr)	Valor médio (vm)
$45 \vdash 49$	14	$\underbrace{31,\overline{1}\%}_{\frac{14}{45}\cdot 100}$	$\underbrace{47}_{\frac{45+49}{2}}$
$49 \vdash 53$	18	$\underbrace{40\%}_{\frac{18}{45}\cdot 100}$	$\underbrace{51}_{\frac{49+53}{2}}$
$53 \vdash 57$	4	$\underbrace{8,\overline{8}\%}_{\frac{4}{45}\cdot 100}$	$\underbrace{55}_{\frac{53+57}{2}}$
$57 \vdash 61$	9	$\underbrace{20\%}_{\frac{9}{45}\cdot 100}$	$\underbrace{59}_{\frac{57+61}{2}}$

Fonte: Padaria.

b) $\overline{x} = \dfrac{14 \cdot 47 + 18 \cdot 51 + 4 \cdot 55 + 9 \cdot 59}{14+18+4+9} \simeq 51,7$

Portanto, a média aritmética das massas dos pães franceses é aproximadamente 51,7 g.

O Programa Brasileiro de Etiquetagem Veicular

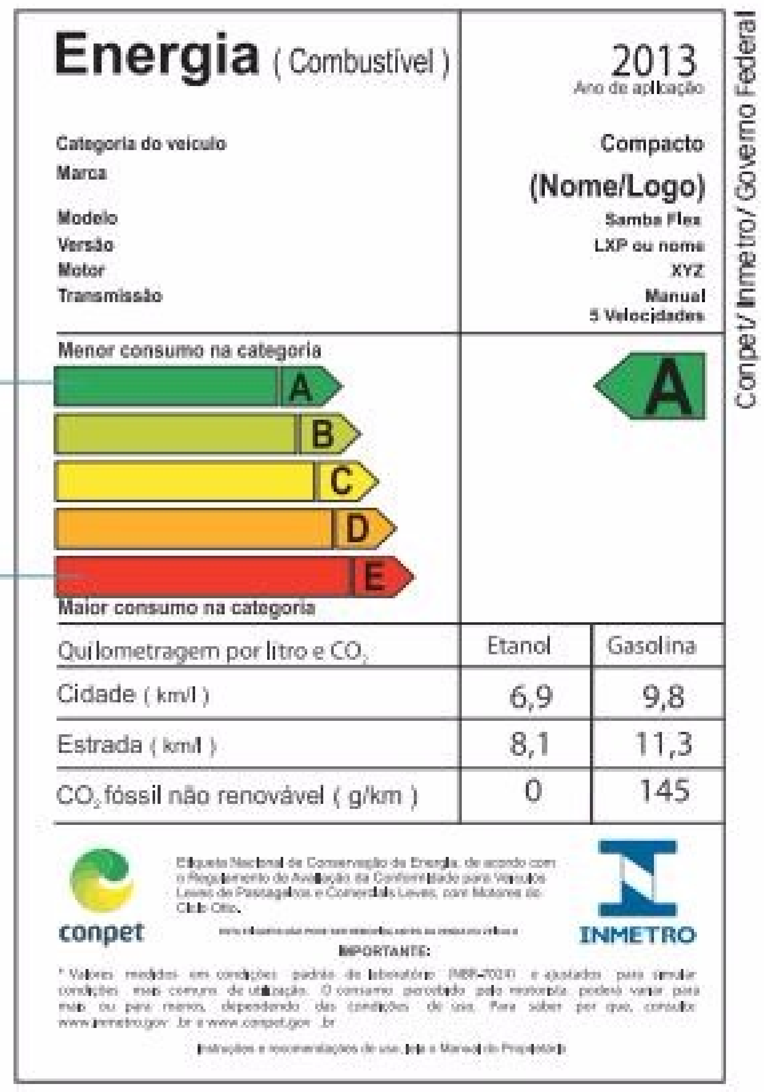
No momento da compra de um veículo novo, o consumidor pode consultar instrumentos que indicam veículos menos poluentes e mais eficientes quanto ao uso de combustível. A Nota Verde, criada pelo Ibama, classifica os veículos por meio de estrelas de acordo com a emissão de poluentes: ter cinco estrelas significa veículo menos poluente.

Já o Programa Brasileiro de Etiquetagem Veicular (PBEV) classifica os veículos de acordo com sua eficiência e indica quantos quilômetros podem ser percorridos com 1 litro de combustível, considerando trajetos urbanos, rodoviários e o tipo de combustível, no caso daqueles que possuem tecnologia *flex fuel*.

Lançado em 2008, o objetivo do PBEV é permitir ao consumidor a comparação de eficiência energética de veículos da mesma categoria, pois dessa maneira é possível tomar uma decisão de compra mais consciente.

A classificação **A** indica os veículos mais eficientes de cada categoria.

A classificação **E** indica os veículos menos eficientes de cada categoria.



Ibama: Instituto Brasileiro do Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis.

A comparação de veículos da mesma categoria que utilizam combustíveis diferentes é realizada convertendo o consumo de combustível de cada um deles em joule, unidade que mede a energia produzida.

a) O veículo que receber classificação **B** é o mais econômico de sua categoria? Por quê?
Não, porque o mais econômico é representado pela letra A.

b) O que representa o número 8,1 na etiqueta apresentada?
A quantidade de quilômetros que o veículo percorre com um litro de etanol na estrada.

c) Um veículo cujos valores de consumo coincidem com os da etiqueta acima teve seu tanque cheio com:

- gasolina e andou por 485 km na cidade. Para completar o tanque novamente, foram necessários 50 litros de gasolina. O consumo desse veículo está acima ou abaixo da média? Justifique.
Está acima da média, porque com 50 litros o veículo deveria percorrer 490 km na cidade.
- etanol e andou por 330 km na estrada. Para completar o tanque novamente, foram necessários 40 litros de etanol. O consumo desse veículo está acima ou abaixo da média? Justifique.
Está abaixo da média, porque com 40 litros o veículo deveria percorrer 324 km na estrada.

Atividades
Anote as respostas no caderno.

12. A quantidade de pessoas que visitaram certa exposição de arte está organizada a seguir:

Quantidade de visitas da exposição de arte de quinta a domingo, maio de 2016

Dia da semana	Frequência (f)
Quinta-feira	84
Sexta-feira	115
Sábado	168
Domingo	137

Fonte: Administração da exposição de arte.

a) Qual foi a média de público dessa exposição?
126 pessoas

b) Sábado pode corresponder à moda? Justifique.
Sim, porque a maior frequência ocorre no sábado.

13. Observe os dados apresentados na tabela.

Idade dos alunos do 1º ano de Matemática em 2016

Idade (anos)	Frequência (f)
18	11
19	6
20	3
21	7
48	1
53	2

Fonte: Departamento de Matemática.

Qual das medidas de tendência central melhor representa a idade dos alunos dessa turma? Justifique.
Professor(a): Veja a resposta desta atividade na Assessoria Pedagógica.

14. O quadro apresenta o saldo de gols em cada partida disputada por um time no último campeonato.

Saldo de gols	Quantidade de partidas
−3	1
−2	0
−1	5
0	3
1	3
2	5
3	2
4	1

a) Quantas partidas esse time:

- perdeu? 6 partidas
- empatou? 3 partidas
- ganhou? 11 partidas

b) Calcule a média, a mediana e a moda dessa distribuição.
$\overline{x} = 0{,}75$ gol; Md = 1 gol; Mo = −1 gol ou Mo = 2 gols

15. (Enem) Em uma seletiva para a final dos 100 metros livres de natação, numa olimpíada, os atletas, em suas respectivas raias, obtiveram os seguintes tempos:

Raia	1	2	3	4	5	6	7	8
Tempo (segundo)	20,90	20,90	20,50	20,80	20,60	20,60	20,90	20,96

A mediana dos tempos apresentados no quadro é: d

a) 20,70
b) 20,77
c) 20,80
d) 20,85
e) 20,90

16. A tabela apresenta o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) dos países da América do Sul no ano de 2013, organizados em intervalos de classes.

IDH dos países da América do Sul em 2013

IDH	Frequência (f)
0,638 ⊢ 0,675	2
0,675 ⊢ 0,712	4
0,712 ⊢ 0,749	2
0,749 ⊢ 0,786	1
0,786 ⊢ 0,823	3

Fonte: PNUD Brasil. Disponível em: <www.pnud.org.br/arquivos/RDH2014pt.pdf>. Acesso em: 21 jan. 2016.

Calcule a média aritmética, a mediana e a moda do IDH dos países da América do Sul em 2013.
média aritmética: aproximadamente 0,727; mediana: 0,712; moda: aproximadamente 0,693

O que é o IDH?

O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma medida resumida do progresso a longo prazo em três dimensões básicas do desenvolvimento humano: renda, educação e saúde. O objetivo da criação do IDH foi o de oferecer um contraponto a outro indicador muito utilizado, o Produto Interno Bruto (PIB) *per capita*, que considera apenas a dimensão econômica do desenvolvimento. [...]

PNUD Brasil. Disponível em: <www.pnud.org.br>. Acesso em: 10 out. 2012.

17. (Enem) Um concurso é composto por cinco etapas. Cada etapa vale 100 pontos. A pontuação final de cada candidato é a média de suas notas nas cinco etapas. A classificação obedece à ordem decrescente das pontuações finais. O critério de desempate baseia-se na maior pontuação na quinta etapa.

Candidato	Média nas quatro primeiras etapas	Pontuação na quinta etapa
A	90	60
B	85	85
C	80	95
D	60	90
E	60	100

A ordem de classificação final desse concurso é: b

a) A, B, C, E, D.
b) B, A, C, E, D.
c) C, B, E, A, D.
d) C, B, E, D, A.
e) E, C, D, B, A.

18. (FGV-SP) A média aritmética dos elementos do conjunto $\{17, 8, 30, 21, 7, x\}$ supera em uma unidade a mediana dos elementos desse conjunto.

Se x é um número real tal que $8 < x < 21$ e $x \neq 17$, então a média aritmética dos elementos desse conjunto é igual a: a

a) 16 b) 17 c) 18 d) 19 e) 20

19. Em 2012 o Ministério da Saúde lançou o Índice de Desempenho do SUS (IDSUS), com pontuação que varia de 0 a 10. O objetivo principal é avaliar o acesso e a qualidade dos serviços de saúde do Brasil. Observe o IDSUS das unidades de federação brasileiras.

5,44	5,43	5,05	5,03	5,39	5,14	5,09	5,26	5,79
5,20	5,08	5,64	5,87	4,17	5,00	6,23	5,29	5,34
4,58	5,42	5,90	4,49	5,62	5,77	6,29	5,36	5,78

Fonte: Portal da Saúde. Disponível em: <http://portalsaude.saude.gov.br/index.php/cidadao/principal/agencia-saude/noticias-anteriores-agencia-saude/1577-ministerio-avalia-qualidade-dos-servicos-de-saude>. Acesso em: 21 jan. 2016.

Lembre-se de inicialmente organizar os dados em rol.

a) Construa uma tabela de frequências agrupando os IDSUS das unidades de federação em cinco intervalos de classes.
Professor(a): Veja a resposta deste item no final do livro.

b) De acordo com a tabela de frequência:

- calcule a moda, a média e a mediana.
moda: 5,25; média: aproximadamente 5,36; mediana: 5,25
- construa um histograma que represente essa situação. Professor(a): Veja a resposta deste item na Assessoria Pedagógica.

SUS: sigla do Sistema Único de Saúde, um dos maiores sistemas públicos de saúde do mundo.

SUS Sistema Único de Saúde

SUS/ Governo Federal

Calc e as medidas de tendência central

Vamos calcular a média aritmética, a mediana e a moda de um conjunto de dados utilizando a planilha eletrônica Calc. Inicialmente, insira o conjunto de dados na planilha e escreva média aritmética, mediana e moda em uma coluna qualquer para organizar os resultados – neste exemplo, escrevemos na coluna **F**. Com a célula G1 selecionada, no menu **Inserir**, clique em **Função**. Em seguida, na lista de funções, dê um duplo clique em **MÉDIA**.

Clique no botão , ao lado do campo **número 1**. Em seguida, selecione todos os números inseridos. Clique no botão novamente e, em seguida, em **OK**. O número 7,25 na célula G1 é a média aritmética do conjunto de dados.

Repita esses procedimentos para as células G2 e G3, modificando apenas a função selecionada para **MED** e **MODO**, obtendo, respectivamente, a mediana e a moda do conjunto de dados.

LibreOffice Calc v. 3.5.3.2. Por The Document Foundation

CALC

Planilha eletrônica que faz parte do pacote LibreOffice, desenvolvido pela The Document Foundation, uma organização sem fins lucrativos.

Licença: Pode ser copiado, distribuído, modificado e reestruturado, além de poder utilizá-lo para criar obras derivadas.

Onde obter: <http://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/>

Versão utilizada: 3.5.3.2

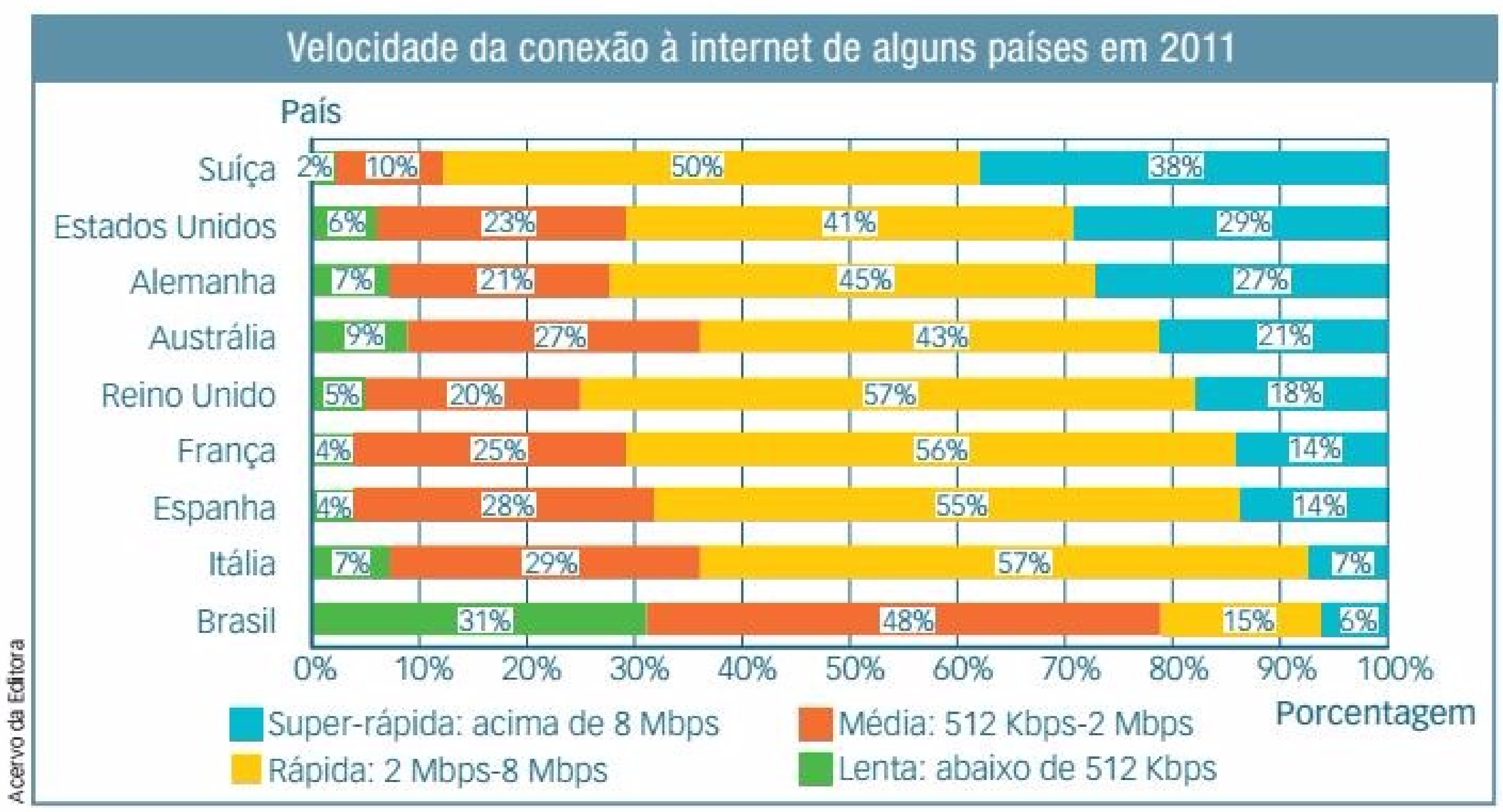
Agora, utilize o Calc e determine a média aritmética, a mediana e a moda do seguinte conjunto de dados:

5	12	6	14	7	2	1	10	11	3	12	4
15	8	15	22	4	12	5	9	12	14	9	7

média: 9,125; mediana: 9; moda: 12

Velocidade da internet

A internet chegou ao Brasil há mais de 20 anos. De lá para cá, novas tecnologias foram agregadas a ela, fazendo sua velocidade aumentar. No entanto, temos muito que melhorar, uma vez que pesquisas sobre conexões de banda larga no Brasil realizadas em 2011 revelam que nosso país está na 68ª posição do *ranking* mundial quando o assunto é a velocidade média da conexão. Observe o comparativo de velocidade da internet do Brasil com outros países:



A medida da velocidade da internet determina a quantidade de dados transmitidos por segundo: 1 Mbps equivale a 1024 Kbps.

Fonte: Nielsen. Disponível em: <www.nielsen.com/us/en/insights/news/2011/swiss-lead-in-speed-comparing-global-internet-connections.html>. Acesso em: 25 jan. 2016.

a) Em quais países a conexão rápida é a mais frequente?
Suíça; Estados Unidos; Alemanha; Austrália; Reino Unido; França; Espanha; Itália.

b) Qual dos países apresenta a maior frequência de conexão super-rápida? Quantos por cento das conexões nesse país são desse tipo? Suíça; 38%

c) Que tipo de conexão é predominante no Brasil? Qual é a velocidade dessa conexão?
média; 512 Kbps – 2 Mbps

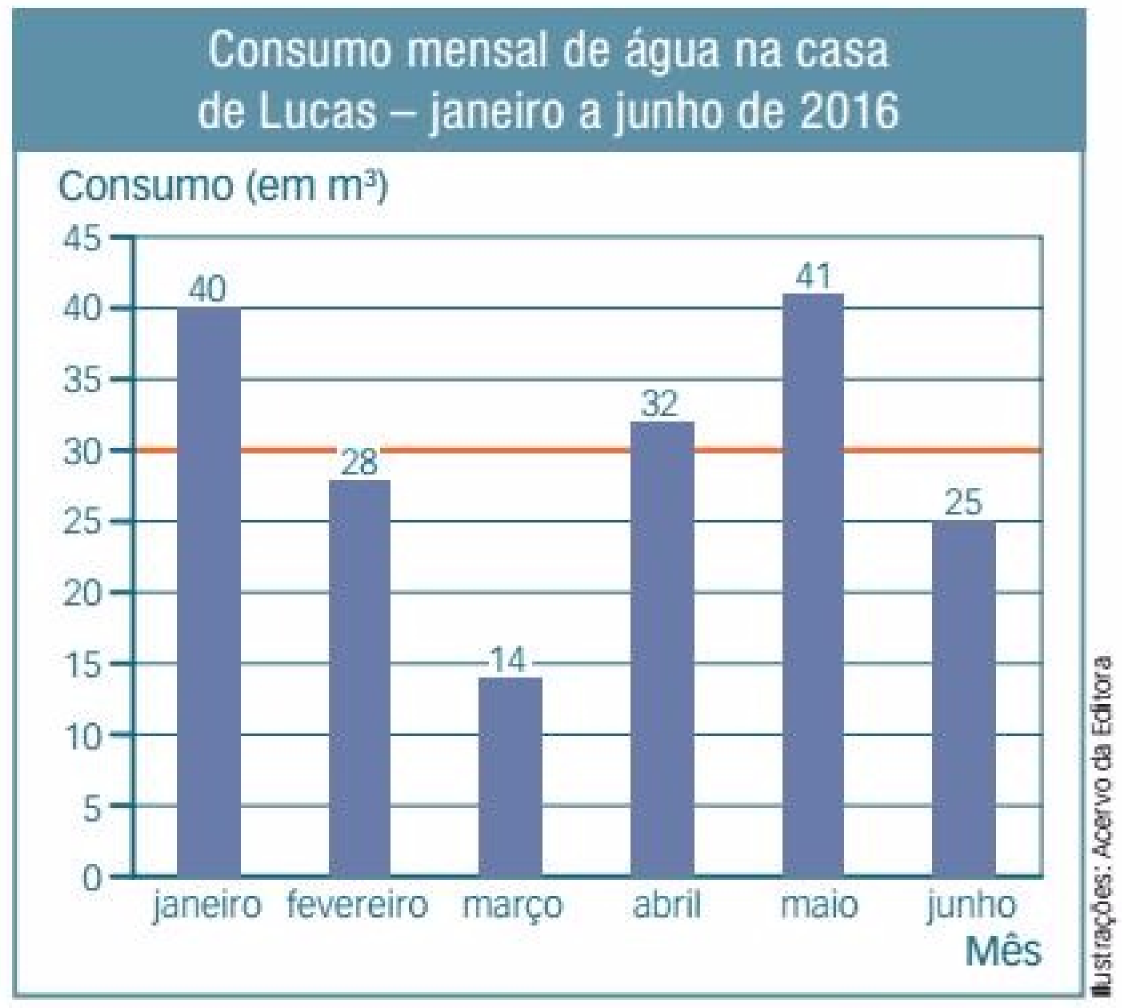
d) Pesquisas realizadas em 2011 indicavam que as conexões brasileiras à internet operavam com a velocidade média de 4,71 Mbps. A medida de tendência central “média” foi a mais adequada para representar a velocidade de conexão à internet? Justifique. Não, porque a velocidade de conexão à internet da maioria dos brasileiros era de 512 Kbps a 2 Mbps.

MEDIDAS DE DISPERSÃO

Estudamos anteriormente as medidas de tendência central, que indicam um valor ao redor do qual os dados de um conjunto tendem a se concentrar. No entanto, em algumas situações é necessário utilizar, também, medidas que indicam o quão próximos ou afastados os valores do conjunto de dados estão em relação à média aritmética. Essas medidas são chamadas **medidas de dispersão**.

Observe os gráficos com o consumo de água na casa de Fernanda e na casa de Lucas, no primeiro semestre de 2016.

Fonte: Fatura de água da casa de Fernanda.



Fonte: Fatura de água da casa de Lucas.

Média:

$$\bar{x} = \frac{29+30+28+32+30+31}{6} = 30 \rightarrow 30\ m^3$$

Média:

$$\bar{x} = \frac{40+28+14+32+41+25}{6} = 30 \rightarrow 30\ m^3$$

Observando os gráficos, podemos perceber que o consumo mensal na casa de Lucas apresentou grande discrepância de um mês para outro quando comparado ao consumo na casa de Fernanda.

Note que, apesar de as médias serem iguais, o consumo mensal na casa de Fernanda está mais próximo da média, e o na casa de Lucas, mais distante. Nesse caso, dizemos que na casa de Lucas os valores estão mais **dispersos** em relação à média do que na casa de Fernanda.

Para verificar isso, podemos utilizar medidas que expressam o grau de dispersão do conjunto de dados. Dentre elas, temos: **desvio médio** (Dm), **variância** (V) e **desvio padrão** (Dp).

Desvio médio

Vamos calcular o **desvio** de cada valor em relação à média aritmética:

- Na casa de Fernanda:

$x_1 - \bar{x} = 29 - 30 = -1$

$x_2 - \bar{x} = 30 - 30 = 0$

$x_3 - \bar{x} = 28 - 30 = -2$

$x_4 - \bar{x} = 32 - 30 = 2$

$x_5 - \bar{x} = 30 - 30 = 0$

$x_6 - \bar{x} = 31 - 30 = 1$

- Na casa de Lucas:

$x_1 - \bar{x} = 40 - 30 = 10$

$x_2 - \bar{x} = 28 - 30 = -2$

$x_3 - \bar{x} = 14 - 30 = -16$

$x_4 - \bar{x} = 32 - 30 = 2$

$x_5 - \bar{x} = 41 - 30 = 11$

$x_6 - \bar{x} = 25 - 30 = -5$

O desvio é dado pela diferença entre o valor e a média aritmética, nessa ordem.

Note que, em cada caso, a soma dos desvios é igual a zero:

- $-1+0-2+2+0+1=0$
- $10-2-16+2+11-5=0$

Para calcular o **desvio médio**, isto é, a média aritmética desses desvios, devemos considerar seus valores absolutos:

- Na casa de Fernanda:

$$Dm_F = \frac{|-1|+|0|+|-2|+|2|+|0|+|1|}{6} = \frac{6}{6} = 1 \to 1\ m^3$$

- Na casa de Lucas:

$$Dm_L = \frac{|10|+|-2|+|-16|+|2|+|11|+|-5|}{6} = \frac{46}{6} = 7{,}\overline{6} \to 7{,}\overline{6}\ m^3$$

Assim, considerando o primeiro semestre de 2016, o consumo de água mensal foi, em média, 1 m³ acima ou abaixo da média aritmética (30 m³) na casa de Fernanda, e $7{,}\overline{6}$ m³ acima ou abaixo da média aritmética (30 m³) na casa de Lucas.

O símbolo $\sum_{i=1}^{n}$ representa o somatório dos valores absolutos dos desvios $|x_i - \overline{x}|$, com **i** variando de 1 a **n**, isto é, do primeiro $|x_1 - \overline{x}|$ ao n-ésimo $|x_n - \overline{x}|$.

O **desvio médio** (Dm) de um conjunto de dados é dado pela média aritmética dos valores absolutos dos desvios de cada valor em relação à média $\overline{x}$.

$$Dm = \frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + |x_3 - \overline{x}| + \ldots + |x_n - \overline{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n}$$

Variância

Outra medida de dispersão que indica o afastamento dos valores de um conjunto em relação à média aritmética é a **variância**.

A **variância** (V) de um conjunto de dados é dada pela média aritmética dos quadrados dos desvios de cada valor em relação à média $\overline{x}$.

$$V = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Ainda em relação aos dados dos gráficos, temos:

- Na casa de Fernanda:

$$V_F = \frac{(-1)^2 + 0^2 + (-2)^2 + 2^2 + 0^2 + 1^2}{6} = 1{,}\overline{6}$$

- Na casa de Lucas:

$$V_L = \frac{10^2 + (-2)^2 + (-16)^2 + 2^2 + 11^2 + (-5)^2}{6} = 85$$

Quanto menor a variância, mais próximos da média estão os valores do conjunto. Como $V_F < V_L$, podemos afirmar que na casa de Fernanda o consumo médio de água mensal no primeiro semestre de 2016 foi mais regular que na casa de Lucas.

A variância não pode ser expressa na mesma unidade que os dados analisados.

Note que, para o cálculo da variância, os desvios foram elevados ao quadrado. Com isso, não podemos expressar a variância na mesma unidade que os valores da variável (nesse caso: m³), como fizemos com o desvio médio.

Desvio padrão

Em geral, quanto mais próximo de zero é o valor do desvio padrão, menos dispersos estão os valores do conjunto em relação à média, ou seja, o conjunto de valores é mais homogêneo.

Definimos a medida de dispersão **desvio padrão** como a raiz quadrada da variância. Com isso, obtemos um valor que pode ser expresso na mesma unidade que os valores da variável, como no desvio médio.

O **desvio padrão** (Dp) de um conjunto de dados é dado pela raiz quadrada da variância **V**.

$$Dp = \sqrt{V}$$

Considerando os valores da variância obtidos anteriormente, temos:

- Na casa de Fernanda:

$$Dp_F = \sqrt{1{,}\overline{6}} \simeq 1{,}29$$

- Na casa de Lucas:

$$Dp_L = \sqrt{85} \simeq 9{,}22$$

Note que as medidas de dispersão não assumem valores negativos.

Portanto, na casa de Fernanda o consumo médio mensal de água no primeiro semestre de 2016 teve um desvio padrão de aproximadamente 1,29 m³, e, na casa de Lucas, teve um desvio padrão de aproximadamente 9,22 m³. Isso indica que na casa de Fernanda o consumo mensal foi mais regular que na casa de Lucas, onde houve altos e baixos no consumo.

Alguns cálculos estatísticos com a calculadora científica

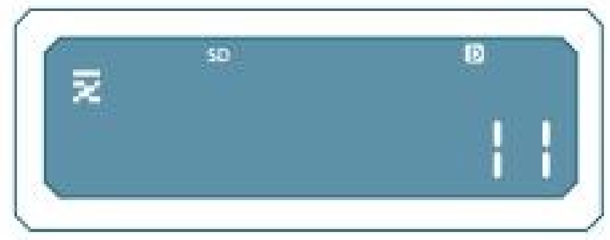
Observe como calcular a média aritmética $(\overline{x})$ e o desvio padrão (Dp) do conjunto de dados a seguir utilizando a calculadora científica:

13	12	7	11	9	14	8
12	9	15	5	18	11	10

Inicialmente, acione o modo **Estatística** da calculadora. Para isso, basta digitar a tecla [MODE CLR] e escolher a função **SD**, digitando a tecla [2 S-VAR].

Em seguida, insira os dados na memória da calculadora, digitando cada valor seguido da tecla [M+].

A cada vez que a tecla [M+] for digitada, o visor informará a quantidade **n** de dados já inseridos.



Depois de inserir todos os dados, para calcular a média aritmética $(\overline{x})$, acione a função **S-VAR**, digitando as teclas [SHIFT] e [2 S-VAR], e escolha a função $\overline{x}$, digitando a tecla [1 S-SUM]. Depois, basta digitar as teclas [=] para obter o resultado.

Nesse caso, a média aritmética é 11.

Ilustrações: Eduardo C.

Como os dados já estão inseridos na memória, para calcular o desvio padrão, acione a função **S-VAR** e escolha a função $x\sigma n$, digitando a tecla [2 S-VAR]. Depois, basta digitar a tecla [=] para obter o resultado.

Nesse caso, o desvio padrão é de aproximadamente 3,27.

Os dados inseridos na memória da calculadora podem ser utilizados para obter os seguintes cálculos estatísticos:

O que aparece no visor	Significado	Como acionar
$\sum x^2$	Soma dos quadrados dos dados	SHIFT → 1 (S-SUM) → 1 (S-SUM)
$\sum x$	Soma dos dados	SHIFT → 1 (S-SUM) → 2 (S-VAR)
n	Quantidade de dados	SHIFT → 1 (S-SUM) → 3
$\overline{x}$	Média aritmética dos dados	SHIFT → 2 (S-VAR) → 1 (S-SUM)
$x\sigma n$	Desvio padrão da população	SHIFT → 2 (S-VAR) → 2 (S-VAR)
$x\sigma n-1$	Desvio padrão da amostra	SHIFT → 2 (S-VAR) → 3

Agora, calcule a média aritmética $(\overline{x})$, o desvio padrão (Dp) e a variância (V) dos seguintes conjuntos de dados:

a) 5; 7; 8,6; 4; 9,1; 5; 7; 3,5; 6; 7,4; 9; 3 média aritmética: $6,21\overline{6}$; desvio padrão: aproximadamente 2,04; variância: aproximadamente 4,17

b) 9; 5; 7; 2; 3; 4; 1; 6; 12; 4; 8; 6; 3; 7; 15 média aritmética: $6,1\overline{3}$; desvio padrão: aproximadamente 3,65; variância: aproximadamente 13,32

c) 3; 8; 9; 6; 7; 2; 1; 3; 4; 5; 11; 7; 8; 9; 16; 5; 12; 1; 13; 2 média aritmética: 6,6; desvio padrão: aproximadamente 4,10; variância: 16,84

Para limpar a memória da calculadora, digite [SHIFT] → [MODE CLR] → [1 S-SUM] → [=] ou selecione novamente o modo **Estatística**, digitando as teclas [MODE CLR] → [2 S-VAR].

Professor(a): Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

Veja como calcular as medidas de dispersão desvio médio (Dm), variância (V) e desvio padrão (Dp) dos dados a seguir utilizando o Calc.

34	29	28	32
36	30	27	31
33	30	29	30
31	28	37	29

CALC

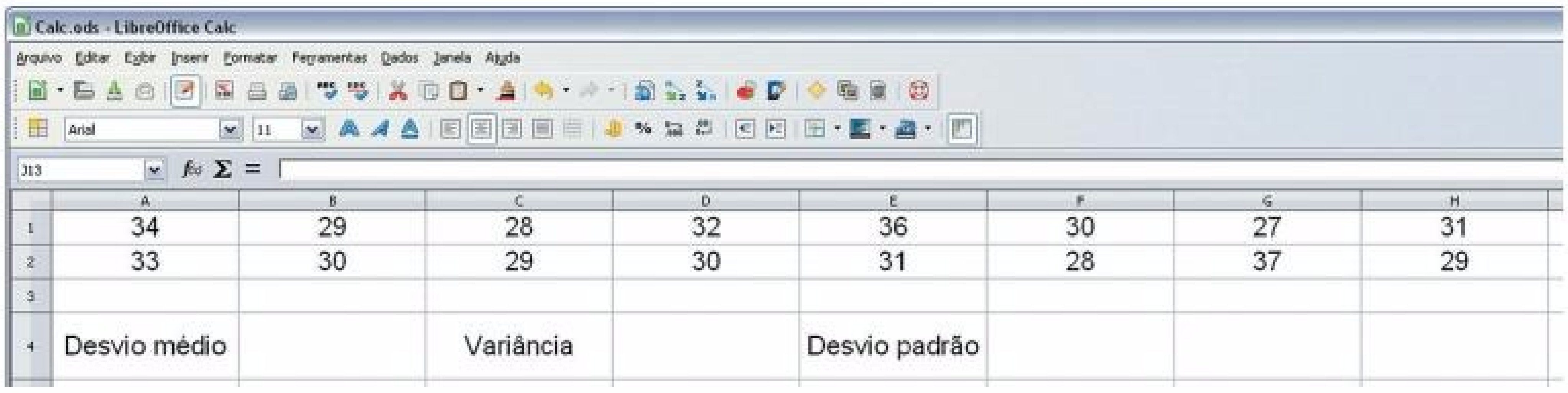
Planilha eletrônica que faz parte do pacote LibreOffice, desenvolvido pela The Document Foundation, uma organização sem fins lucrativos.

Licença: Pode ser copiado, distribuído, modificado e reestruturado, além de poder utilizá-lo para criar obras derivadas.

Onde obter: <http://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/>

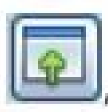
Versão utilizada: 3.5.3.2

Inicialmente, insira o conjunto de dados na planilha e escreva desvio médio, variância e desvio padrão em uma linha qualquer para organizar os resultados. Nesse caso, escolhemos a linha 4.

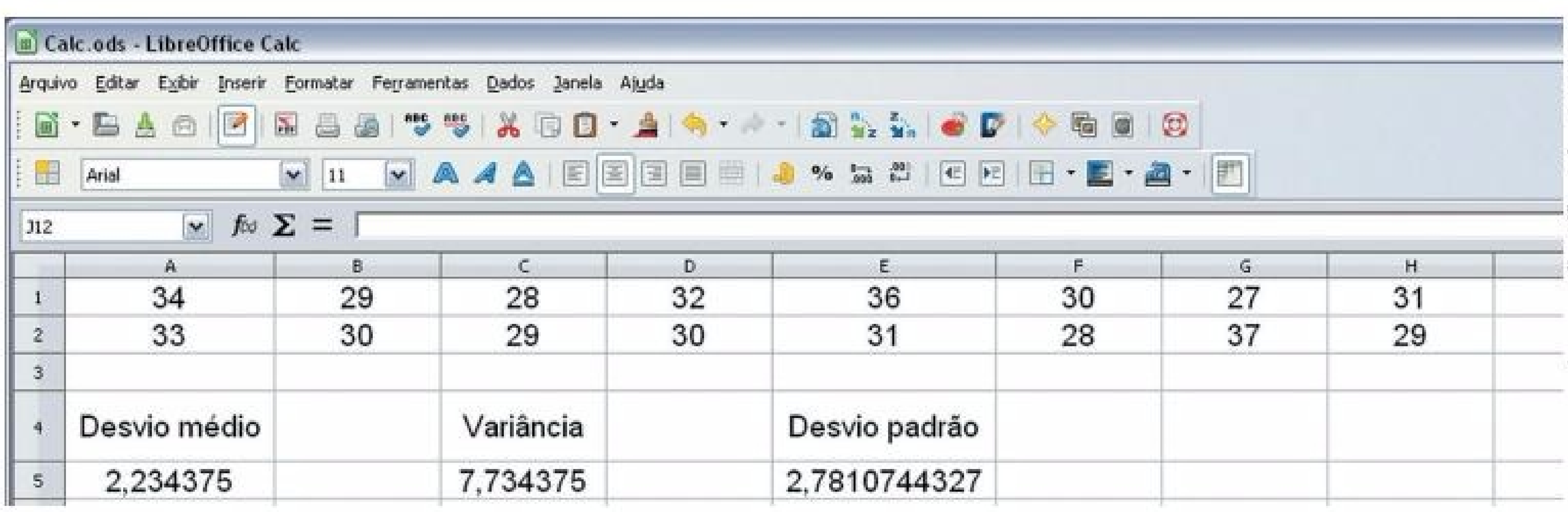


Os dados podem ser inseridos na planilha em apenas uma linha, em apenas uma coluna ou utilizando linhas e colunas.

Com a célula A5 selecionada, no menu **Inserir**, clique em **Função**. Em seguida, na lista de funções, dê um duplo clique em **DESV.MÉDIO**.

Clique no botão , ao lado do campo **número 1**. Em seguida, selecione todos os números inseridos. Clique no botão  novamente e, em seguida, em **OK**. O número 2,234375 na célula A5 é o desvio médio do conjunto de dados.

Repita esses procedimentos para as células C5 e E5, modificando apenas a função selecionada para **VARP** e **DESVPADP**, para obter, respectivamente, a variância e o desvio padrão do conjunto de dados.



Imagens: LibreOffice Calc v. 3.5.3.2. Por The Document Foundation

Agora, utilize o Calc e determine o valor aproximado do desvio médio, da variância e do desvio padrão dos seguintes conjuntos de dados.

a) 2; 4; 7; 9; 2; 4; 3; 5; 4; 3; 2; 6; 1; 5; 3; 7; 6; 4; 9; 3; 6; 5; 8; 1; 2
desvio médio: 1,93; variância: 5,29; desvio padrão: 2,30

b) 10; 15; 25; 17; 31; 11; 16; 21; 13; 20; 23; 16; 19; 22; 14
desvio médio: 4,48; variância: 29,63; desvio padrão: 5,44

c) 123; 136; 140; 162; 188; 155; 171; 172; 217; 143; 164; 154; 170
desvio médio: 17,83; variância: 545,82; desvio padrão: 23,36

d) 52,8; 44,3; 57,4; 93,8; 82,9; 74,5; 47,2; 65,1; 74,3; 83,2; 62,5; 67,7; 71,8; 45,4; 73,5; 65,3; 38,6; 72,5
desvio médio: 11,99; variância: 215,49; desvio padrão: 14,68

R6. A Organização Mundial da Saúde (OMS) recomenda que diariamente sejam consumidos no máximo 5 g de sal de cozinha (formado principalmente por cloreto de sódio), pois o consumo em excesso pode causar vários problemas de saúde, como hipertensão, doenças renais e cardiovasculares.

O quadro apresenta a quantidade estimada de sal de cozinha (em g) consumida diariamente por uma família.

Pai	10 g
Mãe	8 g
Avô	4 g
Avó	5 g
Filha	10 g
Filho	11 g

a) Determine o desvio médio e o desvio padrão considerando os dados apresentados no quadro.

b) Determine o desvio médio e o desvio padrão supondo que, individualmente, os membros dessa família consomem a quantidade máxima diária de sal de cozinha recomendada pela OMS.

Redução de sódio em alimentos no Brasil

No ano de 2012, o ministro da saúde e o presidente da Associação Brasileira das Indústrias de Alimentação (ABIA) assinaram um documento que estabelece metas nacionais de redução da quantidade de sódio em diversos produtos alimentícios industrializados. A meta é que até 2020 cerca de 8,7 mil toneladas de sódio deixem de ser utilizadas. O objetivo desse acordo é melhorar a dieta e promover maior qualidade de vida à população brasileira.


Okea/ Dreamstime.com

A OMS recomenda que diariamente sejam consumidos no máximo 5 g de sal de cozinha, o que equivale a aproximadamente meia colher de sopa.

Resolução

a) Considerando os dados apresentados no quadro, temos:

- Desvio médio.

Dada a média aritmética do conjunto de dados:

$$\overline{x} = \frac{10+8+4+5+10+11}{6} = 8 \rightarrow \boxed{8\text{ g}}$$

Determinamos o desvio de cada valor em relação à média aritmética e o valor do desvio médio:

$x_1 - \overline{x} = 10 - 8 = 2$ $\quad$ $x_4 - \overline{x} = 5 - 8 = -3$

$x_2 - \overline{x} = 8 - 8 = 0$ $\quad$ $x_5 - \overline{x} = 10 - 8 = 2$

$x_3 - \overline{x} = 4 - 8 = -4$ $\quad$ $x_6 - \overline{x} = 11 - 8 = 3$

$$Dm = \frac{|2|+|0|+|-4|+|-3|+|2|+|3|}{6} = 2,\overline{3} \rightarrow \boxed{2,\overline{3}\text{ g}}$$

$Dm = 2,\overline{3}$ g significa que a quantidade de sal consumida diariamente nessa família é, em média, $2,\overline{3}$ g acima ou abaixo da média aritmética (8 g).

- Desvio padrão.

Para determinarmos o valor do desvio padrão, extraímos a raiz quadrada da variância:

$$V = \frac{2^2+0^2+(-4)^2+(-3)^2+2^2+3^2}{6} = 7 \rightarrow \boxed{V = 7}$$

$$Dp = \sqrt{V} \Rightarrow Dp = \sqrt{7} \simeq 2,65$$

Logo, a quantidade de sal de cozinha consumida diariamente pela família teve um desvio padrão de aproximadamente 2,65 g.

b) Agora, vamos determinar o desvio médio e o desvio padrão supondo que, individualmente, os membros da família consumam a quantidade máxima diária de sal de cozinha recomendada pela OMS, isto é, 5 g. Para isso, realizamos novamente os cálculos:

- Desvio médio:

$$\overline{x} = \frac{5+5+5+5+5+5}{6} = 5 \rightarrow \boxed{\overline{x} = 5\text{ g}}$$

$x_1 - \overline{x} = 5 - 5 = 0$ $\quad$ $x_4 - \overline{x} = 5 - 5 = 0$

$x_2 - \overline{x} = 5 - 5 = 0$ $\quad$ $x_5 - \overline{x} = 5 - 5 = 0$

$x_3 - \overline{x} = 5 - 5 = 0$ $\quad$ $x_6 - \overline{x} = 5 - 5 = 0$

$$Dm = \frac{|0|+|0|+|0|+|0|+|0|+|0|}{6} = 0 \rightarrow \boxed{Dm = 0}$$

- Desvio padrão:

$$V = \frac{0^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2}{6} = 0 \rightarrow \boxed{V = 0}$$

$$Dp = \sqrt{V} \Rightarrow Dp = \sqrt{0} = 0 \rightarrow \boxed{Dp = 0}$$

Note que, nesse caso, os valores do desvio médio, da variância e do desvio padrão são iguais a zero, pois não há dispersão dos valores em relação à média aritmética. Isso se deve ao fato de que, no conjunto de dados, todos os valores são iguais.

R7. Praticada em qualquer idade, a caminhada é considerada uma atividade física simples, mas eficaz. Apenas 30 minutos diários de caminhada já contribuem na prevenção de problemas do coração, no controle da pressão arterial, na redução do nível de colesterol, além de proporcionar bem-estar físico e mental. Para a prática dessa atividade é recomendável apenas roupas e tênis confortáveis, hidratar-se e adequar a intensidade da prática conforme o seu condicionamento físico.

Supondo que dois grupos, **A** e **B**, formados por n (com $n > 1$) pessoas cada um, caminhem em média 30 minutos por dia:

a) É possível afirmar que ambos os grupos apresentam um conjunto homogêneo de valores?

b) Sabendo que os desvios padrão dos grupos **A** e **B** são respectivamente 0,89 e 13,42 minutos por dia, é possível dizer qual dos grupos apresenta um conjunto de valores mais homogêneo? Justifique.


takayuki/ Shutterstock.com

Mulheres fazendo caminhada.

Resolução

a) Apenas tendo os valores médios de minutos caminhados por dia dos grupos **A** e **B**, não é possível afirmar se ambos os grupos são ou não homogêneos, pois o valor da média aritmética pode ser distorcido quando há no conjunto de dados a presença de valores extremos. Por exemplo, se tomarmos $n = 2$, isto é, duas pessoas, das quais uma caminha diariamente 60 minutos, e a outra, 0 minuto, a média desses dois valores será de 30 minutos diários, no entanto, o conjunto de dados não é homogêneo.

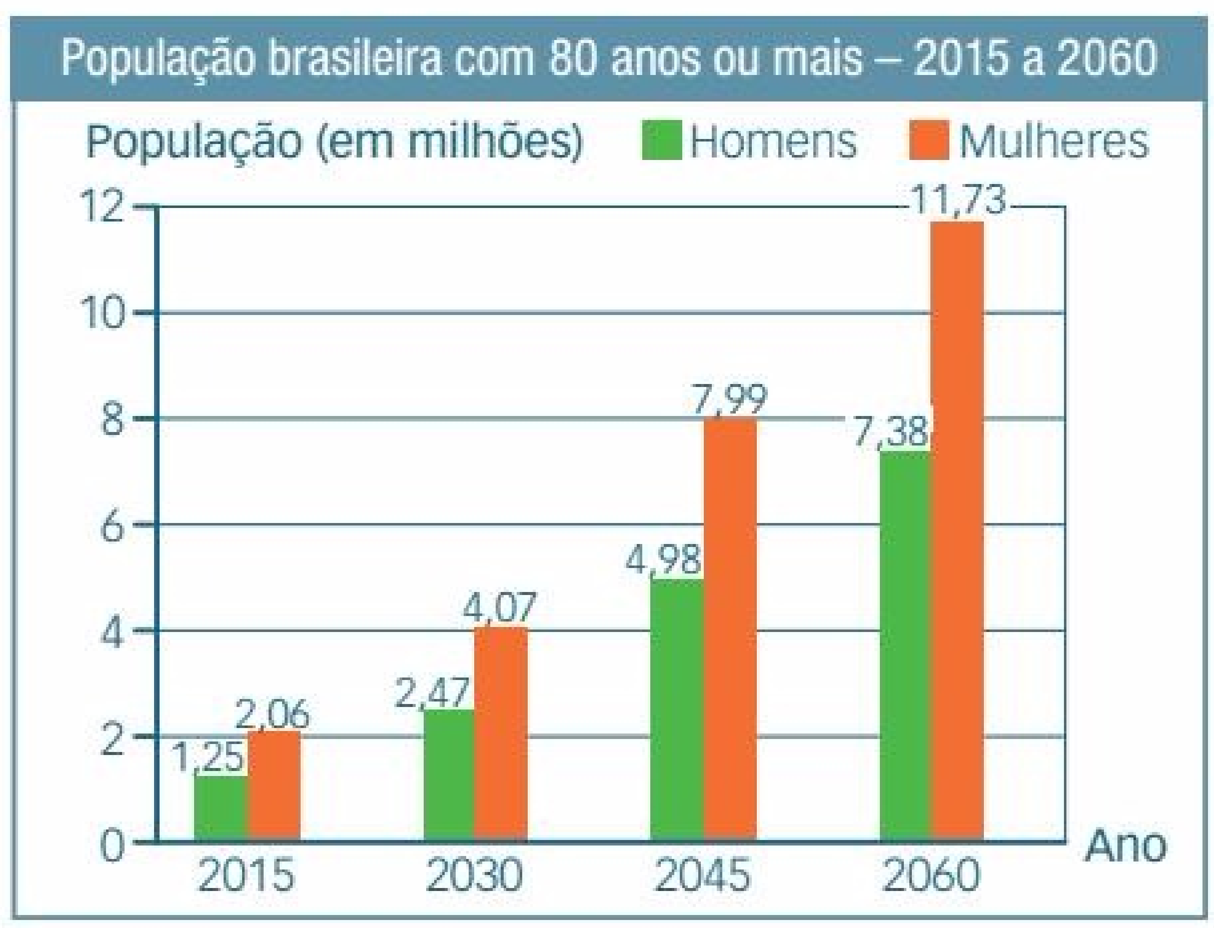
b) Sabendo os valores dos desvios padrão dos grupos **A** e **B**, pode-se afirmar que o grupo **A** é mais homogêneo que o grupo **B**, pois os valores do grupo **A** estão menos dispersos em relação à média aritmética do que os do grupo **B**.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

20. O gráfico ao lado apresenta uma projeção da população brasileira com 80 anos ou mais de idade.

Nessa faixa etária, qual dos gêneros deve ter crescimento populacional mais homogêneo de acordo com essa projeção? masculino



Acervo da Editora

Fonte: IBGE. Disponível em: <www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/projecao_da_populacao/2013/default_tab.shtm>. Acesso em: 27 jan. 2016.

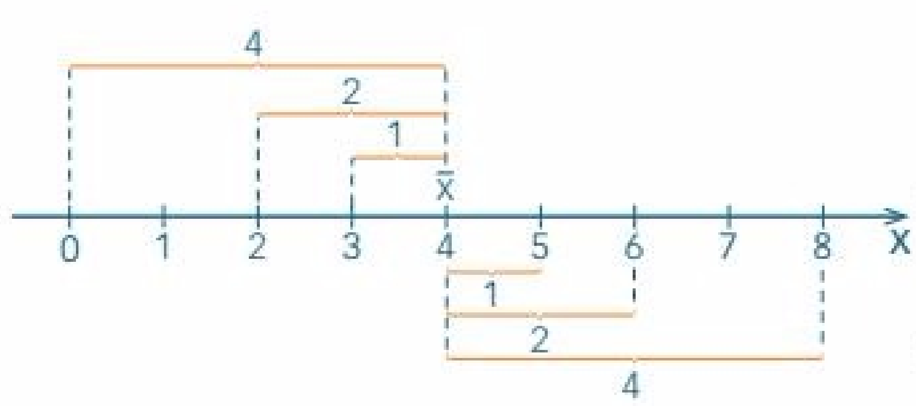
PRODUÇÃO TEXTUAL

Professor(a): Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

21. Escreva os procedimentos que você utilizaria para calcular o desvio médio (Dm) de um conjunto de dados utilizando o modo Estatística de uma calculadora científica. Resposta pessoal.

22. Dado o conjunto $A = \{2, 3, 5, 8, 6, 4, 0\}$, o que pode representar o esquema a seguir em relação a esse conjunto?

Resposta esperada: Os desvios, em valores absolutos, em relação à média aritmética.



Acervo da Editora

23. (Enem) Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para a classificação no concurso o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. A seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

Pontos dos candidatos no concurso

	Marco	Paulo
Matemática	14	8
Português	15	19
Conhecimentos Gerais	16	18
Média	15	15
Mediana	15	18
Desvio padrão	0,32	4,97

Fonte: Resultados do concurso.

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é: b

a) Marco, pois a média e a mediana são iguais.

b) Marco, pois obteve menor desvio padrão.

c) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.

d) Paulo, pois obteve maior mediana.

e) Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

24. Observe a tabela.

Altura dos jogadores da seleção brasileira de basquete masculino – Jogos Olímpicos de Londres 2012

Atleta	Altura
Alex Garcia	1,92 m
Caio Torres	2,11 m
Guilherme	2,04 m
Larry Taylor	1,85 m
Leandrinho	1,92 m
Marcelo Huertas	1,91 m
Marcelo Machado	2,00 m
Marquinhos	2,07 m
Nenê	2,11 m
Raulzinho	1,85 m
Tiago Splitter	2,11 m
Varejão	2,11 m

Fonte: Confederação Brasileira de *Basketball*. Disponível em: <www.cbb.com.br>. Acesso em: 30 mar. 2016.

a) Qual a altura média desses jogadores? 2,00 m

b) Calcule o valor aproximado de desvio padrão da altura dos jogadores. 0,1 m

25. (UFBA) Uma caixa contém quatro varetas azuis, medindo 1 cm, 3 cm, 4 cm e 7 cm, e três varetas verdes, medindo 2 cm, 3 cm e 4 cm.

Com relação às varetas da caixa, é correto afirmar: d; e; f

a) A média aritmética e a mediana dos comprimentos das varetas são iguais.

b) O desvio padrão dos comprimentos das varetas verdes é igual a $\frac{2}{3}$.

c) Sorteando-se uma vareta, a probabilidade de ser azul ou ter comprimento maior que 4 cm é igual a $\frac{5}{7}$.

d) Sorteando-se duas varetas, sem reposição, a probabilidade de serem da mesma cor é igual a $\frac{3}{7}$.

e) Existem exatamente nove maneiras distintas de escolher três varetas que formem um triângulo isósceles.

f) Existem exatamente 5040 maneiras distintas de se enfileirar as varetas.

Nessa atividade, há mais de uma afirmação correta.

26. Em certo *rally* de regularidade realizado em 2016, o tempo médio estabelecido para completar cada uma das cinco etapas era de 3h.

MediaPictures.pl/ Shutterstock.com

Veículo em um *rally* de regularidade.

Tempo por etapa dos três primeiros colocados no *rally* (2016)

Acervo da Editora

Fonte: Direção do *rally*.

Determine a ordem de colocação desses pilotos, sabendo que o critério era a regularidade durante as etapas. piloto A, piloto C e piloto B

27. (UFPR) Considere as seguintes medidas descritivas das notas finais dos alunos de três turmas:

Turma	Número de alunos	Média	Desvio padrão
A	15	6,0	1,31
B	15	6,0	3,51
C	14	6,0	2,61

Com base nesses dados, considere as seguintes afirmativas:

1) Apesar de as médias serem iguais nas três turmas, as notas dos alunos da turma **B** foram as que se apresentaram mais heterogêneas.

2) As três turmas tiveram a mesma média, mas com variação diferente.

3) As notas da turma **A** se apresentaram mais dispersas em torno da média.

Determine a alternativa correta. d

a) Somente a afirmativa **3** é verdadeira.

b) Somente a afirmativa **2** é verdadeira.

c) Somente as afirmativas **2** e **3** são verdadeiras.

d) Somente as afirmativas **1** e **2** são verdadeiras.

e) Somente as afirmativas **1** e **3** são verdadeiras.

28. O gráfico ao lado apresenta o número de pontos obtidos por três jogadores de basquete, nos 4 primeiros jogos de certo campeonato.

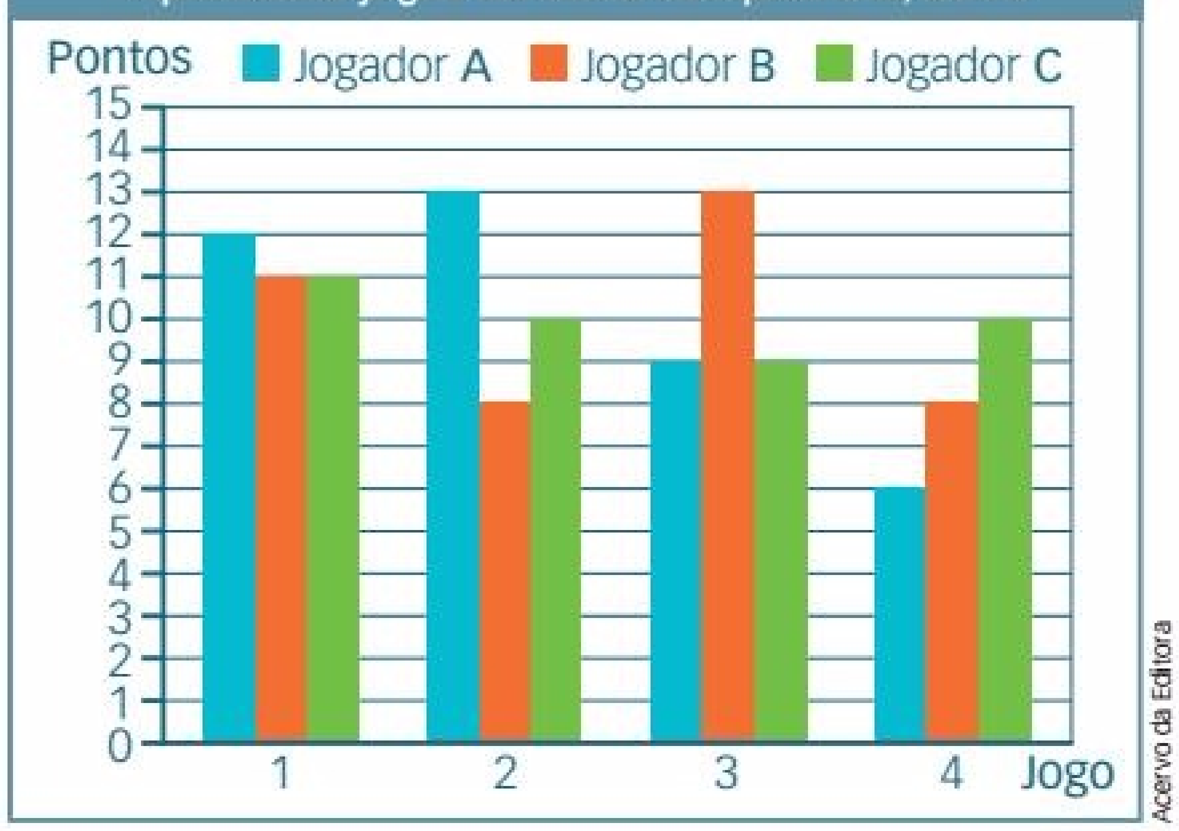
Calcule:

a) a média aritmética de pontos por jogo, para cada jogador, nos 4 primeiros jogos.
jogador A: 10 pontos; jogador B: 10 pontos; jogador C: 10 pontos

b) o desvio padrão dos pontos, por cada jogador, nos 4 primeiros jogos. jogador A: aproximadamente 2,74 pontos; jogador B: aproximadamente 2,12 pontos; jogador C: aproximadamente 0,71 pontos

Qual dos jogadores apresentou uma pontuação mais regular?
jogador C

Número de pontos marcados por jogo, nos 4 primeiros jogos de certo campeonato, 2016



Fonte: Planilha do técnico.

Coeficiente de variação

Observe ao lado a massa e a altura de alguns bebês nascidos no mesmo dia.

Nessa amostra, a média aritmética das massas é $3{,}51\overline{6}$ kg, e o desvio padrão é aproximadamente 0,353. Já a média aritmética das alturas é $51{,}1\overline{6}$ cm, e o desvio padrão é aproximadamente 1,344. Para verificar qual dessas medidas (massa ou altura) é a mais homogênea, não podemos comparar os desvios padrão, pois são variáveis distintas.

Nesse caso, temos ainda que as variáveis possuem unidades de medidas diferentes.

Massa e altura de alguns bebês nascidos no mesmo dia

Massa (kg)	Altura (cm)
3,2	50
3,0	49
3,7	52
4,1	53
3,5	51
3,6	52

Fonte: Maternidade da cidade.

Para fazer essa comparação, podemos utilizar o coeficiente de variação (CV), que é dado por:

$$CV = \frac{Dp}{\overline{x}} \cdot 100$$

Nesse caso, o coeficiente de variação das massas é $CV_m = \frac{0{,}353}{3{,}516} \cdot 100 \simeq 10\%$, e o das alturas é $CV_a = \frac{1{,}344}{51{,}16} \cdot 100 \simeq 3\%$. Como $CV_a < CV_m$, os dados correspondentes às alturas variam menos em relação à média do que os dados referentes às massas, ou seja, são mais homogêneos.

Agora, resolva.

a) Os alunos de uma turma obtiveram $\overline{x} = 6{,}5$ com $Dp = 1{,}7$ em relação às notas obtidas em uma prova escrita e $\overline{x} = 3{,}3$ com $Dp = 0{,}9$ em relação às notas de um trabalho. Em qual das avaliações as notas foram mais homogêneas? na prova escrita

> Note que "nota obtida na prova escrita" e "nota obtida no trabalho" são variáveis distintas, mas possuem mesma unidade de medida.

b) O quadro mostra o índice de massa corpórea (IMC) e os batimentos cardíacos por minuto (bpm) de algumas pessoas, após realizar uma atividade física.

IMC	25	19	27	23	22	20	21	24
bpm	143	127	149	131	129	135	137	132

O conjunto de dados de qual variável é o mais homogêneo? bpm

Professor(a): Veja na Assessoria Pedagógica orientações para o trabalho com a seção Sobre a unidade.

Sobre a unidade | Anote as respostas no caderno.

1. O que você estudou nesta unidade? Você considera que atingiu os objetivos propostos no início da unidade? Se não, o que fará para atingir os objetivos?
2. Qual dos conteúdos estudados nesta unidade você considera que deve estudar um pouco mais?
3. Se um amigo pedisse a você que explicasse o que são medidas de dispersão, que explicação você daria?
4. Ao calcular o desvio padrão de um conjunto de dados obtém-se $Dp = 0$. Qual é o significado desse resultado? O que podemos afirmar a respeito dos elementos desse conjunto?
5. Converse com seus colegas a respeito de situações em que os conteúdos estudados nesta unidade estão presentes. Se necessário, realizem uma pesquisa.

Ideias matemáticas

O esquema a seguir relaciona algumas das ideias matemáticas estudadas nesta unidade. Converse com seus colegas e professor(a) a respeito de como essas e outras ideias abordadas na unidade estão relacionadas. Em seguida, faça um texto descrevendo as relações existentes entre elas e dê sugestões para complementar e melhorar a organização desse esquema.

1. Resposta esperada: População e amostra, variáveis estatísticas, estatística e probabilidade, medidas de tendência central, medidas de tendência central para dados agrupados em classes, medidas de dispersão. Resposta pessoal. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. Resposta esperada: São medidas que indicam o quão próximos ou afastados os valores de um conjunto de dados estão em relação à média aritmética desse mesmo conjunto.

4. Possível resposta: Esse resultado indica que, em relação à média aritmética, não há dispersão dos elementos do conjunto de dados; Podemos afirmar que os valores desse conjunto de dados são todos iguais.

5. Possível resposta: Os conteúdos desta unidade estão presentes em situações como: a média do IDH de um grupo de países; uma pesquisa realizada em uma escola; o desvio padrão do consumo de sódio dos membros de uma família.

Professor(a): Converse com os alunos de maneira que retomem os objetivos propostos no início da unidade e verifique, por exemplo, se compreenderam o conceito de população e amostra. Auxilie-os a listar as principais ideias matemáticas presentes na unidade e a buscar relações entre elas, como a relação entre as medidas de tendência central e as medidas de dispersão. Com base nas ideias listadas e relações estabelecidas, oriente-os a propor aprimoramentos ao esquema apresentado, inserindo novas ideias e indicando suas possíveis relações. Peça aos alunos que registrem essas discussões, compondo uma síntese da unidade.

> Revise os conteúdos estudados nesta unidade e anote os pontos que julgar mais relevantes. Com isso, organize um resumo para auxiliá-lo(a) na compreensão dos conteúdos.

A lei dos grandes números

De maneira resumida, a lei dos grandes números, desenvolvida por Jacob Bernoulli (1654-1705), diz que, ao repetir um evento aleatório um número arbitrariamente grande de vezes, a frequência relativa de cada ocorrência se aproxima da probabilidade matemática dessa ocorrência. Essa lei se aplica, por exemplo, ao evento "lançamento de uma moeda". Observe como podemos simular isso no Calc.

CALC

Planilha eletrônica que faz parte do pacote LibreOffice, desenvolvido pela The Document Foundation, uma organização sem fins lucrativos.

Licença: Pode ser copiado, distribuído, modificado e reestruturado, além de poder utilizá-lo para criar obras derivadas.

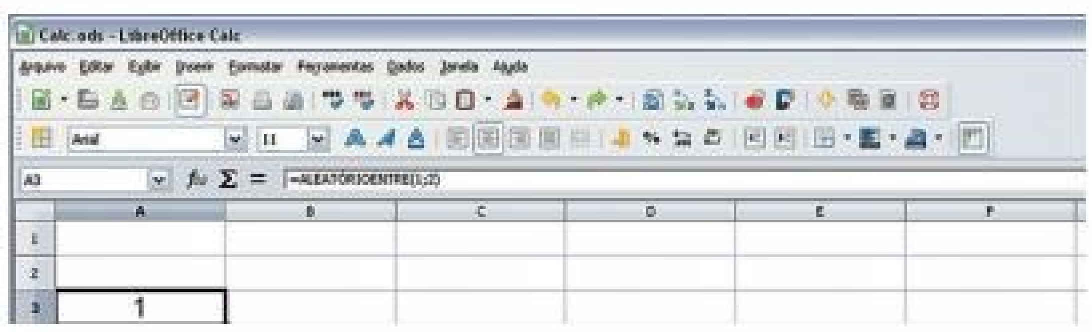
Onde obter: <http://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/>

Versão utilizada: 3.5.3.2

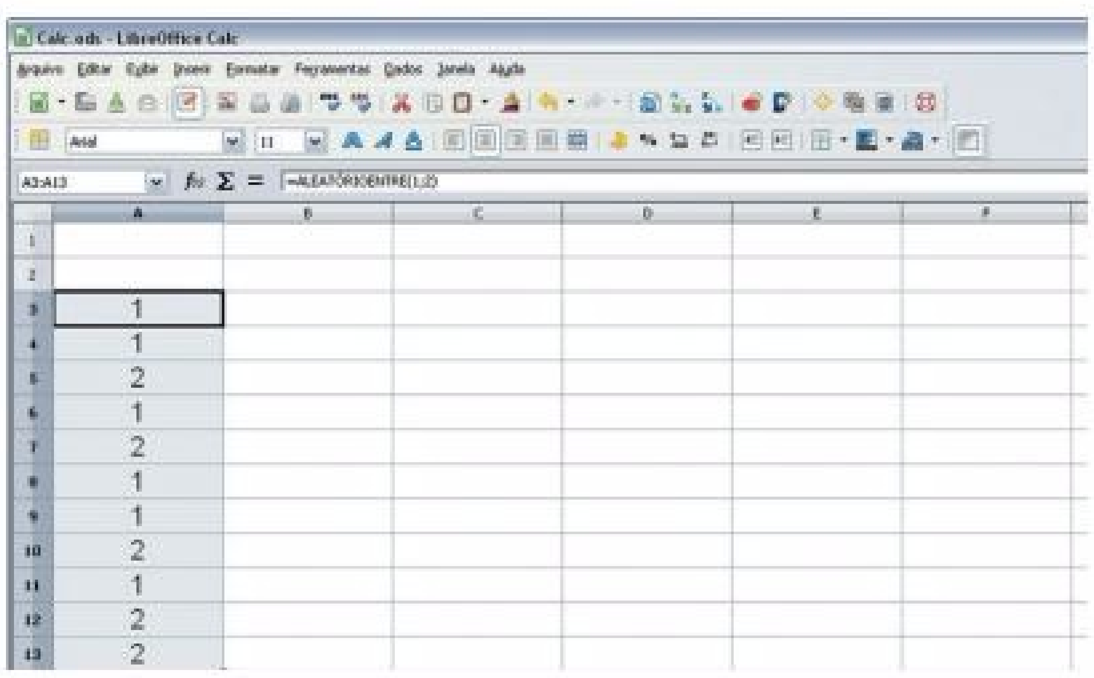
Passo 1: No meu **Editar**, clique em **Selecionar tudo**. No menu **Formatar**, clique em **Células**. Na aba **Alinhamento**, selecione **Centro** para o campo **Horizontal** e **No meio** para o campo **Vertical**. Marque a opção **Quebra automática de texto**. Na aba **Fonte**, escolha **11** no campo **Tamanho**. Por fim, clique em **OK**.

Passo 2: Ainda com todas as células selecionadas, no menu **Formatar**, clique em **Coluna** e, em seguida, em **Largura ideal**. Na janela **Largura ideal da coluna**, preencha o campo **Adicionar** com **0,5 cm** e clique em **OK**. No menu **Formatar**, clique em **Linha** e, em seguida, em **Altura ideal**. Na janela **Altura ideal da linha**, preencha o campo **Adicionar** com **0 cm** e clique em **OK**.

Passo 3: Na célula A3, digite o comando **=ALEATÓRIOENTRE(1;2)** e pressione *Enter*. Esse comando vai preencher automaticamente a célula com o número 1 ou 2, aleatoriamente.

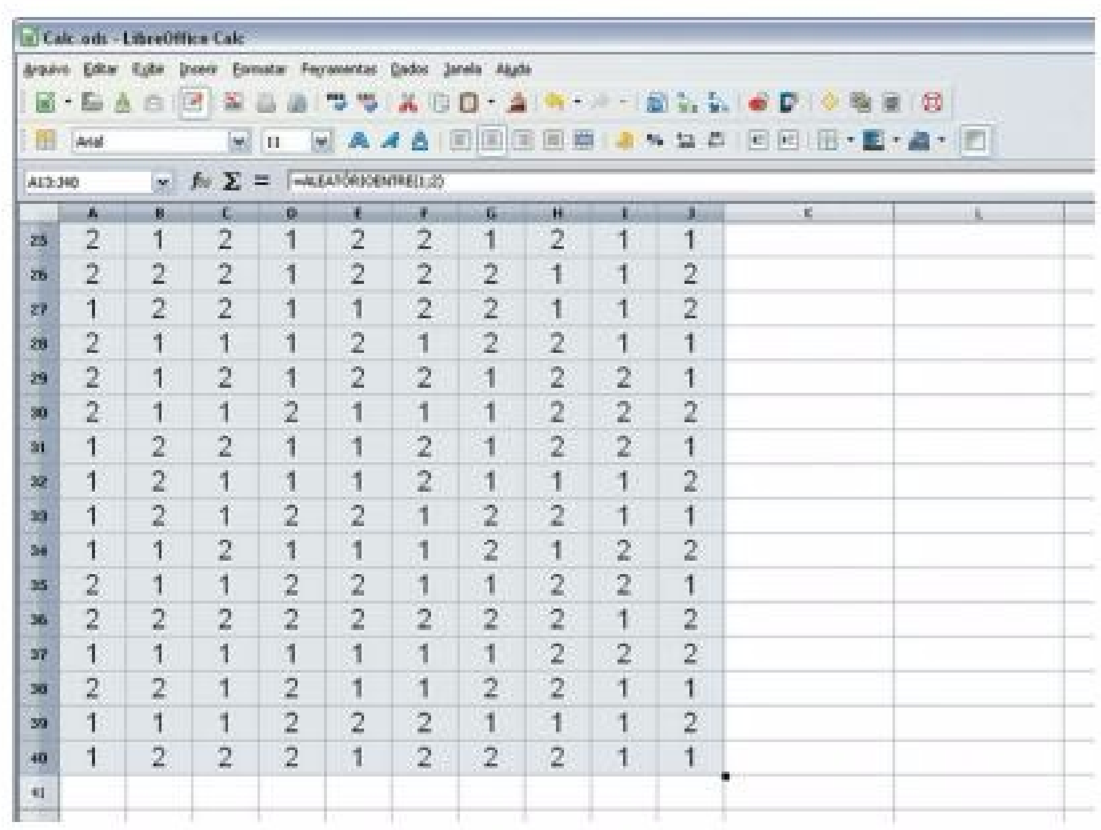


Passo 4: Com a célula A3 selecionada, clique e arraste a **Alça de preenchimento** (quadradinho preto no canto inferior direito) até a célula A13.



Passo 5: Repita o procedimento do passo **4** selecionando agora a célula A13 e arrastando até a célula J13.

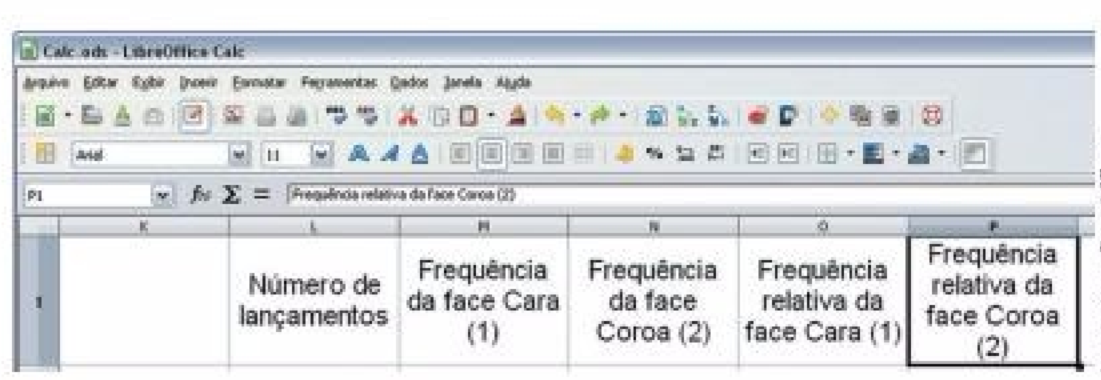
Passo 6: Com as células de A13 até J13 selecionadas, clique e arraste a **Alça de preenchimento** até a célula J40.



Em um lançamento de uma moeda, se considerarmos **1** como sendo a ocorrência da face cara e **2** a ocorrência da face coroa, nos passos anteriores foi realizado o evento "lançamento de uma moeda". Vamos agora contabilizar a ocorrência de cada face.

Passo 7: Em cada célula citada a seguir, digite o texto correspondente.

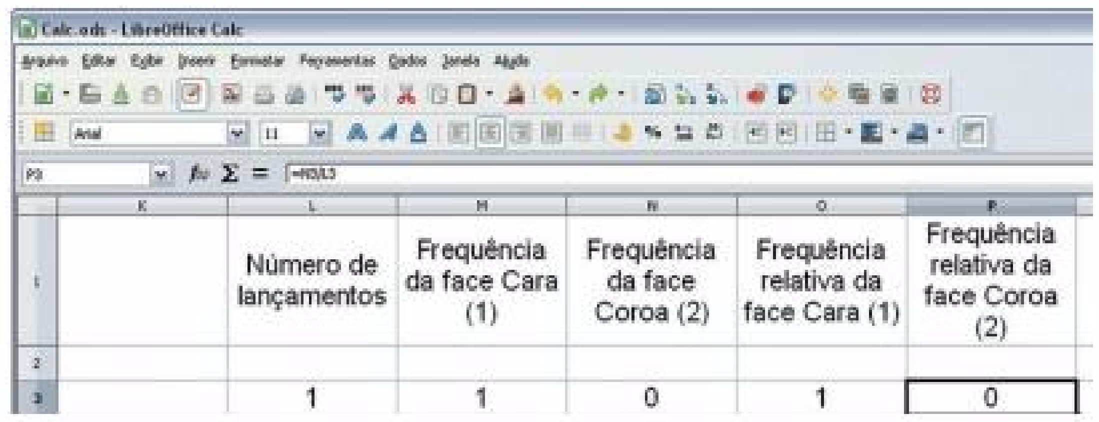
- **L1: Número de lançamentos**
- **M1: Frequência da face cara (1)**
- **N1: Frequência da face coroa (2)**
- **O1: Frequência relativa da face cara (1)**
- **P1: Frequência relativa da face coroa (2)**



Imagens: LibreOffice Calc v. 3.5.3.2. Por The Document Foundation

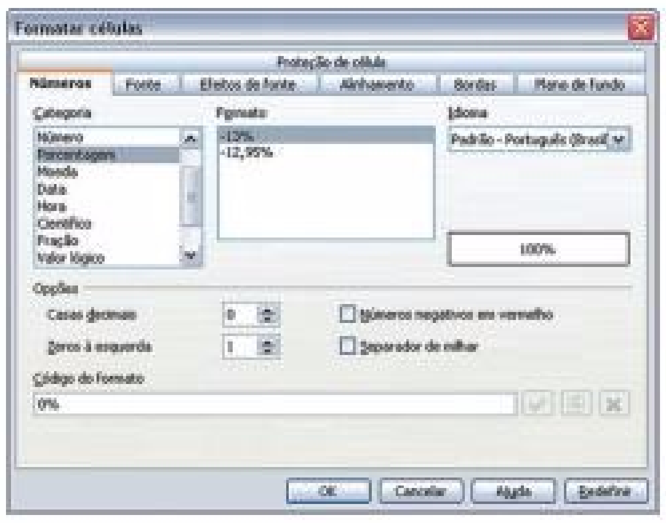
Passo 8: Em cada célula citada a seguir, digite o comando correspondente e, em seguida, pressione ***Enter***:

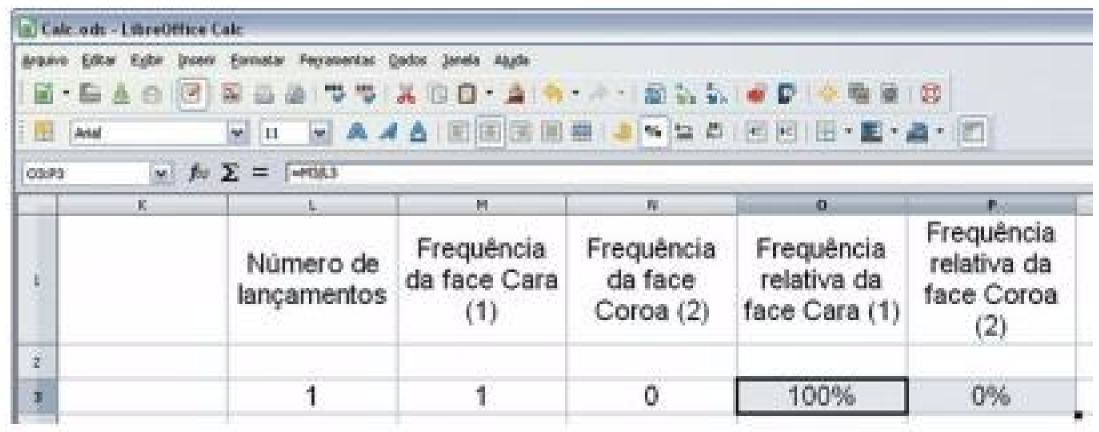
- L3: =SOMA(M3:N3)
- M3: =CONT.SE(A3:J3;1)+M2
- N3: =CONT.SE(A3:J3;2)+N2
- O3: =M3/L3
- P3: =N3/L3



	L	M	N	O	P
1	Número de lançamentos	Frequência da face Cara (1)	Frequência da face Coroa (2)	Frequência relativa da face Cara (1)	Frequência relativa da face Coroa (2)
2					
3	1	1	0	1	0

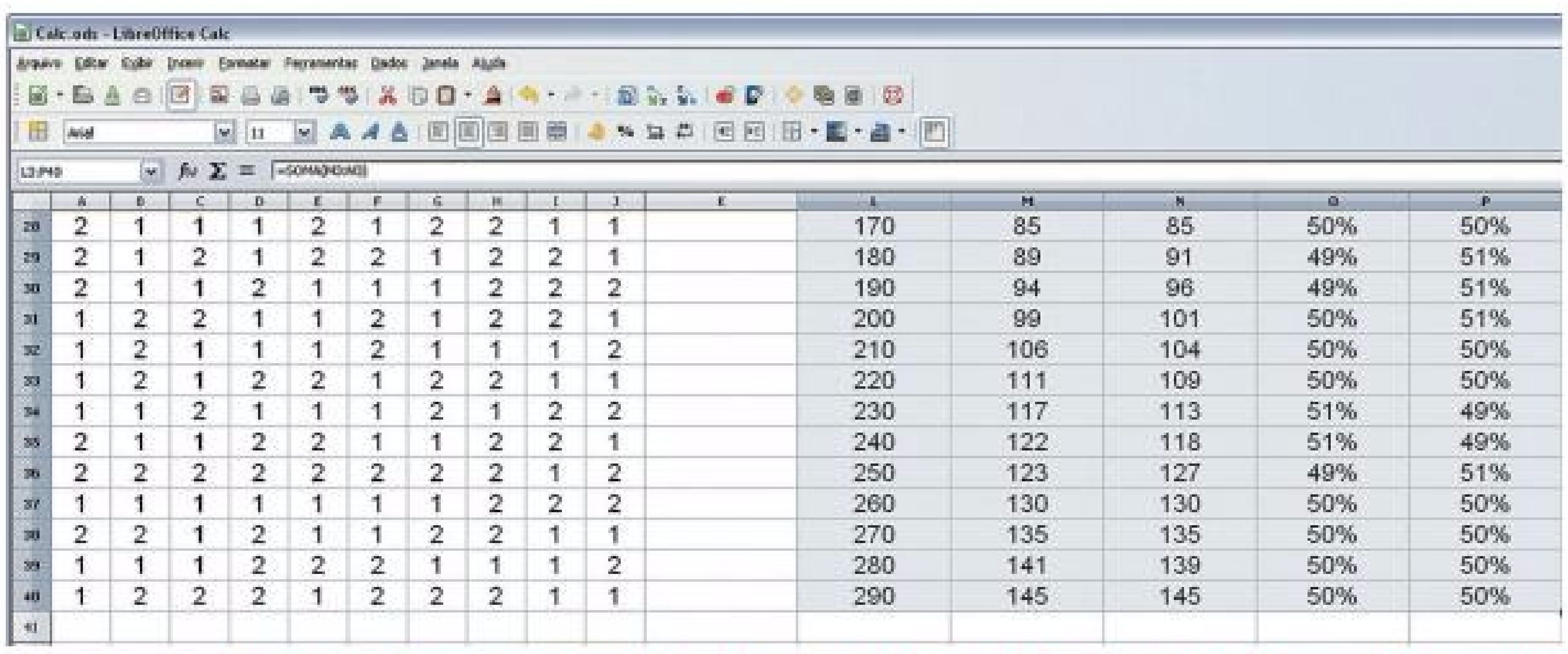
Passo 9: Selecione as células O3 e P3. No menu **Formatar**, clique em **Células**. Na aba **Números**, selecione **Porcentagem** no campo **Categoria** e digite **0** no campo **Casas decimais**. Por fim, clique em **OK**.





	L	M	N	O	P
1	Número de lançamentos	Frequência da face Cara (1)	Frequência da face Coroa (2)	Frequência relativa da face Cara (1)	Frequência relativa da face Coroa (2)
2					
3	1	1	0	100%	0%

Passo 10: Selecione as células de L3 até P3 e, em seguida, clique e arraste a **Alça de preenchimento** até a célula P40.

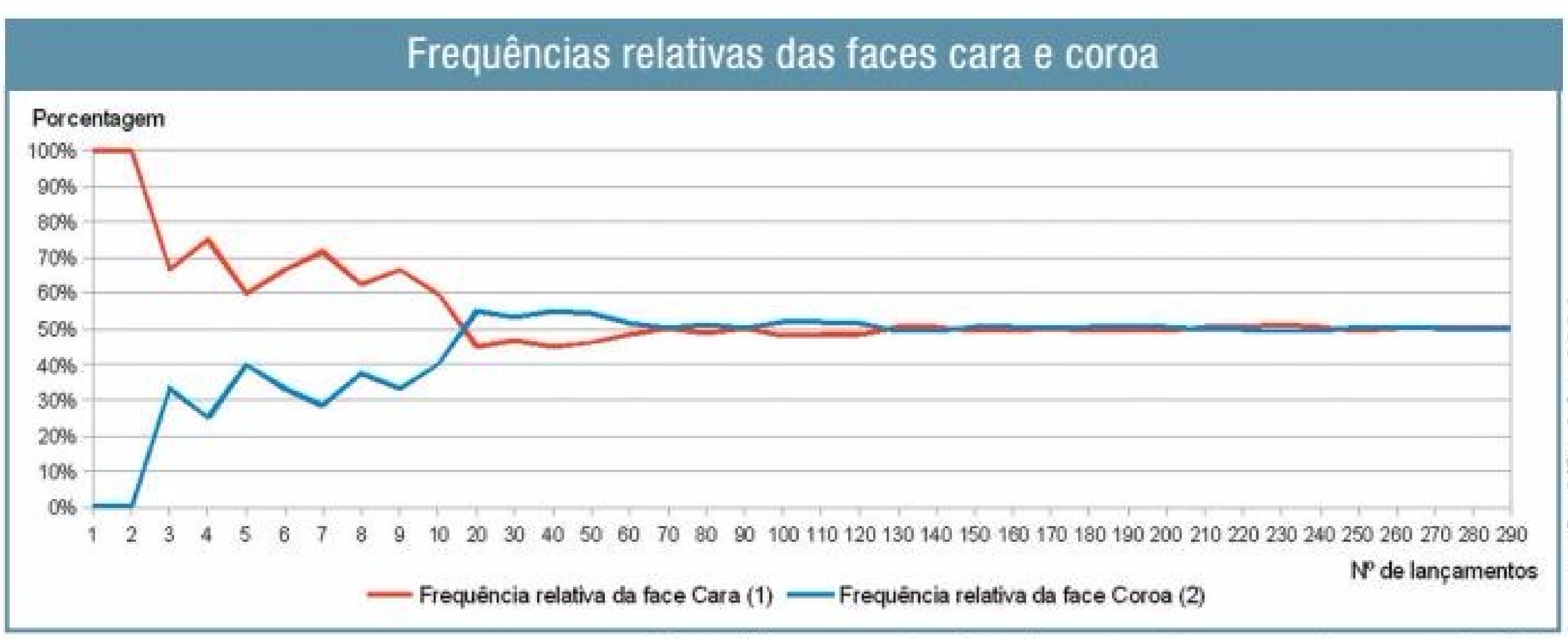


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
28	2	1	1	1	2	1	2	2	1	1		170	85	85	50%	50%
29	2	1	2	1	2	2	1	2	2	1		180	89	91	49%	51%
30	2	1	1	2	1	1	1	2	2	2		190	94	96	49%	51%
31	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1		200	99	101	50%	51%
32	1	2	1	1	1	2	1	1	1	2		210	106	104	50%	50%
33	1	2	1	2	2	1	2	2	1	1		220	111	109	50%	50%
34	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2		230	117	113	51%	49%
35	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1		240	122	118	51%	49%
36	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2		250	123	127	49%	51%
37	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2		260	130	130	50%	50%
38	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1		270	135	135	50%	50%
39	1	1	1	2	2	2	1	1	1	2		280	141	139	50%	50%
40	1	2	2	2	1	2	2	2	1	1		290	145	145	50%	50%
41																

Observe as linhas de 1 a 40 da tabela que foi criada. Note que, à medida que o número de lançamentos cresce, as frequências relativas das ocorrências de cara ou coroa se aproximam da probabilidade esperada para cada uma, que é 50%.

Professor(a): Caso queira que os alunos visualizem um número maior de lançamentos, diga a eles que selecionem as células de A40 até P40 e, em seguida, cliquem e arrastem a **Alça de preenchimento** até a linha desejada.

Representando graficamente essas frequências, percebemos que elas se aproximam de 50%, como esperado.



Imagens: LibreOffice Calc v. 3.5.3.2. Por The Document Foundation

Fonte: Números gerados aleatoriamente pelo programa de computador Calc.

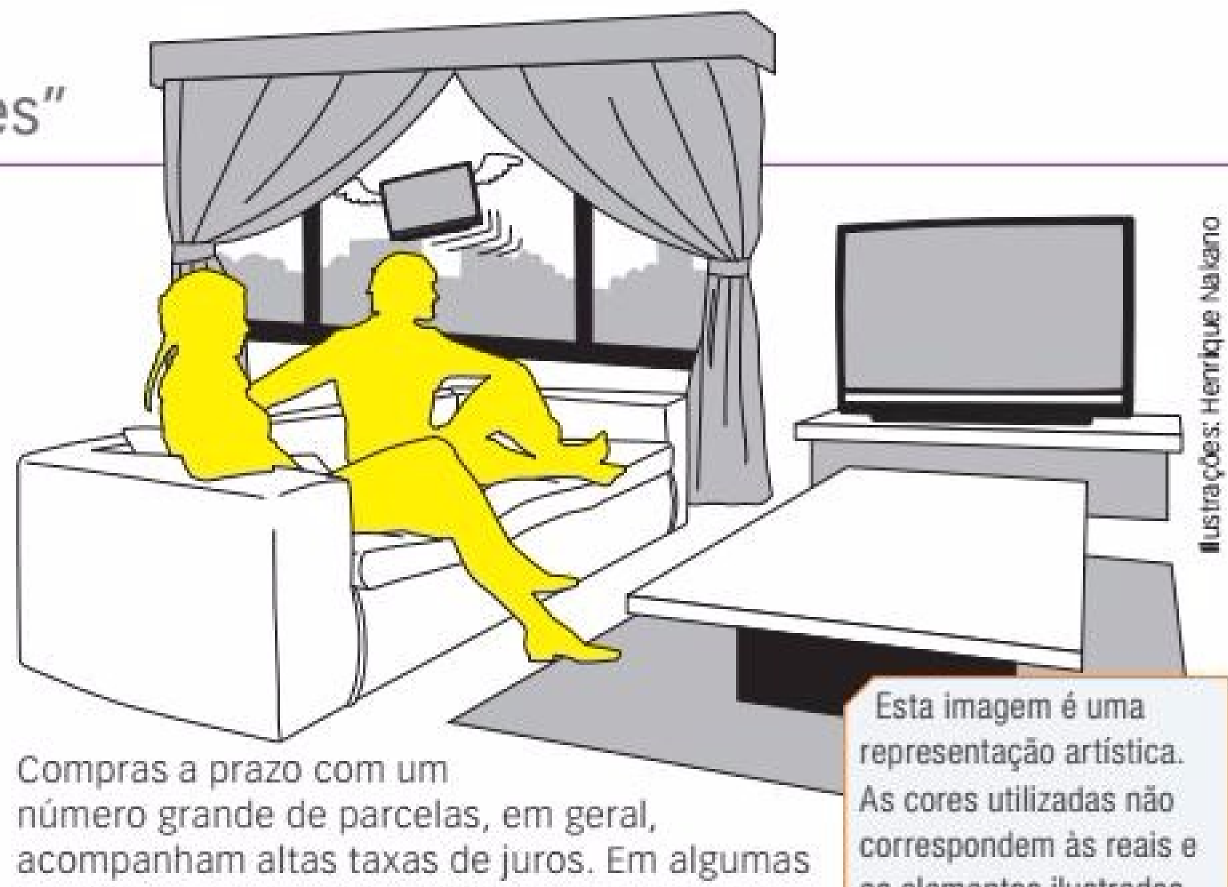
1. Utilizando os procedimentos apresentados, construa uma tabela de frequências simulando o lançamento de uma moeda. Os valores obtidos na tabela que você construiu foram idênticos aos apresentados? Por quê? Resposta esperada: Não, pois o evento "lançamento de uma moeda" é aleatório.
   Professor(a): Se achar conveniente, solicite aos alunos que comparem os resultados com os dos colegas.
2. Na tabela que você construiu, as frequências relativas se aproximaram de 50%? Resposta esperada: Sim.

8 MATEMÁTICA FINANCEIRA

Lightpoet/ Dreamstime.com

Cuidado com os juros e as “superpromoções”

O comércio utiliza diversas táticas para atrair o consumidor e convencê-lo a comprar. Às vezes são anunciadas promoções tentadoras que, na verdade, têm o objetivo de chamar a atenção para a compra de outros itens.



Compras a prazo com um número grande de parcelas, em geral, acompanham altas taxas de juros. Em algumas ocasiões, pode ocorrer de o consumidor pagar 2 vezes o valor da compra à vista.

Ilustrações: Henrique Nakano

Esta imagem é uma representação artística. As cores utilizadas não correspondem às reais e os elementos ilustrados não estão proporcionais.

Professor(a): Proponha aos alunos algumas questões relacionadas a esse tema. Algumas sugestões são:
a) Qual a primeira atitude a ser tomada para poupar dinheiro? (Resposta: Gastar menos do que ganha.)
b) Você conhece outro tipo de investimento além da poupança? Qual? (Possível resposta: Sim. Mercado de ações.)
c) Que porcentagem das famílias brasileiras apresenta pelo menos alguma dificuldade em chegar ao fim do mês com o rendimento monetário familiar? (Resposta: 75,2%)
d) Cite algumas situações de seu dia a dia em que seja possível poupar dinheiro. (Resposta pessoal.)

Mesmo em grandes promoções, o consumidor deve realizar pesquisas de preços e evitar fazer compras por impulso. Uma dessas grandes promoções é a *Black Friday*, que se refere ao dia em que o comércio faz os maiores descontos no varejo. Essa tradição começou nos Estados Unidos, e depois do sucesso de vendas nesse evento ela vem sendo adotada pelos varejistas de outros países, como o Brasil.

Responsabilidade financeira

Você quer muito comprar aquele telefone celular de última geração, mas não tem dinheiro suficiente? Saiba que esse "dilema" não afeta somente você, mas muitas pessoas em relação aos mais variados bens de consumo.

São frequentes as ocasiões em que o comprador não possui todo o dinheiro necessário para comprar um produto à vista. Segundo especialistas, parece fazer parte da cultura do brasileiro poupar pouco dinheiro, e até mesmo gastar mais do que ganha, assumindo dívidas. Em geral, é sempre melhor negócio comprar à vista e escapar dos juros. Mas o que fazer para juntar o montante necessário para uma compra à vista?

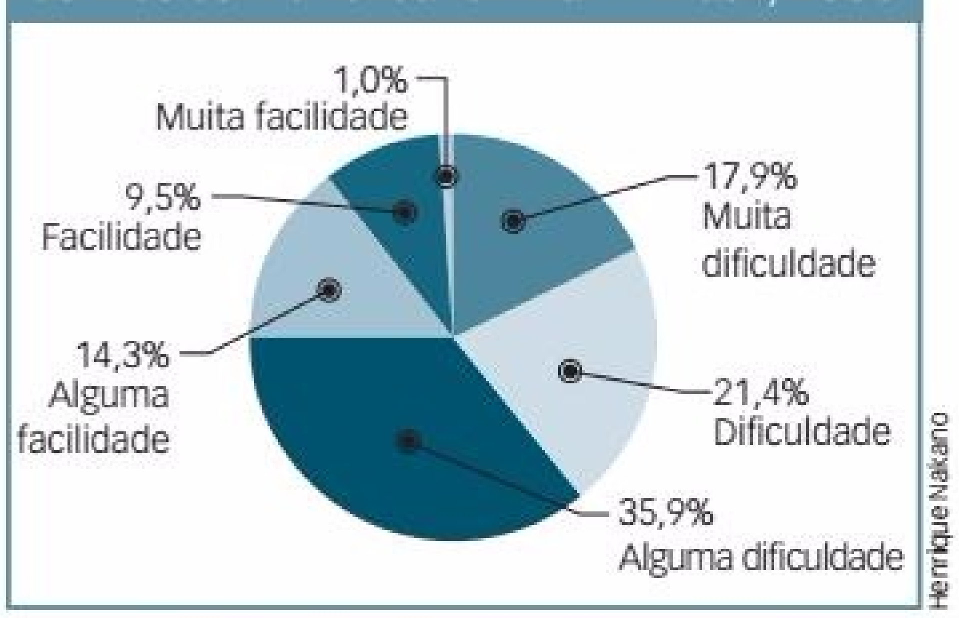
Primeiramente, gaste menos do que ganha e avalie a real necessidade da aquisição do bem de interesse. Mas, se realmente houver urgência na compra, fique atento à taxa de juros e faça os cálculos para que as prestações caibam no seu bolso. Porém, se a compra puder esperar um pouco, você pode poupar seu dinheiro para futuramente negociar um bom desconto em uma compra à vista.

Poupar seu dinheiro não significa guardá-lo em um cofrinho ou juntar moedas em casa. Isso tira o dinheiro de circulação, e a quantia que você está poupando não sofre rendimentos. Procure um investimento seguro para o seu capital. A caderneta de poupança é uma boa opção nesse caso. Apesar de ela render pouco, o baixo risco de perda a torna vantajosa. Para investidores mais experientes, existem outros investimentos que podem ter maior retorno, como o mercado de ações. Entretanto, os riscos são maiores nesse caso.

Com um pouco de paciência e disciplina você poderá juntar o dinheiro para comprar o bem à vista e ficar livre de dívidas, e também possuir uma reserva no caso de emergência.

Professor(a): Diga aos alunos que, no caso da caderneta de poupança, o Fundo Garantidor de Crédito (FGC) permite a devolução de até R$ 250 000,00 para compensar o valor investido na poupança em caso de falência do banco.

Grau de dificuldade para chegar ao fim do mês com a renda familiar – Brasil, 2008

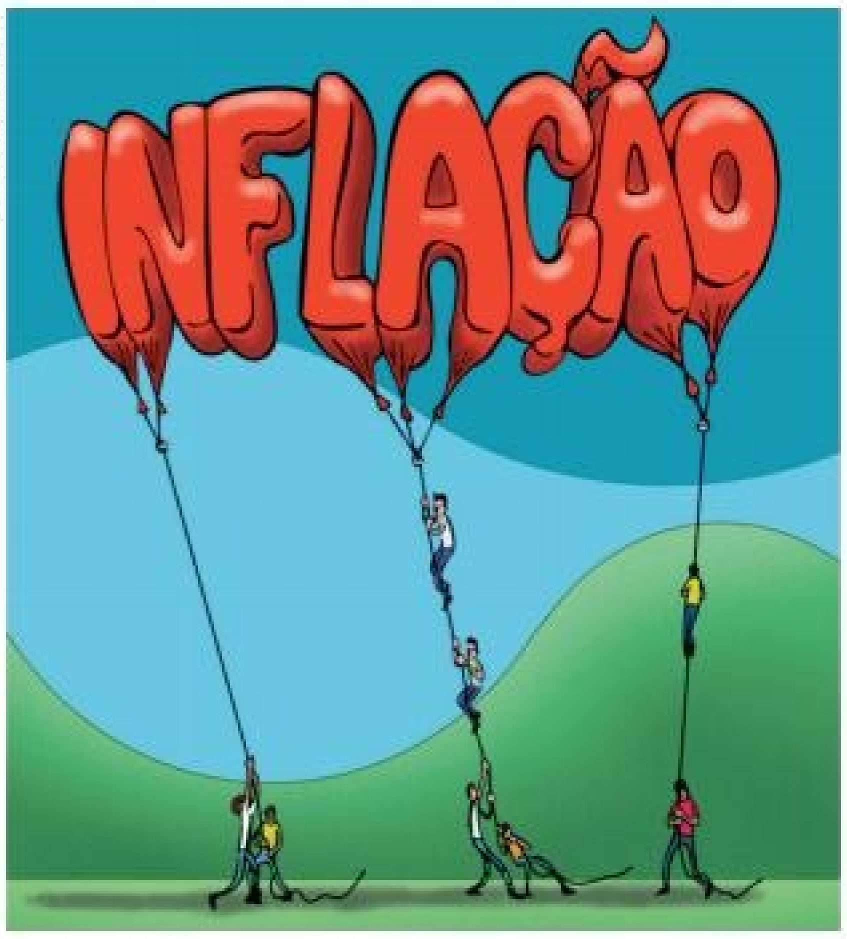


Fonte: IBGE. Disponível em: <www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/condicaodevida/pof/2008_2009>. Acesso em: 22 jan. 2016.

Nesta unidade você vai...

- reconhecer situações do cotidiano que envolvem Matemática financeira.
- compreender o conceito de porcentagem e resolver problemas envolvendo acréscimos e descontos.
- resolver problemas envolvendo juros simples e juros compostos.
- perceber a relação entre juros e o conceito de função.
- estudar o conceito de amortização.

Professor(a): Explique aos alunos que estes são os principais objetivos a serem atingidos por eles nesta unidade. Retome esses objetivos no decorrer dos estudos da unidade e, se julgar necessário, estabeleça também novos objetivos. Na Assessoria Pedagógica encontram-se os objetivos gerais deste nível de ensino, assim como os objetivos específicos desta unidade.



Carlos Nascimento

A maioria dos problemas envolvendo **Matemática financeira** são questões que relacionam o valor do dinheiro no decorrer do tempo. Nessa relação, sabemos que o valor do dinheiro muda com o passar do tempo, ou seja, os preços das mercadorias e serviços tendem a sofrer variações, aumentando ou diminuindo segundo uma série de fatores. Um dos fatores associado a essas alterações nos preços é a inflação, que está relacionada ao "poder de compra" de nossa moeda.

Nessa unidade, vamos estudar como a relação entre o valor do dinheiro no decorrer do tempo é aplicada a diversas situações envolvendo compra e venda de produtos ou serviços, cálculo de prestações, rendimentos de aplicações, entre outros. Esse ramo da Matemática ainda nos auxilia, por exemplo, a analisar vantagens e desvantagens em situações de compra à vista ou a prazo.

Antes, porém, vamos retomar alguns conceitos de porcentagem.

Revendo porcentagem

Em anos anteriores, estudamos que a porcentagem é uma razão que corresponde à parte considerada de um total de 100 partes. Por exemplo:

- 15% corresponde a $\frac{15}{100}$ ou 0,15;
- 40% corresponde a $\frac{40}{100}$ ou 0,4;
- 0,1% corresponde a $\frac{0,1}{100}$ ou 0,001.

Observe a notícia a seguir.

Mercado sobe estimativa de inflação para 2016 e vê retração maior do PIB

Os economistas do mercado financeiro elevaram novamente sua estimativa de inflação para este ano e passaram a prever uma contração da economia brasileira. Os dados são do relatório Focus, divulgado nesta segunda-feira (15) pelo Banco Central, e que reúne dados pesquisados junto a mais de 100 instituições financeiras.

Para 2016, a expectativa para o Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), a inflação oficial do país, subiu de 7,56% para 7,61%, o sétimo aumento seguido. Com isso permanece acima do teto de 6,5% do sistema de metas do ano que vem e bem distante do objetivo central de 4,5%.

[...]

Para o PIB de 2016, o mercado financeiro passou a prever uma contração de 3,33% na semana passada, contra uma retração de 3,21% estimada na semana anterior. Foi a quarta piora seguida do indicador.

Como o mercado segue estimando "encolhimento" do PIB em 2015, se a previsão se concretizar, será a primeira vez que o país registra dois anos seguidos de contração na economia. [...]

MARTELLO, Alexandre. Mercado sobe estimativa de inflação para 2016 e vê retração maior do PIB. G1, Brasília, 15 fev. 2016. Disponível em: <http://g1.globo.com/economia/mercados/noticia/2016/02/mercado-sobe-estimativa-de-inflacao-para-2016-e-ve-retracao-maior-do-pib.html>. Acesso em: 29 fev. 2016.

Represente na forma decimal as demais porcentagens da reportagem.
0,0756; 0,0761; 0,065; 0,0321

A porcentagem 4,5% no texto da reportagem corresponde a $\frac{4,5}{100}$ ou 0,045. Do mesmo modo, por exemplo, a porcentagem 3,33% corresponde a $\frac{3,33}{100}$ ou 0,0333.

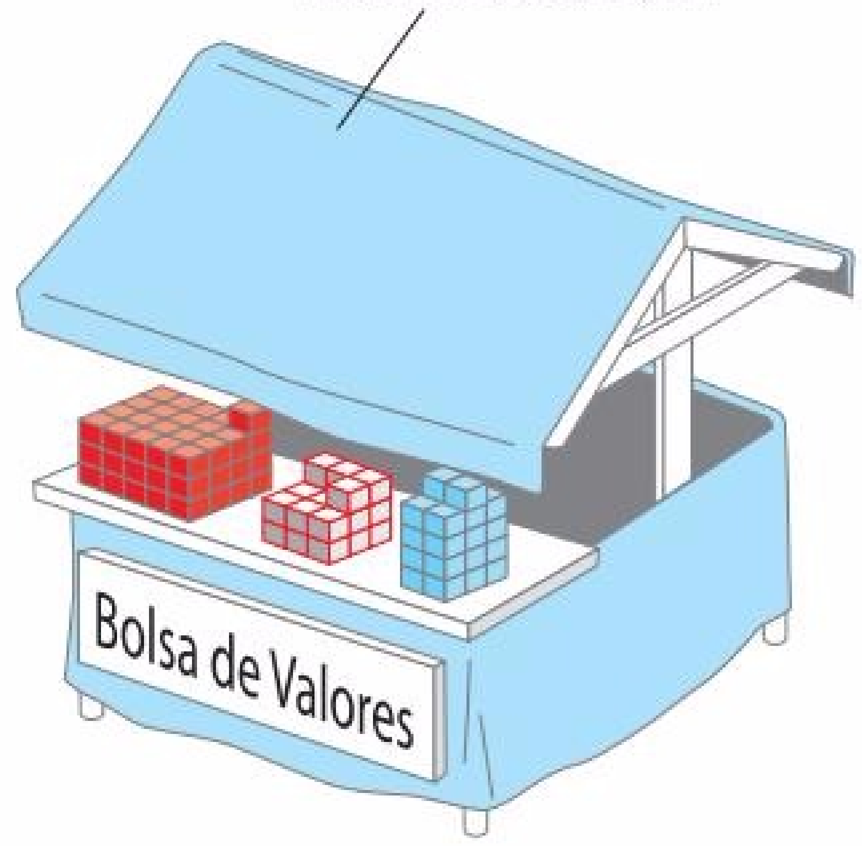
COMO FUNCIONA A Bolsa de Valores

Existem diversos tipos de investimentos financeiros, cada um com seu risco e rentabilidade. Dentre eles está o mercado de ações, no qual é possível perceber a real relação entre o valor do dinheiro e o tempo, pois uma ação comprada em um instante pode gerar lucros ou prejuízos apenas alguns instantes depois. Observe como ocorre um investimento na bolsa de valores.

Ação: título que representa uma pequena parcela do capital de uma empresa.

Abertura de capital: em busca de investimentos, uma empresa realiza a abertura de seu capital, disponibilizando ações para serem compradas por investidores.

Bolsa de valores: espécie de "feira" onde se centralizam as operações de compra e venda das ações.



Investidor: aquele que compra ações de uma empresa, tornando-se um sócio dela (acionista), podendo lucrar, basicamente, com a venda das ações, se ocorrerem valorizações, ou com os dividendos, que é a distribuição do lucro da empresa entre seus acionistas, proporcional à quantidade de ações que possuir.

A corretora pode disponibilizar ao investidor a plataforma *home broker*.

Home broker: plataforma eletrônica na qual o investidor pode acompanhar as movimentações das ações e enviar ordens *on-line* de compra e venda de ações.

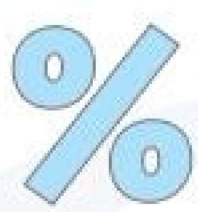
Seemitch/ Dreamstime.com

Corretora de ações: corretora subordinada à CVM (Comissão de Valores Mobiliários), que o investidor deve procurar para comprar ações na bolsa de valores. Ela vai orientá-lo, de acordo com seu perfil, quanto às melhores opções e valor a ser investido, quanto ao melhor tempo de investimento e tipos de ações, além de informar-lhe a história da empresa e outros aspectos importantes.

As imagens apresentadas são representações artísticas. As cores utilizadas não correspondem às reais e os elementos ilustrados não estão proporcionais.

Jogo de estratégia

Investir em ações significa correr riscos em razão das flutuações nos preços, exigindo pesquisas e estratégias na tentativa de prever alguns comportamentos econômicos. Veja algumas ocorrências que podem causar o sobe e desce na bolsa de valores.



Inflação: oscilações nos preços dos produtos afastam investidores da bolsa de valores.

Mudanças nas taxas de juros: outros investimentos, como a poupança, podem se tornar mais interessantes aos investidores, provocando a queda da bolsa. O contrário também pode ocorrer.

Planos econômicos: mudança de moeda, novos impostos e troca de ministros podem incentivar ou inibir o consumo, movimentando assim o mercado de ações.

Relações internacionais: importações, exportações, redução de impostos, incentivos fiscais e crise em outros países provocam oscilações na bolsa de valores.

Investimentos estrangeiros: privatizações podem significar melhor administração de uma empresa. Porém, atrair novas empresas estrangeiras pode desvalorizar empresas nacionais.

Ilustrações: Henrique Nakano

Atividades resolvidas

R1. (Enem) Os dados do gráfico seguinte foram gerados a partir de dados colhidos no conjunto de seis regiões metropolitanas pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese).

Supondo que o total de pessoas pesquisadas na região metropolitana de Porto Alegre equivale a 250 000, o número de desempregados em março de 2010, nessa região, foi de:

a) 24 500
b) 25 000
c) 220 500
d) 223 000
e) 227 500

Fonte: *G1* – O portal de notícias da Globo. Disponível em: <www.g1.globo.com>. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Resolução

O gráfico trata da taxa de desemprego, logo os valores apresentados são porcentagens. Analisando o gráfico, podemos verificar que, em março de 2010, a taxa de desemprego na região metropolitana de Porto Alegre era de 9,8%. Calculando 9,8% de 250 000, temos:

$$\underbrace{\frac{9{,}8}{100}\cdot 250\,000}_{9{,}8\%\text{ de }250\,000}=0{,}098\cdot 250\,000=24\,500$$

Portanto, em março de 2010, havia 24 500 pessoas desempregadas na região metropolitana de Porto Alegre. A alternativa correta é **a**.

R2. Estima-se que no ano de 2020 a população brasileira com idade na faixa dos 15 aos 19 anos será de aproximadamente 17,031 milhões de jovens. Para o ano de 2050, a projeção é que essa população decresça 36,5% com relação a 2020. Qual será a população aproximada de jovens com essa faixa de idade no ano de 2050?

Resolução

Vamos calcular a população estimada para o ano de 2050 de três maneiras distintas.

1ª maneira: calculamos a quanto corresponde 36,5% da população de 2020 e subtraímos de 17,031.

$$17{,}031-\frac{36{,}5}{100}\cdot 17{,}031=$$
$$=17{,}031-0{,}365\cdot 17{,}031\simeq 17{,}031-6{,}216=10{,}815$$

2ª maneira: considerando a população dos jovens na faixa dos 15 aos 19 anos em 2020 como 100%, após o decréscimo de 36,5%, a população de 2050 será $\underbrace{63{,}5\%}_{100\%-36{,}5\%}$ da população de 2020. Logo:

$$\underbrace{\frac{63{,}5}{100}\cdot 17{,}031}_{63{,}5\%\text{ de }17{,}031}=0{,}635\cdot 17{,}031\simeq 10{,}815$$

3ª maneira: utilizando regra de três simples. Considerando 17,031 como 100% e x como $\underbrace{63{,}5\%}_{100\%-36{,}5\%}$, temos que:

$$\frac{100\%}{63{,}5\%}=\frac{17{,}031}{x}\Rightarrow 100x=63{,}5\cdot 17{,}031\Rightarrow x\simeq 10{,}815$$

Portanto, a projeção da população brasileira na faixa dos 15 aos 19 anos para o ano de 2050 é de aproximadamente 10,815 milhões de habitantes.

R3. O salário mensal de Maria era R$ 1 500,00. Em reconhecimento ao seu comprometimento com o trabalho e alto rendimento nas tarefas que efetua, recebeu um aumento de 15%. Qual passou a ser o salário de Maria após o aumento?

Resolução

Considerando o antigo salário de Maria como 100%, após o aumento o valor será $100\%+15\%=115\%$. Logo:

$$\underbrace{\frac{115}{100}\cdot 1\,500}_{115\%\text{ de }1\,500}=1{,}15\cdot 1\,500=1\,725$$

Portanto, o salário de Maria após o aumento passou a ser R$ 1 725,00.

Assim como na atividade anterior, existem também várias maneiras de resolver essa atividade.

R4. Em certa turma, 40% são homens e 60% são mulheres. Sabendo que 35% dos homens e 30% das mulheres moram na zona leste da cidade, que porcentagem de pessoas dessa turma mora na zona leste?

Resolução

Inicialmente, vamos calcular a porcentagem da turma correspondente:

- aos homens que moram na zona leste:

$$\underbrace{\frac{35}{100}\cdot\frac{40}{100}}_{35\%\text{ de }40\%}=\frac{1\,400}{10\,000}=\frac{14}{100}=14\%$$

- às mulheres que moram na zona leste:

$$\underbrace{\frac{30}{100}\cdot\frac{60}{100}}_{30\%\text{ de }60\%}=\frac{1\,800}{10\,000}=\frac{18}{100}=18\%$$

Adicionando esses percentuais, segue que $14\%+18\%=32\%$.

Portanto, 32% das pessoas dessa turma moram na zona leste.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Leia algumas informações divulgadas pelo IBGE referentes ao IPCA de novembro de 2015.

> O Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo - IPCA do mês de novembro apresentou variação de 1,01% e ficou 0,19 ponto percentual (p.p.) acima da taxa de 0,82% registrada em outubro. [...]
>
> Na perspectiva dos últimos doze meses, o índice está em 10,48%, resultado superior aos 9,93% dos doze meses imediatamente anteriores.
>
> [...]

IBGE. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/precos/inpc_ipca/ipca-inpc_201511comentarios.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2016.

a) De acordo com os dados do texto, durante o mês de novembro os preços subiram em média 1,01%. Considerando que uma compra feita no último dia de outubro tenha custado R$ 300,00, qual deveria ser o custo dessa mesma compra no final do mês de novembro? R$ 303,03

b) Considerando o índice acumulado em 12 meses, estime o preço de um produto em novembro de 2015 dado que em novembro de 2014 ele custava:

- R$ 300,00 R$ 331,44
- R$ 150,00 R$ 165,72
- R$ 5 000,00 R$ 5 524,00

2. Com o objetivo de liquidar seu estoque para a chegada de uma nova coleção, uma loja de roupas está oferecendo descontos de 10% sobre os preços de etiqueta de todas as peças. Se o cliente levar mais uma peça, ele recebe mais um desconto, de 8% por peça, também sobre o preço de etiqueta.

a) Determine o preço de etiqueta de certo modelo de camiseta, sabendo que duas peças, com o mesmo valor, saíram por:

- R$ 57,40 R$ 35,00
- R$ 73,80 R$ 45,00
- R$ 114,80 R$ 70,00

b) Calcule o preço pago por duas peças de roupa cujo preço de etiqueta era de:

- R$ 40,00 R$ 65,60
- R$ 85,00 R$ 139,40
- R$ 110,00 R$ 180,40

3. O PIB representa a soma das riquezas geradas pelo conjunto dos mais diversos setores no país. Ele mede a diferença entre o custo de se produzir e o que se obtém como fruto dessa produção, o chamado valor agregado. O indicador é composto de itens como consumo das famílias e despesas do governo, informações sobre as exportações e importações, além dos investimentos (formação bruta de capital fixo).

Observe na tabela o PIB de alguns países.

PIB de alguns países em 2013 e 2014 (em dólares)

País	PIB em 2013	PIB em 2014
Brasil	2 465 773 850 935	2 416 635 506 076
China	9 490 602 600 148	10 354 831 729 340
Grécia	239 509 850 570	235 574 074 998
Romênia	191 587 217 164	199 043 652 215
Sudão	66 480 141 187	73 814 947 341

Fonte: World Bank Group. Disponível em: <http://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.MKTP.CD?order=wbapi_data_value_2014%20wbapi_data_value%20wbapi_data_value-last&sort=asc&display=default>. Acesso em: 22 jan. 2016.

a) Em quais países o PIB aumentou em 2014 em relação a 2013? E em quais ele diminuiu? Sudão, China e Romênia; Grécia e Brasil

b) Qual foi a porcentagem da variação do PIB em 2014 em relação a 2013 em cada um desses países? Brasil: aproximadamente 2,03%; China: aproximadamente 9,1%; Grécia: aproximadamente −1,64%; Romênia: aproximadamente 3,89%; Sudão: aproximadamente 11,03%

4. (UFPB) Marquinhos trabalha em uma loja de informática e o seu salário é composto por uma parte fixa de R$ 400,00, acrescida de 5% sobre as vendas mensais por ele efetuadas. No mês em que o total de vendas de Marquinhos for R$ 40 000,00, seu salário será: a

a) R$ 2 400,00

b) R$ 2 000,00

c) R$ 1 440,00

d) R$ 600,00

e) R$ 400,00

EM GRUPO

5. A Previdência Social é o seguro destinado ao cidadão brasileiro, por meio de contribuição social. É uma instituição pública que tem como objetivo reconhecer e conceder direitos aos seus segurados. A renda transferida pela Previdência Social é utilizada para substituir a renda do trabalhador contribuinte, quando ele perde a capacidade de trabalho, seja por doença, invalidez, idade avançada, morte e desemprego involuntário, ou mesmo a maternidade e a reclusão. [...]

Ministério da Previdência Social. Disponível em: <http://www.mtps.gov.br/institucional>. Acesso em: 22 jan. 2016.

Os valores das contribuições variam conforme a seguinte tabela, válida a partir de 1º de janeiro de 2015.

Tabela de contribuição dos segurados empregado, empregado doméstico e trabalhador avulso, para pagamento de remuneração – 2015

Salário de contribuição (R$)	Alíquota para fins de recolhimento ao INSS (%)
Até 1 399,12	8
De 1 399,13 até 2 331,88	9
De 2 331,89 até 4 663,75	11

Fonte: Ministério da Previdência Social. Disponível em: <http://www.mtps.gov.br/servicos-do-ministerio/servicos-da-previdencia/mais-procurados/calculo-de-guia-da-previdencia-social-carne/tabela-de-contribuicao-mensal>. Acesso em: 22 jan. 2016.

Professor(a): Se julgar necessário, diga aos alunos que, para salários acima de R$ 4663,75, são cobrados 11% apenas sobre o valor de R$ 4663,75, o restante é livre de contribuição.

a) Qual o valor a ser recolhido mensalmente ao INSS no caso de um salário de:

- R$ 800,00? R$ 64,00
- R$ 1 950,00? R$ 175,50
- R$ 1 100,00? R$ 88,00
- R$ 3 900,00? R$ 429,00

b) Qual o salário de uma pessoa cujo valor da contribuição é:

- R$ 49,76? R$ 622,00
- R$ 162,00? R$ 1800,00
- R$ 108,00? R$ 1350,00
- R$ 341,00? R$ 3100,00

c) É possível que o valor da contribuição de uma pessoa seja exatamente R$ 100,00? Justifique. Sim, pois 8% de R$ 1250,00 corresponde a R$ 100,00.

6. O valor do salário-mínimo, estabelecido no Brasil em 1º de maio de 1940, desde então vem sofrendo reajustes visando acompanhar ou superar o valor da inflação no país. No dia 1º de janeiro de 2016 o salário-mínimo passou a ser de R$ 880,00, valor que antes era de R$ 788,00. Qual foi a taxa de acréscimo sobre o valor do salário-mínimo nesse reajuste? aproximadamente 11,67%

7. Rafael foi avisado, pela diretoria do curso de inglês que frequenta, que a próxima mensalidade do curso sofrerá um aumento de R$ 18,70, passando a custar R$ 238,70.

a) Qual o valor da mensalidade antes do aumento? R$ 220,00

b) Qual foi a taxa de acréscimo sobre o valor da mensalidade? 8,5%

8. (UFMG) Francisco resolveu comprar um pacote de viagem que custava R$ 4 200,00, já incluídos R$ 120,00 correspondentes a taxas de embarque em aeroportos.

Na agência de viagens, ele foi informado de que, se fizesse o pagamento à vista, teria um desconto de 10%, exceto no valor referente às taxas de embarque, sobre o qual não haveria nenhum desconto.

Decidiu, pois, pagar o pacote de viagem à vista.

Então, é correto afirmar que Francisco pagou por esse pacote de viagem: c

a) R$ 3 672,00
b) R$ 3 780,00
c) R$ 3 792,00
d) R$ 3 900,00

DESAFIO

9. Para determinada classe de trabalhadores, o reajuste salarial anual ocorre sempre no mês de julho. Em determinado ano, o sindicato dessa classe exigiu um aumento de 9,5%, e uma empresa resolveu bonificar seus funcionários oferecendo, além do aumento exigido pelo sindicato, um aumento de 2,5%. Sabendo que o salário de determinado funcionário dessa empresa passou a ser de R$ 1 887,00, responda:

a) Qual foi, em reais, o total de reajuste no salário desse funcionário? R$ 202,18

b) De quanto era o salário desse funcionário antes do reajuste? R$ 1684,82

10. O valor do aluguel de determinado imóvel é R$ 850,00. Quando pago em atraso, esse valor sofre um acréscimo de 7%, referente a multas. Qual o valor do aluguel se for pago com atraso? R$ 909,50

11. O quadro apresenta os valores de duas simulações de empréstimo.

Banco	Valor do empréstimo	Quantidade de parcelas	Valor da parcela
A	R$ 15 000,00	12	R$ 1 500,00
B	R$ 12 000,00	15	R$ 1 200,00

Em cada banco, qual porcentagem do valor do empréstimo terá sido paga a mais ao final do pagamento de todas as parcelas? banco A: 20%; banco B: 50%

12. Uma agência de viagens está vendendo um pacote em 12 prestações iguais de R$ 150,00. Caso o cliente resolva pagar o pacote à vista, a agência oferece um desconto de 12% sobre o valor a prazo.

a) Qual o preço total do pacote de viagens para pagamento a prazo? R$ 1800,00

b) Determine o preço desse pacote para pagamento à vista. R$ 1584,00

13. Determine o valor de cada prestação de um produto cujo preço à vista é R$ 2 500,00 e que sofre um acréscimo de 13% em compras a prazo, dado que ele será parcelado em 8 vezes iguais. R$ 353,13

ACRÉSCIMOS E DESCONTOS SUCESSIVOS

Estudamos anteriormente algumas situações que envolvem acréscimos e descontos simples. Vamos estudar agora algumas situações em que os acréscimos e descontos incidem **sucessivamente** sobre um capital.

Acréscimos sucessivos

Analise a seguinte situação.

> Um comerciante de roupas aplicou um acréscimo de 5% sobre os preços das mercadorias, com a intenção de conter possíveis prejuízos. No mês seguinte, sobre o valor já reajustado, ele se viu obrigado a aplicar um novo acréscimo, agora de 8%. Qual o preço de uma camiseta que, antes do primeiro reajuste, custava R$ 45,00?

Note que, nesse caso, o primeiro acréscimo incide sobre o preço inicial; sobre o resultado, incide o segundo acréscimo. Quando isso acontece, dizemos então que são **acréscimos sucessivos**. Podemos calcular o preço dessa camiseta após os acréscimos sucessivos da seguinte maneira:

- **1º acréscimo**: considerando o preço da camiseta como 100%. Após o 1º acréscimo de 5%, o valor será 100% + 5% = 105%. Logo:

$$\underbrace{\frac{105}{100}\cdot 45}_{105\%\text{ de }45}=1{,}05\cdot 45=47{,}25\rightarrow \text{R\$ } 47{,}25$$

- **2º acréscimo**: agora, consideramos o preço da mercadoria com o 1º acréscimo como 100%. Após o 2º acréscimo de 8%, o valor será 100% + 8% = 108%. Logo:

$$\underbrace{\frac{108}{100}\cdot 47{,}25}_{108\%\text{ de }47{,}25}=1{,}08\cdot 47{,}25=51{,}03\rightarrow \boxed{\text{R\$ } 51{,}03}$$

Portanto, o preço da camiseta após os acréscimos sucessivos é R$ 51,03.

É importante perceber que, nesse caso, não podemos simplesmente adicionar 5% e 8% e considerar um único acréscimo de 13% sobre o valor de R$ 45,00, pois daria R$ 50,85. Para obter uma única porcentagem equivalente aos acréscimos de 5% e 8%, devemos multiplicar os valores 1,05 e 1,08, chamados **fatores de atualização**.

$$1{,}05\cdot 1{,}08=1{,}134=\frac{113{,}4}{100}=\underbrace{113{,}4\%}_{100\%+13{,}4\%}$$

Assim, os acréscimos sucessivos de 5% e de 8% equivalem a um único acréscimo de 13,4%:

$$\underbrace{\frac{113{,}4}{100}\cdot 45}_{113{,}4\%\text{ de }45}=1{,}134\cdot 45=51{,}03\rightarrow \boxed{\text{R\$ } 51{,}03}$$

Note que o resultado é o mesmo que o calculado anteriormente.

> Se $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ são as taxas, na forma decimal, de n-ésimos **acréscimos sucessivos** que incidem sobre um valor inicial P_0, então os valores obtidos após cada acréscimo, indicados por $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, respectivamente, são dados por:
>
> $P_1=P_0\cdot(1+i_1)$
>
> $P_2=P_1\cdot(1+i_2)=P_0\cdot(1+i_1)\cdot(1+i_2)$
>
> $P_3=P_2\cdot(1+i_3)=P_0\cdot(1+i_1)\cdot(1+i_2)\cdot(1+i_3)$
>
> $\vdots$
>
> $P_n=P_{n-1}\cdot(1+i_n)=P_0\cdot(1+i_1)\cdot(1+i_2)\cdot(1+i_3)\cdot\ldots\cdot(1+i_n)$
>
> Portanto, o valor final $P=P_n$, obtido após todos os acréscimos sucessivos, é dado por:
>
> $$P=P_0\cdot(1+i_1)\cdot(1+i_2)\cdot(1+i_3)\cdot\ldots\cdot(1+i_n)$$

Na situação acima: $P=45\cdot(1+0{,}5)\cdot(1+0{,}8)=51{,}03\rightarrow$ R$ 51,03

O trabalho de um economista

Um profissional da área de economia pode atuar no setor público e no setor privado, com o objetivo de aumentar ou manter o rendimento econômico. Com base em estudos e análises histórica, política, econômica e social, o economista procura soluções para problemas financeiros, econômicos e administrativos, relacionados a diversos setores. Outras informações a respeito da atuação do economista podem ser obtidas no *site* do Conselho Federal de Economia, no endereço <www.cofecon.org.br>. Acesso em: 11 maio 2016.

Professor(a): Diga aos alunos que o economista realiza, por exemplo, estudos de viabilidade econômica de empreendimentos e planejamentos estratégicos na área social.

Na situação apresentada, podemos calcular o valor com os acréscimos da seguinte maneira:

$$\frac{105}{100}\cdot\frac{108}{100}\cdot 45=$$
$$=51{,}03\rightarrow \text{R\$ } 51{,}03$$

Descontos sucessivos

Agora, vamos analisar outra situação.

A taxa de depreciação de um veículo varia de acordo com o modelo, e tende a diminuir no decorrer dos anos.

> Um veículo novo custa R$ 40 000,00 e, a cada ano, sofre uma depreciação de 15% em relação a seu preço. Qual o valor do veículo ao final de dois anos de uso?

Note que, nesse caso, o primeiro desconto incide sobre o preço inicial; sobre o resultado, incide o segundo desconto. Quando isso acontece, dizemos que são **descontos sucessivos**.

Professor(a): Verifique se os alunos perceberam que a palavra desconto nesse exemplo está sendo utilizada para representar a depreciação no preço do veículo, e não uma redução no preço oferecido em uma negociação.

Podemos calcular o preço desse veículo após os descontos sucessivos da seguinte maneira:

- **1º desconto**: considerando o preço do veículo como 100%. Com o 1º desconto de 15%, o valor será 100% – 15% = 85%. Logo:

$$\underbrace{\frac{85}{100}\cdot 40\,000}_{85\%\text{ de }40\,000} = 0{,}85\cdot 40\,000 = 34\,000 \rightarrow \text{R\$ } 34\,000{,}00$$

- **2º desconto**: agora, consideramos o preço do veículo com o 1º desconto como 100%. Após o 2º desconto de 15%, o valor será 100% – 15% = 85%. Logo:

$$\underbrace{\frac{85}{100}\cdot 34\,000}_{85\%\text{ de }34\,000} = 0{,}85\cdot 34\,000 = 28\,900 \rightarrow \boxed{\text{R\$ } 28\,900{,}00}$$

Portanto, o preço do veículo ao final de dois anos de uso é R$ 28 900,00. É importante perceber que, nesse caso, não podemos simplesmente adicionar 15% e 15% e considerar um único desconto de 30% sobre o valor de R$ 40 000,00, pois daria R$ 28 000,00. Para obter uma única porcentagem equivalente aos dois descontos de 15%, devemos multiplicar os valores 0,85 e 0,85, também chamados **fatores de atualização**.

$$0{,}85\cdot 0{,}85 = 0{,}7225 = \frac{72{,}25}{100} = \underbrace{72{,}25\%}_{100\%-27{,}75\%}$$

Em outras palavras, dois descontos sucessivos de 15% equivalem a um único desconto de 27,75%:

$$\underbrace{\frac{72{,}25}{100}\cdot 40\,000}_{72{,}25\%\text{ de }40\,000} = 0{,}7225\cdot 40\,000 = 28\,900 \rightarrow \boxed{\text{R\$ } 28\,900{,}00}$$

Note que o resultado é o mesmo que o calculado anteriormente.

Na situação apresentada, podemos calcular o valor com os descontos da seguinte maneira:
$\frac{85}{100}\cdot\frac{85}{100}\cdot 40\,000 =$
$= 28\,900 \rightarrow$ R$ 28 900,00

> Se $i_1, i_2, i_3, ..., i_n$ são as taxas, na forma decimal, de n-ésimos **descontos sucessivos** que incidem sobre um valor inicial P_0, então os valores obtidos após cada desconto, indicados por $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$, respectivamente, são dados por:
>
> $P_1 = P_0\cdot(1-i_1)$
>
> $P_2 = P_1\cdot(1-i_2) = P_0\cdot(1-i_1)\cdot(1-i_2)$
>
> $P_3 = P_2\cdot(1-i_3) = P_0\cdot(1-i_1)\cdot(1-i_2)\cdot(1-i_3)$
>
> $\vdots$
>
> $P_n = P_{n-1}\cdot(1-i_n) = P_0\cdot(1-i_1)\cdot(1-i_2)\cdot(1-i_3)\cdot\ldots\cdot(1-i_n)$
>
> Portanto, o valor final $P = P_n$, obtido após todos os descontos sucessivos, é dado por:
>
> $$P = P_0\cdot(1-i_1)\cdot(1-i_2)\cdot(1-i_3)\cdot\ldots\cdot(1-i_n)$$

Na situação acima: $P = 40\,000\cdot(1-0{,}15)\cdot(1-0{,}15) = 28\,900 \rightarrow$ R$ 28 900,00

Atividades resolvidas

R5. O valor de um produto teve dois acréscimos no ano: um de 15% no mês de abril e outro de 8% no mês de outubro. Qual foi o acréscimo anual desse produto?

Resolução

Para obter o acréscimo único, correspondente ao acréscimo anual desse produto, multiplicamos os fatores de atualização.

$$\underbrace{115\%}_{100\%+15\%} \cdot \underbrace{108\%}_{100\%+8\%} = 1{,}15 \cdot 1{,}08 = 1{,}242 = \frac{124{,}2}{100} = \underbrace{124{,}2\%}_{100\%+24{,}2\%}$$

Portanto, o acréscimo anual desse produto foi de 24,2%.

R6. Certa loja de roupas está promovendo uma liquidação de verão, oferecendo desconto de 30% sobre o preço da etiqueta de qualquer peça da loja. Para as compras acima de duas peças, a loja fornece outro desconto sucessivo de 10%. Supondo que um cliente compre três peças de roupa nessa loja com valor da etiqueta de R$ 50,00, R$ 65,00 e R$ 80,00, qual será o valor de sua compra após os descontos?

Resolução

O valor da etiqueta das três peças juntas corresponde a R$ $\underbrace{195{,}00}_{50+65+80}$, ou seja, $P_0 = 195{,}00$.

$$P = 195 \cdot (1 - 0{,}3) \cdot (1 - 0{,}1) = 195 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 122{,}85 \rightarrow \text{R\$ } 122{,}85$$

Portanto, o valor a ser pago por essas três peças será de R$ 122,85.

R7. Sobre uma fatura no valor de R$ 280,00 é cobrado 0,2% de juros acrescidos sucessivamente por dia de atraso. Quanto deverá ser pago se essa fatura for quitada com:

a) 2 dias de atraso?

b) 5 dias de atraso?

Resolução

Temos a taxa de 0,2% e o valor inicial de R$ 280,00. Desse modo, segue que:

a) $P = 280 \cdot \underbrace{(1+0{,}002) \cdot (1+0{,}002)}_{\text{Acrescimo de 0,2\% para 2 dias de atraso}} = 280 \cdot (1{,}002)^2 \simeq 281{,}12 \rightarrow \text{R\$ } 281{,}12$

Assim, com 2 dias de atraso, o valor da fatura será R$ 281,12.

b) $P = 280 \cdot \underbrace{(1+0{,}002) \cdot (1+0{,}002) \cdot (1+0{,}002) \cdot (1+0{,}002) \cdot (1+0{,}002)}_{\text{Acrescimo de 0,2\% para 5 dias de atraso}} = 280 \cdot (1{,}002)^5 \simeq 282{,}81 \rightarrow \text{R\$ } 282{,}81$

Assim, com 5 dias de atraso, o valor da fatura será R$ 282,81.

Os cálculos podem ser efetuados com auxílio de uma calculadora científica. Veja como calcular o valor da fatura correspondente ao item **b**, por exemplo, em certo modelo de calculadora.

2 → 8 → 0 → × → 1 → · → 0 → 0 → 2 → ^ → 5 → =

Em alguns modelos de calculadora, a tecla ^ pode ser substituída pela tecla x^y.

R8. (PUC-MG) Pensando em aumentar seus lucros, um lojista aumentou os preços de seus produtos em 25%. Como, a partir desse aumento, as vendas diminuíram, o comerciante decidiu reduzir os novos preços praticados em 25%. Com base nessas informações, é correto afirmar que, após essa redução, as mercadorias dessa loja passaram a:

a) ter o preço original b) ser 5% mais caras c) ser 10% mais caras d) ser mais baratas

Resolução

Considerando os preços iniciais dos produtos como P_0, o aumento nos preços como $i_1 = \underbrace{0{,}25}_{25\%}$, a redução dos preços como $j_1 = \underbrace{0{,}25}_{25\%}$ e os novos preços após essa redução como P, temos que:

$$P = P_0 \cdot \underbrace{(1+0{,}25)}_{\text{acréscimo}} \cdot \underbrace{(1-0{,}25)}_{\text{redução}} = P_0 \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}75 = 0{,}9375 \cdot P_0 = \frac{93{,}75}{100} \cdot P_0$$

Assim, o preço de cada produto dessa loja será 93,75% do preço inicial, ou seja, as mercadorias passaram a ser mais baratas. Logo, a alternativa correta é a **d**.

Para os casos em que há n acréscimos sucessivos e m reduções ou descontos sucessivos sobre um valor inicial P_0, o valor final **P** pode ser obtido por meio da expressão:

$$P = P_0 \cdot \underbrace{(1+i_1) \cdot \ldots \cdot (1+i_n)}_{n \text{ acréscimos sucessivos}} \cdot \underbrace{(1-j_1) \cdot \ldots \cdot (1-j_m)}_{m \text{ descontos sucessivos}}$$

R9. Em certo estabelecimento comercial, para as compras acima de R$ 200,00, os clientes podiam escolher entre um desconto de 25% ou 3 descontos sucessivos de 9%. Nas compras acima de R$ 200,00 nesse estabelecimento, qual dos descontos é mais vantajoso para o cliente?

Resolução

Considere P_0 como o valor da compra e **P** como o valor após o desconto.

- Para desconto único de 25%, temos:

$$P = P_0 \cdot (1-0{,}25) = 0{,}75 \cdot P_0 = \frac{75}{100} \cdot P_0$$

ou seja, 75% de P_0.

- Para os três descontos sucessivos, segue que:

$$P = P_0 \cdot (1-0{,}09) \cdot (1-0{,}09) \cdot (1-0{,}09) = P_0 \cdot (0{,}91)^3 \simeq 0{,}7536 \cdot P_0 = \frac{75{,}36}{100} \cdot P_0$$

ou seja, aproximadamente 75,36% de P_0.

Como $75\% < 75{,}36\%$, o mais vantajoso para o cliente é escolher o desconto único de 25%.

Note que três descontos sucessivos de 9% correspondem ao desconto único de aproximadamente $\underbrace{24{,}64\%}_{100\%-75{,}36\%}$, que é menor que o desconto de 25%. Note também que três descontos sucessivos de 9% não equivalem a um único desconto de 27%.

R10. Um pequeno produtor rural vende as frutas produzidas em seu sítio por meio de uma cooperativa, com um acréscimo de 10% sobre o custo de produção. O atacadista as revende a uma rede de supermercados com acréscimo de 15% sobre o valor pago. E, por sua vez, o supermercado revende essas frutas aos consumidores finais com acréscimo de 40% sobre o valor pago ao atacadista.

a) Qual é o percentual de aumento do preço das frutas desde o produtor até o consumidor final?

b) Se certo tipo de fruta chega ao consumidor final pelo valor de R$ 4,00 o quilograma, determine o valor que esse consumidor pagaria se comprasse diretamente com o produtor rural.

Resolução

a) Multiplicando os fatores de atualização, temos: $\underbrace{(1+0{,}1)}_{\text{produtor}} \cdot \underbrace{(1+0{,}15)}_{\text{atacadista}} \cdot \underbrace{(1+0{,}4)}_{\text{supermercado}} = 1{,}1 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}4 = 1{,}771 = 177{,}1\%$

Portanto, o percentual de aumento do preço das frutas desde o produtor até o consumidor final é $\underbrace{77{,}1\%}_{177{,}1\%-100\%}$.

b) Considerando o valor a ser pago ao produtor rural como P_0, segue que:

$$4 = P_0 \cdot \underbrace{(1+0{,}15)}_{\text{atacadista}} \cdot \underbrace{(1+0{,}4)}_{\text{supermercado}} \Rightarrow 4 = P_0 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}4 \Rightarrow P_0 \simeq 2{,}48 \rightarrow \text{R\$ } 2{,}48$$

Portanto, o consumidor pagaria R$ 2,48 ao produtor rural.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

PRODUÇÃO TEXTUAL

14. Ao incidir sobre determinado capital um acréscimo de 15% e, em seguida, sobre o valor obtido um desconto também de 15%, é correto afirmar que o valor do capital volta ao valor original? Justifique. Professor(a): Veja a resposta desta atividade no final do livro.

15. (UPM-SP) Um produto teve um aumento total de preço de 61%, por meio de dois aumentos sucessivos. Se o primeiro aumento foi de 15%, o segundo foi de: b

a) 38%
b) 40%
c) 42%
d) 44%
e) 46%

16. Certa fatura, quando é paga com atraso, sofre um acréscimo de 4% referente à multa, além de um acréscimo de 0,5% por dia de atraso. Sabendo que foi pago um valor de R$ 113,16 com 15 dias de atraso, determine o valor dessa fatura se tivesse sido paga em dia. R$ 100,96

17. Por causa de uma forte seca em certa região, houve pouca oferta de alguns produtos agrícolas e, por consequência, aumento dos preços. Em certa mercearia, o preço do quilograma de tomate, por exemplo, sofreu aumentos sucessivos de 10%, 18% e 13% em um intervalo de duas semanas.

a) Caso o dono da mercearia realizasse um único aumento, qual deveria ser o percentual de aumento para que fosse equivalente aos três aumentos sucessivos realizados? 46,674%

b) Qual era o preço do quilograma de tomate sabendo que após os aumentos ele passou a ser de R$ 5,13? R$ 3,50

18. (Enem) Em 2006, a produção mundial de etanol foi de 40 bilhões de litros e a de biodiesel, de 6,5 bilhões. Neste mesmo ano, a produção brasileira de etanol correspondeu a 43% da produção mundial, ao passo que a produção dos Estados Unidos da América, usando milho, foi de 45%.

Planeta Sustentável. Disponível em: <www.planetasustentavel.abril.com.br>. Acesso em: 2 maio 2009.

Considerando que, em 2009, a produção mundial de etanol seja a mesma de 2006 e que os Estados Unidos produzirão somente a metade de sua produção de 2006, para que o total produzido pelo Brasil e pelos Estados Unidos continue correspondendo a 88% da produção mundial, o Brasil deve aumentar sua produção em, aproximadamente: c

a) 22,5%
b) 50,0%
c) 52,3%
d) 65,5%
e) 77,5%

19. No primeiro mês de lançamento de um *smartphone*, as vendas em uma rede de lojas foram de 5 000 unidades; a partir do segundo mês, essas vendas sofreram mensalmente quedas de 15% até o *smartphone* sair de linha um ano depois do início das vendas. Quantos desses aparelhos foram comercializados nessa rede de lojas no último mês de vendas? 836

20. Durante uma liquidação, um comerciante reduziu os preços dos produtos do setor de eletrodomésticos em 20%. De quantos por cento deve ser o aumento nos preços da liquidação para que eles voltem a ser os mesmos de antes da liquidação? 25%

21. Rafaela recebeu uma correspondência de sua seguradora informando que, por causa da troca de faixa etária, o valor de seu plano de saúde seria reajustado em 50%. Julgando o aumento abusivo, ela procurou o Procon para verificar se a ação era legal. Após analisar a situação, o Procon concluiu que o aumento era realmente abusivo e que a seguradora deveria reduzir em 20% o valor que seria cobrado após o aumento.

a) Supondo que o valor da mensalidade pago por Rafaela fosse de R$ 80,00, qual deveria ser o valor da mensalidade? R$ 96,00

b) De quantos por cento foi o aumento da nova mensalidade em relação à mensalidade antiga? 20%

O Programa de Orientação e Proteção ao Consumidor – Procon é um órgão cuja finalidade é informar, orientar e defender os direitos do consumidor brasileiro. Presente em todo o Brasil, é possível buscar o endereço de unidades do órgão acessando o portal do consumidor, no *site* <www.portaldoconsumidor.gov.br/procon.asp>. Acesso em: 11 maio 2016.

Você considera importante a existência de órgãos de defesa dos direitos do consumidor, como o Procon? Justifique. Resposta pessoal.

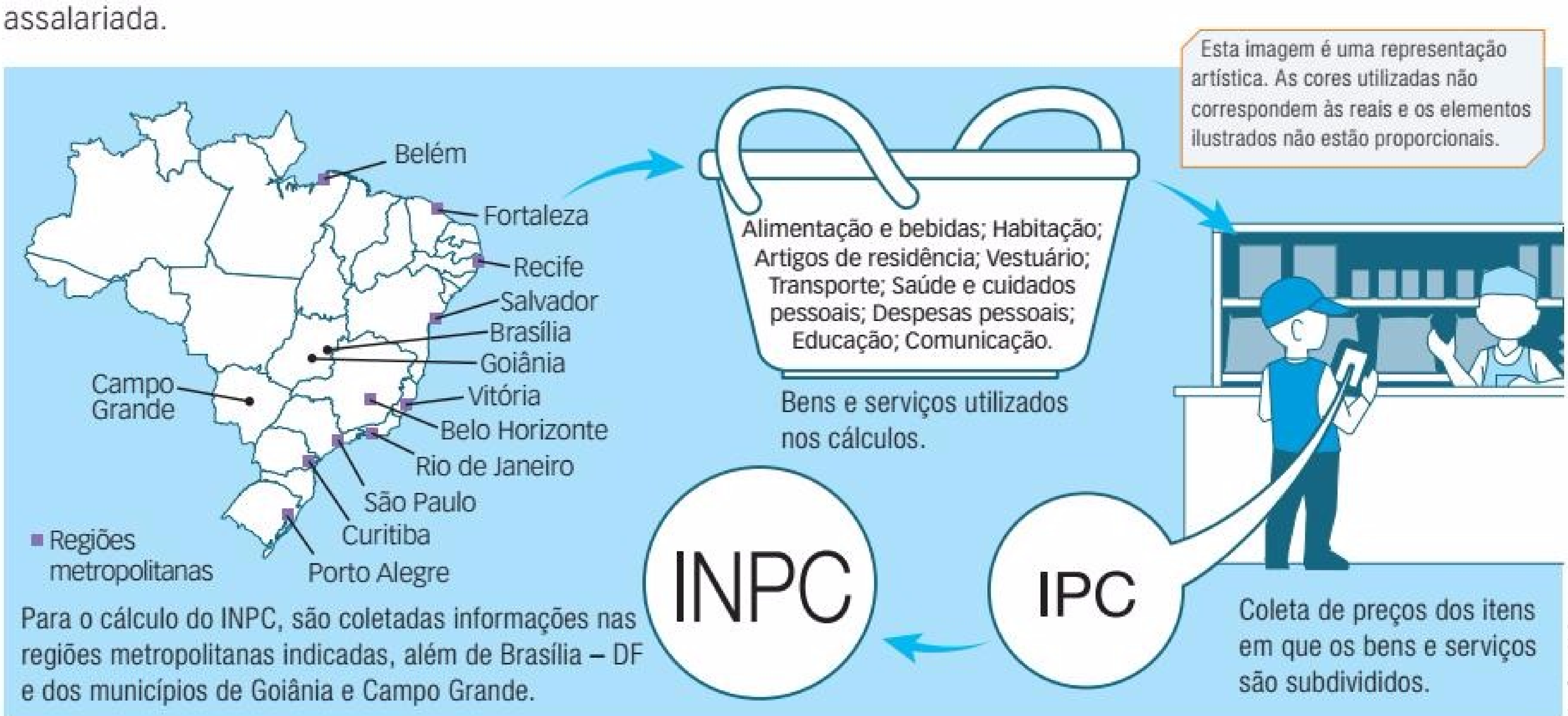
22. Durante certo ano, o salário de Cláudio sofreu três aumentos. Em janeiro, graças ao bom trabalho que vinha exercendo, recebeu um aumento de 12%, em maio recebeu o reajuste de 9,5% previsto pelo sindicato de sua categoria e, em novembro, foi promovido e seu salário foi reajustado em 20%. Resposta pessoal.
Calcule o valor do salário de Cláudio após os aumentos supondo que, antes deles, seu valor era de:

- R$ 1 500,00 R$ 2 207,52
- R$ 2 000,00 R$ 2 943,36
- R$ 2 200,00 R$ 3 237,70
- R$ 3 000,00 R$ 4 415,04

Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC)

O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) realiza desde 1979 a produção do Índice de Preço ao Consumidor (IPC), que tem como principal objetivo medir, ao longo do tempo, as variações sofridas pelos preços de bens e serviços que a população adquire, paga ou usa para consumo. Para isso, são coletados preços em unidades de estabelecimentos comerciais e de prestação de serviços, concessionárias de serviços públicos e domicílios (para o levantamento de aluguel e condomínio).

Com base no IPC, é obtido, por meio de média ponderada, o Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC), referente a grupos populacionais definidos como população-objetivo, que corresponde às famílias residentes nas áreas urbanas em 11 regiões brasileiras, com rendimentos de 1 a 5 salários-mínimos, cuja pessoa de referência é assalariada.



Na tabela a seguir estão indicadas as variações do INPC de julho a dezembro de 2015 em cada uma das regiões em que ele é medido e no Brasil.

Variações do INPC em cada região e no Brasil – jul./2015 a dez./2015

Região	Peso regional (%)	Variação do INPC (%)					
		Jul.	Ago.	Set.	Out.	Nov.	Dez.
Curitiba	7,29	1,08	0,56	0,55	0,63	1,08	1,06
Porto Alegre	7,38	0,88	0,25	0,67	0,72	1,08	0,71
São Paulo	24,24	0,86	0,23	0,69	0,89	0,88	0,74
Goiânia	4,15	0,82	0,19	0,73	1,18	1,69	0,75
Recife	7,17	0,69	0,16	0,29	0,77	0,76	1,07
Belo Horizonte	10,60	0,67	0,10	0,39	0,41	1,02	0,50
Campo Grande	1,64	0,56	0,18	-0,18	1,35	1,34	1,02
Rio de Janeiro	9,51	0,42	0,06	0,34	0,47	1,44	1,16
Brasília	1,88	0,37	0,13	1,41	1,83	0,75	0,84
Salvador	10,67	0,34	0,28	0,29	0,56	1,24	0,89
Fortaleza	6,61	0,03	0,39	0,61	0,70	1,41	1,44
Vitória	1,83	-0,09	0,36	1,28	0,75	0,76	0,72
Belém	7,03	-0,22	0,49	0,08	1,16	1,35	1,19
Brasil	100,00	0,58	0,25	0,51	0,77	1,11	0,90

Fonte: IBGE. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/precos/inpc_ipca/defaultinpc.shtm>. Acesso em: 25 jan. 2016.

a) Qual das regiões apresentou a maior variação no índice do INPC em setembro de 2015? E qual apresentou a menor variação? Brasília; Campo Grande

b) Considere um bem ou serviço cujo preço no início do mês de outubro de 2015 em Campo Grande era R$ 680,00. De acordo com a variação do INPC nesse município, qual o valor desse bem ou serviço no final de outubro? R$ 689,18

JUROS SIMPLES E JUROS COMPOSTOS

O juro representa um "aluguel sobre o dinheiro", ou seja, é uma compensação em dinheiro que se paga, ou se recebe, pelo dinheiro emprestado. Por exemplo, ao realizarmos uma compra a prazo, isto é, levando o produto no ato e efetuando o pagamento algum tempo depois, geralmente pagamos juros sobre o valor do produto. Do mesmo modo, ao realizarmos um investimento em certo banco, recebemos juros sobre a quantia aplicada, de acordo com o período dessa aplicação.

Existem alguns termos utilizados em situações que envolvem juros, entre eles:

- **capital** (c): quantia em dinheiro investida ou emprestada.
- **juro** (j): acréscimo ou rendimento pago pelo investimento ou empréstimo de certa quantia.
- **taxa de juro** (i): razão entre o juro e o capital, considerando determinado período de tempo.
- **tempo** (t): período em dias, meses, anos etc. em que uma quantia é investida ou emprestada.
- **montante** (M): resulta da adição do capital com o juro, geralmente indicado por $M = c + j$.

Nas atividades envolvendo juros, consideramos cada mês com 30 dias e o ano com 12 meses de 30 dias, ou seja, com 360 dias.

Em geral, são utilizadas abreviações para indicar a frequência da taxa. As mais comuns são: ao dia (a.d.), ao mês (a.m.) e ao ano (a.a.).

A seguir, estudaremos dois tipos de juros, os **juros simples** e os **juros compostos**. Atualmente, são poucas as situações do cotidiano que utilizam os juros simples, sendo os juros compostos os mais utilizados.

Quando não informarmos o regime de juros, considere o regime de juros compostos.

Juros simples

No regime de juros simples, somente o capital inicial rende juros, ou seja, o juro referente a cada período de tempo é calculado considerando o capital inicial.

> Marcelo realizou um empréstimo de R$ 2 500,00 a uma taxa de **juros simples** de 15% a.a., e efetuará o pagamento ao final de 1 ano. Qual será o montante pago por Marcelo ao final desse período?

Para resolver esse problema, temos os seguintes dados:

- **capital**: R$ 2 500,00 $\rightarrow c = 2\,500$
- **taxa de juro**: 15% a.a. $\rightarrow i = 15\%$
- **tempo**: 1 ano $\rightarrow t = 1$

Primeiro, calculamos o juro simples referente a um ano:

$$15\% \text{ de R\$ } 2\,500{,}00 \rightarrow \frac{15}{100} \cdot 2\,500 = 0{,}15 \cdot 2\,500 = 375 \rightarrow \text{R\$ } 375{,}00$$

Como queremos saber o montante pago por Marcelo ao final desse período, adicionamos o capital e os juros.

$$M = c + j \Rightarrow M = 2\,500 + 375 \Rightarrow M = 2\,875$$

Assim, Marcelo pagará R$ 2 875,00.

Note que:
$j = c \cdot i \cdot t$
$j = 2\,500 \cdot 0{,}15 \cdot 3$
$j = 1125$

Considerando hipoteticamente que o tempo para pagamento do empréstimo realizado por Marcelo seja estendido e que a taxa de juros simples seja mantida, a cada ano teremos um acréscimo de R\$ 375,00, pois no regime de juros simples somente o capital inicial rende juros.

Assim, se Marcelo pagar o empréstimo em, por exemplo, três anos, os juros cobrados serão R\$ $\underbrace{1125{,}00}_{3 \cdot 375}$ e o montante pago será R\$ $\underbrace{3\,625{,}00}_{2\,500{,}00 + 1125}$.

Podemos calcular os juros simples pela fórmula:

$$\boxed{j = c \cdot i \cdot t}$$

- j: juros simples
- c: capital
- i: taxa
- t: tempo

O montante pode ser calculado por:

$$M = c + j \Rightarrow M = c + c \cdot i \cdot t \Rightarrow \boxed{M = c(1 + i \cdot t)}$$

Nessas fórmulas:

- a taxa de juros deve ser escrita na forma decimal.
- o tempo e a taxa devem estar na mesma unidade de medida de tempo.

Note que $M = c(1 + i \cdot t)$ é uma **função afim** que expressa o montante **M** em função do tempo t, com $t \geq 0$. Nesse caso, para o tempo variando constantemente, o montante aumenta um valor constante, equivalente ao juro calculado sobre o capital inicial. Os montantes obtidos no sistema de juros simples formam uma **Progressão Aritmética** (PA).

Caso a taxa e o tempo não estejam na mesma unidade de medida de tempo (dia, mês, ano etc.), devemos transformar a taxa ou o tempo. Por exemplo, nos juros simples, uma taxa de 4% ao mês é equivalente a 48% ao ano $(4 \cdot 12 = 48)$; e uma taxa de 27,6% ao ano é equivalente a 2,3% ao mês $(27{,}6 : 12 = 2{,}3)$.

Uma situação em que os juros simples são utilizados é na cobrança de juros de mora, ou seja, em juros que são cobrados sobre pequenos atrasos no pagamento de uma dívida. Por exemplo:

Uma dívida no valor de R\$ 240,00 foi paga com atraso de 15 dias. Determine o valor pago, considerando uma taxa de juros de mora de 1% ao mês.

Para resolver esse problema, temos:

- **capital**: R\$ 240,00 $\rightarrow c = 240$
- **taxa de juro**: 1% a.m. $\rightarrow i = 1\%$
- **tempo**: 15 dias $\rightarrow t = 15$

Note que a taxa de juros e o tempo não estão na mesma unidade de medida, então vamos determinar, por exemplo, a taxa de juros diária.

Sabemos que a taxa de juros simples mensal é 1% ou 0,01, então a taxa de juros simples diária é $\frac{0{,}01}{30}$.

Como a cobrança é realizada no regime de juros simples, os juros por 15 dias de atraso é dado por:

$$j = c \cdot i \cdot t \Rightarrow j = 240 \cdot \frac{0{,}01}{30} \cdot 15 = 1{,}2$$

Note que:
$M = c(1 + i \cdot t)$
$M = 240\left(1 + \frac{0{,}01}{30} \cdot 15\right)$
$M = 241{,}2$

Para determinar o valor pago adicionamos o valor do capital e os juros, ou seja, determinamos o montante.

$$M = c + j \Rightarrow M = 240 + 1{,}2 \Rightarrow M = 241{,}2$$

Assim, o valor pago foi de R\$ 241,20.

Juros compostos

Diferentemente dos juros simples, calculados sobre o capital inicial, os juros compostos são calculados sempre sobre o montante obtido no período anterior.

Veja a seguir um problema envolvendo um investimento sob o regime de juros compostos:

Renata realizou um investimento de R$ 2 500,00 em certo banco, a uma taxa de **juros compostos** de 15% a.a., durante 6 anos. Qual será o montante recebido por Renata ao final desse período?

Betochagas13/ Dreamstime.com

Algumas cédulas do real.

O sistema de juros compostos corresponde a um caso particular de acréscimos sucessivos, em que os fatores de atualização são todos iguais. Para calcular os acréscimos sucessivos, utilizamos a fórmula a seguir:

$$P = P_0 \cdot (1+i_1) \cdot (1+i_2) \cdot (1+i_3) \cdot \ldots \cdot (1+i_n)$$

Para o cálculo do montante, temos $P = M$ e $P_0 = c$:

$$M = c \cdot (1+i_1) \cdot (1+i_2) \cdot (1+i_3) \cdot \ldots \cdot (1+i_n)$$

De acordo com o problema, temos: $c = 2\,500$, $i = 15\%$ e $t = 6$. Substituindo $c = 2\,500$ e $i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = i_5 = i_6 = \underbrace{0{,}15}_{15\%}$:

$$M = 2\,500 \cdot (1+0{,}15) \cdot (1+0{,}15) \cdot (1+0{,}15) \cdot (1+0{,}15) \cdot (1+0{,}15) \cdot (1+0{,}15)$$
$$M = 2\,500 \cdot (1+0{,}15)^6$$
$$M \simeq 5\,782{,}65$$

Assim, Renata receberá ao final da aplicação R$ 5 782,65.

Para o cálculo do montante no sistema de juros compostos, podemos utilizar a fórmula:

$$M = c \cdot (1+i_1) \cdot (1+i_2) \cdot (1+i_3) \cdot \ldots \cdot (1+i_n), \text{ em que } i_1 = i_2 = i_3 = \ldots = i_n = i$$

Como as taxas de juros estão associadas a um período de tempo, temos que $n = t$. Desse modo:

$$M = c \cdot \underbrace{(1+i) \cdot (1+i) \cdot (1+i) \cdot \ldots \cdot (1+i)}_{t \text{ fatores iguais}} \Rightarrow \boxed{M = c \cdot (1+i)^t}$$

Nesses cálculos:

- a taxa de juros deve ser escrita na forma decimal.
- o tempo e a taxa devem estar na mesma unidade de medida de tempo.

Note que $M = c \cdot (1+i)^t$ é uma **função do tipo exponencial** que expressa o montante **M** em função do tempo t, com $t \geq 0$. Nesse caso, para o tempo variando constantemente, o montante aumenta um valor cada vez maior, equivalente ao juro calculado sempre sobre o montante obtido no período anterior. Os montantes obtidos no sistema de juros compostos formam uma **Progressão Geométrica** (PG).

Em situações envolvendo juros compostos, caso a taxa e o tempo não estejam na mesma unidade de medida de tempo (dia, mês, ano etc.), não podemos simplesmente multiplicar ou dividir uma taxa dada em certo período para obter uma equivalente em outro período, como fazemos nos juros simples.

Professor(a): Diga aos alunos que a conversão da taxa de juros será tratada em uma atividade especial.

Atividades resolvidas

R11. Ana realizou um empréstimo de R\$ 6 000,00 a uma taxa de juros simples de 8,4% a.a. Sabendo que, além do capital, Ana pagou R\$ 420,00 de juros, quanto tempo após realizar o empréstimo ela efetuou o pagamento?

Resolução

Temos que $j = 420$, $c = 6\,000$ e $i = 0{,}084$. Utilizando a fórmula para cálculo de juros simples, segue que:

$$j = c \cdot i \cdot t \Rightarrow 420 = 6\,000 \cdot 0{,}084 \cdot t \Rightarrow 420 = 504 \cdot t \Rightarrow t = \frac{420}{504} = \frac{5}{6}$$

A taxa foi dada ao ano, assim o tempo obtido corresponde a $\frac{5}{6}$ de um ano, que equivale a $\underbrace{10}_{12 \cdot \frac{5}{6}}$ meses.

Portanto, Ana efetuou o pagamento 10 meses após realizar o empréstimo.

R12. Um consumidor adquiriu um bem no valor de R\$ 2 800,00, e pagou 50% do valor à vista e o restante após 90 dias, com juros simples de 7% ao mês. Qual foi o valor total pago por esse bem?

Resolução

O valor pago à vista foi de R\$ $\underbrace{1\,400{,}00}_{2\,800 \cdot 0{,}5}$.

O valor pago após os 90 dias, que equivalem a 3 meses, corresponde a R\$ $\underbrace{1\,400{,}00}_{2\,800 \cdot 0{,}5}$ acrescido de juros simples de 7% a.m.

$$M = 1\,400(1 + 0{,}07 \cdot 3) = 1\,400 \cdot 1{,}21 = 1\,694 \rightarrow \text{R\$ } 1\,694{,}00$$

Portanto, o valor total pago por esse bem foi de R\$ $\underbrace{3\,094{,}00}_{1400 + 1694}$.

R13. Ao aplicar um capital de R\$ 2 000,00, no sistema de juros compostos a uma taxa de 1,4% ao mês, qual será o montante obtido após quatro anos?

Resolução

Vamos determinar o montante por meio da fórmula $M = c \cdot (1 + i)^t$, considerando que:

- a taxa de juros deve ser escrita na forma decimal, ou seja, $i = \frac{1{,}4}{100} = 0{,}014$.
- o tempo e a taxa devem estar na mesma unidade de medida de tempo. Para isso, transformamos 4 anos em meses, fazendo $4 \cdot 12 = 48 \rightarrow 48$ meses.

Substituindo **c** por 2 000, **i** por 0,014 e *t* por 48 em $M = c \cdot (1 + i)^t$, temos:

$$M = 2\,000 \cdot (1 + 0{,}014)^{48} \Rightarrow M = 2\,000 \cdot 1{,}014^{48} \Rightarrow M \simeq 3\,898{,}09$$

Portanto, o montante obtido será R\$ 3 898,09.

R14. Quantos reais devem ser aplicados sob regime de juros compostos a uma taxa anual de 9% para que, após 10 anos, um investidor obtenha um montante de R\$ 25 000,00?

Resolução

Substituindo **M** por 25 000, **i** por $\underbrace{0{,}09}_{9\%}$ e *t* por 10, na fórmula $M = c \cdot (1 + i)^t$, podemos obter **c**, isto é, o capital que deve ser aplicado:

$$25\,000 = c \cdot (1 + 0{,}09)^{10} \Rightarrow 25\,000 = c \cdot 1{,}09^{10} \Rightarrow c = \frac{25\,000}{1{,}09^{10}} \Rightarrow c \simeq 10\,560{,}27$$

Note que a taxa de juros e o tempo já estão na mesma unidade de medida de tempo.

Portanto, devem ser aplicados R\$ 10 560,27.

R15. (UFPE) Um banco paga juros compostos de 6% ao ano. Se um cliente lucrou R$ 1 700,00 com uma aplicação de R$ 5 000,00, quanto tempo o capital ficou aplicado? (Use $\ln(1{,}34) \simeq 0{,}30$; $\ln(1{,}06) \simeq 0{,}06$.)

a) 3 anos b) 4 anos c) 5 anos d) 6 anos e) 7 anos

Resolução

Como o cliente lucrou R$ 1 700,00 com uma aplicação de R$ 5 000,00, a uma taxa anual de juros compostos de 6%, temos: $c = 5\,000$, $j = 1\,700$, $M = \underbrace{6\,700}_{5\,000+1\,700}$ e $i = 6\% = 0{,}06$.

Podemos obter o tempo *t* em que o capital ficou aplicado por meio da fórmula do montante no sistema de juros compostos.

$$M = c \cdot (1+i)^t \Rightarrow 6\,700 = 5\,000 \cdot (1+0{,}06)^t \Rightarrow \frac{6\,700}{5\,000} = 1{,}06^t \Rightarrow 1{,}34 = 1{,}06^t \Rightarrow t = \log_{1{,}06} 1{,}34$$

Efetuando a mudança da base do logaritmo $\log_{1{,}06} 1{,}34$ para a base *e*, e utilizando a aproximação $\ln(1{,}34) \simeq 0{,}30$ e $\ln(1{,}06) \simeq 0{,}06$, determinamos o valor de *t*:

$$t = \log_{1{,}06} 1{,}34 = \frac{\ln(1{,}34)}{\ln(1{,}06)} = \frac{0{,}30}{0{,}06} = 5$$

Lembre-se de que o logaritmo cuja base é o número irracional $e = 2{,}718281\ldots$, chamado logaritmo natural, é indicado por $\log_e b$ ou $\ln b$, com b real positivo.

Portanto, o capital ficou aplicado 5 anos, ou seja, a resposta correta é a letra **c**.

Juros compostos com a calculadora

Um capital de R$ 2 500,00 foi aplicado a uma taxa de juros compostos de 3,4% ao mês. Qual o montante obtido após 8 meses de aplicação?

Substituindo **c** por 2 500, **i** por 0,034 e *t* por 8 na fórmula do montante, temos:

$$M = c(1+i)^t = 2\,500(1+0{,}034)^8 = 2\,500(1{,}034)^8$$

Utilizando uma calculadora científica, podemos calcular o valor do montante utilizando a sequência de teclas:

2 → 5 → 0 → 0 → × → 1 → . →
→ 0 → 3 → 4 → ^ → 8 → =

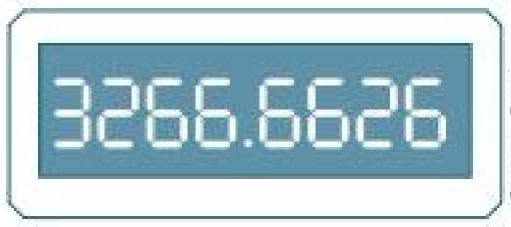
Também podemos resolver essa atividade utilizando uma calculadora comum. Observe.

Para determinar o valor do montante após o primeiro mês, acrescentamos ao capital 3,4% do valor do capital, ou seja, basta multiplicar o valor do capital, R$ 2 500,00, por $\underbrace{1{,}034}_{1+0{,}034}$. Na calculadora comum, pressionamos a sequência de teclas:

1 → . → 0 → 3 → 4 → × →
→ 2 → 5 → 0 → 0 → =

Obtivemos o montante após o primeiro mês. Para calcular o valor obtido após 8 meses basta, a partir do resultado, pressionar a tecla "igual" mais sete vezes. Observe:

= → = → = → = → = → = → =



Ilustrações: Eduardo C.

Portanto, o montante dessa aplicação é R$ 3 266,66.

Agora, utilizando uma calculadora, determine o montante obtido em uma aplicação de um ano, a uma taxa de juros compostos de 4,5% a.m., de um capital de:

Professor(a): Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

a) R$ 3 500,00 R$ 5935,59
b) R$ 2 800,00 R$ 4748,47
c) R$ 5 000,00 R$ 8479,41
d) R$ 1 200,00 R$ 2035,06

Atividades
Anote as respostas no caderno.

23. Um empréstimo de R$ 11 800,00 a uma taxa de juros simples de 4,8% a.m. foi pago antes do prazo combinado. Sabendo que o total pago por esse empréstimo foi R$ 12 064,32, quanto tempo após realizar o empréstimo o pagamento foi efetuado? aproximadamente 14 dias

24. Certa loja oferece duas opções para o pagamento de um televisor.

- 1ª opção: pagamento à vista de R$ 1 800,00.
- 2ª opção: pagamento em duas parcelas iguais de R$ 975,00, sendo a primeira no ato da compra e a segunda um mês após.

Considerando o valor do televisor à vista, qual a taxa de juros mensal aplicada por essa loja na 2ª opção de pagamento? aproximadamente 18%.

25. Um boleto bancário no valor de R$ 500,00 foi pago com atraso de 8 dias. Sabendo que o juro de mora cobrado é de 2% ao mês, determine o valor pago. R$ 502,67

26. Observe as informações em destaque no boleto bancário.

Calcule o valor pago por esse boleto sabendo que o pagamento foi efetuado em 27/02/2017. R$ 954,49

27. Adriano comprou um refrigerador no valor de R$ 2 000,00 e vai pagá-lo em duas prestações iguais de R$ 1 050,00, a primeira no ato da compra e a segunda 30 dias depois.

a) Qual a taxa mensal de juros cobrados pela loja onde Adriano comprou o refrigerador? aproximadamente 10,53%

b) Sabendo que nessa mesma loja esse refrigerador teria desconto de 5% se comprado à vista, determine o valor que seria economizado por Adriano. R$ 200,00

28. Um banco empresta dinheiro a uma taxa de 6% ao mês no sistema de juros compostos. Um cliente empresta desse banco uma quantia de R$ 3 500,00 e efetua o pagamento após 5 meses, em uma única prestação. Qual a quantia paga por esse cliente? Quantos reais ele pagou de juros? R$ 4 683,79; R$ 1 183,79

29. (UFPR) Uma quantia inicial de R$ 1 000,00 foi investida em uma aplicação financeira que rende juros de 6%, compostos anualmente. Qual é, aproximadamente, o tempo necessário para que essa quantia dobre? 12 anos

Use $\log_2(1{,}06) \simeq 0{,}084$.

30. Rafael aplicou determinado capital em um investimento a uma taxa mensal de juros compostos de 2,4%. Após 2 anos de investimento ele resgatou o montante dessa aplicação, recebendo R$ 6 200,00. Qual foi o capital investido? R$ 3 509,08

CALCULADORA

Professor(a): Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

31. Utilizando uma calculadora, determine o montante obtido em uma aplicação de:

a) 9 meses, a uma taxa de juros compostos de 1,5% a.m. de um capital de R$ 15 000,00. R$ 17 150,85

b) 5 anos, a uma taxa de juros compostos de 5% a.a. de um capital de R$ 60 000,00. R$ 76 576,89

32. (Uepa)

> Diversas pesquisas apontam o endividamento de brasileiros. O incentivo ao consumismo, mediado pelas diversas mídias, associado às facilidades de crédito consignado e ao uso desenfreado de cartões são alguns dos fatores responsáveis por essa perspectiva de endividamento.
>
> *O Globo*, 4 set. 2011. Texto Adaptado.

Suponha que um cartão de crédito cobre juros de 12% ao mês sobre o saldo devedor e que um usuário com dificuldades financeiras suspenda o pagamento do seu cartão com um saldo devedor de R$ 660,00. Se a referida dívida não for paga, o tempo necessário para que o valor do saldo devedor seja triplicado sobre regime de juros compostos será de: d

Dados: $\log 3 = 0{,}47$; $\log 1{,}12 = 0{,}05$

a) nove meses e nove dias.

b) nove meses e dez dias.

c) nove meses e onze dias.

d) nove meses e doze dias.

e) nove meses e treze dias.

33. Fabiane vai comprar um televisor dando uma entrada de R$ 1000,00 mais uma parcela de R$ 1863,45 três meses após a compra, considerando que sobre essa parcela já estão adicionados juros compostos. Determine o valor da taxa mensal cobrada pela loja sabendo que o preço do televisor à vista era de R$ 2500,00. aproximadamente 7,5%

34. (ESPM-RS) Em 30/04/2011 o saldo de uma aplicação financeira era de R$ 24200,00 e em 30/06/2011 era de R$ 29282,00. Sabendo-se que nada foi depositado nem retirado durante esse período, podemos concluir que a taxa mensal de juros compostos dessa aplicação é de: b

a) 8%
b) 10%
c) 6%
d) 12%
e) 4%

35. Thiago fez um empréstimo de R$ 8000,00 a uma taxa de juros compostos de 5,4% ao mês e pagará em duas prestações. A primeira seis meses após o empréstimo, cujo valor será equivalente à metade do montante devido até o momento, e a segunda seis meses após a primeira, em que será pago o restante do valor devido.

a) Qual o valor da primeira parcela? R$ 5484,08

b) Qual o montante total pago pelo empréstimo? R$ 13002,86

c) Se o empréstimo fosse pago em uma única parcela, um ano após ter sido realizado, haveria diferença no valor total pago? Qual seria, em reais, essa diferença? sim; R$ 2034,70

36. (FGV-SP) César aplicou R$ 10000,00 num fundo de investimentos que rende juros compostos a uma certa taxa de juro anual positiva **i**. Após um ano, ele saca desse fundo R$ 7000,00 e deixa o restante aplicado por mais um ano, quando verifica que o saldo é R$ 6000,00. O valor de $(4i-1)^2$ é: d

a) 0,01
b) 0,02
c) 0,03
d) 0,04
e) 0,05

DESAFIO

37. Érica deve uma quantia **A** em seu cartão de crédito e resolve pagar, todo mês, 38% do valor da fatura desse cartão. A empresa que disponibilizou o cartão de crédito cobra juros mensais de 17%, sobre o valor da fatura, 5 dias antes de enviá-la para pagamento. Após um ano, quanto Érica ainda deverá, sabendo que nesse período ela não realizou novas compras? aproximadamente 0,02A

Supondo que a quantia **A** seja R$ 1000,00, quanto Érica ainda estará devendo? aproximadamente R$ 20,00

38. Um capital de R$ 2000,00 é aplicado em um fundo de investimento durante 8 anos.

a) Determine o montante dessa aplicação considerando uma taxa de juros simples de 10% a.a. R$ 3600,00

b) Calcule o montante dessa aplicação para uma taxa de juros compostos de 8,5% a.a. R$ 3841,21

39. Um investidor aplica em um sistema de juros compostos um capital de R$ 2200,00 a uma taxa de 2,2% ao mês. Seis meses após a aplicação, ele aplica mais R$ 1000,00 nas mesmas condições.

a) Qual era o montante aplicado antes da segunda aplicação? R$ 2506,85

b) Qual foi o montante total resgatado por esse investidor, adicionadas as duas aplicações, 2 anos e meio após a primeira aplicação? R$ 5912,06

EM GRUPO

40. Vera abriu uma poupança em janeiro de 2015 e realizou um depósito inicial de R$ 300,00. Em maio desse mesmo ano ela fez um depósito de R$ 550,00 e, em novembro, outro de R$ 184,00. Considerando os dados da tabela e que Vera não tenha realizado outros depósitos ou retiradas, determine o montante dessa poupança em janeiro de 2016. R$ 1091,40

Rendimento médio mensal da poupança em 2015

Mês	%
Janeiro	0,5882
Fevereiro	0,5169
Março	0,6302
Abril	0,6079
Maio	0,6159
Junho	0,6822
Julho	0,7317
Agosto	0,6876
Setembro	0,6930
Outubro	0,6799
Novembro	0,6303
Dezembro	0,7261

Fonte: IPARDES. Disponível em: <www.ipardes.gov.br/pdf/indices/poupanca.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2016.

Poupança

A poupança consiste em uma conta de depósito remunerada, acrescida de juros. Sendo um dos investimentos mais populares e tradicionais do Brasil, a poupança é prática e segura. Outra vantagem é a simplicidade que o poupador tem para aplicar e resgatar seu dinheiro de acordo com suas necessidades. Além disso, é o Banco Central que estabelece as regras desse investimento, o que garante a padronização de taxas e do funcionamento nas instituições financeiras.

41. Em uma loja é possível efetuar o pagamento de um produto de R$ 3 500,00 de duas maneiras:

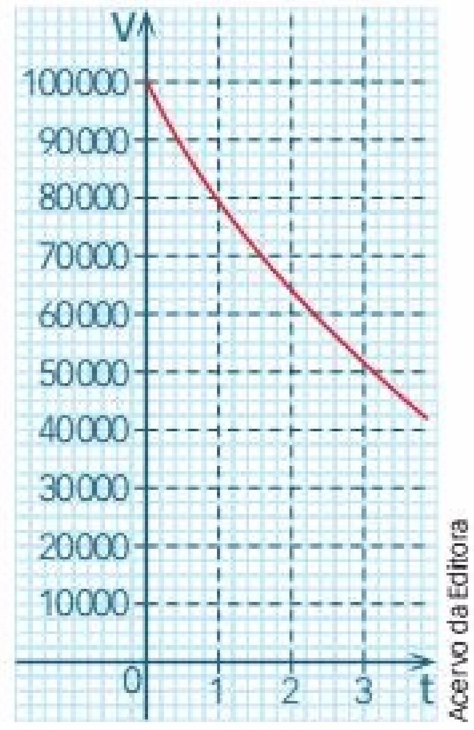
- **1ª maneira**: à vista com 5% de desconto;
- **2ª maneira**: duas parcelas, sendo uma no momento da compra, no valor de 40% do produto, e outra após 60 dias, considerando que a loja cobra 5% de juros ao mês no sistema de juro composto.

a) Qual o valor de cada parcela caso o comprador opte pelo pagamento parcelado? R$ 1 400,00 e R$ 2 315,25

b) Qual a diferença, em reais, entre as duas formas de pagamento? R$ 390,25

42. (Insper-SP) Uma empresa de transporte de carga estima em 20% ao ano a taxa de depreciação de cada caminhão de sua frota. Ou seja, a cada ano, o valor de seus veículos se reduz em 20%. Assim, o valor **V**, em reais, de um caminhão adquirido por R$ 100 000,00, *t* anos após sua compra, é dado por $V = 100\,000(0{,}8)^t$.

O gráfico ao lado representa os primeiros 3 anos dessa relação.



Um funcionário da empresa fez os cálculos a seguir para um caminhão com três anos de uso.

> **Depreciação percentual**:
> $(3 \text{ anos}) \times (20\% \text{ de depreciação por ano}) = 60\%$
>
> **Valor da depreciação**:
> $\text{R\$ } 100\,000{,}00 \times 60\% = \text{R\$ } 60\,000{,}00$
>
> **Valor do caminhão após 3 anos**:
> $(\text{R\$ } 100\,000{,}00 - \text{R\$ } 60\,000{,}00) = \text{R\$ } 40\,000{,}00$

Em relação ao valor dado pelo gráfico que relaciona **V** e *t*, o valor de R$ 40 000,00 obtido pelo funcionário foi aproximadamente: b

a) R$ 20 000,00 mais baixo

b) R$ 10 000,00 mais baixo

c) o mesmo

d) R$ 10 000,00 mais alto

e) R$ 20 000,00 mais alto

EM GRUPO

43. (Enem) Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

- **Opção 1**: Pagar à vista, por R$ 55 000,00;
- **Opção 2**: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 30 000,00, e mais uma prestação de R$ 26 000,00 para dali a 6 meses;
- **Opção 3**: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 20 000,00, mais uma prestação de R$ 20 000,00, para dali a 6 meses, e outra de R$ 18 000,00 para dali a 12 meses da data da compra;
- **Opção 4**: Pagar a prazo dando uma entrada de R$ 15 000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R$ 39 000,00;
- **Opção 5**: pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R$ 60 000,00;

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor), em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção: d

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

44. Lucas e Thais possuem R$ 35 000,00 e R$ 20 000,00, respectivamente. Dispostos a investir esse dinheiro, decidiram montar uma sociedade e investir juntos em um fundo que oferece, para investimentos de no mínimo um ano e acima de R$ 50 000,00, juros de 1,8% ao mês no regime de juros compostos.

a) Sabendo que eles investiram todo o dinheiro que tinham durante um ano, determine o montante resgatado ao fim desse período. R$ 68 129,63

b) Do dinheiro resgatado, quanto cabe a cada um deles? Lucas: R$ 43 355,22; Thais: R$ 24 774,41

Conversão da taxa de juros

Para fazer a conversão de uma taxa mensal de juros compostos para uma taxa anual, ou vice-versa, não basta simplesmente multiplicar ou dividir a taxa por uma constante, como fazemos com as taxas de juros simples. Observe como podemos realizar essa conversão:

- Inicialmente, definimos i_m como taxa mensal e i_a como taxa anual. Da fórmula dos juros compostos, temos:

$$\cancel{C}\cdot(1+i_a)^1=\cancel{C}\cdot(1+i_m)^{12}$$
$$1+i_a=(1+i_m)^{12}$$

Para a taxa anual, *t* corresponde a 1 ano e para a taxa mensal, a 12 meses.

- Nessa igualdade, podemos:
  - isolar i_a e obter uma fórmula para a conversão da taxa mensal para a taxa anual de juros compostos.

$$1+i_a=(1+i_m)^{12}$$
$$i_a=(1+i_m)^{12}-1$$

  - isolar i_m e obter uma fórmula para a conversão da taxa anual para a taxa mensal de juros compostos.

$$1+i_a=(1+i_m)^{12}$$
$$(1+i_a)^{\frac{1}{12}}=1+i_m$$
$$i_m=(1+i_a)^{\frac{1}{12}}-1$$

Temos que $(1+i_a)^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{1+i_a}$.

Professor(a): Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

Agora, utilizando uma calculadora científica, determine o valor aproximado da taxa de juros:

a) mensal de uma aplicação sob regime de juros compostos que rendeu 10% a.a. 0,797% a.m.

b) anual de uma aplicação sob regime de juros compostos que rendeu 1,531% a.m. 20% a.a.

c) mensal de uma aplicação sob regime de juros compostos que rendeu 25% a.a. 1,877% a.m.

d) anual de uma aplicação sob regime de juros compostos que rendeu 0,565% a.m. 7% a.a.

Determine uma fórmula para converter a taxa mensal (i_m) de juros compostos em taxa diária (i_d) e vice-versa. $i_d=(1+i_m)^{\frac{1}{30}}-1$; $i_m=(1+i_d)^{30}-1$

Aposentadoria

A Previdência Social é um seguro que garante a renda do contribuinte e de sua família, em casos de doença, acidente, gravidez, prisão, morte e velhice. Oferece vários benefícios que juntos garantem tranquilidade quanto ao presente e em relação ao futuro, assegurando um rendimento seguro. Para ter essa proteção, é necessário se inscrever e contribuir todos os meses.

Ministério da Previdência Social. Disponível em: <www.mtps.gov.br/institucional>. Acesso em: 8 fev. 2016.

Outra modalidade de previdência, utilizada para complementar a aposentadoria paga pela Previdência Social, é a previdência privada, que consiste basicamente em depositar uma quantia mensal por um longo período de tempo, geralmente de 20 a 35 anos, e, após o prazo determinado, fazer a retirada do montante acumulado em uma só vez ou em parcelas mensais até o fim da vida.

O valor obtido **V**, após **n** meses depositando mensalmente um valor **P**, sob a taxa de juros mensal **i**, pode ser determinado pela fórmula:

$$V=(1+i)\cdot\left(\frac{(1+i)^n-1}{i}\right)\cdot P$$

a) Supondo que uma pessoa realizará depósitos mensais de R$ 100,00 em sua previdência privada, por um período de 20 anos, sob uma taxa de juros mensal de 0,8%, qual será o valor obtido ao final desse período? R$ 72 690,03

b) Se após 25 anos de contribuição mensal na previdência privada, sob juros de 1,2% a.m., um trabalhador obteve um valor de R$ 734 170,65, determine o valor que ele depositava mensalmente. R$ 250,00

c) Com um capital de R$ 134 692,00 e rendimento mensal de 0,5%, é possível fazer retiradas mensais de R$ 1 000,00 durante 23 anos. Qual deve ser o valor dos depósitos mensais para que após 15 anos uma pessoa obtenha esse capital? R$ 460,84

Utilize uma calculadora científica para auxiliar nos cálculos.

Professor(a): Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

JUROS E FUNÇÕES

Vamos supor a aplicação de R$ 1000,00 a uma taxa de juros de 25% a.a. nas modalidades de juros simples e juros compostos, e comparar essas modalidades em função do tempo.

- **Juros simples**: substituindo **c** por 1000 e **i** por 0,25 na fórmula $M = c \cdot (1 + i \cdot t)$, temos:

$$M = c \cdot (1 + i \cdot t) \Rightarrow M = 1\,000 \cdot (1 + 0{,}25 \cdot t) \Rightarrow M = 1\,000 + 250t$$

Note que **M** está em função de t e que $M = 1\,000 + 250t$ corresponde a uma **função afim**, com $t \geq 0$.

- **Juros compostos**: substituindo **c** por 1000 e **i** por 0,25 na fórmula $M = c \cdot (1 + i)^t$, temos:

$$M = c \cdot (1 + i)^t \Rightarrow M = 1\,000 \cdot (1 + 0{,}25)^t \Rightarrow M = 1\,000 \cdot (1{,}25)^t$$

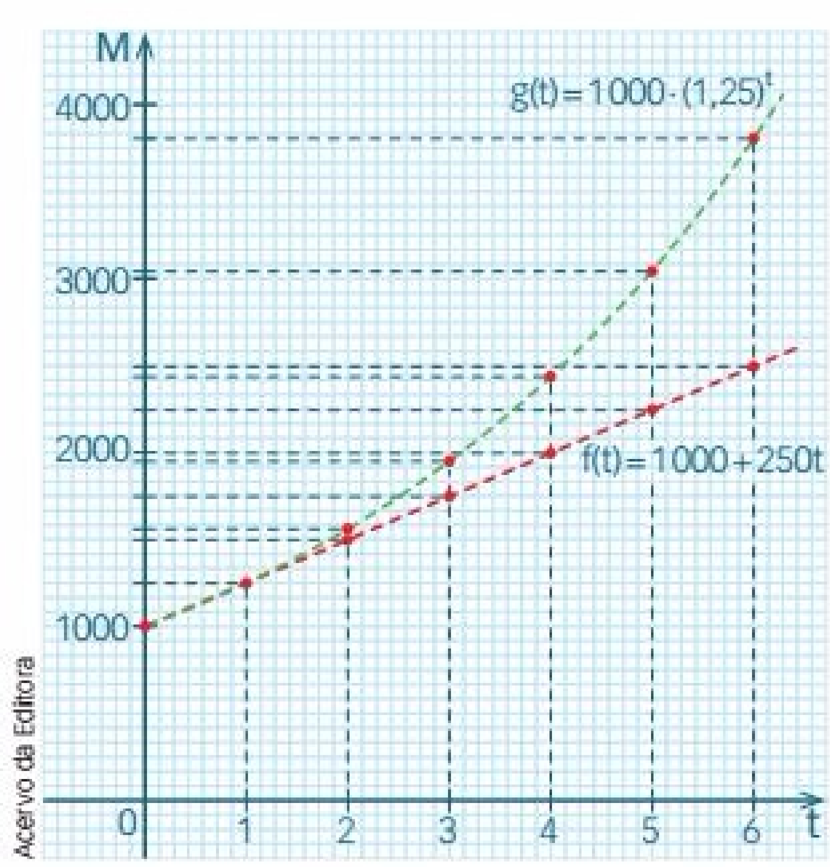
Note que **M** está em função de t e que $M = 1\,000 \cdot (1{,}25)^t$ corresponde a uma **função do tipo exponencial**, com $t \geq 0$.

Note que, no sistema de juros simples, o montante sofre variação constante de R$ 250,00 ao ano. Já no sistema de juros compostos, as variações do montante não são constantes.

Atribuindo alguns valores para t, temos:

t	$f(t) = M = 1\,000 + 250t$ $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$	$g(t) = M = 1\,000 \cdot (1{,}25)^t$ $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
0	$f(0) = 1\,000 + 250 \cdot 0 = 1\,000$	$g(0) = 1\,000 \cdot (1{,}25)^0 = 1\,000$
1	$f(1) = 1\,000 + 250 \cdot 1 = 1\,250$	$g(1) = 1\,000 \cdot (1{,}25)^1 = 1\,250$
2	$f(2) = 1\,000 + 250 \cdot 2 = 1\,500$	$g(2) = 1\,000 \cdot (1{,}25)^2 = 1\,562{,}50$
3	$f(3) = 1\,000 + 250 \cdot 3 = 1\,750$	$g(3) = 1\,000 \cdot (1{,}25)^3 \simeq 1\,953{,}13$
4	$f(4) = 1\,000 + 250 \cdot 4 = 2\,000$	$g(4) = 1\,000 \cdot (1{,}25)^4 \simeq 2\,441{,}41$
5	$f(5) = 1\,000 + 250 \cdot 5 = 2\,250$	$g(5) = 1\,000 \cdot (1{,}25)^5 \simeq 3\,051{,}76$
6	$f(6) = 1\,000 + 250 \cdot 6 = 2\,500$	$g(6) = 1\,000 \cdot (1{,}25)^6 \simeq 3\,814{,}70$

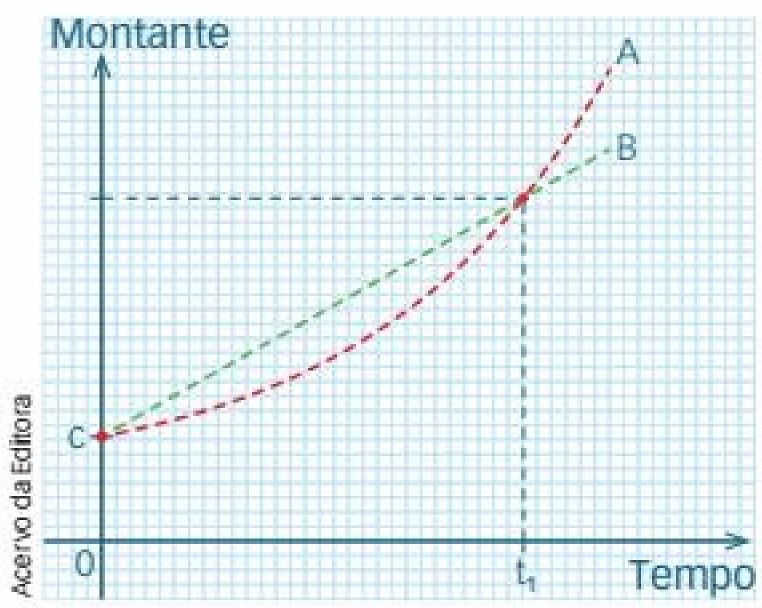
O gráfico da função $f(t) = 1\,000 + 250t$ é uma **reta**, e o gráfico da função $g(t) = 1\,000 \cdot (1{,}25)^t$ é uma **curva exponencial**. Apesar de a taxa ser a mesma para ambas as modalidades (25%), ao representar os dois gráficos em um mesmo plano cartesiano, podemos perceber que, a partir do 1º ano, ou seja, a partir do 1º período de tempo, o montante aumenta mais rapidamente na modalidade de juros compostos que na modalidade de juros simples.



Note ainda que, a partir do 1º ano, os juros compostos possuem maior crescimento que os juros simples. Podemos perceber também que nos juros simples a variação do montante é constante, já nos juros compostos, a variação do montante aumenta no decorrer do tempo.

45. As funções $f(t)=2\,000+70t$ e $g(t)=1\,500\cdot\left(\frac{11}{10}\right)^t$ representam os montantes de duas aplicações, uma a juros simples e a outra a juros compostos, respectivamente. Determine o capital aplicado e a taxa de juros de cada uma dessas aplicações. f: c = R$ 2 000,00, i = 3,5%; g: c = R$ 1 500,00, i = 10%

46. Observe, no gráfico, a representação de dois tipos de investimentos (A e B) oferecidos por uma instituição financeira, dos quais um oferece rendimentos à taxa de juros simples e o outro, à taxa de juros compostos.



a) Identifique no gráfico o rendimento que utiliza taxa de juros simples e o que utiliza taxa de juros compostos. taxa de juros simples: investimento B; taxa de juros compostos: investimento A

b) Qual dos investimentos apresenta maior rentabilidade para $t<t_1$? E qual terá rendimento maior para $t>t_1$? investimento B; investimento A

c) Qual foi o capital investido inicialmente em cada um dos investimentos? capital c

47. Márcio tem R$ 5 000,00 e pretende investir esse capital. Ele está avaliando as seguintes opções de investimento:

- **Opção 1**: investir sob regime de juros simples a uma taxa de 7% a.a.
- **Opção 2**: investir sob regime de juros composto a uma taxa de 7% a.a.

a) Para cada uma das opções de investimento, escreva a lei de formação da função que expressa o montante em função do tempo. juros simples: $f(t)=5\,000+350t$; juros compostos: $g(t)=5\,000(1{,}07)^t$

b) Em quanto tempo de aplicação o montante obtido em ambas as opções de investimento será o mesmo? 1 ano

c) Caso Márcio pretenda investir esse capital por 8 meses, qual das opções será mais vantajosa para ele? Justifique. A opção 1, pois o montante obtido será maior.

d) Para cada uma dessas opções de investimento, calcule o montante obtido considerando um período de investimento de dois anos de aplicação. Qual a diferença entre os montantes obtidos após esse período?
juros simples R$ 5700,00 e juros compostos R$ 5724,50; R$ 24,50

48. Bruna pretende investir R$ 10 000,00, mas não tem certeza de quanto tempo deseja deixar seu dinheiro investido. Ao chegar a um banco, ela recebe duas propostas.

- Proposta 1: Investir em um fundo cuja rentabilidade é capitalizada a juros simples a uma taxa de 8,5% ao mês.
- Proposta 2: Investir em um fundo cuja rentabilidade é capitalizada a juros compostos a uma taxa de 6,5% ao mês.

a) Escreva as leis de formação das funções M_1 e M_2 que determinam o montante obtido em cada uma das propostas em função do tempo *t* que o dinheiro ficar aplicado.
proposta 1: $M_1(t)=10\,000+850t$; proposta 2: $M_2(t)=10\,000\cdot(1{,}065)^t$

b) Qual das propostas terá o maior montante em:

- 5 meses? proposta 1
- 9 meses? proposta 1
- um ano? proposta 2
- um ano e meio? proposta 2

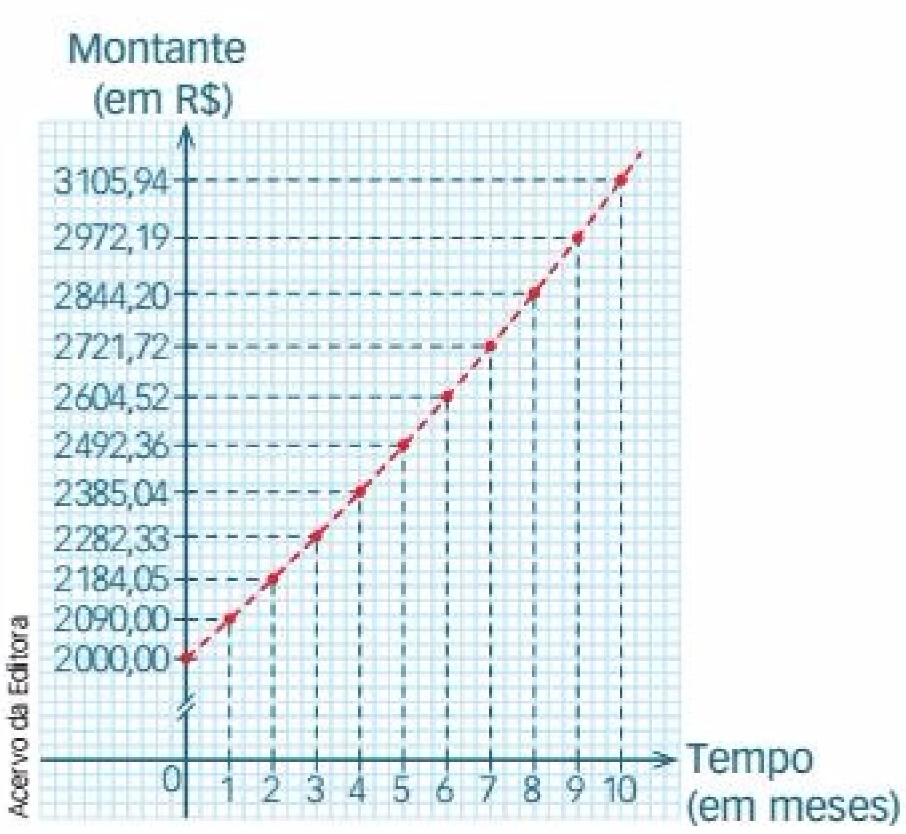
c) A partir de quanto tempo de investimento a proposta 2 passa a ter um montante maior que o da proposta 1? a partir do 10º mês

d) Esboce, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções M_1 e M_2.
Professor(a): Veja a resposta deste item na Assessoria Pedagógica.

PRODUÇÃO TEXTUAL

49. Considere as funções $f(t)=c\cdot(1+0{,}085t)$ e $g(t)=c\cdot 1{,}085^t$. Utilizando essas funções, escreva uma atividade envolvendo a taxa de juros e entregue para um colega resolver. Em seguida, verifique se a resposta está correta. Resposta pessoal.

50. No gráfico a seguir estão representados os valores do montante de uma aplicação de R$ 2 000,00.



a) De acordo com os valores do gráfico, determine se a aplicação foi feita em um regime de juros simples ou em um regime de juros compostos. regime de juros compostos

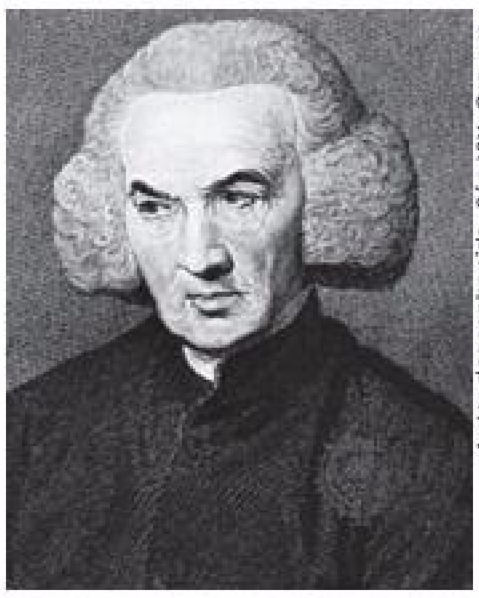
b) Qual foi a taxa de juros dessa aplicação? i = 4,5%

c) Escreva a lei de formação da função representada pelo gráfico. $M(t)=2\,000(1{,}045)^t$

AMORTIZAÇÕES

Sistema Price

O sistema Price de amortização foi desenvolvido pelo matemático Richard Price, e foi muito utilizado na França no século XIX. Além de contribuir para a Matemática financeira, Price ainda desenvolveu trabalhos de caráter filosófico, político, econômico e estatístico.



Autor desconhecido. Séc XIX. Gravura. Coleção particular

Richard Price (1723-1791)

Segundo o dicionário, amortizar é pagar uma dívida gradualmente ou em prestações. Entre os sistemas de amortização mais utilizados, estão o **Sistema Price** (ou Francês) e o **Sistema de Amortização Constante** (SAC), ambos caracterizados pela utilização de juros compostos que incidem sobre o saldo devedor. Cada prestação é composta de dois valores: a amortização, que é parte da dívida, e os juros.

O sistema Price é o mais comum entre os financiamentos, em geral, de bens de consumo. Nele, as prestações são iguais, sendo as primeiras prestações compostas, em grande parte, de juros, com uma menor amortização da dívida no início. Já no sistema SAC, que é mais comum nos financiamentos imobiliários, as amortizações são todas iguais, e a parte da prestação dependente dos juros vai diminuindo, pois eles incidem sobre um saldo devedor cada vez menor.

Para exemplificar, vamos comparar as duas modalidades considerando um financiamento de R$ 30 000,00 a ser pago em 5 prestações mensais à taxa de juros de 5% a.m.

- **Sistema Price**: o valor de cada prestação é dado pela fórmula:

$$P = \frac{c \cdot i}{1-(1+i)^{-n}}$$

em que **P** é o valor da prestação, **c** é o valor do empréstimo ou do bem ($c = 30\,000$), **i** é a taxa de juros ($i = 0{,}05$) e **n** é o número de prestações ($n = 5$). Segue que:

$$P = \frac{30\,000 \cdot 0{,}05}{1-(1+0{,}05)^{-5}} \Rightarrow P \simeq 6\,929{,}24$$

O valor de cada prestação é R$ 6 929,24.

Agora, vamos representar os valores em cada período de tempo, por meio do seguinte quadro.

n	Valor da prestação (Pagamento é igual a Juros mais Amortização)			Saldo devedor (R$)
	Juros (R$)	Amortização do saldo devedor (R$)	Pagamento (R$)	
0	-	-	-	30 000,00
1	$\underbrace{30\,000{,}00 \cdot 0{,}05}_{5\%\ \text{de}\ 30\,000{,}00} = 1\,500{,}00$	$\underbrace{5\,429{,}24}_{6\,929{,}24-1\,500{,}00}$	6 929,24	$\underbrace{24\,570{,}76}_{30\,000{,}00-5\,429{,}24}$
2	$\underbrace{24\,570{,}76 \cdot 0{,}05}_{5\%\ \text{de}\ 24\,570{,}76} \simeq 1\,228{,}51$	$\underbrace{5\,700{,}73}_{6\,929{,}24-1\,228{,}51}$	6 929,24	$\underbrace{18\,870{,}03}_{24\,570{,}76-5\,700{,}73}$
3	943,50	5 985,74	6 929,24	12 884,29
4	644,21	6 285,03	6 929,24	6 599,26
5	329,96	6 599,28	6 929,24	0
Total (R$)	4 646,22	30 000,00	34 646,22	-

Professor(a): Diga aos alunos que os valores no quadro são considerados até a casa dos centésimos. Diga também que, apesar de o quadro apresentar apenas os cálculos para obter os valores de $n = 1$ e $n = 2$, os valores apresentados nas demais linhas são obtidos de maneira semelhante.

Portanto, no sistema Price, seriam pagas 5 prestações de R$ 6 929,24, que totalizam R$ 34 646,22, ou seja, R$ 4 646,22 de juros.

- **Sistema SAC**: agora é o valor da amortização que é constante, dado pela divisão do valor do empréstimo ou do bem (R$ 30 000,00) pelo número de prestações ($n = 5$):

$$\frac{30\,000}{5} = 6\,000 \rightarrow \text{R\$ } 6\,000{,}00$$

Construindo o quadro, temos:

n	Valor da prestação (Pagamento é igual a Juros mais Amortização)			Saldo devedor (R$)
	Juros (R$)	Amortização do saldo devedor (R$)	Pagamento (R$)	
0	-	-	-	30 000,00
1	$\underbrace{30\,000{,}00 \cdot 0{,}05}_{5\%\text{ de }30\,000{,}00} = 1\,500{,}00$	6 000,00	$\underbrace{7\,500{,}00}_{6\,000{,}00+1\,500{,}00}$	$\underbrace{24\,000{,}00}_{30\,000{,}00-6\,000{,}00}$
2	$\underbrace{24\,000{,}00 \cdot 0{,}05}_{5\%\text{ de }24\,000{,}00} = 1\,200{,}00$	6 000,00	$\underbrace{7\,200{,}00}_{6\,000{,}00+1\,200{,}00}$	$\underbrace{18\,000{,}00}_{24\,000{,}00-6\,000{,}00}$
3	900,00	6 000,00	6 900,00	12 000,00
4	600,00	6 000,00	6 600,00	6 000,00
5	300,00	6 000,00	6 300,00	0
Total (R$)	4 500,00	30 000,00	34 500,00	-

Professor(a): Diga aos alunos que os valores no quadro são considerados até a casa dos centésimos. Diga também que, apesar de o quadro apresentar apenas os cálculos para obter os valores de $n = 1$ e $n = 2$, os valores apresentados nas demais linhas são obtidos de maneira semelhante.

Note que os juros e os pagamentos diminuem em Progressão Aritmética (PA) de mesma razão, nesse caso, –300 (R$ –300,00). O saldo devedor também diminui em PA, cuja razão é o valor amortizado do saldo devedor, nesse caso, –6 000 (R$ –6 000,00).

Portanto, no sistema SAC, serão pagas 5 prestações, cujos valores seriam: R$ 7 500,00, R$ 7 200,00, R$ 6 900,00, R$ 6 600,00 e R$ 6 300,00, nessa ordem, totalizando R$ 34 500,00, ou seja, R$ 4 500,00 de juros.

Apesar de as condições serem as mesmas para ambos os financiamentos (valor do empréstimo; taxa de juros; número de prestações), no sistema de amortização Price, os juros cobrados são maiores. Esse fato fica ainda mais evidente à medida que o valor do empréstimo ou do bem e o número de prestações aumentam, como nos casos de financiamento imobiliário. No entanto, no sistema SAC, os valores das primeiras parcelas são maiores, e isso também deve ser avaliado juntamente com a condição financeira de cada pessoa.

Professor(a): Diga aos alunos que, na maioria dos financiamentos, além dos valores referentes aos juros, são adicionados valores referentes a seguros e taxas de administração do financiamento, além da correção dos valores de acordo com a inflação ou índices da poupança, por exemplo.

Atividades resolvidas

R16. De acordo com o anúncio apresentado ao lado, construa um quadro demonstrativo do sistema Price.

Fotomontagem composta com tale/ Shutterstock.com/ Glow Images

Resolução

Dado que $c = 1\,100$, $i = 0{,}02$ e $n = 6$, determinamos, inicialmente, as 6 parcelas fixas por meio da fórmula do sistema Price de amortização:

$$P = \frac{c \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} \Rightarrow P = \frac{1\,100 \cdot 0{,}02}{1-(1+0{,}02)^{-6}} \Rightarrow P = \frac{22}{1-(1{,}02)^{-6}} \Rightarrow P \simeq 196{,}38$$

Portanto, o valor das parcelas é R$ 196,38 cada.

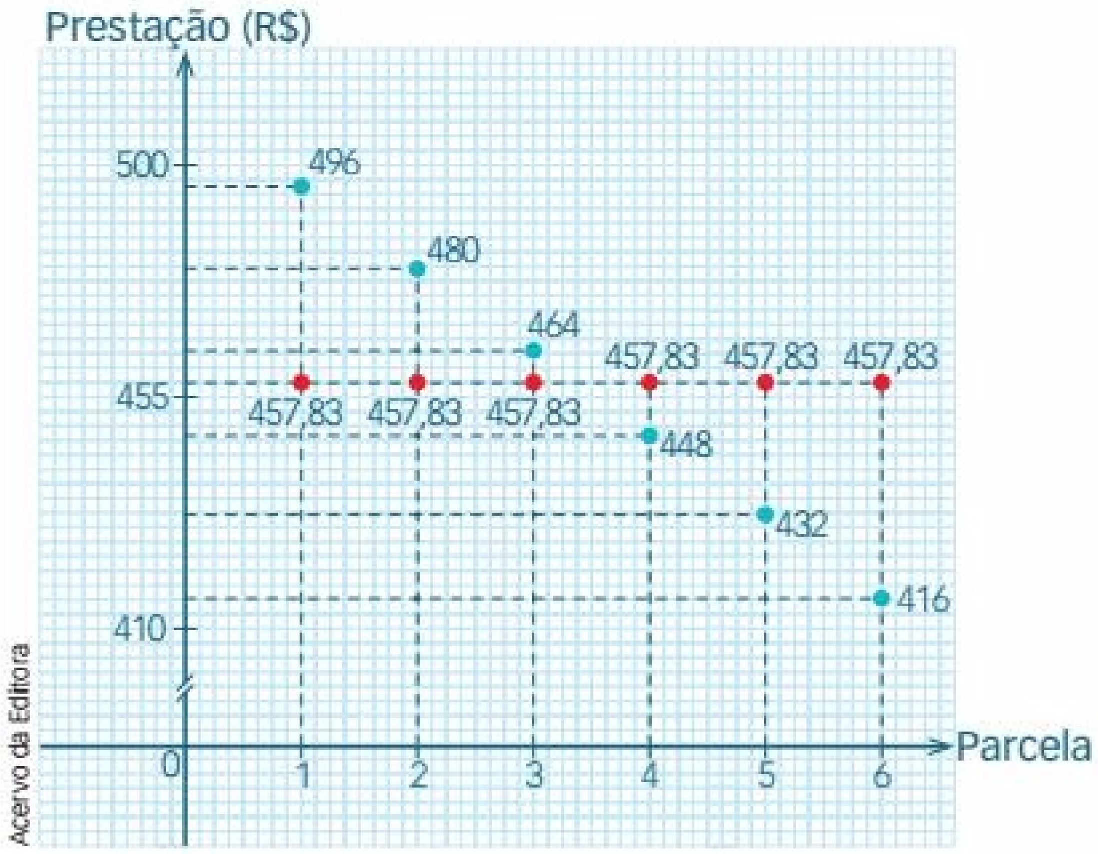
Com base nisso, construímos o quadro:

n	Juros (R$)	Amortização do saldo devedor (R$)	Pagamento (R$)	Saldo devedor (R$)
0	-	-	-	1 100,00
1	$\underbrace{22}_{0{,}02 \cdot 1\,100{,}00}$	$\underbrace{174{,}38}_{196{,}38-22}$	196,38	$\underbrace{925{,}62}_{1\,100{,}00-174{,}38}$
2	$\underbrace{18{,}51}_{0{,}02 \cdot 925{,}62}$	$\underbrace{177{,}87}_{196{,}38-18{,}51}$	196,38	$\underbrace{747{,}75}_{925{,}62-177{,}87}$
3	14,96	181,42	196,38	566,33
4	11,33	185,05	196,38	381,28
5	7,63	188,75	196,38	192,53
6	3,85	192,53	196,38	0
Total (R$)	78,28	1 100,00	1 178,28	-

Os valores do quadro são considerados até a casa dos centésimos.

Atividades
Anote as respostas no caderno.

51. O gráfico mostra os valores das prestações referentes a um empréstimo cuja amortização pode ser por meio do sistema Price ou do sistema SAC, ambos com taxa de juros de 4% a.m.



a) As indicações em vermelho correspondem a qual sistema de amortização? E as indicações em azul? sistema Price; sistema SAC

b) Qual é o valor dos juros, em reais, a ser pago se for escolhido o sistema Price? E se for o sistema SAC? R$ 346,98; R$ 336,00

c) Qual é o valor do empréstimo em questão? R$ 2400,00

52. Um trabalhador pretende fazer um empréstimo no valor de R$ 5000,00, mas não quer que as prestações excedam 25% de sua renda mensal de R$ 1500,00. Nessas condições, é possível que ele faça o empréstimo com taxa de juros mensal de 6%, para ser pago em dois anos por meio do sistema Price? Justifique. Não, pois o valor das prestações, de R$ 398,40, excede os 25% da renda desse trabalhador, que é de R$ 375,00.

53. Uma pessoa emprestou R$ 10000,00 de uma financeira para pagar em 12 parcelas com juros de 4,5% a.m.

a) Supondo que o empréstimo seja amortizado segundo o sistema Price, determine o valor:

- de cada parcela. R$ 1096,66
- dos juros na 3ª parcela. R$ 390,49
- do saldo devedor da 5ª parcela. R$ 6462,31
- da amortização do saldo devedor correspondente à 8ª parcela. R$ 880,02

b) Se esse empréstimo fosse amortizado pelo sistema SAC, qual seria o valor:

- da amortização do saldo devedor? R$ 833,33
- da 7ª parcela? R$ 1058,33
- do saldo devedor da 4ª parcela? R$ 6666,68
- dos juros na 11ª parcela? R$ 75,00

54. Calcule os juros que uma pessoa pagaria em um financiamento de R$ 2500,00, com taxa de juros mensal de 2%, a ser pago em 18 meses segundo o sistema:

a) Price R$ 501,68 b) SAC R$ 474,66

55. Observe parte do quadro demonstrativo de um financiamento com amortização pelo sistema SAC.

n	Juros (R$)	Amortização do saldo devedor (R$)	Pagamento (R$)	Saldo devedor (R$)
0	-	-	-	5000
1	125	625	750	4375

a) Qual é o valor desse financiamento? R$ 5000,00

b) Qual é a taxa de juros mensal? $i = 2{,}5\%$

c) Determine o saldo devedor da 4ª parcela. R$ 2500,00

d) Esse financiamento será quitado após quantas parcelas? 8 parcelas

e) Qual é o valor a ser pago na última parcela? R$ 640,63

56. Rafael trocou seu carro por outro mais novo, que custava R$ 33000,00. O carro usado entrou no negócio por R$ 15000,00, e ele pagou o restante em 36 parcelas, com taxa de juros mensal de 3% no sistema SAC.

Qual é o valor:

a) da amortização do saldo devedor? R$ 500,00

b) do saldo devedor na 6ª parcela? E na 16ª parcela? R$ 15000,00; R$ 10000,00

c) dos juros na 13ª parcela? E na 30ª parcela? R$ 360,00; R$ 105,00

d) da 9ª parcela? E da última parcela? R$ 920,00; R$ 515,00

Lembre-se de que a fórmula do termo geral de uma PA é $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$.

57. (Enem) Um casal realiza um financiamento imobiliário de R$ 180000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R$ 500,00 mais juros de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.

Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de: d

a) 2075,00

b) 2093,00

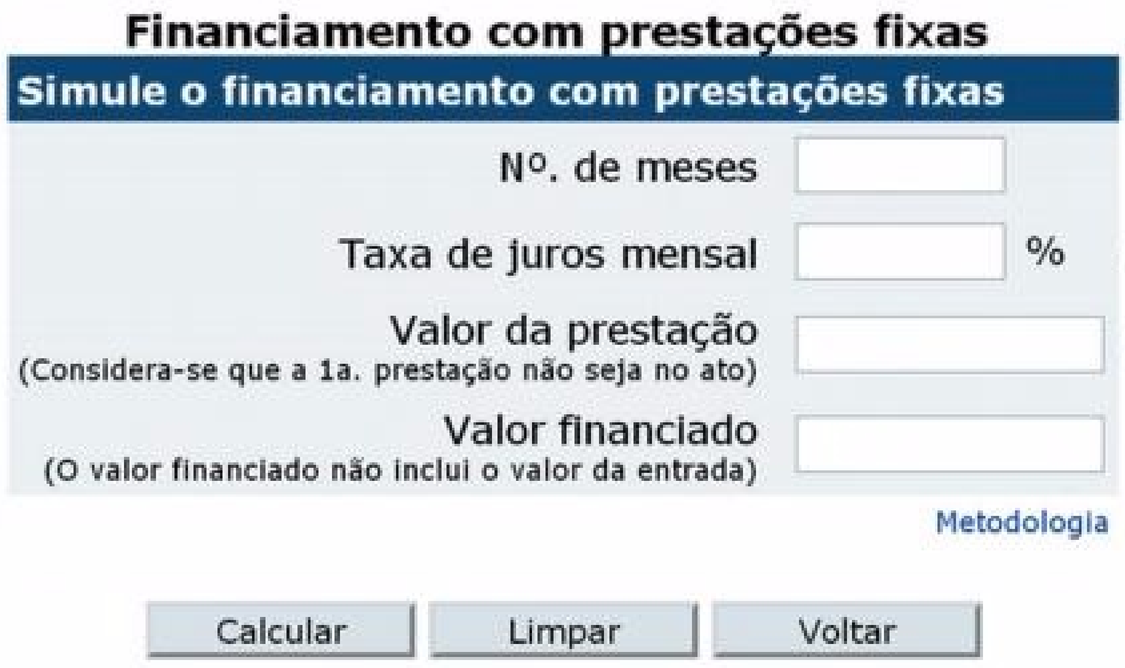
c) 2138,00

d) 2255,00

e) 2300,00

Calculadora do cidadão

A calculadora do cidadão está disponível no *site* do Banco Central do Brasil <www.bc.gov.br/?calculadora>. Acesso em: 11 maio 2016. Na opção **Financiamento com prestações fixas** é possível realizar cálculos que simulam financiamentos realizados no sistema Price. Para isso, é necessário inserir o valor de três parâmetros, clicar em **Calcular** e obter o quarto parâmetro como resultado.



Banco Central do Brasil/ Governo Federal

Acesse a calculadora do cidadão e determine:

a) o valor da prestação se for feito um financiamento de R$ 1000,00, com pagamento em 7 prestações mensais e taxa de juros mensal de 3% a.m. R$ 160,51

b) o tempo em que uma dívida de R$ 3450,00, com juros mensais de 5,6%, será quitada se as prestações forem de R$ 346,00. 15 meses

c) o valor financiado considerando uma prestação de R$ 247,93, com juros mensais de 1,75% e dividido em 18 meses. R$ 3800,00

d) a taxa de juros mensal, para um financiamento de R$ 15000,00 com prestações de R$ 622,08 e que deverá ser quitado em 3 anos. 2,35%

Professor(a): Veja na Assessoria Pedagógica orientações para o trabalho com a seção Sobre a unidade.

Sobre a unidade | Anote as respostas no caderno.

1. O que você estudou nesta unidade? Você considera que atingiu os objetivos propostos no início da unidade? Se não, o que fará para atingir os objetivos?
2. Qual dos conteúdos estudados nesta unidade você considera que deve estudar um pouco mais?
3. Se um amigo pedisse a você que explicasse como funcionam os sistemas de juros simples e juros compostos, qual explicação você daria?
4. Dois sistemas de amortização foram estudados nesta unidade, o Sistema Price e o Sistema de Amortização Constante (SAC). Discuta com seus colegas quais são as vantagens e as desvantagens de cada um deles.
5. Converse com seus colegas a respeito de situações em que os conteúdos estudados nesta unidade estão presentes. Se necessário, realizem uma pesquisa.

1. Resposta esperada: Porcentagem, acréscimos e descontos sucessivos, juros simples e juros compostos, juros e funções, amortizações. Resposta pessoal. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. Resposta esperada: No sistema de juros simples, a taxa de variação do montante é sempre a mesma e os juros são calculados a partir do capital inicial; no sistema de juros compostos, a taxa de variação do montante não é constante, e os juros são calculados levando-se em consideração o montante acumulado no período anterior.

4. Possível resposta: Uma vantagem do Sistema Price é que os valores cobrados nas prestações são sempre os mesmos, mas uma desvantagem é que os juros cobrados são maiores quando comparados ao sistema SAC. Já uma vantagem do sistema SAC é que os juros cobrados são menores quando comparados ao Sistema Price, e uma desvantagem é que os valores cobrados nas primeiras prestações são maiores.

5. Possível resposta: Os conteúdos desta unidade estão presentes em situações como: o valor de um produto no qual são aplicados acréscimos sucessivos ou descontos sucessivos; o rendimento de uma aplicação; o pagamento de um empréstimo utilizando o sistema Price ou o sistema SAC.

Ideias matemáticas

O esquema a seguir relaciona algumas das ideias matemáticas estudadas nesta unidade. Converse com seus colegas e professor(a) a respeito de como essas e outras ideias abordadas na unidade estão relacionadas. Em seguida, faça um texto descrevendo as relações existentes entre elas e dê sugestões para complementar e melhorar a organização desse esquema.

Revise os conteúdos estudados nesta unidade e anote os pontos que julgar mais relevantes. Com isso, organize um resumo para auxiliá-lo(a) na compreensão dos conteúdos.

Professor(a): Converse com os alunos de maneira que retomem os objetivos propostos no início da unidade e verifique, por exemplo, se compreenderam o conceito de acréscimos sucessivos e descontos sucessivos. Auxilie-os a listar as principais ideias matemáticas presentes na unidade e a buscar relações entre elas, como a relação entre os juros compostos e a curva exponencial. Com base nas ideias listadas e relações estabelecidas, oriente-os a propor aprimoramentos ao esquema apresentado, inserindo novas ideias e indicando suas possíveis relações. Peça aos alunos que registrem essas discussões, compondo uma síntese da unidade.

SUGESTÕES DE LIVROS E *SITES*

LIVROS

- ACZEL, Amir D. *O Caderno Secreto de Descartes: um mistério que envolve filosofia, matemática, história e ciências ocultas*. Tradução de Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2007.
- BALL, Johnny. *Pense em um número – uma viagem fascinante ao mundo dos números*. São Paulo: Caramelo, 2009. (Uma viagem fascinante ao mundo dos números).
- BARRELLA, Elaine Spisso; MARTINS, Laura Maria Runau (Orgs.). *A matemática nas profissões*. São Paulo: Portal, 2010.
- BENTLEY, Peter. *O livro dos números: uma história ilustrada da Matemática*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2010.
- BERLINSKI, David. *O advento do algoritmo: a ideia que governa o mundo*. Tradução de Leila Ferreira de Souza Mendes. São Paulo: Globo, 2002.
- COLE, K. C. *O universo e a xícara de chá*. Tradução de Elizabeth Leal. Rio de Janeiro: Record, 2006.
- DEWDNEY, Alexander Keewatin. *20 000 léguas matemáticas: um passeio pelo misterioso mundo dos números*. Tradução de Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2000. (Ciência & cultura).
- DOXIADIS, Apostolos. *Tio Petros e a conjectura de Goldbach: um romance sobre os desafios da Matemática*. Tradução de Cristiane Gomes de Riba. São Paulo: Editora 34, 2001.
- ENZENSBERGER, Hans Magnus. *O diabo dos números*. Tradução de Sérgio Tellaroli. São Paulo: Companhia das Letras, 1997.
- GANDON, Odile. *Para entender o mundo: os grandes desafios de hoje e de amanhã*. Tradução de Adriana de Oliveira, Luciano Loprete e Marleine Cohen. São Paulo: SM, 2007.
- GARBI, Gilberto Geraldo. *A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática*. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

- GORDON, Hélio. *A história dos números*. São Paulo: FTD, 2002. (História - ciência, técnica, invenções e profissões).
- GUEDJ, Denis. *O teorema do papagaio*. Tradução de Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.
- LASKY, Kathryn. *O bibliotecário que mediu a Terra*. Tradução de Maria Luiza Newlands. Rio de Janeiro: Salamandra, 2001.
- MACHADO, Nilson José. *Lógica? É lógico!* São Paulo: Scipione, 2000. (Vivendo a Matemática).
- MLODINOW, Leonard. *A janela de Euclides: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço*. Tradução de Enézio E. de Almeida Filho. São Paulo: Geração Editorial, 2004.
- SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos*. 7. ed. Tradução de Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro: Record, 2000.
- SMITH, Dan. *Atlas da situação mundial*. Tradução de Mário Vilela. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 2007.
- SMULLYAN, Raymond. *A dama ou o tigre? E outros problemas lógicos*. Tradução de Helena Martins. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2004.
- ______________. *Alice no país dos enigmas: incríveis problemas lógicos no país das maravilhas*. Tradução de Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2000.
- ______________. *O enigma de Sherazade: e outros incríveis problemas das mil e uma noites à lógica moderna*. Tradução de Sérgio Flaksman. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.
- STRATHERN, Paul. *Pitágoras e seu teorema em 90 minutos*. Tradução de Marcus Penchel. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998. (Cientistas em 90 minutos).
- SZPIRO, George G. *A vida secreta dos números: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos*. Tradução de J. R. Souza. Rio de Janeiro: DIFEL, 2008.
- TAHAN, Malba. *Matemática divertida e curiosa*. 2. ed. Rio de Janeiro: Record, 1991.
- ______________. *O homem que calculava*. 40. ed. Rio de Janeiro: Record, 1995.
- ______________. *Os números governam o mundo: folclore da Matemática*. Rio de Janeiro: Ediouro, 1998.

SITES

- ANPEd. Disponível em: <www.anped.org.br>. Acesso em: 5 abr. 2016.
- Arte Matemática. Disponível em: <www2.tvcultura.com.br/artematematica>. Acesso em: 5 abr. 2016.
- Bússola escolar. Disponível em: <www.bussolaescolar.com.br/matematica.htm>. Acesso em: 5 abr. 2016.
- Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática. Disponível em: <www.ime.usp.br/caem>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem de matemática e estatística. Disponível em: <www.uff.br/cdme>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Domínio Público. Disponível em: <www.dominiopublico.gov.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Educação Matemática e Tecnologia Informática. Disponível em: <www2.mat.ufrgs.br/edumatec>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Enem. Disponível em: <www.enem.inep.gov.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Escola 24 horas. Disponível em: <www.escola24h.com.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Escola do Futuro. Disponível em: <futuro.usp.br/portal/website.ef>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Geekie games. Disponível em: <www.geekiegames.geekie.com.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- IBGE. Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- IBGE Teen. Disponível em: <http://ibge.gov.br/ibgeteen>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- iMática. Disponível em: <www.matematica.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- INEP. Disponível em: <http://bve.cibec.inep.gov.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Instituto de Biociências, Letras e Ciências exatas. Disponível em: <www.mat.ibilce.unesp.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Khan Academy. Disponível em: <http://pt.khanacademy.org>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Klick Educação. Disponível em: <www.klickeducacao.com.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Matematica. Disponível em: <http://matematica.com.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Matemática Essencial. Disponível em: <www.uel.br/projetos/matessencial>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Mathema. Disponível em: <www.mathema.com.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Ministério da Educação. Disponível em: <www.mec.gov.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Nova Escola. Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Olimpíadas Brasileira de Matemática. Disponível em: <www.obm.org.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Disponível em: <www.obmep.org.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Portal Aprendiz. Disponível em: <www.aprendiz.com.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Portal Canal Colaborativo. Disponível em: <www.augeeducacional.com.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Portal Educacional. Disponível em: <www.educacional.com.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Portal FNDE. Disponível em: <www.fnde.gov.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Portal do professor. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Só Matemática. Disponível em: <www.somatematica.com.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- TV Escola. Disponível em: <http://tvescola.mec.gov.br>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- UOL Educação. Disponível em: <http://educacao.uol.com.br/matematica>. Acesso em: 6 abr. 2016.
- Youtube EDU. Disponível em: <www.youtube.com/channel/UCs_n045yHUiC-CR2s8AjIwg>. Acesso em: 6 abr. 2016.

TABELA TRIGONOMÉTRICA

A tabela abaixo apresenta os valores, com aproximação de três casas decimais, do seno, do cosseno e da tangente de ângulos inteiros de 1° a 89°.

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,017	1,000	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,995	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,384
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
26°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
36°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1,000

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
46°	0,719	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,469	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,747
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,331
78°	0,978	0,208	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	1,000	0,017	57,290

Unidade 1
Trigonometria na circunferência

A ação do diferencial em um automóvel

a) 2,36 m

b) roda interna: 2,59 voltas;

roda externa: 3,88 voltas

1. a) medida linear: 12,56 cm; $med\left(\widehat{AB}\right) = 180°$

b) medida linear: 35,325 cm; $med\left(\widehat{AB}\right) = 225°$

c) medida linear: aproximadamente 26,17 cm;

$med\left(\widehat{AB}\right) = 150°$

2. a) $\widehat{AB}$: 5,495 cm; $\widehat{CD}$: 10,99 cm

b) $\widehat{AB}$: 23,55 cm; $\widehat{CD}$: 1,57 cm

c) $\widehat{AB}$: 8,164 cm; $\widehat{CD}$: 9,42 cm; $\widehat{EF}$: 6,28 cm; $\widehat{GH}$: 4,396 cm

3. a) 90°

b) 100°

c) 288°

d) 306°

4. a) $\frac{\pi}{4}$ rad

b) $\frac{3\pi}{4}$ rad

c) $\frac{5\pi}{4}$ rad

d) $\frac{16\pi}{9}$ rad

5. d

6. $\pi\left(4-\sqrt{2}\right)$ cm

7. 11,16 cm

8. d

9. c

10. 51,81 u

11. a) 180°

b) 50°

c) 280°

d) $\frac{\pi}{4}$

e) $\frac{5\pi}{4}$

f) $\frac{5\pi}{12}$

12. a-III; b-IV; c-I; d-II

14. a) $55° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) $210° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

c) $\frac{17\pi}{18} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

d) $\frac{16\pi}{9} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

15. e

17. c

18. verdadeiro: b, d, e; falso: a, c

Relação fundamental da trigonometria na circunferência trigonométrica

a) $\frac{1}{\cos\alpha}$

b) $\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$

c) $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos^2\alpha}$

19. Possível resposta:

a) 1 e 15; 2 e 16; 5 e 19; 8 e 22; 10 e 24

b) 7 e 9; 4 e 12; 1 e 15; 16 e 28

c) 2 e 28; 5 e 25; 8 e 22; 10 e 20

20. a) positivo; positivo

b) negativo; negativo

c) positivo; negativo

d) negativo; positivo

e) negativo; positivo

f) positivo; negativo

21. a) 3º ou 4º quadrante

b) 1º ou 4º quadrante

c) 1º ou 2º quadrante

d) 2º ou 3º quadrante

e) 3º ou 4º quadrante

f) 1º ou 4º quadrante

22. a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

23. a) $\alpha = \frac{\pi}{6}$

b) $\alpha = \frac{11\pi}{6}$

c) $\nexists \alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

d) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

24. b

25. a) -2

b) $2\sqrt{3}$

c) 1

26. a) $P = \text{sen}\,80° \cdot (-\cos 60°)$; negativo

b) $P = \cos\frac{2\pi}{9} \cdot \left(-\cos\frac{\pi}{9}\right)$; negativo c) $P=\text{sen}\frac{\pi}{4}\cdot\text{sen}\frac{\pi}{6}$; positivo

d) $P=\cos 45°\cdot\text{sen}60°$; positivo

27. $2k\pi \le x \le \pi + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

28. a) $x=60°+k\cdot360°$ ou $x=300°+k\cdot360°$, com $k\in\mathbb{Z}$

b) $x=60°+k\cdot360°$ ou $x=120°+k\cdot360°$, com $k\in\mathbb{Z}$

c) $x=45°+k\cdot360°$ ou $x=135°+k\cdot360°$, com $k\in\mathbb{Z}$

d) $x=150°+k\cdot360°$ ou $x=210°+k\cdot360°$, com $k\in\mathbb{Z}$

e) $x=135°+k\cdot360°$ ou $x=225°+k\cdot360°$, com $k\in\mathbb{Z}$

f) $x=210°+k\cdot360°$ ou $x=330°+k\cdot360°$, com $k\in\mathbb{Z}$

29. e

30. a) 2º ou 4º quadrante

b) 1º ou 3º quadrante

c) 1º ou 3º quadrante

d) 2º ou 4º quadrante

e) 2º ou 4º quadrante

f) 1º ou 3º quadrante

31. a) $x=\frac{11\pi}{3}$

b) $x=3\pi$

c) $x=\frac{29\pi}{6}$

d) $x=\frac{15\pi}{4}$

e) $x=\frac{13\pi}{3}$

f) $x=\frac{21\pi}{4}$

32. $2k\pi \le x < \frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $2k\pi+\pi \le x < \frac{3\pi}{2}+2k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$

33.

α	$\text{tg}\alpha$
30°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	1
60°	$\sqrt{3}$
120°	$-\sqrt{3}$
135°	−1
150°	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
210°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
225°	1
240°	$\sqrt{3}$
300°	$-\sqrt{3}$
315°	−1
330°	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

34. a) $\text{med}(A\hat{O}B)=90°$ e $\text{med}(B\hat{A}O)=\text{med}(A\hat{B}O)=45°$

b) área: 1 u.a.; perímetro: $(2+2\sqrt{2})$ u

36. a) −1 b) −2 c) −1 d) 1

37. a) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$; $\text{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$

b) $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\text{tg}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$

38. $m<4$

Unidade 2

Funções, relações, equações e transformações trigonométricas

1. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) 0 f) 0

2. $\text{sen}\alpha=\frac{1}{2}$; $\text{sen}\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{sen}\gamma=0$; $\text{sen}\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{sen}\delta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. a) $x=60°$ ou $x=120°$

b) $x=\frac{5\pi}{6}$

c) $x=45°$, $x=135°$, $x=405°$ ou $x=495°$

d) $x=-\pi$, $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$ ou $x=3\pi$

4. e

6. d

7. a) 136,76 m

b) 157,57 m

c) 16,88 m

d) 43,24 m

e) 57,46 m

8. crescente: a, c, f; decrescente: b, d, e

9. a-III; b-II; c-I

11. a) $k=\frac{2}{3}$ ou $k=-\frac{2}{3}$

b) $k=4$ ou $k=-4$

c) $k=\frac{12}{7}$ ou $k=-\frac{12}{7}$

12. a) $D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le\frac{3\pi}{2}\right\}$

b) $b=2{,}5$ e $c=2$ ou $b=-2{,}5$ e $c=-2$

13. d

14. $p=0{,}1257$s

$f\simeq7{,}9554$ Hz

15. Resposta esperada: A função **h** é do tipo $g(x)=a+b\cdot\text{sen}(cx)$ e como $a=90>0$, $|b|=|75|>1$ e $|c|=\left|\frac{90}{7}\right|>1$ segue que o gráfico de **h** corresponde ao gráfico de $f(x)=\text{sen}x$ transladado 90 unidades para cima, ampliado verticalmente, com o intervalo da imagem medindo 75 vezes o comprimento do intervalo da imagem de **f**, comprimido horizontalmente e com período igual a $\frac{7\pi}{45}$.

16. Possível resposta: $g(x)=-5+3\cdot\cos(x+\pi)$

18. b

19. $P\left(\pi,-\frac{3}{4}\right)$; $Q\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5}{4}\right)$; $R\left(2\pi,\frac{13}{4}\right)$

20. b

21. b

22. c

23. $\alpha \simeq 75{,}94°$ ou $\alpha \simeq 255{,}94°$

Duração do período de incidência de luz solar

a) ▪ 21/02: 12 h 54
▪ 11/05: 10 h 53
▪ 11/09: 11 h 49
▪ 21/11: 13 h 29

b) 10 h 30; 13 h 42

c) 21/04 e 21/08

d) término: 21/03; início: 21/09

24. a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

c) $-\left(\sqrt{3}+2\right)$

d) $-\cos x$

e) $\operatorname{sen} x$

f) $-\sqrt{3}$

25. aproximadamente 2,09 metros

26. aproximadamente 6,4 m

27. a) $\frac{3+\sqrt{13}}{8}$

b) $-\frac{3+\sqrt{13}}{8}$

c) $-\frac{8-\sqrt{39}}{5}$

28. d

30. a) $-\frac{2\sqrt{10}}{7}$

b) $-\frac{3\sqrt{10}}{20}$

c) $\frac{7}{3}$

d) $-\frac{7\sqrt{10}}{20}$

e) $-\frac{2\sqrt{10}}{3}$

32. c

33. a) $10\left(1+\sqrt{2}\right)$ cm

b) $8\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm

c) $9\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm

34. d

35. 53,89 cm²

36. a) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{7\pi}{4}+2k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S=\{x \in \mathbb{R} \mid x=k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

d) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x=\frac{37\pi}{48}+k\pi \text{ ou } x=\frac{53\pi}{48}+k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

37. $\alpha = 60°$

38. d

39. a

40. $x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=\frac{7\pi}{6}$

41. a) $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ ou $\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$ b) $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

42. a) 2 m abaixo do nível médio do mar; 2 m acima do nível médio do mar

b) ▪ 2 m acima do nível do mar
▪ aproximadamente 0,88 m abaixo do nível do mar

c) ▪ $t=\frac{31}{30}=1\text{h}02$ ou $t=\frac{31}{6}=5\text{h}10$ ou $t=\frac{403}{30}=13\text{h}26$ ou $t=\frac{527}{30}=17\text{h}34$
▪ $t=0=0\text{h}$ ou $t=\frac{31}{5}=6\text{h}12$ ou $t=\frac{62}{5}=12\text{h}24$ ou $t=\frac{93}{5}=18\text{h}36$

43. 80 soluções

44. a) 100 mm de mercúrio; 80 mm de mercúrio

b) 0,75 s

45. a) 2π

b) 7; −4

c) $\text{Im}=\{y \in \mathbb{R} \mid 3 \leq y \leq 11\}$

Unidade 3
Sistemas lineares e matrizes

1. b; e
sim; e

2. a) coeficientes: 3, −9; incógnitas: p, q; termo independente: 2

b) coeficientes: 1, $-\frac{1}{3}$, 4; incógnitas: r, s, t; termo independente: 1,7

c) coeficientes: −3, 1, 5,−0,8; incógnitas: x, y, z, w; termo independente: 0

d) coeficientes: $\frac{5}{6}$, $\sqrt{2}$; incógnitas: u, v; termo independente: 13

e) coeficientes: 2, 4; incógnitas: m, n; termo independente: 5

f) coeficientes: 1, −4; incógnitas: a, b; termo independente: 3

3. c; d

4. Possível resposta: (0, 2); (2, 1); (4, 0)

5. k = 2

6. a) Sim.

b) Sim, pois é um sistema linear homogêneo.

7. c

8. a-III; b-I; c-IV; d-II

9. a) $S=\{(2,2)\}$; SPD

b) $S=\{(5{,}25; 5{,}25)\}$; SPD

c) $S=\{(5,14)\}$; SPD

d) $S=\left\{\left(k, \frac{5k-9}{20}\right), \text{ com } k \in \mathbb{R}\right\}$; SPI

10. a) Resposta pessoal. $S=\{(1,2)\}$

b) Resposta pessoal. $S=\left\{\left(\frac{4}{11}, \frac{27}{11}\right)\right\}$

11. a) $S=\{(3,1)\}$

b) $S=\left\{\left(\alpha, -\frac{\alpha}{3}-1\right)\right\}$

d) $S=\{(0,-1)\}$

f) $S=\{(0,-1)\}$

12. b

13. 4 cédulas

14. 15,900

15. Não, pois como ele comprou 3 calças no valor de R$ 59,00 cada mais 9 camisas no valor de R$ 37,00 cada, ele gastou um total de R$ 510,00.

16. b

17. d

Interpretação gráfica de um sistema linear 3×3

a) Resposta esperada: A representação de um sistema linear 2×2 é feita por meio de um par de retas no plano e a de um sistema linear 3×3, por um trio de planos no espaço.

b) Sim, pois não é possível obter um único ponto ou reta comum aos dois planos paralelos, independentemente do plano que representa uma terceira equação.

18. c; e

19. a) Não está escalonado, pois o primeiro coeficiente não nulo da 2ª equação não está à esquerda do primeiro coeficiente não nulo da 3ª equação.

b) Escalonado, pois as incógnitas de todas as suas equações estão em uma mesma ordem e o primeiro coeficiente não nulo de cada equação está à esquerda do primeiro coeficiente não nulo da equação seguinte.

20. a) $S=\{(0,-1,2)\}$; SPD

b) $S=\varnothing$; SI

c) solução geral: $S=\left\{\left(\frac{7+7k}{2}, \frac{1-k}{2}, k\right), \text{com}\, k\in\mathbb{R}\right\}$; SPI

d) $S=\{(2,3,-1)\}$; SPD

21. d

22. $S=\{(-3,2,2,1)\}$

23. 17 dias

24. 9 carros

25. a

26. caderno: R$ 3,00; caneta: R$ 1,00; borracha: R$ 0,50; lápis: R$ 0,50

27. c

28. R$ 3,00; R$ 5,00

Escalonamento no GeoGebraPrim

a) SPD; $S=\{(1,-1)\}$

b) SPI

c) SPD; $S=\{(-1,2,0,-3)\}$

30. a-II; b-I; c-III

31. a) 2×5

b) ▪ π
▪ $\sqrt{3}$
▪ 1,5
▪ -6

c) ▪ a_{13}
▪ a_{25}
▪ a_{22}
▪ a_{15}

d) 5×2

32. a) $F=\begin{bmatrix} 24 & 9 & 5 \\ 21 & 6 & 11 \\ 20 & 8 & 10 \\ 18 & 8 & 12 \\ 17 & 9 & 12 \end{bmatrix}$

b) $F^t=\begin{bmatrix} 24 & 21 & 20 & 18 & 17 \\ 9 & 6 & 8 & 8 & 9 \\ 5 & 11 & 10 & 12 & 12 \end{bmatrix}$

c) f_{42}; f_{24}

d)

Cinco primeiros colocados ao final do campeonato brasileiro de futebol da série A, em 2015

	Corinthians/SP	Atlético/MG	Grêmio/RS	São Paulo/SP	Internacional/RS
Vitórias	24	21	20	18	17
Empates	9	6	8	8	9
Derrotas	5	11	10	12	12

Fonte: Confederação Brasileira de Futebol. Disponível em: <www.cbf.com.br/competicoes/brasileiro-serie-a/classificacao/2015#.Vp0Jc5orIdU>. Acesso em: 18 jan. 2016.

33. a) UVA
b) CAJU
c) GOIABA
d) ABACATE

34. c

35. a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

b) $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

d) $D=\begin{bmatrix} 4 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}$

36. a) $x=1$

b) $y=1$; $z=0$

c) $\alpha=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ com $k\in\mathbb{Z}$; $\beta=\pi+2k\pi$ com $k\in\mathbb{Z}$;
$\delta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ com $k\in\mathbb{Z}$

37. b

Semáforos e matrizes

a) ▪ 1min
▪ 0,5min
▪ 1min

b) ▪ C para A: 90 veículos
▪ B para A: 150 veículos
▪ A para B: 2 700 veículos

38. a) $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 11 & 10 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 22 & 5 & 0 \\ 16 & 20 & -8 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & 10 & 11 \\ 4 & 12 & 27 \\ 30 & 9 & 18 \end{bmatrix}$

39. a-I; b-IV; c-III; d-II

40. a) $A=\begin{bmatrix} 4\,994\,719 & 2\,669\,311 & 4\,737\,420 \\ 5\,193\,079 & 2\,687\,049 & 4\,826\,038 \end{bmatrix}$;

$B=\begin{bmatrix} 5\,202\,057 & 3\,100\,360 & 5\,130\,994 \\ 5\,488\,872 & 3\,148\,076 & 5\,313\,532 \end{bmatrix}$

b) $B-A=\begin{bmatrix} 207\,338 & 431\,049 & 393\,574 \\ 295\,793 & 461\,027 & 487\,494 \end{bmatrix}$

c) O aumento da população feminina e masculina nos estados da região Sul do Brasil entre os anos de 2000 e 2010.

41. a) $Z=\begin{bmatrix} 22 & 19 & 29 \\ 20 & 23 & 25 \end{bmatrix}$

b) 3º ano

42. a) $x=2$; $y=-5$; $z=1$ ou $z=-1$

b) $x=7$; $y=-\frac{1}{2}$; $z=5$

c) $x=\frac{2}{3}$; $y=0$ ou $y=-1$; $z=\frac{3}{2}$

43. a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & -7 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

Não, pois as matrizes são de ordens diferentes, sendo A^t de ordem 3×2 enquanto B^t é de ordem 2×3.

44. $\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$

45. a) $x=-3$; $y=2$; $z=1$

b) $x=-3$; $y=\frac{5}{2}$; $z=0$

c) $x=3$; $y=-9$; $z=-3$

d) $x=-1$; $y=0$; $z=-2$

46. $\begin{bmatrix} 26 & 25 & 24 \\ 9{,}5 & 10{,}5 & 9 \end{bmatrix}$

47. a) $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 12 & 0 \\ -14 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix}$

48. b) 1×2 d) 2×6 e) 7×2

49. a) $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 15 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -10 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 8 \\ -11 & -2 & 25 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -20 & -9 \\ 22 & 6 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 12 \\ -4 & 40 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 9 & -85 \\ -6 & 74 \end{bmatrix}$

50. e

51. a) Preço, em reais, que a empresa 1 cobra para transportar o produto **C** aos dois países.

b) a_{21}

c) A empresa 2, pois seu preço é menor que o da empresa 1.

52. c

53. a) $A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

d) $D^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

55. a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{17}{3} & 6 \\ -\frac{5}{3} & -2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -\frac{71}{12} & \frac{8}{3} \\ \frac{9}{4} & -1 \end{bmatrix}$

56. a) $X=A^{-1}$ b) $X=B^{-1}\cdot A^{-1}$ c) $X=A^{-1}\cdot B$

57. $M^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

58. b

59. a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 17 & 12 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$

60. $x = 3$; $y = -5$

Unidade 4

Determinantes e resolução de sistemas lineares

1. a) $\det A = -3$
   b) $\det B = 0$
   c) $\det C = -9$
   d) $\det D = 5$

2. a

3. $\det A = \det B = \det C = 0$; As três matrizes apresentaram uma linha na qual todos os elementos são iguais a zero e também o mesmo determinante, que é zero.
   Possível resposta: $X = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{bmatrix}$; Qualquer matriz quadrada que apresente todos os elementos de uma linha ou coluna iguais a zero terá determinante igual a zero.

4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
   a) $\det(A \cdot B) = -12$
   b) $\det(A - B) = 9$
   c) $\det(B - A) = 9$

5. Resposta esperada: Quando uma matriz apresenta um par de linhas ou de colunas iguais, seu determinante é igual a zero.

6. a) $\det A = -1$
   b) $\det B = 3$
   c) $\det C = -1$
   d) $\det(A \cdot C) = 1$
   e) $\det(B \cdot C) = -3$

7. Sim, pois: $\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det A \cdot \det A = (\det A)^2$

8. a

9. Verdadeira; **A** é invertível, então $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, logo, $\det A \neq 0$.

10. a) -24
    b) 8
    c) -192

11. d

Calculando o determinante de uma matriz com o calc

a) 66
b) 75
c) -234

12. a) $\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{matriz incompleta do sistema}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{matriz das incógnitas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -6 \\ 8 \end{bmatrix}}_{\text{matriz dos termos independentes}}$
    b) $\underbrace{\begin{bmatrix} -3 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}}_{\text{matriz incompleta do sistema}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{matriz das incógnitas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -15 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}}_{\text{matriz dos termos independentes}}$

13. a) $S = \{(1, -1, 3)\}$ b) $S = \varnothing$ c) $S = \{(-5, 25, 9)\}$

14. $\begin{cases} 2x + 3y - z = -4 \\ -2x - 3y + 3z = 10 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$; $x = -2$, $y = 1$, $z = 3$

15. e

16. c

17. $x = 5$; $y = 3$; $z = 2$

18. $x = 12$; $y = 9$; $z = 11$

19. $\begin{cases} x + y + z = 8\,000 \\ 0{,}3x + 0{,}2y + 0{,}5z = 2\,580 \\ 1{,}5x + y + z = 9\,000 \end{cases}$; R = R\$ 4 820,00

Unidade 5

Análise combinatória

Princípio aditivo de contagem

a) 7 opções; aditivo
b) 16 opções; multiplicativo
c) 6 maneiras; aditivo
d) 18 maneiras; multiplicativo

Fatorial com a calculadora científica

a) 3 628 800
b) 1 088 640
c) 518 400
d) 5 046
e) 871 782 912
f) 1 860 480

1. c

2. 78 125 possibilidades

3. 256

4. a) 16 maneiras
   b) 112 maneiras

5. a) 96 b) 40 c) 18

6. a) 7 920 b) 260 c) $n^2 - n$ d) $\frac{1}{n+4}$

Arranjo simples com a calculadora científica

a) 95 040
b) 8 910 720
c) 16 824
d) 558 144
e) 3 240
f) 2 494 979 008

7. a) 12 b) 6 c) 120 d) 66 e) 59 f) 180

8. a) 6 b) 24 c) 120 d) 720

9. d

10. a) 720 senhas b) 48min

11. d

12. 336 maneiras

Combinação simples com a calculadora científica

a) 210
b) 817 190
c) 6 310 128
d) 92 664
e) 13 244
f) 4 348 125

13. a) 84

b) 1

c) $\frac{n!}{p!}$

d) $(n+1)$

e) $\frac{1}{(n-p)!}$

f) $\frac{1}{p!}$

14. c-e; b-d; a-f

$$C_{n,p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\frac{n!}{(n-p)!p!}=\frac{n!}{(n-p)![n-n+p]!}=\frac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!}=C_{n,n-p}$$

15. c

16. 12 equipes

17. 2 970 modos distintos

18. 155 117 520

19. a

20. 96

21. c

23. a) 60

b) 45 360

c) 259 459 200

d) 75 600

24. a) 7 560

b) 151 351 200

c) 55 426 800

d) 3 326 400

e) 174 594 420

f) 92 400

25. 55

26. a) 180

b) 240

c) 60

d) 120

27. d

28. a) 28

b) 1

c) 1

d) 10

e) 70

f) 1 716

29. a) 8

b) 256

c) 4 096

d) 8 388 608

30. a) 6

b) 3 ou 6

c) 2 ou 10

d) 2 ou 5

e) 15

31. a) 165 b) 55 c) 10 d) 45

32. c

O Binômio de Newton no wxMaxima

a) $27x^3+27x^2y+9xy^2+y^3$

b) $x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$

c) $\frac{x^8}{6\,561}-\frac{8x^7y}{2\,187}+\frac{28x^6y^2}{729}-\frac{56x^5y^3}{243}+$
$+\frac{70x^4y^4}{81}-\frac{56x^3y^5}{27}+\frac{28x^2y^6}{9}-\frac{8xy^7}{3}+y^8$

d) $-8(y-x)^3$

e) $\frac{(y+2x)^6}{64}$

f) $(y-2)^7$

33. a) $z^5+5z^4w+10z^3w^2+10z^2w^3+5zw^4+w^5$

b) $x^4y^4+4x^3y^3z+6x^2y^2z^2+4xyz^3+z^4$

c) $x^3-6x^2\sqrt{x}z+15x^2z^2-20x\sqrt{x}z^3+15xz^4-6\sqrt{x}z^5+z^6$

d) $1-2w+\frac{3w^2}{2}-\frac{w^3}{2}+\frac{w^4}{16}$

34. a) 78 125

b) $-\frac{243}{32}$

c) 81

d) 256

35. $p=6$

36. a) $3\,432x^7y^{14}$

b) y^{28}

c) 2 002

37. b

39. b

40. a) 9

b) $81\,648a^2b^6$

c) 90 720

d) $256a^8$

Unidade 6

Probabilidade

1. a) $\Omega=\{C, K\}$

b) sim; Não, pois o resultado dessa disputa não depende somente da sorte, mas sim da habilidade de cada um dos jogadores no jogo de xadrez.

2. a) $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\}$

b) $A=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$

c) $B=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

d) $C=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

3. a) $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

b) $A=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$

c) $B=\{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

d) $C=\varnothing$

e) $D=\{(1,5),(1,6),(2,6),(5,1),(6,1),(6,2)\}$

4. Resposta esperada: Porque o espaço amostral é $\Omega=\{2\}$, portanto, um número ímpar é um evento impossível.

5. a) $\Omega=\{(C,C,C),(C,C,K),(C,K,C),(C,K,K),(K,C,C),(K,C,K),(K,K,C),(K,K,K)\}$
b) $A=\{(C,C,C),(K,K,K)\}$
c) $B=\{(C,C,C),(C,C,K),(C,K,C),(C,K,K),(K,C,C),(K,C,K),(K,K,C)\}$

Paradoxo dos aniversários

a) aproximadamente 7,43%
b) aproximadamente 9,46%
c) aproximadamente 11,69%
d) aproximadamente 14,11%

Não, pois o aumento da quantidade de pessoas é constante, e o aumento do valor da probabilidade não é constante.

6. a) 1 em 10 ou $\frac{1}{10}$ ou 10%
b) 0
c) 4 em 10 ou $\frac{2}{5}$ ou 40%
d) 5 em 10 ou $\frac{1}{2}$ ou 50%
e) 2 em 10 ou $\frac{1}{5}$ ou 20%

7. 25%

8. a) 1 em 120 ou $\frac{1}{120}$ ou $0,8\overline{3}\%$
b) 72 em 120 ou $\frac{72}{120}$ ou 60%
c) 48 em 120 ou $\frac{48}{120}$ ou 40%
d) 24 em 120 ou $\frac{24}{120}$ ou 20%
e) 118 em 120 ou $\frac{118}{120}$ ou $98,\overline{3}\%$
f) 116 em 120 ou $\frac{116}{120}$ ou $96,\overline{6}\%$

9. 1 em 1000 000 ou $\frac{1}{1000\,000}$ ou 0,0001%

10. e

11. a) 1 024
b) 120
c) aproximadamente 11,72%

12. c

14. b

15. aproximadamente 99,61%

16. a) aproximadamente 27%
b) 90%

17. a) ▪ redes sociais: $41,\overline{6}\%$
▪ *sites* de busca: $16,\overline{6}\%$
▪ *sites* de entretenimento: 12,5%
b) $58,\overline{3}\%$

18. a) 1 580 mulheres
b) ▪ nenhum filho: 20%
▪ pelo menos um filho: 80%
▪ até dois filhos: 79%
▪ três filhos ou mais: 21%

19. c

20. c

21. a) $29,1\overline{6}\%$
b) $41,\overline{6}\%$
c) $54,1\overline{6}\%$

22. d

23. a) $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2)$ $(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),$ $(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),$ $(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),$ $(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$
b) Não, pois a quantidade de pares de números de resultados ímpares e pares é a mesma. Portanto, a probabilidade de ocorrer um número ímpar é igual à de ocorrer um número par.

24. ▪ 50%
▪ $19,\overline{4}\%$
▪ $66,\overline{6}\%$
▪ $16,\overline{6}\%$

25. b

26. a) 2,5%
b) 35%
c) ▪ 82,5%
▪ 72,5%

27. $\frac{7}{12}$

28. 60%

29. a) 50%
b) 20%
c) 10%
d) 60%

30. a) $8,\overline{3}\%$
b) 25%
c) 75%

31. a

32. a) Probabilidade de uma compra ser de até R$ 300,00 sabendo que foi paga com dinheiro; $66,\overline{6}\%$
b) Probabilidade de uma compra não ser paga com cheque sabendo que seu valor foi maior que R$ 300,00; $74,\overline{074}\%$
c) Probabilidade de uma compra ser paga com cartão sabendo que seu valor não foi maior que R$ 300,00; 44%
d) Probabilidade de uma compra ser acima de R$ 300,00 sabendo que foi paga com cheque; aproximadamente 53,85%
e) Probabilidade de uma compra não ser paga com dinheiro sabendo que seu valor não foi de até R$ 300,00; $85,\overline{185}\%$
f) Probabilidade de uma compra não ser de até R$ 300,00 sabendo que foi paga com cartão; $59,\overline{259}\%$

33. a) independente
b) sucessivo
c) independente
d) sucessivo
e) independente

34. aproximadamente 0,26%

35. a

36. $\frac{1}{16}$

37. a) 149
b) aproximadamente 49,66%
c) ▪ aproximadamente 29,41%
▪ aproximadamente 43,59%
▪ $33,\overline{3}\%$
▪ $24,\overline{324}\%$

38. a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{5}{6}$

39. c

40. $\frac{1}{4}$

41. a) 8%
b) 17,5%
c) aproximadamente 94,29%
d) 73%
e) 20%
f) aproximadamente 47,83%

42. $\frac{1}{64}$ ou 1,5625%

43. $\frac{1}{67\,108\,864}$ ou aproximadamente 0,0000015%

44. 25%

45. 31,25%

46. b

47. a) aproximadamente 11,9%
b) aproximadamente 14,47%
c) aproximadamente 18,59%
d) aproximadamente 97,62%

48. ▪ aproximadamente 3,08%
▪ aproximadamente 0,00005%
▪ aproximadamente 10,71%

49. d

50. c

51. a) aproximadamente 20,15%
b) aproximadamente 86,89%
c) aproximadamente 0,39%

52. aproximadamente 0,000039%

Cálculo de probabilidades na Biologia

a) aproximadamente 4,39%
b) aproximadamente 6,09%
c) aproximadamente 10,35%

Unidade 7
Estatística

1. a) idioma
b) qualitativa nominal
c) Inglês; Espanhol; Francês; Italiano.

2. a) país e óbitos
b) qualitativa: país; quantitativa: óbitos

4. qualitativa ordinal: nº (número do endereço), grau de instrução; qualitativa nominal: nome, *e-mail*, cidade, estado, sexo, endereço, estado civil, esporte favorito; quantitativa discreta: idade, quantidade de filhos; quantitativa contínua: massa, altura

5. I: quantitativa contínua
II: qualitativa ordinal
III: qualitativa nominal
IV: quantitativa discreta
V: qualitativa nominal
VI: qualitativa nominal
VII: qualitativa nominal

6. a) 86%
b) Sim, pois a probabilidade de escolher um aluno da pré-escola que estude na rede particular de ensino é de 26,3% enquanto a de escolher um aluno do ensino médio que estude em uma instituição particular é de 12,9%.
c) 1 845 818
d) ▪ 363 000; aproximadamente 0,18%
▪ Possíveis respostas: sexo; idade; classe econômica; escolaridade; município em que mora; tipo de residência.

7. a

8. 9 fichas pretas, 21 fichas azuis, 5 fichas vermelhas e 15 fichas verdes; Resposta pessoal.

9. a) aproximadamente 13,5%
b) aproximadamente 83,1%
c) aproximadamente 8,8%

10. a) Não, pois foram feitos poucos lançamentos.
b) Sim, pois, em virtude da grande quantidade de lançamentos, a frequência relativa da ocorrência de cada evento deveria estar próxima de 25%.

11. b

Índice de Gini

a) Sim, porque em 2011 o Índice de Gini era 0,529, enquanto em 2014 era 0,515.
b) aproximadamente 0,523
c) diminuir; Representa que o grau de concentração de renda está diminuindo.

O programa brasileiro de etiquetagem veicular

a) Não, porque o mais econômico é representado pela letra A.
b) A quantidade de quilômetros que o veículo percorre com um litro de etanol na estrada.
c) ▪ Está acima da média, porque com 50 litros o veículo deveria percorrer 490 km na cidade.
▪ Está abaixo da média, porque com 40 litros o veículo deveria percorrer 324 km na estrada.

12. a) 126 pessoas
b) Sim, porque a maior frequência ocorre no sábado.

14. a) ▪ 6 partidas
▪ 3 partidas
▪ 11 partidas
b) $\overline{x} = 0,75$ gol; Md = 1 gol; Mo = −1 gol ou Mo = 2 gols

15. d

16. média aritmética: aproximadamente 0,727;
mediana: 0,712;
moda: 0,693

17. b

18. a

19. a)

IDSUS das unidades de federação brasileiras em 2012

IDSUS	Frequência (f)
4,0 ⊢ 4,5	2
4,5 ⊢ 5,0	1
5,0 ⊢ 5,5	15
5,5 ⊢ 6,0	7
6,0 ⊢ 6,5	2

Fonte: Portal da Saúde. Disponível em: <http://portalsaude.saude.gov.br/index.php/cidadao/principal/agencia-saude/noticias-anteriores-agencia-saude/1577-ministerio-avalia-qualidade-dos-servicos-de-saude>. Acesso em: 21 jan. 2016.

b) moda: 5,25; média: aproximadamente 5,36; mediana: 5,25

Calc e as medidas de tendência central

média: 9,125; mediana: 9; moda: 12

Velocidade da internet

a) Suíça; Estados Unidos; Alemanha; Austrália; Reino Unido; França; Espanha; Itália.

b) Suíça; 38%

c) média; 512 Kbps – 2 Mbps

d) Não, porque a velocidade de conexão à internet da maioria dos brasileiros era de 512 Kbps a 2 Mbps.

Alguns cálculos estatísticos com a calculadora científica

a) média aritmética: $6,21\overline{6}$; desvio padrão: aproximadamente 2,04; variância: 4,17

b) média aritmética: $6,1\overline{3}$; desvio padrão: aproximadamente 3,65; variância: 13,32

c) média aritmética: 6,6; desvio padrão: aproximadamente 4,10; variância: 16,84

Medidas de dispersão no Calc

a) desvio médio: 1,93; variância: 5,29; desvio padrão: 2,30

b) desvio médio: 4,48; variância: 29,63; desvio padrão: 5,44

c) desvio médio: 17,83; variância: 545,82; desvio padrão: 23,36

d) desvio médio: 11,99; variância: 215,49; desvio padrão: 14,68

20. masculino

22. Resposta esperada: Os desvios, em valores absolutos, em relação à média aritmética.

23. b

24. a) 2,00 m b) 0,1 m

25. d; e; f

26. piloto **A**, piloto **C** e piloto **B**

27. d

28. a) jogador **A**: 10 pontos; jogador **B**: 10 pontos; jogador **C**: 10 pontos.

b) jogador **A**: aproximadamente 2,74 pontos; jogador **B**: aproximadamente 2,12 pontos; jogador **C**: aproximadamente 0,71 pontos.

Coeficiente de variação

a) na prova escrita

b) bpm

Unidade 8

Matemática financeira

1. a) R$ 303,03

b) ▪ R$ 331,44
▪ R$ 165,72
▪ R$ 5 524,00

2. a) ▪ R$ 35,00
▪ R$ 45,00
▪ R$ 70,00

b) ▪ R$ 65,60
▪ R$ 139,40
▪ R$ 180,40

3. a) China, Romênia e Sudão; Grécia e Brasil

b) Brasil: aproximadamente 2,03%;
China: aproximadamente 9,1%;
Grécia: aproximadamente –1,64%;
Romênia: aproximadamente 3,89%;
Sudão: aproximadamente 11,03%

4. a

5. a) ▪ R$ 800,00: R$ 64,00
▪ R$ 1 100,00: R$ 88,00
▪ R$ 1 950,00: R$ 175,50
▪ R$ 3 900,00: R$ 429,00

b) ▪ R$ 49,76: R$ 622,00
▪ R$ 108,00: R$ 1 350,00
▪ R$ 162,00: R$ 1 800,00
▪ R$ 341,00: R$ 3 100,00

c) Sim, pois 8% de R$ 1 250,00 corresponde a R$ 100,00.

6. aproximadamente 11,67%

7. a) R$ 220,00

b) 8,5%

8. c

9. a) R$ 202,18

b) R$ 1 684,82

10. R$ 909,50

11. banco **A**: 20%; banco **B**: 50%

12. a) R$ 1 800,00

b) R$ 1 584,00

13. R$ 353,13

14. Não, pois o valor do desconto é determinado sobre o valor capital acrescido de 15%, o que torna este desconto maior do que o valor que foi acrescido.

15. b

16. R$ 100,96

17. a) 46,674%

b) R$ 3,50

18. c

19. 836

20. 25%

21. a) R$ 96,00

b) 20%

22. ▪ R$ 1 500,00: R$ 2 207,52
▪ R$ 2 000,00: R$ 2 943,36
▪ R$ 2 200,00: R$ 3 237,70
▪ R$ 3 000,00: R$ 4 415,04

Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC)

a) Brasília; Campo Grande

b) 698,18%

Juros compostos com a calculadora

a) R$ 5 935,59

b) R$ 4 748,47

c) R$ 8 479,41

d) R$ 2 035,06

23. aproximadamente 14 dias

24. aproximadamente 18%

25. R$ 502,67

26. R$ 954,49

27. a) aproximadamente 10,53%

b) R$ 200,00

28. R$ 4 683,79; R$ 1 183,79

29. 12 anos

30. R$ 3 509,08

31. a) R$ 17 150,85

b) R$ 76 576,89

32. d

33. aproximadamente 7,5%

34. b

35. a) R$ 5 484,08

b) R$ 13 002,86

c) sim; R$ 2 034,70

36. d

37. aproximadamente 0,02A

aproximadamente R$ 20,00

38. a) R$ 3 600,00

b) R$ 3 841,21

39. a) R$ 2 506,85

b) R$ 5 912,06

40. R$ 1 091,40

41. a) R$ 1 400,00 e R$ 2 315,25

b) R$ 390,25

42. b

43. d

44. a) R$ 68 129,63

b) Lucas: R$ 43 355,22;

Thais: R$ 24 774,41

Conversão da taxa de juros

a) 0,797% a.m.

b) 20% a.a.

c) 1,877% a.m.

d) 7% a.a.

$i_d = (1+i_m)^{\frac{1}{30}} - 1$; $i_m = (1+i_d)^{30} - 1$

Aposentadoria

a) R$ 72 690,03

b) R$ 250,00

c) R$ 460,84

45. f: $c =$ R$ 2 000,00, $i = 3{,}5\%$; g: $c =$ R$ 1 500,00, $i = 10\%$

46. a) taxa de juros simples: investimento **B**; taxa de juros compostos: investimento **A**

b) investimento **B**; investimento **A**

c) capital **c**

47. a) juros simples: $f(t) = 5\,000 + 350\,t$;

juros compostos: $g(t) = 5\,000\,(1{,}07)^t$

b) 1 ano

c) A opção 1, pois o montante obtido será maior.

d) juros simples R$ 5 700,00 e juros compostos R$ 5 724,50; R$ 24,50

48. a) proposta 1: $M_1(t) = 10\,000 + 850t$;

proposta 2: $M_2(t) = 10\,000(1{,}065)^t$

b) ▪ 5 meses: proposta 1

▪ 9 meses: proposta 1

▪ um ano: proposta 2

▪ um ano e meio: proposta 2

c) a partir do 10º mês

50. a) regime de juros compostos

b) $i = 4{,}5\%$

c) $M(t) = 2\,000(1{,}045)^t$

51. a) sistema Price; sistema SAC

b) R$ 346,98; R$ 336,00

c) R$ 2 400,00

52. Não, pois o valor das prestações, de R$ 398,40, excede os 25% da renda desse trabalhador, que é de R$ 375,00.

53. a) ▪ R$ 1 096,66

▪ R$ 390,49

▪ R$ 6 462,31

▪ R$ 880,02

b) ▪ R$ 833,33

▪ R$ 1 058,33

▪ R$ 6 666,68

▪ R$ 75,00

54. a) R$ 501,68

b) R$ 474,66

55. a) R$ 5 000,00

b) $i = 2{,}5\%$

c) R$ 2 500,00

d) 8 parcelas

e) R$ 640,63

56. a) R$ 500,00

b) R$ 15 000,00; R$ 10 000,00

c) R$ 360,00; R$ 105,00

d) R$ 920,00; R$ 515,00

57. d

Calculadora do cidadão

a) R$ 160,51

b) 15 meses

c) R$ 3 800,00

d) 2,35%

BIBLIOGRAFIA

ALMOULOUD, Saddo Ag. *Fundamentos da didática da Matemática*. Curitiba: Ed. UTFPR, 2007.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2004.

BIEMBENGUT, Maria Sallet. *Modelagem Matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2003.

BOLDRINI, José Luiz et al. *Álgebra linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

BOLETIM DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Rio Claro: Unesp.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e Educação Matemática*. 3. ed. 2. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Tendências em Educação Matemática).

BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (Ensino Médio)*. Brasília, [s.d.].

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília, 2000.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação: reflexões sobre a educação matemática*. São Paulo: Summus, 1986.

____________. *Educação matemática: da teoria à prática*. 12. ed. Campinas: Papirus, 2005. (Perspectivas em Educação Matemática).

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA. São Paulo: SBEM.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2007.

GARDNER, Howard. *Inteligências múltiplas: a teoria na prática*. Tradução de Maria A. V. Veronese. Porto Alegre: Artmed, 1995.

HAZZAN, Samuel et al. *Matemática financeira*. São Paulo: Atual, 1993.

IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números*. Tradução de Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. 2 v.

LEITE, Ângela. *Aplicações da Matemática: administração, economia e ciências contábeis*. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com geometria analítica*. 3. ed. Tradução de Cyro de Carvalho Patarra. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1.

MACHADO, Nílson José. *Epistemologia e didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente*. 3. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

____________. *Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua*. São Paulo: Cortez/Autores Associados, 1990. (Educação contemporânea, 59).

MAGALHÃES, Marcos Nascimento et al. *Noções de probabilidade e estatística*. São Paulo: Edusp, 2004. (Coleção Acadêmica).

MIGUEL, Antonio et al. *História da matemática em atividades didáticas*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

NACARATO, Adair Mendes; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela (Orgs.). *A formação do professor que ensina Matemática: perspectivas e pesquisas*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

PAIS, Luiz Carlos. *Ensinar e aprender Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PROFESSOR de Matemática (coleção). Rio de Janeiro: SBM.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo: SBM.

TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Tendências em Educação Matemática).

TÓPICOS de História da Matemática: para uso em sala de aula (coleção). São Paulo: Atual, 1992.

VIEIRA, Ana; VELOSO, Eduardo; LAGARTO, Maria João (Orgs.). *Relevância da história no ensino da matemática*. Tradução de Isabel Cristina Dias et al. Lisboa: GTHEM/APM. Grafis, n. 1, 1997.

ZETETIKÉ. Campinas: Cempem/Unicamp.

MATEMÁTICA

ASSESSORIA PEDAGÓGICA

2

Ensino Médio

APRESENTAÇÃO

Seja em situações corriqueiras, como decidir qual tipo de produto ou serviço melhor satisfaz suas necessidades, ou em momentos mais especiais, como no planejamento familiar, uma questão muito importante para qualquer indivíduo é o desenvolvimento de sua autonomia, da capacidade de tomar decisões conscientemente, avaliando os benefícios e os possíveis malefícios, preservando e incentivando o bem-estar em sociedade.

Esse desenvolvimento ocorre ao longo da vida do indivíduo, que sofre influências de diversos fatores, sendo um deles sua vivência escolar. No ambiente escolar não existe uma única disciplina responsável por esse desenvolvimento: todas têm sua parcela de contribuição, e a integração entre elas é um dos fatores que promovem tal desenvolvimento. Nesse contexto, a Matemática é de grande importância, pois possibilita espaços para discussão e análise, nos aspectos qualitativos e quantitativos, de temas relevantes para a formação do cidadão.

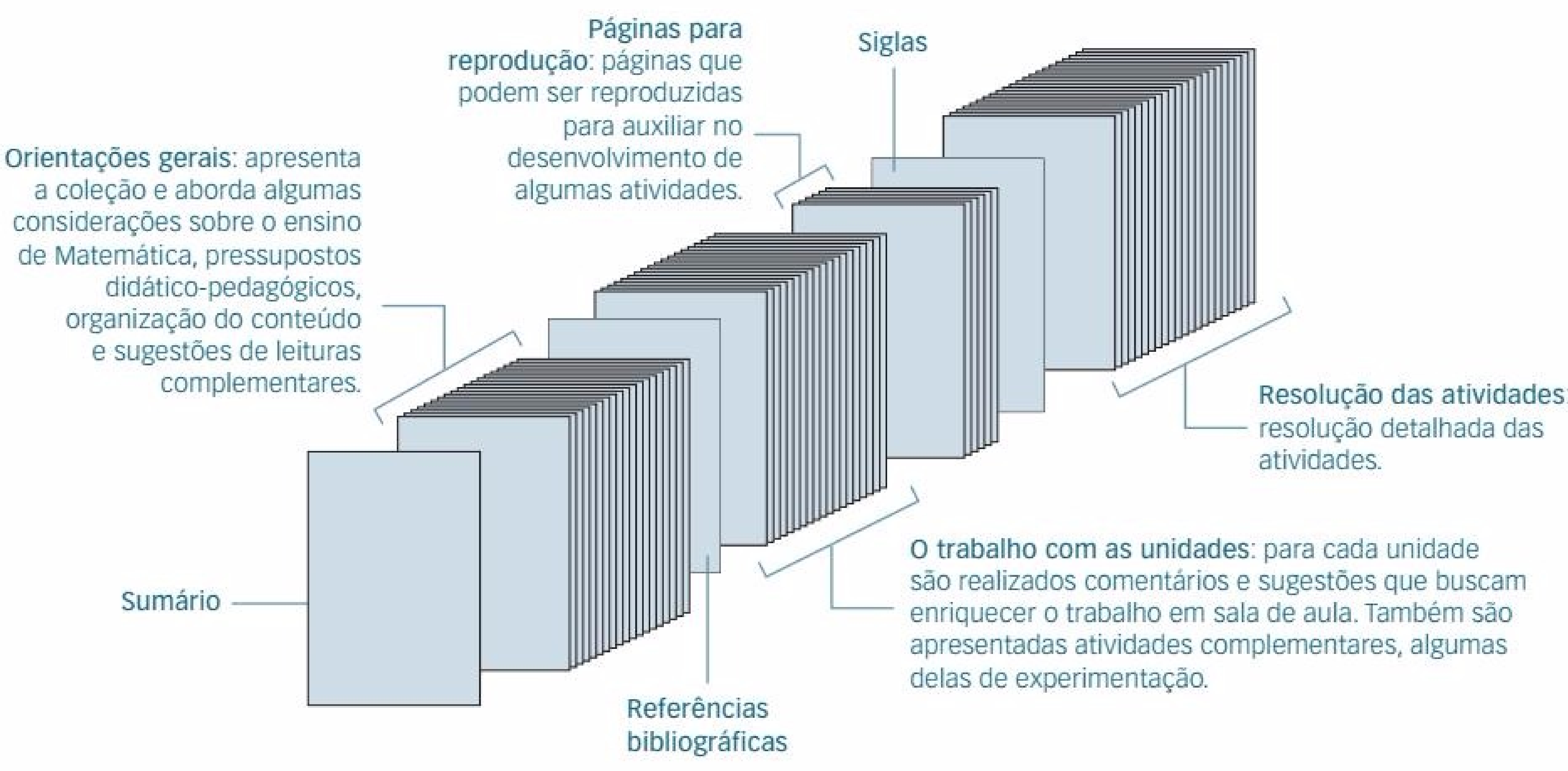
Sendo assim, propus uma coleção de livros didáticos de Matemática direcionada ao Ensino Médio. Nesta coleção, tenho o compromisso de, por meio da Matemática, trabalhar competências e habilidades que contribuam na formação de cidadãos capazes de compreender e transformar o mundo à sua volta, encorajados a analisar situações-problema em busca de soluções, pautando-se em conhecimentos científicos.

Além do livro do aluno na íntegra, o manual do professor traz informações adicionais, distribuídas por todos os volumes, e esta **Assessoria Pedagógica**, na qual são abordados os pressupostos teóricos da coleção, bem como comentários e sugestões acerca dos conteúdos presentes nas unidades. Os pressupostos apresentados não têm o objetivo de esgotar os assuntos tratados, mas de trazer informações e provocar reflexões, possibilitando a busca de outras fontes, algumas delas indicadas também nesta **Assessoria Pedagógica**.

Bom trabalho!

O autor

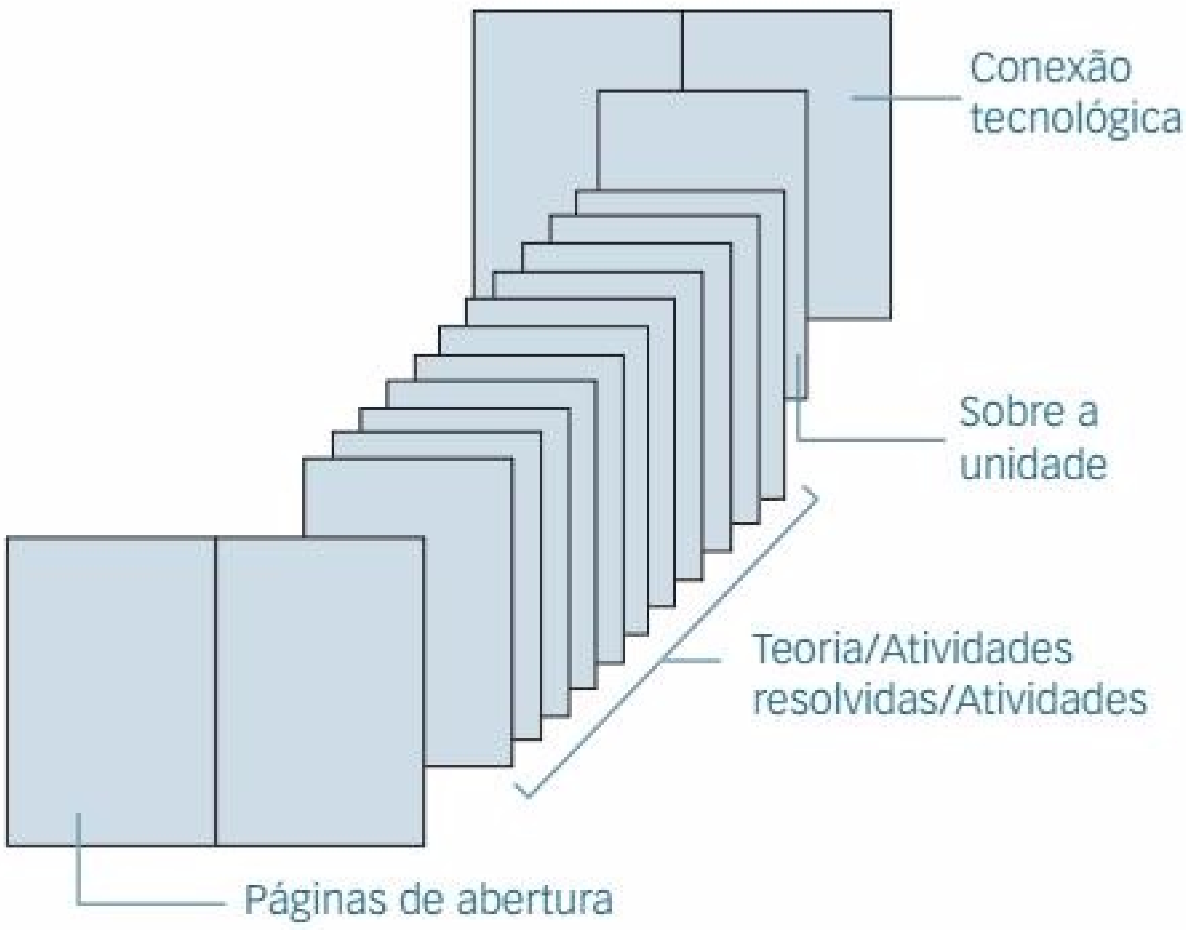
Nesta assessoria você encontrará:



SUMÁRIO

Conheça a coleção

Esta obra é composta de três volumes, destinados ao Ensino Médio (1º ao 3º ano). Cada um dos volumes está organizado em oito unidades, que por sua vez estão divididas em tópicos e subtópicos. As unidades possuem basicamente a seguinte estrutura:



Todas as unidades têm início com duas páginas de abertura espelhadas, nas quais são apresentadas informações que servirão de base para um diálogo inicial entre os alunos e o professor. Nestas páginas também é apresentada a seção **Objetivos da unidade**.

Em seguida, são dispostos os conteúdos, em tópicos e subtópicos, e as seções **Como funciona**, **Atividades resolvidas** e **Atividades**. Algumas atividades estão destacadas pelos ícones: **Desafio**, **Calculadora**, **Tratamento da informação**, **Produção textual** e **Em grupo**. As atividades apresentadas nesta coleção abrangem diversificada gama de características e objetivos, que buscam contemplar o desenvolvimento de habilidades e competências como observação, investigação, percepção de regularidades, análise, síntese, diversidade de formas de expressão e registro de procedimentos, argumentação e tomada de decisões, inferência e prova, generalizações etc.

No desenvolvimento dos conteúdos, outros elementos editoriais trazem informações adicionais ou questionamentos, tais como: seção especial, quadro de vocabulário, quadro com múltiplas aplicações, quadro informativo, quadro de teoria e quadro de temas transversais.

Ao final de cada unidade, após a última seção **Atividades**, temos a seção **Sobre a unidade**.

Ao final de algumas unidades, temos a seção **Conexão tecnológica**. Ela apresenta orientações para o trabalho com *softwares* que podem auxiliar os alunos na compreensão de conteúdos matemáticos.

Para finalizar cada volume, após a última unidade, são apresentadas **Sugestões de livros e *sites*** para os alunos, as **Respostas** e a **Bibliografia**.

As seções

Páginas de abertura

Considerando que os conhecimentos prévios dos alunos são de grande importância no processo ensino-aprendizagem, as duas páginas iniciais de cada unidade apresentam elementos (textos, fotografias, questões e esquemas) que auxiliarão o professor a desencadear uma discussão junto aos alunos, explorando seus conhecimentos relativos aos conteúdos da unidade.

Essa discussão deve ser conduzida de maneira a criar um ambiente em que, além de resgatar alguns dos conhecimentos prévios e levantar questões envolvendo conteúdos que serão trabalhados, os alunos desenvolvam a habilidade de argumentação e aprendam a ouvir e a respeitar a opinião dos colegas.

As questões sugeridas na seção podem ser discutidas oralmente com toda a turma ou solicitado aos alunos que, individualmente ou em grupo, as respondam por escrito.

Objetivos da unidade

Localizada nas páginas de abertura, essa seção lista os principais objetivos a serem atingidos pelos alunos no estudo da unidade. Declarar esses objetivos contribui para o estabelecimento do contrato didático entre o professor e os alunos, uma vez que auxilia a esclarecer o que é esperado dos alunos naquela unidade, em relação ao conteúdo matemático. Isso possibilita que os alunos reflitam sobre sua aprendizagem.

Teoria

Nas páginas de teoria, em geral, os conteúdos são introduzidos por meio de problemas e sistematizados gradualmente. Nessas páginas são frequentemente apresentadas informações adicionais, relacionadas, por exemplo, ao contexto abordado.

Atividades resolvidas

Apresentada logo após os tópicos de teoria, a seção **Atividades resolvidas** traz atividades que buscam complementar a teoria e os exemplos apresentados, e auxiliar os alunos na resolução das demais atividades propostas, contribuindo no desenvolvimento de sua autonomia. Em algumas atividades, são sugeridas mais de uma estratégia de resolução.

Atividades

A seção **Atividades** segue após a seção **Atividades resolvidas** e explora principalmente os conteúdos estudados no tópico, com atividades organizadas em nível crescente de complexidade.

As atividades dessa seção devem ser realizadas pelos alunos com base na orientação do professor, mas não necessariamente todas em sala, o que visa contribuir para o desenvolvimento da autonomia dos alunos.

Destaque das atividades

Os destaques nas atividades serão realizados por meio destes ícones:

DESAFIO

Atividades com caráter desafiador em razão de seu nível de complexidade ou estratégia de resolução.

CALCULADORA

Atividades nas quais é necessário ou conveniente o uso da calculadora, além de apresentarem alguns procedimentos de uso.

TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Atividades que exploram, além dos conteúdos da unidade, aspectos relacionados ao campo Tratamento da informação.

PRODUÇÃO TEXTUAL

Atividades nas quais os alunos têm a oportunidade de produzir pequenos textos.

EM GRUPO

Atividades em que o trabalho em grupo pode ser explorado.

Na realização das atividades propostas, os alunos devem ser orientados a não fazer anotações no livro didático, pois ele é não consumível e será utilizado por outro aluno no ano seguinte.

Em algumas atividades são solicitados materiais que não acompanham o livro didático (calculadora, régua, compasso etc.). Nesses casos, os alunos devem ser orientados a trazê-los para a sala de aula. Na medida do possível, esses materiais podem ser providenciados pelo professor. Em algumas situações, os alunos podem compartilhar os materiais.

Incentive-os a realizarem parte das atividades propostas no livro didático como tarefa de casa. Combine com eles algumas aulas para que sejam sanadas as dúvidas que surgirem durante as resoluções. Oriente-os para que, se possível, trabalhem em grupo.

Outras seções da unidade

- Como funciona

Essa seção apresenta explicações sobre o funcionamento de equipamentos e processos relacionados a contextos cotidianos ou das ciências nos quais os conteúdos matemáticos estudados estão presentes.

- Seção especial

Ao longo da unidade, existem atividades que apresentam títulos variados, de acordo com o tema que abordam. Parte delas traz procedimentos e técnicas envolvendo, por exemplo, o manuseio da calculadora e o uso de programas de computador. Outras apresentam situações contextualizadas e com informações adicionais, indo além do conteúdo matemático. Há, ainda, aquelas que apresentam contextos matemáticos, contribuindo no estabelecimento de conexões entre os conteúdos.

- Conexão tecnológica

Presente ao final de algumas unidades, a seção **Conexão tecnológica** traz comandos para utilização de alguns *softwares* e apresenta procedimentos para a execução de atividades por meio deles. Preferencialmente essas atividades devem ser desenvolvidas pelos próprios alunos sob orientação do professor ou, então, pelo professor com auxílio dos alunos. Os *softwares* utilizados podem ser baixados gratuitamente.

- Sobre a unidade

Localizada após a última seção **Atividades** da unidade, essa seção tem como objetivos principais que o aluno reflita, sistematize, exponha, discuta com os colegas e registre suas ideias e impressões sobre os conteúdos estudados na unidade. Ao trabalhá-la, é importante que os alunos retomem os objetivos da unidade, apresentados nas páginas de abertura, realizando assim uma **autoavaliação**.

A última questão dessa seção solicita ao aluno a produção de uma síntese dos conteúdos estudados na unidade, apresentando as relações existentes entre eles. Tal produção poderá conter textos dissertativos, estruturar-se em tópicos, apresentar esquemas ou um resumo da unidade etc. Leia essas produções e faça sugestões, em seguida, devolva-as aos alunos para que tenham a oportunidade de adequá-las, observando os pontos que ainda merecem atenção.

Uma possibilidade de trabalho é a construção coletiva dos primeiros textos, dando, aos poucos, autonomia aos alunos, até que possam redigir seus próprios textos de maneira satisfatória. Essa pode ser uma excelente oportunidade de aprendizagem, pois para produzir os textos os alunos terão de retomar, organizar e relacionar as ideias trabalhadas na unidade. Antes de sua produção, eles podem, em grupo (ou toda a turma), discutir as principais ideias matemáticas abordadas na unidade.

Outros elementos da unidade

- Quadro de vocabulário

Quadro (em amarelo) no qual é apresentado o significado de palavras em destaque no texto, de acordo com o contexto abordado.

- **Quadro com múltiplas aplicações**

  Quadro no qual são apresentadas observações, lembretes, dicas, valores ou dados a serem considerados na resolução de atividades, questões etc., com o objetivo de auxiliar o aluno na compreensão ou ampliação de um conceito e na resolução de algumas das atividades.

- **Quadro informativo**

  Quadro com título que pode ser encontrado tanto em páginas de teoria quanto em páginas de atividades, auxiliando na contextualização de algumas delas. Por meio de textos e imagens, traz informações adicionais relacionadas, por exemplo, a curiosidades, personagens históricos e temas de outras áreas do conhecimento.

- **Quadro de teoria**

  Quadro (em azul) que destaca a formalização dos conceitos e apresenta definições, propriedades, fórmulas etc.

- **Quadro de temas transversais**

  Quadro com questões que poderão ser abordadas em sala de aula e, em alguns casos, com a comunidade (por exemplo, em conversas dos alunos com seus familiares). Essas questões estão relacionadas principalmente a temas que visam à formação do cidadão.

Seções no final de cada volume

- **Sugestões de livros e *sites***

  Seção com indicações de livros e *sites* que podem ser consultados pelos alunos. A leitura desses materiais tem como principal objetivo ampliar os conhecimentos acerca dos conteúdos estudados.

- **Respostas**

  Seção que traz as respostas das atividades propostas no livro do aluno. Oriente os alunos a utilizar essas respostas para verificar se suas resoluções estão corretas.

- **Bibliografia**

  Identificação das obras consultadas na elaboração da coleção.

Considerações sobre o ensino de Matemática

O Ensino Médio, última etapa da Educação Básica, vem sofrendo constantes alterações em relação aos seus objetivos e características. As recentes mudanças na sociedade, os avanços tecnológicos e as novas necessidades do mundo atual exigiram que o Ensino Médio sofresse transformações profundas.

Historicamente, observamos que o Ensino Médio possuía dois objetivos norteadores: a educação voltada para o Ensino Superior e a direcionada para a profissionalização. Na primeira modalidade, também conhecida como propedêutica, era oferecida uma formação fragmentada em disciplinas isoladas buscando preparar os alunos para o acesso ao Ensino Superior. Na segunda modalidade, a fim de atender aos anseios da industrialização que impulsionavam o Brasil nas décadas de 1960 e 1970, o Ensino Médio tinha a finalidade de formar especialistas com capacidade para operar máquinas ou dirigir processos de produção.

Com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Básica – LDB (Lei 9.394/96), o Ensino Médio adquiriu outras características:

> [...]
>
> A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional — LDB (Lei 9.394-96), ao situar o Ensino Médio como etapa final da Educação Básica, define-a como a conclusão de um período de escolarização de caráter geral. Trata-se de reconhecê-lo como parte de uma etapa da escolarização que tem por finalidade o desenvolvimento do indivíduo, assegurando-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania, fornecendo-lhe os meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores (art. 22).
>
> [...]
>
> (BRASIL, 2009, p. 3)

Para promover essa formação com a finalidade de desenvolvimento geral do indivíduo, o Ensino Médio deverá superar a dualidade entre a formação propedêutica e a profissionalizante, assumindo uma identidade unitária e contextualizada, para atender a atual realidade brasileira.

> [...]
>
> Entender a necessidade de uma formação com base unitária implica em perceber as diversidades do mundo moderno, no sentido de se promover a capacidade de pensar, refletir, compreender e agir sobre as determinações da vida social e produtiva – que articule trabalho, ciência e cultura na perspectiva da emancipação humana, de forma igualitária a todos os cidadãos.
>
> Por esta concepção, o ensino médio deverá se estruturar em consonância com o avanço do conhecimento científico e tecnológico, fazendo da cultura um componente da formação geral, articulada com o trabalho produtivo. Isso pressupõe a vinculação dos conceitos científicos com a prática relacionada à contextualização dos fenômenos físicos, químicos e biológicos, bem como a superação das dicotomias entre humanismo e tecnologia e entre a formação teórica geral e técnica-instrumental.
>
> [...]
>
> (BRASIL, 2009, p. 4)

As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (definidas pela Resolução CEB nº 2, de 30 de janeiro de 2012) buscam orientar o Ensino Médio quanto à sua organização curricular, forma de oferta e organização estrutural. Dessas diretrizes, destacamos os artigos 3º, 4º e 5º:

> Art. 3º O Ensino Médio é um direito social de cada pessoa, e dever do Estado na sua oferta pública e gratuita a todos.
>
> Art. 4º As unidades escolares que ministram esta etapa da Educação Básica devem estruturar seus projetos político-pedagógicos considerando as finalidades previstas na Lei nº 9.394/96 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional):

I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática.

Art. 5º O Ensino Médio em todas as suas formas de oferta e organização, baseia-se em:
I - formação integral do estudante;
II - trabalho e pesquisa como princípios educativos e pedagógicos, respectivamente;
III - educação em direitos humanos como princípio nacional norteador;
IV - sustentabilidade ambiental como meta universal;
V - indissociabilidade entre educação e prática social, considerando-se a historicidade dos conhecimentos e dos sujeitos do processo educativo, bem como entre teoria e prática no processo de ensino-aprendizagem;
VI - integração de conhecimentos gerais e, quando for o caso, técnico-profissionais realizada na perspectiva da interdisciplinaridade e da contextualização;
VII - reconhecimento e aceitação da diversidade e da realidade concreta dos sujeitos do processo educativo, das formas de produção, dos processos de trabalho e das culturas a eles subjacentes;
VIII - integração entre educação e as dimensões do trabalho, da ciência, da tecnologia e da cultura como base da proposta e do desenvolvimento curricular.
[...]

Diversos documentos oficiais tratam das competências a serem desenvolvidas pelos estudantes no Ensino Médio. Destacamos, então, as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) para a área de Ciências da Natureza e Matemática, que indicam três grandes competências a serem desenvolvidas durante o Ensino Médio:

[...]
- representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
- investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
- contextualização das ciências no âmbito sociocultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

[...]
(BRASIL, p. 113)

O desenvolvimento dessas competências não é tarefa apenas da disciplina de Matemática, mas um trabalho em conjunto com outras disciplinas, em especial Biologia, Física e Química.

Plano Nacional de Educação

O Plano Nacional de Educação (PNE) traça as diretrizes e metas para a educação no Brasil, que devem ser cumpridas em uma década. Na Conferência Nacional da Educação (Conae), ocorrida em 2010, o Ministério da Educação norteou a elaboração da proposta do novo PNE, fundada nas seguintes premissas:

[...]
a. Universalização da educação básica pública, por meio do acesso e da permanência na instituição educacional;
b. Expansão da oferta da educação superior, sobretudo a pública, por meio da ampliação do acesso e da permanência na instituição educacional;
c. Garantia de padrão de qualidade em todas as instituições de ensino, por meio do domínio de saberes, habilidades e atitudes necessários ao desenvolvimento do cidadão, bem como da oferta dos insumos próprios a cada nível, etapa e modalidade do ensino;
d. Gratuidade do ensino para o estudante em qualquer nível, etapa ou modalidade da educação, nos estabelecimentos públicos oficiais;
e. Gestão democrática da educação e controle social da educação;
f. Respeito e atendimento às diversidades étnicas, religiosas, econômicas e culturais;
g. Excelência na formação e na valorização dos profissionais da educação;
h. Financiamento público das instituições públicas.
[...]

O projeto de lei 8.035/2010 aprova o Plano Nacional de Educação para o decênio 2011-2020. Leia dois de seus artigos:

[...]
Art. 2º São as diretrizes do-PNE 2011/2020:
I - erradicação do analfabetismo;
II - universalização do atendimento escolar;
III - superação das desigualdades educacionais;
IV - melhoria da qualidade do ensino;
V - formação para o trabalho;
VI - promoção da sustentabilidade socioambiental;
VII - promoção humanística, científica e tecnológica do país;
VIII - estabelecimento da meta de aplicação de recursos públicos em educação como proporção do produto interno bruto;
IX - valorização dos profissionais da educação; e
X - difusão dos princípios da equidade, do respeito à diversidade e à gestão democrática da educação.
[...]

> Art. 6º A União deverá promover a realização de pelo menos duas conferências nacionais de educação até o final da década, com intervalo de até quatro anos entre elas, com o objetivo de avaliar e monitorar a execução do PNE-2011-2020 e subsidiar a elaboração do Plano Nacional de Educação para o decênio 2021-2030.
>
> [...]

Na proposta do PNE 2011-2020, foram estabelecidas 20 metas, acompanhadas de estratégias para a sua concretização, a fim de que o PNE não se torne uma carta de boas intenções incapaz de melhorar a qualidade da educação.

O texto do projeto de lei que cria o Plano Nacional de Educação (PNE) pode ser obtido no *site* do Ministério da Educação, no endereço eletrônico: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=16478&Itemid=1107>. Acesso em: 18 fev. 2016.

O trabalho com o livro didático

O livro didático apresenta-se como um importante elemento no processo ensino-aprendizagem, estabelecendo um "diálogo" entre aluno e professor. Na formação dos estudantes, o livro didático pode contribuir auxiliando, por exemplo, no desenvolvimento de competências e habilidades, na apropriação e ampliação de conhecimentos científicos, na autoavaliação e na formação da cidadania. Em relação ao professor e seu trabalho, o livro didático contribui, por exemplo, no planejamento das aulas, na avaliação da aprendizagem dos estudantes, como referência para alguns dos conteúdos e na formação didática e pedagógica do professor.

Defendemos que o livro didático não deve ser a única fonte de consulta e informação para professores ou alunos. Apesar de ele trazer textos de caráter formativo, sugestões de atividades e de abordagens e conduções de conteúdos, o professor deve aproveitar essas informações e reflexões decorrentes de modo adequado ao contexto no qual o livro está sendo utilizado (projeto pedagógico da escola, grupo de alunos etc.).

Nessa perspectiva, é muito importante que o professor desenvolva sua autonomia, faça adaptações e altere a ordem dos conteúdos presentes na coleção, estabelecendo, sempre que possível ou necessário, novos diálogos com outras fontes. Temos como objetivo que os textos presentes na **Assessoria Pedagógica**, além de instruir, provoquem reflexões e inquietações que incentivem a busca por novas leituras, contribuindo assim no desenvolvimento da autonomia do professor.

Temos ciência de que, em algumas realidades, o livro didático é a única fonte de consulta disponível a professores e alunos. Isso reforça a necessidade de coleções que primem pela excelência, preocupando-se com o conteúdo livre de erros conceituais, com a formação do cidadão, com a aprendizagem dos alunos, para que eles realmente aprendam uma Matemática que satisfaça os objetivos desse nível de ensino.

O papel do professor

De modo geral, o professor deve promover condições para a construção de conceitos, procedimentos e valores, não somente em sala de aula como também fora dela. Ele deve atuar como mediador entre o conhecimento e o aluno e como avaliador.

No papel de mediador, o professor é aquele que fornece as informações necessárias para que o aluno tenha condições de construir seu conhecimento. Ao priorizar a construção do conhecimento, cabe a ele desenvolver no aluno sua autonomia, incentivando-o a refletir, discutir, analisar e descobrir, criando em sala de aula um ambiente de constante diálogo entre professor e aluno.

No papel de avaliador, o professor assume paralelamente duas funções. A primeira é identificar, com a turma, os progressos, as conquistas e as dificuldades pontuais dos alunos; a segunda é refletir sobre a prática pedagógica: se ela está adequada ou precisa ser reestruturada. Nessa segunda função, o professor tem a possibilidade de realizar uma autoavaliação de sua atividade docente e planejar suas próximas ações. Tais funções são complementares e determinam quais intervenções devem ser realizadas para que o aluno supere suas dificuldades iniciais.

Estudos indicam que o papel do professor nessa proposta apresenta resultados significativamente superiores quando comparados aos do professor na perspectiva tradicional, que tem como base aulas expositivas, partindo de definições seguidas de exemplos e atividades de fixação, quando se avalia não o aprendizado, mas a capacidade de memorização do aluno.

É importante, também, que o professor procure atualizar-se constantemente, estando atento às mudanças não somente referentes às metodologias de ensino, mas também em relação ao que ocorre na sociedade. Um professor que se atualiza periodicamente tem melhores condições de preparar a atual geração para um mundo cada vez mais globalizado.

Quanto à maneira de ministrar suas aulas e utilizar o livro didático, incentivamos a autonomia do professor. Para esta coleção, os conteúdos foram cuidadosamente selecionados e organizados. Porém, caso o professor sinta necessidade, ele pode incluir, excluir, adaptar ou modificar a ordem dos conteúdos — assim como a ordem em que irá trabalhar as seções dentro de cada unidade —, de acordo com as particularidades da turma.

Pressupostos didático-pedagógicos

Nosso objetivo é possibilitar que a abordagem dos conteúdos presentes nesta coleção confira ao aluno um papel ativo no processo ensino-aprendizagem, visando à atribuição de significados e à apropriação dos conceitos.

A principal estratégia utilizada na coleção é a apresentação dos conteúdos no formato de textos que contextualizam as ideias matemáticas trabalhadas e auxiliam a sistematizar os conteúdos. Em seguida, são apresentadas atividades resolvidas e propostas atividades.

Mesmo sendo predominante na coleção a estratégia descrita acima, outras estratégias de abordagem do conteúdo podem ser utilizadas em sala de aula, ficando a cargo do professor decidir qual a mais adequada para cada turma e conteúdo trabalhado.

Em sala de aula, o professor deve utilizar diferentes recursos didáticos, escolhendo o mais adequado para cada situação. Para tanto, ele deve analisar uma série de variáveis, como: conteúdo a ser trabalhado; disponibilidade de espaço físico e materiais de apoio (computadores, reproduções de textos, material manipulável etc.); tempo disponível; receptividade dos alunos quanto ao uso de diferentes métodos de trabalho. Em geral, alunos habituados a somente assistir a aulas expositivas podem ser resistentes ao uso de metodologias como a Resolução de problemas. No entanto, com o tempo, e sob orientação do professor, essa resistência tende a diminuir.

Negociação do contrato didático

Nas salas de aula ocorrem diversas interações entre o professor e os alunos e entre os alunos. Numa perspectiva não tradicional do ensino, podemos dizer que, para construir conhecimento, os alunos devem explorar situações de aprendizagem que possibilitem o desenvolvimento de suas ideias e a expressão delas, tendo o professor como mediador nesse processo, ao levantar questionamentos, quando necessário, e formalizar conceitos e procedimentos.

Quando o professor inicia o trabalho com uma turma, espera determinados comportamentos dos alunos, tanto em relação à aprendizagem dos conteúdos como em relação ao respeito durante as interações e a participação nas tarefas propostas. Do mesmo modo, os alunos também esperam determinados comportamentos do professor em relação à condução das aulas.

É possível, no início do ano, propor um contrato de trabalho explícito, em que sejam negociadas algumas regras com os alunos, podendo haver renegociação em outros momentos. Alguns exemplos incluem o modo como ocorrerão as dinâmicas de organização da turma e proposição das tarefas, a utilização de determinados recursos, o empenho nas tarefas propostas, o cumprimento de prazos etc.

No entanto, segundo Silva (1999), para Guy Brousseau o contrato didático caracteriza-se por um conjunto de regras que definem, principalmente de forma implícita, o que cada sujeito da interação didática tem como dever e direito perante o outro, sendo estabelecidas nas relações entre o professor, os alunos e o conhecimento. Esse contrato depende da estratégia de ensino adotada pelo professor. Se o professor ensina por meio de aulas expositivas, nas quais os alunos não costumam manifestar suas opiniões e apenas resolvem exercícios mecanicamente, após exemplos de um conteúdo "transmitido", o papel de cada um fica determinado dessa maneira. Ao contrário, se o professor propõe situações didáticas em que os alunos desenvolvem estratégias para resolver problemas, incentivando-os a realizar cálculos mentais e utilizar recursos tecnológicos, bem como negociar significados com outros alunos, atuando ativamente no processo de aprendizagem, então temos outro conjunto de regras implícitas, que definem os papéis dos sujeitos envolvidos nessa interação didática.

As regras estabelecidas por um contrato didático não são relacionadas apenas a comportamento ou objetivos a serem atingidos; elas também são um tipo de pacto entre professor e alunos, criando, assim, um ambiente de confiança.

Trabalho em grupo

O trabalho em grupo é uma forma de desenvolver no aluno a socialização, a comunicação, a argumentação e o senso de cooperação. Os alunos aprendem muito uns com os outros, ou seja, na interação com os colegas. Para que possam julgar e emitir opiniões ou considerações, eles passam por um processo de organização de "ideias", estabelecendo consequentemente novas relações entre os assuntos trabalhados. Isso tudo contribui para a atribuição de significados e a construção do conhecimento.

Trabalhando em pequenos grupos, por exemplo, os alunos têm a oportunidade de argumentar acerca de suas opiniões, discutir diferentes estratégias e soluções, expor suas ideias, bem como ouvir a opinião dos demais integrantes do grupo.

O professor, por sua vez, deve ficar atento à organização dos grupos para determinada atividade, a fim de permitir que os alunos atinjam os objetivos propostos. Alguns aspectos importantes a serem considerados pelo professor na orientação do trabalho em grupo são: conversar com os alunos sobre os materiais que irão utilizar; sobre o que significa trabalhar em grupo; definir o que se espera do trabalho em grupo; estimular os alunos a expor seus pontos de vista; demonstrar confiança na capacidade de os alunos contribuírem para o trabalho.

Na coleção, o trabalho em grupo será sugerido na resolução de algumas atividades, na abordagem de alguns conteúdos e na discussão de temas relevantes para o desenvolvimento da cidadania.

Desenvolvimento das competências leitora e escritora

Não há dúvida de que ler e escrever são competências fundamentais no exercício da cidadania, devendo ser exploradas e desenvolvidas em todas as áreas, inclusive na Matemática.

Nas aulas de Matemática, alguns alunos não conseguem resolver determinada atividade por não compreenderem o que é solicitado no enunciado. Segundo Machado (2001):

> [...]
> Entre a Matemática e a Língua Materna existe uma relação de impregnação mútua. Ao considerarem-se estes dois temas enquanto componentes curriculares, tal impregnação se revela através de um paralelismo

nas funções que desempenham, uma complementaridade nas metas que perseguem, uma imbricação nas questões básicas relativas ao ensino de ambas. É necessário reconhecer a essencialidade dessa impregnação e tê-la como fundamento para a proposição de ações que visem à superação das dificuldades com o ensino de Matemática.

[...]

(p. 10)

O desenvolvimento da competência leitora e escritora dos alunos nas aulas de Matemática pode ser oportunizado em vários momentos: auxiliando-os na interpretação de um enunciado; solicitando que escrevam uma atividade ou uma síntese do conteúdo trabalhado; explorando a interpretação de gráficos e tabelas; oferecendo leituras diversas.

Tendo como um dos objetivos desenvolver a competência leitora e escritora dos alunos, propomos algumas atividades explorando a leitura e a interpretação de textos, imagens e esquemas. Eles também terão oportunidade de se expressar por meio da escrita e da oralidade, em atividades que solicitem a produção escrita e promovam discussões em grupo.

Não podemos esquecer da importância de transitar entre diferentes linguagens, ou seja, descrever uma mesma situação por meio da escrita, da fala, de números e equações, de imagens etc. Explorar essas várias representações auxilia os alunos na compreensão dos conteúdos, propiciando a construção de significados e a aplicação desses conteúdos em outras situações, o que dá a eles condições de compreender e transformar o mundo à sua volta.

Resolução de problemas

O desenvolvimento de conceitos ao longo da história da Matemática geralmente está associado à solução de problemas, sejam eles de ordem prática, originados de diferentes contextos, articulados a outras áreas do conhecimento, ou relacionados a investigações na própria Matemática.

A resolução de problemas tem sido central desde a Antiguidade e ganhou força no campo de pesquisa em Educação Matemática a partir dos trabalhos de Polya, nos Estados Unidos. Na década de 1980, o NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), por meio de uma publicação, propôs que a resolução de problemas deveria ser o foco da Matemática escolar dos anos 1980. No Brasil, foram descritos nos PCN (1998) alguns princípios sobre o ensino-aprendizagem da Matemática articulado à resolução de problemas, sejam eles:

- o problema é o ponto de partida da atividade matemática. A resolução do problema permite ao professor abordar conceitos, ideias e procedimentos matemáticos, por meio de estratégias desenvolvidas pelos alunos no processo de resolução;
- o problema deve ser desafiador, exigir que o aluno interprete o enunciado e estruture a situação apresentada. Exercícios que possam ser resolvidos de forma mecânica, a partir da aplicação de uma fórmula ou procedimento decorado, não caracterizam problemas;
- para resolver um problema, o aluno constrói aproximações sucessivas de um conceito. Ele utiliza o que aprendeu ao resolver outro problema, o que exige transferências, retificações e rupturas, assim como pode ser observado na História da Matemática;
- o aluno não constrói o conceito de forma isolada para responder a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tem sentido em um campo de problemas;
- os problemas não devem ser utilizados como aplicação de um conhecimento supostamente adquirido pelos alunos, e a resolução de problemas não deve ser desenvolvida em paralelo à aprendizagem de conceitos e estruturas matemáticas, mas ser o meio pelo qual os alunos os aprendem.

O professor deve desempenhar o papel de observador, consultor, mediador e incentivador. Durante a resolução de um problema, pode sanar eventuais dúvidas dos alunos, mas sempre levantando questionamentos e incentivando-os a discutir com os colegas suas opiniões e interpretações. Seu objetivo é orientá-los a um caminho que os leve à apropriação de um campo de conhecimentos intencionado. Na resolução de um problema:

[...] o aluno experimenta a sensação de descoberta do novo, por seus próprios méritos, mesmo prevendo a interatividade contida no trabalho em equipe. Essa sensação de descoberta é de suma importância para o desenvolvimento intelectual do aluno. E um dos recursos mais adequados para operacionalizar esse objetivo é o trabalho com os problemas.

[...]

(PAIS, 2006, p. 135-6)

O trabalho com a resolução de problemas pode ser desenvolvido individualmente, porém a organização dos alunos em grupos possibilita maior negociação de significados sobre os conceitos e as estratégias envolvidos na obtenção da solução, o que contribui para a melhoria da comunicação e da argumentação oral e escrita.

O aluno deve ser encorajado a resolver o problema, utilizando seus conhecimentos, e a defender suas ideias por meio da linguagem materna e matemática. Para isso, ao selecionar ou adaptar um problema, é necessário verificar se os enunciados não apresentam sentido ambíguo, e também se o grau de dificuldade do texto e dos conceitos matemáticos envolvidos está adequado ao grupo. É possível que os alunos sintam-se inibidos e tenham medo de apresentar respostas erradas ou não consigam resolver o problema, porém essas dificuldades podem ser minimizadas ao longo do tempo se a prática tornar-se recorrente.

Algumas atitudes esperadas em relação às orientações do professor, baseando-se nas fases de resolução de um problema, propostas por Polya (1995), são:

- **Contribuir para que os alunos compreendam o problema:** ajude-os a interpretar o enunciado, visualizar o problema como um todo, extrair dados e informações que serão utilizadas e criar esquemas que facilitem a resolução.

- **Incentivar a elaboração de um plano de resolução**: proponha alguns questionamentos que possam contribuir para a elaboração do plano, como: "Lembra-se de ter resolvido algum problema similar a esse? Em caso afirmativo, de que maneira tal resolução pode contribuir para resolver esse?"; "Os dados extraídos podem ser organizados em um esquema?"; "É possível resolvê-lo por partes?".
- **Observar e interferir, quando necessário, na execução de um plano de resolução**: ao colocar em prática seu plano de resolução, ajude e incentive o aluno a verificar os passos da resolução.
- **Questionar sobre a verificação da solução**: é necessário propor questionamentos que levem o aluno a analisar a solução obtida e verificar a validade do resultado, incentivando-o a fazer um retrospecto dos procedimentos adotados na resolução, identificando e corrigindo possíveis erros cometidos.

Depois de todos os alunos ou grupos terem obtido uma resolução, é importante propor um espaço para que compartilhem as resoluções e defendam suas interpretações e justificativas. Essa discussão deve ser orientada para a geração de um consenso sobre o resultado, a partir do qual seja possível realizar um trabalho conjunto, conduzido pelo professor, de formalização do conhecimento matemático que se objetiva aprender.

História da Matemática no ensino

A história da Matemática, mediante um processo de transposição, é um recurso que pode ser utilizado em sala de aula. Esse recurso, ao lado de outras metodologias, pode trazer importantes contribuições aos processos de ensino e de aprendizagem.

> [...] Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. [...]
>
> (BRASIL, 1998, p. 42)

Para utilizar o recurso história da Matemática, não é necessário que o professor seja um especialista na área ou um grande conhecedor desse assunto. Vale lembrar que o objetivo não é ensinar aos alunos a história da Matemática propriamente dita, mas ensinar conteúdos matemáticos com o auxílio dela.

Acreditamos que, ao compartilhar com seus alunos algumas informações históricas acerca de fatos relacionados à Matemática, de alguma maneira o professor já está utilizando esse recurso. Porém, quanto maior o conhecimento do professor acerca da história da Matemática, melhores condições ele terá de utilizá-la sistematicamente em suas aulas, contribuindo, por exemplo, na organização e articulação entre os conteúdos matemáticos. Cabe ao professor decidir em que medida e em quais momentos irá utilizar esse recurso em suas aulas (D'AMBROSIO, 1996).

Algumas contribuições da história da Matemática:

- Por meio dela, é possível responder a alguns porquês, satisfazer a curiosidade dos alunos e motivá-los.
- Veicular a Matemática como uma criação humana, manifestada em diferentes contextos culturais.
- É possível perceber que a Matemática não está pronta e acabada, e que em seu desenvolvimento acontecem avanços e retrocessos.
- Auxilia o professor a conhecer como o conhecimento matemático está organizado.

A coleção apresenta atividades e textos nos quais a história da Matemática está presente. Nessas situações, além do conteúdo matemático, os alunos terão a oportunidade de, por exemplo, compreender a Matemática como uma construção humana, desenvolvida no decorrer do tempo e a partir de suas necessidades, aprimorar a capacidade leitora e compreender a importância da herança cultural no desenvolvimento da ciência.

Uso de recursos tecnológicos no ensino da Matemática

As tecnologias provocam mudanças na vida das pessoas e, ao mesmo tempo, sofrem constantes alterações, sendo aprimoradas para melhor atender as necessidades de cada época. Atualmente, estamos diante de uma avalanche de aparelhos eletrônicos que podem facilitar atividades diárias se forem utilizados adequadamente. As gerações mais antigas, muitas vezes, têm dificuldade em lidar com as inovações tecnológicas, porém as gerações atuais utilizam com facilidade a maioria desses recursos.

Entendemos que, nas aulas de Matemática, o professor deve estar preparado para atender essa demanda, orientando os alunos a utilizar as tecnologias, de modo que favoreçam a construção e a reorganização do pensamento matemático, uma vez que "permitem automatizar os processos de rotina e concentrar a nossa atenção no pensamento criativo" (PONTE, 1995, p. 2).

O uso de recursos tecnológicos, como o computador, a internet e a calculadora (presente nos mais diversos aparelhos eletrônicos), torna o processo de aprendizagem da Matemática mais experimental e vinculado ao conhecimento útil na vida das pessoas. Não podemos deixar esses recursos fora da sala de aula, sendo a escola a grande responsável por preparar o aluno para o uso de tais ferramentas.

Na sala de aula, a calculadora constitui uma ferramenta valiosa no processo de autoavaliação, porque permite verificar resultados e corrigir erros de forma mais ágil. Na resolução de situações-problema, "ela estimula a descoberta de estratégias e a investigação de hipóteses, uma vez que os alunos ganham tempo na execução dos cálculos" (BRASIL, 1998, p. 45). A calculadora auxilia na percepção e descrição de padrões e regularidades, uma vez que os alunos distanciam-se dos procedimentos convencionais de cálculo e dão mais atenção aos resultados, comparando-os e estabelecendo relações entre eles.

Em relação ao uso do computador, é relevante discutir como incorporá-lo no desenvolvimento do trabalho escolar. A proposta de utilização desse recurso na escola permite uma troca de experiências entre o professor e os alunos, possibilitando maior proximidade e interação, em um trabalho colaborativo no qual o professor, ao mesmo tempo, forma e é formado.

Reconhecemos que, frequentemente, o professor sente-se inseguro em trabalhar com esse recurso, muitas vezes por não estar familiarizado com algumas ferramentas disponíveis ou por mudar a dinâmica da aula. Porém, a busca de informações para lidar com essa mídia e a reflexão sobre os benefícios que ela pode trazer para sua prática são essenciais para sua formação em serviço. Não se trata de substituir o papel e o lápis pelo computador, mas pensar em propostas que possam integrar o computador às mídias tradicionais, considerando-o uma ferramenta eficiente para o desenvolvimento do pensamento matemático.

> [...]
>
> É preciso considerar que o computador passará a constituir essa profissão, mobilizando os atores normalmente presentes no seu cenário e trazendo consigo muitos outros atores. O movimento, a velocidade, o ritmo acelerado com que a Informática imprime novos arranjos na vida fora da escola caminham para a escola, ajustando e transformando esse cenário e exigindo uma revisão dos sistemas de hierarquias e prioridades tradicionalmente estabelecidos na profissão docente.
>
> [...]
>
> (PENTEADO, 1999, p. 309-10)

Diversos programas computacionais gratuitos e de qualidade são destinados ao ensino e aprendizagem de Matemática. Dentre eles, podemos citar o *GeogebraPrim*, com ferramentas para construções geométricas, algébricas, gráficas, entre outras; o *Winplot*, que possibilita a construção de gráficos em duas e três dimensões; o *Microsoft Mathematics*, calculadora gráfica que, além das funções básicas de uma calculadora convencional, possibilita resolver equações, realizar conversões de medidas e construir gráficos em duas e três dimensões; o *wxMaxima* que permite, por exemplo, manipular expressões matemáticas; e o *Poly*, ferramenta para o estudo de Geometria espacial, possibilitando a visualização e a planificação de algumas formas geométricas espaciais. Podemos, ainda, destacar as planilhas eletrônicas (uma versão gratuita é a *Calc*, um dos aplicativos do *LibreOffice*), que receberam destaque em algumas atividades da coleção, seja para organizar dados, construir gráficos ou trabalhar fórmulas.

Além desses programas, é possível explorar outros recursos disponíveis na internet, como simuladores semelhantes ao conversor de moedas e a "calculadora do cidadão", do Banco Central do Brasil.

A possibilidade de conexão com a internet transforma o computador em uma ferramenta valiosa de pesquisa, proporcionando a busca de informações publicadas em *sites* de diversas regiões do mundo. Contudo, o professor deve orientar seus alunos em relação às fontes de informação disponíveis, uma vez que os conteúdos da rede podem ser disponibilizados por qualquer usuário, com ou sem propriedade para falar sobre determinado assunto. Para isso, ao selecionar *sites*, dentre os resultados de pesquisa feita em um *site* de busca, os alunos devem estar atentos, dentre outros aspectos: à autoria, ao tipo de publicação (notícia, propaganda, documento, publicação científica), ao motivo da publicação, à data da publicação, ao endereço da internet (.com, .gov, .org etc.) e ao país de origem do *site* (por exemplo: .br – Brasil, .pt – Portugal).

As orientações aqui apresentadas têm por objetivo incentivar o professor a deter sua atenção na natureza dos conteúdos matemáticos que podem ser estudados com o auxílio dos recursos tecnológicos e a pensar em propostas educacionais que possam ser exploradas.

A organização dos conteúdos

Selecionar os conteúdos que serão trabalhados em sala de aula é um grande desafio, em parte devido à ampla gama de conhecimentos que podem ser explorados nesse nível de ensino. De modo geral, esses conteúdos devem propiciar ao aluno uma formação direcionada ao desenvolvimento da cidadania, não deixando de lado a formação científica e o caráter estético da Matemática. Para que tal seleção de conteúdos seja possível, é preciso estabelecer algumas ideias norteadoras, a saber:

- Devem ser oportunizados aos alunos momentos nos quais eles tenham chance de se apropriar de conceitos, atitudes e procedimentos, o que é fundamental para compreender situações de relevância social e cultural.
- A escolha e a abordagem dos conteúdos devem contemplar as mais diversas aplicações da Matemática; relações entre diferentes conteúdos matemáticos; relações da Matemática com outras áreas do conhecimento; formas de investigação etc. Uma vez que a Matemática é uma construção humana de grande relevância social, ela deve ser abordada de modo a evidenciar os diversos usos que a sociedade faz dela.
- Os conteúdos selecionados devem ir além do caráter utilitário e prático da Matemática. Habilidades como argumentar, expressar-se por meio da escrita e da oralidade, justificar, conjeturar, estabelecer relações e investigar devem ser exploradas e desenvolvidas nos alunos.
- Tendo em vista uma aprendizagem significativa, os conteúdos devem permitir relações entre diferentes áreas do conhecimento, estabelecer conexões com situações do dia a dia e, ainda, se valer de contextualizações históricas e culturais.

- Os conteúdos e temas abordados devem ser acessíveis e adequados para a faixa etária e o nível escolar ao qual são destinados, despertando ainda interesse e curiosidade no aluno. Nessa perspectiva, a capacidade intelectual dos estudantes não deve ser subestimada, ou seja, os conteúdos não devem ser empobrecidos. Deve ser possível que os conteúdos escolhidos sejam apropriados pelos alunos, considerando o contexto no qual estão inseridos.
- Na abordagem e escolha dos conteúdos, deve haver um equilíbrio entre a formalidade e a informalidade. A formalidade matemática não deve ser deixada de lado, porém, em demasia, pode desencorajar os estudantes. O conhecimento matemático deve ser visto como uma construção humana, cultural e socialmente concebida, por meio da qual podem ser encontradas explicações.
- Na escolha dos conteúdos deve haver equilíbrio entre os diferentes campos da Matemática escolar. Mesmo dando destaque especial aos conteúdos de maior relevância social, aqueles próprios da Matemática não podem ser esquecidos.

Infelizmente, em muitas aulas de Matemática, os conteúdos ainda são tratados como um conjunto de fatos e definições e abordados de modo estanque, cada qual em sua própria "gaveta".

Entretanto, na Matemática os conteúdos — pertencentes ou não a um mesmo campo matemático — estão interligados, dos mais simples aos mais complexos, evidenciando a necessidade de uma organização curricular, na qual os assuntos sejam revisitados, ampliados e aprofundados. Explorar as relações entre diferentes conteúdos muito contribui no processo ensino-aprendizagem. Na coleção, sempre que possível, são estabelecidas essas relações.

Os conteúdos contemplados na coleção são aqueles que acreditamos atender às necessidades de professores e alunos, considerando os mais diversos contextos e realidades. Porém, ressaltamos que fica a critério do professor escolher quais conteúdos irá trabalhar em sala de aula, e em qual ordem, podendo acrescentar novos, realizar adaptações ou deixar de trabalhar alguns dos presentes na coleção. Acreditamos também que tais conteúdos, associados à ação do professor, podem atender aos objetivos propostos para esse nível de ensino.

Contextualização e interdisciplinaridade

A contextualização e o trabalho interdisciplinar são dois princípios que favorecem a compreensão dos conteúdos matemáticos. O primeiro permite ao aluno interpretar e intervir em situações do seu dia a dia, de acordo com suas necessidades, enquanto o segundo possibilita abordar conteúdos articulados a outros componentes curriculares. Cabe lembrar que, em Matemática, um conceito nunca é isolado, ou seja, a própria conexão interna entre os conteúdos matemáticos é uma forma de contextualização que favorece a aprendizagem e deve ser considerada.

Podem ser encontrados, em toda a coleção, textos informativos, atividades contextualizadas, seções com aspectos interdisciplinares, e ainda informações sobre locais, pessoas e datas. São destacados na **Assessoria Pedagógica** momentos oportunos para o trabalho interdisciplinar, bem como sugestões de condução na resolução de situações-problema. Procuramos evitar as contextualizações artificiais como pretexto para a obtenção de dados numéricos.

O trabalho com questões presentes em várias situações do dia a dia, importantes para a vida em sociedade, oferece ao aluno a oportunidade de se posicionar diante dessas questões.

Os conteúdos da disciplina de Matemática, ao discutir questões sociais que possibilitam a compreensão e a crítica da realidade — em vez de tratar os conteúdos como dados numéricos e abstratos —, ganham flexibilidade, uma vez que podem ser contextualizados de acordo com inúmeras situações e de modo interdisciplinar.

No ambiente escolar, trabalhando as relações sociais entre alunos, professores, funcionários, pais, comunidade e o próprio ambiente da instituição, é possível desenvolver no aluno valores morais, como cidadania, respeito ao próximo, solidariedade, paz e justiça social. Um exemplo para o trabalho do professor de Matemática é propor situações-problema envolvendo rampas de acesso para cadeirantes e discutindo as dificuldades enfrentadas por pessoas com necessidades especiais.

Nas aulas de Matemática também podem ser propostas situações-problema no contexto matemático, principalmente por meio de dados estatísticos, explorando assuntos como: incidência de gravidez entre as adolescentes; evolução dos casos de doenças sexualmente transmissíveis; diferenças salariais entre homens e mulheres que exercem a mesma função (é possível discutir preconceitos ainda existentes quanto à participação da mulher no mercado de trabalho).

O professor de Matemática pode trabalhar de forma contextualizada, explorando assuntos relacionados à qualidade de vida (práticas desportivas, cuidados com a higiene, alimentação equilibrada, combate às drogas etc.), buscando enfatizar atitudes — individuais e coletivas — que promovam uma vida saudável.

A relação da sociedade com a natureza também pode ser discutida; é possível verificar, por exemplo, a extensão de ações que afetam o meio ambiente, quantificando o "peso" que realmente tem cada indivíduo na relação entre sociedade e natureza. Podem ser discutidas questões culturais, econômicas e políticas que provocam impactos ambientais, tais como: o aquecimento global, o buraco na camada de ozônio, a escassez de água potável e a destruição das florestas.

Outros contextos de bastante relevância são aqueles relacionados ao consumo e ao trabalho. No momento em que adquirimos uma mercadoria, nem sempre somos conhecedores do processo de trabalho envolvido em sua fabricação e comercialização, tampouco de políticas de maximização de lucros que, geralmente, estão por trás desses produtos.

Em sala de aula, é importante que sejam exploradas situações envolvendo tanto questões trabalhistas (salário, emprego, direitos trabalhistas e renda) quanto questões de consumo (preço, custo, acréscimo, desconto e juro). O objetivo é despertar nos alunos, e possivelmente em sua família, uma postura de consumidor consciente e exigente. São várias as situações que possibilitam esse trabalho; por exemplo, na aquisição de uma mercadoria, podem ser analisados e comparados aspectos relacionados a preços, custos, quantidades e embalagens, data de validade, promoções etc.

Avaliação

A avaliação tem sido preocupação constante nas recentes reformulações curriculares e na formação docente, uma vez que constitui parte essencial do processo ensino-aprendizagem, permitindo verificar o rendimento do aluno e, consequentemente, os resultados do método didático-pedagógico utilizado pelo professor, abrindo espaços para que ele possa refletir sobre sua prática.

Diante disso, a avaliação deve ser vista como um processo contínuo, no qual sejam analisadas as capacidades e competências de cada aluno, não somente em provas escritas, mas também na participação em sala de aula, na apresentação oral, no trabalho em grupo, na interpretação de textos, na escrita, na comunicação, no trabalho com materiais manipuláveis etc. Nesse sentido, a avaliação torna-se uma maneira de o professor acompanhar a evolução do pensamento matemático dos alunos no processo ensino-aprendizagem, podendo perceber dificuldades individuais ou coletivas, avaliando-os por aquilo que "sabem" acerca do conteúdo e não pela "falta" de algum conhecimento.

Estudos indicam que esse modelo de avaliação apresenta resultados significativamente superiores quando comparado ao modelo avaliativo tradicional, que se caracteriza pelo caráter simplesmente classificatório, no qual o professor empenha papel autoritário, quase sempre por meio de testes escritos de duração limitada e restritos a técnicas matemáticas. Nesse processo, é dada uma nota que, no final, qualifica o aluno em "aprovado" ou "reprovado", quase sempre despertando medo, ansiedade e apreensão.

O aluno também deve se autoavaliar, visto que, do ponto de vista pedagógico, a autoavaliação — quando orientada pelo professor — permite a ele realizar uma análise crítica de seu desempenho, verificando conscientemente seus pontos fortes e fracos e a necessidade de melhora. Permite, ainda, verificar periodicamente o quanto evoluiu. No processo de autoavaliação é possível criar, por exemplo, um portfólio contendo provas, trabalhos, cadernos e qualquer outra produção do aluno (construções geométricas, levantamento estatístico, pesquisa etc.).

Entre as várias situações de avaliação que o professor pode promover, destacamos, na coleção, a seção **Sobre a unidade**, que tem como objetivo levantar questionamentos acerca dos conteúdos estudados, podendo ser utilizados como autoavaliação.

Uma sugestão para acompanhar o desenvolvimento dos alunos é utilizar fichas de avaliação. A ficha pode servir como ponto de apoio para uma reflexão sobre os resultados obtidos, observando os pontos fortes e os pontos fracos em relação a aspectos como: aprendizagem dos alunos; convívio em sala de aula; comprometimento dos alunos com os estudos; trabalho em equipe. Observe um exemplo de ficha de avaliação.

Ficha de avaliação	Nome: ____________ nº: ______		
	Turma: ______ Escola/Colégio: ____________		
Aspectos observados	**Sim**	**Parcialmente**	**Não**
Participa de debates e discussões em sala de aula?			
Tem disposição para trabalhos em grupo?			
Escuta e respeita a opinião dos colegas de classe?			
Compartilha suas ideias com os colegas?			
Tem facilidade para compreender o conteúdo?			
Demonstra interesse pela disciplina?			
É organizado com o material escolar?			
Realiza as atividades propostas?			
Demonstra autonomia na realização das atividades?			
Comunica-se bem por meio da escrita e da oralidade?			

Outra proposta é a utilização de fichas de autoavaliação, que devem ser preenchidas pelos alunos com o acompanhamento do professor. A interação entre aluno e professor nesse momento é de grande valia. É importante que os alunos percebam que também são responsáveis pela aprendizagem, identificando seus avanços e limites. Nessas fichas podem ser explorados aspectos que vão além dos conteúdos matemáticos. Observe um exemplo de ficha de autoavaliação.

Ficha de autoavaliação	Nome: ____________ nº: ______		
	Turma: ______ Escola/ Colégio: ____________		
Eu...	Sim	Parcialmente	Não
... cuido do meu material escolar e dos livros didáticos?			
... quando falto, procuro atualizar os conteúdos com meus colegas?			
... tenho um bom relacionamento com meus colegas de sala?			
... consigo expor minhas ideias e opiniões em grupo?			
... respeito meus colegas e suas opiniões?			
... tiro minhas dúvidas com o professor?			
... realizo as tarefas propostas?			
... tenho facilidade para compreender os conteúdos?			

Vale ressaltar que tanto a ficha de avaliação quanto a ficha de autoavaliação são sugestões, sendo que os itens avaliados devem ser adaptados à realidade da turma.

Leitura complementar para o professor

A seguir, há algumas sugestões de leituras que podem contribuir em sua formação profissional e no trabalho em sala de aula. Além de livros, sugerimos algumas revistas especializadas e *sites*.

Livros

Metodologia de ensino de Matemática

A Matemática e os temas transversais. MONTEIRO, A.; POMPEU JÚNIOR, G. São Paulo: Moderna, 2001.

Este livro aborda temas como transversalidade, ensino de matemática, cultura e ciência, além de estabelecer uma relação entre Etnomatemática e a proposta de transversalidade, com que se espera proporcionar ideias de como a transversalidade pode ser viabilizada em sala de aula.

Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. CURY, H. N. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

Neste livro, a autora apresenta uma visão geral sobre a análise de erros e defende a ideia de que essa análise pode ser utilizada como uma metodologia de ensino, se for empregada em sala de aula com o objetivo de levar os alunos a questionarem suas soluções.

Avaliação da aprendizagem escolar. LUCKESI, C. C. São Paulo: Cortez, 2006.

Neste livro são encontrados estudos críticos sobre avaliação e aprendizagem escolar em termos sociais, políticos e pedagógicos.

Ensinar e aprender Matemática. PAIS, L. C. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

Neste livro, o autor propõe uma reflexão sobre os aspectos metodológicos do ensino da Matemática, levando em conta o saber matemático e os desafios relacionados ao ensino e à aprendizagem escolar.

Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula. TOMAZ, V. S.; DAVID, M; M. M. S. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Este livro busca esclarecer meios de lidar com a interdisciplinaridade no ensino de matemática, e sugere formas de o professor criar um ambiente favorável que o ajude a perceber como os seus alunos aprendem. O livro ainda traz situações ocorridas em sala com diferentes abordagens interdisciplinares acerca de conteúdos escolares.

Investigação histórica no Ensino da Matemática. MENDES, I. A. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2009.

Este livro apresenta discussões acerca da relação entre a História da Matemática, a cognição matemática e a aprendizagem matemática. O autor faz uma discussão sobre os aspectos epistemológicos, relacionados ao uso do desenvolvimento histórico da Matemática, como uma possibilidade didática de exploração dos textos históricos no seu ensino.

Na vida dez, na escola zero. CARRAHER, T.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. 14. ed. São Paulo: Cortez, 2006.

O livro faz uma análise entre a matemática do cotidiano e a matemática escolar, e questiona o porquê de os alunos obterem um desempenho melhor na matemática do cotidiano.

Tendências em Educação Matemática (coleção). Belo Horizonte: Autêntica.

Esta coleção é voltada tanto para futuros professores como para profissionais atuantes na área de Educação Matemática. Escrita por pesquisadores em Educação matemática ou em outra área da Matemática, essa coleção conta com uma extensa bibliografia para que o leitor possa aprofundar-se em certa tendência da Educação Matemática.

Formação do professor

A formação do professor que ensina Matemática: perspectivas e pesquisas. NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

O livro apresenta pesquisas e reflexões sobre a formação do professor que ensina matemática a partir de diversos aspectos, tais como o processo de desenvolvimento humano e da aprendizagem, os saberes empregados na prática docente, entre outros.

A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar. MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Tendências em Educação Matemática).

Neste livro encontramos os questionamentos dos autores sobre a matemática que é apresentada nos cursos de formação acadêmica e a matemática que é ensinada na escola. Como exemplo, eles citam a maneira como os conjuntos numéricos são abordados nesses dois ambientes: a academia e a escola.

Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos. FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. Campinas: Autores Associados, 2006.

O livro é destinado àqueles que buscam subsídios para iniciar ou aperfeiçoar as ferramentas de pesquisa no âmbito da Educação Matemática. As principais fases de um processo de pesquisa e investigação são descritos e ilustrados, tais como a elaboração do projeto de pesquisa, o processo de coleta, a sistematização e a análise de informações.

Meu professor de matemática e outras histórias. LIMA, E. L. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Professor de matemática).

O autor expõe tópicos que comumente são abordados em sala de aula sem a devida atenção ou sem uma justificativa plausível, como a multiplicação envolvendo números negativos e a diferença entre o círculo e a circunferência. O livro ainda conta com crônicas e histórias que têm como cenário a matemática.

Pesquisa qualitativa em Educação Matemática. BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

Neste livro os autores discutem os trabalhos que vêm sendo realizados em pesquisa qualitativa no âmbito da educação matemática. São abordados os seguintes temas: construindo pesquisas coletivamente em educação matemática; pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente?; história oral e educação matemática; pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica.

Professor de Matemática (coleção). Rio de Janeiro: SBM.

A coleção abrange os conteúdos presentes nos currículos do ensino médio, com a preocupação de servir como base de referência para professores de matemática e acadêmicos que necessitem de um amplo material de consulta. O rigor e a precisão são presentes em todas as obras da coleção, acompanhadas de demonstrações de muitos conceitos utilizados no cotidiano escolar.

Saberes docentes e formação profissional. TARDIF, M. Petrópolis: Vozes, 2002.

A obra busca definir os saberes docentes e quais deles estão sendo utilizados durante a prática pedagógica do professor. Aliado a isso, o autor discute a relação entre os saberes docentes e a formação profissional, visando o aperfeiçoamento e um entendimento melhor sobre a profissão docente.

História da Matemática

A guerra do cálculo. BARDI, J. S. Tradução de Aluizio Pestana da Costa. Rio de Janeiro: Record, 2008.

O livro apresenta a história dos dois brilhantes matemáticos, Newton e Leibniz, que no início do século XVIII se envolveram em uma espécie de batalha pela autoria do cálculo diferencial e integral.

A medida de todas as coisas: a odisseia de sete anos e o erro encoberto que transformaram o mundo. ALDER, K. Rio de Janeiro: Objetiva, 2003.

O livro relata em qual contexto a unidade de medida metro, definida como a décima milionésima parte da distância entre o polo norte e a linha do Equador, foi determinada pelos astrônomos Pierre François André Méchain e Jean Baptiste Joseph Delambre, em uma expedição de sete anos.

***e*: a história de um número**. MAOR, E. Tradução de Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2003.

O livro faz uma viagem desde os primeiros estudos relacionados com o número *e* até as descobertas mais recentes que podem ser vistas na natureza e nas artes.

Gigantes da ciência. CANE, P. Rio de Janeiro: Ediouro, [s.d.].

O livro apresenta a biografia de 50 gênios da humanidade, entre eles Einstein, Aristóteles, Pitágoras, Galileu, Darwin, Newton, Leonardo da Vinci e Euclides. Além disso, o livro traz algumas invenções ligadas a eles.

História da Matemática. BOYER, C. B. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

O livro aborda a história da Matemática desde as origens primitivas até o século XX. Além de apresentar a biografia de diversos matemáticos, bem como suas obras.

História e tecnologia no ensino da Matemática. CARVALHO, L. M. et al. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2008.

O livro é uma coletânea que reune dezesseis artigos a respeito de como integrar a história da Matemática e a tecnologia no Ensino Médio, no início da formação universitária e na formação continuada.

Introdução à História da Matemática. EVES, H. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2007.

Dividido em duas partes, antes e depois do século XVII, o livro apresenta, por meio de textos e exercícios, a história da Matemática desde a Idade da Pedra até o século XX.

O homem que sabia demais: Alan Turing e a invenção do computador. LEAVITT, D. Ribeirão Preto: Novo Conceito, 2007.

O livro apresenta a biografia do matemático Alan Turing, conhecido por abrir as portas para a era dos computadores e por ter proposto uma máquina de computador imaginária.

O teorema do papagaio: um *thriller* da história da matemática. GUEDJ, D. Tradução de Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

O livro apresenta, por meio de um suspense, a história da Matemática desde a Antiguidade até os dias de hoje. O enredo ocorre em Paris e inicia-se quando um grupo, constituído por um garoto, um filósofo, um casal de gêmeos e um papagaio, recebe uma biblioteca de livros raros de Matemática.

Os números: a história de uma grande invenção. IFRAH, G. 3. ed. Tradução de Stella Maria de Freitas Senra. São Paulo: Globo, 1989.

O livro apresenta a história dos números e a evolução da arte de calcular, traçando de forma resumida a história da Matemática desde a pré-história.

Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula (coleção). São Paulo: Atual.

Os volumes da coleção abordam aspectos históricos de conteúdos de campos como geometria, álgebra, trigonometria e cálculo.

Conteúdo

A Matemática do Ensino Médio – Volume 1. LIMA, E. L. et al. Rio de Janeiro: SBM, 1997. (Professor de Matemática).

Este livro apresenta os conteúdos normalmente abordados no primeiro ano do Ensino Médio, tais como os conjuntos numéricos e as funções no contexto dos números reais.

A Matemática do Ensino Médio – Volume 2. LIMA, E. L. et al. Rio de Janeiro: SBM, 1997. (Professor de Matemática).

O livro aborda os conteúdos comumente trabalhados no segundo ano do Ensino Médio, como é o caso da análise combinatória e da probabilidade.

A Matemática do Ensino Médio – Volume 3. LIMA, E. L. et al. Rio de Janeiro: SBM, 1998. (Professor de Matemática).

Neste livro encontramos conteúdos que, geralmente, são objeto de estudo no último ano do Ensino Médio, tais como geometria analítica, números complexos e equações algébricas.

Análise Combinatória e Probabilidade: com as soluções dos exercícios. MORGADO, A. C. O. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Professor de Matemática).

Este livro trabalha conceitos de análise combinatória, como as combinações, permutações e probabilidade, com uma grande variedade de exemplos e problemas desafiadores, bem como a sua aplicação em diversas situações.

Construções Geométricas. WAGNER, E. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Professor de Matemática).

O livro aborda as construções geométricas, relacionando-as com a álgebra, explorando as propriedades algébricas das construções e a construção de figuras a partir da solução algébrica de problemas e exercícios.

Coordenadas no Espaço. LIMA, E. L. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Professor de matemática).

Este livro resgata o significado geométrico dos sistemas lineares, expondo a relação entre as incógnitas x, y, z de um sistema linear 3×3 e as coordenadas de um ponto no espaço tridimensional.

Coordenadas no plano, com as soluções dos exercícios. LIMA, E. L. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Professor de matemática).

O livro apresenta como tema principal a geometria plana por meio do uso de coordenadas, retomando conceitos da geometria analítica plana e conceitos de vetores.

Fundamentos da Matemática elementar (coleção). São Paulo: Atual.

A coleção formada por onze volumes contempla todos os conteúdos presentes no currículo de matemática do Ensino Médio, com uma grande quantidade de exercícios de vestibulares e testes de universidades do nosso país, permitindo um estudo aprofundado dos assuntos dessa etapa da educação básica.

Geometria Euclidiana Plana. BARBOSA, J. L. M. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Professor de matemática).

Este livro apresenta a geometria euclidiana plana de um modo mais aprofundado do que o visto na educação básica, possibilitando ao professor uma visão mais ampla daquilo que ele desenvolverá em sala de aula.

Introdução à geometria espacial. CARVALHO, P. C. P. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Professor de matemática).

O livro trata a passagem da geometria plana para a geometria espacial, apresentando axiomas que servem de base para diversas construções que são desenvolvidas no decorrer do livro.

Trigonometria e Números Complexos. CARMOS, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Professor de matemática).

Os conceitos de trigonometria e de números complexos são abordados neste livro, indicando as diversas relações entre esses tópicos estudados principalmente no Ensino Médio.

Educação matemática

Educação Matemática crítica: a questão da democracia. SKOVSMOSE, O. Campinas: Papirus, 2001.

O autor deste livro defende uma abordagem da Educação Matemática por meio de uma perspectiva democrática, propondo trabalho com modelagem matemática para apresentar a questão democrática em sala de aula.

Educação Matemática: da teoria à prática. D'AMBROSIO, U. Campinas: Papirus, 1996.

Neste livro são feitas considerações de caráter geral a respeito da Educação Matemática, além de discussões a respeito da prática docente, propondo reflexões sobre a Matemática.

Educação Matemática: pesquisa em movimento. BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). São Paulo: Cortez, 2004.

A organizadora deste livro reuniu textos com diferentes perspectivas a respeito da Educação Matemática, da diversidade do pensamento e sobre a própria produção do conhecimento.

Elementos de didática da Matemática. D'AMORE, B. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

O livro aborda a questão da didática da matemática fazendo uma investigação a respeito dos muitos fatores que incidem no processo de ensino e aprendizagem dessa ciência, tais como sociais, cognitivos e psicológicos.

Fundamentos da didática da Matemática. ALMOULOUD, S. A. Curitiba: Ed. da UFPR, 2007.

A fim de que professores se aprofundem em alguns fundamentos da didática da Matemática, é apresentada no livro uma reflexão sobre os principais modelos teóricos da escola francesa.

História na Educação Matemática: propostas e desafios. MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

Os autores abordam a História da Matemática, a História da Educação Matemática, bem como a relação entre elas e a Educação Matemática.

Modelagem matemática no ensino. BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. São Paulo: Contexto, 2003.

Neste livro o autor apresenta explicações sobre a modelagem matemática e expõe várias possibilidades de trabalho, mostrando ao leitor como utilizar a modelagem no ensino de Matemática.

Periódicos

ALEXANDRIA - REVISTA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA. Florianópolis: UFSC. *Site*: <http://alexandria.ppgect.ufsc.br>. Acesso em: 18 fev. 2016.

A revista é uma publicação vinculada ao Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica, e seu nome faz referência à cidade que abrigava a maior biblioteca da antiguidade.

BOLETIM DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (Bolema). Rio Claro: Unesp. *Site*: <www2.rc.unesp.br/bolema>. Acesso em: 18 fev. 2016.

Um dos mais antigos periódicos do Brasil, o Bolema nasceu vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e possui periodicidade quadrimestral, além de contar com edições especiais temáticas.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA. São Paulo: SBEM. *Site*: <www.sbem.com.br/revista>. Acesso em: 18 fev. 2016.

Publicada pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática, a revista possui artigos que são fruto do trabalho dos grupos de pesquisa da SBEM e dos diversos programas de pós-graduação na área de educação matemática espalhados pelo Brasil.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA (RPM). São Paulo: SBM. *Site*: <www.rpm.org.br>. Acesso em: 18 fev. 2016.

A revista é voltada, principalmente, para os professores de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Os artigos apresentam abordagens que não são frequentemente utilizadas em sala de aula, além de relatos de experiências e comentários de livros que proporcionam a formação continuada do professor.

ZETETIKÉ. Campinas: Cempem/Unicamp. *Site*: <www.cempem.fae.unicamp.br/zetetike.htm>. Acesso em: 18 fev. 2016.

A revista é publicada semestralmente pela Faculdade de Educação da Unicamp e é especializada em Educação Matemática. Sua primeira publicação foi em 1993 e tinha como objetivo inicial divulgar o trabalho científico da instituição, mas acabou estendendo o seu campo de atuação para receber textos de pesquisadores de outros centros de pesquisa.

Sites

Arte Matemática. Disponível em: <www2.tvcultura.com.br/artematematica>. Acesso em: 18 fev. 2016.

Este *site* apresenta conteúdos interativos, que podem ser manipulados pelos usuários, atividades sobre alguns assuntos matemáticos relacionados à arte, música, entre outros, informações sobre alguns autores matemáticos e alguns artistas e entrevistas.

Conteúdos Digitais para o Ensino e a Aprendizagem de Matemática e Estatística. Disponível em: <www.uff.br/cdme>. Acesso em: 18 fev. 2016.

Disponível no *site* da Universidade Federal Fluminense, o portal traz indicações de programas de computador e experimentos e atividades relacionados à Matemática e à Estatística.

Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Disponível em: <www.fnde.gov.br>. Acesso em: 18 fev. 2016.

O Ministério da Educação visa, por meio deste *site*, prestar assistência técnica e financeira e executar ações para o desenvolvimento da educação, proporcionando ao professor uma fonte de informações sobre os programas gerenciados pelo FNDE, as formas de financiamento escolar, os projetos e as ações educacionais.

Geogebra. Disponível em: <www.geogebra.org>. Acesso em: 18 fev. 2016.

Este *site* disponibiliza informações sobre o Geogebra e o *download* desse programa. No *site* podemos encontrar materiais de ajuda no trabalho com o *software* e exemplos de construções que podem ser feitas com ele.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 18 fev. 2016.

O *site* do IBGE apresenta várias informações sobre o Brasil, como, por exemplo, informações sobre a população, economia, geociências etc. Esses dados podem ser utilizados durante o trabalho com conteúdos como Matemática Financeira e Estatística.

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Disponível em: <www.ime.unicamp.br>. Acesso em: 18 fev. 2016.

No *site* do Instituto podemos encontrar informações sobre os programas de pós-graduação, além de publicações e agenda de eventos relacionados ao ensino de matemática.

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Disponível em: <www.impa.br>. Acesso em: 18 fev. 2016. O IMPA – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – é um centro de referência de ensino e pesquisa de matemática de nível internacional, tendo grande contribuição na formação de pesquisadores, professores e de jovens talentos da área. No *site* da instituição, é possível obter informações sobre eventos, cursos e publicações de interesse para o professor de Matemática.

Matemática. Disponível em: <www.matematica.com.br>. Acesso em: 18 fev. 2016.

Visando auxiliar professores e estudantes, o *site* aborda conteúdos de Matemática do Ensino Fundamental e Médio. Além disso, encontra-se disponível no *site* provas de vestibulares e de concursos, simulados *on-line*, curiosidades, dicas, biografias de matemáticos etc.

Matemática Essencial. Disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica>. Acesso em: 18 fev. 2016.

O *site* apresenta conteúdos de Matemática presentes desde o Ensino Fundamental até o Superior, além de exercícios propostos e resolvidos.

Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). Disponível em: <www.obm.org.br>. Acesso em: 18 fev. 2016.

O *site* da OBM apresenta diversas informações a respeito das Olímpiadas Brasileiras de Matemática, como o calendário de competições e as provas (com os gabaritos das edições anteriores). O *site* ainda traz artigos da revista EUREKA! – A Revista das Olimpíadas Brasileira de Matemática.

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Disponível em: <www.obmep.org.br>. Acesso em: 18 fev. 2016.

O portal da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas traz materiais didáticos como vídeos, apostilas e banco de questões e resolução, os quais podem ser baixados a fim de utilizá-los em sala de aula.

Portal do Professor. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br>. Acesso em: 18 fev. 2016.

O Portal do Professor oferece vídeos, animações, simulações, áudios, hipertextos, imagens e experimentos práticos destinados à formação docente e à utilização em sala de aula. Há um espaço em que os professores podem compartilhar suas experiências com outros profissionais da área e criar suas aulas utilizando recursos do portal.

Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: <www.sbm.org.br>. Acesso em: 18 fev. 2016.

O *site* da Sociedade Brasileira de Matemática disponibiliza alguns conteúdos de periódicos e de eventos que podem ser baixados gratuitamente, além de ser uma loja virtual para compra de livros e revistas relacionados à Matemática.

TV Escola. Disponível em: <http://tvescola.mec.gov.br>. Acesso em: 18 fev. 2016.

O TV Escola é destinado a professores, a alunos e ao público em geral. Possui materiais que podem ser impressos e uma videoteca. O conteúdo do *site*, que abrange várias disciplinas, é destinado tanto à formação do professor como ao uso em sala de aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Câmara dos Deputados. Projeto de Lei n. 8.035, de 20 de dezembro de 2010. *Plano Nacional de Educação 2011-2020*. Disponível em: <www.camara.leg.br>. Acesso em: 18 fev. 2016.

BRASIL. Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Disponível em: <www.planalto.gov.br>. Acesso em: 18 fev. 2016.

BRASIL. *Ministério da Educação. Ensino Médio Inovador*. Brasília, 2009. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/ensino_medioinovador.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (Ensino Médio)*. Brasília, [s.d.].

D'AMBROSIO, Ubiratan. História da Matemática e Educação. In: FERREIRA, Eduardo Sebastini (Org.). *Cadernos CEDES 40*. Campinas: Papirus, 1996.

MACHADO, Nílson José. *Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua*. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001. p. 10.

PAIS, Luiz Carlos. *Ensinar e aprender Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 135-6.

PENTEADO, Miriam Godoy. Novos atores, novos cenários: discutindo a inserção dos computadores na profissão docente. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: Unesp, 1999. p. 309-10.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, João Pedro. Novas tecnologias na aula de Matemática. *Educação e Matemática*. Lisboa: APM, n. 34, jul. 1995. p. 2-7.

SILVA, Benedito Antonio da. Contrato didático. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC, 1999. p. 43-64. (Trilhas).

Nesta seção, são apresentados os objetivos, comentários e sugestões específicos relativos a cada uma das unidades propostas neste volume. Eles foram elaborados para auxiliá-lo no trabalho em sala de aula. Você encontrará, por exemplo, comentários sobre relações interdisciplinares referentes aos conteúdos abordados, sugestões para a condução de conteúdos, comentários sobre algumas atividades e seções presentes nas unidades, além de textos e atividades complementares.

1 TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

Por meio de situações contextualizadas, os alunos são levados a ampliar e formalizar diversos conceitos relacionados à trigonometria na circunferência. Espera-se que no trabalho desenvolvido nesta unidade, eles possam utilizar conhecimentos já consolidados no Ensino Fundamental e no volume **1** da coleção.

Inicialmente, são retomados os elementos da circunferência e apresentadas situações nas quais é possível reconhecer formas circulares. Os conceitos de medida linear e medida angular do arco também são retomados de modo que os alunos possam perceber a diferença entre tais medidas. A unidade de medida radiano é abordada formalmente e apresentada como medida padrão para ângulos na circunferência.

São apresentadas algumas situações que abordam a noção de giro em torno de um ponto fixo e, a partir desta ideia, o conceito de circunferência trigonométrica é introduzido. São discutidas diversas questões relacionadas à circunferência trigonométrica, como a noção de sentido de um ponto que a percorre e situações em que esse ponto percorre mais de uma volta completa, além do conceito de arcos côngruos.

Os conceitos de seno, cosseno e tangente, antes discutidos apenas no triângulo retângulo, agora são trabalhados na circunferência trigonométrica. É importante que os alunos percebam a relação entre essas duas abordagens, reconhecendo que o cosseno e o seno representam as medidas dos catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa **1**, pois são as projeções de um ponto da circunferência nos eixos x e y.

Observe a seguir os objetivos dessa unidade.

Objetivos

- Reconhecer os elementos de uma circunferência.
- Determinar a medida linear e a medida angular de um arco.
- Compreender o conceito de arcos côngruos.
- Determinar os arcos côngruos por meio de simetria.
- Identificar os quadrantes em uma circunferência trigonométrica.
- Reconhecer os ângulos notáveis e as relações trigonométricas (seno, cosseno e tangente) na circunferência.

COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

Relações interdisciplinares

Nesta unidade, destacam-se duas situações de interdisciplinaridade, uma relacionada com Educação Física e outra com Física.

O assunto abordado na abertura da unidade, páginas **8** e **9**, permite estabelecer uma relação entre os conceitos de trigonometria na circunferência e a prática de alguns esportes de atletismo, discutidos nas aulas de Educação Física. A relação com a Matemática se dá na marcação da pista e são utilizadas medidas angulares e lineares de arcos para determinar a posição de largada dos atletas, que deve ser desalinhada para compensar a diferença da distância percorrida nas curvas. Com isso, todos os competidores percorrem a mesma distância ao chegar ao final da prova.

A interdisciplinaridade entre Matemática e Física se dá com o tema da página **16**. Quando um veículo faz uma curva, as rodas de um mesmo eixo percorrem distâncias diferentes, devido aos arcos possuírem raios diferentes. Este assunto é discutido nas aulas de Física, durante o estudo de movimentos circulares acoplados. Como as rodas possuem o mesmo raio, a velocidade angular da roda externa à curva é maior que a velocidade angular da roda interna à curva. Para compensar essa diferença, os veículos possuem um dispositivo chamado diferencial, que contribui para que façam curvas com segurança.

Páginas 8 e 9 – Abertura da unidade

- Após a leitura e discussão das questões propostas nas páginas iniciais, é possível propor uma pesquisa aos alunos sobre as modalidades paraolímpicas de provas de corrida no atletismo. Algumas informações podem ser obtidas no *site* do Comitê Paraolímpico Brasileiro (COB) <www.cpb.org.br>. Acesso em: 11 maio 2016.
- Proponha algumas questões para avaliar o conhecimento prévio dos alunos em relação ao cálculo do comprimento de uma circunferência.

  a) Qual seria o comprimento aproximado de uma circunferência cujo raio equivale ao da pista mais interna? 229,3 m

  b) Note que a parte curva da pista mais interna corresponde a uma semicircunferência. Sendo assim, qual o percurso aproximado em linha reta do atleta que corre nessa pista, em uma prova de 200 m? 85,3 m

  Com base nessas questões, proponha um debate perguntando a parte curva das outras pistas. É importante os alunos perceberem que, apesar de os arcos não corresponderem a uma semicircunferência, a medida do percurso durante a curva é igual, pois os raios destes arcos são maiores.

Página 10

- Após o trabalho com esta página, complemente o assunto "Origem da trigonometria", apresentado no texto lateral, com as informações a seguir sobre o matemático grego Hiparco.

Hiparco, Menelau, Ptolomeu e a Trigonometria Grega

[...]

É bem provável que o mais eminente dos astrônomos da Antiguidade tenha sido Hiparco, que viveu em torno de 140 a.C. Embora se tenham dados de um equinócio vernal registrado por Hiparco em Alexandria, no ano 146 a.C., suas observações mais notáveis foram feitas no famoso observatório de Rodes, importante centro comercial. Hiparco era um observador extremamente cuidadoso, e creditam-se a ele, em astronomia, feitos como a determinação da duração do mês lunar médio (o afastamento entre seu valor e aquele presentemente aceito não vai além de 1"), um cálculo acurado da inclinação da eclíptica e a descoberta e uma estimativa da precessão anual dos equinócios. Consta ainda que ele calculou a paralaxe lunar, fez a determinação do perigeu e do movimento médio da Lua e organizou um catálogo de 850 estrelas. Foi Hiparco, ou talvez Hipsicles (c. 180 a.C.), quem introduziu na Grécia a divisão do círculo em 360°; sabe-se ainda que Hiparco propugnava a localização de pontos sobre a superfície da Terra por meio de latitudes e longitudes. Como quase nenhum dos escritos de Hiparco chegou até nós, tudo que se sabe sobre suas realizações científicas provém de fontes indiretas.

Para nós, porém, as realizações de Hiparco na astronomia são menos importantes que o papel que ele teve no desenvolvimento da trigonometria. O comentador Têon de Alexandria (séc. IV) atribui a Hiparco um tratado em doze livros que se ocupa da construção de uma *tábua de cordas*. Acredita-se que uma tábua de cordas posterior, devida a Cláudio Ptolomeu, que fornece os comprimentos das cordas dos ângulos centrais de um círculo dado, de $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$ a 180°, com incrementos de $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$, pode ter-se baseado na de Hiparco. [...]

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004. p. 202-3.

Página 13

- Complemente o trabalho com essa página propondo aos alunos que convertam medidas angulares utilizando a calculadora científica.

  Com os procedimentos a seguir e utilizando certo modelo de calculdora científica, é possível converter uma medida em radianos para uma medida em graus e vice-versa.

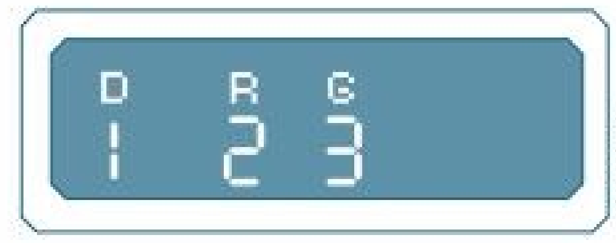
  Eduardo C.

  › Pressione [MODE CLR] até aparecer no visor da calculadora o menu ao lado:

  › Caso queira converter uma medida em radianos para graus, pressione [S-SUM 1] para selecionar a opção **Deg**. Já para converter uma medida em graus para radianos, pressione [S-VAR 2] para selecionar a opção **Rad**.

› Digite o valor que você deseja converter.

› Pressione SHIFT e DRG▸ Ans para acionar a função DRG. Neste momento, aparecerá no visor da calculadora o menu ao lado:



Eduardo C.

› Para converter para graus, pressione S-VAR 2 a fim de selecionar a opção **R**. Já para converter para radianos, pressione S-SUM 1 a fim de selecionar a opção **D**.

› Para finalizar, pressione % =.

Após abordar esses procedimentos com os alunos, solicite a eles que, utilizando uma calculadora científica, convertam as medidas em:

a) radianos para medidas em graus.

- 6,25 rad aproximadamente 358,1°
- 3,14 rad aproximadamente 179,91°
- 0,95 rad aproximadamente 54,43°
- 5,17 rad aproximadamente 296,22°

b) graus para medidas em radianos.

- 237° aproximadamente 4,14 rad
- 320,5° aproximadamente 5,59 rad
- 90° aproximadamente 1,57 rad
- 81,48° aproximadamente 1,42 rad

Páginas 17 e 18

- Complemente o trabalho com essas páginas propondo as atividades a seguir.

1. (UFMT)

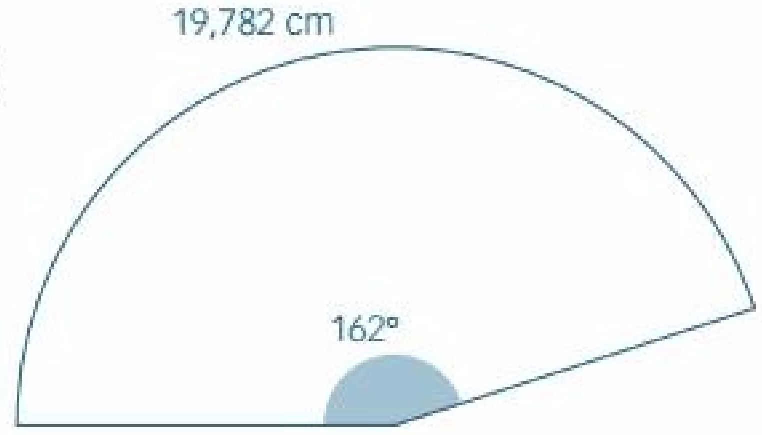
> O maior relógio de torre de toda a Europa é o da Igreja St. Peter, na cidade de Zurique, Suíça, que foi construído durante uma reforma do local, em 1970.
>
> *O Estado de S. Paulo*. Texto adaptado.

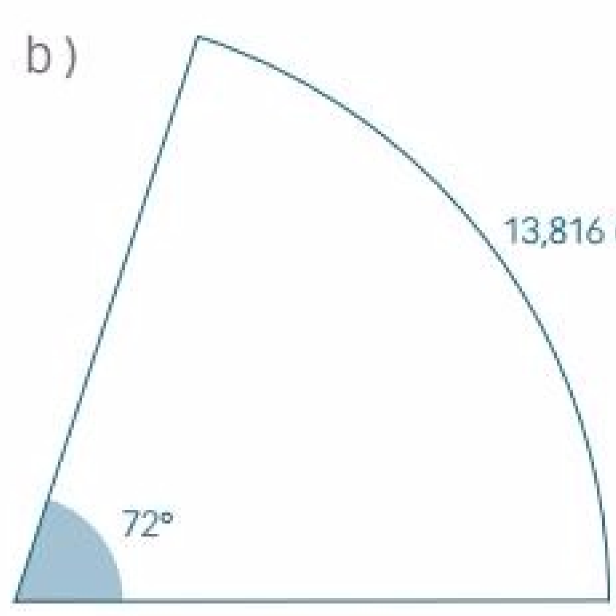
O mostrador desse relógio tem formato circular, e o seu ponteiro dos minutos mede 4,35 m. Considerando $\pi \simeq 3,1$, a distância que a extremidade desse ponteiro percorre durante 20 minutos é, aproximadamente:

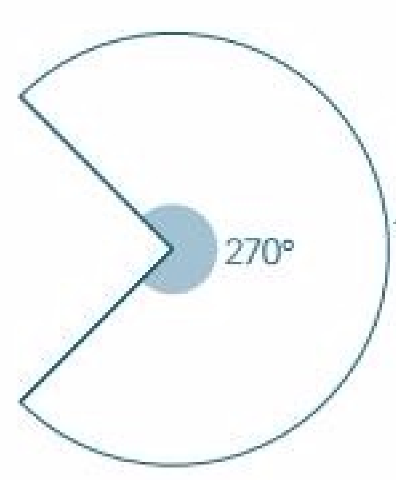
a) 10 m b) 9 m c) 8 m d) 7 m e) 6 m

2. Em cada item, determine a medida do raio da circunferência, sabendo que na imagem está indicado um arco desta circunferência. Use $\pi = 3,14$.

a) 

c) 

b) 

d) 

Ilustrações: Acervo da Editora

Resolução

1. Medida angular do ponteiro com 20 minutos:

Medida de tempo (min)	Medida angular (radianos)
60	2π
20	x

$$\frac{60}{20}=\frac{2\pi}{x}\Rightarrow x=\frac{20\cdot 2\pi}{60}=\frac{2}{3}\pi\rightarrow\frac{2}{3}\pi\text{ rad}$$

O comprimento do arco de medida $\frac{2}{3}\pi$ rad é:

Medida angular (radianos)	Medida de comprimento (m)
2π	$2\cdot\pi\cdot\underbrace{r}_{4,35}=8,7\pi$
$\frac{2}{3}\pi$	x

$$\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi}=\frac{8,7\pi}{x}\Rightarrow x=\frac{\frac{2}{3}\pi\cdot 8,7\pi}{2\pi}=2,9\underbrace{\pi}_{3,1}\rightarrow 8,99\text{ m}$$

Logo, o comprimento da circunferência é de aproximadamente 9 metros. Portanto, a alternativa correta é **b**.

2. a) Comprimento do arco de 360°.

Medida angular (°)	Medida de comprimento (cm)
30	1,57
360	x

$$\frac{30}{360}=\frac{1,57}{x}\Rightarrow x=\frac{360\cdot 1,57}{30}=18,84$$

O comprimento da circunferência é dado por:

$$2\cdot\pi\cdot r=18,84\Rightarrow r=\frac{18,84}{2\cdot\underbrace{\pi}_{3,14}}=3$$

Portanto, a medida do raio é 3 cm.

b) Comprimento do arco de 360°.

Medida angular (°)	Medida de comprimento (cm)
72	13,816
360	x

$$\frac{72}{360}=\frac{13,816}{x}\Rightarrow x=\frac{360\cdot 13,816}{72}=69,08$$

O comprimento da circunferência é dado por:

$$2\cdot\pi\cdot r=69,08\Rightarrow r=\frac{69,08}{2\cdot\underbrace{\pi}_{3,14}}=11$$

Portanto, a medida do raio é 11 cm.

c) Comprimento do arco de 360°.

Medida angular (°)	Medida de comprimento (cm)
162	19,782
360	x

$$\frac{162}{360}=\frac{19,782}{x}\Rightarrow x=\frac{360\cdot 19,782}{162}=43,96$$

O comprimento da circunferência é dado por:

$$2\cdot\pi\cdot r=43,96\Rightarrow r=\frac{43,96}{2\cdot\underbrace{\pi}_{3,14}}=7$$

Portanto, a medida do raio é 7 cm.

d) Comprimento do arco de 360°.

Medida angular (°)	Medida de comprimento (cm)
270	18,84
360	x

$$\frac{270}{360}=\frac{18,84}{x}\Rightarrow x=\frac{360\cdot 18,84}{270}=25,12$$

O comprimento da circunferência é dado por:

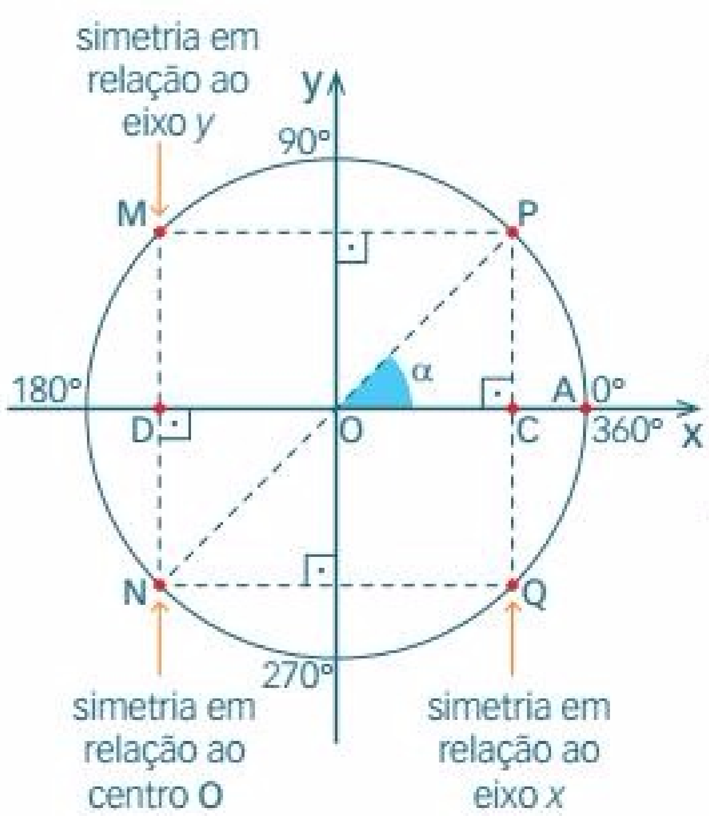
$$2\cdot\pi\cdot r=25,12\Rightarrow r=\frac{25,12}{2\cdot\underbrace{\pi}_{3,14}}=4$$

Portanto, a medida do raio é 4 cm.

Página 24

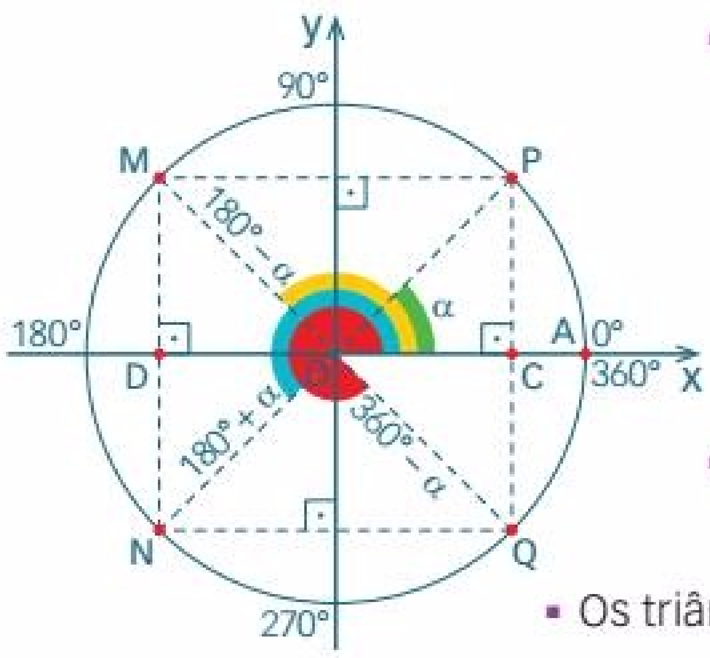
- Durante o trabalho com simetria, apresente aos alunos a demonstração, utilizando triângulos congruentes, sobre as equivalências e valores dos ângulos apresentados no início dessa teoria.

1º Considere um ponto **P** sobre a circunferência trigonométrica, de maneira que este ponto esteja associado à medida α (com $0° < \alpha < 90°$). Marque sobre a circunferência os pontos, de maneira que **M** seja simétrico a **P** em relação ao eixo *y*, **N** seja simétrico a **P** em relação ao centro **O** e **Q** seja simétrico a **P** em relação ao eixo *x*.



Acervo da Editora

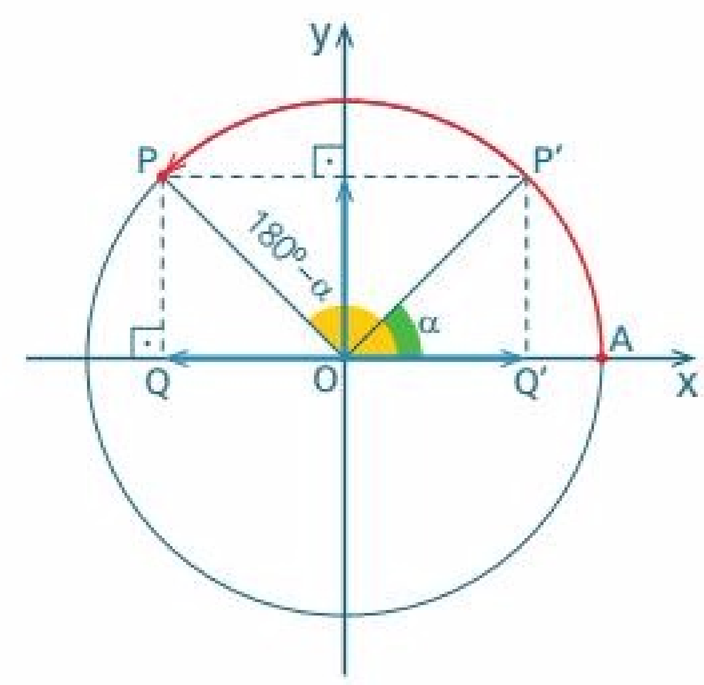
2º Vamos determinar as medidas associadas aos pontos **M**, **N** e **Q** em relação à medida α associada ao ponto **P**.



- Os triângulos MOD e POC são congruentes, pois **M** foi construído de maneira a ser simétrico a **P** em relação ao eixo *y*, logo podemos afirmar que $\overline{CO} \equiv \overline{DO}$, pois **C** e **D** são projeções sobre o eixo *x* dos pontos **P** e **M**, respectivamente. Além disso, a reta $\overleftrightarrow{MP}$ é paralela ao eixo *x*, disso segue que $\overline{MD} \equiv \overline{PC}$. Sabemos ainda que $\text{med}(M\hat{D}O) = \text{med}(P\hat{C}O) = 90°$. Assim temos, pelo caso LAL, que os triângulos são congruentes. Logo, os ângulos $M\hat{O}D$ e $P\hat{O}C$ têm a mesma medida. Portanto, o arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ tem medida igual a $180° - \alpha$.
- Os ângulos $N\hat{O}D$ e $P\hat{O}C$ são opostos pelo vértice, assim $\text{med}(N\hat{O}D) = \text{med}(P\hat{O}D) = \alpha$. Portanto, o arco trigonométrico $\overset{\frown}{AN}$ tem medida igual a $180° + \alpha$.
- Os triângulos QOC e POC são congruentes, pois, como **Q** foi construído de maneira a ser simétrico a **P** em relação ao eixo *x*, podemos afirmar que $\overline{PC} \equiv \overline{QC}$ e $\overline{CO}$ é comum aos dois triângulos. Sabemos ainda que $\text{med}(Q\hat{C}O) = \text{med}(P\hat{C}O) = 90°$, assim temos que, pelo caso LAL, os triângulos são congruentes. Logo, os ângulos $C\hat{O}Q$ e $P\hat{O}C$ têm a mesma medida. Portanto, o arco trigonométrico $\overset{\frown}{AQ}$ tem medida igual a $360° - \alpha$.

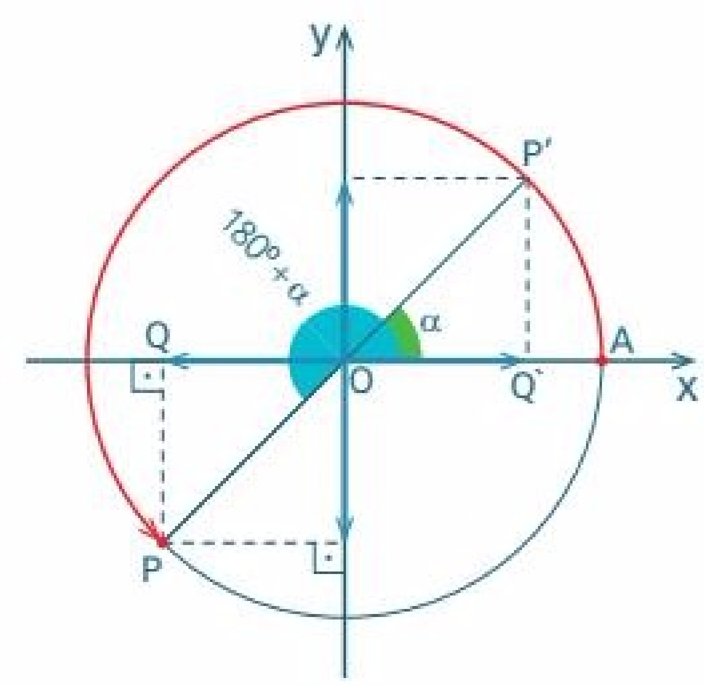
Página 26

- Durante o trabalho com a atividade especial, apresente aos alunos a relação estabelecida entre um ponto no 1º quadrante e pontos no 2º, 3º e 4º quadrantes. Observe essas relações apresentadas a seguir.



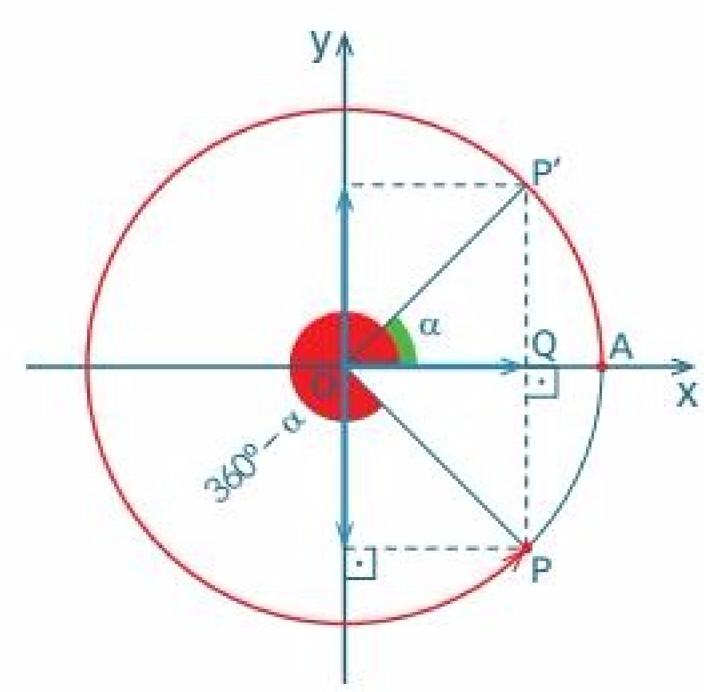
› 2º quadrante

$$(OP)^2 = (OQ)^2 + (PQ)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1^2 = [\cos(180° - \alpha)]^2 + [\text{sen}(180° - \alpha)]^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 = (-\cos\alpha)^2 + (\text{sen}\alpha)^2 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$



› 3º quadrante

$$(OP)^2 = (OQ)^2 + (PQ)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1^2 = [\cos(180° + \alpha)]^2 + [\text{sen}(180° + \alpha)]^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 = (-\cos\alpha)^2 + (-\text{sen}\alpha)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$



› 4º quadrante

$$(OP)^2 = (OQ)^2 + (PQ)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1^2 = [\cos(360° - \alpha)]^2 + [\text{sen}(360° - \alpha)]^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 = (\cos\alpha)^2 + (-\text{sen}\alpha)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Ilustrações: Acervo da Editora

Página 27

- Aproveite o contexto da seção **Como funciona** para fazer questionamentos a respeito de alguns dos assuntos trabalhados até esta página, tais como:
  - › a medida da circunferência da roda-gigante, que pode ser obtida pela fórmula $C = 2\pi r$. Como o valor do raio é 75 m e considerando $\pi = 3{,}14$, a medida da circunferência será:

    $C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 75 = 471 \rightarrow 471$ m.
  - › o ângulo entre algumas cabines como, por exemplo, as cabines 1 e 6. Sabemos que entre cada cabine o ângulo é de $\frac{\pi}{14}$ rad. Logo, entre as cabines 1 e 6 o ângulo será de $\frac{5\pi}{14}$ rad.

Páginas 30 e 31

- Ao apresentar o eixo das tangentes, verifique a possibilidade de desenvolver uma atividade com a calculadora científica para que os alunos percebam que quanto mais a medida do arco se aproxima de 90º, maior é o valor da tangente. Segue um exemplo de atividade que pode auxiliar nessa tarefa.

  › Utilizando uma calculadora científica, determine as tangentes indicadas a seguir com aproximação de duas casas decimais.

a) tg28° 0,53	c) tg83° 8,14	e) tg89° 57,29	g) tg89,9° 572,96
b) tg54° 1,38	d) tg87° 19,08	f) tg89,4° 95,49	h) tg89,95° 1145,92

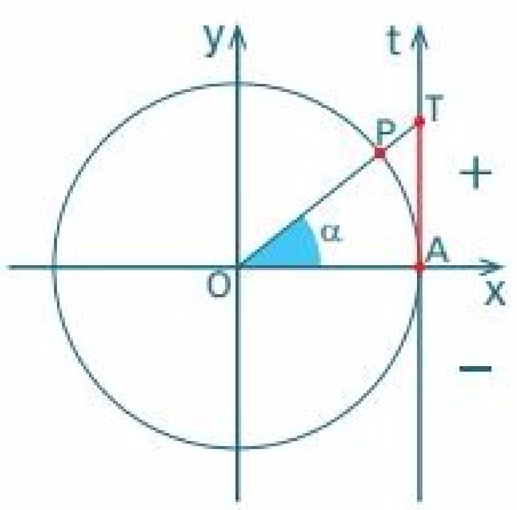
  › O que se pode perceber em relação aos valores das tangentes calculadas?
  Resposta esperada: Quanto mais a medida do arco se aproxima de 90°, maior é o valor da tangente.

  Utilizando essa mesma ideia, promova um debate com os alunos a respeito dos valores negativos da tangente.

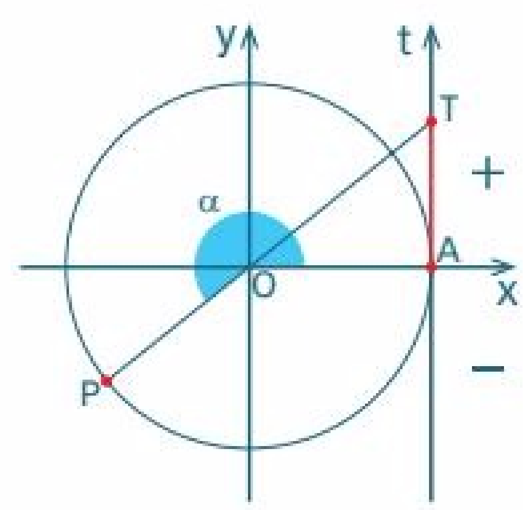
- Após trabalhar com o conteúdo dessa página, mostre aos alunos como verificar se a tangente de um arco qualquer tem valor positivo ou negativo.

  Seja α a medida de um arco de extremidade P, com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, temos:

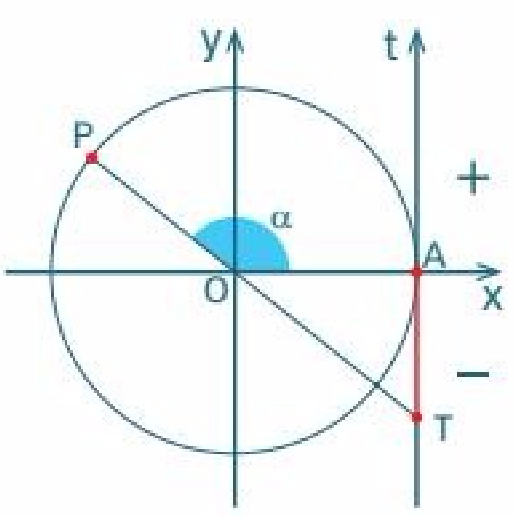
  › 1º quadrante



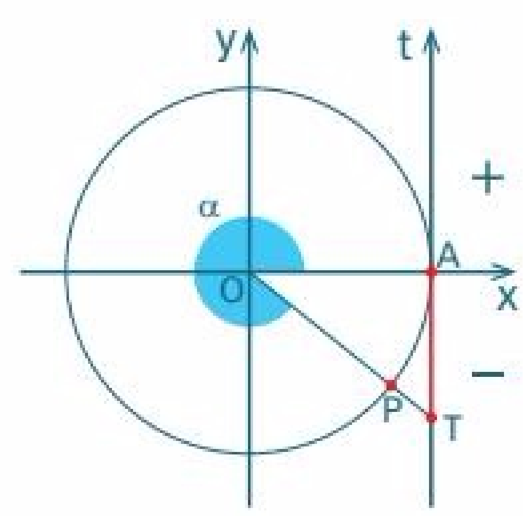
  › 3º quadrante



  › 2º quadrante



  › 4º quadrante



Ilustrações: Acervo da Editora

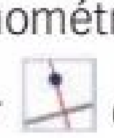
  Desse modo, se o arco possuir extremidades no:

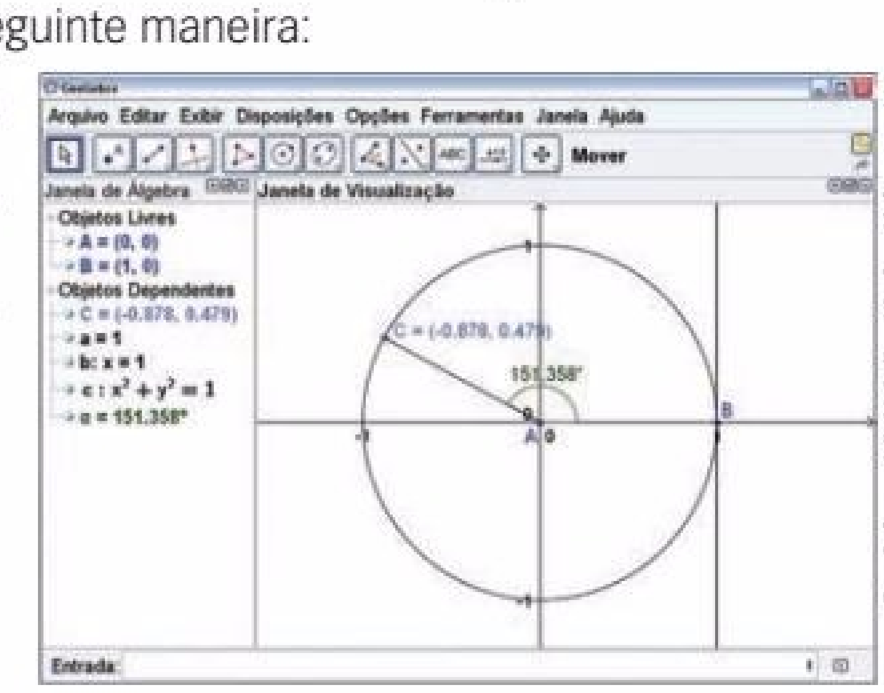
  › 1º quadrante ou no 3º quadrante, o valor da tangente é positivo.

  › 2º quadrante ou no 4º quadrante, o valor da tangente é negativo.

Páginas 34 e 35

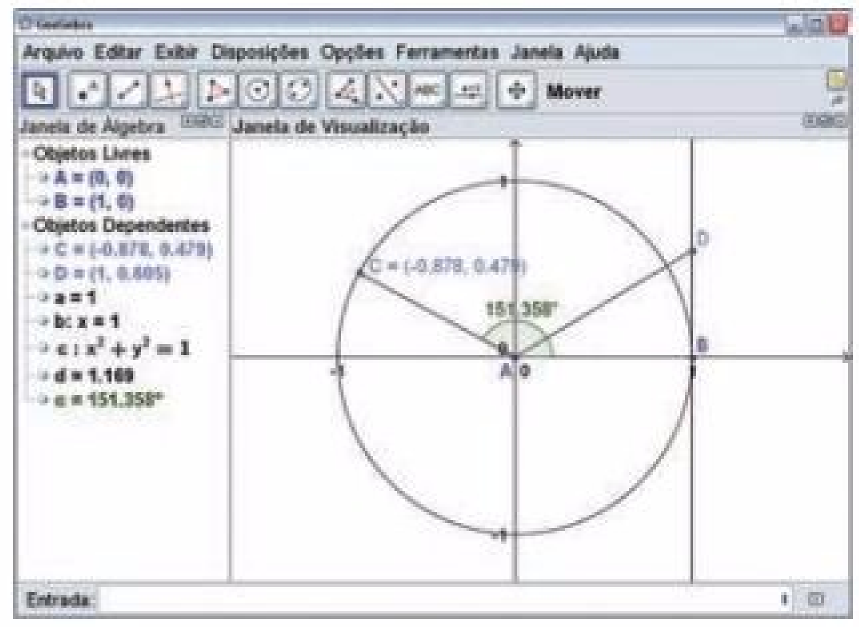
- Dependendo da versão do GeoGebraPrim, o ângulo α exibido será sempre maior ou igual a 0° e menor ou igual a 180°, porque, neste caso, o programa medirá o menor ângulo entre duas retas. Caso isso ocorra, oriente os alunos a fazer a interpretação do ângulo a partir do eixo *x* e em sentido anti-horário.
- Ao trabalhar com essa seção, verifique a possibilidade de construir o eixo das tangentes na circunferência trigonométrica. Para isso, pode-se proceder da seguinte maneira:

  Utilizando a mesma circunferência trigonométrica, selecione a ferramenta **Reta Perpendicular**  e clique uma vez sobre o ponto **B** e uma vez no eixo das abscissas, para criar o “eixo das tangentes”.

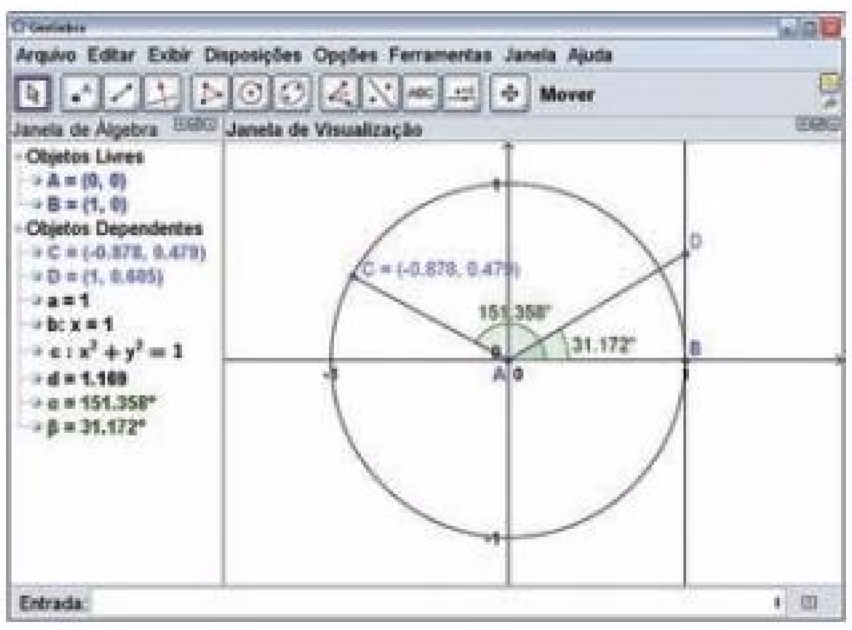


GeoGebra v.4.0.41.0. Por Markus Hohenwarter

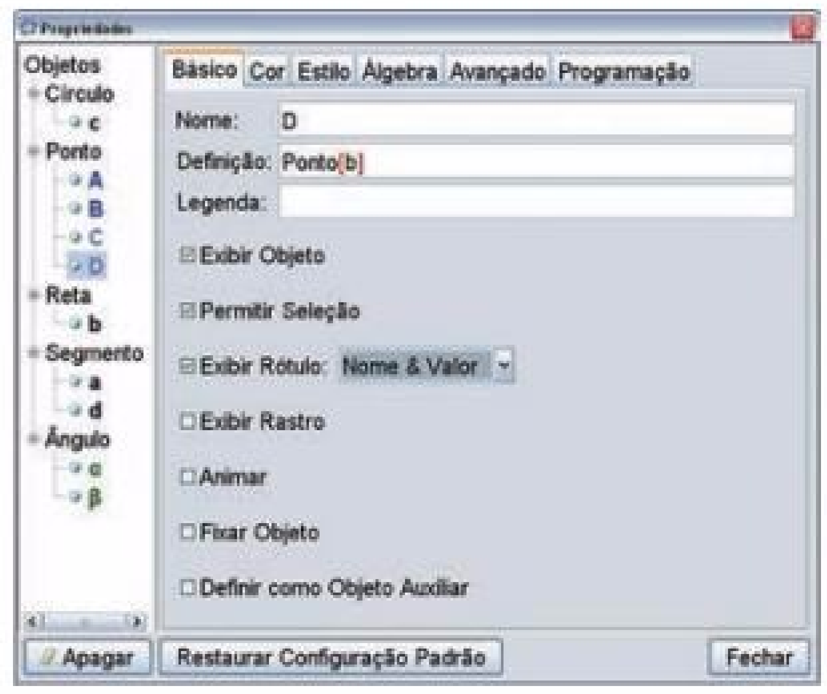
Com a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** selecionada, clique no ponto **A** e depois em um ponto qualquer sobre o eixo das tangentes, para criar um segmento.



Agora, selecione a ferramenta **Ângulo** e clique uma vez no ponto **B**, uma vez no ponto **A** e uma vez no ponto **D**, nesta ordem, para criar o ângulo β.



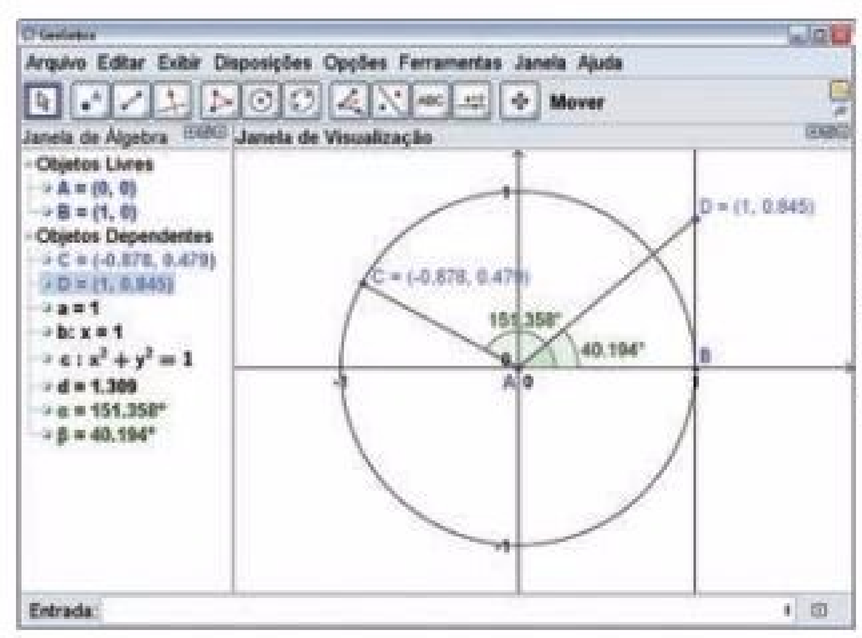
Selecione o ponto **D**. No menu **Editar**, clique em **Propriedades**. Na aba **Básico**, marque a opção **Exibir Rótulo** e mude o campo para **Nome & Valor**. Em seguida, clique em **Fechar**.



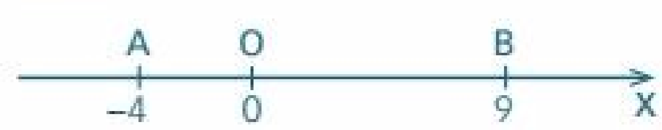
Com a ferramenta **Mover** selecionada, mova o ponto **D** sobre o eixo das tangentes. A ordenada de **D** corresponde a $tg\beta$.

As coordenadas do ponto **D** são sempre 1 e a tangente do ângulo β, pois a tangente corresponde à medida algébrica de $\overline{BD}$.

Diga aos alunos que a medida algébrica de um segmento de reta orientado pode ser negativa, nula ou positiva. Por exemplo, na reta orientada, ao lado, a distância algébrica de $\overline{OA}$ é -4, já a medida algébrica de $\overline{OB}$ é 9.



Imagens: GeoGebra v.4.0.41.0. Por Markus Hohenwarter



2 FUNÇÕES, RELAÇÕES, EQUAÇÕES E TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Esta unidade visa desenvolver diversos conceitos relacionados a conteúdos trabalhados pelos alunos neste volume e no volume **1** da coleção. Além disso, por meio de situações contextualizadas, espera-se que eles percebam a aplicação destes conceitos em outras áreas do conhecimento.

Inicialmente os alunos são convidados a explorar a função seno a partir de uma situação proposta na unidade anterior, a qual relaciona a altura das cabines de uma roda-gigante a uma função do tipo trigonométrica. Fazendo uma analogia à circunferência trigonométrica, espera-se que eles compreendam o conceito de função seno e reconheçam a curva senoidal, assim como percebam a correspondência entre um ponto pertencente à circunferência e sua representação no gráfico.

Em relação à função cosseno, primeiro é apresentada sua definição e em seguida sua representação gráfica. É importante que os alunos percebam a relação entre as funções seno e cosseno e, consequentemente, entre seus gráficos. Além disso, espera-se que reconheçam essas duas funções como funções periódicas.

As fórmulas de transformação e as relações trigonométricas são abordadas de modo que os alunos percebam a sua importância e saibam como utilizá-las. No trabalho referente às equações trigonométricas é importante que esteja claro para eles o conceito de arcos côngruos e a periodicidade das funções trigonométricas já estudadas.

Observe a seguir os objetivos dessa unidade.

Objetivos

- Compreender o conceito de função seno e função cosseno.
- Identificar o período e a imagem das funções seno e cosseno.
- Reconhecer o gráfico da função seno e da função cosseno.
- Compreender o conceito de funções do tipo trigonométricas, bem como reconhecer seu gráfico.
- Utilizar as fórmulas de transformação.
- Relacionar as razões trigonométricas seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante.
- Utilizar as relações trigonométricas.
- Resolver equações trigonométricas.

COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

Relações interdisciplinares

Alguns contextos da Física abordam os chamados movimentos periódicos, que são aqueles que se repetem em intervalos de tempos iguais. As funções seno e cosseno, estudadas na unidade, se apresentam como ferramentas para descrever alguns destes movimentos, relacionando assim as disciplinas de Matemática e Física.

Nas páginas **36** e **37**, a unidade é iniciada utilizando como tema as ondas sonoras, assunto tratado pela disciplina de Física, em Acústica. A onda sonora corresponde a uma perturbação gerada em um meio material, no caso o ar, que se propaga em um fenômeno periódico de compressão e rarefação do ar, sendo, por esse motivo, possível descrevê-la por uma função do tipo trigonométrica.

A ideia de movimentos periódicos também é abordada pela Física, em Mecânica, ao tratar de situações em que valores oscilam em torno de um ponto de equilíbrio, como o movimento de um pêndulo simples ou de um corpo preso a uma mola oscilando. Essa ideia é abordada na página **49**, na qual o funcionamento de um relógio de pêndulo é apresentado. As engrenagens utilizam o movimento pendular para auxiliar na sincronização, sendo as posições do pêndulo descritas por funções do tipo trigonométricas dependentes do tempo. O mesmo ocorre com o sistema massa-mola, apresentado na atividade **20** (página **52**), no qual um corpo está preso a uma mola oscilando em torno de seu ponto de equilíbrio, posição em que ela não possui deformação.

A atividade **14** (página **48**) apresenta a ideia de tensão elétrica variando em um circuito, tema abordado pela Física nos estudos da Eletricidade. Mesmo não sendo algo visível, para se descrever os valores dessa tensão, segue-se a mesma linha de raciocínio, utilizando uma função do tipo trigonométrica, definindo assim seu período e frequência de oscilação.

Em alguns casos, mesmo que não seja possível a analogia com um sistema oscilante, a periodicidade de um evento também pode ser descrita por funções do tipo trigonométrica. Como exemplo, existem fenômenos relacionados à Terra e ao Sistema Solar, tratados normalmente pela Astronomia, como a duração de um dia e o movimento das marés.

A atividade **13** (página **48**) e a atividade **Duração do período de incidência de luz solar** (página **53**) contemplam a ideia de duração do período de incidência de luz solar em um dia terrestre. Devido à inclinação da Terra, em seu movimento em torno do Sol, algumas regiões não recebem a mesma quantidade de radiação durante o ano. Assim, tanto o horário do pôr do Sol (atividade **13**) quanto o período em que há incidência de luz solar (página **53**) podem ser descritos por funções do tipo trigonométricas, devido ao fato de o movimento da Terra em torno do Sol ser periódico.

O movimento de subida e descida das marés, tema da atividade **42** (página **62**), ocorre devido à atração gravitacional do Sol e da Lua. Este fenômeno também apresenta uma periodicidade decorrente dos movimentos da Terra e, deste modo, é possível obter a altura da maré em determinado tempo por uma função do tipo trigonométrica.

Os fenômenos citados se repetem devido aos movimentos periódicos executados pela Terra. Contudo, o mesmo ocorre com o movimento dos satélites, tratado nos estudos de Gravitação. Na atividade **18** (página **51**), a distância de um satélite até a Terra, em função do tempo, é descrita por uma função do tipo trigonométrica, existindo um valor máximo (apogeu) e mínimo (perigeu), uma vez que essas órbitas têm formatos elípticos.

Outra relação entre a Matemática e a Física é destacada na atividade **37** (página **61**), no cálculo da altura máxima que uma bola atinge ao ser lançada. Tal altura pode ser descrita por uma função do tipo trigonométrica, dependente do ângulo de lançamento.

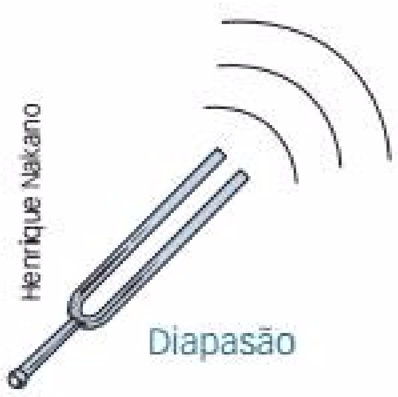
Páginas 36 e 37 – Abertura da unidade

- Após a leitura do texto das páginas iniciais e a discussão das questões propostas, é possível complementar o tema explorando a ideia de frequência nas notas musicais.

  Explique aos alunos que a frequência é um dos aspectos que diferenciam os ruídos das notas musicais. O ruído é o resultado da soma de inúmeras frequências e, por isso, resulta em um som desarmônico que dificilmente pode ser expresso matematicamente. Já as notas musicais são vibrações mais ordenadas e constantes e possuem menos frequências. Portanto, produzem uma onda mais pura e podem ser analisadas detalhadamente.

  Deste modo, é necessário utilizar frequências específicas para afinar um instrumento e criar uma harmonia durante a execução das notas. Existem diversos afinadores eletrônicos que indicam a frequência de determinado som e ajudam muito nesse processo. Porém, o diapasão é um dos instrumentos mais tradicionais utilizado por músicos para esse fim. Ele vibra na frequência da nota musical Lá, que é de 440 Hz.

Henrique Nakano



Diapasão

Páginas 38 a 40

- Durante o trabalho com essas páginas, explique aos alunos que as funções trigonométricas estão associadas a alguns fenômenos periódicos presentes na natureza, na música, na ciência, por exemplo, e serão estudados no decorrer da unidade.
- Verifique a possibilidade de realizar um trabalho articulado à disciplina de Física sobre comprimentos de ondas, como as utilizadas por meios de comunicação (TV, rádio etc.), que podem ser descritas por funções do tipo trigonométricas. Com o professor de Física, explique os diferentes comprimentos dessas ondas e modele funções trigonométricas que descrevam suas trajetórias. Para tornar a atividade mais interessante, trabalhe com temas atuais, como as ondas da tecnologia 4G para a internet móvel, que entrou no Brasil em 2013.

Páginas 43 a 47

- Durante o trabalho com essas páginas, verifique a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática para que utilizem algum *software* matemático para plotar gráficos, como o GeoGebraPrim. Peça que plotem os gráficos das funções apresentadas nessas páginas e, em seguida, que variem para cada função $f(x)=a+b\cdot\text{sen}(cx+d)$ os parâmetros **a**, **b**, **c** e **d** e verifiquem de que maneira cada um deles modifica o gráfico da função.

Página 49

- Após o trabalho da seção **Como funciona**, diga aos alunos que, no Brasil, o Observatório Nacional (ON), por meio da Divisão Serviço da Hora (DSHO), é a única instituição legalmente designada para gerar, conservar e disseminar a Hora Legal Brasileira. A DSHO também é responsável pela padronização da referência nacional das grandezas de tempo e frequência. No *site* <www.horalegalbrasil.mct.on.br> (Acesso em: 11 maio 2016.) é possível obter informações sobre a história do relógio e sua evolução, bem como obter a hora exata para qualquer fuso horário do nosso país.

Página 53

- Durante o trabalho com a atividade especial **Duração do período de incidência de luz solar** (página **53**) procure desenvolver um trabalho semelhante. Para isso, caso a escola possua laboratório de informática, leve os alunos e solicite que pesquisem no *site* do Observatório Nacional <www.on.br> (Acesso em: 11 maio 2016), o horário do nascer e do pôr do sol de uma das seis cidades brasileiras disponíveis (Belém, Recife, Brasília, Rio de Janeiro, São Paulo ou Porto Alegre), por exemplo, para o ano de 2016, que pode ser obtido no endereço eletrônico <www.on.br/coaa/conteudo/pdf/secao–b.pdf> (Acesso em: 28 abr. 2016.). Caso a escola não possua laboratório de informática, obtenha os dados antecipadamente.

  Com os dados em mãos, solicite aos alunos que construam uma tabela indicando a duração do dia em quatro dias a cada mês. Uma sugestão é utilizar sempre os dias 1, 8, 15 e 22. Lembre os alunos que a duração do dia é dada pela diferença entre o horário que o Sol se põe pelo horário que ele nasce e que depois de realizado o cálculo é necessário fazer a conversão de minutos para horas.

  Após a construção da tabela, solicite que construam um gráfico com esses valores e analisem sua periodicidade. Se possível, novamente no laboratório de informática, peça que utilizem um *software* para obter uma função que descreva o gráfico construído.

Páginas 54 e 55

- Durante o trabalho com as fórmulas tangente da soma e tangente da diferença da página **55**, se julgar necessário, trabalhe as demonstrações a seguir com os alunos.

  Tangente da soma:

  Utilizando as fórmulas do seno da soma e do cosseno da soma, temos:

$$\text{tg}(a+b)=\frac{\text{sen}(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\text{sen}a\cdot\cos b+\text{sen}b\cdot\cos a}{\cos a\cdot\cos b-\text{sen}a\cdot\text{sen}b}$$

  Dividindo o numerador e o denominador por $\cos a\cdot\cos b$, segue que:

$$\text{tg}(a+b)=\frac{\dfrac{\text{sen}a\cdot\cos b+\text{sen}b\cdot\cos a}{\cos a\cdot\cos b}}{\dfrac{\cos a\cdot\cos b-\text{sen}a\cdot\text{sen}b}{\cos a\cdot\cos b}}=\frac{\dfrac{\text{sen}a\cdot\cancel{\cos b}}{\cos a\cdot\cancel{\cos b}}+\dfrac{\text{sen}b\cdot\cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a}\cdot\cos b}}{\dfrac{\cancel{\cos a\cdot\cos b}}{\cancel{\cos a\cdot\cos b}}-\dfrac{\text{sen}a\cdot\text{sen}b}{\cos a\cdot\cos b}}=\frac{\text{tg}a+\text{tg}b}{1-\text{tg}a\cdot\text{tg}b}$$

  Tangente da diferença:

  Utilizando a fórmula da tangente da soma, temos:

$$\text{tg}(a-b)=\text{tg}\big(a+(-b)\big)=\frac{\text{tg}a+\overbrace{\text{tg}(-b)}^{-\text{tg}b}}{1-\text{tg}a\cdot\underbrace{\text{tg}(-b)}_{-\text{tg}b}}=\frac{\text{tg}a-\text{tg}b}{1+\text{tg}a\cdot\text{tg}b}$$

Página 57

- Para obter as fórmulas do seno e do cosseno do arco metade, podemos utilizar as fórmulas do arco duplo, trabalhadas na atividade especial **Fórmulas do arco duplo e do arco metade**, da seguinte maneira:

$$\cos(2a)=2\cdot\cos^2 a-1\Rightarrow\cos(2a)+1=2\cdot\cos^2 a\Rightarrow\frac{\cos(2a)+1}{2}=\cos^2 a$$

  Substituindo a por $\frac{a}{2}$, obtém-se a fórmula do cosseno do arco metade:

$$\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1+\cos a}{2}$$

  Da mesma maneira, para a fórmula do seno:

$$\cos(2a)=1-2\cdot\text{sen}^2 a\Rightarrow 2\cdot\text{sen}^2 a=1-\cos(2a)\Rightarrow\text{sen}^2 a=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$

  Substituindo a por $\frac{a}{2}$, obtém-se a fórmula do seno do arco metade:

$$\text{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1-\cos a}{2}$$

  Dessa forma, obtemos também a fórmula da tangente do arco metade:

$$\text{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{\text{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)}=\frac{\dfrac{1-\cos a}{2}}{\dfrac{1+\cos a}{2}}=\frac{1-\cos a}{1+\cos a}$$

- Após o trabalho com a atividade **42**, converse com os alunos a respeito das marés. Leia com eles o texto a seguir sobre as marés quando o Sol, a Terra e a Lua estão alinhados.

O Sol e a Lua juntos

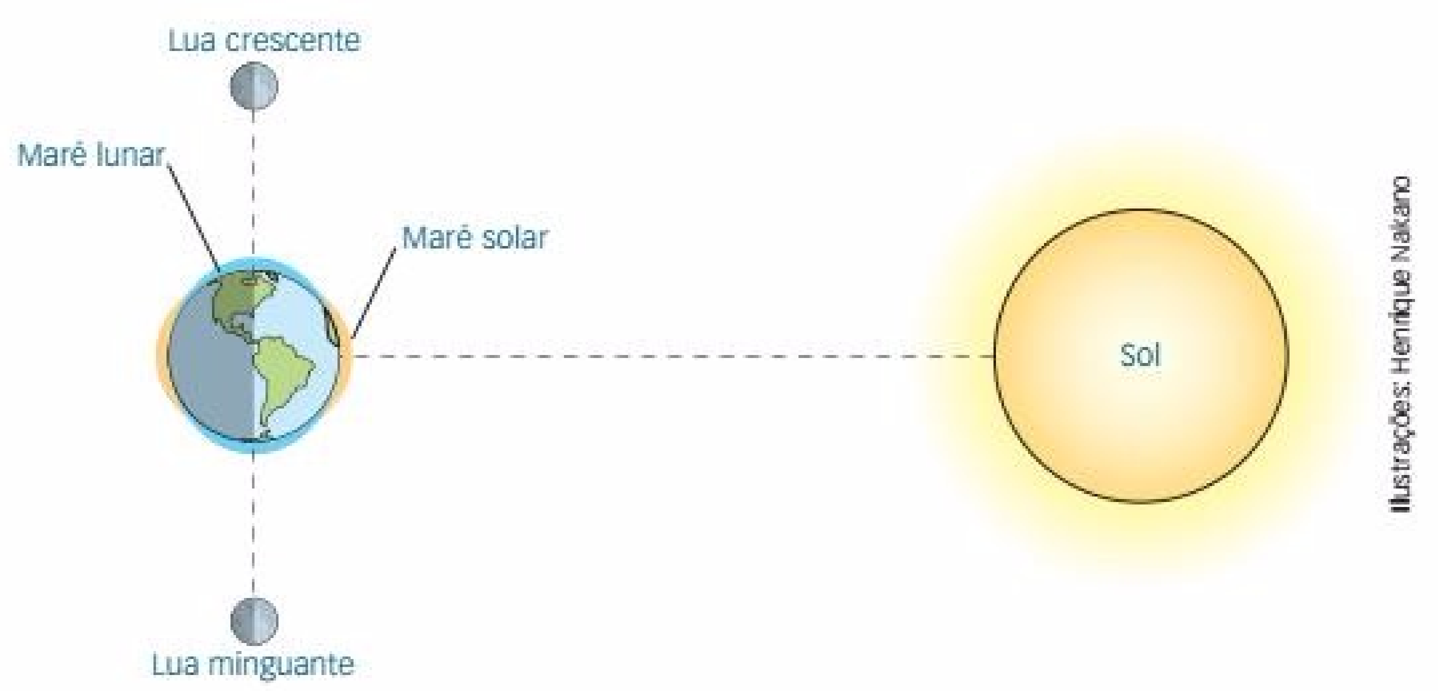
O oceano responde simultaneamente à inércia e à força gravitacional tanto da Lua como do Sol. Se a Terra, a Lua e o Sol estiverem todos em uma linha [...], as marés lunares e solares serão aditivas, resultando em marés altas mais altas e marés baixas mais baixas. Mas, se o Sol, a Terra e a Lua formarem um ângulo reto [...], a maré solar tenderá a diminuir a maré lunar. Como a contribuição da maré lunar é mais que o dobro do que a do Sol, a maré solar não será capaz de cancelar completamente a maré lunar.

As maiores marés causadas pelo alinhamento linear do Sol, da Terra e da Lua são chamadas de **marés de sizígia**. Durante as marés de sizígia, as marés altas são muito altas, e as marés baixas, muito baixas. Essas marés ocorrem em intervalos de duas semanas correspondentes às luas cheia e nova. As **marés de quadratura** ocorrem quando a Lua, a Terra e o Sol formam um ângulo reto. Durante as marés de quadratura, as marés altas não são tão altas nem as marés baixas tão baixas. As marés de quadratura também ocorrem em intervalos de duas semanas, uma semana depois de uma maré de sizígia. [...]

GARRISON, Tom. *Fundamentos de oceanografia*. São Paulo: Cengage Learning, 2010. p. 222.

Ⓐ Marés de sizígia

Ⓑ Marés de quadratura



270

Esta imagem é uma representação artística. As cores utilizadas não correspondem às reais e os elementos ilustrados não estão proporcionais.

Fonte: GARRISON. Tom. *Fundamentos de oceanografia*. São Paulo: Cengage Learning, 2010. p.223.

3 SISTEMAS LINEARES E MATRIZES

Nessa unidade é retomado o conteúdo de sistemas lineares. Espera-se que os alunos aprofundem seus conhecimentos e tornem-se capazes de resolver sistemas lineares com 3 ou mais equações e 3 ou mais incógnitas. Ainda na unidade é abordado o conteúdo de matrizes.

Inicialmente são explorados os conceitos de equação linear e sistema linear e, em seguida, retoma-se o estudo referente aos sistemas lineares 2×2, sendo abordados vários métodos para resolvê-los. Espera-se que os alunos compreendam esses métodos e sejam capazes de decidir qual é melhor para ser utilizado em determinada situação. Também referente aos sistemas 2×2, é realizada a interpretação geométrica.

Para resolver sistemas lineares com 3 ou mais equações e 3 ou mais incógnitas, introduz-se o método de escalonamento. É importante que os alunos, além de utilizarem o escalonamento, compreendam o porquê de realizar tais operações, reconhecendo que o sistema escalonado é equivalente ao sistema inicial.

As matrizes e suas operações são trabalhadas por meio de situações contextualizadas, a fim de que os alunos percebam o uso desse conteúdo em seu dia a dia. Além disso, são propostas situações para que reconheçam as matrizes como ferramentas importantes na resolução de sistemas lineares.

Observe a seguir os objetivos dessa unidade.

Objetivos

- Identificar uma equação linear, bem como seus coeficientes, incógnitas e termo independente.
- Resolver sistemas lineares.
- Classificar um sistema linear como SPD, SPI ou SI.
- Utilizar o método do escalonamento para resolver sistemas lineares.
- Interpretar graficamente um sistema linear 2×2 e 3×3.
- Reconhecer uma matriz, bem como identificar sua ordem e seus elementos.
- Identificar algumas matrizes especiais.
- Realizar as operações de adição, subtração e multiplicação com matrizes.

COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

Relações interdisciplinares

A seguir, destacamos algumas relações interdisciplinares estabelecidas nesta unidade. Tais relações se dão principalmente pelo fato de as matrizes serem utilizadas como uma forma de organização de dados e informações.

Nas páginas **66** e **67**, com base na definição do conceito de *pixel*, uma imagem ou a tela de um equipamento digital é apresentada como uma grande matriz, na qual cada elemento corresponde a um código que faz referência a um sistema padrão de cores. Se a imagem formada for representada na escala de cinza, cada elemento da matriz (cada *pixel*) corresponde a um tom entre preto (0) e branco (255). Quando a imagem formada é colorida, a cor de cada *pixel* corresponde a uma combinação dos códigos de três cores básicas (padrão de cores RGB). Este tema pode ser relacionado à disciplina de Arte, no tratamento das artes visuais, com utilização de tecnologias para captação, formação e reprodução de imagens.

Para complementar este assunto, a página **86** apresenta diversas informações sobre o funcionamento de uma câmera fotográfica digital, assunto que pode ser tratado também pela disciplina de Física, no estudo dos equipamentos ópticos portadores de lentes. Espera-se que os conhecimentos dos alunos, relacionados às matrizes, os auxiliem a compreender de que forma os *pixels* são registrados pela câmera e qual sua relação com a qualidade das imagens reproduzidas.

A relação com a Biologia é destacada na atividade **34** (página **88**) com o tema cadeia alimentar, tratado em Ecologia no estudo das interações entre os seres vivos. No caso, o conceito de matriz foi utilizado para organizar as informações a partir de uma codificação estabelecida, possibilitando ao aluno aprofundar seus conhecimentos matemáticos acerca desse conceito.

Páginas 66 e 67 – Abertura da unidade

- Após trabalhar com as informações apresentadas nessas páginas, verifique a possibilidade de levar os alunos ao laboratório de informática e realizar um trabalho com algumas fotografias digitais. Eles poderão procurar imagens na internet e salvar em uma pasta do computador, provisoriamente. Em seguida, peça que cliquem com o botão direito do *mouse* sobre a imagem e analisem as suas propriedades. É possível visualizar informações sobre a quantidade de *pixels* da largura e da altura. Esse procedimento também pode ser realizado em *softwares* de edição de imagens, alguns deles gratuitos. Peça aos alunos que abram as imagens e as ampliem até que possam observar os “quadradinhos”, denominados *pixels*. Converse com eles a respeito da relação existente entre a quantidade de *pixels*, a resolução da imagem e o espaço ocupado pelo arquivo da imagem, dentre outras.
- Também é possível propor uma tarefa semelhante à apresentada na página, para que decodifiquem uma imagem produzida por um colega. Para isso, organize-os em duplas, providencie e entregue a eles uma malha quadriculada, e peça que criem uma imagem utilizando os códigos 0 e 255 para preto e branco, respectivamente, como foi feito com a seta do *mouse* apresentada na página. Depois, eles devem trocar as folhas e pintar de preto para decifrar a imagem.

Página 73

- Após o trabalho com a página **73**, apresente aos alunos outro método para classificar um sistema 2×2 em SPI, SI e SPD. O método apresentado analisa apenas os coeficientes das duas equações lineares do sistema. De modo geral, temos:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Se **d**, **e** e **f** são não nulos e $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$, então o sistema é SPI.

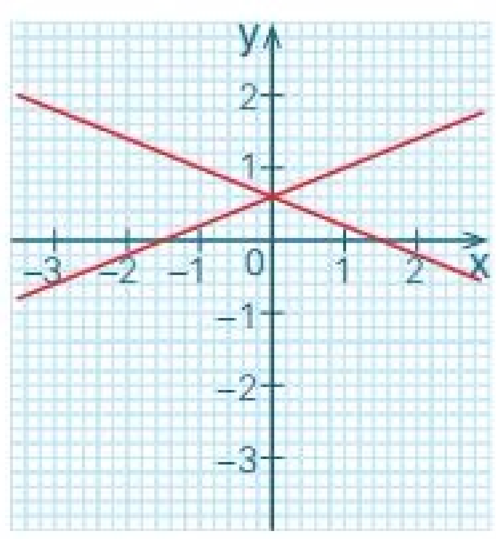
Se **d**, **e** e **f** são não nulos e $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$, então o sistema é SI.

Se **d** e **e** são não nulos e $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$, então o sistema é SPD.

Se julgar necessário, apresente um exemplo de sistema SPI, SI e SPD e peça aos alunos que os classifiquem analisando apenas seus coeficientes. Observe os exemplos a seguir:

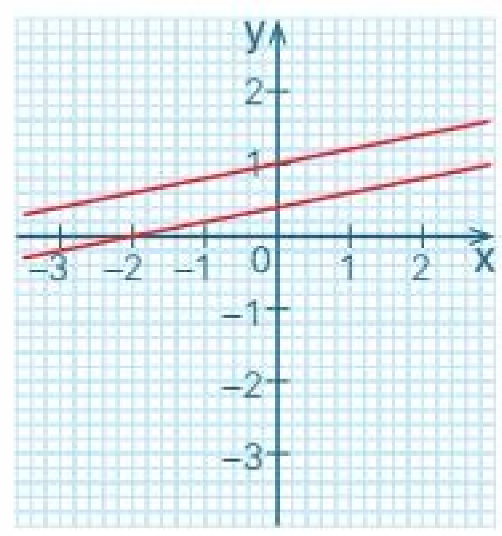
› $\begin{cases} 2x - 5y = -3 \\ 4x + 10y = 6 \end{cases}$

Como $\frac{a}{d} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{b}{e} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$ temos que $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$, portanto o sistema é SPD.



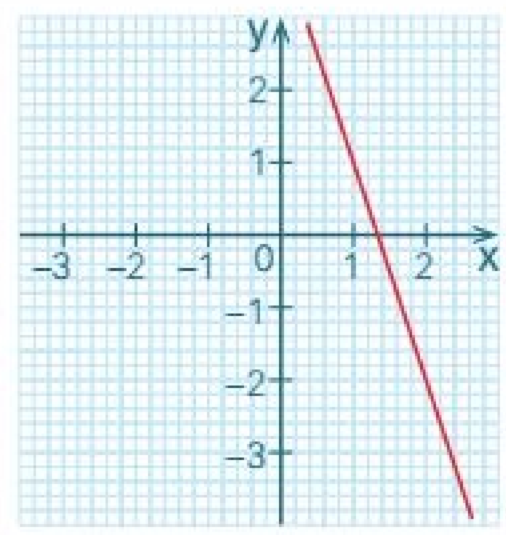
› $\begin{cases} x - 5y = -2 \\ -3x + 15y = 15 \end{cases}$

Como $\frac{a}{d} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$, $\frac{b}{e} = \frac{-5}{15} = -\frac{1}{3}$ e $\frac{c}{f} = \frac{-2}{15} = -\frac{2}{15}$ temos que $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$, portanto o sistema é SI.



› $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases}$

Como $\frac{a}{d} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{b}{e} = \frac{1}{2}$ e $\frac{c}{f} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ temos que $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$, portanto o sistema é SPI.



Ilustrações: Acervo da Editora

Páginas 76 a 79

- Após o trabalho com as páginas **76** a **78**, se julgar necessário, apresente aos alunos o texto a seguir sobre Gauss.

O Príncipe dos Matemáticos

Homem de estofo e talento matemáticos impressionantes, Carl Friedrich Gauss sobressai-se nos séculos XVIII e XIX como um Colosso de Rodes da matemática. Ele é universalmente considerado como o maior matemático do século XIX e, ao lado de Arquimedes e Isaac Newton, como um dos maiores de todos os tempos.

Carl nasceu em Brunswick, Alemanha, em 1777. Seu pai era um trabalhador braçal que tinha uma opinião teimosamente pouco favorável a respeito da educação. Sua mãe, porém, ainda que inculta, encorajava-o nos estudos e manteve por toda a vida grande orgulho pelas realizações do filho.

Carl foi uma das mais notáveis crianças-prodígio, dessas que aparecem de raro em raro. Diz-se que com a idade de três anos detectou um erro aritmético no borrador de seu pai. [...]

A precocidade de Gauss chamou a atenção do duque de Brunswick, que, como um gentil e compreensivo patrono, acompanhou sua entrada no colégio em Brunswick com a idade de quinze anos e na Universidade de Göttingen com dezoito anos de idade. Indeciso entre tornar-se um filólogo ou tornar-se um matemático (embora já tivesse descoberto o método dos mínimos quadrados que uma década antes fora publicado independentemente por Legendre), seu espírito dramaticamente pendeu para a matemática a 30 de março de 1796, quando lhe faltava um mês para completar dezenove anos de idade. [...]

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004. p. 519.

- Complemente o trabalho com a atividade especial das páginas **78** e **79** com perguntas como:
  - Para que um sistema 2×2 seja classificado como SI devemos ter as retas que representam suas equações paralelas. Para que um sistema 3×3 seja classificado como SI é necessário que algum par de planos que representam suas equações sejam paralelos? Justifique.
    Não, no segundo exemplo apresentado no item Sistema Impossível (SI) da atividade os planos são todos concorrentes quando tomados 2 a 2, e ainda assim o sistema é SI, ou seja, não há pontos comuns aos três planos simultaneamente.
  - Para que um sistema 2×2 seja classificado como SPI devemos ter as retas que representam suas equações coincidentes. Para que um sistema 3×3 seja classificado como SPI é necessário que todos os seus planos ou algum par de planos que representam suas equações sejam coincidentes? Justifique.
    Não, no terceiro exemplo apresentado no item Sistema Possível e Indeterminado (SPI) da atividade os planos são todos concorrentes quando tomados 2 a 2, de maneira que uma reta é comum aos três planos, fazendo do sistema um sistema SPI, ou seja, há infinitos pontos comuns aos três planos simultaneamente.
  - Para que um sistema 3×3 seja SPD é necessário que todos os planos que representam as equações do sistema sejam perpendiculares entre si? Justifique.
    Não, basta que haja apenas um ponto comum aos três planos simultaneamente, o que pode ocorrer mesmo que os planos não sejam perpendiculares entre si.

Página 82

- Após os alunos resolverem a atividade **Escalonamento no GeoGebraPrim**, peça a eles que confiram a solução de alguns sistemas lineares presentes nas atividades anteriores utilizando essa ferramenta.

Páginas 84 e 85

- Ao apresentar as matrizes especiais, informe aos alunos que existem outras matrizes que recebem nomes específicos.
  - Matriz diagonal: é uma matriz quadrada de ordem *n* cujos elementos que não pertencem a diagonal principal são nulos.

    Exemplos:

    $$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

  - Matriz linha: é a matriz cujos elementos estão dispostos em uma única linha, ou seja, as matrizes de ordem $1 \times n$.

    Exemplos:

    $$E = \begin{bmatrix} 2 & -7 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

  - Matriz coluna: é a matriz cujos elementos estão dispostos em uma única coluna, ou seja, as matrizes de ordem $m \times 1$.

    Exemplos:

    $$G = \begin{bmatrix} -3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Página 86

- Após o trabalho com a seção **Como funciona**, diga aos alunos que o Brasil serviu de berço para uma das primeiras experiências envolvendo a fotografia. O francês Hercule Florence (1804-1879), radicado na antiga Vila de São Carlos, atual Campinas-SP, desenvolveu em 1833 um método para capturar imagens por meio de uma câmara escura, utilizando elementos químicos para revelar a imagem. Este feito passou longe do conhecimento público por muito tempo, até que o historiador e fotógrafo brasileiro Boris Kossoy (1941-), após anos de pesquisa, conseguiu provar com base em documentos escritos por Florence e pela reprodução das experiências citadas por ele que o francês, de fato, foi um dos precursores da fotografia no âmbito mundial.

Página 91

- Ao apresentar as propriedades da adição de matrizes aos alunos, mostre-lhes também alguns exemplos numéricos. Sugestão:

Seja $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

› Propriedade comutativa: $A+B=B+A$

$$A+B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B+A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

› Propriedade associativa: $(A+B)+C=A+(B+C)$

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}+C=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

› Elemento neutro: $A+0=A$

$$A+0=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

› Elemento oposto: $A+(-A)=0$

$$A+(-A)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Página 93

- Ao apresentar as propriedades da multiplicação de um número real por uma matriz aos alunos, mostre-lhes também exemplos numéricos. Sugestão:

Seja $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $r=-2$ e $s=3$.

› $r\cdot(A+B)=r\cdot A+r\cdot B$

$$r\cdot(A+B)=(-2)\cdot\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\right)=(-2)\cdot\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$r\cdot A+r\cdot B=(-2)\cdot\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}+(-2)\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

› $(r+s)\cdot A=r\cdot A+s\cdot A$

$$(r+s)\cdot A=[(-2)+3]\cdot\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r\cdot A+s\cdot A=(-2)\cdot\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}+3\cdot\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -12 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

› $r \cdot (s \cdot A) = (r \cdot s) \cdot A$

$$r \cdot (s \cdot A) = (-2) \cdot \left(3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\right) = (-2) \cdot \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -12 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ 24 & -6 \end{bmatrix}$$

$$(r \cdot s) \cdot A = [(-2) \cdot 3] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = (-6) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ 24 & -6 \end{bmatrix}$$

› $(r \cdot A)^t = r \cdot A^t$

$$(r \cdot A)^t = \left((-2) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\right)^t = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$r \cdot A^t = (-2) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}^t = (-2) \cdot \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Página 95

- Ao apresentar as propriedades da multiplicação de matrizes aos alunos, mostre-lhes também exemplos numéricos. Sugestão:

› Propriedade associativa: $(A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}) \cdot C_{p \times q} = A \cdot (B \cdot C)$

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

$$(A_{2\times1} \cdot B_{1\times2}) \cdot C_{2\times1} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+4 \\ 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [3+2] = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [5] = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

› Propriedade distributiva à esquerda: $(A_{m \times n} + B_{m \times n}) \cdot C_{n \times p} = A \cdot C + B \cdot C$

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

$$(A_{1\times2} + B_{1\times2}) \cdot C_{2\times1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = [3+4] = [7]$$

$$A \cdot C + B \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = [1+12] + [2-8] = [7]$$

› Propriedade distributiva à direita: $A_{m \times n} \cdot (B_{n \times p} + C_{n \times p}) = A \cdot B + A \cdot C$

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -4 & 0 \end{bmatrix}$.

$$A_{2\times1} \cdot (B_{1\times2} + C_{1\times2}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 7 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B + A \cdot C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ -7 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

› Elemento neutro: $A_{m \times n} \cdot I_n = I_m \cdot A_{m \times n} = A$

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

$$A_{3\times3}\cdot I_3=\begin{bmatrix}2&0&-3\\1&3&5\\4&2&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+0+0&0+0+0&0+0-3\\1+0+0&0+3+0&0+0+5\\4+0+0&0+2+0&0+0-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&-3\\1&3&5\\4&2&-1\end{bmatrix}$$

$$I_3\cdot A_{3\times3}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&0&-3\\1&3&5\\4&2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+0+0&0+0+0&-3+0+0\\0+1+0&0+3+0&0+5+0\\0+0+4&0+0+2&0+0-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&-3\\1&3&5\\4&2&-1\end{bmatrix}$$

Mostre também um exemplo para que os alunos verifiquem que a propriedade comutativa $(A\cdot B=B\cdot A)$ não é válida. Sugestão:

Seja $A=\begin{bmatrix}1&-3\\0&2\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}4&-1\\-2&0\end{bmatrix}$.

- $A\cdot B=\begin{bmatrix}1&-3\\0&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&-1\\-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+6&-1+0\\0-4&0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&-1\\-4&0\end{bmatrix}$
- $B\cdot A=\begin{bmatrix}4&-1\\-2&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-3\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+0&-12-2\\-2+0&6+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-14\\-2&6\end{bmatrix}$

Portanto, nesse caso, $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Páginas 98 e 99

- Ao trabalhar o conteúdo de matriz inversa, realize a seguinte atividade com os alunos.

Mensagens codificadas

A criptografia (do grego, *kripto* = oculto; *grafo* = grafia) é uma técnica ou um conjunto de técnicas utilizadas para cifrar (escrever em códigos) uma mensagem. Ela foi muito utilizada em tempos de guerra, para evitar que o inimigo descobrisse o significado da mensagem, caso essa fosse interceptada. Hoje em dia é usada nos meios de comunicação, como a internet, para que dados pessoais (senhas, dados bancários, entre outros) sejam mantidos em sigilo.

Nesta atividade, o objetivo é incentivar os alunos a desenvolverem um método de criptografia de uma mensagem pelo uso de matrizes.

Organize a sala em grupos de no máximo três alunos. Cada grupo deve criar uma chave, que é a matriz que codifica a mensagem. Essa matriz, que chamaremos de **A**, deve ser uma matriz 2×2 invertível, para que a mensagem possa ser decodificada. Como exemplo, utilizaremos a matriz $A=\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix}$, cuja inversa é $A^{-1}=\begin{bmatrix}3&-4\\-2&3\end{bmatrix}$.

Escolhida a matriz 2×2 invertível, é preciso relacionar as letras do alfabeto e alguns símbolos a números, que serão utilizados na codificação da mensagem. Por exemplo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	.	,
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
:	?	!	espaço										
28	29	30	31										

Por exemplo, para a mensagem "BOM DIA" obtemos a seguinte relação:

B	O	M		D	I	A
1	14	12	31	3	8	0

A mensagem é então construída na forma de uma matriz **B** de duas linhas. Se o número de letras e símbolos da mensagem for ímpar, completa-se o último elemento da matriz com o "espaço". Dessa maneira, para o exemplo, temos a matriz:

$$B=\begin{bmatrix}1&14&12&31\\3&8&0&31\end{bmatrix}$$

Para criptografar a mensagem, basta multiplicar as matrizes **A** e **B**, nessa ordem, obtendo a matriz **C** que será a mensagem criptografada. No exemplo proposto, temos:

$$C = A \cdot B \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 14 & 12 & 31 \\ 3 & 8 & 0 & 31 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 15 & 74 & 36 & 217 \\ 11 & 52 & 24 & 155 \end{bmatrix}$$

Para decodificar a mensagem, multiplica-se a matriz inversa da chave (A^{-1}) pela matriz codificada **C**, determinando novamente a matriz inicial **B**.

$$A^{-1} \cdot B = C$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 & 74 & 36 & 217 \\ 11 & 52 & 24 & 155 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 12 & 31 \\ 3 & 8 & 0 & 31 \end{bmatrix}$$

Com o quadro que relaciona as letras e os símbolos a números, podemos verificar qual era a mensagem criptografada.

Proposta de trabalho:

- Peça aos alunos que decodifiquem a mensagem do exemplo apresentado. Explique a eles os procedimentos e auxilie-os na decodificação da mensagem.
- Diga aos alunos que, utilizando a mesma chave e quadro apresentados, decodifiquem a seguinte mensagem criptografada:

$$C = \begin{bmatrix} 67 & 68 & 157 & 76 & 131 & 177 & 56 \\ 49 & 50 & 115 & 55 & 92 & 125 & 42 \end{bmatrix}$$

Realizando os cálculos, temos:

$$B = A^{-1} \cdot C$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 67 & 68 & 157 & 76 & 131 & 177 & 56 \\ 49 & 50 & 115 & 55 & 92 & 125 & 42 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 11 & 8 & 25 & 31 & 0 \\ 13 & 14 & 31 & 13 & 14 & 21 & 14 \end{bmatrix}$$

Portanto, a mensagem é: FELIZ ANO NOVO.

- Peça aos grupos que escrevam uma mensagem e criptografe-a. Em seguida, enviem-na a outro grupo, juntamente com a chave utilizada e o quadro com letras, números e símbolos, para que tentem decodificá-la. Oriente os alunos a tomarem cuidado para não criar uma chave cuja matriz não possui inversa.
- Se o grupo que recebeu a mensagem criptografada conseguir decodificar a mensagem rapidamente, peça a eles que respondam ao outro grupo, criptografando uma nova mensagem. Auxilie os grupos que encontrarem dificuldades para decodificação da mensagem.

Páginas 101 a 103

- Após terminar o trabalho com essas páginas, verifique a possibilidade de retomar o conteúdo de matriz inversa, para mostrar aos alunos como obter a inversa de uma matriz utilizando o Calc.

4 DETERMINANTES E RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Os estudos sobre sistemas lineares e matrizes da unidade anterior proporcionam a base do trabalho com o conteúdo desta unidade. Nesse momento, espera-se que os alunos compreendam técnicas de cálculo de determinante e o reconheçam como ferramenta importante para a resolução de sistemas lineares.

Os determinantes são apresentados como um número real que pode ser associado a uma matriz quadrada. São propostas atividades para calcular determinantes de matrizes de ordem 1, 2 e 3 e para verificar se um sistema é possível e determinado.

A partir do estudo de determinantes é apresentada a regra de Cramer, cuja finalidade é obter a solução de qualquer sistema linear possível e determinado $n \times n$. Espera-se que os alunos compreendam que a regra de Cramer é mais um modo de se obter a solução de sistemas lineares com essas características e que poderão optar por resolvê-los utilizando outra técnica.

Observe a seguir os objetivos dessa unidade.

Objetivos

- Compreender algumas técnicas para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada.
- Utilizar a regra de Sarrus.
- Aplicar o teorema de Binet e o teorema de Jacobi.
- Utilizar o determinante como uma ferramenta para a resolução de sistemas lineares.
- Resolver sistemas lineares por meio da regra de Cramer.

COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

Relações interdisciplinares

Nessa unidade foram destacadas duas relações interdisciplinares, sendo uma com Biologia e outra com Química.

O tema alimentação saudável está presente nas páginas **104** e **105**, na abertura da unidade, onde são apresentadas informações sobre a importância de manter hábitos saudáveis e de verificar informações nutricionais dos alimentos, a fim de ingerir porções diárias recomendadas de determinados nutrientes. Esse tema pode ser articulado à disciplina de Biologia em relação à composição dos alimentos.

Destaca-se ainda que é importante procurar a orientação de um profissional, no caso um nutricionista, para tomar atitudes seguras e que gerem bons resultados. Ao identificar a quantidade ideal de cada nutriente para o paciente, o nutricionista monta um cardápio adequado, o qual pode ser elaborado utilizando-se um sistema linear como ferramenta para determinar as porções diárias a serem consumidas de cada alimento.

Na página **113** são apresentadas diversas informações sobre veículos bicombustíveis, destacando algumas diferenças do consumo do etanol e da gasolina, como produção, eficiência e emissão de poluentes, assuntos comumente abordados em Química, no tratamento dos reagentes e produtos das transformações químicas, das reações exotérmicas e também das propriedades químicas das substâncias, como seu poder de combustão. Nesse contexto, para escolher qual a opção mais vantajosa financeiramente, pode-se fazer alguns cálculos envolvendo um sistema de equações lineares, sabendo informações como preço do litro de cada combustível, consumo médio do veículo e distância que se pretende percorrer.

Páginas 104 e 105 – Abertura da unidade

- No trabalho com o tema das páginas iniciais é importante que os alunos reconheçam que uma alimentação balanceada é um dos fatores essenciais para ter uma vida saudável.
- A ideia da utilização de um sistema linear para calcular a quantidade de porções de cada alimento pode ser reforçada, propondo aos alunos uma atividade semelhante à apresentada, porém com apenas 3 incógnitas, de modo que consigam determiná-las utilizando a técnica de escalonamento, já conhecida. No exemplo a seguir, o aluno pode montar um sistema linear e escalonar para determinar a quantidade de porções de cada alimento.

1. Um nutricionista montou um cardápio, no qual o paciente deve comer no almoço 47,4 mg de cálcio, 178,2 mg de magnésio e 2,6 mg de ferro. Esses valores devem ser extraídos de três alimentos que possuem, por porção, as seguintes quantidades dessas substâncias:

	Arroz integral cozido (a)	Filé de frango grelhado (b)	Feijão cozido (c)
Cálcio	1,5 mg	1,5 mg	8,1 mg
Magnésio	17,7 mg	5,4 mg	12,6 mg
Ferro	0,1 mg	0,1 mg	0,4 mg

Se cada porção desses alimentos tem 30 g, quanto de cada alimento o paciente deverá comer?

Resolução

1. $\begin{cases} 1{,}5a+1{,}5b+8{,}1c=47{,}4 \\ 17{,}7a+5{,}4b+12{,}6c=178{,}2 \\ 0{,}1a+0{,}1b+0{,}4c=2{,}6 \end{cases} \cdot(-11{,}8) \Rightarrow \begin{cases} 1{,}5a+1{,}5b+8{,}1c=47{,}4 \\ -12{,}3b-82{,}98c=-381{,}12 \\ 0{,}1a+0{,}1b+0{,}4c=2{,}6 \end{cases} \cdot\left(-\frac{1}{15}\right) \Rightarrow \begin{cases} 1{,}5a+1{,}5b+8{,}1c=47{,}4 \\ -12{,}3b-82{,}98c=-381{,}12 \\ -0{,}14c=-0{,}56 \end{cases}$

Resolvendo a 3ª equação obtemos o valor de *c*:

$-0{,}14c=-0{,}56 \Rightarrow c=\frac{0{,}56}{0{,}14} \Rightarrow c=4$

Substituindo *c* por 4 na 2ª equação obtemos o valor de *b*:

$-12{,}3b-82{,}98\cdot 4=-381{,}12 \Rightarrow -12{,}3b=-381{,}12+331{,}92 \Rightarrow b=\frac{49{,}2}{12{,}3} \Rightarrow b=4$

Substituindo *c* por 4 e *b* por 4 na 1ª equação obtemos o valor de *a*:

$1{,}5a+1{,}5\cdot 4+8{,}1\cdot 4=47{,}4 \Rightarrow 1{,}5a=47{,}4-38{,}4 \Rightarrow a=\frac{9}{1{,}5} \Rightarrow a=6$

Como cada porção possui 30 g:

$6\cdot 30=180 \rightarrow 180$ g de arroz integral cozido

$4\cdot 30=120 \rightarrow 120$ g de filé de frango grelhado

$4\cdot 30=120 \rightarrow 120$ g de feijão cozido

Páginas 106 a 108

- Na página **106**, ao apresentar que a teoria de determinantes se deve principalmente ao estudo dos matemáticos Carl Gustav Jacob Jacobi e Augustin-Louis Cauchy, diga aos alunos que:

[...] A história dos determinantes é estranhamente confusa, com pedaços do assunto aparecendo esporadicamente, na China antiga [...]. Só no século dezenove é que um desenvolvimento continuado teve lugar, iniciado em grande parte, ao menos no Continente europeu, por Cauchy e Jacobi. [...]

BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. p. 376.

Página 109

- Ao trabalhar com as atividades dessa página, verifique se os alunos perceberam que quando uma linha ou coluna da matriz apresentar todos os seus elementos iguais a zero, ou quando uma matriz apresentar um par de linhas ou colunas iguais, o determinante é zero. Caso necessário, peça a eles que verifiquem essa relação numericamente.

Página 110

- Após trabalhar com essas páginas, realize com os alunos, as seguintes demostrações:

Demonstração do Teorema de Binet para matrizes 2×2

Calculando o determinante das matrizes $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, segue que, $\det A = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$ e $\det B = b_{11}\cdot b_{22} - b_{12}\cdot b_{21}$.

Logo:

$$\det A \cdot \det B = (a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21})\cdot(b_{11}\cdot b_{22} - b_{12}\cdot b_{21})$$

Agora, multiplicando as matrizes **A** e **B**, temos:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Logo, $\det(A \cdot B)$ é igual a:

$$
\begin{aligned}
&(a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}) \cdot (a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}) - (a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}) \cdot (a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}) = \\
&= \cancel{a_{11} \cdot b_{11} \cdot a_{21} \cdot b_{12}} + a_{11} \cdot b_{11} \cdot a_{22} \cdot b_{22} + a_{12} \cdot b_{21} \cdot a_{21} \cdot b_{12} + \\
&+ \cancel{a_{12} \cdot b_{21} \cdot a_{22} \cdot b_{22}} - \cancel{a_{11} \cdot b_{12} \cdot a_{21} \cdot b_{11}} - a_{11} \cdot b_{12} \cdot a_{22} \cdot b_{21} - a_{12} \cdot b_{22} \cdot a_{21} \cdot b_{11} - \cancel{a_{12} \cdot b_{22} \cdot a_{22} \cdot b_{21}} = \\
&= a_{11} \cdot a_{22} \cdot (b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} b_{21}) - a_{12} \cdot a_{21} \cdot (b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot b_{21}) = \\
&= (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) \cdot (b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} b_{21}) = \det A \cdot \det B
\end{aligned}
$$

Portanto, $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Demonstração do Teorema de Jacobi para matrizes 3×3

Dada uma matriz quadrada $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, ao adicionarmos à 1ª linha os elementos da 2ª multiplicados pelo número real **k**, obtemos a matriz

$B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} + k \cdot a_{21} & a_{12} + k \cdot a_{22} & a_{13} + k \cdot a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Calculando o determinante dessas duas matrizes.

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

$$
\begin{aligned}
&\det B = (a_{11} + k \cdot a_{21}) \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (a_{12} + k \cdot a_{22}) \cdot a_{23} \cdot a_{31} + \\
&+ (a_{13} + k \cdot a_{23}) \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{13} + k \cdot a_{23}) \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot (a_{11} + k \cdot a_{21}) - a_{33} \cdot (a_{12} + k \cdot a_{22}) \cdot a_{21} = \\
&= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + \cancel{k \cdot a_{21} \cdot a_{22} \cdot a_{33}} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + \cancel{k \cdot a_{22} \cdot a_{23} \cdot a_{31}} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + \\
&+ \cancel{k \cdot a_{23} \cdot a_{21} \cdot a_{32}} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - \cancel{k \cdot a_{23} \cdot a_{22} \cdot a_{31}} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - \cancel{a_{23} \cdot a_{32} \cdot k \cdot a_{21}} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21} - \cancel{a_{33} \cdot k \cdot a_{22} \cdot a_{21}} = \\
&= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}
\end{aligned}
$$

Portanto, $\det A = \det B$.

Página 113

- Para complementar o trabalho da seção **Como funciona**, diga aos alunos que existe no nosso país o Programa de Controle de Poluição do Ar por Veículos Automotores (PROCONVE), juntamente com o Programa de Controle de Poluição do Ar por Motociclos e Veículos Similares (PROMOT). Ambos têm como objetivo a redução da contaminação atmosférica fixando, para isso, níveis máximos de emissão de poluentes. Esse programa, criado pelo Conselho Nacional do Meio Ambiente – CONAMA, contribui para o desenvolvimento tecnológico, uma vez que os fabricantes precisam se adequar às normas vigentes, produzindo soluções e equipamentos para atingir essas metas. Confira abaixo os principais resultados obtidos com os programas:

Desde a sua instituição, os resultados alcançados até então, mostram que a estratégia para a implantação no Brasil de um programa de controle de emissão de poluentes por veículos automotores foi montada acertadamente. O êxito do programa se deve a um cronograma bem elaborado, com etapas cada vez mais restritivas, e sempre em sintonia com a realidade brasileira.

Alguns dos resultados mais expressivos alcançados pelo PROCONVE/PROMOT são:

1. modernização do parque industrial automotivo brasileiro;
2. adoção, atualização e desenvolvimento de novas tecnologias;
3. melhoria da qualidade dos combustíveis automotivos;
   - formação de mão de obra técnica altamente especializada;
   - aporte no Brasil de novos investimentos, de novas indústrias, de laboratórios de emissão;
4. geração de empregos;

5. diversificação do parque industrial; e o maior de todos os seus feitos

6. redução, na fonte, de até 97% da emissão de poluentes.

Antes do programa, a emissão média de monóxido de carbono de um veículo era de 54 g/km, hoje essa emissão é 0,375 g/km. Mesmo com o significativo aumento da frota brasileira de veículos automotores, esses resultados fizeram com que se tivesse condições de exercer um melhor controle sobre a poluição atmosférica, garantindo a qualidade do ar nas grandes cidades brasileiras.

[...]

IBAMA. *Programa de controle da poluição do ar por veículos automotores*–Proconve/Promot/Ibama. 3. ed. Brasília: Ibama/Diqua, 2011. p. 20-1. (Meio Ambiente. Série Diretrizes – Gestão Ambiental, n. 3).

5 ANÁLISE COMBINATÓRIA

A análise combinatória caracteriza-se por estar presente em diversas situações, como naquelas em que precisamos analisar possibilidades ou aleatoriedade de eventos, por exemplo. Nesta unidade, utilizamos diversos exemplos com o objetivo de os alunos compreenderem as técnicas de contagem em vez de apenas memorizá-las, e assim serem capazes de decidir qual delas é mais adequada para a resolução de determinada situação-problema.

Para introduzir o conceito do princípio fundamental da contagem, é explorado no início da unidade um problema que permite a utilização de diversas estratégias de resolução. Contudo, espera-se que os alunos compreendam que em determinadas situações, nas quais há grande quantidade de elementos, o cálculo das possibilidades por meio de esquemas torna-se inviável, e o princípio fundamental da contagem torna-se a estratégia mais adequada para este fim.

Os conceitos de permutação simples e arranjo simples são desenvolvidos após a definição de fatorial de um número. É importante que os alunos compreendam que ambos os conceitos estão relacionados ao princípio fundamental da contagem e em qual situação é utilizado cada um deles.

A ideia de combinação simples difere dos conceitos de permutação simples e arranjo simples, por não importar a ordem dos elementos, sendo que essa diferença deve ficar evidente aos alunos. Espera-se que, após explorar as técnicas de contagem propostas, eles saibam diferenciar cada uma delas e não fiquem presos às fórmulas ao resolver um problema.

Observe a seguir os objetivos dessa unidade.

Objetivos

- Conhecer as técnicas de contagem, permutação, arranjo e combinação.
- Decidir qual técnica de contagem utilizar para cada situação.
- Utilizar o fatorial em situações em que aparecem multiplicações de números naturais consecutivos.
- Identificar situações em que é necessário utilizar permutação com elementos repetidos.
- Reconhecer os elementos e as propriedades do triângulo de Pascal.
- Desenvolver o binômio de Newton.
- Resolver situações-problemas envolvendo análise combinatória.

COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

Relações interdisciplinares

A análise combinatória está presente em todo trabalho no qual é necessário verificar a quantidade de agrupamentos que podem ser formados a partir de um conjunto de elementos.

Na abertura da unidade, páginas **118** e **119**, abordou-se o tema código QR, sistema capaz de armazenar informações numéricas ou alfanuméricas. Esse sistema de codificação se popularizou com a proliferação de *tablets* e *smartphones*, já que estas tecnologias, juntamente com *softwares* específicos, possibilitaram novas ferramentas para leitura destes códigos. Além de proporcionar um acesso simples aos dados dos produtos, o código QR também auxiliou na logística das relações comerciais entre países, tema comumente tratado pela disciplina de Geografia.

Páginas 118 e 119 – Abertura da unidade

- Ao trabalhar com o texto das páginas iniciais, verifique a possibilidade de mostrar aos alunos como funciona o código QR na prática.

  Para isso, leve jornais e revistas nos quais aparecem códigos QR (em propagandas, por exemplo) e verifique se os alunos podem utilizar seus próprios *smartphones* ou *tablets* ou leve um aparelho desse tipo. É necessário fazer o *download* de algum leitor de código QR (utilize a expressão "*QR code reader*" para realizar a busca), que pode ser facilmente encontrado, mas o leitor precisa ser compatível com o sistema operacional do aparelho utilizado.

  Em seguida, basta utilizar os aplicativos para fazer a leitura dos códigos. Aproveite e faça a leitura do código QR que aparece nas páginas **118** e **119**.

- Se for possível, leve os alunos ao laboratório de informática para complementar esta atividade prática, propondo a criação de uma mensagem em código QR. Existem alguns *sites* específicos para isso. Peça aos alunos que selecionem a opção ***Text*** e digitem uma palavra ou texto de até 160 caracteres e, em seguida, cliquem em ***Generate Static***. Basta posicionar a câmera do aparelho com o aplicativo aberto e verificar a mensagem transmitida pelo código.

Página 122

- Ao desenvolver o trabalho com a atividade especial do princípio aditivo de contagem, verifique se ficou claro aos alunos que os acontecimentos são independentes e, ao se tomar uma decisão escolhendo uma das opções disponíveis, as demais opções são eliminadas sem que haja a necessidade de uma nova escolha.

Página 124

- No trabalho com as atividades dessa página, solicite aos alunos que resolvam ou verifiquem alguns resultados utilizando a árvore de possibilidades, para que eles possam perceber a inviabilidade desta estratégia em alguns casos.

Página 128

- Após os alunos terminarem de resolver as atividades propostas nessa página, veja a possibilidade de propor-lhes a atividade a seguir, cuja resolução não mobiliza, necessariamente, a utilização de uma fórmula.

1. (Enem) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é: e

a) 24 b) 31 c) 32 d) 88 e) 89

Resolução

1. 75 913:

Números da forma $\underline{1}\,\underline{\blacksquare}\,\underline{\blacksquare}\,\underline{\blacksquare}\,\underline{\blacksquare}$, $\underline{3}\,\underline{\blacksquare}\,\underline{\blacksquare}\,\underline{\blacksquare}\,\underline{\blacksquare}$ ou $\underline{5}\,\underline{\blacksquare}\,\underline{\blacksquare}\,\underline{\blacksquare}\,\underline{\blacksquare}$: $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72$

Números da forma $\underline{7}\,\underline{1}\,\underline{\blacksquare}\,\underline{\blacksquare}\,\underline{\blacksquare}$ ou $\underline{7}\,\underline{3}\,\underline{\blacksquare}\,\underline{\blacksquare}\,\underline{\blacksquare}$: $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$

Números da forma $\underline{7}\,\underline{5}\,\underline{1}\,\underline{\blacksquare}\,\underline{\blacksquare}$ ou $\underline{7}\,\underline{5}\,\underline{3}\,\underline{\blacksquare}\,\underline{\blacksquare}$: $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

Números da forma $\underline{7}\,\underline{5}\,\underline{9}\,\underline{1}\,\underline{3}$: $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Assim, a posição do candidato que recebeu o número 75 913 é $72 + 12 + 4 + 1 = 89$, ou seja, ocupa a 89ª posição. Portanto a alternativa correta é **e**.

Página 133

- Se julgar necessário, após o trabalho com a seção de atividades, apresente as seguintes atividades aos alunos.

2. (UEPG-PR) Com base nas assertivas abaixo, indique o que for correto.

a) Se $a_n = \dfrac{n!(n^2-1)}{(n+1)!}$, então $a_{2\,000} = 1\,999$.

b) Se $C_{n,\,3} = 56$, então $A_{n,\,3} = 168$.

c) Três casais podem ocupar 6 cadeiras dispostas em fila, de tal forma que as duas extremidades sejam ocupadas por homens, de 360 maneiras diferentes.

d) O produto dos **n** primeiros números pares $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ é igual a $2^n \cdot n!$

e) A solução da equação $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)!} = 7$ é um número par.

3. Em uma reunião de negócios havia 9 representantes de empresas multinacionais. Se cada um deles cumprimentasse os demais com um aperto de mão, então quantos cumprimentos seriam efetuados ao todo?

Considere cada um apertando a mão dos demais apenas uma vez, sem haver repetição.

4. De um grupo de 15 meninas e 14 meninos, quantos grupos distintos de três meninas e dois meninos podem ser formados?

5. (Uerj) O quadro abaixo apresenta os critérios adotados por dois países para a formação de placas de automóveis. Em ambos os casos, podem ser utilizados quaisquer dos 10 algarismos de 0 a 9 e das 26 letras do alfabeto romano.

País	Descrição do critério	Exemplo de placa
X	3 letras e 3 algarismos, em qualquer ordem	M3MK09
Y	um bloco de 3 letras, em qualquer ordem, à esquerda de outro bloco de 4 algarismos, também em qualquer ordem	YBW0299

Ilustrações: Gilberto Alicio

Considere o número máximo de placas distintas que podem ser confeccionadas no país **X** igual a *n* e no país **Y** igual a *p*.

A razão $\dfrac{n}{p}$ corresponde a:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 6

Resolução

2. a) $a_{2000} = \dfrac{2000!(2000^2-1)}{(2000+1)!} = \dfrac{(2000^2-1)}{2001} = 1999$

Logo, a assertiva **a** está correta.

b) $C_{n,3}=\frac{A_{n,3}}{3!}\Rightarrow 56=\frac{A_{n,3}}{6}\Rightarrow A_{n,3}=336$

Logo, a assertiva **b** está incorreta.

c) Para ocupar a 1ª cadeira temos 3 opções, para a 6ª cadeira temos 2 opções e para as 4 restantes temos 4! opções, então os casais podem ocupar as seis cadeiras de $3\cdot 4!\cdot 2=144$ maneiras diferentes.

Logo, a assertiva **c** está incorreta.

d) O produto dos **n** primeiros números naturais pares é:

$$2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n=(2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot\ldots\cdot 2n=2^n\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)=2^n\cdot n!$$

Logo, a assertiva **d** está correta.

e) $\frac{(n+2)!}{(n+1)!}=7\Rightarrow\frac{(n+2)\cdot(n+1)!}{(n+1)!}=7\Rightarrow n+2=7\Rightarrow n=5$

Logo, a assertiva **e** está incorreta.

3. Cada representante cumprimentou outros 8 representantes. Como cada cumprimento é compartilhado por dois representantes, o total de cumprimentos é $\frac{9\cdot 8}{2}=36$.

4. $C_{15,3}\cdot C_{14,2}=\frac{15!}{3!(15-3)!}\cdot\frac{14!}{2!(14-2)!}=41\,405$

5. No país **X** existem $C_{6,3}=20$ maneiras de escolher as posições das três letras. Então o total de placas é $n=26\cdot 26\cdot 26\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 20=351\,520\,000$.

No país **Y** o total de placas é $p=26\cdot 26\cdot 26\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10=175\,760\,000$.

Segue:

$$\frac{n}{p}=\frac{351\,520\,000}{175\,760\,000}=2$$

Portanto, a alternativa correta é **b**.

Páginas 136 e 140

- Verifique se os alunos perceberam que toda linha do triângulo de Pascal inicia e termina com 1, pois é possível escrever o primeiro elemento de cada linha como $\binom{n}{0}=1$, com $n\in\mathbb{N}$, e o último elemento como $\binom{n}{n}=1$, com $n\in\mathbb{N}$.
- Apresente aos alunos a demonstração da 2ª propriedade do Triângulo de Pascal (Relação de Stifel):

$\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}$, para $n\geq 2$

De fato:

$$\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}=\frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}+\frac{(n-1)!}{(p-1)![(n-1)-(p-1)]!}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}+\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!}=\frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}\cdot\frac{(n-p)}{(n-p)}+\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}\cdot\frac{p}{p}=$$

$$=\frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!}+\frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!}=\frac{(n-p)(n-1)!+p(n-1)!}{p!(n-p)!}=$$

$$=\frac{[(n-p)+p](n-1)!}{p!(n-p)!}=\frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\binom{n}{p}$$

- Após estabelecer com os alunos a relação entre os coeficientes do desenvolvimento de $(x+y)^n$ com os números da linha **n** do Triângulo de Pascal (página **140**), apresente a eles a demonstração da 3ª propriedade do Triângulo de Pascal:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$$

De acordo com fórmula do Binômio de Newton:

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n y^0+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\dots+\binom{n}{n}x^0 y^n$$

Fazendo $x=1$ e $y=1$, temos:

$$(1+1)^n=\binom{n}{0}\underbrace{1^n 1^0}_{1}+\binom{n}{1}\underbrace{1^{n-1}1^1}_{1}+\binom{n}{2}\underbrace{1^{n-2}1^2}_{1}+\dots+\binom{n}{n}\underbrace{1^0 1^n}_{1}$$

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}$$

Portanto, a soma dos números da linha **n** do Triângulo de Pascal é igual a 2^n.

6 PROBABILIDADE

A probabilidade possibilita descrever a chance de um evento ocorrer diante de um conjunto de resultados possíveis de um experimento aleatório e, por isso, pode ser explorada em diversos contextos. Durante o trabalho desenvolvido, é importante que os alunos tenham clareza que a probabilidade apenas prevê a chance de um evento ocorrer, mas não nos garante que ele ocorrerá.

A probabilidade da união de dois eventos é explorada a partir de conjuntos, conteúdo trabalhado no volume **1** desta coleção. Já os tópicos de **Probabilidade condicional** e **Lei binomial das probabilidades** são abordados por meio de situações contextualizadas, a fim de que os alunos compreendam ambas as ideias e reconheçam em quais situações as utilizamos.

Ao solucionar diversas situações envolvendo probabilidade, espera-se que os alunos não se prendam apenas à memorização das fórmulas apresentadas, mas sim que sejam capazes de desenvolver estratégias para obter a solução das situações, com base no que compreenderam.

[...]

Ao estudar probabilidade e chance, os alunos precisam entender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e probabilidade, que aparecem na nossa vida diariamente, particularmente na mídia. Outras ideias importantes incluem a compreensão de que a probabilidade é uma medida de incerteza, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimar probabilidades, e que algumas vezes nossas intuições são incorretas e podem nos levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance.

[...]

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, 2006. p. 79-80.

Observe a seguir os objetivos dessa unidade.

Objetivos

- Determinar o espaço amostral de um experimento aleatório e os seus eventos.
- Diferenciar casos possíveis de casos favoráveis.
- Calcular a probabilidade da ocorrência ou não ocorrência de um evento.
- Calcular a probabilidade da união de dois eventos e a probabilidade condicional.
- Identificar eventos independentes.
- Empregar a Lei binomial das probabilidades.
- Resolver situações-problemas envolvendo probabilidades.

Relações interdisciplinares

Nos estudos sobre hereditariedade e código genético, realizados no campo da Genética, em Biologia, discute-se como ocorre a formação de um novo indivíduo e de suas características, tais como tipo sanguíneo, cor da pele, dos olhos, do cabelo, altura, dentre outras, todas definidas pelo seu DNA, herdado dos pais. Conceitos matemáticos, como análise combinatória e probabilidade, são muito utilizados para realizar o estudo das possibilidades dos eventos e análise de compatibilidades. Assim, a interdisciplinaridade entre Matemática e Biologia relacionada a este tópico é vasta, sendo apontada em alguns momentos na unidade.

Nas páginas **144** e **145**, a unidade é iniciada com o contexto "transplante de medula óssea", comumente abordado nos estudos dos sistemas que compõem o corpo humano, no caso, o sistema circulatório sanguíneo e o sistema esquelético. A probabilidade de se encontrar doadores compatíveis é pequena devido às inúmeras características individuais que definem as pessoas. Estas características são verificadas por meio de diversos testes feitos antes de se realizar um transplante. Por esse motivo, quando uma pessoa necessita de um transplante de medula, busca-se primeiramente avaliar a compatibilidade com familiares de primeiro grau.

Ainda nesse contexto, a atividade **16** (página **155**) apresenta uma situação envolvendo a doação de sangue, na qual um hemocentro recebe sangue dos quatro tipos possíveis, doado por determinada quantidade de pessoas. Espera-se que o aluno aprofunde seus conhecimentos matemáticos, e também que reflita sobre a importância da doação de sangue, assunto que pode ser discutido nas aulas de Biologia, referentes às funções e características do sangue no corpo humano, e a importância da reposição em casos de perdas ou redução de algum componente sanguíneo, como glóbulos vermelhos, glóbulos brancos ou plaquetas.

Na página **148** é feita uma descrição do processo realizado em um teste de paternidade, e para isso são apresentados elementos que se relacionam ou constituem o DNA. Por ser uma herança genética dos pais, a sequência de estruturas detectada no DNA da criança é proveniente do pai ou da mãe, existindo então procedimentos que realizam essa comparação e apresentam o resultado em forma de probabilidade.

Por fim, na página **169**, a probabilidade também se relaciona à Genética, nos estudos dos cruzamentos de genes e hereditariedade. Nesse caso, conceitos de eventos complementares e Lei binomial são utilizados para se definir a probabilidade de ocorrer um evento determinada quantidade de vezes em um número específico de tentativas, como a probabilidade de se ter oito descendentes heterozigotos em dez tentativas de cruzamentos entre dois heterozigotos.

Páginas 144 e 145 – Abertura da unidade

- Após realizar a leitura e discussão do texto das páginas iniciais, explique aos alunos que as probabilidades de compatibilidade indicadas também podem ser representadas por meio de porcentagens. No caso da probabilidade 1 para 4, basta dividir 1 por 4 e multiplicar o resultado por 100, o que resulta em 25%. Já a probabilidade de compatibilidade de um doador que não seja da família é de, aproximadamente, 0,0003%, ou seja, muito pequena. Informe-os que a probabilidade do pai ou da mãe ser compatível com o filho é menor que 5%.
- Explique aos alunos que, quanto mais irmãos, maior também a probabilidade de ter alguém compatível, porém nunca haverá 100% de chance disso ocorrer. Apresente algumas destas probabilidades a eles:

Quantidade de irmãos	Probabilidade de compatibilidade
1	1 em 4 ou 25%
2	7 em 16 ou 43,75%
3	37 em 64 ou aproximadamente 57,8%
4	175 em 256 ou aproximadamente 68,4%
5	728 em 1024 ou aproximadamente 71,1%

- É importante ter cuidado ao abordar o assunto das páginas de abertura e da atividade **16** (página **155**) pois existem princípios religiosos que vão de encontro à prática da doação de órgãos e tecidos. Por isso, conduza esses assuntos com cautela, respeitando e pedindo aos alunos que respeitem a opinião dos colegas.

Páginas 146 e 147

- Caso julgue necessário, realize na prática o experimento da tirinha com os alunos, isto é, realize 26 lançamentos de moeda anotando a cada lançamento o resultado obtido (cara ou coroa). Em seguida, faça a contagem da quantidade de resultados "coroa" obtidos.
- Outra sugestão é realizar na prática o experimento aleatório com um dado honesto e outro dado viciado, como proposto a seguir.

Experimento aleatório

Nesta atividade, os alunos terão a oportunidade de comparar na prática o comportamento de um dado honesto e de um dado viciado. Para a realização dessa proposta, reúna os alunos em duplas e providencie previamente os seguintes materiais:

- cópia de planificação de dado honesto, disponível nas páginas para reprodução
- cópia de planificação de dado viciado, disponível nas páginas para reprodução
- tesoura (com pontas arredondadas)
- cola

Solicite aos alunos que montem os dados. Explique que iremos considerar honesto o dado que lembra um cubo. É possível que esse dado não seja "totalmente" honesto, pois alguns fatores, como a variação na quantidade de cola de uma aba para outra, podem influenciar em sua honestidade.

Confeccionados os dados, solicite a cada dupla que realize 20 lançamentos com eles, um de cada vez, e anote a quantidade de vezes que cada face é obtida (frequência). Oriente-os para que registrem os resultados como a seguir:

Dado honesto	
Face	Frequência
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Dado viciado	
Face	Frequência
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Proponha, então, os seguintes questionamentos para a turma:

- No dado honesto, houve alguma face que não ocorreu? E no dado viciado?
- No dado honesto, a chance de ocorrer alguma das faces é maior que as demais? Qual face?
- No dado viciado, a chance de ocorrer alguma das faces é maior que as demais? Qual face?
- É possível responder com certeza às questões propostas considerando apenas 20 lançamentos com cada dado? E se considerarmos uma grande quantidade de lançamentos?

Verifique se os alunos perceberam que, apesar de sabermos que as chances de ocorrer qualquer uma das faces é a mesma para o dado honesto e não é a mesma para o dado viciado, realizando apenas 20 lançamentos não é possível perceber essa tendência. É preciso considerar mais lançamentos.

Com a ajuda dos alunos, registre na lousa a quantidade de vezes que eles obtiveram cada face, considerando agora todos os lançamentos realizados pelas duplas. Converse com os alunos para que verifiquem, por exemplo, que as chances de ocorrer as faces 5 e 2 no dado viciado são maiores que as chances de ocorrer as faces 1 e 6. E que no dado honesto qualquer uma das faces tem a mesma chance de ocorrer.

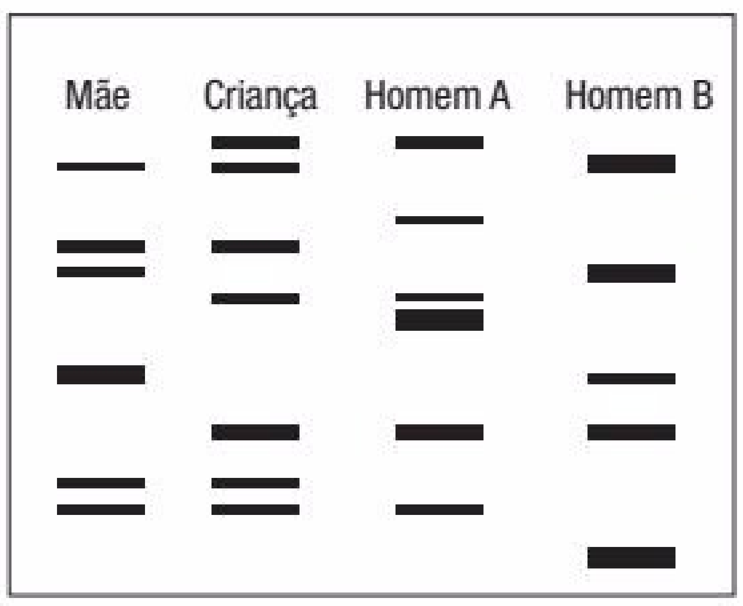
É possível também calcular a probabilidade de ocorrer cada uma das faces de ambos os dados (considerando inicialmente apenas os lançamentos de cada dupla, e depois o total de lançamentos da turma). Isto poderá tornar mais evidente o fato de que no dado honesto a probabilidade de ocorrer qualquer uma das faces é a mesma, e que quanto maior a quantidade de lançamentos, mais esse resultado se evidencia. O esperado é que com maior quantidade de lançamentos, a probabilidade de ocorrer cada uma das faces do dado honesto se aproxime de $16,\overline{6}\,\%$.

- Ao apresentar os exemplos de experimentos aleatórios da página **147**, peça aos alunos que citem outros exemplos de experimentos com essas características. Por exemplo, um experimento aleatório pode ser o sorteio de uma letra do alfabeto, em que o espaço amostral é o conjunto das letras e um evento pode ser o sorteio de uma vogal.

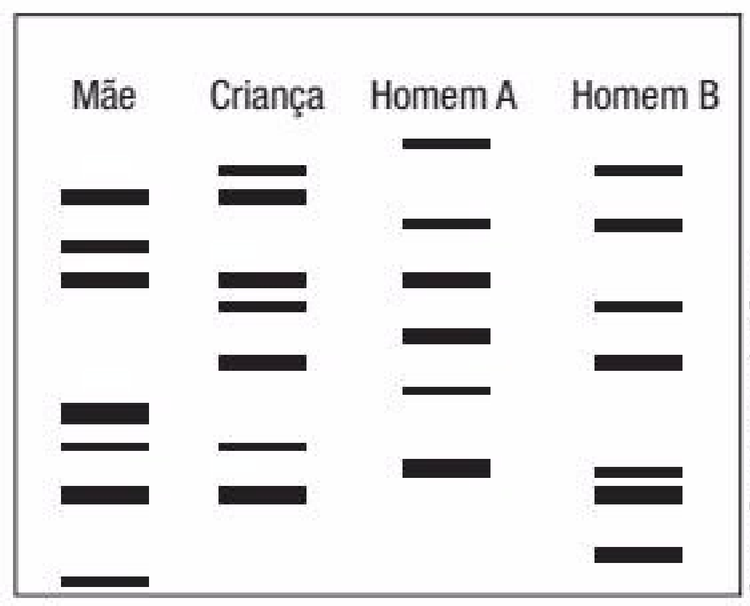
Página 148

- Para complementar o trabalho da seção **Como funciona**, apresente mais alguns exemplos de impressões fictícias para que os alunos observem e verifiquem se a criança tem maior probabilidade de ser filha do homem **A** ou do homem **B**.

I)



II)



Ilustrações: Acervo da Editora

Note que, na impressão fictícia do item **I**, a maior probabilidade é que o homem **A** seja o pai da criança, pois cada fragmento no trecho do DNA da criança possui um correspondente no trecho do DNA da mãe ou então no trecho do DNA do homem **A**. Já na impressão fictícia do item **II**, a maior probabilidade é que o homem **B** seja o pai da criança, pois cada fragmento no trecho do DNA da criança possui um correspondente no trecho do DNA da mãe ou então no trecho do DNA do homem **B**.

Páginas 149 e 150

- Verifique a possibilidade de levar para a sala de aula alguns dados e moedas para que os alunos possam realizar na prática os exemplos apresentados nas atividades dessas páginas e das páginas anteriores.

Página 153

- Durante o trabalho com a atividade especial **Paradoxo dos aniversários**, peça aos alunos que calculem a probabilidade para a quantidade de alunos da sala e, em seguida, peça que digam o dia do aniversário. Anote os dias na lousa e, em seguida, veja se há ocorrência de aniversários no mesmo dia. Diga a eles que o valor calculado é uma probabilidade, e mesmo que esse valor seja próximo de 100% (ou 0%), não podemos garantir que duas pessoas façam (ou não façam) aniversário em um mesmo dia (considerando um grupo com menos de 366 pessoas).
- Após trabalhar com a atividade especial, verifique a possibilidade de propor uma atividade semelhante aos alunos.

1. Considerando os meses com 30 dias, determine a probabilidade de pelo menos duas pessoas fazerem aniversário no mesmo dia do mês, supondo que essas pessoas estejam em um grupo de:

a) três pessoas b) oito pessoas c) treze pessoas

Agora, escreva uma fórmula que pode ser utilizada para calcular a probabilidade de pelo menos duas pessoas de um grupo de **n** pessoas fazerem aniversário no mesmo dia do mês.

Resolução

1. A: pelo menos duas pessoas fazerem aniversário no mesmo dia do mês

$\overline{A}$: todas as pessoas fazerem aniversário em dias diferentes do mês

a) Para a ocorrência de $\overline{A}$, a 1ª pessoa deve fazer aniversário em um dos 30 dias considerados de determinado mês, a 2ª deve fazer aniversário em um dos 29 dias restantes e a 3ª deve fazer aniversário em um dos 28 dias restantes. Logo:

$$P(\overline{A})=\frac{30\cdot 29\cdot 28}{30\cdot 30\cdot 30}\simeq 0,9$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0,9=0,1=10\%$$

Portanto, a probabilidade de que, em um grupo de três pessoas, ao menos duas pessoas façam aniversário em um mesmo dia é de aproximadamente 10%.

b) Seguindo o mesmo raciocínio do item **a**, temos:

$$P(\overline{A})=\frac{\overbrace{30\cdot(30-1)\cdot\ldots\cdot(30-6)\cdot(30-7)}^{8\text{ fatores}}}{30^8}\simeq 0,36$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0,36=0,64=64\%$$

Portanto, a probabilidade de que, em um grupo de oito pessoas, ao menos duas pessoas façam aniversário em um mesmo dia é de aproximadamente 64%.

c) $P(\overline{A})=\dfrac{\overbrace{30\cdot(30-1)\cdot\ldots\cdot(30-11)\cdot(30-12)}^{13\text{ fatores}}}{30^{13}}\simeq 0,05$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0,05=0,95=95\%$$

Portanto, a probabilidade de que, em um grupo de treze pessoas, ao menos duas pessoas façam aniversário em um mesmo dia é de aproximadamente 95%.

A probabilidade de pelo menos duas pessoas de um grupo de **n** pessoas, fazerem aniversário no mesmo dia do mês é:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{\overbrace{30\cdot(30-1)\cdot\ldots\cdot(30-(n-2))\cdot(30-(n-1))}^{n\text{ fatores}}}{30^n}=1-\frac{A_{30,n}}{30^n}$$

Página 160

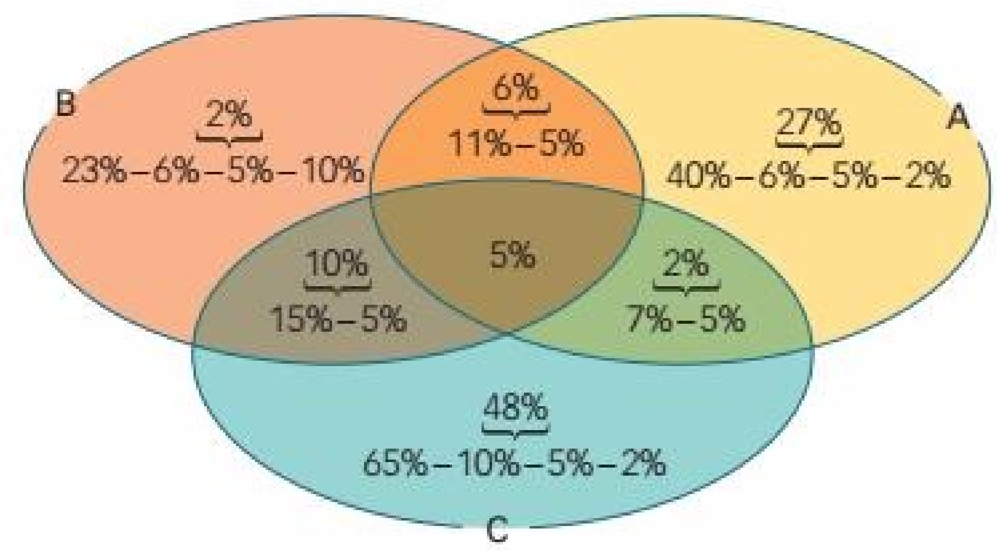
- Diga aos alunos de onde provém cada uma das energias apresentadas.
  - Energia eólica: provém da ação dos ventos.
  - Energia nuclear: provém do núcleo do átomo.
  - Energia geotérmica: provém do calor interno da Terra.
  - Energia fotovoltaica: provém da luz solar.
  - Energia hídrica: provém da força das águas.

Páginas 163 e 164

- Ao desenvolver o trabalho com a atividade **34**, verifique se é possível levar para a sala de aula alguns jogos de dominó, a fim de que os alunos em pequenos grupos possam manipular as peças. Caso julgue necessário, solicite aos alunos que calculem a probabilidade de outros eventos envolvendo os jogos de dominó.
- Para complementar o trabalho com a atividade **35**, diga aos alunos que no *site* <www.inca.gov.br/tabagismo> (Acesso em: 11 maio 2016.) é possível encontrar mais informações a respeito do cigarro e dos males que ele causa à saúde.

- Na resolução da atividade **41**, auxilie os alunos realizando alguns questionamentos, como:
  - Qual a porcentagem de funcionários que têm até 35 anos de idade? 60%
  - Qual a porcentagem de funcionários que têm mais de 35 anos de idade e não são especializados? 33%
  - Qual a porcentagem de funcionários que têm mais de 35 anos de idade, mais de 10 anos de trabalho e são especializados? 5%
  - Qual a porcentagem de funcionários que são especializados, têm até 35 anos de idade e até 10 anos de trabalho na empresa?48%

  Caso julgue necessário, desenhe na lousa, juntamente com os alunos, o diagrama ao lado, sendo:
  - **A**, o conjunto dos funcionários com mais de 35 anos de idade.
  - **B**, o conjunto dos funcionários com mais de 10 anos de trabalho na empresa.
  - **C**, o conjunto de funcionários especializados.



Acervo da Editora

Página 169

- Após trabalhar com a atividade especial **Cálculo de probabilidades na Biologia** da página **169**, verifique a possibilidade de desenvolver um trabalho interdisciplinar com o professor da disciplina de Biologia. Proponha aos alunos que pesquisem outras características em plantas e também em seres humanos, que são determinadas por genes. Se possível, apresente situações em que os alunos possam calcular a probabilidade de certos acontecimentos envolvendo genética. Por exemplo:

  Para que uma criança nasça com olhos azuis é necessário que ela seja homozigoto recessivo, isto é, tenha os dois genes recessivos (aa). No caso em que o pai é heterozigoto (Aa) e a mãe é homozigoto recessivo (aa), qual a probabilidade de que eles tenham uma menina com os olhos azuis? $\frac{1}{4}$

7 ESTATÍSTICA

No Ensino Fundamental e Ensino Médio, os alunos têm oportunidade de estudar conceitos relacionados à estatística em diversos momentos, como quando aprendem sobre probabilidade e tratamento da informação. Nesta unidade, espera-se que eles possam retomar e ampliar tais estudos, estabelecendo conexões entre o conhecimento já consolidado e novos conceitos.

No volume **1** desta coleção foram abordadas situações de coleta e organização de dados. Neste momento, ampliamos esta noção, convidando os alunos a explorar os conceitos de população e amostra, a fim de que percebam que há situações nas quais não é possível coletar os dados de toda uma população, mas apenas de uma amostra. Logo, é preciso selecionar uma amostra adequada, com o intuito de que esta possa fornecer informações reais acerca da população.

Na conexão entre probabilidade e estatística, espera-se que os alunos compreendam que em algumas situações não é possível calcular a probabilidade teoricamente, no entanto, por meio da estatística, é possível estimar a probabilidade de acordo com a frequência que um evento ocorre em uma amostra.

No trabalho com as medidas de tendência central, é importante que os alunos, além de aprenderem a determiná-las, possam compreender o que cada uma delas representa. Já no trabalho com as medidas de dispersão, os alunos são convidados a analisar o quanto um conjunto de dados é homogêneo.

Observe a seguir os objetivos dessa unidade.

Objetivos

- Compreender os conceitos de população e amostra.
- Identificar variáveis estatísticas e classificá-las.
- Estimar a probabilidade da ocorrência de um evento por meio da estatística.

- Calcular medidas de tendência central para dados agrupados e dados não agrupados.
- Utilizar e calcular as medidas de dispersão: desvio médio, variância e desvio padrão.
- Utilizar a calculadora científica para realizar alguns cálculos estatísticos.
- Resolver situações-problemas envolvendo medidas de tendência central e medidas de dispersão.

COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

Relações interdisciplinares

A Estatística é uma área da Matemática que envolve a coleta, organização, análise, interpretação e apresentação de dados relacionados aos mais variados assuntos, sendo, por esse motivo, muito utilizada por diversas áreas do conhecimento. São destacadas nessa unidade relações com as disciplinas de Geografia, Biologia e Química.

A relação entre a estatística e a Geografia pode ser evidenciada em diversas áreas de pesquisa e extensão. No Brasil temos como exemplo uma importante fundação pública chamada Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), que tem como missão retratar o país com base em pesquisas, análises e disseminação de diversas informações de natureza estatística (demográfica, socioeconômica, geocientífica, geográfica, cartográfica, geodésica, ambiental, dentre outras). Organizações como esta existem em diversos outros países no mundo.

A interdisciplinaridade com a Geografia é destacada em três momentos na unidade, que contemplam basicamente o tema "população mundial: estrutura, dinâmica e problemas". Nas páginas **171** e **172** são apresentados dados sobre o número de habitantes no mundo. A Estatística possui importante papel nessas pesquisas, seja para verificar as características atuais da população ou para fazer projeções de possíveis modificações futuras que podem ocorrer. Deste modo, é essencial para o planejamento de um país no que se refere ao crescimento populacional sustentável, valorizando o consumo consciente dos recursos naturais e a qualidade de vida de seus habitantes.

A atividade **16** (página **185**) apresenta o IDH (Índice de Desenvolvimento Humano), baseado no conceito introduzido universalmente pelo PNUD (Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento). De acordo com esse conceito, para se aferir a qualidade de vida de uma população, é necessário considerar outras características sociais, culturais e políticas, e não apenas os recursos financeiros e renda. Conceitos estatísticos, como frequência, intervalo de classes, média aritmética, moda e mediana, são necessários para organizar e apresentar informações do IDH de alguns países de maneira clara e acessível.

O terceiro apontamento da relação com a Geografia se dá na página **181**, com o mesmo tema, mas sob o foco "concentração de renda e desigualdade social", abordando o índice de Gini. Dados relacionados à renda da população são utilizados para gerar um índice que mede o grau de concentração de renda de determinado grupo, apontando a diferença entre os rendimentos dos mais pobres e dos mais ricos. Um gráfico de linha apresenta valores desse índice em anos anteriores, exigindo a interpretação do aluno para responder às questões relacionadas ao índice.

A atividade **11** (página **179**) utiliza o contexto "alimento transgênico", comumente abordado na disciplina de Biologia, em aulas sobre manipulação genética e em debates éticos sobre seus benefícios e malefícios. O resultado de uma entrevista com uma amostra populacional foi organizado em uma tabela, utilizando a frequência relativa e a frequência absoluta para representar as pessoas que já ouviram ou não falar nesses alimentos e se os escolheriam para consumo.

Por fim, na página **184** são apresentadas informações sobre o Programa Brasileiro de Etiquetagem Veicular que caracteriza um veículo quanto à sua eficiência e emissão de poluentes. Assuntos como este são comumente abordados na disciplina de Química, no tratamento dos reagentes, produtos e energia liberada nas transformações químicas. As reações químicas que ocorrem nos motores dos veículos geram energia para seu movimento e também alguns poluentes que são emitidos na atmosfera. Assim, essas etiquetas servem para o consumidor avaliar esses quesitos no momento de optar por determinado modelo de veículo.

Páginas 170 e 171 – Abertura da unidade

- Ao trabalhar com as páginas da abertura, promova uma discussão a respeito dos motivos que levaram a população a ter um crescimento acentuado nas últimas décadas. Proponha um debate perguntando se em algum momento a população mundial começará a diminuir ou se continuará crescendo indefinidamente.

- Ao apresentar o gráfico **Composição da população mundial** na página **170**, solicite aos alunos que realizem uma pesquisa a respeito da composição populacional do Brasil, de alguns países desenvolvidos e subdesenvolvidos, e comparem os países de acordo com as informações obtidas. Questione-os sobre semelhanças e diferenças entre os países desenvolvidos e entre os países subdesenvolvidos, e as justificativas para que isso ocorra.

Páginas 172 e 173

- Após o trabalho com essas páginas, proponha a seguinte questão aos alunos:

  Tomando todos os alunos da escola como população e os alunos da turma como amostra, que tipos de pesquisas poderiam e quais não poderiam ser realizadas utilizando esta amostra como base?

  Eles poderão responder, por exemplo, que a amostra pode ser utilizada para uma pesquisa em relação ao sexo (feminino ou masculino) dos alunos, mas não para a idade.

  Em seguida, peça a eles que classifiquem as variáveis indicadas em cada uma das pesquisas citadas, em variável qualitativa ordinal, variável qualitativa nominal, variável quantitativa discreta e variável quantitativa contínua.

- Durante o trabalho com essa página, leve os alunos ao laboratório de informática para que possam acessar o *site* do IBGE, no endereço <www.ibge.gov.br> (Acesso em: 11 maio 2016.). Nesse *site* eles poderão ter acesso a várias pesquisas sobre o Brasil.

Página 174

- Para o trabalho com essa página, solicite aos alunos que previamente pesquisem em jornais, revistas, internet, ou qualquer outro meio de comunicação, gráficos e tabelas referentes a diversos temas e levem-nos para serem discutidos na sala de aula. Complemente o trabalho com essa página pedindo aos alunos que classifiquem também as variáveis dos gráficos e tabelas que cada um deles levou.

Página 176

- Para complementar o trabalho com a seção **Como funciona**, informe aos alunos que o custo do seguro costuma ser menor para as mulheres. Segundo uma pesquisa estatística realizada pela Universidade Carnegie Mellon, nos Estados Unidos da América, os motoristas homens correm 78% mais riscos do que as mulheres de morrer em um acidente de trânsito. Eles são mais propensos a adotar uma conduta de risco, a não usar o cinto de segurança ou dirigir sob o efeito de bebida alcoólica. O estudo levou em consideração o número de acidentes ocorridos nos Estados Unidos entre 1999 e 2004.

Página 178

- Após trabalhar com a atividade **6**, solicite aos alunos que construam uma tabela, de acordo com os dados apresentados no gráfico. Para isso, eles devem dispor na vertical a rede de ensino (pública e particular) e na horizontal os ciclos (Pré-escola, Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior). Informe-os que esse tipo de tabela é denominado tabela de dupla entrada.

Páginas 183 a 185

- Após o trabalho com a atividade **R4**, comente com os alunos que um técnico de segurança no trabalho atua, em geral, em empresas e é responsável por orientar, organizar e promover um ambiente de trabalho seguro e saudável, visando minimizar e prevenir acidentes e doenças, baseado em medidas normativas e leis que compõem a Legislação de Segurança do Trabalho.
- Para complementar o trabalho com a atividade resolvida **R5**, peça aos alunos que representem os dados apresentados no quadro em um histograma, utilizando os intervalos utilizados para a construção da tabela.

- Após trabalhar com a atividade especial **O Programa Brasileiro de Etiquetagem Veicular** da página **184**, diga aos alunos que no *site* <http://servicos.ibama.gov.br/ctf/publico/sel_marca_modelo_rvep.php> (Acesso em: 11 maio 2016.) é possível consultar a classificação de alguns modelos de automóveis, de acordo com seus níveis de emissão de poluentes.
- Ao trabalhar com a atividade **16** da página **185**, leve os alunos ao laboratório de informática e peça que acessem o *site* do Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento no Brasil (PNUD), no endereço eletrônico <www.pnud.org.br> (Acesso em: 11 maio 2016.), no qual poderão encontrar várias informações sobre o desenvolvimento humano, IDH, RDH, e ações tomadas por esse órgão, juntamente com o governo brasileiro e instituições privadas. O PNUD tem como objetivo o combate à pobreza e à desigualdade, o fortalecimento da governança democrática, o crescimento econômico e o desenvolvimento humano e sustentável.

Páginas 187 e 188

- Após o trabalho com essas páginas, verifique a possibilidade de desenvolver um trabalho semelhante ao que foi realizado na casa da Fernanda e do Lucas, envolvendo medidas de dispersão, só que, agora, utilizando informações de algumas faturas de água levadas pelos alunos.

  Solicite que verifiquem qual foi o consumo de água, em m³, nos seis meses anteriores e no mês atual e, em seguida, peça que calculem a média, o desvio médio, a variância e o desvio padrão dos dados verificados. Solicite que construam um gráfico de barras de acordo com as informações da fatura e indiquem nesse gráfico o valor da média e observem a relação entre os valores no gráfico, a reta que representa a média e o desvio médio.

Página 192

- Após desenvolver o trabalho com a atividade **20** dessa página, solicite aos alunos que realizem uma pesquisa a respeito do motivo pelo aumento da população brasileira com 80 anos ou mais. Discuta ainda com eles qual a relação entre o gráfico apresentado e a pirâmide etária do Brasil, e o que representa o aumento dessa população para a economia brasileira.

8 MATEMÁTICA FINANCEIRA

Um dos objetivos do ensino escolar é educar financeiramente os jovens. Nessa unidade busca-se explorar diversos conceitos relacionados à Matemática financeira, além de estabelecer a conexão entre juros e funções, assunto já estudado no volume **1** desta coleção.

O conteúdo da unidade é abordado a partir de atividades que envolvem o conceito de porcentagem. A ideia, neste primeiro momento, é que os alunos utilizem seus conhecimentos prévios e relembrem estratégias de resolução para esses tipos de problemas.

Os conceitos de juros simples e juros compostos são introduzidos por meio de problemas, cujas resoluções envolvem determinadas regularidades que podem ser representadas por expressões matemáticas. Neste sentido, são retomados os conceitos de função afim e função exponencial articulando-os às fórmulas de juros simples e juros compostos.

No trabalho referente às amortizações, espera-se que os alunos não se limitem a memorizar as fórmulas do Sistema Price e do Sistema de Amortização Constante (SAC), mas sim, que busquem ter um espírito crítico, sendo capazes de decidir qual é mais adequada à determinada situação.

Observe a seguir os objetivos dessa unidade.

Objetivos

- Reconhecer situações do cotidiano que envolvem Matemática financeira.
- Compreender o conceito de porcentagem.

- Resolver problemas de porcentagem utilizando diferentes estratégias.
- Resolver problemas envolvendo o conceito de acréscimos e descontos.
- Resolver problemas envolvendo juros simples e juros compostos.
- Perceber a relação entre juro simples e função afim e entre juros compostos e função exponencial.
- Estudar o conceito de amortização.

COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

Relações interdisciplinares

Nessa unidade destacamos relações da Matemática com as disciplinas de Sociologia e Geografia.

Nas páginas **198** e **199**, discorre-se sobre a chamada responsabilidade financeira, comumente abordada pela Sociologia em discussões sobre noções de Economia no contexto "consumo, alienação e cidadania". Em sociedades consumistas, comerciantes utilizam inúmeras artimanhas, como promoções e descontos, visando atrair clientes que, muitas vezes, levados por impulsos e encantamentos, criam necessidades desnecessárias de alguns produtos e realizam a compra. Assim, a relação entre Matemática financeira e Sociologia visa desenvolver a educação financeira dos alunos, levantando a importância do consumo consciente e do planejamento financeiro.

A Sociologia é ainda apontada em dois momentos que abordam o tema "aposentadoria", referente aos direitos e deveres de um indivíduo em sua relação com trabalho e sociedade. Na atividade **5** (página **204**) são apresentadas informações sobre a Previdência Social, instituição pública que tem como objetivo reconhecer e conceder direitos aos seus segurados, perante uma contribuição que vem descontada no salário, designado no contracheque como INSS (Instituto Nacional do Seguro Social), isso no caso de funcionários contratados. Esse desconto varia de acordo com a faixa salarial, sendo necessário o conceito de porcentagem para compreender de que forma ocorre. Já na página **219**, são apresentadas informações sobre a previdência privada, modalidade utilizada para complementar a aposentadoria paga pela Previdência Social. Conceitos de Matemática financeira, como acréscimos sucessivos e juros, são necessários para fazer os cálculos referentes a esse tipo de investimento.

A Geografia é destacada em dois momentos nessa unidade. O tema "bolsa de valores" (página **201**) é comumente abordado no tratamento das relações comerciais nacionais e internacionais. Um sistema capitalista globalizado possibilita inúmeras alianças comerciais que favorecem os investimentos e a abertura de capitais. A Matemática financeira é a base para análise, investigação e representação desses investimentos.

Por fim, na página **210** apresenta-se o Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC), que é baseado no estudo feito pelo IBGE sobre preços de bens e serviços que a população adquire, paga ou usa para consumo. Assuntos como esse são abordados pela Geografia no estudo da "população e o acesso aos bens de consumo" e envolvem conceitos matemáticos como porcentagem, acréscimos, variação acumulada.

Páginas 198 e 199 – Abertura da unidade

- Após a leitura do texto, proponha aos alunos algumas questões relacionadas ao tema, por exemplo:
  - Você tem poupança?
  - Você economiza dinheiro para comprar algum bem?
  - Você pesquisa preços antes de escolher a loja em que vai comprar?

  Proponha também uma discussão sobre as vantagens e desvantagens das compras parceladas.
- Caso a escola possua laboratório de informática, leve-os até lá e peça que acessem o *site* do Banco Central do Brasil, no endereço eletrônico <www.bcb.gov.br> (Acesso em: 11 maio 2016.), no qual é possível obter diferentes informações sobre tipos de investimentos, taxas de juros, bancos, sistema financeiro nacional, entre outras.

Página 200

- Antes da revisão sobre porcentagem, apresente aos alunos o texto a seguir, que traz uma ideia geral do conceito de inflação. Em seguida, pergunte por que de os personagens tentarem segurar a "inflação" na ilustração dessa página.

Inflação

A inflação é o aumento contínuo de preços de bens, produtos e serviços em uma determinada região durante um período. Ao mesmo tempo em que os produtos se tornam mais caros, o poder de compra da moeda nacional diminui.

[...]

Além de corroer o salário [que geralmente não é reajustado], a inflação elevada também encarece os produtos nacionais, aumenta a demanda por importações e reduz as exportações, desequilibrando toda a balança comercial de um país. Para evitar uma crise econômica, governos são obrigados a adotar medidas para desvalorizar a moeda e, assim, frear as importações.

Esta decisão, entretanto, faz com que produtos importados essenciais – como petróleo, fertilizantes, equipamentos sem similar nacional – fiquem mais caros, aumentando o custo de produção de setores que dependem desses itens. Tudo isso provoca nova elevação de preços, entrando em um círculo vicioso que só termina com a queda real da inflação.

[...]

PORTAL BRASIL. *Economia e emprego*. Disponível em: <www.brasil.gov.br/economia-e-emprego/2012/04/inflacao>. Acesso em: 17 mar. 2016.

Página 201

- Após o trabalho com seção **Como funciona**, apresente aos alunos o Portal do Investidor no *site* <www.portaldoinvestidor.gov.br> (Acesso em: 11 maio 2016.). Neste portal é possível obter informações sobre os primeiros passos na hora de realizar um investimento, dicas dos principais tipos de investimentos, bem como os riscos e rendimentos que cada um pode oferecer, além de contar com infográficos, guias e materiais de divulgação. Também no *site* encontramos uma calculadora financeira, em que os alunos poderão realizar simulações de cálculos envolvendo juros simples e juros compostos.

Páginas 203 e 204

- Aproveite o contexto da atividade **1** para dar mais informações aos alunos a respeito do IPCA.

Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo - IPCA

Objetivo

O IPCA tem por objetivo medir a inflação de um conjunto de produtos e serviços comercializados no varejo, referentes ao consumo pessoal das famílias, cujo rendimento varia entre 1 e 40 salários mínimos, qualquer que seja a fonte de rendimentos. Esta faixa de renda foi criada com o objetivo de garantir uma cobertura de 90% das famílias pertencentes às áreas urbanas de cobertura do Sistema Nacional de Índices de Preços ao Consumidor - SNIPC.

Histórico

O Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) é produzido pelo IBGE desde 1979.

Desde junho de 1999, é o índice utilizado pelo Banco Central do Brasil para o acompanhamento dos objetivos estabelecidos no sistema de metas de inflação, sendo considerado o índice oficial de inflação do país.

Metodologia

Os preços obtidos são os efetivamente cobrados ao consumidor, para pagamento à vista. A pesquisa é realizada em estabelecimentos comerciais, prestadores de serviços, domicílios e concessionárias de serviços públicos.

Definição

Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (INPCA) Mede a variação do custo de vida das famílias com chefes assalariados e com rendimento mensal compreendido entre 1 e 40 salários mínimos mensais.

Abrangência geográfica da pesquisa

As pesquisas são feitas nas Regiões Metropolitanas do Rio de Janeiro, Porto Alegre, Belo Horizonte, Recife, São Paulo, Belém, Fortaleza, Salvador e Curitiba, além de Brasília e do município de Goiânia.

[...]

PORTAL BRASILEIRO DE DADOS ABERTOS. *Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo – IPCA*. Disponível em: <http://dados.gov.br/dataset/indice-nacional-de-precos-ao-consumidor-amplo-ipca>. Acesso em: 17 mar. 2016.

Página 208

- Após apresentar as atividades da página **208** aos alunos, aproveite a oportunidade para promover um debate a respeito do "consumo consciente". O objetivo é que os alunos percebam que, além do preço, existem outros aspectos relevantes que se deve levar em consideração no momento em que se compra qualquer tipo de produto.

[...]

Todo consumo causa impacto (positivo ou negativo) na economia, nas relações sociais, na natureza e em você mesmo. Ao ter consciência desses impactos na hora de escolher o que comprar, de quem comprar e definir a maneira de usar e como descartar o que não serve mais, o consumidor pode maximizar os impactos positivos e minimizar os negativos, desta forma contribuindo com seu poder de escolha para construir um mundo melhor. Isso é Consumo Consciente. Em poucas palavras, é um consumo com consciência de seu impacto e voltado à sustentabilidade.

[...]

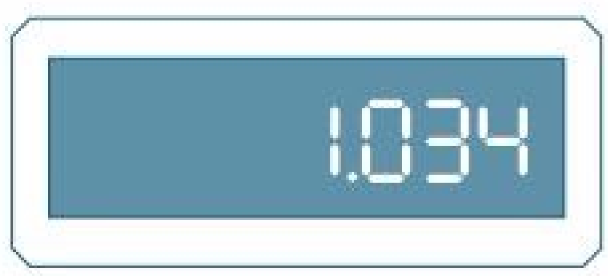
MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE. *O que é consumo consciente?* Disponível em: <www.mma.gov.br/responsabilidade-socioambiental/producao-e-consumo-sustentavel/consumo-consciente-de-embalagem/quem-e-o-consumidor-consciente/item/7591>. Acesso em: 21 mar. 2016.

Páginas 215 a 217

- Caso necessário, mostre aos alunos como realizar os cálculos de juros compostos, apresentados na atividade especial da página **215**, utilizando uma calculadora comum.

  Tomando o cálculo do montante $M = 2\,500(1+0{,}034)^8$ como exemplo, inicialmente realizamos a adição que está dentro dos parênteses:

  1 → + → 0 → . → 0 → 3 → 4 → =

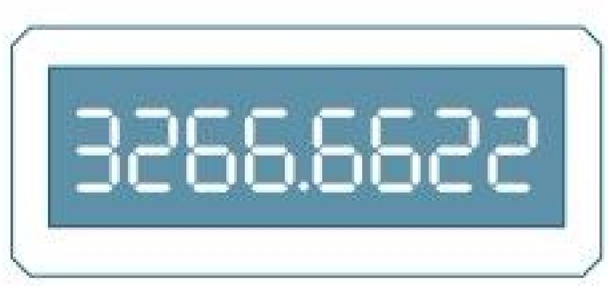


  Para calcular a potência, com o número 1,034 na tela, digite:

  × → 1 → . → 0 → 3 → 4 → = →
  → = → = → = → = → = → =

  Agora, basta efetuar a multiplicação por 2 500, digitando:

  × → 2 → 5 → 0 → 0



Ilustrações: Eduardo C.

  Portanto, o valor desse montante é R$ 3 266,66.

- Ao trabalhar com a atividade **37**, diga aos alunos que o mau uso dos cartões de crédito pode ocasionar endividamento.

Cuidados com as armadilhas

O cartão de crédito é o tipo de recurso que mais leva os consumidores a contrair dívidas. Além de cobrar os maiores juros, o cartão de crédito dá a falsa ilusão ao consumidor de que ele não está inadimplente enquanto estiver pagando a parcela mínima.

O problema é que, na maioria das vezes, o valor mínimo da fatura não supera a própria taxa de juros cobrada. Assim, a dívida, ao invés de diminuir, só aumenta. Para evitar a formação de saldo devedor e o acúmulo de juros sobre juros, planeje-se para pagar as faturas integralmente.

[...]

PORTAL BRASIL. *Economia e emprego*. Disponível em: <www.brasil.gov.br/economia-e-emprego/2011/08/livre-se-das-dividas-especialistas-recomendam-renegociar%20>. Acesso em: 17 mar. 2016.

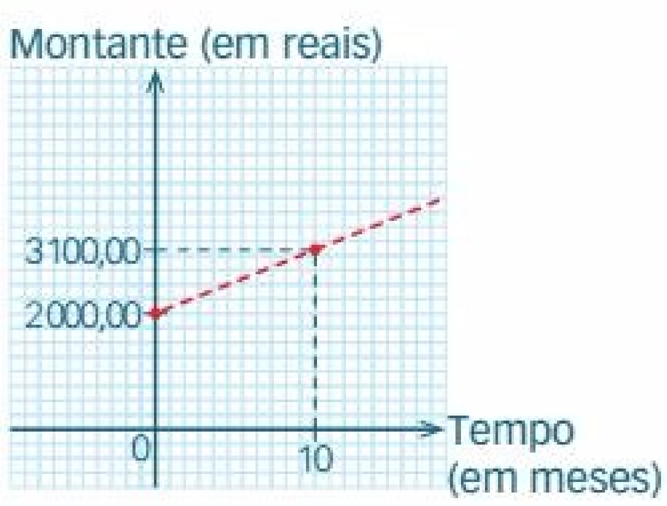
Página 221

- Se julgar necessário, após o trabalho com a seção de atividades, apresente as seguintes atividades aos alunos.

1. (Unifei-MG) Durante quanto tempo deve ser aplicado um determinado capital, a juros simples e à taxa de 0,75% ao mês, para que o montante, no final da aplicação, seja igual a $\frac{9}{5}$ do capital aplicado?

2. Os gráficos representam as funções do montante de duas aplicações capitalizadas sob a mesma taxa, porém, uma a juros simples e a outra a juros compostos. Determine qual deles representa a aplicação a juros simples e qual representa a aplicação a juros compostos e, em seguida, escreva a lei de formação de cada uma dessas funções.

a)



b)

Ilustrações: Acervo da Editora

Resolução

1. $\underbrace{c+c\cdot 0{,}0075\cdot t}_{M}=\frac{9}{5}c \Rightarrow 1+0{,}0075\cdot t=\frac{9}{5} \Rightarrow t=\frac{\frac{9}{5}-1}{0{,}0075}=\frac{320}{3}$

Portanto, o tempo de aplicação deve ser $\frac{320}{3}$ meses ou 8 anos, 10 meses e 20 dias.

2. a) Como a variação do montante é constante, a aplicação é capitalizada a juros simples. Temos $c=2\,000$ e $M(10)=3\,100$, assim:

$$M(t)=c+c\cdot i\cdot t \Rightarrow 3\,100=2\,000+2\,000\cdot i\cdot 10 \Rightarrow i=0{,}055$$

Portanto:

$$M(t)=2\,000+2\,000\cdot 0{,}055\cdot t \Rightarrow M(t)=110t+2\,000$$

b) Como a variação do montante aumenta no decorrer do tempo, esta é a aplicação a juros compostos. Temos $c=2\,000$ e $M(10)=3\,416{,}29$, assim:

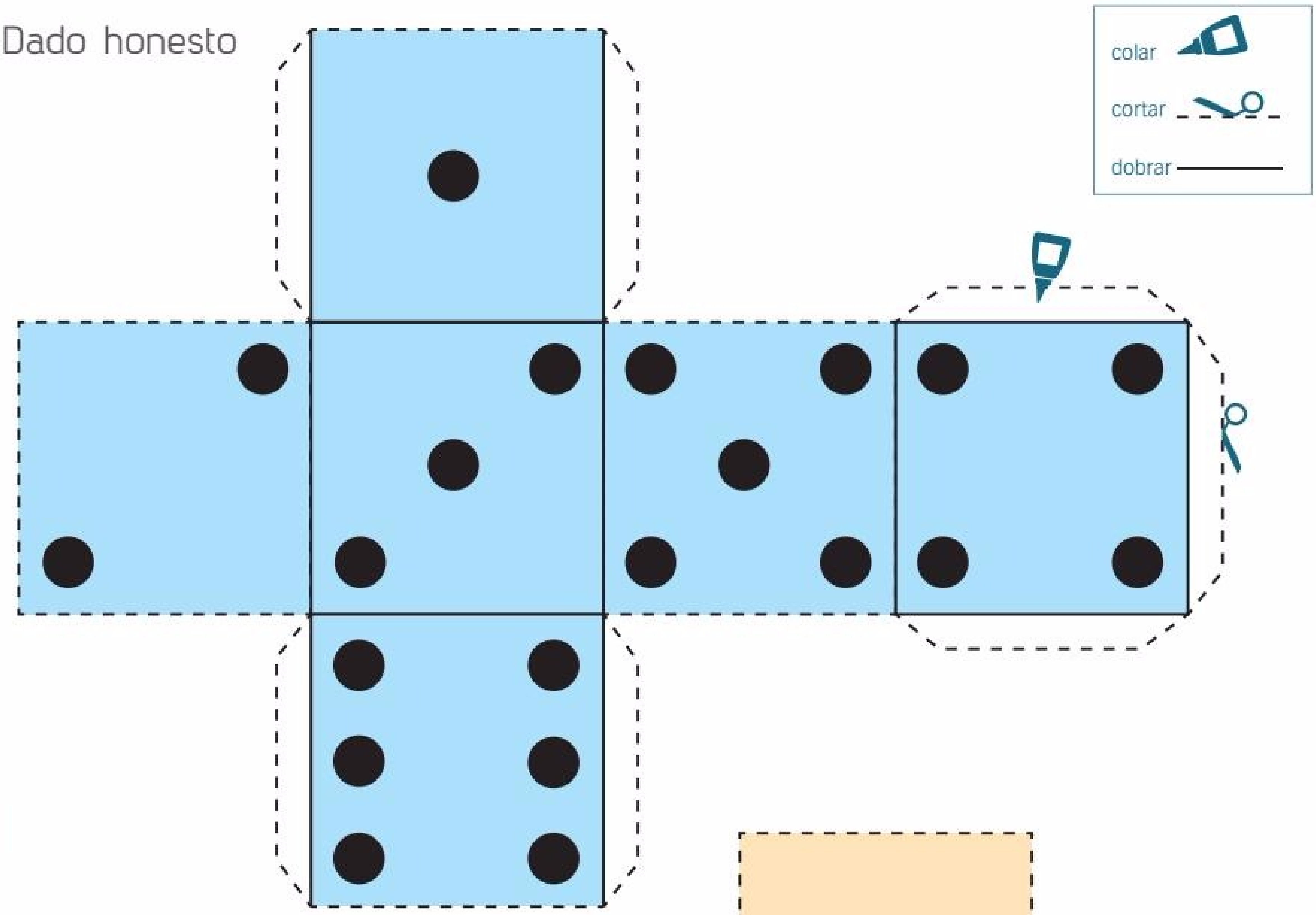
$$M(t)=c\cdot(1+i)^t \Rightarrow 3\,416{,}29=2\,000\cdot(1+i)^{10} \Rightarrow (1+i)^{10}=1{,}708145 \Rightarrow 1+i\simeq 1{,}055 \Rightarrow i\simeq 0{,}055$$

Portanto:

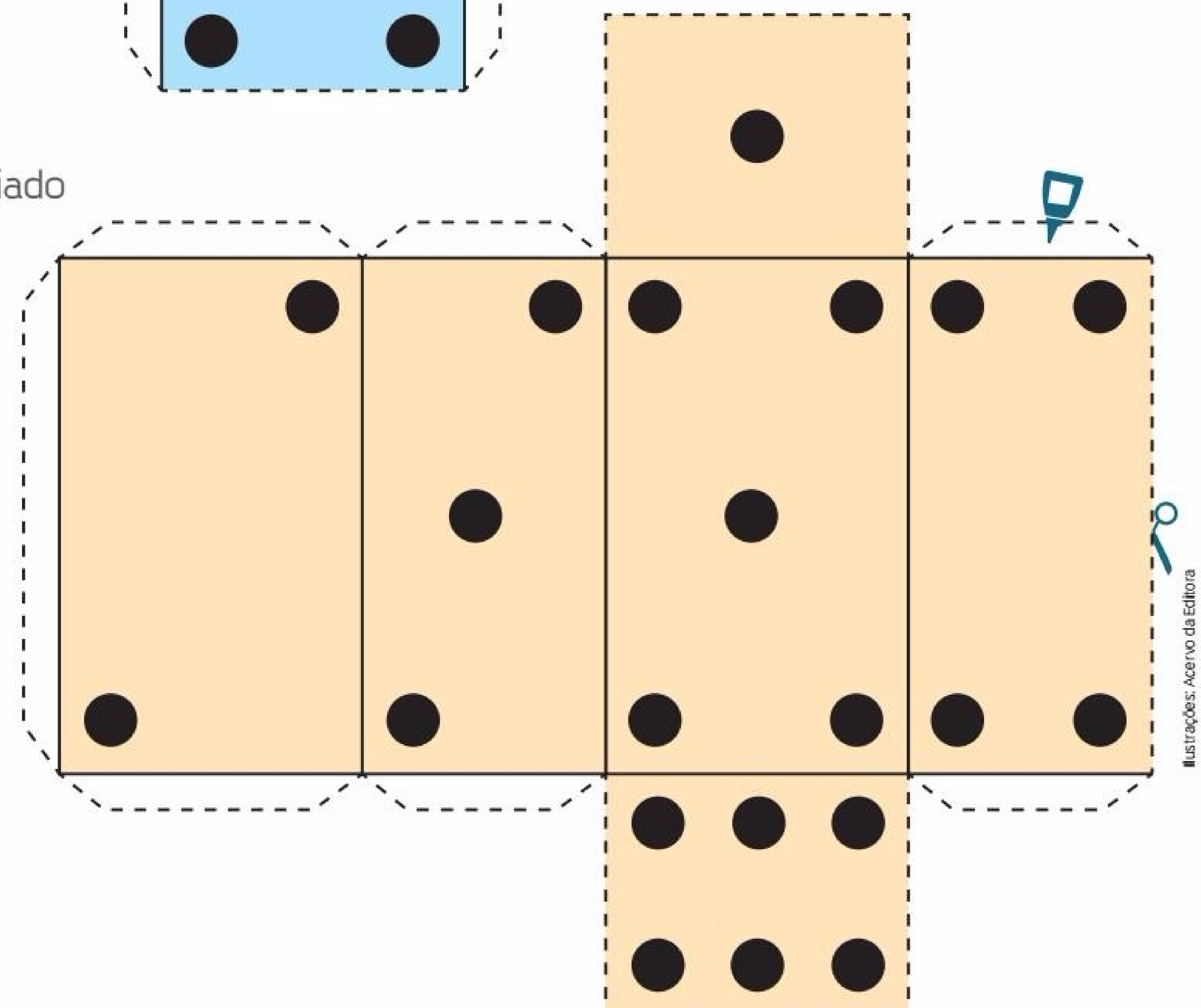
$$M(t)=2\,000\cdot(1+0{,}055)^t \Rightarrow M(t)=2\,000\cdot 1{,}055^t$$

PLANIFICAÇÃO DO DADO HONESTO E DO DADO VICIADO

Dado honesto



Dado viciado



Referente à unidade 6.

SIGLAS

Enem – Exame Nacional do Ensino Médio
EsPCEx-SP – Escola Preparatória de Cadetes do Exército
ESPM – Escola Superior de Propaganda e Marketing
FGV-SP – Fundação Getulio Vargas
Furg-RS – Fundação Universidade Federal do Rio Grande
Fuvest-SP – Fundação Universitária para o Vestibular
Insper-SP – Instituto de Ensino e Pesquisa
ITA-SP – Instituto Tecnológico de Aeronáutica
OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PUC-MG – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC-RS – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
Udesc – Universidade do Estado de Santa Catarina
Uece – Universidade Estadual do Ceará
UEG-GO – Universidade Estadual de Goiás
UEL-PR – Universidade Estadual de Londrina
UEM-PR – Universidade Estadual de Maringá
Uepa – Universidade do Estado do Pará
UEPB – Universidade Estadual da Paraíba
UEPG-PR – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Uerj – Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UERN – Universidade do Estado do Rio Grande do Norte
Uesc-BA – Universidade Estadual de Santa Cruz
Ufam – Universidade Federal do Amazonas
UFBA – Universidade Federal da Bahia
UFF-RJ – Universidade Federal Fluminense
UFG-GO – Universidade Federal de Goiás
Ufla-MG – Universidade Federal de Lavras
UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais
UFMT – Universidade Federal do Mato Grosso
UFPB – Universidade Federal da Paraíba
UFPE – Universidade Federal de Pernambuco
UFPel-RS – Universidade Federal de Pelotas
UFPR – Universidade Federal do Paraná
UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFSCar-SP – Universidade Federal de São Carlos
UFSM-RS – Universidade Federal de Santa Maria
UFU-MG – Universidade Federal de Uberlândia
Unemat-MT – Universidade do Estado de Mato Grosso
Unesp – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Unicamp – Universidade Estadual de Campinas
Unicentro-PR – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Unisc-RS – Universidade de Santa Cruz do Sul
UPE – Universidade de Pernambuco
UPM-SP – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Unidade 1

Trigonometria na circunferência

A ação do diferencial em um automóvel

a) ▪ distância percorrida pelo pneu interno:

Medida do arco (°)	Comprimento (m)
360	$2\cdot\pi\cdot\underbrace{r}_{3}=18{,}84$
90	x

$\frac{360}{90}=\frac{18{,}84}{x}\Rightarrow x=\frac{90\cdot 18{,}84}{360}=4{,}71\rightarrow 4{,}71\text{ m}$

▪ distância percorrida pelo pneu externo:

Medida do arco (°)	Comprimento (m)
360	$2\cdot\pi\cdot\underbrace{r}_{3+1{,}5}=28{,}26$
90	x

$\frac{360}{90}=\frac{28{,}26}{x}\Rightarrow x=\frac{90\cdot 28{,}26}{360}\simeq 7{,}07\rightarrow$
$\rightarrow$aproximadamente 7,07 m

Logo, a diferença aproximada é:

$7{,}07-4{,}71=2{,}36\rightarrow 2{,}36\text{ m}$

b) ▪ roda interna:

Distância (m)	Voltas
$2\cdot\pi\cdot\underbrace{r}_{0{,}58:2}=1{,}8212$	1
4,71	x

$\frac{1{,}8212}{4{,}71}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{4{,}71\cdot 1}{1{,}8212}\simeq 2{,}59\rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 2,59 voltas

▪ roda externa:

Distância (m)	Voltas
$2\cdot\pi\cdot\underbrace{r}_{0{,}58:2}=1{,}8212$	1
7,07	x

$\frac{1{,}8212}{7{,}07}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{7{,}07\cdot 1}{1{,}8212}\simeq 3{,}88\rightarrow$
$\rightarrow$ aproximadamente 3,88 voltas

1. a) ▪ medida angular:

$\text{med}\left(\widehat{AB}\right)=360°-180°=180°$

▪ medida linear:

Medida angular (°)	Medida linear (cm)
360	$2\cdot\pi\cdot\underbrace{r}_{8:2}=25{,}12$
180	x

$\frac{360}{180}=\frac{25{,}12}{x}\Rightarrow x=\frac{180\cdot 25{,}12}{360}=12{,}56\rightarrow 12{,}56\text{ cm}$

b) ▪ medida angular:

$\text{med}\left(\widehat{AB}\right)=360°-135°=225°$

▪ medida linear:

Medida angular (°)	Medida linear (cm)
360	$2\cdot\pi\cdot\underbrace{r}_{9}=56{,}52$
225	x

$\frac{360}{225}=\frac{56{,}52}{x}\Rightarrow x=\frac{225\cdot 56{,}52}{360}=35{,}325\rightarrow 35{,}325\text{ cm}$

c) ▪ medida angular:

$\text{med}(AB)=150°$

▪ medida linear:

Medida angular (°)	Medida linear (cm)
360	$2\cdot\pi\cdot\underbrace{r}_{6+4}=62{,}8$
150	x

$\frac{360}{150}=\frac{62{,}8}{x}\Rightarrow x=\frac{150\cdot 62{,}8}{360}\simeq 26{,}17\rightarrow$
$\rightarrow$aproximadamente 26,17 cm

2. a) ▪ $\widehat{AB}$:

Medida do arco (°)	Comprimento (cm)
360	$2\cdot\pi\cdot\underbrace{r}_{9}=56{,}52$
35	x

$\frac{360}{35}=\frac{56{,}52}{x}\Rightarrow x=\frac{35\cdot 56{,}52}{360}=5{,}495\rightarrow 5{,}495\text{ cm}$

▪ $\widehat{CD}$:

Medida do arco (°)	Comprimento (cm)
360	$2\cdot\pi\cdot\underbrace{r}_{3}=18{,}84$
210	x

$\frac{360}{210}=\frac{18{,}84}{x}\Rightarrow x=\frac{210\cdot 18{,}84}{360}=10{,}99\rightarrow 10{,}99\text{ cm}$

b) ▪ $\widehat{AB}$:

Medida do arco (°)	Comprimento (cm)
360	$2\cdot\pi\cdot\underbrace{r}_{5}=31{,}4$
270	x

$\frac{360}{270}=\frac{31{,}4}{x}\Rightarrow x=\frac{270\cdot 31{,}4}{360}=23{,}55\rightarrow 23{,}55\text{ cm}$

▪ $\widehat{CD}$:

Medida do arco (°)	Comprimento (cm)
360	$2\cdot\pi\cdot\underbrace{r}_{2}=12{,}56$
45	x

$\frac{360}{45}=\frac{12{,}56}{x}\Rightarrow x=\frac{45\cdot 12{,}56}{360}=1{,}57\rightarrow 1{,}57\text{ cm}$

c) ▪ $\widehat{AB}$:

Medida do arco (°)	Comprimento (cm)
360	$2\cdot\pi\cdot\underbrace{r}_{4+3+2}=56{,}52$
52	x

$$\frac{360}{52}=\frac{56{,}52}{x}\Rightarrow x=\frac{52\cdot 56{,}52}{360}=8{,}164\rightarrow 8{,}164\text{ cm}$$

▪ $\widehat{CD}$:

Medida do arco (°)	Comprimento (cm)
360	$2\cdot\pi\cdot\underbrace{r}_{5}=31{,}4$
108	x

$$\frac{360}{108}=\frac{31{,}4}{x}\Rightarrow x=\frac{108\cdot 31{,}4}{360}=9{,}42\rightarrow 9{,}42\text{ cm}$$

▪ $\widehat{EF}$:

Medida do arco (°)	Comprimento (cm)
360	$2\cdot\pi\cdot\underbrace{r}_{4}=25{,}12$
90	x

$$\frac{360}{90}=\frac{25{,}12}{x}\Rightarrow x=\frac{90\cdot 25{,}12}{360}=6{,}28\rightarrow 6{,}28\text{ cm}$$

▪ $\widehat{GH}$:

Medida do arco (°)	Comprimento (cm)
360	$2\cdot\pi\cdot\underbrace{r}_{4+3}=43{,}96$
36	x

$$\frac{360}{36}=\frac{43{,}96}{x}\Rightarrow x=\frac{36\cdot 43{,}96}{360}=4{,}396\rightarrow 4{,}396\text{ cm}$$

3. a)

Medida em graus (°)	Medida em radianos (rad)
180	π
α	$\frac{3\pi}{6}$

$$\frac{180}{\alpha}=\frac{\pi}{\frac{3\pi}{6}}\Rightarrow\alpha=\frac{180\cdot\frac{3\pi}{6}}{\pi}=90\rightarrow 90°$$

b)

Medida em graus (°)	Medida em radianos (rad)
180	π
α	$\frac{5\pi}{9}$

$$\frac{180}{\alpha}=\frac{\pi}{\frac{5\pi}{9}}\Rightarrow\alpha=\frac{180\cdot\frac{5\pi}{9}}{\pi}=100\rightarrow 100°$$

c)

Medida em graus (°)	Medida em radianos (rad)
180	π
α	$\frac{8\pi}{5}$

$$\frac{180}{\alpha}=\frac{\pi}{\frac{8\pi}{5}}\Rightarrow\alpha=\frac{180\cdot\frac{8\pi}{5}}{\pi}=288\rightarrow 288°$$

d)

Medida em graus (°)	Medida em radianos (rad)
180	π
α	$\frac{17\pi}{10}$

$$\frac{180}{\alpha}=\frac{\pi}{\frac{17\pi}{10}}\Rightarrow\alpha=\frac{180\cdot\frac{17\pi}{10}}{\pi}=306\rightarrow 306°$$

4. a)

Medida em graus (°)	Medida em radianos (rad)
180	π
45	x

$$\frac{180}{45}=\frac{\pi}{x}\Rightarrow x=\frac{45\cdot\pi}{180}=\frac{\pi}{4}\rightarrow\frac{\pi}{4}\text{ rad}$$

b)

Medida em graus (°)	Medida em radianos (rad)
180	π
135	x

$$\frac{180}{135}=\frac{\pi}{x}\Rightarrow x=\frac{135\cdot\pi}{180}=\frac{3\pi}{4}\rightarrow\frac{3\pi}{4}\text{ rad}$$

c)

Medida em graus (°)	Medida em radianos (rad)
180	π
225	x

$$\frac{180}{225}=\frac{\pi}{x}\Rightarrow x=\frac{225\cdot\pi}{180}=\frac{5\pi}{4}\rightarrow\frac{5\pi}{4}\text{ rad}$$

d)

Medida em graus (°)	Medida em radianos (rad)
180	π
320	x

$$\frac{180}{320}=\frac{\pi}{x}\Rightarrow x=\frac{320\cdot\pi}{180}=\frac{16\pi}{9}\rightarrow\frac{16\pi}{9}\text{ rad}$$

5.

Medida em graus (°)	Distância (km)
1	111,322
360	x

$$\frac{1}{360}=\frac{111{,}322}{x}\Rightarrow x=\frac{360\cdot 111{,}322}{1}=$$
$$=40\,075{,}92\rightarrow 40\,075{,}92\text{ km}$$

Portanto, a alternativa correta é **d**.

6. ▪ comprimento de $\widehat{AE}$:

Note que CBD é um triângulo retângulo isósceles, logo, $A\hat{B}E=45°$. Assim, $\widehat{AE}$ é um arco de medida 45° e raio 4 cm.

Medida do arco (°)	Comprimento (cm)
360	$2\cdot\pi\cdot\underbrace{r}_{4}=8\pi$
45	x

$$\frac{360}{45}=\frac{8\pi}{x}\Rightarrow x=\frac{45\cdot 8\pi}{360}=\pi\rightarrow\pi\text{ cm}$$

▪ comprimento de $\widehat{FB}$:

Note que, por simetria, temos que o comprimento de $\widehat{FB}$ é igual ao comprimento de $\widehat{AE}$, ou seja, π cm.

▪ comprimento de $\widehat{EF}$:

Temos:

$$AD+DF=\underbrace{AB}_{4}\Rightarrow DF=4-AD$$

Para calcular AD, utilizamos o Teorema de Pitágoras no triângulo ACD.

$AD^2 = AC^2 + CD^2 \Rightarrow AD^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow AD^2 = 8 \Rightarrow AD = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Segue que:

$DF = 4 - AD = 4 - 2\sqrt{2}$

O ângulo $E\hat{D}F$ tem medida 90°, pois é oposto pelo vértice $A\hat{D}B$, que é reto.

Medida do arco (°)	Comprimento (cm)
360	$2 \cdot \pi \cdot \underbrace{r}_{4-2\sqrt{2}} = 8\pi - 4\pi\sqrt{2}$
90	x

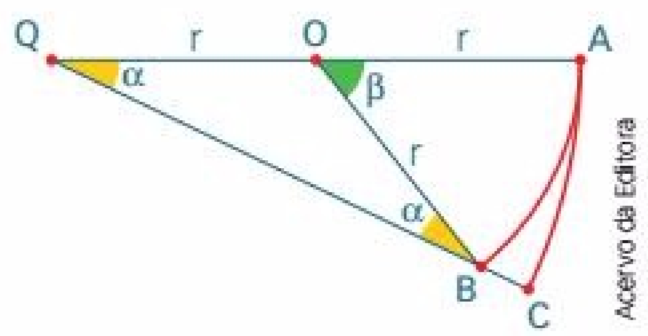
$$\frac{360}{90} = \frac{8\pi - 4\pi\sqrt{2}}{x} \Rightarrow x = \frac{90 \cdot (8\pi - 4\pi\sqrt{2})}{360} =$$

$$= \frac{8\pi - 4\pi\sqrt{2}}{4} = 2\pi - \pi\sqrt{2}$$

Logo, o comprimento da curva AEFB é

$\pi + \pi + (2\pi - \pi\sqrt{2}) = 4\pi - \pi\sqrt{2} = \pi(4 - \sqrt{2}) \to \pi(4 - \sqrt{2})$ cm

7. Considere as medidas indicadas na figura abaixo:



Como β é um ângulo externo do triângulo QOB, temos:

$\beta = \alpha + \alpha \Rightarrow \beta = 2\alpha$

- arco $\widehat{AB}$:

Medida do arco (°)	Comprimento (cm)
360	$2 \cdot \pi \cdot r = 2\pi r$
2α	11,16

$$\frac{360}{2\alpha} = \frac{2\pi r}{11{,}16} \Rightarrow 11{,}16 = \frac{2\alpha \cdot 2\pi r}{360} \Rightarrow 11{,}16 = \frac{4\alpha\pi r}{360}$$

- arco $\widehat{AC}$:

Medida do arco (°)	Comprimento (cm)
360	$2 \cdot \pi \cdot (2r) = 4\pi r$
α	x

$$\frac{360}{\alpha} = \frac{4\pi r}{x} \Rightarrow x = \frac{\alpha \cdot 4\pi r}{360} \Rightarrow x = \frac{4\alpha\pi r}{360} = 11{,}16 \to 11{,}16 \text{ cm}$$

8. Se r é o raio do semicírculo maior, então $r - 1$ é o raio do semicírculo menor.

- distância percorrida pela primeira formiga:

$$\frac{2\pi r}{2} = \pi r \to \pi r \text{ cm}$$

- distância percorrida pela segunda formiga:

$$1 + \frac{2\pi(r-1)}{2} + 1 = 2 + \pi(r-1) = 2 + \pi r - \pi \to (2 + \pi r - \pi) \text{ cm}$$

Assim, a diferença entre as distâncias percorridas é:

$\pi r - (2 + \pi r - \pi) = \pi - 2$

Dessa maneira, a segunda formiga andou $\pi - 2$ centímetros a menos que a primeira.

Portanto, a alternativa correta é **d**.

9. O comprimento da coroa é:

$$2\pi \cdot \frac{30}{2} = 2 \cdot 3 \cdot 15 = 90 \to 90 \text{ cm}$$

Logo, ao dar uma volta na coroa, a corrente é deslocada em 90 cm. O número de voltas da catraca é dado pela seguinte regra de três:

Comprimento (cm)	Número de voltas
$2 \cdot \pi \cdot \underbrace{r}_{10:2} = 30$	1
90	x

$$\frac{30}{90} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{90}{30} = 3 \to 3 \text{ voltas}$$

Logo, a roda traseira da bicicleta dá 3 voltas, o que corresponde a:

$3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \underbrace{r}_{80:2} = 720 \to 720$ cm ou 7,2 m

Portanto, a alternativa correta é **c**.

10. A parte da espiral contida em cada quadrado corresponde a $\frac{1}{4}$ de uma circunferência cujo raio é igual ao lado do quadrado. Assim, o comprimento total é dado por:

$$\frac{2\pi \cdot 13}{4} + \frac{2\pi \cdot 8}{4} + \frac{2\pi \cdot 5}{4} + \frac{2\pi \cdot 3}{4} + \frac{2\pi \cdot 2}{4} + 2 \cdot \frac{2\pi \cdot 1}{4} =$$

$$= \frac{66\pi}{4} = 16{,}5 \cdot 3{,}14 = 51{,}81 \to 51{,}81 \text{ u}$$

11. a) $540 \,\underline{|360}$

$\underbrace{180}_{\alpha} \; \underbrace{1}_{k}$

Portanto, $\alpha = 180°$.

b) $1\,130 \,\underline{|360}$

$\underbrace{50}_{\alpha} \; \underbrace{3}_{k}$

Portanto, $\alpha = 50°$.

c) $2\,080 \,\underline{|360}$

$\underbrace{280}_{\alpha} \; \underbrace{5}_{k}$

Portanto, $\alpha = 280°$.

d) $\frac{66\pi}{8} = \frac{2\pi}{8} + \frac{64\pi}{8} = \frac{\pi}{4} + 8\pi = \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{\alpha} + \underbrace{4}_{k} \cdot 2\pi$

Portanto, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

e) $\frac{45\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + \frac{40\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 10\pi = \underbrace{\frac{5\pi}{4}}_{\alpha} + \underbrace{5}_{k} \cdot 2\pi$

Portanto, $\alpha = \frac{5\pi}{4}$.

f) $\frac{125\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} + \frac{120\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} + 10\pi = \underbrace{\frac{5\pi}{12}}_{\alpha} + \underbrace{5}_{k} \cdot 2\pi$

Portanto, $\alpha = \frac{5\pi}{12}$.

12. Inicialmente, vamos obter a primeira determinação positiva, em graus, e o número de voltas inteiras de cada arco.

a) $\frac{25\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \frac{24\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 4\pi = \underbrace{\frac{\pi}{6}}_{\alpha} + \underbrace{2}_{k} \cdot 2\pi$

Radiano (rad)	Graus (°)
π	180
$\frac{\pi}{6}$	x

$\pi \cdot x = \frac{\pi}{6} \cdot 180 \Rightarrow x = \frac{30\pi}{\pi} \Rightarrow x = 30 \rightarrow 30°$

$\alpha = 30°$ e $k = 2$

b) $615 \,\underline{|360}$

$\underbrace{255}_{\alpha}\ \underset{k}{1}$

$\alpha = 255°$ e $k = 1$

c) $500 \,\underline{|360}$

$\underbrace{140}_{\alpha}\ \underset{k}{1}$

$\alpha = 140°$ e $k = 1$.

d) $\frac{34\pi}{9} = \frac{16\pi}{9} + \frac{18\pi}{9} = \frac{16\pi}{9} + 2\pi = \underbrace{\frac{16\pi}{9}}_{\alpha} + \underset{k}{1} \cdot 2\pi$

Radiano (rad)	Graus (°)
π	180
$\frac{16\pi}{9}$	x

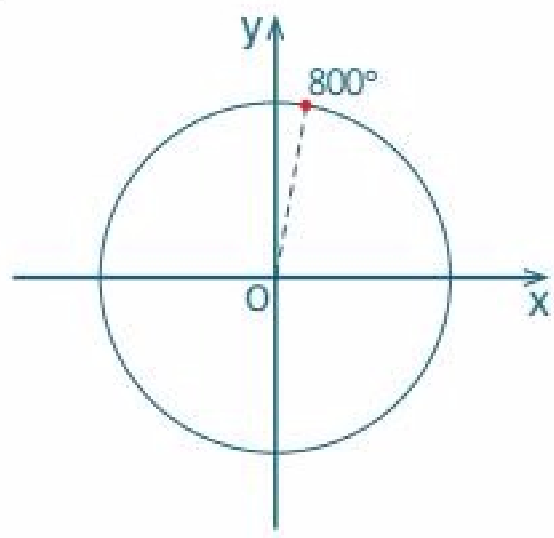
$\pi \cdot x = \frac{16\pi}{9} \cdot 180 \Rightarrow x = \frac{320\pi}{\pi} \Rightarrow x = 320 \rightarrow 320°$

$\alpha = 320°$ e $k = 1$

Portanto, as associações corretas são: a–III; b–IV; c–I; d–II.

13. a) $800 \,\underline{|360}$

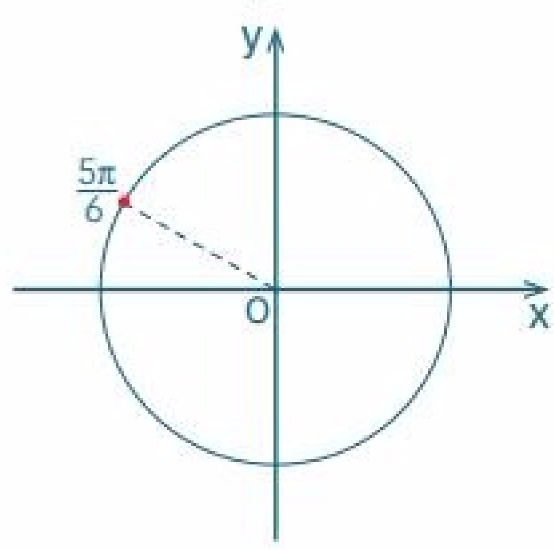
$\underbrace{80}_{\alpha}\ \underset{k}{2}$



b) $\frac{5\pi}{6} = \underbrace{\frac{5\pi}{6}}_{\alpha} + \underset{k}{0} \cdot 2\pi$

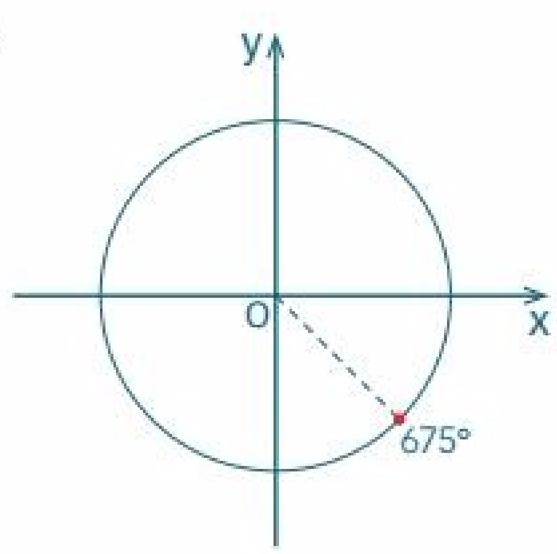
Radiano (rad)	Graus (°)
π	180
$\frac{5\pi}{6}$	x

$\pi \cdot x = \frac{5\pi}{6} \cdot 180 \Rightarrow x = \frac{150\pi}{\pi} \Rightarrow x = 150 \rightarrow 150°$



c) $675 \,\underline{|360}$

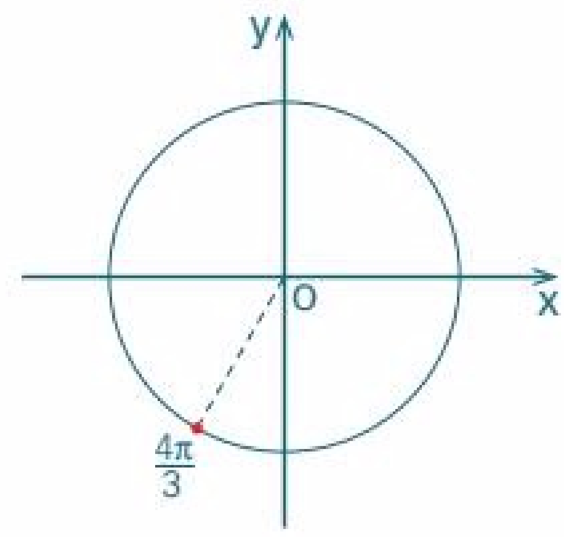
$\underbrace{315}_{\alpha}\ \underset{k}{1}$



d) $\frac{4\pi}{3} = \underbrace{\frac{4\pi}{3}}_{\alpha} + \underset{k}{0} \cdot 2\pi$

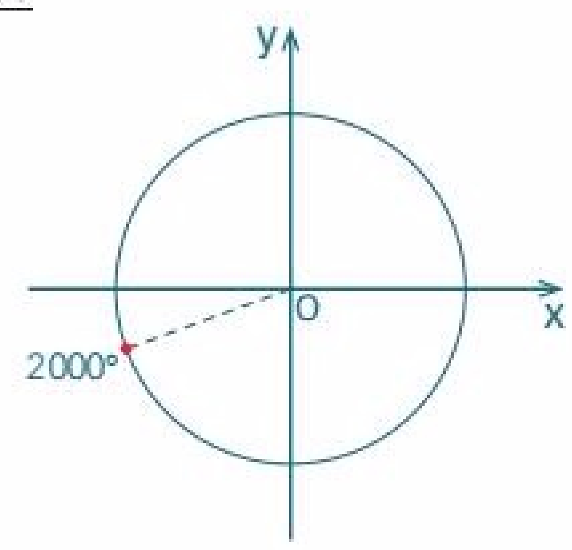
Radiano (rad)	Graus (°)
π	180
$\frac{4\pi}{3}$	x

$\pi \cdot x = \frac{4\pi}{3} \cdot 180 \Rightarrow x = \frac{240\pi}{\pi} \Rightarrow x = 240 \rightarrow 240°$



e) $2\,000 \,\underline{|360}$

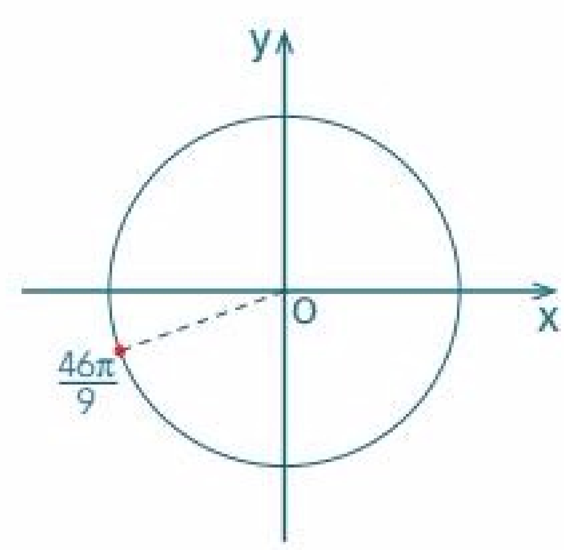
$\underbrace{200}_{\alpha}\ \underset{k}{5}$



f) $\frac{46\pi}{9} = \frac{10\pi}{9} + \frac{36\pi}{9} = \frac{10\pi}{9} + 4\pi = \underbrace{\frac{10\pi}{9}}_{\alpha} + \underset{k}{2} \cdot 2\pi$

Radiano (rad)	Graus (°)
π	180
$\frac{10\pi}{9}$	x

$\pi \cdot x = \frac{10\pi}{9} \cdot 180 \Rightarrow x = \frac{200\pi}{\pi} \Rightarrow x = 200 \rightarrow 200°$



Ilustrações: Acervo da Editora

14. a) $55° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) $210° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

c) $\frac{17\pi}{18} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

d) $-\frac{2\pi}{9} + 2\pi = \frac{16\pi}{9}$

$\frac{16\pi}{9} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

15. $4\,555 \,\underline{|\,360}$

$\underbrace{235}_{\alpha}\ \underbrace{12}_{k}$

Logo, o arco pertence ao terceiro quadrante. Dois arcos são côngruos quando a diferença de suas medidas é múltipla de 360°. Assim, 4 195° é côngruo a 4 555° enquanto 195° não é côngruo, pois:

- $4\,555° - 4\,195° = 360°$
- $4\,555° - 195° = 4\,360° = 40° + 12 \cdot 360°$

Portanto, a alternativa correta é **e**.

16. Convertendo $\frac{\pi}{9}$ em graus, temos:

Radiano (rad)	Graus (°)
π	180
$\frac{\pi}{9}$	x

$\pi \cdot x = \frac{\pi}{9} \cdot 180 \Rightarrow x = \frac{20\pi}{\pi} \Rightarrow x = 20 \rightarrow 20°$

- para $k = 0$:

$\frac{\pi}{9} + 0 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{9}$ ou $20° + 0 \cdot 90° = 20°$

- para $k = 1$:

$\frac{\pi}{9} + 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{18}$ ou $20° + 1 \cdot 90° = 110°$

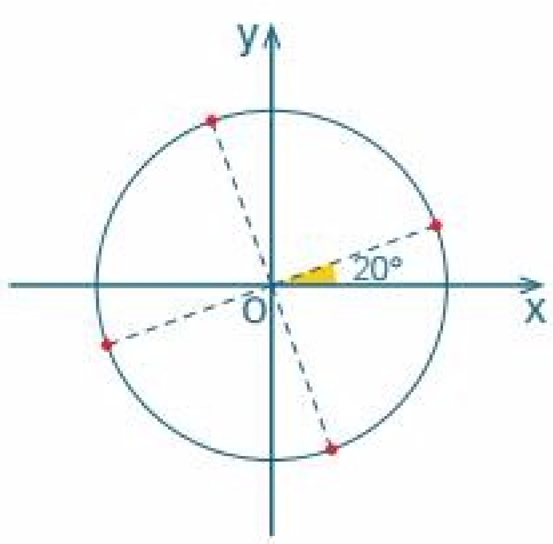
- para $k = 2$:

$\frac{\pi}{9} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{10\pi}{9}$ ou $20° + 2 \cdot 90° = 200°$

- para $k = 3$:

$\frac{\pi}{9} + 3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{29\pi}{18}$ ou $20° + 3 \cdot 90° = 290°$

Observe que, a partir de $k = 4$, os arcos obtidos por meio da expressão são, ordenadamente, côngruos aos arcos obtidos anteriormente.



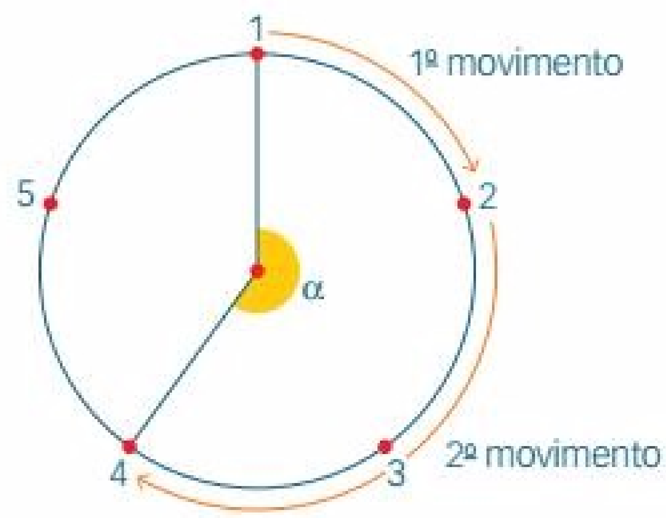
17. Em um período de 12 horas, partindo da posição em que os dois ponteiros estão superpostos no 12, ocorrem 11 superposições. Nesse período de 12 horas, o ponteiro dos minutos varre um ângulo de $12 \cdot 2\pi = 24\pi$. Logo, entre duas superposições consecutivas, o ângulo varrido pelo ponteiro dos minutos é $\frac{24\pi}{11}$.

Portanto, a alternativa correta é **c**.

18. a) Falso. Se a esfera começa no número 5, ela chega no número 2 em dois movimentos $(5 \rightarrow 1 \rightarrow 2)$. A partir daí, a esfera volta a parar no 2 a cada três movimentos $(2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2)$. Logo, a esfera para no número 2 se a quantidade de movimentos for dada por $2 + 3k$, com $k \in \mathbb{N}$. Então, com 1 000 movimentos a esfera não irá parar no 2, pois:

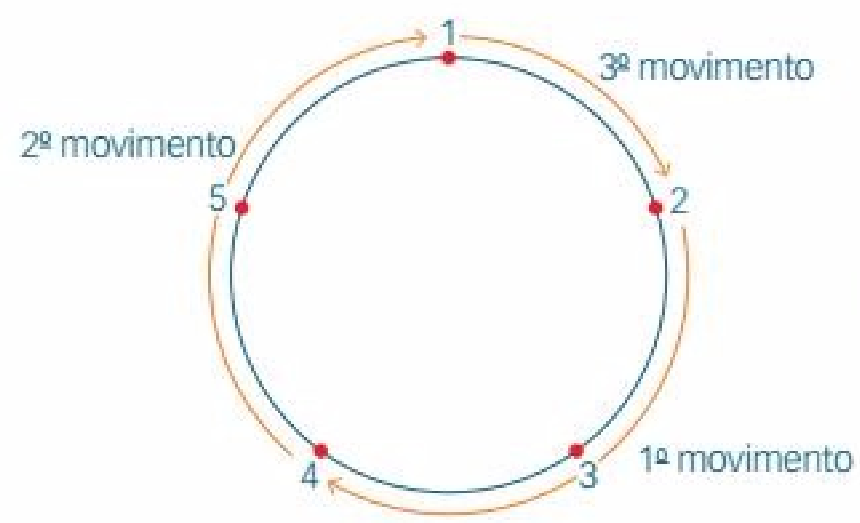
$2 + 3k = 1\,000 \Rightarrow 3k = 998 \Rightarrow k = 332,\overline{6} \notin \mathbb{N}$

b) Verdadeiro.



O ângulo α da figura corresponde a $\frac{3}{5}$ de uma volta, ou seja, $\alpha = \frac{3}{5} \cdot 2\pi = \frac{6\pi}{5}$.

c) Falso.



Ilustrações: Acervo da Editora

Com três movimentos, a esfera dá uma volta completa no disco. Logo, ela percorre:

$2\pi \cdot 10 = 20\pi \rightarrow 20\pi$ cm

d) Verdadeiro.

- Iniciando no 1:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow \ldots$

- Iniciando no 2:

$2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \ldots$

- Iniciando no 3:

$3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow \ldots$

- Iniciando no 4:

$4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow \ldots$

- Iniciando no 5:

$5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow \ldots$

Portanto, a esfera não passa na posição 5 se ela não iniciar nessa posição.

e) Verdadeira. No item anterior, podemos observar que a esfera passa pela posição 4 independentemente da sua posição inicial.

Relação fundamental da trigonometria na circunferência trigonométrica

a) $\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} + \cos\alpha = \frac{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$

b) $\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{\cos^3\alpha}{\text{sen}\alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^3\alpha}{\text{sen}\alpha} =$

$= \frac{\cos\alpha(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\text{sen}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$

c) $\frac{\text{sen}^3\alpha}{\cos^2\alpha} + \text{sen}\alpha = \frac{\text{sen}^3\alpha + \text{sen}\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} =$

$= \frac{\text{sen}\alpha(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha} = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos^2\alpha}$

19. Possível resposta:

a) 1 e 15; 2 e 16; 5 e 19; 8 e 22; 10 e 24

b) 7 e 9; 4 e 12; 1 e 15; 16 e 28

c) 2 e 28; 5 e 25; 8 e 22; 10 e 20

20. a) $\begin{array}{l|l} 1\,100 & 360 \\ \underbrace{20}_{\substack{1^{a}\text{ determinação}\\ \text{positiva}}} & 3 \end{array}$

Como 20° está no 1º quadrante, o sinal do seno e do cosseno do arco é positivo.

b) $\begin{array}{l|l} 930 & 360 \\ \underbrace{210}_{\substack{1^{a}\text{ determinação}\\ \text{positiva}}} & 2 \end{array}$

Como 210° está no 3º quadrante, o sinal do seno e do cosseno do arco é negativo.

c) $\begin{array}{l|l} 2\,300 & 360 \\ \underbrace{140}_{\substack{1^{a}\text{ determinação}\\ \text{positiva}}} & 6 \end{array}$

Como 140° está no 2º quadrante, o sinal do seno e do cosseno do arco é, respectivamente, positivo e negativo.

d) Como $\frac{5\pi}{3}$ está no 4º quadrante, o sinal do seno e do cosseno do arco é, respectivamente, negativo e positivo.

e) $\frac{15\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}+\frac{8\pi}{4}=\underbrace{\frac{7\pi}{4}}_{\substack{1^{a}\text{ determinação}\\ \text{positiva}}}+2\pi$

Como $\frac{7\pi}{4}$ está no 4º quadrante, o sinal do seno e do cosseno do arco é, respectivamente, negativo e positivo.

f) $\frac{13\pi}{5}=\frac{3\pi}{5}+\frac{10\pi}{5}=\underbrace{\frac{3\pi}{5}}_{\substack{1^{a}\text{ determinação}\\ \text{positiva}}}+2\pi$

Como $\frac{3\pi}{5}$ está no 2º quadrante, o sinal do seno e do cosseno é, respectivamente, positivo e negativo.

21. a) 3º ou 4º quadrante

b) 1º ou 4º quadrante

c) 1º ou 2º quadrante

d) 2º ou 3º quadrante

e) 3º ou 4º quadrante

f) 1º ou 4º quadrante

22. a) $\text{sen}150° = \text{sen}(180° - 150°) = \text{sen}30° = \frac{1}{2}$

b) $\frac{13\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+\frac{12\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2\cdot 2\pi$

$\cos\frac{13\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

c) $\text{sen}\frac{4\pi}{3}=-\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}-\pi\right)=-\text{sen}\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos225° = -\cos(225° - 180°) = -\cos45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\text{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

23. a) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, logo, $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

b) $\text{sen}\alpha=-\frac{1}{2}$ e α está no 4º quadrante, logo, $\alpha=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$.

c) Se $\cos\alpha=-1$, então α é côngruo ao arco de medida π.

Logo, não existe $\alpha\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ com $\cos\alpha=-1$.

d) $\text{sen}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e α está no 2º quadrante, logo, $\alpha=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

24. $2\text{sen}^2 x+2\cos^2 x-5=2\left(\text{sen}^2 x+\cos^2 x\right)-5=2\cdot1-5=-3$

Portanto, a alternativa correta é **b**.

25. a) $\dfrac{\text{sen}\pi+2\text{sen}\frac{\pi}{2}}{\cos\pi+2\cos\frac{\pi}{2}}=\dfrac{0+2\cdot1}{(-1)+2\cdot0}=\dfrac{2}{-1}=-2$

b) ▪ $\text{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

▪ $\cos\frac{2\pi}{3}=-\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

▪ $\text{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

▪ $\cos\frac{5\pi}{3}=\cos\left(2\pi-\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

Assim:

$$\dfrac{\text{sen}\frac{\pi}{6}+\cos\frac{2\pi}{3}+2\text{sen}\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{5\pi}{3}}=\dfrac{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$$

c) ▪ $\text{sen}\frac{7\pi}{12}=\text{sen}\left(\pi-\frac{7\pi}{12}\right)=\text{sen}\frac{5\pi}{12}$

▪ $\cos\frac{19\pi}{12}=\cos\left(2\pi-\frac{19\pi}{12}\right)=\cos\frac{5\pi}{12}$

▪ $\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\frac{7\pi}{12}=-\cos\left(\pi-\frac{7\pi}{12}\right)=-\cos\frac{5\pi}{12}$

Assim:

$$\text{sen}\frac{5\pi}{12}\cdot\text{sen}\frac{7\pi}{12}-\cos\frac{19\pi}{12}\cdot\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)=$$

$$=\text{sen}\frac{5\pi}{12}\cdot\text{sen}\frac{5\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}\cdot\left(-\cos\frac{5\pi}{12}\right)=$$

$$=\text{sen}^2\frac{5\pi}{12}+\cos^2\frac{5\pi}{12}=1$$

26. a) ▪ $\begin{array}{l|l} 820 & 360 \\ \underbrace{100}_{\substack{1^{a}\text{ determinação}\\ \text{positiva}}} & 2 \end{array}$

$\text{sen}820° = \text{sen}100° = \text{sen}(180° - 100°) = \text{sen}80°$

▪ $\begin{array}{l|l} 480 & 360 \\ \underbrace{120}_{\substack{1^{a}\text{ determinação}\\ \text{positiva}}} & 1 \end{array}$

$\cos480° = \cos120° = -\cos(180° - 120°) = -\cos60°$

Assim:

$P = \text{sen}820° \cdot \cos480° = \text{sen}80° \cdot (-\cos60°)$

P é negativo.

b) ▪ $\frac{34\pi}{9}=\frac{16\pi}{9}+\frac{18\pi}{9}=\underbrace{\frac{16\pi}{9}}_{\substack{1^{a}\text{ determinação}\\ \text{positiva}}}+2\pi$

$\cos\frac{34\pi}{9}=\cos\frac{16\pi}{9}=\cos\left(2\pi-\frac{16\pi}{9}\right)=\cos\frac{2\pi}{9}$

▪ $\frac{62\pi}{9}=\frac{8\pi}{9}+\frac{54\pi}{9}=\underbrace{\frac{8\pi}{9}}_{\substack{1^{a}\text{ determinação}\\ \text{positiva}}}+3\cdot2\pi$

$$\cos\frac{62\pi}{9}=\cos\frac{8\pi}{9}=-\cos\left(\pi-\frac{8\pi}{9}\right)=-\cos\frac{\pi}{9}$$

Assim:

$$P=\cos\frac{34\pi}{9}\cdot\cos\frac{62\pi}{9}=\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{9}\right)$$

P é negativo.

c) ▪ $\frac{11\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+\frac{8\pi}{4}=\underbrace{\frac{3\pi}{4}}_{\text{1ª determinação positiva}}+2\pi$

$$\text{sen}\frac{11\pi}{4}=\text{sen}\frac{3\pi}{4}=\text{sen}\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)=\text{sen}\frac{\pi}{4}$$

▪ $\frac{29\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+\frac{24\pi}{6}=\underbrace{\frac{5\pi}{6}}_{\text{1ª determinação positiva}}+2\cdot2\pi$

$$\text{sen}\frac{29\pi}{6}=\text{sen}\frac{5\pi}{6}=\text{sen}\left(\pi-\frac{5\pi}{6}\right)=\text{sen}\frac{\pi}{6}$$

Assim:

$$P=\text{sen}\frac{11\pi}{4}\cdot\text{sen}\frac{29\pi}{6}=\text{sen}\frac{\pi}{4}\cdot\text{sen}\frac{\pi}{6}$$

P é positivo.

d) ▪ $1\,035 \; \underline{|360}$

$\underbrace{315}_{\text{1ª determinação positiva}} \quad 2$

$\cos 1\,035° = \cos 315° = \cos(360° - 315°) = \cos 45°$

▪ $\text{sen}120° = \text{sen}(180° - 120°) = \text{sen}60°$

Assim:

$P = \cos 1\,035° \cdot \text{sen}120° = \cos 45° \cdot \text{sen}60°$

P é positivo.

27. Pela definição de módulo, $|\text{sen}\,x| = \text{sen}\,x$ se $\text{sen}\,x \geq 0$, ou seja, se $2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

28. a) ▪ para x com extremidade no 1º quadrante:

$x = 60° + k\cdot360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

▪ para x com extremidade no 4º quadrante:

$x = (360° - 60°) + k\cdot360° = 300° + k\cdot360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) ▪ para x com extremidade no 1º quadrante:

$x = 60° + k\cdot360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

▪ para x com extremidade no 2º quadrante:

$x = (180° - 60°) + k\cdot360° = 120° + k\cdot360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

c) ▪ para x com extremidade no 1º quadrante:

$x = 45° + k\cdot360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

▪ para x com extremidade no 2º quadrante:

$x = (180° - 45°) + k\cdot360° = 135° + k\cdot360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

d) ▪ para x com extremidade no 2º quadrante:

$x = (180° - 30°) + k\cdot360° = 150° + k\cdot360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

▪ para x com extremidade no 3º quadrante:

$x = (180° + 30°) + k\cdot360° = 210° + k\cdot360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

e) ▪ para x com extremidade no 2º quadrante:

$x = (180° - 45°) + k\cdot360° = 135° + k\cdot360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

▪ para x com extremidade no 3º quadrante:

$x = (180° + 45°) + k\cdot360° = 225° + k\cdot360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

f) ▪ para x com extremidade no 3º quadrante:

$x = (180° + 30°) + k\cdot360° = 210° + k\cdot360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

▪ para x com extremidade no 4º quadrante:

$x = (360° - 30°) + k\cdot360° = 330° + k\cdot360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

29. Temos $\text{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ e, quanto mais próximo um arco x estiver de $\frac{\pi}{2}$, mais próximo $\text{sen}\,x$ estará de 1, com $\text{sen}\,x \leq 1$. Como 1,6 está mais próximo de $\frac{\pi}{2}$ que 1,5, temos $\text{sen}1{,}5 < \text{sen}1{,}6 < 1$, ou seja, $B < A < \text{sen}\frac{\pi}{2}$.

Portanto, a alternativa correta é **e**.

30. a) 2º ou 4º quadrante
b) 1º ou 3º quadrante
c) 1º ou 3º quadrante
d) 2º ou 4º quadrante
e) 2º ou 4º quadrante
f) 1º ou 3º quadrante

31. a) $\frac{7\pi}{2} < x > 4\pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < x - 2\pi < 2\pi$

$\text{tg}(x - 2\pi) = \text{tg}\,x = -\sqrt{3}$ e $x - 2\pi$ está no 4º quadrante, logo:

$x - 2\pi = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{3}$

b) $\frac{5\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq x - 2\pi \leq \frac{3\pi}{2}$

Como $\text{tg}\,x = 0$, temos:

$x - 2\pi = \pi \Rightarrow x = 3\pi$

c) $\frac{9\pi}{2} < x < \frac{11\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x - 4\pi < \frac{3\pi}{2}$

$\text{tg}(x - 4\pi) = \text{tg}\,x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $x - 4\pi$ está no 2º quadrante, logo:

$x - 4\pi = \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{29\pi}{6}$

d) $\frac{7\pi}{2} < x < 4\pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < x - 2\pi < 2\pi$

$\text{tg}(x - 2\pi) = \text{tg}\,x = -1$ e $x - 2\pi$ está no 4º quadrante, logo:

$x - 2\pi = 2\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{15\pi}{4}$

e) $4\pi < x < \frac{9\pi}{2} \Rightarrow 0 < x - 4\pi < \frac{\pi}{2}$

$\text{tg}(x - 4\pi) = \text{tg}\,x = \sqrt{3}$ e $x - 4\pi$ está no 1º quadrante, logo:

$x - 4\pi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{13\pi}{3}$

f) $5\pi < x < 6\pi \Rightarrow \pi < x - 4\pi < 2\pi$

$\text{tg}(x - 4\pi) = \text{tg}\,x = 1$ e $x - 4\pi$ está no 3º quadrante, logo:

$x - 4\pi = \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{21\pi}{4}$

32. Pela definição de módulo, $|\text{tg}\,x| = \text{tg}\,x$ se $\text{tg}\,x \geq 0$, ou seja, se $2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $2k\pi + \pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

33.

α	$tg\alpha$
30°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	1
60°	$\sqrt{3}$
120°	$-\sqrt{3}$
135°	-1
150°	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
210°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
225°	1
240°	$\sqrt{3}$
300°	$-\sqrt{3}$
315°	-1
330°	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

34. a) Como o triângulo é isósceles, temos $x = med(B\hat{A}O) = med(A\hat{B}O)$. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, temos:

$90° + x + x = 180° \Rightarrow 2x = 90° \Rightarrow x = 45°$

Portanto, $med(A\hat{O}B) = 90°$ e $med(B\hat{A}O) = med(A\hat{B}O) = 45°$.

b) Note que os triângulos AOC e BOC, em que **C** é a interseção de $\overline{AB}$ com o eixo x, são triângulos retângulos isósceles. Como $OC = 1$, então:

$AB = AC + CB = 1 + 1 = 2$

Utilizando o Teorema de Pitágoras:

$OA^2 = OC^2 + CA^2 \Rightarrow OA^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow OA^2 = 2 \Rightarrow OA = \sqrt{2}$

$OB^2 = OC^2 + CB^2 \Rightarrow OB^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow OB^2 = 2 \Rightarrow OB = \sqrt{2}$

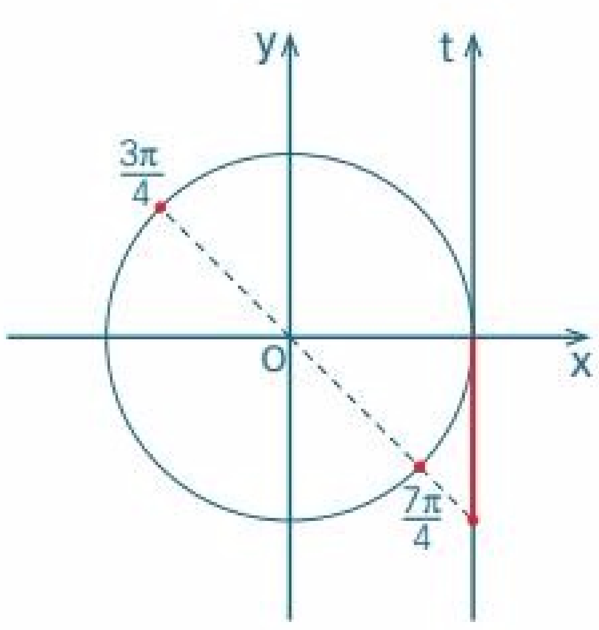
- área do triângulo ABO:

$\frac{AB \cdot OC}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1 \rightarrow 1$ u.a.

- perímetro do triângulo ABO:

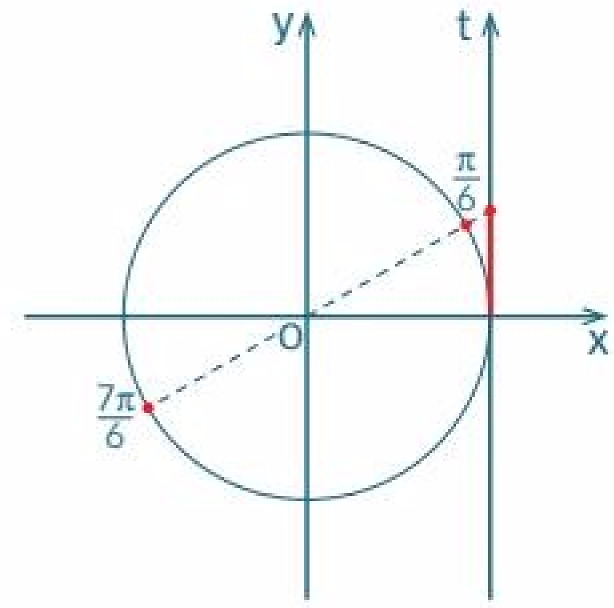
$OA + AB + OB = \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} \rightarrow 2 + 2\sqrt{2}$ u

35. a)



$\frac{3\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

b)



Ilustrações: Acervo da Editora

$\frac{\pi}{6} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

36. a) $-tg^2(\pi - \alpha) \cdot cos^2(2\pi - \alpha) - cos^2(\pi + \alpha) =$

$= -(-tg\alpha)^2 \cdot cos^2\alpha - (-cos\alpha)^2 =$

$= -tg^2\alpha \cdot cos^2\alpha - cos^2\alpha =$

$= -\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} \cdot cos^2\alpha - cos^2\alpha =$

$= -sen^2\alpha - cos^2\alpha = -1$

b) $\frac{tg(\pi + \alpha) \cdot 4cos(2\pi - \alpha)}{2sen(\pi + \alpha)} = \frac{tg\alpha \cdot 4cos\alpha}{2(-sen\alpha)} =$

$= -\frac{\frac{sen\alpha}{cos\alpha} \cdot 4cos\alpha}{2sen\alpha} = -\frac{4sen\alpha}{2sen\alpha} = -2$

c) $\frac{cos^2(2\pi - \alpha) \cdot tg(2\pi - \alpha)}{-sen\alpha \cdot cos(\pi + \alpha)} = \frac{cos^2\alpha \cdot (-tg\alpha)}{-sen\alpha \cdot (-cos\alpha)} =$

$= \frac{cos\alpha \cdot \left(-\frac{sen\alpha}{cos\alpha}\right)}{-sen\alpha \cdot (-1)} = \frac{-sen\alpha}{sen\alpha} = -1$

d) $\frac{sen(\pi - \alpha) \cdot tg\alpha}{cos\alpha \cdot tg^2(\pi + \alpha)} = \frac{sen\alpha \cdot tg\alpha}{cos\alpha \cdot tg^2\alpha} =$

$= \frac{sen\alpha}{cos\alpha \cdot tg\alpha} = tg\alpha \cdot \frac{1}{tg\alpha} = 1$

37. a) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow cos^2\alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow cos\alpha = \pm\frac{3}{5}$

Como $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, temos $cos\alpha \leq 0$, logo:

- $cos\alpha = -\frac{3}{5}$
- $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$

b) $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow cos^2\alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} \Rightarrow cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{8}}{3} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Como $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, temos $cos\alpha \geq 0$, logo:

- $cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
- $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = 1-\frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow \cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Como $\pi \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$, temos $\cos\alpha \le 0$, logo:

- $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

38. A equação $\text{tg}\,\alpha = 3m-12$ possui solução no 2º quadrante se, e somente se, $3m-12<0$, ou seja:
$3m<12 \Rightarrow m<4$

Conexão tecnológica

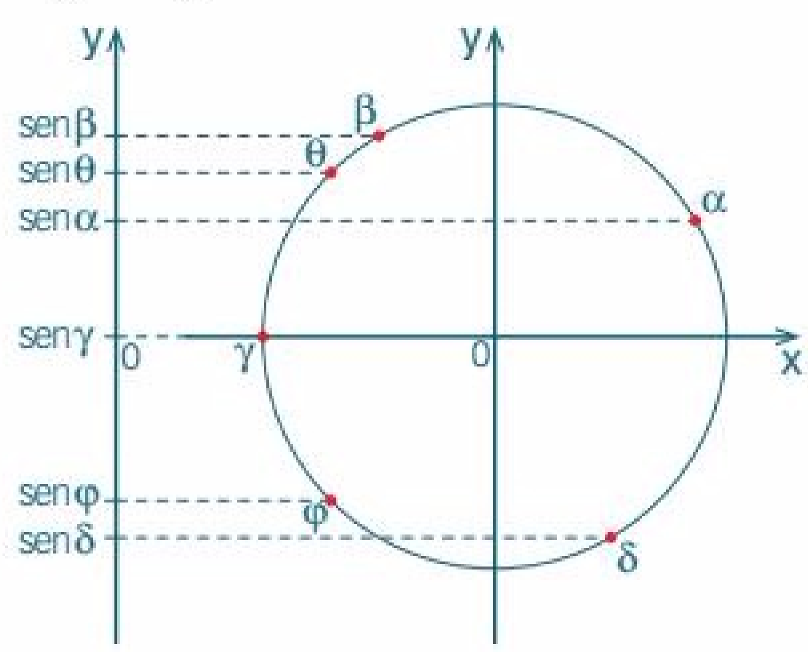
1. a) $\cos 47° \cong 0{,}682$; $\text{sen}\,47° \cong 0{,}731$
   b) $\cos 105° \cong -0{,}259$; $\text{sen}\,105° \cong 0{,}966$
   c) $\cos 173° \cong -0{,}993$; $\text{sen}\,173° \cong 0{,}122$
   d) $\cos 227° \cong -0{,}682$; $\text{sen}\,227° \cong -0{,}731$
   e) $\cos 352° \cong 0{,}990$; $\text{sen}\,352° \cong -0{,}139$
2. a) $\alpha \cong 63{,}3°$ e $\alpha \cong 296{,}7°$
   b) $\alpha \cong 240{,}5°$ e $\alpha \cong 299{,}5°$

Unidade 2

Funções, relações, equações e transformações trigonométricas

1. a) $\text{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\text{sen}\,3\pi=0$
   b) $\text{sen}\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\text{sen}\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2}$
   c) $\text{sen}\frac{11\pi}{6}=-\frac{1}{2}$ f) $\text{sen}\,8\pi=0$

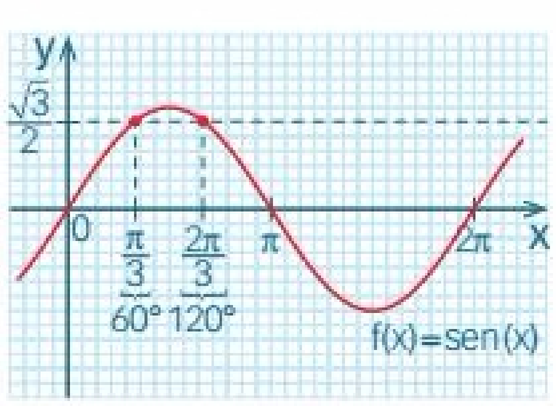
2.



$\text{sen}\,\delta < \text{sen}\,\varphi < \text{sen}\,\gamma < \text{sen}\,\alpha < \text{sen}\,\theta < \text{sen}\,\beta$

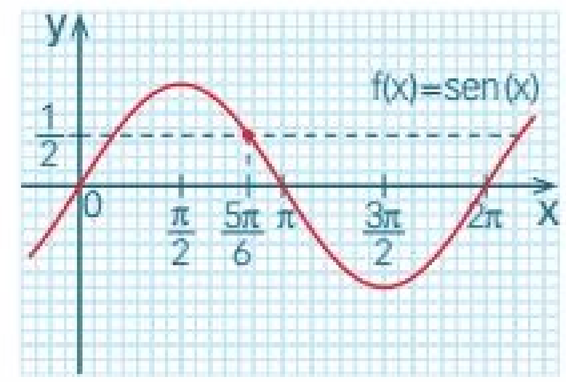
Logo $\text{sen}\,\alpha=\frac{1}{2}$, $\text{sen}\,\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{sen}\,\gamma=0$, $\text{sen}\,\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{sen}\,\delta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. a)



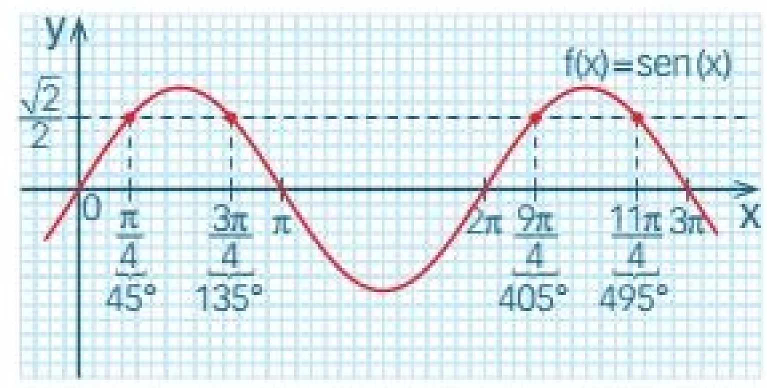
$x=60°$ ou $x=120°$

b)



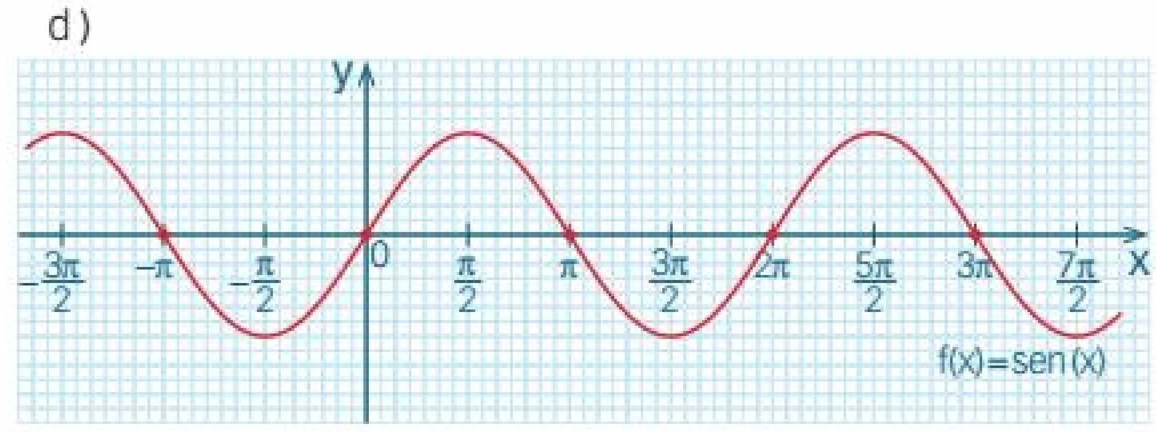
$x=\frac{5\pi}{6}$

c)



$x=45°$, $x=135°$, $x=405°$ ou $x=495°$

d)



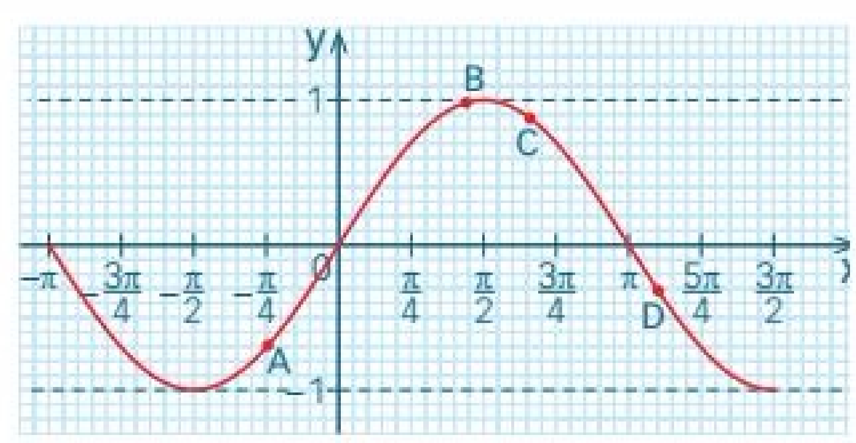
$x=-\pi$, $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$ ou $x=3\pi$

4. $-1 \le \text{sen}\,x \le 1 \Rightarrow -1 \le 2m-9 \le 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow -1+9 \le 2m \le 1+9 \Rightarrow 8 \le 2m \le 10 \Rightarrow 4 \le m \le 5$

Portanto, os valores reais de m tal que exista solução para a equação pertencem ao conjunto $\{m \in \mathbb{R};\ 4 \le m \le 5\}$.

Portanto, a alternativa correta é **e**.

5.



Ilustrações: Acervo da Editora

6 ▪ $f(1)=100+0{,}5\cdot 1+3\cdot \text{sen}\frac{\pi\cdot 1}{6}=100{,}5+3\cdot\frac{1}{2}=102 \rightarrow 102$ t

▪ $f(2)=100+0{,}5\cdot 2+3\cdot \text{sen}\frac{\pi\cdot 2}{6}=101+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=$
$\cong 101+3\cdot\frac{1{,}7}{2}=103{,}55 \rightarrow 103{,}55$ t

▪ $f(3)=100+0{,}5\cdot 3+3\cdot \text{sen}\frac{\pi\cdot 3}{6}=$
$=101{,}5+3\cdot 1=104{,}5 \rightarrow 104{,}5$ t

$\overbrace{102}^{f(1)}+\overbrace{103{,}55}^{f(2)}+\overbrace{104{,}5}^{f(3)}=310{,}05 \rightarrow 310{,}05$ t

Portanto, a alternativa correta é **d**.

7. Considerando os valores apresentados no esquema do início da unidade, temos:
   a) Após 5 voltas completas a cabine 4 ocupará a mesma posição inicial, ou seja, sua altura será:
   $h(4) \cong 136{,}76 \rightarrow$ aproximadamente 136,76 m

b) Após $\frac{1}{2}$ volta a cabine 20 ocupará a posição inicial da cabine 6, ou seja, sua altura será:

$h(6) \simeq 157{,}57 \rightarrow$ aproximadamente 157,57 m

c) Após $1\frac{1}{4}$ de volta a cabine 16 ocupará a posição inicial da cabine 23, ou seja, sua altura será:

$h(23) \simeq 16{,}88 \rightarrow$ aproximadamente 16,88 m

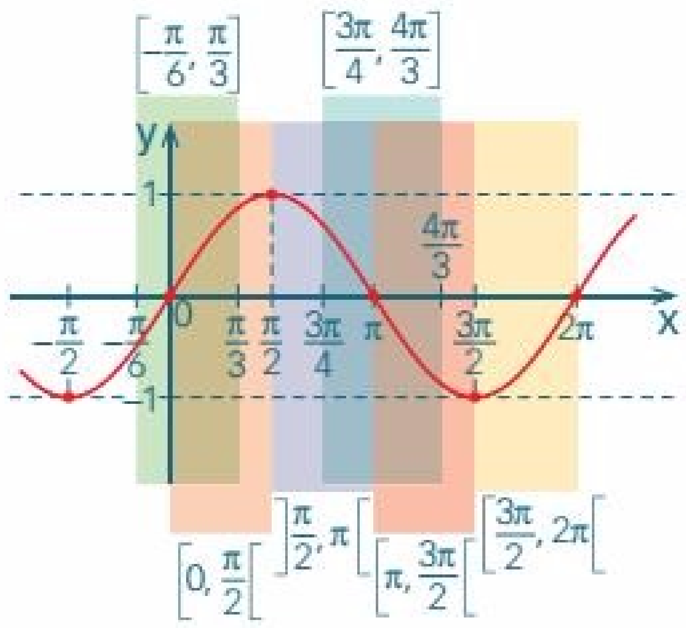
d) Após um giro de 270° a cabine 25 ocupará a posição inicial da cabine 18, ou seja, sua altura será:

$h(18) \simeq 43{,}24 \rightarrow$ aproximadamente 43,24 m

e) Após um giro de aproximadamente 77,14° a cabine 11 ocupará a posição inicial da cabine 17, ou seja, sua altura será:

$h(17) \simeq 57{,}46 \rightarrow$ aproximadamente 57,46 m

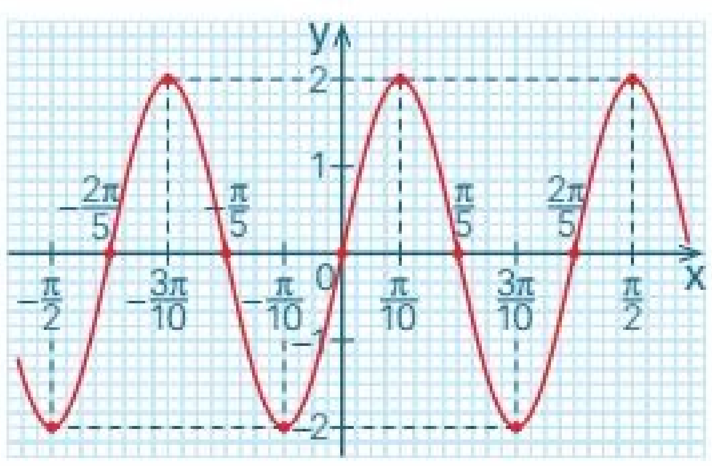
8.



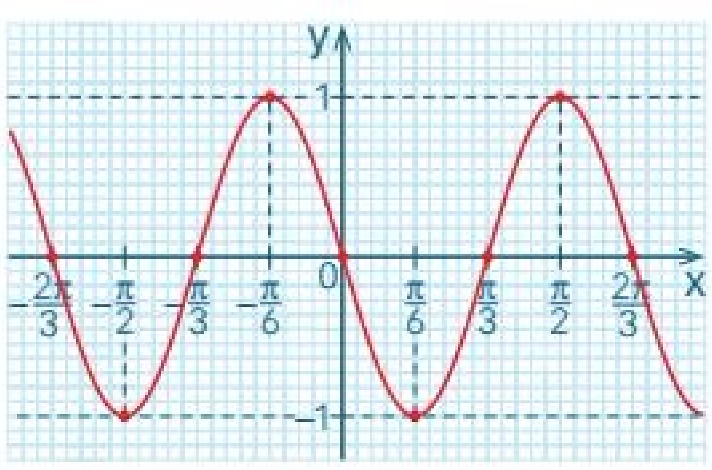
a) crescente
b) decrescente
c) crescente
d) decrescente
e) decrescente
f) crescente

9. a–III; b–II; c–I

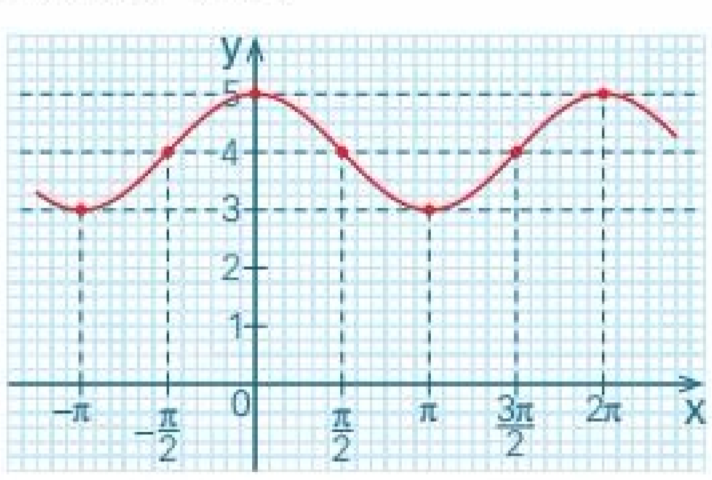
10. a) $p = \frac{2\pi}{5}$; $Im(f) = [-2, 2]$



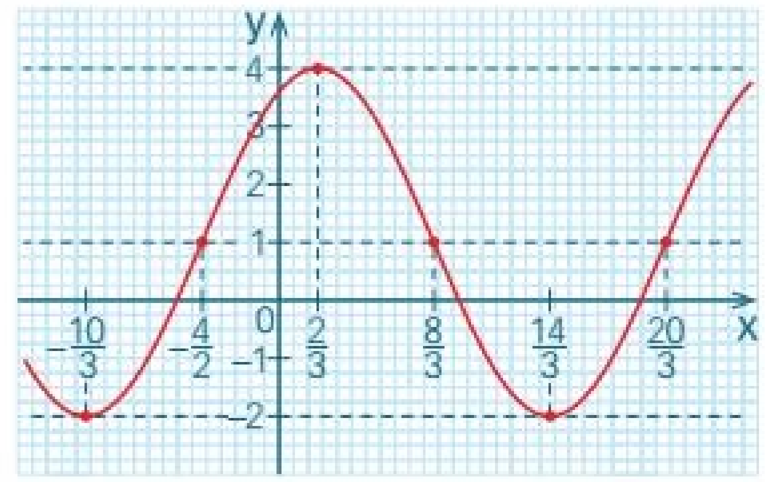
b) $p = \frac{2\pi}{3}$; $Im(g) = [-1, 1]$



c) $p = 2\pi$; $Im(m) = [3, 5]$



d) $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 2\pi \cdot \frac{4}{\pi} = 8$; $Im(n) = [-2, 4]$



11. a) $p = 3\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|k|} = 3\pi \Rightarrow |k| = \frac{2\pi}{3\pi} \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$ ou $k = -\frac{2}{3}$

b) $p = 8\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{k}\right|} = 8\pi \Rightarrow \left|\frac{1}{k}\right| = \frac{2\pi}{8\pi} \Rightarrow |k| = 4 \Leftrightarrow k = 4$ ou $k = -4$

c) $p = \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{\left|\frac{k}{3}\right|} = \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \left|\frac{k}{3}\right| = \frac{4\pi}{7\pi} \Rightarrow |k| = \frac{12}{7} \Leftrightarrow k = \frac{12}{7}$ ou $k = -\frac{12}{7}$

12. a) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}\right\}$

b) Como a função $g(x) = \operatorname{sen} x$ possui imagem igual a $[-1, 1]$ e a função f possui imagem igual a $[-2{,}5; 2{,}5]$, segue que $|b| = 2{,}5$. Além disso, o período de f é $p = \pi$, logo:

$p = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|c|} = |c| = 2$

Segue que:

- Para $b = 2{,}5$:

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2{,}5 \Rightarrow 2{,}5\operatorname{sen}\left(\frac{c\pi}{4}\right) = 2{,}5 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{c\pi}{4}\right) = 1$

Como $|c| = 2$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{c\pi}{4}\right) = 1$, devemos ter $c = 2$.

- Para $b = -2{,}5$:

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2{,}5 \Rightarrow -2{,}5\operatorname{sen}\left(\frac{c\pi}{4}\right) = 2{,}5 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{c\pi}{4}\right) = -1$

Como $|c| = 2$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{c\pi}{4}\right) = -1$, devemos ter $c = -2$.

13. - afirmativa 1:

$p = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{365}} = \frac{2\pi}{1} \cdot \frac{365}{2\pi} = 365$

- afirmativa 2:

O pôr do sol ocorrerá mais cedo quando f assumir o menor valor possível, ou seja, quando $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}t\right) = 1$. Assim:

$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}t\right) = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{365}t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{365}{2\pi} = 91{,}25$

Portanto, o pôr do sol ocorrerá mais cedo entre o 91º e 92º dias do ano, ou seja, entre 1 e 2 de abril.

- afirmativa 3:

$f(91{,}25) = 18{,}8 - 1{,}3 \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365} \cdot 91{,}25\right)}_{1} =$

$= 18{,}8 - 1{,}3 = 17{,}5 \rightarrow$ 17h30min

Logo, são verdadeiras as afirmativas 2 e 3.

Portanto, a alternativa correta é **d**.

14. $p = \frac{2\pi}{50} \simeq 0{,}1257 \rightarrow$ aproximadamente 0,1257s

Para determinar a frequência cíclica desse circuito, efetuamos:

$f = \frac{1}{0{,}1257} \simeq 7{,}9554 \rightarrow$ aproximadamente 7,9554 Hz

15. Resposta esperada: A função h é do tipo $g(x)=a+b\cdot \text{sen}(cx)$ e como $a=90>0$, $|b|=|75|>1$ e $|c|=\left|\frac{90}{7}\right|>1$ segue que o gráfico de h corresponde ao gráfico de $f(x)=\text{sen}\,x$ transladado 90 unidades para cima, ampliado verticalmente, com o intervalo da imagem medindo 75 vezes o comprimento do intervalo da imagem de f, comprimido horizontalmente e com período igual a $\frac{7\pi}{45}$.

16. Da igualdade $\cos z=\text{sen}\left(z+\frac{\pi}{2}\right)$, temos para $z=x+\pi$:

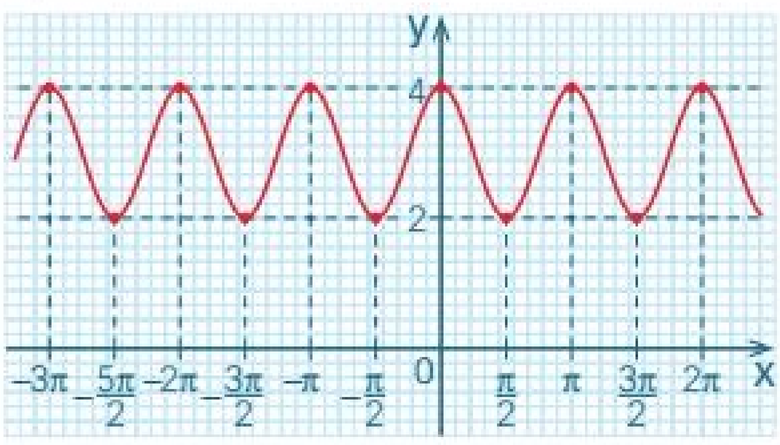
$$\cos\underbrace{(x+\pi)}_{z}=\text{sen}\left(\underbrace{(x+\pi)}_{z}+\frac{\pi}{2}\right)=\text{sen}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$$

Assim:

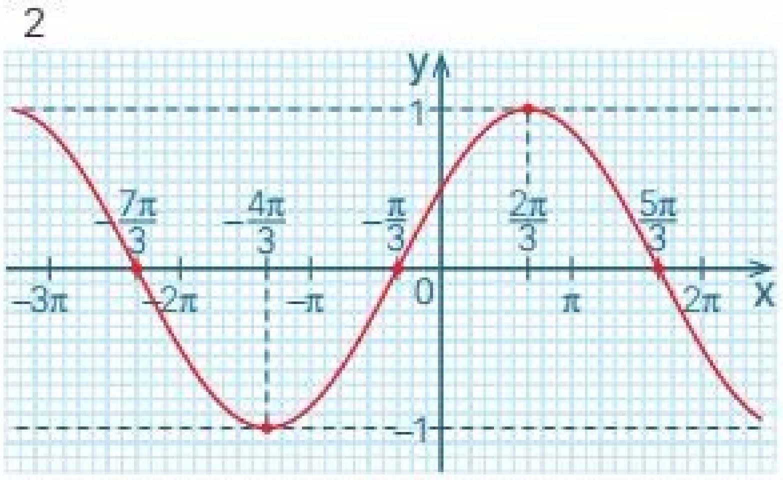
$$\underbrace{-5+3\cdot\cos(x+\pi)}_{g(x)}=\underbrace{-5+3\cdot\text{sen}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)}_{f(x)}$$

Portanto, $g(x)=-5+3\cdot\cos(x+\pi)$ é uma possível lei de formação da função procurada.

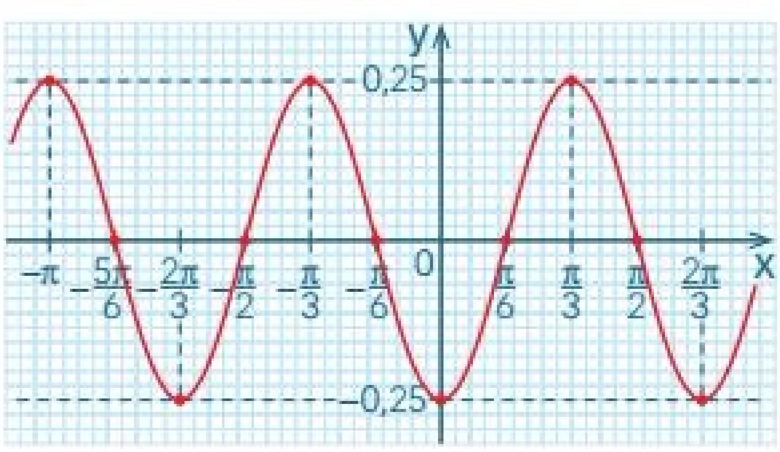
17. a) $p=\frac{2\pi}{2}=\pi$; $\text{Im}(f)=[2,4]$



b) $p=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=\frac{2\pi}{1}\cdot\frac{2}{1}=4\pi$; $\text{Im}(g)=[-1,1]$



c) $p=\frac{2\pi}{3}$; $\text{Im}(m)=\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$



18. A função r alcançará seu máximo quando seu denominador alcançar seu mínimo, ou seja, quando $\cos(0{,}06t)=-1$. Temos:

$$\cos(0{,}06t)=-1\Rightarrow 0{,}06t=\pi\Rightarrow t=\frac{\pi}{0{,}06}$$

Analogamente r alcançará seu mínimo quando o denominador alcançar seu máximo, ou seja, $\cos(0{,}06t)=1$. Temos:

$$\cos(0{,}06t)=1\Rightarrow 0{,}06t=0\Rightarrow t=0$$

Desse modo, temos:

$$S=r\left(\frac{\pi}{0{,}06}\right)+r(0)=\frac{5\,865}{1+0{,}15\cdot(-1)}+\frac{5\,865}{1+0{,}15\cdot 1}=$$
$$=6\,900+5\,100=12\,000\rightarrow 12\,000\text{ km}$$

Portanto, a alternativa correta é **b**.

19. ▪ $f(\pi)=\frac{5}{4}+2\cdot\cos\pi=\frac{5}{4}+2\cdot(-1)=-\frac{3}{4}$

Portanto, $P\left(\pi,-\frac{3}{4}\right)$.

▪ $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{5}{4}+2\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{5}{4}+2\cdot 0=\frac{5}{4}\rightarrow Q\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5}{4}\right)$

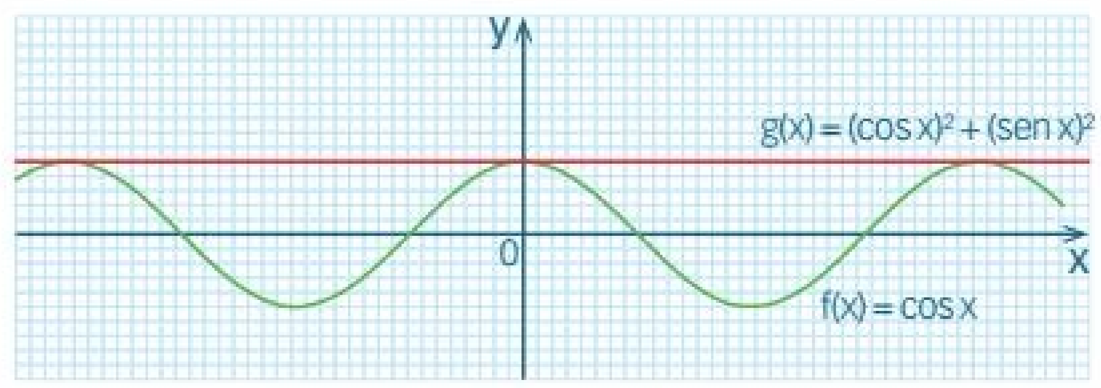
▪ $f(2\pi)=\frac{5}{4}+2\cdot\cos 2\pi=\frac{5}{4}+2\cdot 1=\frac{13}{4}\rightarrow R\left(2\pi,\frac{13}{4}\right)$

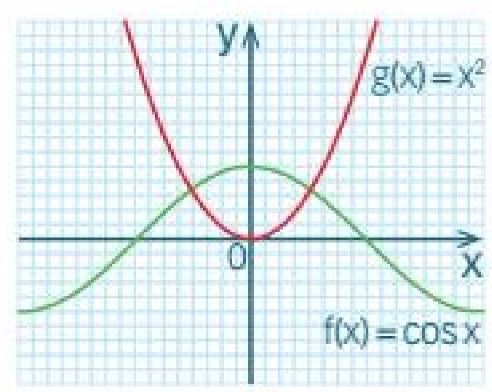
20. ▪ $x(0)=\cos\left(\pi\cdot 0+\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$

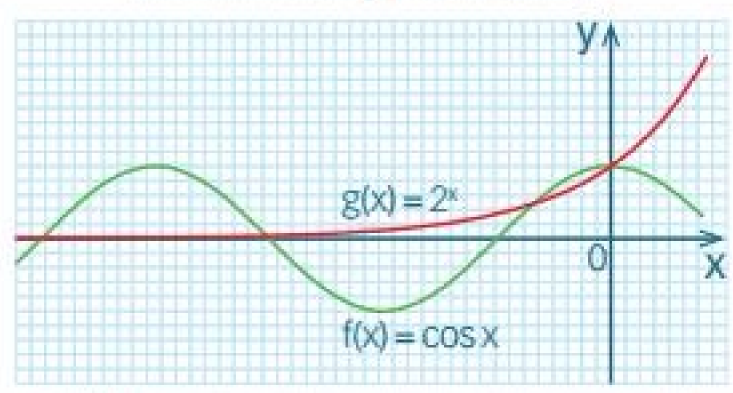
▪ $x(1)=\cos\left(\pi\cdot 1+\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)=0$

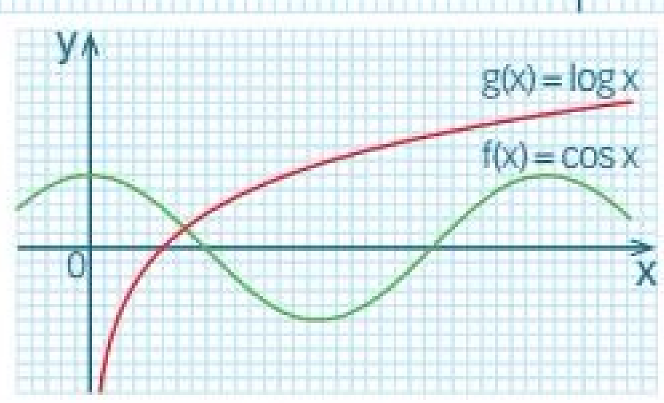
Isso exclui as alternativas **c**, **d** e **e**. Além disso, para t variando de 0 a 1, $\pi t+\frac{3\pi}{2}$ varia de $\frac{3\pi}{2}$ a $\frac{5\pi}{2}$. Nesse intervalo a função cosseno apresenta um crescimento, chega a um pico e, em seguida, decresce. Esse é o comportamento apresentado pelo gráfico da alternativa **b**.
Portanto, a alternativa correta é **b**.

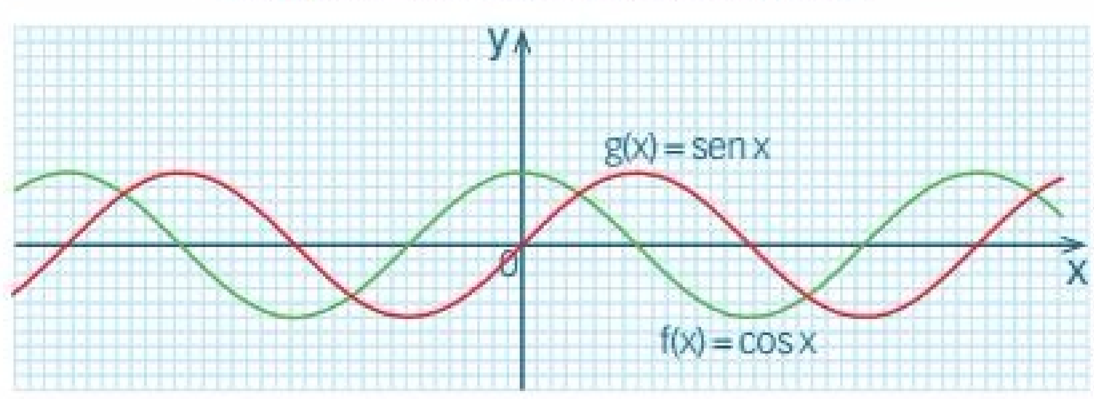
21. Esboçando os gráficos de $g(x)=(\cos x)^2+(\text{sen}\,x)^2$, $g(x)=x^2$, $g(x)=2^x$, $g(x)=\log x$ e $g(x)=\text{sen}\,x$, temos:











Ilustrações: Acervo da Editora

Note que a única função que possui dois pontos em comum com f, é $g(x)=x^2$.

Portanto, a alternativa correta é **b**.

22. Lembrando que $\cos 0=1$ e o período é de 2π.
Portanto, a alternativa correta é **c**.

23. $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Substituindo $\text{sen}\alpha = 4\cos\alpha$ temos:

$$(4\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 16\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{17} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{17}} \simeq 0{,}243 \text{ ou}$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{17}} \simeq -0{,}243 \Rightarrow \alpha \simeq 75{,}94° \text{ ou } \alpha \simeq 255{,}94°$$

Duração do período de incidência de luz solar

a) ▪ 21/02: $t = 3 \cdot \underbrace{1}_{\substack{\text{meses}\\\text{transcorridos}}} + 2 = 5$

$$D(5) = 12{,}1 + 1{,}6 \cdot \cos\left(\underbrace{\frac{\pi}{18}(5+1)}_{\frac{\pi}{3}}\right) =$$

$$= 12{,}1 + 1{,}6 \cdot 0{,}5 = 12{,}9 \rightarrow 12\,\text{h}\,54$$

▪ 11/05: $t = 3 \cdot \underbrace{4}_{\substack{\text{meses}\\\text{transcorridos}}} + 1 = 13$

$$D(13) = 12{,}1 + 1{,}6 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{18}(13+1)\right) \simeq$$

$$\simeq 12{,}1 + 1{,}6 \cdot (-0{,}766) = 10{,}8744 \rightarrow$$

$\rightarrow$ aproximadamente 10 h 53

▪ 11/09: $t = 3 \cdot \underbrace{8}_{\substack{\text{meses}\\\text{transcorridos}}} + 1 = 25$

$$D(25) = 12{,}1 + 1{,}6 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{18}(25+1)\right) \simeq$$

$$\simeq 12{,}1 + 1{,}6 \cdot (-0{,}174) = 11{,}8216 \rightarrow$$

$\rightarrow$ aproximadamente 11 h 49

▪ 21/11: $t = 3 \cdot \underbrace{10}_{\substack{\text{meses}\\\text{transcorridos}}} + 2 = 32$

$$D(32) = 12{,}1 + 1{,}6 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{18}(32+1)\right) =$$

$$= 12{,}1 + 1{,}6 \cdot 0{,}866 = 13{,}4856 \rightarrow$$

$\rightarrow$ aproximadamente 13 h 29

b) O dia mais curto ocorre quando $\cos\left(\frac{\pi}{18}(t+1)\right) = -1$. Assim, sua duração será dada por:

$12{,}1 + 1{,}6 \cdot (-1) = 10{,}5 \rightarrow 10\,\text{h}\,30$

Do mesmo modo, o dia mais longo ocorre quando $\cos\left(\frac{\pi}{18}(t+1)\right) = 1$. Nesse caso, sua duração será dada por:

$12{,}1 + 1{,}6 \cdot 1 = 13{,}7 \rightarrow 13\,\text{h}\,42$

c) $11\,\text{h}\,18 = 11{,}3\,\text{h}$

$$D(t) = 11{,}3 = 12{,}1 + 1{,}6 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{18}(t+1)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{18}(t+1)\right) = \frac{11{,}3 - 12{,}1}{1{,}6} = -0{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{18}(t+1) = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t = 11 \rightarrow 21/04 \\ \text{ou} \\ \frac{\pi}{18}(t+1) = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow t = 23 \rightarrow 21/08 \end{cases}$$

d) A função $D(t)$ oscila em torno de um determinado valor por ser do tipo trigonométrica. Esse valor corresponde à média que, nesse caso, é 12,1. Portanto, os dias em que a duração é igual à média anual correspondem aos valores de t tais que $D(t) = 12{,}1$. Temos:

$$D(t) = 12{,}1 = 12{,}1 + 1{,}6 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{18}(t+1)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{18}(t+1)\right) = \frac{12{,}1 - 12{,}1}{1{,}6} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{18}(t+1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 8 \rightarrow 21/03 \\ \text{ou} \\ \frac{\pi}{18}(t+1) = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = 26 \rightarrow 21/09 \end{cases}$$

Logo, o término do horário de verão ocorreria dia 21/03; e o início, dia 21/09.

24. a) $\text{sen}15° = \text{sen}(45° - 30°) =$

$$= \text{sen}45° \cdot \cos30° - \text{sen}30° \cdot \cos45° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

b) $\cos75° = \cos(45° + 30°) =$

$$= \cos45° \cdot \cos30° - \text{sen}45° \cdot \text{sen}30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

c) $\text{tg}105° = \text{tg}(60° + 45°) = \dfrac{\text{tg}60° + \text{tg}45°}{1 - \text{tg}60° \cdot \text{tg}45°} =$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} + 4}{-2} =$$

$$= -\left(\sqrt{3} + 2\right)$$

d) $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos x - \text{sen}\,x \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) =$

$$= (-1) \cdot \cos x - \text{sen}\,x \cdot 0 = -\cos x$$

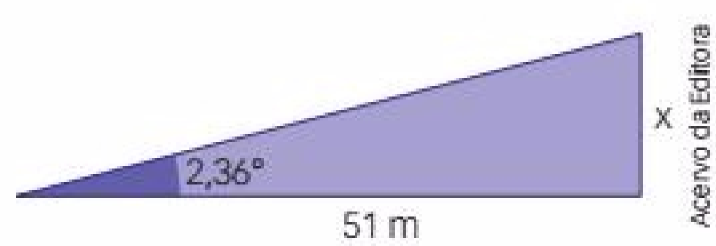
e) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos x + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{sen}\,x =$

$$= 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \text{sen}\,x = \text{sen}\,x$$

f) $\text{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1 - \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)} =$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{1 - 3} = -\sqrt{3}$$

25.



Primeiro determinamos $\text{tg}2{,}36°$:

$$\text{tg}2{,}36° = \text{tg}(5° - 2{,}64°) = \frac{\text{tg}5° - \text{tg}2{,}64°}{1 + \text{tg}5° \cdot \text{tg}2{,}64°} =$$

$$= \frac{\frac{\text{sen}5°}{\cos5°} - \frac{\text{sen}2{,}64°}{\cos2{,}64°}}{1 + \frac{\text{sen}5°}{\cos5°} \cdot \frac{\text{sen}2{,}64°}{\cos2{,}64°}} = \frac{\frac{0{,}087}{0{,}996} - \frac{0{,}046}{0{,}998}}{1 + \frac{0{,}087}{0{,}996} \cdot \frac{0{,}046}{0{,}998}} \simeq$$

$$\simeq \frac{0{,}0873 - 0{,}0461}{1 + 0{,}0873 \cdot 0{,}0461} \simeq \frac{0{,}0412}{1{,}004} \simeq 0{,}041$$

De posse desse valor, calculamos o desaprumo (x):

$$\text{tg}2{,}36° = \frac{x}{51} \Rightarrow 0{,}041 = \frac{x}{51} \Rightarrow x = 2{,}091$$

Portanto, o desaprumo é de aproximadamente 2,09 metros

26. Primeiro determinamos $\text{tg}\,58°$:

$$\text{tg}\,58° = \text{tg}(45° + 13°) = \frac{\text{tg}\,45° + \text{tg}\,13°}{1 - \text{tg}\,45° \cdot \text{tg}\,13°} =$$

$$= \frac{1 + 0{,}231}{1 - 1 \cdot 0{,}231} = \frac{1{,}231}{0{,}769} \approx 1{,}601$$

De posse desse valor determinamos a medida (h) da altura do mastro:

$$\text{tg}\,58° = \frac{h}{4} \Rightarrow 1{,}601 = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 6{,}404$$

Portanto, a medida da altura é de aproximadamente 6,4 m.

27. Vamos determinar $\text{sen}\,a$.

$$\cos^2 a + \text{sen}^2 a = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \text{sen}^2 a = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2 a = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

Como $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$ segue que $\text{sen}\,a = -\sqrt{\frac{13}{16}} = -\frac{\sqrt{13}}{4}$.

a) $\cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \cos a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{13}}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{13}}{8} = \frac{3 + \sqrt{13}}{8}$$

b) $\text{sen}\left(a - \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\,a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{sen}\left(a - \frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{13}}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}\left(a - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{13}}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{3 + \sqrt{13}}{8}$$

c) $\text{tg}\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{tg}\,a + 1}{1 - \text{tg}\,a \cdot 1} = \frac{\frac{\text{sen}\,a}{\cos a} + 1}{1 - \frac{\text{sen}\,a}{\cos a}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{tg}\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\text{sen}\,a + \cos a}{\cos a}}{\frac{\cos a - \text{sen}\,a}{\cos a}} = \frac{\text{sen}\,a + \cos a}{\cos a - \text{sen}\,a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\frac{\sqrt{13}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4} - \left(-\frac{\sqrt{13}}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3} - \sqrt{13}}{4}}{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{13}}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{13}}{\sqrt{3} + \sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{13}}{\sqrt{3} - \sqrt{13}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3 + 13 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{13}}{3 - 13} = -\frac{8 - \sqrt{39}}{5}$$

28. O valor da expressão $\frac{10}{2 - \frac{\text{sen}\,x}{3}}$ será o maior possível quando o denominador $2 - \frac{\text{sen}\,x}{3}$ assumir seu menor valor positivo. Este por sua vez assumirá seu menor valor positivo quando $\frac{\text{sen}\,x}{3}$ for o maior possível, ou seja, quando $\text{sen}\,x = 1$. Logo, o maior valor que $\frac{10}{2 - \frac{\text{sen}\,x}{3}}$ pode assumir é:

$$\frac{10}{2 - \frac{1}{3}} = \frac{10}{\frac{5}{3}} = 6$$

Portanto, a alternativa correta é **d**.

29. Como $\text{sen}(x - y) = \text{sen}\,x \cdot \cos y - \text{sen}\,y \cdot \cos x$ e $\text{sen}(x + y) = \text{sen}\,x \cdot \cos y + \text{sen}\,y \cdot \cos x$, temos:

$$\frac{1}{2}[\text{sen}(x - y) + \text{sen}(x + y)] =$$

$$= \frac{1}{2}[(\text{sen}\,x \cdot \cos y - \text{sen}\,y \cdot \cos x) + (\text{sen}\,x \cdot \cos y + \text{sen}\,y \cdot \cos x)] =$$

$$= \frac{1}{2}(2(\text{sen}\,x \cdot \cos y)) = \text{sen}\,x \cdot \cos y$$

Logo, $\text{sen}\,x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\text{sen}(x - y) + \text{sen}(x + y)]$.

Fórmulas do arco duplo e do arco metade

- $\text{sen}(2a) = 2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \cos a$:

$$\text{sen}(a + a) = \text{sen}\,a \cdot \cos a + \text{sen}\,a \cdot \cos a$$

$$\text{sen}(2a) = 2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \cos a$$

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$:

$$\cos(a + a) = \cos a \cdot \cos a - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,a$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$$

- $\text{tg}(2a) = \frac{2 \cdot \text{tg}\,a}{1 - \text{tg}^2 a}$:

$$\text{tg}(a + a) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,a}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,a}$$

$$\text{tg}(2a) = \frac{2 \cdot \text{tg}\,a}{1 - \text{tg}^2 a}$$

- $\cos(2a) = 2 \cdot \cos^2 a - 1$:

$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a$, substituindo em $\cos(2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$, segue que:

$$\cos(2a) = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$$

$$\cos(2a) = 2 \cdot \cos^2 a - 1$$

- $\cos(2a) = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 a$:

$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = 1 - \text{sen}^2 a$, substituindo em $\cos(2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$, segue que:

$$\cos(2a) = 1 - \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 a$$

$$\cos(2a) = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 a$$

a) Utilizando a relação $\cos(2a) = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2 a$ para $a = 22°30'$, temos:

$$\cos(\underbrace{2 \cdot 22°30'}_{45°}) = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2\,22°30' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \text{sen}^2\,22°30' = 1 - \cos 45° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2\,22°30' = \frac{1 - \cos 45°}{2}$$

Como $22°30'$ é um ângulo do primeiro quadrante, segue que o seno é positivo. Logo:

$$\text{sen}\,22°30' = \sqrt{\frac{1 - \cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

b) Utilizando a relação $\cos(2a)=2\cdot\cos^2 a-1$ para $a=22°30'$, temos:

$$\cos(\underbrace{2\cdot 22°30'}_{45°})=2\cdot\cos^2 22°30'-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 22°30'=\frac{1+\cos 45°}{2}$$

Como 22°30' é um ângulo do primeiro quadrante, segue que o cosseno é positivo. Logo:

$$\Rightarrow \cos 22°30'=\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

30. a) $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow \cos^2 x=1-\left(\frac{3}{7}\right)^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos^2 x=1-\frac{9}{49}=\frac{40}{49}$$

Como $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ segue que o cosseno é negativo, logo:

$$\cos x=-\sqrt{\frac{40}{49}}=-\frac{2\sqrt{10}}{7}$$

b) $\operatorname{tg} x=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=\dfrac{\frac{3}{7}}{-\frac{2\sqrt{10}}{7}}=-\dfrac{3}{2\sqrt{10}}\cdot\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=-\dfrac{3\sqrt{10}}{20}$

c) $\operatorname{cossec} x=\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}=\dfrac{1}{\frac{3}{7}}=\dfrac{7}{3}$

d) $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{-\frac{2\sqrt{10}}{7}}=-\dfrac{7}{2\sqrt{10}}\cdot\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=-\dfrac{7\sqrt{10}}{20}$

e) $\operatorname{cotg} x=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}=\dfrac{-\frac{2\sqrt{10}}{7}}{\frac{3}{7}}=-\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$

31. a) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha}}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha}=\dfrac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha}}=$

$$=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1}=\operatorname{sen}\alpha$$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}}=\dfrac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha}}=\dfrac{1}{\sec\alpha}=\dfrac{1}{\frac{1}{\cos\alpha}}=1\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1}=\cos\alpha$

c) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}-1=\operatorname{cossec}^2\alpha-1=1+\operatorname{cotg}^2\alpha-1=\operatorname{cotg}^2\alpha$

d) $1+\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=$

$$=\frac{1}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha$$

32. $\operatorname{sen} x+2\cos x=A\cos(x-x_0)$

$$\frac{1}{A}\operatorname{sen} x+\frac{2}{A}\cos x=\cos x\cos x_0+\operatorname{sen} x\operatorname{sen} x_0$$

Desta igualdade temos:

$$\frac{1}{A}=\operatorname{sen} x_0 \text{ e } \frac{2}{A}=\cos x_0$$

Logo $\left(\frac{1}{A}\right)^2+\left(\frac{2}{A}\right)^2=(\operatorname{sen} x_0)^2+(\cos x_0)^2=1$. Consequentemente

$$\left(\frac{1}{A}\right)^2+\left(\frac{2}{A}\right)^2=1$$

$$A^2=5$$

$A=\sqrt{5}$, pois $A>0$.

Portanto, a alternativa correta é **c**.

33. a) $\operatorname{cossec}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}=\sqrt{2}\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=45°$

$$\cos 45°=\frac{a}{10}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a}{10}\Rightarrow a=5\sqrt{2}\rightarrow 5\sqrt{2}\text{ cm}$$

$$\operatorname{sen} 45°=\frac{b}{10}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{b}{10}\Rightarrow b=5\sqrt{2}\rightarrow 5\sqrt{2}\text{ cm}$$

$$a+b+10=5\sqrt{2}+5\sqrt{2}+10=10\left(1+\sqrt{2}\right)\rightarrow 10\left(1+\sqrt{2}\right)\text{ cm}$$

b) $\sec\beta=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{\cos\beta}\Rightarrow\cos\beta=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\Rightarrow\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\beta=30°$

$$\operatorname{tg} 30°=\frac{d}{8}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{d}{8}\Rightarrow d=\frac{8\sqrt{3}}{3}\rightarrow\frac{8\sqrt{3}}{3}\text{ cm}$$

$$\cos 30°=\frac{8}{c}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{8}{c}\Rightarrow c=\frac{8\cdot 2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\Rightarrow c=\frac{16\sqrt{3}}{3}\rightarrow\frac{16\sqrt{3}}{3}\text{ cm}$$

$$c+d+8=\frac{16\sqrt{3}}{3}+\frac{8\sqrt{3}}{3}+8=\frac{24\sqrt{3}}{3}+8=$$

$$=8\sqrt{3}+8=8\left(1+\sqrt{3}\right)\rightarrow 8\left(1+\sqrt{3}\right)\text{ cm}$$

c) $\operatorname{cotg}\gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\gamma}\Rightarrow\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{3}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\Rightarrow\operatorname{tg}\gamma=\sqrt{3}\Rightarrow\gamma=60°$

$$\cos 60°=\frac{3\sqrt{3}}{e}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{e}\Rightarrow e=2\cdot 3\sqrt{3}\Rightarrow e=6\sqrt{3}\rightarrow 6\sqrt{3}\text{ cm}$$

$$\operatorname{sen} 60°=\frac{f}{e}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{f}{6\sqrt{3}}\Rightarrow f=9\rightarrow 9\text{ cm}$$

$$e+f+3\sqrt{3}=6\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}=9+9\sqrt{3}=9\left(1+\sqrt{3}\right)\rightarrow 9\left(1+\sqrt{3}\right)\text{ cm}$$

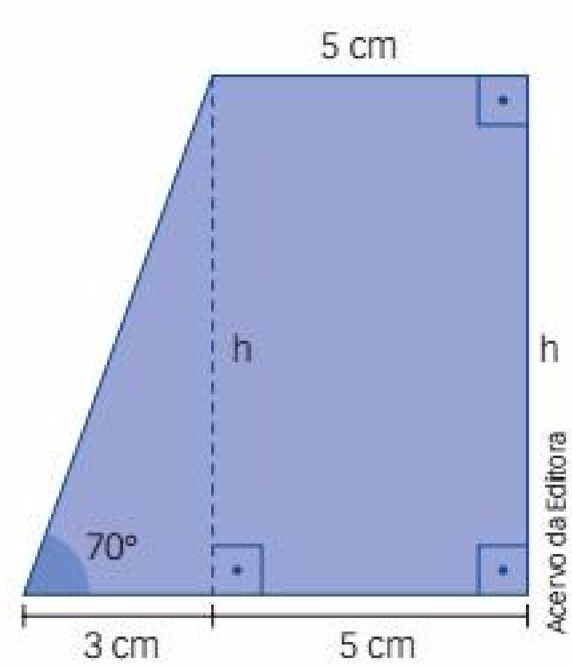
34. $z=\dfrac{\cos x+\operatorname{tg} x}{\sec x+\operatorname{cotg} x}=\dfrac{\cos x+\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}=$

$$=\frac{\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{\operatorname{sen} x+\cos^2 x}{\cos x\operatorname{sen} x}}=\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\frac{\cos x\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\operatorname{sen} x}{\cos x}=\operatorname{sen} x=\frac{3}{4}$$

Portanto, a alternativa correta é **d**.

35.



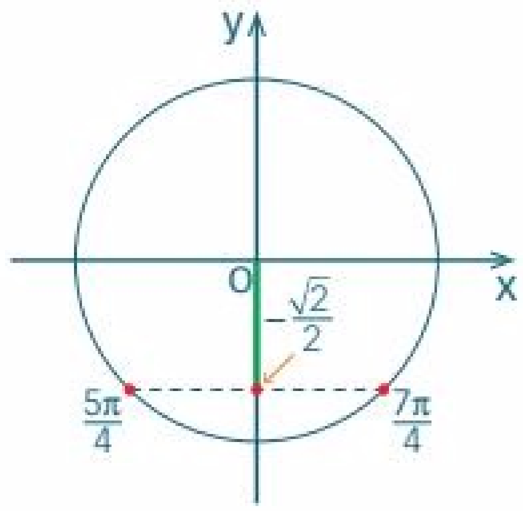
$$\operatorname{tg} 70°=\frac{h}{3}\Rightarrow\frac{\operatorname{sen} 70°}{\cos 70°}=\frac{h}{3}\Rightarrow\frac{0{,}94}{0{,}34}=\frac{h}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h=\frac{3\cdot 0{,}94}{0{,}34}\simeq 8{,}29\rightarrow\text{aproximadamente } 8{,}29\text{ cm}$$

$$A=\frac{8+5}{2}\cdot 8{,}29=53{,}89\rightarrow\text{aproximadamente } 53{,}89\text{ cm}^2$$

36. a) Como na primeira volta temos $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}=\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, então:

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{7\pi}{4}+2k\pi,\ \text{com } k\in\mathbb{Z}\right\}$$



b) Como na primeira volta temos $\cos\frac{\pi}{2}=\cos\frac{3\pi}{2}=0$, então:

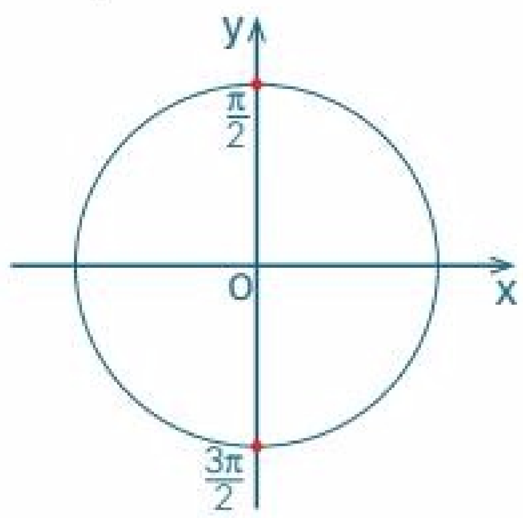
$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

ou

$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$$

Portanto:

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ \text{com } k\in\mathbb{Z}\right\}.$$



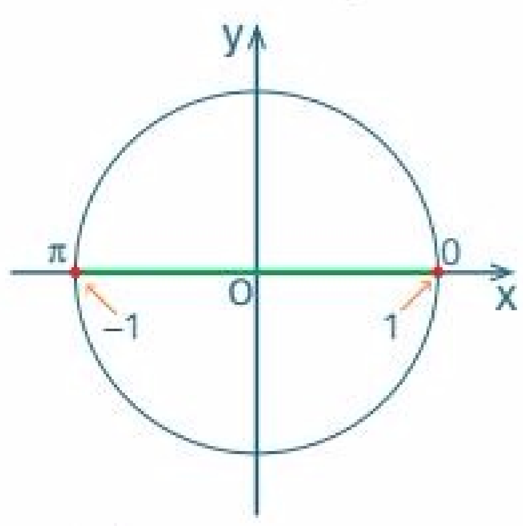
c) $\sec^2 x=1\Rightarrow \sec x=1$ ou $\sec x=-1$

$$\sec x=1\Rightarrow \frac{1}{\cos x}=1\Rightarrow \cos x=1$$

$$\sec x=-1\Rightarrow \frac{1}{\cos x}=-1\Rightarrow \cos x=-1$$

Como na primeira volta temos $\cos x=1$ para $x=0$ e $\cos x=-1$ para $x=\pi$, então:

$$S=\{x\in\mathbb{R}\mid x=k\pi,\ \text{com } k\in\mathbb{Z}\}$$



d) $\operatorname{cossec}\left(2x-\frac{3\pi}{8}\right)=-2\Rightarrow \dfrac{1}{\operatorname{sen}\left(2x-\frac{3\pi}{8}\right)}=-2\Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(2x-\frac{3\pi}{8}\right)=-\frac{1}{2}$$

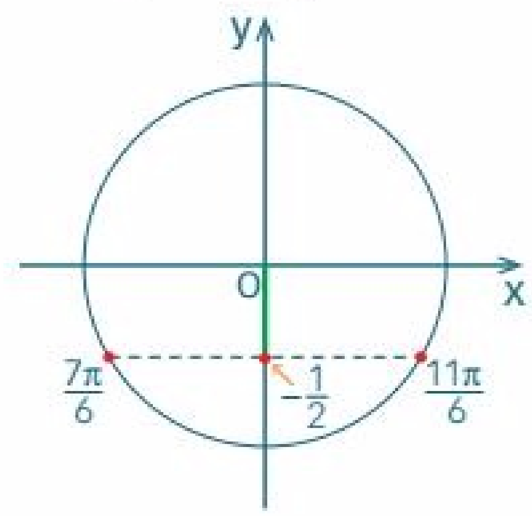
Como na primeira volta temos $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}=\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}=-\frac{1}{2}$, então:

$$2x-\frac{3\pi}{8}=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow x=\frac{\frac{7\pi}{6}+\frac{3\pi}{8}+2k\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{37\pi}{48}+k\pi$$

ou

$$2x-\frac{3\pi}{8}=\frac{11\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow x=\frac{\frac{11\pi}{6}+\frac{3\pi}{8}+2k\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{53\pi}{48}+k\pi$$

Portanto, $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{37\pi}{48}+k\pi \text{ ou } x=\frac{53\pi}{48}+k\pi,\ \text{com } k\in\mathbb{Z}\right\}$.



e) $3\cos x+2\operatorname{sen}^2 x=2\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x=\dfrac{2-3\cos x}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}_{1}=\frac{2-3\cos x}{2}+\cos^2 x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=1-\frac{3}{2}\cos x+\cos^2 x\Rightarrow$$

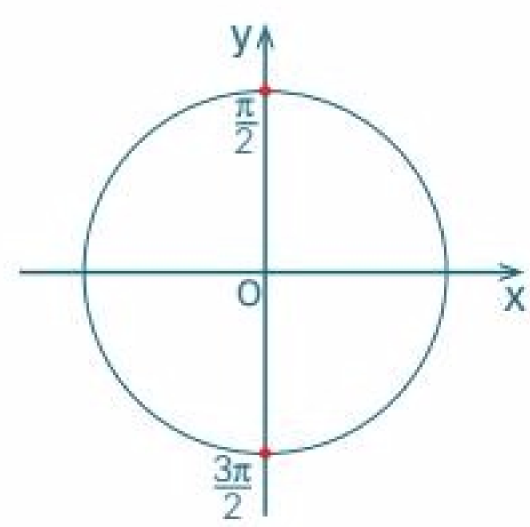
$$\Rightarrow \cos^2 x-\frac{3}{2}\cos x=0$$

Substituindo y por $\cos x$, temos:

$$y^2-\frac{3}{2}y=0\left\langle\begin{matrix} y_1=\frac{3}{2}\\ y_2=0\end{matrix}\right.$$

Como $\cos x\neq\frac{3}{2}=y_1$ para qualquer $x\in\mathbb{R}$, a única solução possível será $\cos x=0=y_2$. Na primeira volta temos $\cos\frac{\pi}{2}=\cos\frac{3\pi}{2}=0$, então:

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \text{com } k\in\mathbb{Z}\right\}$$



Ilustrações: Acervo da Editora

37. $5{,}4=\dfrac{12^2\cdot\operatorname{sen}^2\alpha}{2\cdot 10}\Rightarrow 20\cdot 5{,}4=144\cdot\operatorname{sen}^2\alpha\Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha=\frac{3}{4}\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \alpha=-60^\circ$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \alpha=60^\circ$$

Como $\alpha=-60^\circ$ não é uma solução do problema, pois a bola formou um ângulo positivo com a horizontal, visto que alcançou uma altura positiva, temos que $\alpha=60^\circ$.

38. Substituindo $y = \text{sen}x$, temos:

$$y^2 - 5y + 6 = 0 \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

Entretanto, não existe $x \in \mathbb{R}$ de tal forma que $\text{sen}x = y_1 = 3$ ou $\text{sen}x = y_2 = 2$. Logo, a equação não admite raízes.

Portanto, a alternativa correta é **d**.

39. $4\cos^2 x + 4\sqrt{3} \cdot \text{sen}(90° + x) = 3\underbrace{\text{tg}135°}_{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\cos^2 x + 4\sqrt{3} \cdot \cos x = -3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4\cos^2 x + 4\sqrt{3} \cdot \cos x + 3 = 0$

Substituindo y por $\cos x$, temos:

$$4y^2 + 4\sqrt{3}y + 3 = 0 \Rightarrow \left(2y + \sqrt{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6}$$

Portanto, a alternativa correta é **a**.

40. Como **f** e **g** são funções do tipo trigonométricas, podemos supor que $f(x) = a_1 + b_1 \cdot \cos(c_1x + d_1)$ e $g(x) = a_2 + b_2 \cdot \text{sen}(c_2x + d_2)$. Deste modo, temos:

- $a_1 = 0$, pois **f** oscila em torno de 0 (zero);
- $b_1 = 1$, pois o maior distanciamento do gráfico de **f** ao eixo x é 1;
- $d_1 = 0$, pois $f(0) = \underbrace{\cos(d_1)}_{\cos(c_1 \cdot 0 + d_1)} = 1$;
- $c_1 = 1$, pois $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(c_1\frac{\pi}{2}\right) = 0$;
- $a_2 = 0$, pois **g** oscila em torno de 0 (zero);
- $b_2 = \sqrt{3}$, pois o maior distanciamento do gráfico de **g** ao eixo x é $\sqrt{3}$;
- $d_2 = 0$, pois $g(0) = \sqrt{3}\underbrace{\text{sen}(d_2)}_{\text{sen}(c_2 \cdot 0 + d_2)} = 0$;
- $c_2 = 1$, pois $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\,\text{sen}\left(c_2\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$.

Logo $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sqrt{3}\,\text{sen}x$. Assim:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \cos x = \sqrt{3}\,\text{sen}x \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\text{sen}x}{\cos x} \Rightarrow \text{tg}x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6}$$

41. a) O gráfico de **q** intersecta o eixo das abscissas no ponto cuja ordenada é 0 (zero). Assim, temos:

$$q(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3}$$

coordenadas: $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ ou $\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$

b) O gráfico de **q** intersecta o eixo das ordenadas quando $x = 0$. Assim, temos:

$$q(0) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(0 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

coordenada: $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

42. a) 2 m abaixo do nível médio do mar; 2 m acima do nível médio do mar

b)
- $3\text{h}06 = 3{,}1\text{h}$

$$h(3{,}1) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{31} \cdot 3{,}1\right) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= 2 \cdot 1 = 2 \rightarrow 2 \text{ m acima do nível do mar}$$

- $11\text{h}30 = 11{,}5\text{h}$

$$h(11{,}5) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{31} \cdot 11{,}5\right) = 2 \cdot (-0{,}44) = -0{,}88$$

Portanto, a maré estará aproximadamente 0,88 m abaixo do nível do mar.

c)
- $h(t) = 1 \Rightarrow 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{31}t = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{31}t = \frac{5\pi}{6} \text{ ou} \\ \frac{5\pi}{31}t = \frac{13\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{31}t = \frac{17\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{31}{30} = 1\text{h}02 \text{ ou } t = \frac{31}{6} = 5\text{h}10 \text{ ou} \\ t = \frac{403}{30} = 13\text{h}26 \text{ ou } t = \frac{527}{30} = 17\text{h}34 \end{cases}$$

- $h(t) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{31}t = 0 \text{ ou } \frac{5\pi}{31}t = \pi \text{ ou} \\ \frac{5\pi}{31}t = 2\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{31}t = 3\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 = 0\text{h} \text{ ou } t = \frac{31}{5} = 6\text{h}12 \text{ ou} \\ t = \frac{62}{5} = 12\text{h}24 \text{ ou } t = \frac{93}{5} = 18\text{h}36 \end{cases}$$

43. $\text{sen}x = \sqrt{1 - \cos x} \Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \cos x \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 - \cos x + \cos^2 x \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 = 1 - \cos x + \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x - \cos x = 0$

Substituindo y por $\cos x$, temos:

$$y^2 - y = 0 \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

$y_1 = 0 = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$y_2 = 1 = \cos x \Rightarrow x = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Como $x \in [0, 80\pi[$ temos que $0 \leq k \leq 39$ e, portanto, há 80 soluções no intervalo.

44. a) $P = 100 + 20\underbrace{\text{sen}(2\pi \cdot 0)}_{\text{sen}0} = 100 + 20 \cdot 0 =$

$= 100 \rightarrow 100$ mm de mercúrio;

$P = 100 + 20\text{sen}(2\pi \cdot 0{,}75) = 100 + 20\text{sen}\frac{3\pi}{2} =$

$= 100 + 20 \cdot (-1) = 80 \rightarrow 80$ mm de mercúrio

b) $P = 80 = 100 + 20\text{sen}(2\pi t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{sen}(2\pi t) = \frac{80 - 100}{20} \Rightarrow \text{sen}(2\pi t) = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{3}{4} = 0{,}75 \rightarrow 0{,}75 \text{ s}$$

45. a) $p=\frac{2\pi}{1}=2\pi$

b) $3=a+b\cdot\cos\left(\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow 3=a+b\cdot\underbrace{\cos(-2\pi)}_{1}\Rightarrow a+b=3$ (I)

$5=a+b\cdot\cos\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow 5=a+b\cdot\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{\frac{1}{2}}\Rightarrow 2a+b=10$ (II)

As equações (I) e (II) formam um sistema linear cuja solução é $a=7$ e $b=-4$.

c) O gráfico da função $y=7-4\cdot\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$ oscila em torno de $y=7$ com distanciamento máximo de 4 unidades de seu valor médio. Portanto, $\text{Im}=\{y\in\mathbb{R}\mid 3\le y\le 11\}$.

Conexão tecnológica

1. ▪ **a**: O coeficiente **a** translada o gráfico da função para cima se $a>0$, ou para baixo se $a<0$.
   ▪ **b**: O coeficiente **b** amplia verticalmente o gráfico da função se $b>1$, ou comprime verticalmente se $b<1$.
   ▪ **c**: O coeficiente **c** aumenta o período da função se $|c|<1$, ou diminui se $|c|>1$.
   ▪ **d**: O coeficiente **d** translada o gráfico da função para esquerda se $d>0$, ou para a direita se $d<0$.

2. ▪ $f(3)=2+\text{sen}\,3\simeq 2{,}14$
   ▪ $f(3)=5\cdot\text{sen}(2\cdot 3+1)\simeq 3{,}28$
   ▪ $f(3)=4-3\cdot\cos(-3-5)\simeq 4{,}44$

Unidade 3
Sistemas lineares e matrizes

1. a) $4x+\frac{1}{x}+7=\frac{3}{8}\Rightarrow 4x+x^{-1}+7=\frac{3}{8}$ não é uma equação linear, pois contém um expoente negativo.

b) É uma equação linear.

c) Não é uma equação linear, pois uma de suas variáveis tem expoente maior que 1.

d) Não é uma equação.

e) É uma equação linear.

f) $2-\sqrt[3]{n}=n\Rightarrow 2-n^{\frac{1}{3}}=n$ não é uma equação linear, pois a variável tem um expoente fracionário.

Sim, a equação do item **e**, pois o termo independente é igual a zero.

2. a) coeficientes: 3 e -9; incógnitas: p e q; termo independente: 2

b) coeficientes: 1, $-\frac{1}{3}$ e 4; incógnitas: r, s e t; termo independente: 1,7

c) coeficientes: -3, 1, 5 e $-0{,}8$; incógnitas: x, y, z e w; termo independente: 0

d) coeficientes: $\frac{5}{6}$ e $\sqrt{2}$; incógnitas: u e v; termo independente: 13

e) coeficientes: 2 e 4; incógnitas: m e n; termo independente: 5

f) coeficientes: 1 e -4; incógnitas: a e b; termo independente: 3

3. a) $x+y+z=1+3-2=2\neq 0$, portanto a terna não é solução da equação

b) $2x-\frac{y}{3}-z=2\cdot 1-\frac{3}{3}-(-2)=3\neq 5$, portanto a terna não é solução da equação

c) $x+y+2z=1+3+2\cdot(-2)=0$, portanto a terna é uma solução da equação

d) $4x-2y-\frac{z}{2}=4\cdot 1-2\cdot 3-\frac{-2}{2}=-1$, portanto a terna é uma solução da equação

e) $-x+3y+z=-1+3\cdot 3+(-2)=5\neq 2$, portanto a terna não é solução da equação

4. Algumas das soluções da equação linear são os pontos destacados no gráfico. Assim, temos como possível resposta os pontos $(0,2)$, $(2,1)$ e $(4,0)$.

5. Para a equação admitir a ênupla $\left(-k,\frac{k}{2},\frac{k}{4},3k\right)$ como solução, devemos ter:

$-k-6\cdot\frac{k}{2}+2\cdot\frac{k}{4}-\frac{3k}{3}=-9\Rightarrow -k-3k+\frac{k}{2}-k=-9\Rightarrow k=2$

6. a) Sim, pois $2\cdot 3+2\cdot(-3)=0$ e $-\frac{3}{2}\cdot 2-(-3)=0$.

b) Sim, pois é um sistema linear homogêneo.

7. ▪ Note que $(1,2,9)$ não é solução da segunda equação, pois $1-2+2\cdot 9=-1+18=17\neq 12$.
   ▪ Temos que $(1,2,9)$ não é solução da terceira equação, pois $-6\cdot(-10)+3\cdot 10-2\cdot 16=60+30-32=58\neq -1$.
   ▪ Observe que:

$$3\cdot(-1)+5\cdot 3-8=4$$
$$-1-3+2\cdot 8=12$$
$$-6\cdot(-1)+3\cdot 3-2\cdot 8=-1$$

Ou seja, $(-1,3,8)$ é solução do sistema linear. Portanto, a alternativa correta é **c**.

8. a) $\begin{cases}2x-y=2\\ x+\frac{y}{2}=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2x-2\\ y=-2x+10\end{cases}$

Resolvendo o sistema temos que

$2x-2=-2x+10\Rightarrow 4x=12\Rightarrow x=3$

Portanto, as retas são concorrentes e se intersectam no ponto de abscissa $x=3$. Consequentemente, a representação gráfica do sistema é a **III**.

b) $\begin{cases}-x+y=-3\\ 3=3x-3y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=x-3\\ y=x-1\end{cases}$

Como os coeficientes angulares são iguais e os lineares diferentes, as retas são paralelas, portanto a representação gráfica do sistema é a **I**.

c) $\begin{cases}2x-y=0\\ x+4y=-9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2x\\ y=-\frac{x}{4}-\frac{9}{4}\end{cases}$

Como os coeficientes angulares são diferentes, as retas são concorrentes, portanto a representação gráfica do sistema é a **IV**.

d) $\begin{cases}\frac{3}{2}x+y=3\\ 2y=6-3x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-\frac{3}{2}x+3\\ y=-\frac{3}{2}x+3\end{cases}$

Como os coeficientes angulares e os lineares são iguais, as retas são coincidentes, portanto a representação gráfica do sistema é a **II**.

9. a) $\begin{cases} x+2y=6 \\ 3x+4y=14 \end{cases} \Rightarrow x=6-2y \Rightarrow 3(6-2y)+4y=14 \Rightarrow -2y=-4 \Rightarrow y=2$

Assim, $x+2\cdot 2=6 \Rightarrow x=2$. Logo, $S=\{(2,2)\}$ e o sistema é SPD.

b) $\begin{cases} 4x-7y=21-7x \\ -6x+14y=42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x-7y=21 \\ -6x+14y=42 \end{cases}$

Temos assim:

$x=\dfrac{21+7y}{11} \Rightarrow -6\left(\dfrac{21+7y}{11}\right)+14y=42 \Rightarrow$

$\Rightarrow -126-42y+154y=462 \Rightarrow 112y=588 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=\dfrac{21}{4} \Rightarrow y=5{,}25$

Deste modo:

$11x-7\left(\dfrac{21}{4}\right)=21 \Rightarrow 11x=21+\dfrac{7}{4}\cdot 21 \Rightarrow x=\dfrac{11\cdot 21}{4\cdot 11} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{21}{4} \Rightarrow x=5{,}25$

Logo, $S=\{(5{,}25;5{,}25)\}$ e o sistema é SPD.

c) $\begin{cases} 7x+y=49 \\ 4y=61-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=49-7x \\ 4y=61-x \end{cases}$

Temos assim:

$4(49-7x)=61-x \Rightarrow 196-28x=61-x \Rightarrow$

$\Rightarrow 27x=135 \Rightarrow x=5$

Deste modo:

$7\cdot 5+y=49 \Rightarrow y=14$

Logo, $S=\{(5,14)\}$ e o sistema é SPD.

d) $\begin{cases} 5x-2y=9 \\ -15x+6(1+y)=-21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{9}{2} \\ y=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{9}{2} \end{cases}$

Logo, o sistema é SPI, com $S=\left\{\left(k,\dfrac{5k-9}{2}\right), \text{com } k\in\mathbb{R}\right\}$.

10. a) Dado o sistema $\begin{cases} x+2y=5 \\ -x+4y=7 \end{cases}$, somando os termos membro a membro, temos:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x+2y=5 \\ -x+4y=7 \end{cases} \oplus \\ \hline 6y=12 \Rightarrow y=2 \end{array}$$

Substituindo y por 2 na primeira equação, temos:

$x+2\cdot 2=5 \Rightarrow x=1$

Portanto, o conjunto solução é $S=\{(1,2)\}$

b) Dado o sistema $\begin{cases} 4x-y=-1 \\ 2x+5y=13 \end{cases}$, multiplicando a primeira equação por (-2) e somando os termos membro a membro, temos:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 4x-y=-1 \\ -4x-10y=-26 \end{cases} \oplus \\ \hline -11y=-27 \Rightarrow y=\dfrac{27}{11} \end{array}$$

Substituindo y por $\dfrac{27}{11}$ na 1ª equação, temos:

$4x-\dfrac{27}{11}=-1 \Rightarrow x=\dfrac{4}{11}$

Portanto, o conjunto solução é $S=\left\{\left(\dfrac{4}{11},\dfrac{27}{11}\right)\right\}$.

11. a) Como as retas r e s se cruzam no ponto $(3,1)$, podemos afirmar que este ponto é solução do sistema.

b) As retas t e u são coincidentes, portanto existem infinitas soluções para esse sistema dadas por $\left(\alpha,-\dfrac{\alpha}{3}-1\right)$.

c) As retas s e u são paralelas, portanto não há solução para o sistema.

d) Como as retas r e t se cruzam no ponto $(0,-1)$, podemos afirmar que este ponto é solução do sistema.

e) As retas s e t são paralelas, portanto não há solução para o sistema.

f) Como as retas r e u se cruzam no ponto $(0,-1)$, podemos afirmar que este ponto é solução do sistema.

12. Considere x a quantidade de produtos comprados e y o total gasto na compra, desta forma temos:

$\begin{cases} 10x=y \\ 12(x-2)=y+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x=y \\ 12x-y=30 \end{cases}$

Como $10x=y$, segue que:

$12x-y=30 \Rightarrow 12x-10x=30 \Rightarrow x=15$.

Deste modo $y=150$. Consequentemente a quantia levada por essa pessoa foi de R$ 156,00.

Portanto, a alternativa correta é **b**.

13. Seja x a quantidade de cédulas de R$ 20,00 e y a quantidade de cédulas de R$ 10,00, temos:

$\begin{cases} 20x+10y=150 \\ x+y=11 \end{cases}$

Multiplicando a segunda equação por -10 e somando membro a membro com a primeira, temos:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 20x+10y=150 \\ -10x-10y=-110 \end{cases} \oplus \\ \hline 10x=40 \Rightarrow x=4 \end{array}$$

Portanto, eram 4 cédulas de R$ 20,00.

14. Seja x a nota de Zanetti e y a nota de Chen, podemos montar o seguinte sistema:

$\begin{cases} x-y=0{,}100 \\ x+y=31{,}700 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x-y=0{,}100 \\ x+y=31{,}700 \end{cases} \oplus \\ \hline 2x=31{,}800 \Rightarrow x=15{,}900 \end{array}$$

Portanto, a nota de Zanetti foi de 15,900.

15. Montando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2x+9y=451 \\ x+4y=207 \quad \cdot(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} \begin{cases} 2x+9y=451 \\ -2x-8y=-414 \end{cases} \oplus \\ \hline y=37 \end{array}$$

Substituindo o valor de y na primeira equação, temos:

$2x+9\cdot 37=451 \Rightarrow 2x=118 \Rightarrow x=59$

Portanto é incorreto afirmar que João pagou R$ 500,00, pois como ele comprou 3 calças no valor de R$ 59,00 cada mais 9 camisas no valor de R$ 37,00 cada, ele gastou um total de R$ 510,00.

16. Seja x a distância entre o muro e os quadrados e entre cada quadrado e y a medida da lateral do quadrado, podemos montar o seguinte sistema:

$\begin{cases} 6x+5y=5 \\ 3x+2y=2{,}2 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases}6x+5y=5\\3x+2y=2{,}2 & \cdot(-2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6x+5y=5\\-6x-4y=-4{,}4\end{cases} \oplus$$
$$y=0{,}6$$

Logo, a medida de cada lado do quadrado é 0,6 m. Portanto, a alternativa correta é **b**.

17. Seja x a medida do comprimento do retângulo e y a medida da largura podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases}2x+16y=376\\16x+2y=236\end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases}2x+16y=376\\16x+2y=236 & \cdot(-8)\end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases}2x+16y=376\\-128x-16y=-1\,888\end{cases} \oplus$$
$$-126x=-1\,512 \Rightarrow x=12$$

$2\cdot 12+16y=376 \Rightarrow 16y=352 \Rightarrow y=22$

Assim, a área de cada cartão é dada por:

$A=22\cdot 12=264 \rightarrow 264\ \text{cm}^2$

Portanto, a alternativa correta é **d**.

Interpretação gráfica de um sistema linear 3×3

a) Resposta esperada: A representação de um sistema linear 2×2 é feita por meio de um par de retas no plano e a de um sistema linear 3×3, por um trio de planos no espaço.

b) Sim, pois não é possível obter um único ponto ou reta comum aos dois planos paralelos, independentemente do plano que representa uma terceira equação.

18. alternativas **c** e **e**

$$\begin{cases}x+2y=0 & \cdot 3\\-3x+y=-7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x+6y=0\\-3x+y=-7\end{cases} \oplus$$
$$7y=-7 \Rightarrow y=-1$$

$x+2y=0 \Rightarrow x+2\cdot(-1)=0 \Rightarrow x=2$

a) $\begin{cases}x+y=4 & \cdot(-1)\\x+2y=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x-y=-4\\x+2y=1\end{cases} \oplus$
$$y=-3$$

$x+y=4 \Rightarrow x+(-3)=4 \Rightarrow x=7$

Como não possuem o mesmo conjunto solução, os sistemas não são equivalentes.

b) $\begin{cases}-x+2y=3\\x-y=0\end{cases} \oplus$
$$y=3$$

Como não possuem o mesmo conjunto solução, os sistemas não são equivalentes.

c) $\begin{cases}-x+y=-3\\5x-y=11\end{cases} \oplus$
$$4x=8 \Rightarrow x=2$$
$-x+y=-3 \Rightarrow -2+y=-3 \Rightarrow y=-1$

Como possuem o mesmo conjunto solução, os sistemas são equivalentes.

d) $\begin{cases}x-\dfrac{y}{3}=2 & \cdot(-2)\\2x+2y=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2x+\dfrac{2y}{3}=-4\\2x+2y=-1\end{cases} \oplus$
$$\frac{8y}{3}=-5 \Rightarrow y=-\frac{15}{8}$$

Como não possuem o mesmo conjunto, solução os sistemas não são equivalentes.

e) $\begin{cases}\dfrac{x}{2}-y=2 & \cdot(-2)\\x+4y=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x+2y=-4\\x+4y=-2\end{cases} \oplus$
$$6y=-6 \Rightarrow y=-1$$

$x+4y=-2 \Rightarrow x+4\cdot(-1)=-2 \Rightarrow x=2$

Como possuem o mesmo conjunto solução, os sistemas são equivalentes.

f) $\begin{cases}4x+5y=14\\x-3y=-6 & \cdot(-4)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4x+5y=14\\-4x+12y=24\end{cases} \oplus$
$$17y=38 \Rightarrow y=\frac{38}{17}$$

Como não possuem o mesmo conjunto solução, os sistemas não são equivalentes.

19. a) Não está escalonado, pois o primeiro coeficiente não nulo da 2ª equação não está à esquerda do primeiro coeficiente não nulo da 3ª equação.

b) Escalonado, pois as incógnitas de todas as suas equações estão em uma mesma ordem e o primeiro coeficiente não nulo de cada equação está à esquerda do primeiro coeficiente não nulo da equação seguinte.

20. a) $\begin{cases}x+2y-3z=-8\\-y+z=3 & \cdot 3\\3y-z=-5 & \oplus\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+2y-3z=-8\\-y+z=3\\2z=4\end{cases}$

Calculando o valor de z na 3ª equação, temos:
$2z=4 \Rightarrow z=2$

Substituindo z na 2ª equação, calculamos o valor de y:
$-y+z=3 \Rightarrow -y+2=3 \Rightarrow y=-1$

Substituindo z e y na 1ª equação, obtemos o valor de x:
$x+2y-3z=-8 \Rightarrow x+2\cdot(-1)-3\cdot 2=-8 \Rightarrow x=0$

Portanto, $S=\{(0,-1,2)\}$ e o sistema é SPD.

b) $\begin{cases}5x+4y-z=10\\2x+3z=-4 & \cdot(-1)\\2x+3z=7 & \oplus\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}5x+4y-z=10\\2x+3z=-4\\0=11\ \text{(Impossível)}\end{cases}$

Portanto $S=\varnothing$, e o sistema é SI.

c) $\begin{cases}x+y-3z=4 & \cdot 2\\2y+z=1\\-2x+2y+8z=-6 & \oplus\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}x+y-3z=4\\2y+z=1 & \cdot(-2)\\4y+2z=2 & \oplus\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y-3z=4\\2y+z=1\\0=0\end{cases}$

Fazendo $z=k$ e substituindo z na 2ª equação calculamos o valor de y: $2y+z=1 \Rightarrow 2y+k=1 \Rightarrow y=\dfrac{1-k}{2}$

Substituindo z e y na 1ª equação, obtemos o valor de x:
$x+y-3z=4 \Rightarrow x+\dfrac{1-k}{2}-3\cdot k=4 \Rightarrow x=\dfrac{7+7k}{2}$

Portanto, $S=\left\{\left(\dfrac{7+7k}{2},\dfrac{1-k}{2},k\right),\ \text{com}\ k\in\mathbb{R}\right\}$ e o sistema é SPI.

d) $\begin{cases} 2x+y+4z=3 & \cdot 2 \\ -4x+y-7z=2 & \oplus \\ -6x+3y-8z=5 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y+4z=3 & \cdot 3 \\ 3y+z=8 \\ -6x+3y-8z=5 & \oplus \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y+4z=3 \\ 3y+z=8 & \cdot(-2) \\ 6y+4z=14 & \oplus \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+4z=3 \\ 3y+z=8 \\ 2z=-2 \end{cases}$

Calculando o valor de z na 3ª equação, temos:

$2z=-2 \Rightarrow z=-1$

Substituindo z na 2ª equação, calculamos o valor de y:

$3y+z=8 \Rightarrow 3y+(-1)=8 \Rightarrow y=3$

Substituindo z e y na 1ª equação, calculamos o valor de x:

$2x+y+4z=3 \Rightarrow 2x+3+4\cdot(-1)=3 \Rightarrow x=2$

Portanto, $S=\{(2,3,-1)\}$ e o sistema é SPD.

21. Temos inicialmente que $y+z=2$. Note ainda que

$\begin{cases} x-y=1 \\ y+z=2 \\ w-z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ y+z=2 \\ y+w=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ y+z=2 \\ y+w=5 \end{cases}$

Substituindo a equação (I) na (III), temos $x-1+w=5 \Rightarrow x+w=6$. Logo

$x+y+z+w=x+w+y+z=2+6=8$

Portanto, a alternativa correta é **d**.

22. Escrevendo o sistema $\begin{cases} p+q+r+s=2 \\ -2p+7q-11r+2s=0 \\ p-2q+5r-s=2 \\ 3p-3q+10r+s=6 \end{cases}$ em forma de matriz, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 7 & -11 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 10 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \oplus \\ \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 10 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ \oplus \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 10 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ \\ \oplus \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\frac{1}{3} \\ \oplus \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & -6 & 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\frac{2}{3} \\ \\ \oplus \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1) \\ \oplus \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Reescrevendo o sistema, temos:

$\begin{cases} p+q+r+s=2 \\ 9q-9r+4s=4 \\ r-\frac{2}{3}s=\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3}s=\frac{4}{3} \end{cases}$

O valor de s pode ser obtido a partir da 4ª equação: $\frac{4}{3}s=\frac{4}{3} \Rightarrow s=1$

Substituindo $s=1$ na 3ª equação, obtemos o valor de r:

$r-\frac{2}{3}s=\frac{4}{3} \Rightarrow r-\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{4}{3} \Rightarrow r=2$

Agora, substituindo $s=1$ e $r=2$ na 2ª equação, obtemos o valor de q: $9q-9r+4s=4 \Rightarrow 9q-9\cdot 2+4\cdot 1=4 \Rightarrow q=2$

Por fim, substituindo $s=1$, $r=2$ e $q=2$ na 1ª equação, obtemos o valor de p: $p+2+2+1=2 \Rightarrow p=-3$

Portanto, $S=\{(-3,2,2,1)\}$.

23. x: dias que utilizou a motocicleta

y: dias que utilizou o transporte público

Montando o sistema, temos $\begin{cases} x+y=20 \\ 1{,}5x+6y=43{,}5 \end{cases}$.

Escrevendo esse sistema em forma de matriz temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 20 \\ 1{,}5 & 6 & 43{,}5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1{,}5) \\ \oplus \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 20 \\ 0 & 4{,}5 & 13{,}5 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo o sistema, temos:

$\begin{cases} x+y=20 \\ 4{,}5y=13{,}5 \end{cases}$

O valor de y é obtido a partir da 2ª equação:

$4{,}5y=13{,}5 \Rightarrow y=3$

Substituindo y por 3 na 1ª equação, obtemos o valor de x:

$x+y=20 \Rightarrow x+3=20 \Rightarrow x=17$

Portanto, ele utilizou a motocicleta por 17 dias.

24. Montando o sistema, temos $\begin{cases} 2C_1+3C_2+4C_3=26 \\ C_1+C_2+2C_3=11 \\ 3C_1+2C_2+C_3=19 \end{cases}$.

Escrevendo esse sistema em forma de matriz, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 26 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \\ 3 & 2 & 1 & 19 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 26 \\ 3 & 2 & 1 & 19 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \oplus \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 19 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) \\ \\ \oplus \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -14 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & -5 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo o sistema, temos:

$\begin{cases} C_1+2C_3+C_2=11 \\ -5C_3-C_2=-14 \\ C_2=4 \end{cases}$

Da 3ª equação temos que $C_2=4$. Substituindo C_2 por 4 na 2ª equação, obtemos o valor de C_3:

$-5C_3-C_2=-14 \Rightarrow -5C_3-4=-14 \Rightarrow C_3=2$

Substituindo C_2 por 4 e C_3 por 2 na 1ª equação, obtemos o valor de C_1: $C_1+2C_3+C_2=11 \Rightarrow C_1+2\cdot 2+4=11 \Rightarrow C_1=3$

Assim, temos que $C_1+C_2+C_3=3+4+2=9$.
Portanto, foram construídos 9 carros no total.

25. Note que $(a,b,c)=(a,a+1,a+2)$, pois os números a,b e c são números inteiros consecutivos. Deste modo:

$$\begin{cases} x+2y+3z=20 \\ 7x+8y-mz=26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2(a+1)+3(a+2)=20 \\ 7a+8(a+1)-m(a+2)=26 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6a=12 \\ 15a-m(a+2)=18 \end{cases}$$

Deste modo $a=2$, e assim:

$30-4m=18$

$30-18=4m$

$\frac{12}{4}=m$

$m=3$

Portanto, a alternativa correta é **a**.

26. c: valor do caderno
n: valor da caneta
b: valor da borracha
l: valor do lápis
Montando o sistema, temos:

$$\begin{cases} c+n+b+l=5 \\ c+n+2b+2l=6 \\ c+2n+b+3l=7 \\ 2c+n+2b+2l=9 \end{cases}$$

Escrevendo esse sistema em forma de matriz, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \oplus \\ \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ \oplus \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \\ \\ \oplus \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} c+n+b+l=5 \\ n+2l=2 \\ b+l=1 \\ -n=-1 \end{cases}$$

O valor de n é obtido a partir da 4ª equação: $-n=-1 \Rightarrow n=1$
Substituindo n por 1 na 2ª equação, obtemos o valor de l:

$n+2l=2 \Rightarrow 1+2l=2 \Rightarrow l=0{,}5$

Agora, substituindo l por 0,5 na 3ª equação, obtemos o valor de b: $b+l=1 \Rightarrow b+0{,}5=1 \Rightarrow b=0{,}5$

Por fim, substituindo n por 1, l por 0,5 e b por 0,5 na 1ª equação, obtemos o valor de c:

$c+n+b+l=5 \Rightarrow c+1+0{,}5+0{,}5=5 \Rightarrow c=3$

Portanto, o caderno custa R$ 3,00, a caneta: R$ 1,00, a borracha: R$ 0,50 e o lápis: R$ 0,50.

27. d: quantidade de embalagens de 10 litros
v: quantidade de embalagens de 20 litros
Montando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 3n+10v+6d=65 \\ 2n+20v+10d=94 \\ 2v-d=0 \end{cases}$$

Escrevendo esse sistema em forma de matriz, temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 & 6 & 65 \\ 2 & 20 & 10 & 94 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \\ \oplus \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 10 & 6 & 65 \\ 0 & \frac{40}{3} & 6 & \frac{152}{3} \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\left(-\frac{3}{20}\right) \\ \oplus \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 10 & 6 & 65 \\ 0 & \frac{40}{3} & 6 & \frac{152}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{19}{10} & -\frac{38}{5} \end{bmatrix}$$

Reescrevendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} 3n+10v+6d=65 \\ \frac{40}{3}v+6d=\frac{152}{3} \\ -\frac{19}{10}d=-\frac{38}{5} \end{cases}$$

O valor de d é obtido a partir da 3ª equação:

$-\frac{19}{10}d=-\frac{38}{5} \Rightarrow d=4$

Substituindo d por 4 na 2ª equação, obtemos o valor de v:

$\frac{40}{3}v+6d=\frac{152}{3} \Rightarrow \frac{40}{3}v+6\cdot 4=\frac{152}{3} \Rightarrow v=2$

Agora, substituindo v por 2 e d por 4 na 1ª equação, obtemos o valor de n:
$3n+10v+6d=65 \Rightarrow 3n+10\cdot 2+6\cdot 4=65 \Rightarrow n=7$

Sabemos que 7 é divisor, de 0 a 100, dos números 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91 e 98. Portanto, a alternativa correta é **c**.

28. $\begin{cases} 8L+2A=10\cdot 3{,}4 \\ L+4A=5\cdot 4{,}6 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8L+2A=34 & \cdot(-2) \\ L+4A=23 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -16L-4A=-68 \\ L+4A=23 \end{cases} \oplus$$

$$-15L=-45 \Rightarrow L=3$$

$L+4A=23 \Rightarrow 3+4A=23 \Rightarrow A=5$

Portanto, um litro de suco de laranja custa R$ 3,00 e um litro de suco de acerola custa R$ 5,00.

Escalonamento no GeoGebraPrim

a) SPD; $S=\{(1,-1)\}$

b) SPI

c) SPD; $S=\{(-1,2,0,-3)\}$

30. a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Assim, temos a-II, b-I, c-III.

31. a) 2×5

b) ▪ π ▪ $\sqrt{3}$ ▪ 1,5 ▪ −6

c) ▪ a_{13} ▪ a_{25} ▪ a_{22} ▪ a_{15}

d) 5×2

32. a) $F=\begin{bmatrix} 24 & 9 & 5 \\ 21 & 6 & 11 \\ 20 & 8 & 10 \\ 18 & 8 & 12 \\ 17 & 9 & 12 \end{bmatrix}$

b) $F^t=\begin{bmatrix} 24 & 21 & 20 & 18 & 17 \\ 9 & 6 & 8 & 8 & 9 \\ 5 & 11 & 10 & 12 & 12 \end{bmatrix}$

c) f_{42}; f_{24}

d)

Classificação

	Corinthians/SP	Atlético/MG	Grêmio/RS	São Paulo/SP	Internacional/RS
Vitórias	24	21	20	18	17
Empates	9	6	8	8	9
Derrotas	5	11	10	12	12

Fonte: Confederação Brasileira de Futebol. Disonível em: <www.cbf.com.br/competicoes/brasileiro-serie-a/classificacao/2015#Vp0Jc5orIdU>. Acesso em: 18 jan. 2016.

33. a) $a_{22}=U$, $a_{42}=V$ e $a_{23}=A$; $a_{22}a_{42}a_{23} \rightarrow$ UVA

b) $a_{14}=C$, $a_{23}=A$, $a_{43}=J$ e $a_{22}=U$; $a_{14}a_{23}a_{43}a_{22} \rightarrow$ CAJU

c) $a_{21}=G$, $a_{24}=O$, $a_{44}=I$, $a_{23}=A$, $a_{41}=B$ e $a_{23} \rightarrow A$;
$a_{21}a_{24}a_{44}a_{23}a_{41}a_{23} \rightarrow$ GOIABA

d) $a_{23}=A$, $a_{41}=B$, $a_{23}=A$, $a_{14}=C$, $a_{23}=A$, $a_{12}=T$ e $a_{32}=E$;
$a_{23}a_{41}a_{23}a_{14}a_{23}a_{12}a_{32} \rightarrow$ ABACATE

34. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; Assim, temos que $a_{ij}=\begin{cases} 0, \text{ se } i \geq j \\ 1, \text{ se } i < j \end{cases}$.

Portanto, a alternativa correta é c.

35. a) $A=\begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

b) $B=\begin{bmatrix} 2\cdot 1-1 & 2\cdot 1-2 \\ 2\cdot 2-1 & 2\cdot 2-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

d) $D=\begin{bmatrix} (1+1)^2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}$

36. a) $2x=x+1 \Rightarrow x=1$

b) $\begin{cases} -2=z-2 \Rightarrow z=0 \\ 3-2y=y \Rightarrow y=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{sen}\alpha=0{,}5 \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{6}+2k\pi \text{ com } k\in\mathbb{Z} \\ \cos\beta=-1 \Rightarrow \beta=\pi+2k\pi \text{ com } k\in\mathbb{Z} \\ \text{tg}\delta=\text{tg}\delta \Rightarrow \delta \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \text{ com } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

37. a) Correta, pois pode-se ir de **C** até **B** e depois de **B** até **E**.

b) Incorreta, pois as cidades **A**, **D**, e **F** só têm estradas entre si, ou seja,não se ligam a outras cidades.

c) Correta, pois a matriz é simétrica em relação à diagonal principal.

d) Correta, pois pode-se ir de **A** até **D** diretamente ou pode-se ir de **A** até **F** e, depois, de **F** até **D**.

Portanto, a alternativa incorreta é **b**.

Semáforos e matrizes

a) ▪ 1min ▪ 0,5min ▪ 1min

b) ▪ **C** para **A**: $v=\frac{6}{2}\cdot 20\cdot 1{,}5=90 \rightarrow 90$ veículos

▪ **B** para **A**: $v=\frac{30}{2}\cdot 20\cdot 0{,}5=150 \rightarrow 150$ veículos

▪ **A** para **B**: $v=\frac{3\cdot 60}{2}\cdot 20\cdot 1{,}5=2\,700 \rightarrow 2\,700$ veículos

38. a) $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 & 3 \end{bmatrix}=$
$=\begin{bmatrix} 3+6 & -5+8 & 2+9 & 7+3 \end{bmatrix}=$
$=\begin{bmatrix} 9 & 3 & 11 & 10 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 10 & -6 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}=$
$=\begin{bmatrix} -4-8 & 7-1 \\ 10-3 & -6-(-2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 12 & -1 & 8 \\ 15 & 9 & -13 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 10 & 6 & -8 \\ 1 & 11 & 5 \end{bmatrix}=$
$=\begin{bmatrix} 12+10 & -1+6 & 8+(-8) \\ 15+1 & 9+11 & -13+5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 22 & 5 & 0 \\ 16 & 20 & -8 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 19 & 26 & 14 \\ 11 & 6 & 32 \\ 45 & 12 & 7 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 20 & 16 & 3 \\ 7 & -6 & 5 \\ 15 & 3 & -11 \end{bmatrix}=$
$=\begin{bmatrix} 19-20 & 26-16 & 14-3 \\ 11-7 & 6-(-6) & 32-5 \\ 45-15 & 12-3 & 7-(-11) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 10 & 11 \\ 4 & 12 & 27 \\ 30 & 9 & 18 \end{bmatrix}$

39. a) a-I, pois $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}=$
$=\begin{bmatrix} 1+(-1) & -2+2 \\ 7+(-8) & -8+8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) b-IV, pois $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}=$
$=\begin{bmatrix} 1+(-1) & 7+(-7) \\ -2+2 & -8+8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) c-III, pois

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & -1 \\ 6 & -9 & 8 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 6 & 1 \\ -6 & 9 & -8 \\ 3 & -4 & -7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5+(-5) & -6+6 & -1+1 \\ 6+(-6) & -9+9 & 8+(-8) \\ -3+3 & 4+(-4) & 7+(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) d-II, pois

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & -1 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & -9 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 6 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \\ -6 & 9 & -8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5+(-5) & -6+6 & -1+1 \\ -3+3 & 4+(-4) & 7+(-7) \\ 6+(-6) & -9+9 & 8+(-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

40. a) $A = \begin{bmatrix} 4\,994\,719 & 2\,669\,311 & 4\,737\,420 \\ 5\,193\,079 & 2\,687\,049 & 4\,826\,038 \end{bmatrix}$;

$B = \begin{bmatrix} 5\,202\,057 & 3\,100\,360 & 5\,130\,994 \\ 5\,488\,872 & 3\,148\,076 & 5\,313\,532 \end{bmatrix}$

b) $B-A = \begin{bmatrix} \underbrace{207\,338}_{5202057-4994719} & \underbrace{431\,049}_{3100360-2669311} & \underbrace{393\,574}_{5130994-4737420} \\ \underbrace{295\,793}_{5488872-5193079} & \underbrace{461\,027}_{3148076-2687049} & \underbrace{487\,494}_{5313532-4826038} \end{bmatrix}$

c) O aumento da população feminina e masculina nos estados da região Sul do Brasil entre os anos de 2000 e 2010.

41. a) Sejam as matrizes $X = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 14 \\ 6 & 11 & 13 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 15 \\ 14 & 12 & 12 \end{bmatrix}$, temos que $Z = X + Y = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 14 \\ 6 & 11 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 11 & 15 \\ 14 & 12 & 12 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 19 & 29 \\ 20 & 23 & 25 \end{bmatrix}$$

b) 3º ano

42. a) $\begin{bmatrix} 3 & x \\ 4 & z^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2x \\ y & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3x \\ y+4 & z^2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \\ y + 4 = -1 \Rightarrow y = -5 \\ z^2 - 1 = 0 \Rightarrow z = 1 \text{ ou } z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{bmatrix} x & -y & \frac{z}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x-2 & -4y & -\frac{z}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 5 \Rightarrow x = 7 \\ -4y = 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \\ -\frac{z}{2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow z = 5 \end{cases}$

c) $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4x \\ 6 \\ y^2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ -6 \\ \frac{z}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4x-2 \\ 1 \\ y^2+y-6 \\ z-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ -6 \\ \frac{z}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$4x - 2 = x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow y^2 + y - 6 = -6 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = -1$

$z - 1 = \frac{z}{3} \Rightarrow z = \frac{3}{2}$

43. $A = \begin{bmatrix} 3\cdot 1-2\cdot 1 & 3\cdot 1-2\cdot 2 & 3\cdot 1-2\cdot 3 \\ 3\cdot 2-2\cdot 1 & 3\cdot 2-2\cdot 2 & 3\cdot 2-2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1+1 & 3\cdot 1-2 \\ 2+1 & 2+2 \\ 3+1 & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

a) $A^t + B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A - B^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -7 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

Não, pois as matrizes são de ordens diferentes, sendo A^t de ordem 3×2 enquanto B^t é de ordem 2×3.

44. $\underbrace{I_2 + I_2 + I_2 + \ldots + I_2}_{n} = n \cdot I_2 = n \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} n\cdot 1 & n\cdot 0 \\ n\cdot 0 & n\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$

45. a) $2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ y \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x \\ 2 \\ 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ y \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x = -6 \Rightarrow x = -3 \\ y = 2 \\ 4z = 4 \Rightarrow z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{y}{3} & 0 \end{bmatrix} \cdot (-6) = \begin{bmatrix} 2x & -5 & z \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -6 & -2y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -5 & z \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x = -6 \Rightarrow x = -3 \\ -2y = -5 \Rightarrow y = \frac{5}{2} \\ z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x}{2} & 0 \\ -y & z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{3} & 0 \\ -\frac{2y}{3} & \frac{2z}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3 \\ 6 = -\frac{2y}{3} \Rightarrow y = -9 \\ -2 = \frac{2z}{3} \Rightarrow z = -3 \end{cases}$

d) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & y & z \\ x & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 6 \\ -1 & 6 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -3\cdot 1+1\cdot x & -3\cdot y+1\cdot 3 & -3\cdot z+1\cdot 0 \\ 1\cdot 1+2\cdot x & 1\cdot y+2\cdot 3 & 1\cdot z+2\cdot 0 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -4 & 3 & 6 \\ -1 & 6 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x-3 & -3y+3 & -3z \\ 1+2x & y+6 & z \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -4 & 3 & 6 \\ -1 & 6 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-3=-4 \Rightarrow x=-1 \\ 1+2x=-1 \Rightarrow x=-1 \\ -3y+3=3 \Rightarrow y=0 \\ y+6=6 \Rightarrow y=0 \\ -3z=6 \Rightarrow z=-2 \\ z=-2 \end{cases}$

46. $5\cdot S = 5\cdot \begin{bmatrix} 5{,}2 & 5 & 4{,}8 \\ 1{,}9 & 2{,}1 & 1{,}8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 25 & 24 \\ 9{,}5 & 10{,}5 & 9 \end{bmatrix}$

47. a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 4 & 1\cdot(-3) \\ 2\cdot 4 & 2\cdot(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cdot 0+1\cdot 3 \\ -1\cdot 0+0\cdot 3 \\ 1\cdot 0+4\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 0\cdot 3+2\cdot 1 & 0\cdot 0+2\cdot 6 & 0\cdot(-1)+2\cdot 0 \\ -5\cdot 3+1\cdot 1 & -5\cdot 0+1\cdot 6 & -5\cdot(-1)+1\cdot 0 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 2 & 12 & 0 \\ -14 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 0\cdot 2+3\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot(-4) & 0\cdot(-6)+3\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 0 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix}$

48. a) impossível
b) 1×2
c) impossível
d) 2×6
e) 7×2
f) impossível

49. a) $3A = 3\cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 15 \end{bmatrix}$

b) $B - C^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -10 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

c) $A\cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 0+(-4) & 0+0 & 0+8 \\ -1+(-10) & -2+0 & 5+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 8 \\ -11 & -2 & 25 \end{bmatrix}$

d) $B\cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -1+6+(-25) & 1+0+(-10) \\ 2+0+20 & -2+0+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -9 \\ 22 & 6 \end{bmatrix}$

e) $2C\cdot A = 2\cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 6 & 0 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+(-2) & -4+10 \\ 0+0 & 12+0 \\ 0+(-4) & 20+20 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 12 \\ -4 & 40 \end{bmatrix}$

f) $(B\cdot C)\cdot A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -20 & -9 \\ 22 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 0+9 & -40+(-45) \\ 0+(-6) & 44+30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -85 \\ -6 & 74 \end{bmatrix}$

50. $V = Q\cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \\ 30 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 2\cdot 10+1\cdot 50+1\cdot 30 \\ 1\cdot 10+2\cdot 50+0\cdot 30 \\ 2\cdot 10+0\cdot 50+2\cdot 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 110 \\ 80 \end{bmatrix}$

Portanto, a alternativa correta é **e**.

51. a) $P\cdot Q = \begin{bmatrix} 500 & 300 \\ 400 & 200 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 & 100 & 150 \\ 100 & 150 & 200 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} \underbrace{130\,000}_{100\,000+30\,000} & \underbrace{95\,000}_{50\,000+45\,000} & \underbrace{135\,000}_{75\,000+60\,000} \\ \underbrace{100\,000}_{80\,000+20\,000} & \underbrace{70\,000}_{40\,000+30\,000} & \underbrace{100\,000}_{60\,000+40\,000} \end{bmatrix}$

Preço, em reais, que a empresa 1 cobra para transportar o produto **C** aos dois países.

b) a_{21}

c) $E_1 = 130\,000 + 95\,000 + 135\,000 = 360\,000$;
$E_2 = 100\,000 + 70\,000 + 100\,000 = 270\,000$
A empresa 2, pois seu preço é menor que o da empresa 1.

52. Em cada célula da matriz $A\times B$ será apresentada a soma do produto da quantidade de parafusos da caixa pequena pela quantidade de caixas pequenas produzidas no mês com o produto da quantidade de parafusos da caixa grande pela quantidade de caixas grandes produzidas no mês, para cada modelo de parafuso, ou seja, a produção mensal de parafusos. Portanto, a alternativa correta é **c**.

53. a) Se existir, a inversa da matriz **A** será a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, em que $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_2$, ou seja:

$A\cdot A^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3\cdot a+1\cdot c & 3\cdot b+1\cdot d \\ 5\cdot a+2\cdot c & 5\cdot b+1\cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3a+c & 3b+d \\ 5a+2c & 5b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Montando os sistemas, temos:

- $\begin{cases} 3a+c=1 & \cdot(-2) \\ 5a+2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6a-2c=-2 \\ 5a+2c=0 \end{cases} \oplus$

$-a=-2 \Rightarrow a=2$

$3a+c=1 \Rightarrow 3\cdot 2+c=1 \Rightarrow c=-5$

- $\begin{cases} 3b+d=0 & \cdot(-2) \\ 5b+2d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6b-2d=0 \\ 5b+2d=1 \end{cases} \oplus$

$-b=1 \Rightarrow b=-1$

$3b+d=0 \Rightarrow 3\cdot(-1)+d=0 \Rightarrow d=3$

Logo, temos $A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$.

Em seguida, verificamos se $A^{-1}\cdot A=I_2$.

$A^{-1}\cdot A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix} 6+(-5) & 2+(-2) \\ -15+15 & -5+6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I_2$

Portanto, a matriz inversa de **A** é $A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$.

b) Se existir, a inversa da matriz **B** será a matriz $B^{-1}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, em que $B\cdot B^{-1}=B^{-1}\cdot B=I_2$, ou seja:

$B\cdot B^{-1}=I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3\cdot a+6\cdot c & 3\cdot b+6\cdot d \\ 2\cdot a+4\cdot c & 2\cdot b+4\cdot d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3a+6c & 3b+6d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Montando os sistemas, temos:

- $\begin{cases} 3a+6c=1 \\ 2a+4c=0 & \cdot\left(-\frac{3}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+6c=1 \\ -3a-6c=0 \end{cases} \oplus$

$0=1$ (impossível)

- $\begin{cases} 3b+6d=0 \\ 2b+4d=1 & \cdot\left(-\frac{3}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b+6d=0 \\ -3b-6d=-\frac{3}{2} \end{cases} \oplus$

$0=-\frac{3}{2}$ (impossível)

Como os sistemas são impossíveis, não podemos determinar os elementos da matriz B^{-1}. Portanto, podemos afirmar que a matriz **B** não possui matriz inversa.

c) Se existir, a inversa da matriz **C** será a matriz $C^{-1}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, em que $C\cdot C^{-1}=C^{-1}\cdot C=I_2$, ou seja:

$C\cdot C^{-1}=I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1\cdot a-3\cdot c & -1\cdot b-3\cdot d \\ 2\cdot a+6\cdot c & 2\cdot b+6\cdot d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -a-3c & -b-3d \\ 2a+6c & 2b+6d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Montando os sistemas, temos:

- $\begin{cases} -a-3c=1 & \cdot 2 \\ 2a+6c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a-6c=-2 \\ 2a+6c=0 \end{cases} \oplus$

$0=-2$ (impossível)

- $\begin{cases} -b-3d=0 & \cdot 2 \\ 2b+6d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2b-6d=0 \\ 2b+6d=1 \end{cases} \oplus$

$0=1$ (impossível)

Como os sistemas são impossíveis, não podemos determinar os elementos da matriz C^{-1}. Portanto, podemos afirmar que a matriz **C** não possui matriz inversa.

d) Se existir, a inversa da matriz **D** será a matriz $D^{-1}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, em que $D\cdot D^{-1}=D^{-1}\cdot D=I_3$, ou seja:

$D\cdot D^{-1}=I_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3\cdot a+(-1)\cdot g & 3\cdot b+(-1)\cdot h & 3\cdot c+(-1)\cdot i \\ 1\cdot a & 1\cdot b & 1\cdot c \\ 2\cdot d & 2\cdot e & 2\cdot f \end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3a-g & 3b-h & 3c-i \\ a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Montando os sistemas, temos:

- $\begin{cases} 3a-g=1 \\ a=0 \\ 2d=0 \end{cases}$

$3a-g=1 \Rightarrow 3\cdot 0-g=1 \Rightarrow g=-1$

$2d=0 \Rightarrow d=0$

- $\begin{cases} 3b-h=0 \\ b=1 \\ 2e=0 \end{cases}$

$3b-h=0 \Rightarrow 3\cdot 1-h=0 \Rightarrow h=3$

$2e=0 \Rightarrow e=0$

- $\begin{cases} 3c-i=0 \\ c=0 \\ 2f=1 \end{cases}$

$3c-i=0 \Rightarrow 3\cdot 0-i=0 \Rightarrow i=0$

$2f=1 \Rightarrow f=\frac{1}{2}$

Logo, temos $D^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Em seguida, verificamos se $D^{-1}\cdot D=I_3$.

$D^{-1}\cdot D=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix} 0+1+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+1 & 0+0+0 \\ -3+3+0 & 0+0+0 & 1+0+0 \end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I_3$

Portanto, a matriz inversa de **D** é $D^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

54. $A\cdot B=\begin{bmatrix}0&1&2\\-2&0&2\\2&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&0,5&1\\3&-2&-2\\-1&1&1\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}0+3-2&0-2+2&0+2-2\\2+0-2&-1+0+2&-2+0+2\\-2+3-1&1-2+1&2-2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I_3$

$B\cdot A=\begin{bmatrix}-1&0,5&1\\3&-2&-2\\-1&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&2\\-2&0&2\\2&1&1\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}0-1+2&-1+0+1&-2+1+1\\0+4-4&3+0-2&6-4-2\\0-2+2&-1+0+1&-2+2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I_3$

Portanto, a matriz **B** é a inversa da matriz **A**.

55. $A=\begin{bmatrix}2&5\\3&6\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}3&2\\7&6\end{bmatrix}$

Se existir, a inversa da matriz **A** será a matriz $A^{-1}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, em que $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_2$, ou seja:

$A\cdot A^{-1}=I_2\Rightarrow\begin{bmatrix}2&5\\3&6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}2a+5c&2b+5d\\3a+6c&3b+6d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

Montando os sistemas, temos:

- $\begin{cases}2a+5c=1 & \cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\\3a+6c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3a-\frac{15}{2}c=-\frac{3}{2}\\3a+6c=0\end{cases}\oplus$

  $-\frac{3}{2}c=-\frac{3}{2}\Rightarrow c=1$

  $2a+5c=1\Rightarrow 2a+5\cdot1=1\Rightarrow a=-2$

- $\begin{cases}2b+5d=0 & \cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\\3b+6d=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3b-\frac{15}{2}d=0\\3b+6d=1\end{cases}\oplus$

  $-\frac{3}{2}d=1\Rightarrow d=-\frac{2}{3}$

  $2b+5d=0\Rightarrow 2b+5\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=0\Rightarrow b=\frac{5}{3}$

Logo, temos $A^{-1}=\begin{bmatrix}-2&\frac{5}{3}\\1&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$.

Em seguida, verificamos se $A^{-1}\cdot A=I_2$.

$A^{-1}\cdot A=\begin{bmatrix}-2&\frac{5}{3}\\1&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&5\\3&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4+5&-10+10\\2+(-2)&5+(-4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I_2$

Portanto, a matriz inversa de **A** é $A^{-1}=\begin{bmatrix}-2&\frac{5}{3}\\1&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$.

Se existir, a inversa da matriz **B** será a matriz $B^{-1}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, em que $B\cdot B^{-1}=B^{-1}\cdot B=I_2$, ou seja:

$B\cdot B^{-1}=I_2\Rightarrow\begin{bmatrix}3&2\\7&6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}3a+2c&3b+2d\\7a+6c&7b+6d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

Montando os sistemas, temos:

- $\begin{cases}3a+2c=1 & \cdot(-3)\\7a+6c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-9a-6c=-3\\7a+6c=0\end{cases}\oplus$

  $-2a=-3\Rightarrow a=\frac{3}{2}$

  $3a+2c=1\Rightarrow 3\cdot\frac{3}{2}+2c=1\Rightarrow c=-\frac{7}{4}$

- $\begin{cases}3b+2d=0 & \cdot(-3)\\7b+6d=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-9b-6d=0\\7b+6d=1\end{cases}\oplus$

  $-2b=1\Rightarrow b=-\frac{1}{2}$

  $3b+2d=0\Rightarrow 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2d=0\Rightarrow d=\frac{3}{4}$

Logo, temos $B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}\end{bmatrix}$.

Em seguida, verificamos se $B^{-1}\cdot B=I_2$.

$B^{-1}\cdot B=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&2\\7&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{9}{2}-\frac{7}{2}&3-3\\-\frac{21}{4}+\frac{21}{4}&-\frac{14}{4}+\frac{18}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I_2$

Portanto, a matriz inversa de **B** é $B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}\end{bmatrix}$.

a) $(B^{-1})^t=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{7}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\end{bmatrix}$

b) $A^{-1}\cdot B=\begin{bmatrix}-2&\frac{5}{3}\\1&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&2\\7&6\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}-6+\frac{35}{3}&-4+10\\3-\frac{14}{3}&2-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{17}{3}&6\\-\frac{5}{3}&-2\end{bmatrix}$

c) $A^{-1}\cdot B^{-1}=\begin{bmatrix}-2&\frac{5}{3}\\1&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{7}{4}&\frac{3}{4}\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}-3-\frac{35}{12}&1+\frac{5}{4}\\\frac{3}{2}+\frac{7}{6}&-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{71}{12}&\frac{9}{4}\\\frac{8}{3}&-1\end{bmatrix}$

$(A^{-1}\cdot B^{-1})^t=\begin{bmatrix}-\frac{71}{12}&\frac{8}{3}\\\frac{9}{4}&-1\end{bmatrix}$

56. a) $X\cdot A\cdot B=B\Rightarrow X\cdot A\cdot\underbrace{B\cdot B^{-1}}_{I_n}\cdot A^{-1}=\underbrace{B\cdot B^{-1}}_{I_n}\cdot A^{-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow X\cdot\underbrace{A\cdot A^{-1}}_{I_n}=A^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}$

b) $A\cdot B\cdot X=I_n\Rightarrow B^{-1}\cdot\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I_n}\cdot B\cdot X=B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot I_n\Rightarrow$

$\Rightarrow\underbrace{B^{-1}\cdot B}_{I_n}\cdot X=B^{-1}\cdot A^{-1}\Rightarrow X=B^{-1}\cdot A^{-1}$

c) $A^2\cdot X=A\cdot B\Rightarrow\underbrace{\left(A^2\right)^{-1}\cdot A^2}_{I_n}\cdot X=\underbrace{\left(A^2\right)^{-1}\cdot A}_{A^{-1}}\cdot B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$

57. Se existir, a inversa da matriz **M** será a matriz $M^{-1}=\begin{bmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$, em que $M\cdot M^{-1}=M^{-1}\cdot M=I_3$, ou seja:

$$M\cdot M^{-1}=I_3\Rightarrow\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} 6a & 6b & 6c\\ 6d & 6e & 6f\\ 6g & 6h & 6i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Montando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 6a=1\Rightarrow a=\dfrac{1}{6}\\ 6b=0\Rightarrow b=0\\ 6c=0\Rightarrow c=0\\ 6d=0\Rightarrow d=0\\ 6e=1\Rightarrow e=\dfrac{1}{6}\\ 6f=0\Rightarrow f=0\\ 6g=0\Rightarrow g=0\\ 6h=0\Rightarrow h=0\\ 6i=1\Rightarrow i=\dfrac{1}{6}\end{cases}$$

Logo, temos $M^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$.

Em seguida, verificamos se $M^{-1}\cdot M=I_3$.

$$M^{-1}\cdot M=\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{6}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0\\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0\\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1\end{bmatrix}=I_3$$

Portanto, a matriz inversa de **M** é $M^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$.

58. Como $A^2=A$, temos que

$$\begin{bmatrix} a & 0\\ b & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & 0\\ b & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 0\\ b & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2 & 0\\ ba+b & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 0\\ b & 1\end{bmatrix}$$

temos assim,

$$\begin{cases} a^2=a\\ ba+b=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a^2=a\\ ba+b=b\end{cases}$$

Logo $a=0$ e $b\in\mathbb{R}$ ou $a=1$ e $b=0$.

Se $a=0$ e $b\in\mathbb{R}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0\\ b & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & y\\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0\\ bx+z & by+w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Impossível, pois $1\neq 0$.

Agora, se $a=1$ e $b=0$, então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & y\\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

É verdadeira, basta tomar $x=w=1$ e $y=z=0$.

Portanto, a alternativa correta é **b**.

59. Se existir, a inversa da matriz **A** será a matriz $A^{-1}=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, em que $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_2$, ou seja:

$$A\cdot A^{-1}=I_2\Rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} a+c & b+d\\ 2a+3c & 2b+3d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Montando os sistemas, temos:

- $\begin{cases} a+c=1 & \cdot(-2)\\ 2a+3c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -2a-2c=-2\\ 2a+3c=0\end{cases}\oplus$

  $c=-2$

  $a+c=1\Rightarrow a+(-2)=1\Rightarrow a=3$

- $\begin{cases} b+d=0 & \cdot(-2)\\ 2b+3d=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -2b-2d=0\\ 2b+3d=1\end{cases}\oplus$

  $d=1$

  $b+d=0\Rightarrow b+1=0\Rightarrow b=-1$

Logo, temos $A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$.

Em seguida, verificamos se $A^{-1}\cdot A=I_2$.

$$A^{-1}\cdot A=\begin{bmatrix} 3 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 3+(-2) & 3+(-3)\\ -2+2 & -2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$$

Portanto, a matriz inversa de **A** é $A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$.

Se existir, a inversa da matriz **B** será a matriz $B^{-1}=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, em que $B\cdot B^{-1}=B^{-1}\cdot B=I_2$, ou seja:

$$B\cdot B^{-1}=I_2\Rightarrow\begin{bmatrix} -2 & 3\\ 3 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} -2a+3c & -2b+3d\\ 3a-4c & 3b-4d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Montando os sistemas, temos:

- $\begin{cases} -2a+3c=1 \\ 3a-4c=0 \end{cases} \cdot\left(\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} -3a+\dfrac{9}{2}c=\dfrac{3}{2} \\ 3a-4c=0 \end{cases} \oplus$

$$\frac{1}{2}c=\frac{3}{2}\Rightarrow c=3$$

$3a-4c=0 \Rightarrow 3a-4\cdot 3=0 \Rightarrow a=4$

- $\begin{cases} -2b+3d=0 \\ 3b-4d=1 \end{cases} \cdot\left(\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} -3b+\dfrac{9}{2}d=0 \\ 3b-4d=1 \end{cases} \oplus$

$$\frac{1}{2}d=1\Rightarrow d=2$$

$-2b+3d=0 \Rightarrow -2b+3\cdot 2=0 \Rightarrow b=3$

Logo, temos $B^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Em seguida, verificamos se $B^{-1}\cdot B=I_2$.

$$B^{-1}\cdot B=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -8+9 & 12+(-12) \\ -6+6 & 9+(-8) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I_2$$

Portanto, a matriz inversa de **B** é $B^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

a) $A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A\cdot B^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4+3 & 3+2 \\ 8+9 & 6+6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 17 & 12 \end{bmatrix}$

c) $B^{-1}+I_2=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

d) $A^{-1}-B^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$

60. $C\cdot D=I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & -1 \\ y & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{bmatrix} 2x+y & 0 \\ 5x+3y & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Montando o sistema, temos:

$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 5x+3y=0 \end{cases} \cdot(-3) \Rightarrow \begin{cases} -6x-3y=-3 \\ 5x+3y=0 \end{cases} \oplus$

$$-x=-3\Rightarrow x=3$$

$2x+y=1\Rightarrow 2\cdot 3+y=1\Rightarrow y=-5$

Portanto, $x=3$ e $y=-5$.

Conexão tecnológica

1. • $A^t=\begin{bmatrix} 9 & -9 & 5 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ • $B^t=\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -3 & 5 \\ -3 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

2. • $A+B=\begin{bmatrix} 16 & 7 & -8 \\ 5 & 10 & 15 \\ -14 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

• $B-A=\begin{bmatrix} 2 & 9 & 2 \\ -5 & 8 & -1 \\ 4 & -2 & -9 \end{bmatrix}$

• $A\cdot B=\begin{bmatrix} 88 & 52 & -13 \\ 5 & 41 & -32 \\ -111 & -69 & 16 \end{bmatrix}$

• $3A-4B=\begin{bmatrix} -15 & -35 & -3 \\ 15 & -33 & -4 \\ -7 & 7 & 30 \end{bmatrix}$

3. • $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$

$a=1$, $b=-2$, $c=3$, $d=-4$ e $e=5$

Portanto, $S=\{(1,-2,3,-4,5)\}$.

• $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -6 & -3 \\ -9 & -9 & -3 & -12 & 9 \\ -4 & 5 & -6 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & 3 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 21 \\ -48 \\ -10 \\ 15 \\ -16 \end{bmatrix}$

O sistema não pode ser resolvido por esse método, pois ele é possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI).

Unidade 4

Determinantes e resolução de sistemas lineares

1. a) $\det A=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot 1\cdot(-1)+3\cdot 2\cdot(-1)+$

$+1\cdot 0\cdot(-1)-1\cdot 1\cdot(-1)-2\cdot 2\cdot(-1)-3\cdot 0\cdot(-1)=$

$=-2-6+0+1+4+0=-3$

b) $\det B=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot(-2)-2\cdot(-1)=-2+2=0$

c) $\det C=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}=3\cdot 4\cdot 1+(-2)\cdot 2\cdot 1+$

$+5\cdot 0\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)-5\cdot 4\cdot 1-3\cdot 2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)-(-2)\cdot 0\cdot 1=$

$=12-4+0-20+3-0=-9$

d) $\det D=\begin{vmatrix} 5 & -9 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} \end{vmatrix}=5\cdot\dfrac{2}{5}-(-9)\cdot\dfrac{1}{3}=2+3=5$

2. • $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ x & 4 & 1 \\ -1 & 6 & y \end{vmatrix}=63\Rightarrow 3\cdot 4\cdot y+1\cdot 1\cdot(-1)+$

$+2\cdot x\cdot 6-2\cdot 4\cdot(-1)-3\cdot 1\cdot 6-1\cdot x\cdot y=63\Rightarrow$

$\Rightarrow 12y-1+12x+8-18-xy=63\Rightarrow$

$\Rightarrow 12y+12x-xy=74 \quad \text{(I)}$

• $\begin{vmatrix} 6 & y & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ x & -1 & 1 \end{vmatrix}=49\Rightarrow 6\cdot 4\cdot 1+y\cdot 3\cdot x+$

$+2\cdot 1\cdot(-1)-2\cdot 4\cdot x-6\cdot 3\cdot(-1)-y\cdot 1\cdot 1=49\Rightarrow$

$\Rightarrow 24+3xy-2-8x+18-y=49\Rightarrow$

$\Rightarrow 3xy-8x-y=9 \quad \text{(II)}$

Note que, ao somar a equação II com a equação I multiplicada por 3, obtemos uma equação linear.

$3xy - 8x - y + 3(12y + 12x - xy) = 9 + 3 \cdot 74 \Rightarrow$

$\Rightarrow 28x + 35y = 231 \Rightarrow 4x + 5y = 33$

Como $y = x + 3$, segue que:

- $4x + 5 \cdot (x+3) = 33 \Rightarrow 9x + 15 = 33 \Rightarrow 9x = 18 \Rightarrow x = 2$
- $y = 2 + 3 = 5$

Assim:

$x + y = 2 + 5 = 7$

Portanto, a alternativa correta é **a**.

3. ▪ $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 5 +$

$+ 4 \cdot 0 \cdot 3 - 4 \cdot 0 \cdot 5 - (-1) \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$

▪ $\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot 4 +$

$+ 0 \cdot (-3) \cdot 2 - 0 \cdot (-2) \cdot 4 - 0 \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot (-3) \cdot 3 = 0$

▪ $\det C = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 \cdot 0 +$

$+ 2 \cdot 3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \cdot 0 - (-1) \cdot 4 \cdot 0 - (-1) \cdot 3 \cdot 0 = 0$

As três matrizes apresentaram uma linha na qual todos os elementos são iguais a zero e também o mesmo determinante, que é zero.

Uma possível matriz genérica com a mesma característica das anteriores é:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{bmatrix}$$

Qualquer matriz quadrada que apresente todos os elementos de uma linha ou coluna iguais a zero terá determinante igual a zero.

4. ▪ $a_{11} = 0;\ a_{12} = 1 + 2 = 3;\ a_{21} = 2 - 1 = 1;\ a_{22} = 0$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

▪ $b_{11} = 1;\ b_{12} = 1 - 2 = -1;\ b_{21} = 2 + 1 = 3;\ b_{22} = 1$

$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

a) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -12$

b) $A - B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

$\det(A - B) = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) - 4 \cdot (-2) = 9$

c) $B - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(B - A) = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-4) \cdot 2 = 9$

5. Resposta esperada: quando uma matriz apresenta um par de linhas ou de colunas iguais, seu determinante é igual a zero.

Para uma matriz genérica com a primeira linha igual à terceira, por exemplo temos:

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix} \Rightarrow \det X = aec + bfa + cdb - aec - bfa - cdb = 0$$

6. a) $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 0 - 12 + 16 - 1 + 0 = -1$

b) $\det B = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 15 + 0 + 0 - 18 + 0 = 3$

c) $\det C = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 0 + 4 - 4 + 0 = -1$

d) $\det(A \cdot C) = \det A \cdot \det C = (-1) \cdot (-1) = 1$

e) $\det(B \cdot C) = \det B \cdot \det C = 3 \cdot (-1) = -3$

7. Sim, pois:

$\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det A \cdot \det A = (\det A)^2$

8. $A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 10^3$

$\det B = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3^3 = 27$

Assim:

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 10^3 \cdot 27$

Portanto, a alternativa correta é **a**.

9. Verdadeira. Se **A** é invertível, então

$A \cdot A^{-1} = I_n \Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) \Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1$ logo, $\det A \neq 0$.

10. Inicialmente, vamos calcular o determinante de cada matriz.

a) $\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 - 2 \cdot (-4) + 6 \cdot (-8) = 16 + 8 - 48 = -24$

b) $\det B = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 8 = 8$

c) $\det A \cdot B = \det A \cdot \det B = -24 \cdot 8 = -192$

11. Observe que

$$\det \begin{pmatrix} \cos x & 0 & -\operatorname{sen} x \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} x & 0 & \cos x \end{pmatrix} = (\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 = 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, a matriz A é invertível para todo x.

Portanto, a alternativa correta é **d**.

Calculando o determinante de uma matriz com o CALC

a) 66 b) 75 c) −234

12. a) $\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{incompleta} \\ \text{do sistema}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{das} \\ \text{incógnitas}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -6 \\ 8 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{dos termos} \\ \text{independentes}}}$

b) $\underbrace{\begin{bmatrix} -3 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{incompleta} \\ \text{do sistema}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{das} \\ \text{incógnitas}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -15 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{dos termos} \\ \text{independentes}}}$

13. a) ▪ $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 18$

▪ $\det A_x = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 11 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 18$

▪ $\det A_y = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 11 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -18$

▪ $\det A_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 11 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 54$

Segue que:

▪ $x = \dfrac{\det A_x}{\det A} = \dfrac{18}{18} = 1$

▪ $y = \dfrac{\det A_y}{\det A} = \dfrac{-18}{18} = -1$

▪ $z = \dfrac{\det A_z}{\det A} = \dfrac{54}{18} = 3$

Portanto, $S = \{(1, -1, 3)\}$

b) $\det A = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Logo, não é possível resolver utilizando a regra de Cramer.
Resolvendo o sistema por escalonamento, temos:

$$\begin{cases} 4x-2y+z=7 & \cdot\frac{3}{4} \\ -3x+3y-5z=6 & \lrcorner + \\ 4x-2y+z=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-2y+z=7 & \cdot(-1) \\ \frac{3}{2}y-\frac{17}{4}z=\frac{45}{4} & + \\ 4x-2y+z=10 & \lrcorner \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x-2y+z=7 \\ \frac{3}{2}y-\frac{17}{4}z=\frac{45}{4} \\ 0x+0y+0z=3 \end{cases}$$

Note que a 3ª equação do sistema não é verdadeira para quaisquer valores de x, y e z, logo o sistema é impossível (SI). Portanto, $S=\varnothing$.

c) ▪ $\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \\ -5 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 1$

▪ $\det A_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 10 & -1 & 5 \\ -7 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -5$

▪ $\det A_y = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 10 & 5 \\ -5 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 25$

▪ $\det A_z = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 10 \\ -5 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 9$

Segue que:

▪ $x = \dfrac{\det A_x}{\det A} = \dfrac{-5}{1} = -5$

▪ $y = \dfrac{\det A_y}{\det A} = \dfrac{25}{1} = 25$

▪ $z = \dfrac{\det A_z}{\det A} = \dfrac{9}{1} = 9$

Portanto, $S = \{(-5, 25, 9)\}$

14. $A \cdot C = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2x+3y-z \\ -2x-3y+3z \\ x+2y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y-z=-4 \\ -2x-3y+3z=10 \\ x+2y+z=3 \end{cases}$

▪ $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$

▪ $\det A_x = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 10 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$

▪ $\det A_y = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -2 & 10 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$

▪ $\det A_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6$

Segue que:

▪ $x = \dfrac{\det A_x}{\det A} = \dfrac{4}{-2} = -2$

▪ $y = \dfrac{\det A_y}{\det A} = \dfrac{-2}{-2} = 1$

▪ $z = \dfrac{\det A_z}{\det A} = \dfrac{-6}{-2} = 3$

15. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-5 \\ 6-2 \\ 8-1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

▪ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$

▪ $\det A_x = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$

▪ $\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -4$

Segue que:

- $x = \dfrac{\det A_x}{\det A} = \dfrac{-5}{-1} = 5$
- $y = \dfrac{\det A_y}{\det A} = \dfrac{-4}{-1} = 4$

Assim, os dígitos verificadores são 54.

Portanto, a alternativa correta é **e**.

16. Denotando por x, y e z as quantidades, em quilogramas, de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará, respectivamente, em cada lata, temos:

$$\begin{cases} x+y+z=0,5 \\ 5x+20y+16z=5,75 \\ y=\frac{1}{3}(x+z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0,5 \\ 5x+20y+16z=5,75 \\ x-3y+z=0 \end{cases}$$

- $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 20 & 16 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 44$
- $\det A_x = \begin{vmatrix} 0,5 & 1 & 1 \\ 5,75 & 20 & 16 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 11$
- $\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 0,5 & 1 \\ 5 & 5,75 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5,5$
- $\det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0,5 \\ 5 & 20 & 5,75 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 5,5$

Segue que:

- $x = \dfrac{\det A_x}{\det A} = \dfrac{11}{44} = 0,25 \rightarrow 0,25$ kg ou 250 g
- $y = \dfrac{\det A_y}{\det A} = \dfrac{5,5}{44} = 0,125 \rightarrow 0,125$ kg ou 125 g
- $z = \dfrac{\det A_z}{\det A} = \dfrac{5,5}{44} = 0,125 \rightarrow 0,125$ kg ou 125 g

Portanto, a alternativa correta é **c**.

17. $$\begin{cases} \dfrac{9x+6y+7z}{x+y+z}=7,7 \\ \dfrac{8x+5y+9z}{x+y+z}=7,3 \\ \dfrac{5x+9y+7z}{x+y+z}=6,6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{9x+6y+7z}{10}=7,7 \\ \dfrac{8x+5y+9z}{10}=7,3 \\ \dfrac{5x+9y+7z}{10}=6,6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9x+6y+7z=77 \\ 8x+5y+9z=73 \\ 5x+9y+7z=66 \end{cases}$$

- $\det A = \begin{vmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 8 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 7 \end{vmatrix} = -151$
- $\det A_x = \begin{vmatrix} 77 & 6 & 7 \\ 73 & 5 & 9 \\ 66 & 9 & 7 \end{vmatrix} = -755$
- $\det A_y = \begin{vmatrix} 9 & 77 & 7 \\ 8 & 73 & 9 \\ 5 & 66 & 7 \end{vmatrix} = -453$
- $\det A_z = \begin{vmatrix} 9 & 6 & 77 \\ 8 & 5 & 73 \\ 5 & 9 & 66 \end{vmatrix} = -302$

Segue que:

- $x = \dfrac{\det A_x}{\det A} = \dfrac{-755}{-151} = 5$
- $y = \dfrac{\det A_y}{\det A} = \dfrac{-453}{-151} = 3$
- $z = \dfrac{\det A_z}{\det A} = \dfrac{-302}{-151} = 2$

18. $$\begin{cases} x+y+9=30 \\ x+z+7=30 \\ y+z+10=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=21 \\ x+z=23 \\ y+z=20 \end{cases}$$

- $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$
- $\det A_x = \begin{vmatrix} 21 & 1 & 0 \\ 23 & 0 & 1 \\ 20 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -24$
- $\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 21 & 0 \\ 1 & 23 & 1 \\ 0 & 20 & 1 \end{vmatrix} = -18$
- $\det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 21 \\ 1 & 0 & 23 \\ 0 & 1 & 20 \end{vmatrix} = -22$

Segue que:

- $x = \dfrac{\det A_x}{\det A} = \dfrac{-24}{-2} = 12$
- $y = \dfrac{\det A_y}{\det A} = \dfrac{-18}{-2} = 9$
- $z = \dfrac{\det A_z}{\det A} = \dfrac{-22}{-2} = 11$

19. Denotando por x, y e z as quantidades, em quilogramas, de papel, vidro e plástico, respectivamente, vendidos na primeira semana de setembro de 2009, temos:

$$\begin{cases} x+y+z=8\,000 \\ 0,3x+0,2y+0,5z=2\,580 \\ 1,5x+y+z=9\,000 \end{cases}$$

- $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 1,5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,15$
- $\det A_x = \begin{vmatrix} 8\,000 & 1 & 1 \\ 2\,580 & 0,2 & 0,5 \\ 9\,000 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 300$
- $\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 8\,000 & 1 \\ 0,3 & 2\,580 & 0,5 \\ 1,5 & 9\,000 & 1 \end{vmatrix} = 510$
- $\det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8\,000 \\ 0,3 & 0,2 & 2\,580 \\ 1,5 & 1 & 9\,000 \end{vmatrix} = 390$

Segue que:

- $x = \dfrac{\det A_x}{\det A} = \dfrac{300}{0,15} = 2\,000$
- $y = \dfrac{\det A_y}{\det A} = \dfrac{510}{0,15} = 3\,400$
- $z = \dfrac{\det A_z}{\det A} = \dfrac{390}{0,15} = 2\,600$

Logo, na primeira semana de setembro de 2010 foram vendidos $\underbrace{3\,000}_{1{,}5x}$ kg de papel, $\underbrace{3\,400}_{y}$ kg de vidro e $\underbrace{2\,600}_{z}$ kg de plástico. Assim, o valor de **R** é:

$R = 3\,000 \cdot 0{,}4 + 3\,400 \cdot 0{,}3 + 2\,600 \cdot 1 = 4\,820 \rightarrow$ R$ 4 820,00

Unidade 5

Análise combinatória

Princípio aditivo de contagem

a) Princípio aditivo.

$3 + 4 = 7 \rightarrow 7$ opções

b) Princípio multiplicativo.

$2 \cdot 8 = 16 \rightarrow 16$ opções

c) Princípio aditivo.

$4 + 2 = 6 \rightarrow 6$ maneiras

d) Princípio multiplicativo.

$6 \cdot 3 = 18 \rightarrow 18$ maneiras

Fatorial com a calculadora científica

a) $10! = 3\,628\,800$

b) $3 \cdot 9! = 1\,088\,640$

c) $(6!)^2 = 518\,400$

d) $3! + 7! = 5\,046$

e) $\frac{14!}{100} = 871\,782\,912$

f) $\frac{20!}{15!} = 1\,860\,480$

1. Note que as escolas **I**, **III** e **V** não têm chance de vencer a competição. Analisaremos então as escolas **II** e **IV**. Veja no quadro as possibilidades de nota atribuída pelo jurado **B** no quesito bateria para a escola **II** ser campeã:

Nota Escola II	10	10	10	9	9	8
Nota Escola IV	8	7	6	7	6	6

Há 6 possibilidades de a escola **II** ser campeã, comparando-a com a escola **IV**. Como as outras escolas não têm chance, elas podem receber qualquer nota, ou seja, 5 possibilidades de notas pra cada escola. Assim existem $6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 750$ configurações distintas das notas a serem atribuídas pelo jurado B, para que a escola **II** seja campeã.

- Portanto, a alternativa correta é **c**.

2. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 78\,125 \rightarrow 78\,125$ possibilidades

3. Temos 1 opção de algarismo para o primeiro algarismo e duas opções para cada um dos oito algarismos restantes. Logo, temos:

$1 \cdot 2^8 = 256 \rightarrow 256$ códigos binários

4. a) $4 \cdot 4 = 16 \rightarrow 16$ maneiras

b) $7 \cdot 4 \cdot 4 = 112 \rightarrow 112$ maneiras

5. a) $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96 \rightarrow 96$ números

b) $\underbrace{4}_{\text{primeiro algarismo}} \cdot \overbrace{5}^{\text{segundo algarismo}} \cdot \underbrace{2}_{\text{terceiro algarismo}} = 40 \rightarrow 40$ números

c) $\underbrace{2}_{\text{terceiro algarismo}} \cdot \overbrace{3}^{\text{primeiro algarismo}} \cdot \underbrace{3}_{\text{segundo algarismo}} = 18 \rightarrow 18$ números

6. a) $\frac{11!}{7!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 7\,920$

b) $\frac{20!13!}{19!12!} = \frac{20 \cdot \cancel{19!} \cdot 13 \cdot \cancel{12!}}{\cancel{19!}\,\cancel{12!}} = 260$

c) $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = n^2 - n$

d) $\frac{(n+3)!}{(n+4)!} = \frac{\cancel{(n+3)!}}{(n+4)\cancel{(n+3)!}} = \frac{1}{n+4}$

Arranjo simples com a calculadora científica

a) $A_{12,5} = 95\,040$

b) $A_{17,6} = 8\,910\,720$

c) $A_{13,4} - A_{8,3} = 16\,824$

d) $\frac{A_{20,6}}{50} = 558\,144$

e) $A_{6,3} \cdot A_{27,1} = 3\,240$

f) $\frac{A_{43,21}}{A_{25,19}} = 2\,494\,979\,008$

7. a) $A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 12$

b) $A_{3,3} = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = \frac{6}{1} = 6$

c) $A_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1!} = 120$

d) $A_{7,2} + A_{4,3} = \frac{7!}{(7-2)!} + \frac{4!}{(4-3)!} =$

$= \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1!} = 42 + 24 = 66$

e) $A_{5,3} - A_{100,0} = \frac{5!}{(5-3)!} - \frac{100!}{(100-0)!} =$

$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} - \frac{\cancel{100!}}{\cancel{100!}} = 60 - 1 = 59$

f) $A_{60,1} - A_{25,2} + A_{10,3} = \frac{60!}{(60-1)!} - \frac{25!}{(25-2)!} +$

$+ \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{60 \cdot \cancel{59!}}{\cancel{59!}} - \frac{25 \cdot 24 \cdot \cancel{23!}}{\cancel{23!}} +$

$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 60 - 600 + 720 = 180$

8. a) $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

b) $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

c) $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

d) $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

9. $A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$

Portanto, a alternativa correta é **d**.

10. a) $A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720 \rightarrow 720$ senhas

b) Sabendo que 720 s equivalem a 12 min, temos:

$4 \cdot 12 = 48 \rightarrow 48$min

11. O número de paisagens distintas é:

$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Logo, é possível trocar a ordem dos quadros, sem repetir as paisagens, durante 120 dias, o que corresponde a 4 meses (considerando o mês com 30 dias).

Portanto, a alternativa correta é **d**.

12. $A_{8,3}=\dfrac{8!}{(8-3)!}=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}}=336\rightarrow 336$ maneiras

Combinação simples com a calculadora científica

a) $C_{10,6}=210$

b) $C_{23,9}=817\,190$

c) $\dfrac{C_{38,31}}{2!}=6\,310\,128$

d) $C_{13,10}+C_{19,9}=92\,664$

e) $C_{44,41}\cdot C_{57,0}=13\,244$

f) $C_{103,99}-C_{77,74}=4\,348\,125$

13. a) $C_{3,1}\cdot C_{8,2}=\dfrac{3!}{1!(3-1)!}\cdot\dfrac{8!}{2!(8-2)!}=\dfrac{3\cdot\cancel{2!}}{\cancel{2!}}\cdot\dfrac{8\cdot 7\cdot\cancel{6!}}{2\cdot 1\cdot\cancel{6!}}=84$

b) $\dfrac{C_{36,30}}{C_{36,6}}=\dfrac{\dfrac{36!}{30!(36-30)!}}{\dfrac{36!}{6!(36-6)!}}=\dfrac{\dfrac{36!}{30!6!}}{\dfrac{36!}{6!30!}}=1$

c) $C_{n,p}\cdot(n-p)!=\dfrac{n!}{p!\,\cancel{(n-p)!}}\cdot\cancel{(n-p)!}=\dfrac{n!}{p!}$

d) $C_{n+1,n}=\dfrac{(n+1)!}{n!(n+1-n)!}=\dfrac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}\,1!}=(n+1)$

e) $\dfrac{p!}{P_n}\cdot C_{n,p}=\dfrac{\cancel{p!}}{\cancel{n!}}\cdot\dfrac{\cancel{n!}}{\cancel{p!}\,(n-p)!}=\dfrac{1}{(n-p)!}$

f) $\dfrac{C_{n,p}}{A_{n,p}}=\dfrac{\dfrac{\cancel{n!}}{p!\,\cancel{(n-p)!}}}{\dfrac{\cancel{n!}}{\cancel{(n-p)!}}}=\dfrac{1}{p!}$

14.
- $C_{10,4}=C_{10,6}$, pois $4+6=10$.
- $C_{10,1}=C_{10,9}$, pois $1+9=10$.
- $C_{10,7}=C_{10,3}$, pois $7+3=10$.

$$C_{n,p}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}=\dfrac{n!}{(n-p)!p!}=\dfrac{n!}{(n-p)![n-n+p]!}=$$
$$=\dfrac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!}=C_{n,n-p}$$

15. $C_{9,3}=\dfrac{9!}{3!(9-3)!}=\dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot\cancel{6!}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot\cancel{6!}}=84$

Portanto, a alternativa correta é **c**.

16. Se **n** é o número de equipes, então:

$$C_{n,2}=66\Rightarrow\dfrac{n!}{2!(n-2)!}=66\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\dfrac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\cdot 1\cdot\cancel{(n-2)!}}=66\Rightarrow n^2-n=132\Rightarrow$$
$$\Rightarrow n^2-n-132=0\left\langle\begin{matrix}n_1=12\\ n_2=-11\end{matrix}\right.$$

Como **n** deve ser um número natural, temos que $n=12$, ou seja, 12 equipes participaram desse campeonato.

17. Denotando por x e y, respectivamente, o número de meninos e de meninas, temos:

$$\begin{cases}x+y=22\\ y=x+2\end{cases}\Rightarrow x=10 \text{ e } y=12$$

Logo, o número de modos que é possível escolher os alunos é:

$$C_{10,2}\cdot C_{12,2}=\dfrac{10!}{2!(10-2)!}\cdot\dfrac{12!}{2!(12-2)!}=$$
$$=\dfrac{10\cdot 9\cdot\cancel{8!}}{2\cdot 1\cdot\cancel{8!}}\cdot\dfrac{12\cdot 11\cdot\cancel{10!}}{2\cdot 1\cdot\cancel{10!}}=2\,970\rightarrow$$
$\rightarrow 2\,970$ modos distintos

18. As duas equipes são determinadas ao serem escolhidos, entre os 30 ratinhos, os 15 que formam a primeira equipe. Logo, a quantidade de maneiras é dada por:

$$C_{30,15}=\dfrac{30!}{15!(30-15)!}=155\,117\,520$$

19. $C_{2,1}\cdot C_{4,2}\cdot C_{5,2}=\dfrac{2!}{1!(2-1)!}\cdot\dfrac{4!}{2!(4-2)!}\cdot\dfrac{5!}{2!(5-2)!}=$
$=2\cdot 6\cdot 10=120\rightarrow 120$ maneiras

Portanto, a alternativa correta é **a**.

20. Um triângulo pode ser formado escolhendo 2 pontos da reta **r** e 1 da reta **s** ou 1 da reta **r** e 2 da reta **s**. Logo, o número de triângulos é dado por:

$$C_{4,2}\cdot C_{6,1}+C_{4,1}\cdot C_{6,2}=\dfrac{4!}{2!(4-2)!}\cdot\dfrac{6!}{1!(6-1)!}+$$
$$+\dfrac{4!}{1!(4-1)!}\cdot\dfrac{6!}{2!(6-2)!}=6\cdot 6+4\cdot 15=96\rightarrow$$
$\rightarrow 96$ triângulos

21. $C_{7,2}+C_{7,3}+C_{7,4}+C_{7,5}+C_{7,6}+C_{7,7}=$
$$=\dfrac{7!}{2!(7-2)!}+\dfrac{7!}{3!(7-3)!}+\dfrac{7!}{4!(7-4)!}+\dfrac{7!}{5!(7-5)!}+$$
$$+\dfrac{7!}{6!(7-6)!}+\dfrac{7!}{7!(7-7)!}=21+35+35+21+7+1=$$
$=120\rightarrow 120$ modos

Portanto, a alternativa correta é **c**.

23. a) $P_6^{(3,2)}=\dfrac{6!}{3!2!}=\dfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot 2\cdot 1}=60$

b) $P_9^{(2,2,2)}=\dfrac{9!}{2!2!2!}=\dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot\cancel{2!}}{\cancel{2!}\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=45\,360$

c) $P_{13}^{(3,2,2)}=\dfrac{13!}{3!2!2!}=$
$$=\dfrac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=$$
$=259\,459\,200$

d) $P_{10}^{(2,4)}=\dfrac{10!}{2!4!}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot\cancel{4!}}{2\cdot 1\cdot\cancel{4!}}=75\,600$

24. a) $P_9^{(4,2)}=7\,560$

b) $P_{15}^{(6,3,2)}=151\,351\,200$

c) $P_{20}^{(9,7,4)}=55\,426\,800$

d) $P_{12}^{(4,3,1,1,1,1,1)}=3\,326\,400$

e) $P_{19}^{(8,6,4)}=174\,594\,420$

f) $P_{11}^{(3,3,3,2)}=92\,400$

25. Podemos representar as soluções naturais da equação utilizando 9 símbolos ∘ para indicar quantidades e 2 símbolos | para indicar a separação das quantidades correspondentes a cada incógnita. Por exemplo, a sequência ∘∘∘|∘∘∘|∘∘∘ representa a solução $x=3$, $y=3$ e $z=3$, enquanto a sequência ∘∘∘∘∘|∘∘∘∘| representa a solução $x=5$, $y=4$ e $z=0$. Logo, o número de soluções naturais corresponde à quantidade de permutações de 11 elementos em que há 9 repetições do símbolo ∘ e 2 repetições do símbolo |, ou seja:

$$P_{11}^{(9,2)}=\dfrac{11!}{9!2!}=\dfrac{11\cdot 10\cdot\cancel{9!}}{\cancel{9!}\cdot 2\cdot 1}=55$$

26. a) ▪ números cujo último algarismo é 8:

$$P_6^{(3,2)} = \frac{6!}{3!2!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot2\cdot1} = 60$$

▪ números cujo último algarismo é 4:

$$P_6^{(3)} = \frac{6!}{3!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$$

Logo, são $60 + 120 = 180$ números pares.

b) A quantidade total de números formados é:

$$P_7^{(3,2)} = \frac{7!}{3!2!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot2\cdot1} = 420$$

Como são 180 pares, então temos $420 - 180 = 240$ ímpares.

c) A quantidade de números cujo último algarismo é 5 é:

$$P_6^{(3,2)} = \frac{6!}{3!2!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot2\cdot1} = 60$$

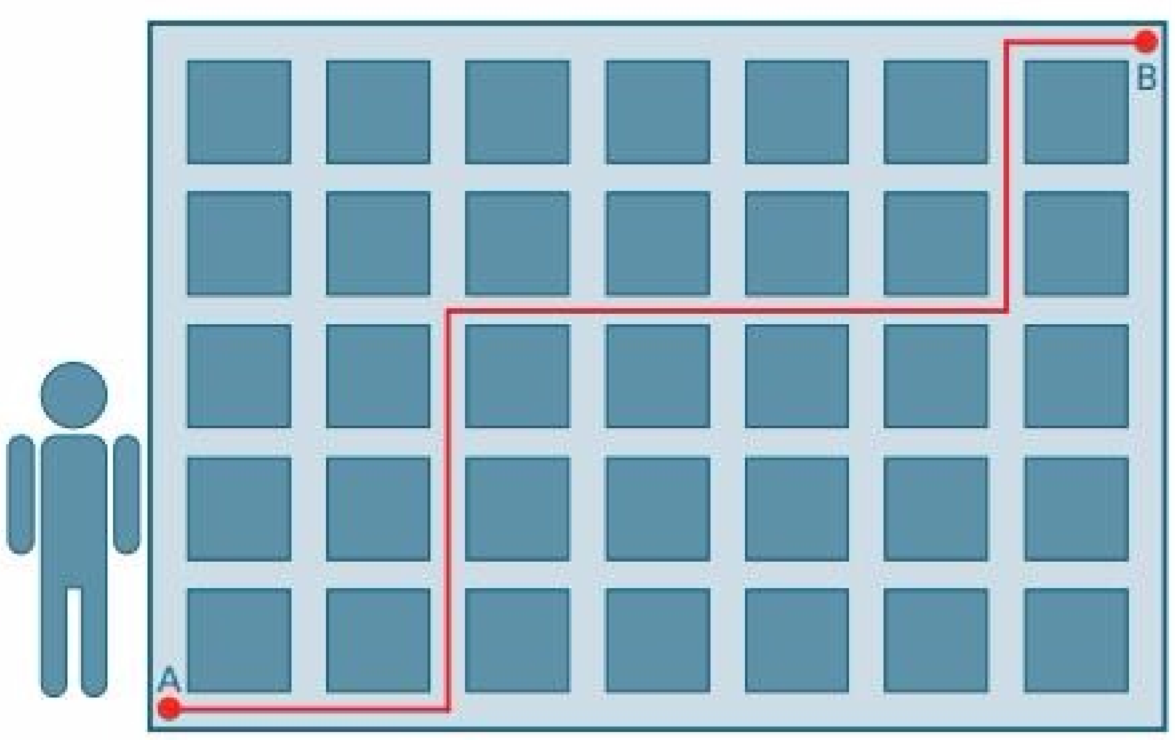
Logo, são 60 números divisíveis por 5.

d) Podemos considerar os números 8 e 5 como se fossem um único algarismo, porém podemos permutá-los entre si de duas formas (85 e 58). Assim, a quantidade de números é dada por:

$$2\cdot P_6^{(3,2)} = 2\cdot\frac{6!}{3!2!} = 2\cdot\frac{6\cdot5\cdot4\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot2\cdot1} = 120$$

Logo, são 120 números que possuem os algarismos 8 e 5 juntos.

27. Para ir de **A** até **B** utilizando um dos percursos mais curtos, a pessoa deve caminhar 7 quadras no sentido "da esquerda para a direita" e 5 no sentido "de baixo para cima", em qualquer ordem. Podemos representar cada percurso com uma sequência de 7 letras **H** e 5 letras **V**, sendo que **H** representa uma quadra percorrida no sentido "da esquerda para a direita" e **V** representa uma quadra percorrida "de baixo para cima". O percurso HHVVVHHHHVVH, por exemplo, representa o percurso traçado na figura.



Gilberto Alicio

Assim, o número de percursos é dado pela quantidade de permutações das letras **H** e **V**, ou seja:

$$P_{12}^{(7,5)} = \frac{12!}{7!5!} = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot\cancel{7!}}{\cancel{7!}\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 792$$

Portanto, a alternativa correta é **d**.

28. a) $\binom{8}{6} = \frac{8!}{6!(8-6)!} = \frac{8\cdot7\cdot\cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot2\cdot1} = 28$

b) $\binom{21}{0} = 1$

c) $\binom{35}{35} = 1$

d) $\binom{9}{0} + \binom{9}{1} = 1 + 9 = 10$

e) $\binom{7}{3} + \binom{7}{4} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4!}}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot\cancel{4!}} = 70$

f) $\binom{11}{5} + \binom{12}{5} + \binom{11}{6} = \binom{12}{5} + \underbrace{\binom{11}{5} + \binom{11}{6}}_{\binom{12}{6}} = \binom{12}{5} + \binom{12}{6} = \binom{13}{6} =$

$$= \frac{13!}{6!(13-6)!} = \frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot\cancel{7!}}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot\cancel{7!}} = 1716$$

29. a) $2^3 = 8$

b) $2^8 = 256$

c) $2^{12} = 4\,096$

d) $2^{23} = 8\,388\,608$

30. a) $\binom{6}{4} = \binom{x}{4} \Rightarrow x = 6$

b) $\binom{9}{x} = \binom{9}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = 9 - 3 = 6 \end{cases}$

c) $\binom{12}{9} + \binom{12}{x} = \binom{13}{10} \Rightarrow \binom{12}{x} = \binom{13}{10} - \binom{12}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow \binom{12}{x} = \binom{12}{10} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ \text{ou} \\ x = 12 - 10 = 2 \end{cases}$

d) $\binom{7}{x} = \binom{8}{5} - \binom{7}{4} \Rightarrow \binom{7}{x} = \binom{7}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \text{ou} \\ x = 7 - 5 = 2 \end{cases}$

e) $\binom{25}{0} + \binom{25}{1} + \binom{25}{2} + \ldots + \binom{25}{25} = 2^{10}\cdot2^x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{25} = 2^{10+x} \Rightarrow 25 = 10 + x \Rightarrow x = 15$

31. a) $\underbrace{330}_{B3} + \underbrace{x}_{C3} = \underbrace{495}_{C4} \Rightarrow x = 165$

Portanto, 165.

b) $\underbrace{165}_{C3} + \underbrace{x}_{D3} = \underbrace{220}_{D4} \Rightarrow x = 55$

Portanto, 55.

c) $\underbrace{120}_{B2} + \underbrace{x}_{C2} = \underbrace{165}_{C3} \Rightarrow x = 45$

$\underbrace{45}_{C2} + \underbrace{y}_{D2} = \underbrace{55}_{D3} \Rightarrow y = 10$

Portanto, 10.

d) $\underbrace{120}_{B2} + \underbrace{x}_{C2} = \underbrace{165}_{C3} \Rightarrow x = 45$

Portanto, 45.

32. ▪ 1º caso:

$x^2 - 2 = 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

Para $x = 3$, obtemos $\binom{14}{x^2-2} = \binom{14}{2x+1} = \binom{14}{7}$ e, para $x = -1$, $\binom{14}{x^2-2} = \binom{14}{2x+1} = \binom{14}{-1}$, que não caracteriza um número binomial.

Note que a alternativa **c** é correta, pois obtemos $x = 3$. Porém, vamos verificar também o outro caso.

▪ 2º caso:

$x^2 - 2 = 14 - (2x + 1) \Rightarrow x^2 - 2 = 13 - 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -5 \end{cases}$

Para $x=3$, obtemos $\binom{14}{x^2-2}=\binom{14}{14-(2x+1)}=\binom{14}{7}$ e, para $x=-5$, $\binom{14}{x^2-2}=\binom{14}{14-(2x+1)}=\binom{14}{23}$, que não caracteriza um número binomial.

Assim, $x=3$.

Portanto, a alternativa correta é **c**.

O Binômio de Newton no wxMaxima

a) $27x^3+27x^2y+9xy^2+y^3$

b) $x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$

c) $\frac{x^8}{6\,561}-\frac{8x^7y}{2\,187}+\frac{28x^6y^2}{729}-\frac{56x^5y^3}{243}+$
$+\frac{70x^4y^4}{81}-\frac{56x^3y^5}{27}+\frac{28x^2y^6}{9}-\frac{8xy^7}{3}+y^8$

d) $-8(y-x)^3$

e) $\frac{(y+2x)^6}{64}$

f) $(y-2)^7$

33. a) $(z+w)^5=\underbrace{\binom{5}{0}}_{1}z^5w^0+\underbrace{\binom{5}{1}}_{5}z^4w^1+\underbrace{\binom{5}{2}}_{10}z^3w^2+\underbrace{\binom{5}{3}}_{10}z^2w^3+$
$+\underbrace{\binom{5}{4}}_{5}z^1w^4+\underbrace{\binom{5}{5}}_{1}z^0w^5=z^5+5z^4w+10z^3w^2+10z^2w^3+5zw^4+w^5$

b) $(xy+z)^4=\underbrace{\binom{4}{0}}_{1}(xy)^4z^0+\underbrace{\binom{4}{1}}_{4}(xy)^3z^1+\underbrace{\binom{4}{2}}_{6}(xy)^2z^2+\underbrace{\binom{4}{3}}_{4}(xy)^1z^3+$
$+\underbrace{\binom{4}{4}}_{1}(xy)^0z^4=x^4y^4+4x^3y^3z+6x^2y^2z^2+4xyz^3+z^4$

c) $(\sqrt{x}-z)^6=\underbrace{\binom{6}{0}}_{1}(\sqrt{x})^6(-z)^0+\underbrace{\binom{6}{1}}_{6}(\sqrt{x})^5(-z)^1+\underbrace{\binom{6}{2}}_{15}(\sqrt{x})^4(-z)^2+$
$+\underbrace{\binom{6}{3}}_{20}(\sqrt{x})^3(-z)^3+\underbrace{\binom{6}{4}}_{15}(\sqrt{x})^2(-z)^4+\underbrace{\binom{6}{5}}_{6}(\sqrt{x})^1(-z)^5+\underbrace{\binom{6}{6}}_{1}(\sqrt{x})^0(-z)^6=$
$=x^3-6x^2\sqrt{x}z+15x^2z^2-20x\sqrt{x}z^3+15xz^4-6\sqrt{x}z^5+z^6$

d) $\left(1-\frac{w}{2}\right)^4=\underbrace{\binom{4}{0}}_{1}1^4\left(-\frac{w}{2}\right)^0+\underbrace{\binom{4}{1}}_{4}1^3\left(-\frac{w}{2}\right)^1+$
$+\underbrace{\binom{4}{2}}_{6}1^2\left(-\frac{w}{2}\right)^2+\underbrace{\binom{4}{3}}_{4}1^1\left(-\frac{w}{2}\right)^3+\underbrace{\binom{4}{4}}_{1}1^0\left(-\frac{w}{2}\right)^4=$
$=1-2w+\frac{3w^2}{2}-\frac{w^3}{2}+\frac{w^4}{16}$

34. Ao desenvolver um binômio, a soma dos coeficientes dos termos corresponde ao valor da expressão quando é atribuído o valor 1 às variáveis. Assim, temos:

a) $a=b=1\Rightarrow(2a+3b)^7=(2\cdot1+3\cdot1)^7=5^7=78\,125$

b) $c=d=1\Rightarrow\left(\frac{c}{2}-2d\right)^5=\left(\frac{1}{2}-2\cdot1\right)^5=\left(-\frac{3}{2}\right)^5=-\frac{243}{32}$

c) $m=n=1\Rightarrow\left(\sqrt[3]{m}+2n\right)^4=\left(\sqrt[3]{1}+2\cdot1\right)^4=3^4=81$

d) $p=q=1\Rightarrow\left(3p-\frac{1}{q}\right)^8=\left(3\cdot1-\frac{1}{1}\right)^8=2^8=256$

35. $\left(\frac{7}{1}-3\sqrt{1}\right)^p=4\,096\Rightarrow4^p=4^6\Rightarrow p=6$

36. a) Como há 15 termos, o termo central é o da posição $\frac{15+1}{2}=8$.

$T_{\underbrace{7+1}_{8}}=\binom{14}{7}x^{14-7}\left(y^2\right)^7=3\,432x^7y^{14}$

b) $x^{14-p}=x^0\Rightarrow14-p=0\Rightarrow p=14$

$T_{14+1}=\binom{14}{14}x^{14-14}\left(y^2\right)^{14}=y^{28}$

c) $x^{14-p}=x^9\Rightarrow14-p=9\Rightarrow p=5$

$T_{5+1}=\binom{14}{5}x^{14-5}\left(y^2\right)^5=2\,002x^9y^{10}$

Portanto, 2 002.

37. $x^{8-p}=x^5\Rightarrow8-p=5\Rightarrow p=3$

$T_{3+1}=\binom{8}{3}x^{8-3}k^3=56k^3x^5$

Assim:

$56k^3=7\Rightarrow k^3=\frac{1}{8}\Rightarrow k=\frac{1}{2}\Rightarrow4k=2$

Portanto, a alternativa correta é **b**.

38. Lembre-se de que

$(x-y)^n=\binom{n}{0}x^n(-y)^0+\binom{n}{1}x^{n-1}(-y)^1+\ldots+\binom{n}{n}x^0(-y)^n$

Basta tomar em particular $x=y=1$, sendo assim:

$0=(1-1)^n=\binom{n}{0}1^n(-1)^0+\binom{n}{1}1^{n-1}(-1)^1+\ldots+\binom{n}{n}1^0(-1)^n$

Logo, a soma dos coeficientes do binômio $(x-y)^n$ é igual a 0.

39. Para $x=y=1$, temos:

$(x-2y)^{18}=(1-2\cdot1)^{18}=(-1)^{18}=1$

Logo, a soma dos coeficientes é igual a 1.

Portanto, a alternativa correta é **b**.

40. a) $8+1=9$

b) $T_{\underbrace{6+1}_{7}}=\binom{8}{6}(2a)^{8-6}(-3b)^6=28\cdot2^2a^2\cdot(-3)^6b^6=$
$=28\cdot4\cdot729\cdot a^2b^6=81\,648a^2b^6$

c) A posição do termo central é $\frac{9+1}{2}=5$. Assim:

$T_{\underbrace{4+1}_{5}}=\binom{8}{4}(2a)^{8-4}\cdot(-3b)^4=70\cdot2^4a^4\cdot(-3)^4b^4=$
$=70\cdot16\cdot81\cdot a^4b^4=90\,720a^4b^4$

Portanto, o coeficiente é 90 720.

d) $(-3b)^p=(-3b)^0\Rightarrow p=0$

$T_{\underbrace{0+1}_{1}}=\binom{8}{0}(2a)^{8-0}(-3b)^0=2^8a^8=256a^8$

Unidade 6
Probabilidade

1. a) $\Omega = \{C, K\}$

b) Sim. Não, pois o resultado dessa disputa não depende somente da sorte, mas sim da habilidade de cada um dos jogadores no jogo de xadrez.

2. a) $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)\}$

b) $A = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$

c) $B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$

d) $C = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

3. a) $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

b) $A = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)\}$

c) $B = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

d) $C = \varnothing$

e) $D = \{(1,5), (1,6), (2,6), (5,1), (6,1), (6,2)\}$

4. Resposta esperada: Porque o espaço amostral é $\Omega = \{2\}$, portanto, um número ímpar é um evento impossível.

5. a) $\Omega = \{(C,C,C), (C,C,K), (C,K,C), (C,K,K), (K,C,C), (K,C,K), (K,K,C), (K,K,K)\}$

b) $A = \{(C,C,C), (K,K,K)\}$

c) $B = \{(C,C,C), (C,C,K), (C,K,C), (C,K,K), (K,C,C), (K,C,K), (K,K,C)\}$

Paradoxo dos aniversários

a) $P(\overline{A}) = \dfrac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 358}{365^8} \simeq 0{,}9257$

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \simeq 1 - 0{,}9257 =$
$= 0{,}0743 \rightarrow$ aproximadamente 7,43%

b) $P(\overline{A}) = \dfrac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 357}{365^9} \simeq 0{,}9054$

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \simeq 1 - 0{,}9054 =$
$= 0{,}0946 \rightarrow$ aproximadamente 9,46%

c) $P(\overline{A}) = \dfrac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 356}{365^{10}} \simeq 0{,}8831$

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \simeq 1 - 0{,}8831 =$
$= 0{,}1169 \rightarrow$ aproximadamente 11,69%

d) $P(\overline{A}) = \dfrac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 355}{365^{11}} \simeq 0{,}8589$

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \simeq 1 - 0{,}8589 =$
$= 0{,}1411 \rightarrow$ aproximadamente 14,11%

O aumento do valor da probabilidade não é diretamente proporcional ao aumento da quantidade de pessoas no grupo, pois o aumento da quantidade de pessoas é constante, mas o aumento do valor da probabilidade não é constante.

6. a) $A = \{1\}$; $n(A) = 1$; $n(\Omega) = 10$

$P(A) = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$ ou 1 em 10 ou 10%

b) $A = \varnothing$; $n(A) = 0$; $n(\Omega) = 10$

$P(A) = \dfrac{0}{10} = 0$

c) $A = \{4, 5, 6, 7\}$; $n(A) = 4$; $n(\Omega) = 10$

$P(A) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$ ou 4 em 10 ou 40%

d) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$; $n(A) = 5$; $n(\Omega) = 10$

$P(A) = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$ ou 5 em 10 ou 50%

e) $A = \{9, 10\}$; $n(A) = 2$; $n(\Omega) = 10$

$P(A) = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$ ou 2 em 10 ou 20%

7. **A**: Lucas fazer parte de uma comissão composta de cinco alunos

Considerando que Lucas ocupará 1 vaga, sobrarão 4 vagas, as quais podem ser preenchidas por quaisquer combinações dos 19 alunos restantes. Desse modo, temos:

$$P(A) = \frac{C_{19,4}}{C_{20,5}} = \frac{3\,876}{15\,504} = 0{,}25 = 25\%$$

8. $n(\Omega) = P_5 = 5! = 120$

a) **A**: sortear o número 85 216

$P(A) = \dfrac{1}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{120} = 0{,}008\overline{3} = 0{,}8\overline{3}\%$ ou 1 em 120

b) **A**: sortear um número par

Para que o número seja par, ele deve terminar em 2, 6 ou 8, e para cada caso há $\underbrace{24}_{P_4}$ possibilidades. Logo:

$$P(A) = \frac{3 \cdot P_4}{n(\Omega)} = \frac{3 \cdot 24}{120} = \frac{72}{120} = 0{,}6 = 60\% \text{ ou } 72 \text{ em } 120$$

c) A: sortear um número ímpar

Para que o número seja ímpar, ele deve terminar em 1 ou 5, e para cada caso há $\underbrace{24}_{P_4}$ possibilidades. Logo:

$$P(A)=\frac{2\cdot P_4}{n(\Omega)}=\frac{2\cdot 24}{120}=\frac{48}{120}=0,4=40\% \text{ ou } 48 \text{ em } 120$$

d) A: sortear um número múltiplo de 5

Para que o número seja múltiplo de 5, ele deve terminar em 5. Neste caso há $\underbrace{24}_{P_4}$ possibilidades. Logo:

$$P(A)=\frac{P_4}{n(\Omega)}=\frac{24}{120}=0,2=20\% \text{ ou } 24 \text{ em } 120$$

e) A: sortear um número maior que 12 586

Escrevemos alguns dos números em ordem crescente:

12 568, 12 586, 12 658, 12 685...

Note que há apenas 2 números menores ou iguais a 12 586. Logo, é mais simples calcular a probabilidade do complementar de **A**. Temos:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{2}{n(\Omega)}=1-\frac{2}{120}=\frac{118}{120}=0,98\overline{3}=$$

$$=98,\overline{3}\% \text{ ou } 118 \text{ em } 120$$

f) A: sortear um número menor ou igual a 86 152

Escrevemos alguns dos números em ordem decrescente:

86 521, 86 512, 86 251, 86 215, 86 152, 86 125...

Note que há apenas 4 números maiores que 86 152. Logo, é mais simples calcular a probabilidade do complementar de **A**. Temos:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{4}{n(\Omega)}=1-\frac{4}{120}=\frac{116}{120}=0,9\overline{6}=$$

$$=96,\overline{6}\% \text{ ou } 116 \text{ em } 120$$

9. A: acertar a senha

$n(A)=1;\ n(\Omega)=10^6=1\,000\,000$

$$P(A)=\frac{1}{1\,000\,000}=0,000001=0,0001\% \text{ ou1 em } 1\,000\,000$$

10. $\Omega=\{(C,C),(C,K),(K,C),(K,K)\};\ n(\Omega)=4$

A: Sortear uma cara e uma coroa

$A=\{(C,K),(K,C)\};\ n(A)=2$

$$P(A)=\frac{2}{4}=0,5=50\%$$

Portanto, a alternativa correta é **e**.

11. a) $n(P(C))=2^{n(C)}=2^{10}=1\,024$

b) O número de subconjuntos de **C** que possuem três elementos é igual à combinação de $\underbrace{10}_{n(C)}$ três a três, ou seja:

$$C_{10,3}=\frac{10!}{3!(10-3)!}=120$$

c) A: escolher aleatoriamente um subconjunto de **C** que tenha três elementos

$$P(A)=\frac{C_{10,3}}{n(P(C))}=\frac{120}{1024}\simeq 0,1172=11,72\%$$

12. A: pares de artrópodes em que ambos não sejam insetos

Há 7 artrópodes que não são insetos. Logo:

$$n(A)=C_{7,2}=\frac{7!}{2!(7-2)!}=21$$

Além disso, $n(\Omega)=C_{12,2}=66$, logo:

$$P(A)=\frac{C_{7,2}}{C_{12,2}}=\frac{21}{66}=\frac{7}{22}$$

Portanto, a alternativa correta é **c**.

14. O número de usuários que não pretendem trocar seu modelo de ar-condicionado corresponde aos elementos da matriz **A** tais que $i=j$, ou seja, a_{11}, a_{22} e a_{33}. Logo, a probabilidade de escolher um usuário ao acaso e ele não pretender trocar de modelo é:

$$\frac{a_{11}+a_{22}+a_{33}}{1000}=\frac{50+100+200}{1000}=0,35=35\%$$

Portanto, a alternativa correta é **b**.

15. A: um aparelho defeituoso ser detectado por pelo menos um dos técnicos

$\overline{A}$: um aparelho defeituoso não ser detectado pelos técnicos

$$P(\overline{A})=\underbrace{0,25}_{25\%}{}^4\simeq 0,0039$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})\simeq 1-0,0039=0,9961=99,61\%$$

16. a) C: doador com tipo sanguíneo **A**

$n(C)=80;\ n(\Omega)=300$

$$P(C)=\frac{80}{300}\simeq 0,27=27\%$$

b) D: doador que não possui o tipo sanguíneo **O**

$$P(\overline{D})=\frac{30}{300}=0,1$$

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-0,1=0,9=90\%$$

17. $n(\Omega)=240$

a) ▪ A: passar a maior parte do tempo conectado à redes sociais

$$P(A)=\frac{100}{240}=0,41\overline{6}=41,\overline{6}\%$$

▪ A: passar a maior parte do tempo conectado à *sites* de busca

$$P(A)=\frac{40}{240}=0,16\overline{6}=16,\overline{6}\%$$

▪ A: passar a maior parte do tempo conectado à *sites* de entretenimento

$$P(A)=\frac{30}{240}=0,125=12,5\%$$

b) A: não passar a maior parte do tempo conectado à redes sociais

$P(\overline{A})=0,41\overline{6}$

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0,41\overline{6}=0,58\overline{3}=58,\overline{3}\%$

18. a) A: mulheres com 2 filhos ou menos

$n(A)=(0,20+0,37+0,22)\cdot 2000=1\,580\rightarrow 1\,580$ mulheres

b) ▪ B: mulheres com nenhum filho

$P(B)=20\%$

▪ C: mulheres com pelo menos um filho

$P(C)=1-P(A)=1-0,2=0,8=80\%$

▪ D: mulheres com até dois filhos

$P(D)=20\%+37\%+22\%=79\%$

▪ E: mulheres com três filhos ou mais

$P(E)=1-P(D)=1-0,79=0,21=21\%$

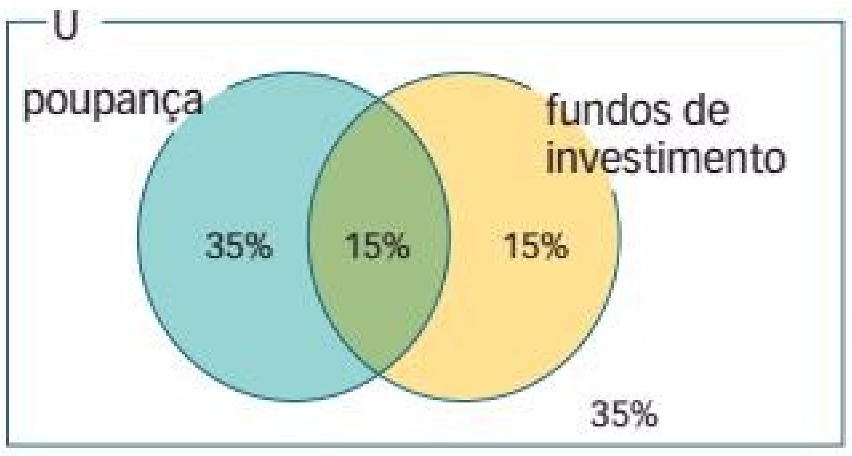
19. A: pessoa portadora de doença crônica

$n(A)=22;\ n(\Omega)=42+22+56+30+50=200$

$$P(A)=\frac{22}{200}=0,11=11\%$$

Portanto, a alternativa correta é **c**.

20. Organizamos as informações em um diagrama:



Acervo da Editora

Portanto, a probabilidade de que a pessoa não aplique em caderneta de poupança nem em fundos de investimento é $35\% = 0{,}35$.

Portanto, a alternativa correta é **c**.

21. $\Omega = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2),$
$(1,2), (1,0), (1,1), (1,2), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2),$
$(2,2), (2,0), (2,1), (2,2), (2,2), (2,0), (2,1),$
$(2,2), (2,2)\}$; $n(\Omega) = 24$

a) $A = \{(1,2), (1,2), (1,2), (1,2), (2,1), (2,1), (2,1)\}$;
$n(A) = 7$
$P(A) = \dfrac{7}{24} = 0{,}291\overline{6} = 29{,}1\overline{6}\%$

b) $B = \{(0,1), (1,0), (1,2), (1,2), (1,0), (1,2),$
$(1,2), (2,1), (2,1), (2,1)\}$; $n(B) = 10$
$P(B) = \dfrac{10}{24} = 0{,}41\overline{6} = 41{,}\overline{6}\%$

c) $C = \{(1,2), (1,2), (1,2), (1,2), (2,1), (2,2),$
$(2,2), (2,1), (2,2), (2,2), (2,1), (2,2), (2,2)\}$;
$n(C) = 13$
$P(C) = \dfrac{13}{24} = 0{,}541\overline{6} = 54{,}1\overline{6}\%$

22. A probabilidade de Carlos viajar num determinado ônibus será proporcional ao tempo de espera no terminal. Como os ônibus partem em intervalos de 10min e 20min, é mais provável que Carlos chegue no terminal no intervalo de 20min entre um ônibus e outro, o que ocorre entre a partida de um ônibus da empresa Bompasseio e um da Andabem. Além disso, a probabilidade será proporcional a 10min e 20min, ou seja:

$P(\text{Andabem}) = 2 \cdot P(\text{Bompasseio})$

Portanto, a alternativa correta é **d**.

23. a) $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1),$
$(2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2),$
$(3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3),$
$(4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4),$
$(5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

b) Não, pois a quantidade de números de resultados ímpares e pares é a mesma. Portanto, a probabilidade de ocorrer um número ímpar é igual à de ocorrer um número par.

24. Como cada um dos dados possui seis faces, temos um total de $\underbrace{36}_{6\cdot 6}$ possibilidades de lançamento, ou seja, $n(\Omega) = 36$.

- **A**: soma dos valores das faces voltadas para cima ser par

Para que a soma seja par, temos que ambas as faces devem apresentar número ímpar (B) ou, ambas devem apresentar número par (C). No caso de ambas serem ímpares temos $\underbrace{9}_{3\cdot 3}$ possibilidades, ou seja, $n(B) = 9$. No caso de ambas serem pares também temos 9 possibilidades, ou seja, $n(C) = 9$. Como **B** e **C** são mutuamente exclusivos temos:

$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{9}{36} + \frac{9}{36} = \frac{18}{36} = 50\%$$

- **D**: soma dos valores das faces voltadas para cima ser igual a 10; $D = \{(4,6), (5,5), (6,4)\}$; $n(D) = 3$

E: soma dos valores das faces voltadas para cima ser igual a 5; $E = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$; $n(E) = 4$

$$P(D \cup E) = P(D) + P(E) = \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{7}{36} = 19{,}\overline{4}\%$$

- **F**: soma dos valores das faces voltadas para cima ser um múltiplo de 3

$F = \{(1,2), (1,5), (2,1), (2,4), (3,3), (3,6), (4,2), (4,5), (5,1),$
$(5,4), (6,3), (6,6)\}$

$A \cap F = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), (6,6)\}$

$n(A \cap F) = 6$

$$P(A \cup F) = P(A) + P(F) - P(A \cap F) = \frac{18}{36} + \frac{6}{36} = \frac{24}{36} = 66{,}\overline{6}\%$$

- **G**: soma dos valores das faces voltadas para cima ser maior que 10; $G = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$; $n(G) = 3$

H: soma dos valores das faces voltadas para cima ser menor que 4; $H = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$; $n(H) = 3$

$$P(G \cup H) = P(G) + P(H) = \frac{3}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = 16{,}\overline{6}\%$$

25. O número total de possibilidades de pódio é igual ao arranjo de $\underbrace{20}_{9+5+6}$ tomados 3 a 3, ou seja:

$$n(\Omega) = A_{20,3} = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{17!} = 6\,840$$

A: as medalhas de ouro, prata e bronze serem entregues para a equipe **A**

$$n(A) = A_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 504$$

$$P(A) = \frac{504}{6\,840}$$

B: as medalhas de ouro, prata e bronze serem entregues para a equipe **B**

$$n(B) = A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 60$$

$$P(B) = \frac{60}{6\,840}$$

C: as medalhas de ouro, prata e bronze serem entregues para a equipe **C**

$$n(C) = A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120$$

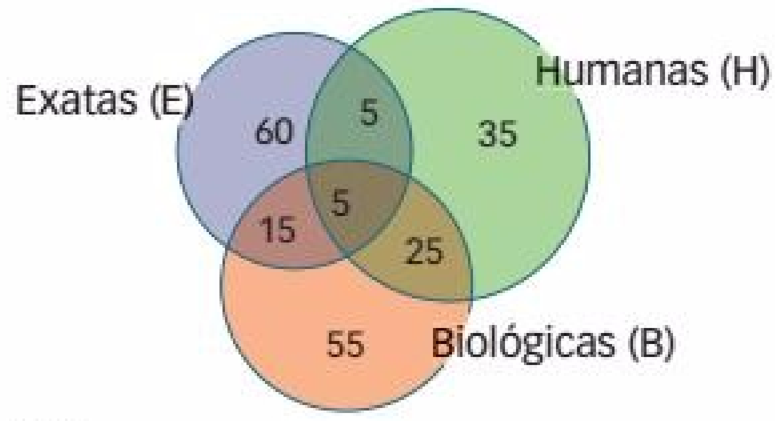
$$P(C) = \frac{120}{6\,840}$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) =$$
$$= \frac{504}{6\,840} + \frac{60}{6\,840} + \frac{120}{6\,840} = \frac{684}{6\,840} = 0{,}1 = 10\%$$

Assim, $P(A \cup B \cup C) \in [10, 12[$.

Portanto, a alternativa correta é **b**.

26. Organizando os dados da tabela em um diagrama de Venn, temos:



$n(\Omega) = 200$

a) $n(E \cap B \cap H) = 5$

$P(E \cap B \cap H) = \frac{5}{200} = 0{,}025 = 2{,}5\%$

b) $n(H) = 5 + 5 + 35 + 25 = 70$

$P(H) = \frac{70}{200} = 0{,}35 = 35\%$

c) ▪ $n(E) = 60 + 15 + 5 + 5 = 85$

$n(B) = 55 + 25 + 15 + 5 = 100$

$n(E \cap B) = 15 + 5 = 20$

$P(E \cup B) = P(E) + P(B) - P(E \cap B) =$

$= \frac{85}{200} + \frac{100}{200} - \frac{20}{200} = \frac{165}{200} = 0{,}825 = 82{,}5\%$

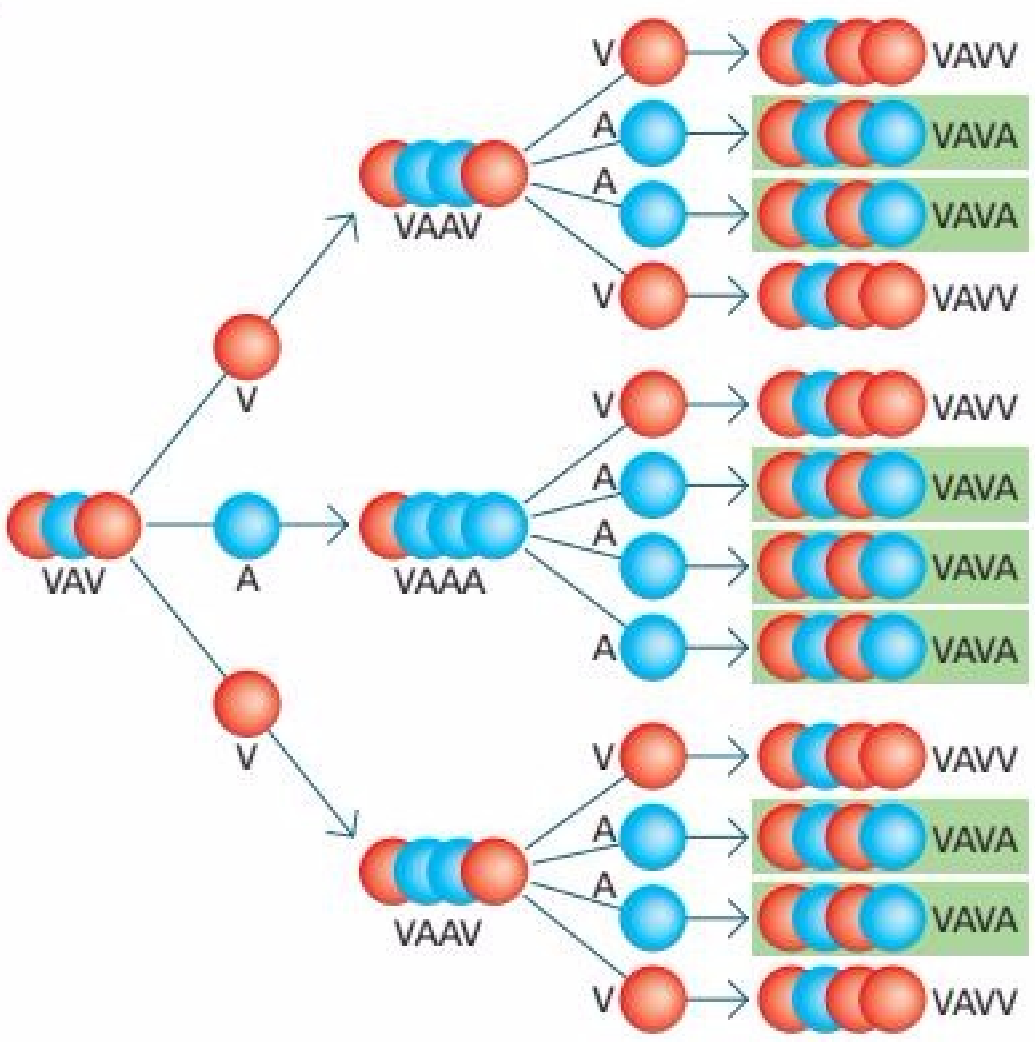
▪ $n(H) = 70$

$n(E \cap H) = 5 + 5 = 10$

$P(E \cup H) = P(E) + P(H) - P(E \cap H) =$

$= \frac{85}{200} + \frac{70}{200} - \frac{10}{200} = \frac{145}{200} = 0{,}725 = 72{,}5\%$

27.



Observando a árvore de possibilidades vemos que há 7 casos favoráveis em um total de 12, ou seja, a probabilidade é 7 em 12 ou $\frac{7}{12}$.

28. A: aluno do 2º ano

B: aluno do 3º ano

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \overbrace{P(A \cap B)}^{0} =$

$= \frac{95}{300} + \frac{85}{300} - 0 = \frac{180}{300} = 0{,}6 = 60\%$

29. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 56, 57, 58, 59, 60\}$; $n(\Omega) = 60$

a) A: sortear um número par

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, ..., 56, 58, 60\}$; $n(A) = 30$

$P(A) = \frac{30}{60} = 0{,}5 = 50\%$

b) B: sortear um número múltiplo de 5

$B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60\}$

$n(B) = 12$

$P(B) = \frac{12}{60} = 0{,}2 = 20\%$

c) $A \cap B = \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$; $n(A \cap B) = 6$

$P(A \cap B) = \frac{6}{60} = 0{,}1 = 10\%$

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= 50\% + 20\% - 10\% = 60\%$

30. Determinamos os casos possíveis.

Moeda / Dado	Cara (C)	Coroa (K)
1	(1, C)	(1, K)
2	(2, C)	(2, K)
3	(3, C)	(3, K)
4	(4, C)	(4, K)
5	(5, C)	(5, K)
6	(6, C)	(6, K)

a) $A = \{(4, K)\}; P(A) = \frac{1}{12} = 0{,}08\overline{3} = 8{,}\overline{3}\%$

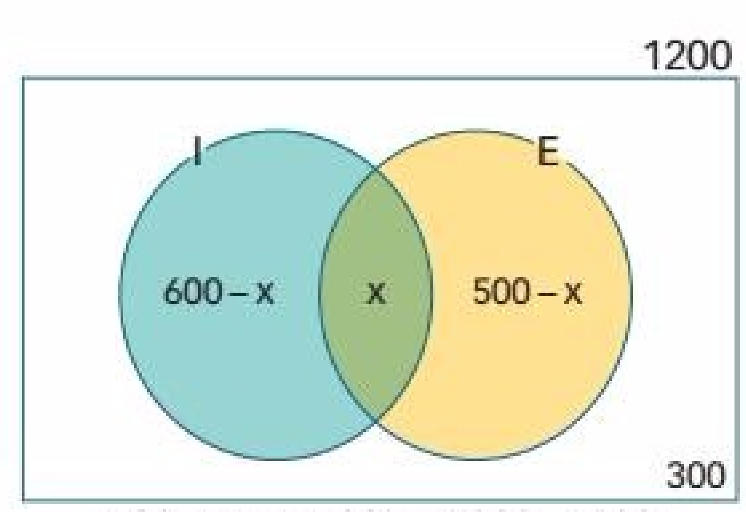
b) $B = \{(2, C), (4, C), (6, C)\}$

$P(B) = \frac{3}{12} = 0{,}25 = 25\%$

c) $C = \{(1, C), (2, C), (3, C), (1, K), (2, K), (3, K),$
$(4, K), (5, K), (6, K)\}$

$P(C) = \frac{9}{12} = 0{,}75 = 75\%$

31.



Ilustrações: Acervo da Editora

$600 - x + x + 500 - x + 300 = 1200$

$1100 - x = 900$

$x = 200$

Assim, sabemos que 300 alunos falam espanhol. Logo, a probabilidade de que um aluno fale espanhol sabendo que ele não fala inglês é $\frac{300}{600} = \frac{1}{2}$.

Portanto, a alternativa correta é **a**.

32. a) Probabilidade de uma compra ser de até R$ 300,00 sabendo que foi paga com dinheiro.

$$P(T|D)=\frac{n(T\cap D)}{n(D)}=\frac{40}{40+20}=\frac{40}{60}=0{,}66\overline{6}=66{,}\overline{6}\%$$

b) Probabilidade de uma compra não ser paga com cheque sabendo que seu valor foi maior que R$ 300,00.

$$P(\overline{H}|M)=\frac{n(\overline{H}\cap M)}{n(M)}=\frac{20+80}{20+35+80}=$$

$$=\frac{100}{135}=0{,}74\overline{074}=74{,}\overline{074}\%$$

c) Probabilidade de uma compra ser paga com cartão sabendo que seu valor não foi maior que R$ 300,00.

$$P(C|\overline{M})=\frac{n(C\cap\overline{M})}{n(\overline{M})}=\frac{55}{40+30+55}=\frac{55}{125}=0{,}44=44\%$$

d) Probabilidade de uma compra ser acima de R$ 300,00 sabendo que foi paga com cheque.

$$P(M|H)=\frac{n(M\cap H)}{n(H)}=\frac{35}{30+35}=\frac{35}{65}\simeq 0{,}5385=53{,}85\%$$

e) Probabilidade de uma compra não ser paga com dinheiro sabendo que seu valor não foi de até R$ 300,00.

$$P(\overline{D}|\overline{T})=\frac{n(\overline{D}\cap\overline{T})}{n(\overline{T})}=\frac{35+80}{20+35+80}=\frac{115}{135}=$$

$$=0{,}85\overline{185}=85{,}\overline{185}\%$$

f) Probabilidade de uma compra não ser de até R$ 300,00 sabendo que foi paga com cartão.

$$P(\overline{T}|C)=\frac{n(\overline{T}\cap C)}{n(C)}=\frac{80}{55+80}=\frac{80}{135}=0{,}59\overline{259}=59{,}\overline{259}\%$$

33. a) a;c;e

34. Em um jogo de dominó há apenas duas peças cuja soma dos valores é 10: a que possui valores 4 e 6; e a que possui valores 5 e 5. Seja:

B: retirar, na primeira retirada, uma peça cuja soma dos valores é 10

A: retirar, na segunda retirada, uma peça cuja soma dos valores é 10

Como na primeira retirada temos 2 peças possíveis e 28 no total, $P(B)=\frac{2}{28}$. Além disso, se considerarmos que na segunda retirada, há apenas uma peça possível entre 27 que sobraram, temos $P(A|B)=\frac{1}{27}$. Portanto:

$$P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)=\frac{1}{27}\cdot\frac{2}{28}=\frac{2}{756}\simeq 0{,}0026=0{,}26\%$$

35.

	Fumantes (F)	Não fumantes ($\overline{F}$)
Homens (H)	6%	54%
Mulheres (M)	2%	38%

$$P(M|F)=\frac{P(M\cap F)}{P(F)}=\frac{2\%}{6\%+2\%}=\frac{2\%}{8\%}=25\%$$

Portanto, a alternativa correta é **a**.

36. Como os lançamentos são independentes e a probabilidade de se conseguir coroa (K) em cada um é $\frac{1}{2}$, temos:

$$P(K\cap K\cap K\cap K)=P(K)\cdot P(K)\cdot P(K)\cdot P(K)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

37. a) $n(\Omega)=25+18+10+22+15+18+24+17=149$

b) F: ser do sexo feminino

$n(F)=15+18+24+17=74$

$$P(F)=\frac{n(F)}{n(\Omega)}=\frac{74}{149}\simeq 0{,}4966=49{,}66\%$$

c) M: ser do sexo masculino

A: pertencer à turma A

B: pertencer à turma B

C: pertencer à turma C

D: pertencer à turma D

- $P(M|C)=\frac{n(M\cap C)}{n(C)}=\frac{10}{10+24}=\frac{10}{34}\simeq 0{,}2941=29{,}41\%$
- $P(F|D)=\frac{n(F\cap D)}{n(D)}=\frac{17}{22+17}=\frac{17}{39}\simeq 0{,}4359=43{,}59\%$
- $P(A|M)=\frac{n(A\cap M)}{n(M)}=\frac{25}{25+18+10+22}=\frac{25}{75}=0{,}33\overline{3}=33{,}\overline{3}\%$
- $P(B|F)=\frac{n(B\cap F)}{n(F)}=\frac{18}{15+18+24+17}=\frac{18}{74}=0{,}24\overline{324}=24{,}\overline{324}\%$

38. a) $A=\{5, 10, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90\}$; $n(A)=18$

$B=\{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90\}$; $n(B)=15$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{18}{90}+\frac{15}{90}-\frac{3}{90}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$$

b) Considere:

C: o número da bola da primeira retirada ser um múltiplo de 6 e o da bola da segunda retirada não ser um múltiplo de 6

D: os números das bolas das duas retiradas não serem múltiplos de 6

Temos:

$$P(C)=\underbrace{\frac{15}{90}}_{1^a\text{ retirada}}\cdot\underbrace{\frac{90-15}{89}}_{2^a\text{ retirada}}=\frac{1125}{8\,010}$$

$$P(D)=\underbrace{\frac{90-15}{90}}_{1^a\text{ retirada}}\cdot\underbrace{\frac{89-15}{89}}_{2^a\text{ retirada}}=\frac{5\,550}{8\,010}$$

$$P(C\cup D)=P(C)+P(D)-\overbrace{P(C\cap D)}^{0}=\frac{1125}{8010}+\frac{5550}{8010}-0=\frac{6675}{8010}=\frac{5}{6}$$

39. Organizamos as informações da seguinte maneira:

	com resultado negativo (A)	com resultado positivo (B)
doentes (C)	40	60
saudáveis (D)	380	20

$n(A)=40+380=420$

$n(A\cap D)=380$

$$P(D|A)=\frac{n(A\cap D)}{n(A)}=\frac{380}{420}=\frac{19}{21}$$

Portanto, a alternativa correta é **c**.

40. Os eventos são independentes e com $\frac{1}{2}$ de chance de o filho ser menino (M) e $\frac{1}{2}$ de ser menina (F). Logo:

$P(M \cap M) = P(M) \cdot P(M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

41. **A**: ter mais de 35 anos de idade

B: ter mais de 10 anos de trabalho na empresa

C: ser especializado

$P(A) = 40\%;\ P(B) = 23\%;\ P(C) = 65\%$

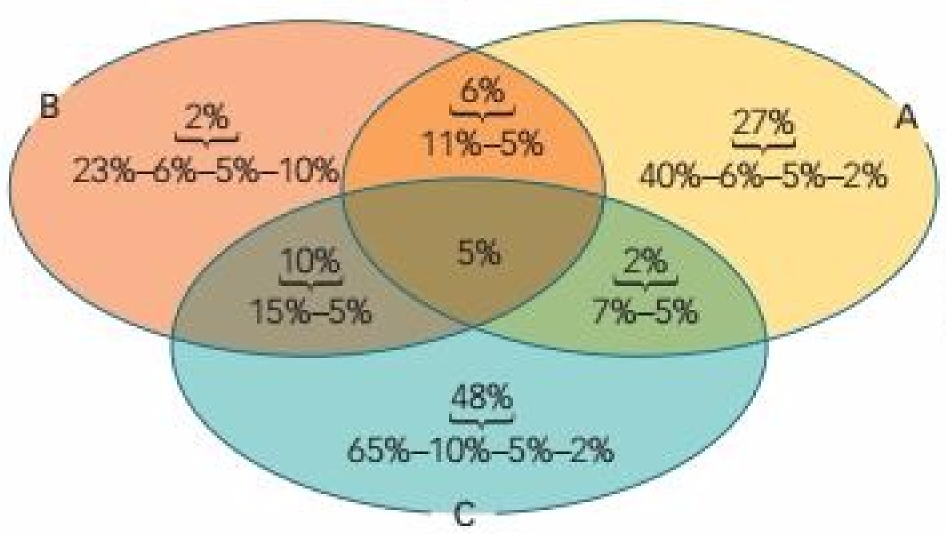
$P(A \cap B) = \underbrace{0{,}40}_{40\%} \cdot \underbrace{0{,}275}_{27{,}5\%} = 0{,}11 = 11\%$

$P(A \cap C) = \underbrace{0{,}40}_{40\%} \cdot \underbrace{0{,}175}_{17{,}5\%} = 0{,}07 = 7\%$

$P(B \cap C) = \underbrace{0{,}23}_{23\%} \cdot \frac{15}{23} = 0{,}15 = 15\%$

$P(A \cap B \cap C) = \underbrace{0{,}15}_{15\%} \cdot \frac{1}{3} = 0{,}05 = 5\%$

Organizamos as informações em um diagrama:



Acervo da Editora

a) $P(B \cap \overline{C}) = 2\% + 6\% = 8\%$

b) $P(C \mid A) = \dfrac{P(C \cap A)}{P(A)} = \dfrac{\overbrace{0{,}07}^{7\%}}{\underbrace{0{,}40}_{40\%}} = 0{,}175 = 17{,}5\%$

c) $P(A \mid \overline{C}) = \dfrac{P(A \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \dfrac{\overbrace{0{,}06}^{6\%} + \overbrace{0{,}27}^{27\%}}{\underbrace{0{,}02}_{2\%} + \underbrace{0{,}06}_{6\%} + \underbrace{0{,}27}_{27\%}} = 0{,}9429 = 94{,}29\%$

d) $P(C \cup B) = P(C) + P(B) - P(C \cap B) = 65\% + 23\% - 15\% = 73\%$

e) $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{\overbrace{0{,}02}^{2\%} + \overbrace{0{,}10}^{10\%}}{\underbrace{0{,}02}_{2\%} + \underbrace{0{,}10}_{10\%} + \underbrace{0{,}48}_{48\%}} = 0{,}20 = 20\%$

f) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\overbrace{0{,}11}^{11\%}}{\underbrace{0{,}23}_{23\%}} = 0{,}4783 = 47{,}83\%$

42. **A**: nascimento de um menino

$P(A) = \frac{1}{2};\ P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Portanto, a probabilidade de ocorrência do evento **A** em todas as 6 repetições $(p = n = 6)$ é:

$$\binom{6}{6} \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^6 \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^{6-6} = 1 \cdot \frac{1}{64} \cdot 1 = \frac{1}{64} = 0{,}015625 = 1{,}5625\%$$

43. **K**: obter coroa no lançamento de uma moeda

$P(K) = \frac{1}{2};\ P(\overline{K}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

A probabilidade de se obter coroa em todos os 26 lançamentos $(p = n = 26)$ é:

$$\binom{26}{26} \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^{26} \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^{26-26} = 1 \cdot \frac{1}{67\,108\,864} \cdot 1 = \frac{1}{67\,108\,864} \simeq$$
$$= 0{,}000000015 = 0{,}0000015\%$$

44. **M**: nascimento de um menino

F: nascimento de uma menina

$P(F) = \frac{1}{2};\ P(M) = P(\overline{F}) = 1 - \frac{1}{2}$

A probabilidade de que nasçam 3 meninas e 1 menino $(p = 3$ e $n = 4)$, não importando a ordem, é:

$$\binom{4}{3} \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^3 \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^{4-3} = 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}25 = 25\%$$

45. **C**: obter cara no lançamento de uma moeda

$P(C) = \frac{1}{2};\ P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

A probabilidade de se obter 3 caras (p) em 5 lançamentos (n) é:

$$\binom{5}{3} \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^3 \cdot \left[\frac{1}{2}\right]^{5-3} = 10 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}3125 = 31{,}25\%$$

46. Há 3 possibilidades de saída de apenas duas bolas brancas (B), BBX, BXB e XBB, em que X é uma das outras cores disponíveis. Temos:

$$P(BBX) = \underbrace{\frac{10}{100}}_{1^{\text{a}} \text{ moeda}} \cdot \underbrace{\frac{9}{99}}_{2^{\text{a}} \text{ moeda}} \cdot \underbrace{\frac{90}{98}}_{3^{\text{a}} \text{ moeda}} = \frac{9}{1078}$$

$$P(BXB) = \underbrace{\frac{10}{100}}_{1^{\text{a}} \text{ moeda}} \cdot \underbrace{\frac{90}{99}}_{2^{\text{a}} \text{ moeda}} \cdot \underbrace{\frac{9}{98}}_{3^{\text{a}} \text{ moeda}} = \frac{9}{1078}$$

$$P(XBB) = \underbrace{\frac{90}{100}}_{1^{\text{a}} \text{ moeda}} \cdot \underbrace{\frac{10}{99}}_{2^{\text{a}} \text{ moeda}} \cdot \underbrace{\frac{9}{98}}_{3^{\text{a}} \text{ moeda}} = \frac{9}{1078}$$

Assim, a probabilidade de saída de apenas duas bolas brancas é:

$3 \cdot \frac{9}{1078} \simeq 0{,}025$

Portanto, a alternativa correta é **b**.

47. **V**: retirada de uma bola vermelha

$P(V) = \frac{10}{14} = \frac{5}{7};\ P(\overline{V}) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$

A: retirada de uma bola azul

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(V) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

a) A probabilidade da retirada de exatamente 3 bolas azuis (p) num total de 5 retiradas (n) é:

$$\binom{5}{3} \cdot \left[\frac{2}{7}\right]^3 \cdot \left[\frac{5}{7}\right]^{5-3} = 10 \cdot \frac{8}{343} \cdot \frac{25}{49} \simeq 0{,}119 = 11{,}9\%$$

b) A probabilidade de retirada de exatamente:

- 4 bolas azuis (p) de um total de 5 retiradas (n) é:

$$\binom{5}{4} \cdot \left[\frac{2}{7}\right]^4 \cdot \left[\frac{5}{7}\right]^{5-4} = 5 \cdot \frac{16}{2\,401} \cdot \frac{5}{7} = 0{,}0238 = 2{,}38\%$$

- 5 bolas azuis (p) de um total de 5 retiradas (n) é:

$$\binom{5}{5} \cdot \left[\frac{2}{7}\right]^5 \cdot \left[\frac{5}{7}\right]^{5-5} = 1 \cdot \frac{32}{16\,807} \cdot 1 = 0{,}0019 = 0{,}19\%$$

Portanto, a probabilidade de retirada de ao menos 3 bolas azuis de um total de 5 retiradas é aproximadamente:

$11{,}9\% + 2{,}38\% + 0{,}19\% = 14{,}47\%$

c) A probabilidade de todas as 5 bolas ($p = n = 5$) serem vermelhas é:

$$\binom{5}{5}\cdot\left[\frac{5}{7}\right]^5\cdot\left[\frac{2}{7}\right]^{5-5} = 1\cdot\frac{3125}{16\,807}\cdot 1 \simeq 0{,}1859 = 18{,}59\%$$

d) **B**: retirada de 5 bolas azuis ($p = n = 5$)

C: retirada de exatamente 1 bola vermelha ($p = 1$ e $n = 5$)

D: retirada de ao menos duas bolas vermelhas ($\overline{D} = B \cup C$)

$$P(B) = \binom{5}{5}\cdot\left[\frac{2}{7}\right]^5\cdot\left[\frac{5}{7}\right]^{5-5} = 1\cdot\frac{32}{16\,807}\cdot 1 = \frac{32}{16\,807}$$

$$P(C) = \binom{5}{1}\cdot\left[\frac{5}{7}\right]^1\cdot\left[\frac{2}{7}\right]^{5-1} = 5\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{16}{2\,401} = \frac{400}{16\,807}$$

$$P(B \cup C) = \frac{32}{16\,807} + \frac{400}{16\,807} = \frac{432}{16\,807}$$

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P(B \cup C) = 1 - \frac{432}{16\,807} =$$

$$= \frac{16\,407}{16\,807} \simeq 0{,}9762 = 97{,}62\%$$

48. ▪ A probabilidade de que exatamente 10 clientes (p) tenham comprado chuteiras, de um total de 20 clientes (n) é:

$$\binom{20}{10}\cdot\left[\frac{3}{10}\right]^{10}\cdot\left[\frac{7}{10}\right]^{20-10} \simeq 0{,}0308 = 3{,}08\%$$

▪ A probabilidade de que ao menos 17 clientes tenham comprado chuteiras é igual à soma das probabilidades de que exatamente: 17 clientes tenham comprado chuteiras; 18 clientes tenham comprado chuteiras; 19 clientes tenham comprado chuteiras; 20 clientes tenham comprado chuteiras. Portanto, a probabilidade será:

$$\binom{20}{17}\cdot\left[\frac{3}{10}\right]^{17}\cdot\left[\frac{7}{10}\right]^{20-17} + \binom{20}{18}\cdot\left[\frac{3}{10}\right]^{18}\cdot\left[\frac{7}{10}\right]^{20-18} +$$

$$+\binom{20}{19}\cdot\left[\frac{3}{10}\right]^{19}\cdot\left[\frac{7}{10}\right]^{20-19} +$$

$$+\binom{20}{20}\cdot\left[\frac{3}{10}\right]^{20}\cdot\left[\frac{7}{10}\right]^{20-20} \simeq 0{,}0000005 = 0{,}00005\%$$

▪ A probabilidade de que menos de 4 clientes tenham comprado chuteiras é igual à soma das probabilidades de que: nenhum cliente tenha comprado chuteiras; exatamente 1 cliente tenha comprado chuteiras; exatamente 2 clientes tenham comprado chuteiras; exatamente 3 clientes tenham comprado chuteiras. Portanto, a probabilidade será:

$$\binom{20}{0}\cdot\left[\frac{3}{10}\right]^{0}\cdot\left[\frac{7}{10}\right]^{20-0} + \binom{20}{1}\cdot\left[\frac{3}{10}\right]^{1}\cdot\left[\frac{7}{10}\right]^{20-1} +$$

$$+\binom{20}{2}\cdot\left[\frac{3}{10}\right]^{2}\cdot\left[\frac{7}{10}\right]^{20-2} +$$

$$+\binom{20}{3}\cdot\left[\frac{3}{10}\right]^{3}\cdot\left[\frac{7}{10}\right]^{20-3} \simeq 0{,}1071 = 10{,}71\%$$

49. Como todas as 6 partidas são válidas, significa que em todas elas houve um ganhador, ambos com a mesma chance de pontuação, ou seja, $\frac{1}{2}$. A probabilidade de o jogador **A** ter ganhado pelo menos uma partida é igual ao complementar da probabilidade de ele não ter ganhado nenhuma, ou seja:

$$1 - \binom{6}{0}\cdot\left[\frac{1}{2}\right]^0\cdot\left[\frac{1}{2}\right]^{6-0} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{63}{64}$$

Portanto, a alternativa correta é **d**.

50. **Z**: votos do candidato Z

$$P(Z) = 20\% = 0{,}2;\ P(\overline{Z}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

A probabilidade de que em um grupo aleatório de 10 eleitores (n) o candidato **Z** obtenha igual porcentagem de votos (2 votos (p)) é:

$$\binom{10}{2}\cdot(0{,}2)^2\cdot(0{,}8)^{10-2} = 45\cdot(0{,}2)^2\cdot(0{,}8)^8 \simeq 0{,}3 = 30\%$$

Portanto, a alternativa correta é **c**.

51. a) **A**: foto tirada ser de um mamífero

$$P(A) = \frac{150}{150+350+80} = \frac{150}{580} = \frac{15}{58}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{15}{58} = \frac{43}{58}$$

A probabilidade de exatamente 5 fotos tiradas (p) serem de mamíferos, dentre as 20 fotos tiradas (n) no total, é:

$$\binom{20}{5}\cdot\left[\frac{15}{58}\right]^5\cdot\left[\frac{43}{58}\right]^{20-5} \simeq 0{,}2015 = 20{,}15\%$$

b) **B**: foto tirada ser de um réptil

$$P(B) = \frac{80}{150+350+80} = \frac{80}{580} = \frac{4}{29}$$

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{29} = \frac{25}{29}$$

A probabilidade de no máximo 4 fotos serem de répteis é igual à soma das probabilidades de: não haverem fotos de répteis ($p = 0$ e $n = 20$); haver exatamente 1 foto ($p = 1$ e $n = 20$); haver exatamente 2 fotos ($p = 2$ e $n = 20$); haver exatamente 3 fotos ($p = 3$ e $n = 20$); e haver exatamente 4 fotos ($p = 4$ e $n = 20$). Assim, a probabilidade será:

$$\binom{20}{0}\cdot\left[\frac{4}{29}\right]^0\cdot\left[\frac{25}{29}\right]^{20-0} + \binom{20}{1}\cdot\left[\frac{4}{29}\right]^1\cdot\left[\frac{25}{29}\right]^{20-1} +$$

$$+\binom{20}{2}\cdot\left[\frac{4}{29}\right]^2\cdot\left[\frac{25}{29}\right]^{20-2} + \binom{20}{3}\cdot\left[\frac{4}{29}\right]^3\cdot\left[\frac{25}{29}\right]^{20-3} +$$

$$+\binom{20}{4}\cdot\left[\frac{4}{29}\right]^4\cdot\left[\frac{25}{29}\right]^{20-4} \simeq 0{,}8689 = 86{,}89\%$$

c) **C**: foto tirada ser de uma ave

$$P(C) = \frac{350}{150+350+80} = \frac{350}{580} = \frac{35}{58}$$

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{35}{58} = \frac{23}{58}$$

A probabilidade de pelo menos 18 das fotos serem de aves é igual à soma das probabilidades de exatamente: 18 fotos serem de aves; 19 fotos serem de aves; 20 fotos serem de aves. Portanto, a probabilidade será:

$$\binom{20}{18}\cdot\left[\frac{35}{58}\right]^{18}\cdot\left[\frac{23}{58}\right]^{20-18} + \binom{20}{19}\cdot\left[\frac{35}{58}\right]^{19}\cdot\left[\frac{23}{58}\right]^{20-19} +$$

$$+\binom{20}{20}\cdot\left[\frac{35}{58}\right]^{20}\cdot\left[\frac{23}{58}\right]^{20-20} \simeq 0{,}0039 = 0{,}39\%$$

52. **A**: acertar uma questão

$$P(A) = \frac{1}{4};\ P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

A probabilidade de um candidato errar no máximo 4 questões é igual à soma das probabilidades de ele acertar 16, 17, 18, 19 e 20 questões. Portanto, a probabilidade será:

$$\binom{20}{16}\cdot\left[\frac{1}{4}\right]^{16}\cdot\left[\frac{3}{4}\right]^{20-16}+\binom{20}{17}\cdot\left[\frac{1}{4}\right]^{17}\cdot\left[\frac{3}{4}\right]^{20-17}+$$

$$+\binom{20}{18}\cdot\left[\frac{1}{4}\right]^{18}\cdot\left[\frac{3}{4}\right]^{20-18}+\binom{20}{19}\cdot\left[\frac{1}{4}\right]^{19}\cdot\left[\frac{3}{4}\right]^{20-19}+$$

$$+\binom{20}{20}\cdot\left[\frac{1}{4}\right]^{20}\cdot\left[\frac{3}{4}\right]^{20-20}\simeq 0{,}00000039=0{,}000039\%$$

Cálculo de probabilidades na Biologia

a) $P(Cc)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};\ P(\overline{Cc})=1-P(Cc)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Portanto, a probabilidade de termos exatamente 8 descendentes (p) heterozigotos em 10 descendentes (n) é:

$$\binom{10}{8}\cdot\left[\frac{1}{2}\right]^{8}\cdot\left[\frac{1}{2}\right]^{10-8}=\frac{45}{1024}=0{,}0439=4{,}39\%$$

b) A anomalia genética citada se refere aos descendentes homozigotos **cc**. Logo:

$P(cc)=\frac{1}{4};\ P(\overline{cc})=1-P(cc)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

A probabilidade de que em 20 descendentes de heterozigotos (n) tenhamos exatamente 8 homozigotos (p) do tipo **cc** é:

$$\binom{20}{8}\cdot\left[\frac{1}{4}\right]^{8}\cdot\left[\frac{3}{4}\right]^{20-8}\simeq 0{,}0609=6{,}09\%$$

c) $P(CC)=\frac{1}{4};\ P(\overline{CC})=1-P(CC)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

A probabilidade de ao menos 3 de 5 descendentes serem homozigotos **CC** é igual à soma das probabilidades de exatamente: 3 serem homozigotos do tipo **CC** ($p=3$ e $n=5$); 4 serem homozigotos do tipo **CC** ($p=4$ e $n=5$); 5 serem homozigotos do tipo **CC** ($p=5$ e $n=5$). Portanto, a probabilidade será:

$$\binom{5}{3}\cdot\left[\frac{1}{4}\right]^{3}\cdot\left[\frac{3}{4}\right]^{5-3}+\binom{5}{4}\cdot\left[\frac{1}{4}\right]^{4}\cdot\left[\frac{3}{4}\right]^{5-4}+$$

$$+\binom{5}{5}\cdot\left[\frac{1}{4}\right]^{5}\cdot\left[\frac{3}{4}\right]^{5-5}\simeq 0{,}1035=10{,}35\%$$

Unidade 7

Estatística

1. a) Idioma.
   b) Qualitativa nominal.
   c) Inglês, espanhol, francês e italiano.

2. a) País e óbitos.
   b) Qualitativa: país; quantitativa: óbitos.

4. qualitativa ordinal: nº (número do endereço), grau de instrução; qualitativa nominal: nome, *e-mail*, cidade, estado, sexo, endereço, estado civil, esporte favorito; quantitativa discreta: idade, quantidade de filhos; quantitativa contínua: massa, altura.

5. I: quantitativa contínua
   II: qualitativa ordinal
   III: qualitativa nominal
   IV: quantitativa discreta
   V: qualitativa nominal
   VI: qualitativa nominal
   VII: qualitativa nominal

6. a) 86%
   b) Sim, pois a probabilidade de escolher um aluno da pré-escola que estude na rede particular de ensino é de 26,3%, enquanto a de escolher um aluno do ensino médio que estude em uma instituição particular é de 12,9%.
   c) 25,4% de 7,267 milhões $\rightarrow \frac{25{,}4}{100}\cdot 7\,267\,000=1\,845\,818$
   d) ▪ A amostra era formada por 363 000, o que representa, em porcentagem:
   $\frac{363\,000}{201\,000\,000}\simeq 0{,}0018\rightarrow$ aproximadamente 0,18%
   ▪ Alguns possíveis critérios são: sexo; idade; classe econômica; escolaridade; município em que mora; tipo de residência.

7. A taxa de desemprego, no mês de junho, foi superior a 9,3% nos anos de 2003 a 2007, ou seja, em 6 dos 10 anos considerados. Logo, a probabilidade é de $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.
   Portanto, a alternativa correta é **a**.

8. No quadro a seguir, incluímos uma coluna com os valores da frequência relativa da ocorrência de cada cor.

Cor da ficha	Quantidade de vezes que foi sorteada	Frequência relativa
Preta	356	$\frac{356}{2\,000}=0{,}178$ ou 17,8%
Azul	846	$\frac{846}{2\,000}=0{,}423$ ou 42,3%
Vermelha	195	$\frac{195}{2\,000}=0{,}0975$ ou 9,75%
Verde	603	$\frac{603}{2\,000}=0{,}3015$ ou 30,15%

Logo, uma estimativa para a quantidade de fichas de cada cor é a porcentagem dada pela frequência relativa de ocorrência de cada cor em relação ao total de fichas (50).

▪ ficha preta:

17,8% de 50 $\rightarrow \frac{17{,}8}{100}\cdot 50=8{,}9\simeq 9$

▪ ficha azul:

42,3% de 50 $\rightarrow \frac{42{,}3}{100}\cdot 50=21{,}15\simeq 21$

▪ ficha vermelha:

9,75% de 50 $\rightarrow \frac{9{,}75}{100}\cdot 50=4{,}875\simeq 5$

- ficha verde:

$30{,}15\%$ de $50 \rightarrow \dfrac{30{,}15}{100} \cdot 50 = 15{,}075 \simeq 15$

Portanto, 9 fichas pretas, 21 fichas azuis, 5 fichas vermelhas e 15 fichas verdes.

9. a) $\dfrac{467\,345}{3\,466\,329} \simeq 0{,}1348$ ou aproximadamente $13{,}5\%$

b) $\dfrac{2\,637\,824}{3\,172\,750} \simeq 0{,}8314$ ou aproximadamente $83{,}1\%$

c) A quantidade de autoveículos sem a tecnologia *flex fuel* e que não sejam movidos apenas a gasolina, em 2012, era de:

$3\,432\,249 - (2\,732\,060 + 398\,317) = 301872$

Logo, a probabilidade é dada por:

$\dfrac{301872}{3\,432\,249} \simeq 0{,}088$ ou aproximadamente $8{,}8\%$

10. a) Não, pois foram feitos poucos lançamentos.

b) Sim, pois em virtude da grande quantidade de lançamentos a frequência relativa da ocorrência de cada evento deveria estar próxima de 25%.

11. Temos que 15% das pessoas que nunca ouviram falar de transgênico escolheriam esse tipo de alimento, logo a probabilidade é de 15%.

Portanto, a alternativa correta é **b**.

Índice de Gini

a) Sim, porque em 2011 o Índice de Gini era 0,529, enquanto em 2014 era 0,515.

b) $\overline{x} = \dfrac{0{,}529 + 0{,}526 + 0{,}525 + 0{,}515}{4} \simeq 0{,}523$

c) Diminuir. Representa que o grau de concentração de renda está diminuindo.

O programa brasileiro de etiquetagem veicular

a) Não, porque o mais econômico é representado pela letra **A**.

b) A quantidade de quilômetros que o veículo percorre com um litro de etanol na estrada.

c) - Temos:

$50 \cdot 9{,}8 = 490 \rightarrow 490$ km

Logo, o consumo está acima da média, porque com 50 litros o veículo deveria percorrer 490 km na cidade.

- Temos:

$40 \cdot 8{,}1 = 324 \rightarrow 324$ km

Logo, o consumo está abaixo da média, porque com 40 litros o veículo deveria percorrer 324 km na estrada.

12. a) $\overline{x} = \dfrac{84 + 115 + 168 + 137}{4} = 126 \rightarrow 126$ pessoas

b) Sim, porque a maior frequência ocorre no sábado.

13. - $Mo = 18$

- $Md = \dfrac{19 + 19}{2} = 19$

- $\overline{x} = \dfrac{18 \cdot 11 + 19 \cdot 6 + 20 \cdot 3 + 21 \cdot 7 + 48 \cdot 1 + 53 \cdot 2}{11 + 6 + 3 + 7 + 1 + 2} = 22{,}4\overline{3}$

Tanto a moda ($Mo = 18$) quanto a mediana ($Md = 19$) são boas representações da idade dos alunos, pois indicam onde ocorre uma tendência de concentração dos valores das idades. A média aritmética $\left(\overline{x} = 22{,}4\overline{3}\right)$ não seria uma boa representação, pois o conjunto de dados apresenta valores que se afastam dos demais (apenas 3 alunos apresentam idade acima da média).

14. a) - perdeu:

$1 + 0 + 5 = 6 \rightarrow 6$ partidas

- empatou:

3 partidas

- ganhou:

$3 + 5 + 2 + 1 = 11 \rightarrow 11$ partidas

b) - média:

$\overline{x} = \dfrac{(-3) \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + \ldots + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{1 + 0 + 5 + 3 + 3 + 5 + 2 + 1} = \dfrac{15}{20} = 0{,}75 \rightarrow 0{,}75$ gol

- mediana:

$\dfrac{1 + 1}{2} = 1 \rightarrow 1$ gol

- moda:

$Mo = -1$ gol ou $Mo = 2$ gols

15. Como temos um número par de dados, precisamos calcular a média dos dados centrais. Assim temos:

$Md = \dfrac{20{,}80 + 20{,}90}{2} = 20{,}85.$

Portanto, a alternativa correta é **d**.

16.

IDH dos países da América do Sul em 2013

IDH	Frequência (f)	Valor médio (vm)
0,638 ⊢— 0,675	2	0,6565
0,675 ⊢— 0,712	4	0,6935
0,712 ⊢— 0,749	2	0,7305
0,749 ⊢— 0,786	1	0,7675
0,786 ⊢— 0,823	3	0,8045

- média aritmética:

$\overline{x} = \dfrac{2 \cdot 0{,}6565 + 4 \cdot 0{,}6935 + 2 \cdot 0{,}7305 + 0{,}7675 + 3 \cdot 0{,}8045}{12}$

$\overline{x} = \dfrac{8{,}729}{12} \simeq 0{,}727$

- mediana:

$Md = \dfrac{0{,}6935 + 0{,}7305}{2} = 0{,}712$

- moda:

$Mo = 0{,}6935 \simeq 0{,}693$

17. Primeiro calculamos a média de cada candidato.

$M_A = \dfrac{4 \cdot 90 + 60}{5} = 84$

$M_B = \dfrac{5 \cdot 85}{5} = 85$

$M_C = \dfrac{4 \cdot 80 + 95}{5} = 83$

$M_D = \dfrac{4 \cdot 60 + 90}{5} = 66$

$M_E = \dfrac{4 \cdot 60 + 100}{5} = 68$

Deste modo, temos que a ordem de classificação foi: B, A, C, E e D.

Portanto, a alternativa correta é **b**.

18. De acordo com as informações do enunciado, ao dispor os elementos em rol, temos:

7	8	y_1	y_2	21	30

sendo, y_1 e y_2 correspondentes aos elementos 17 e x, não necessariamente nessa ordem. Assim, 17 e x são os termos centrais do conjunto de dados. Segue que:

- $Md = \dfrac{17+x}{2}$
- $\overline{x} = \dfrac{17+8+30+21+7+x}{6} = \dfrac{83+x}{6}$

Logo:

$$\overline{x} = Md + 1 \Rightarrow \frac{83+x}{6} = \frac{17+x}{2} + 1 \Rightarrow x = 13$$

$$\overline{x} = \frac{83+13}{6} = 16$$

Portanto, a alternativa correta é **a**.

19. Organizando os dados em rol, temos:

4,17	4,49	4,58	5	5,03	5,05	5,08	5,09	5,14
5,2	5,26	5,29	5,34	5,36	5,39	5,42	5,43	5,44
5,62	5,64	5,77	5,78	5,79	5,87	5,9	6,23	6,29

a) A amplitude máxima é $6{,}29 - 4{,}17 = 2{,}12$. Aumentando para 2,5, obtemos para cada intervalo a amplitude $\dfrac{2{,}5}{5} = 0{,}5$.

IDSUS das unidades de federação brasileiras em 2012

IDSUS	Frequência (f)
4,0 ⊢ 4,5	2
4,5 ⊢ 5,0	1
5,0 ⊢ 5,5	15
5,5 ⊢ 6,0	7
6,0 ⊢ 6,5	2

Fonte: Portal da Saúde. Disponível em: <http://portalsaude.saude.gov.br/index.php/cidadao/principal/agencia-saude/noticias-anteriores-agencia-saude/1577-ministerio-avalia-qualidade-dos-servicos-de-saude>. Acesso em: 21 jan. 2016.

b)

IDSUS das unidades de federação brasileiras em 2012

IDSUS	Frequência (f)	Valor médio (vm)
4,0 ⊢ 4,5	2	4,25
4,5 ⊢ 5,0	1	4,75
5,0 ⊢ 5,5	15	5,25
5,5 ⊢ 6,0	7	5,75
6,0 ⊢ 6,5	2	6,25

Fonte: Portal da Saúde. Disponível em: <http://portalsaude.saude.gov.br/index.php/cidadao/principal/agencia-saude/noticias-anteriores-agencia-saude/1577-ministerio-avalia-qualidade-dos-servicos-de-saude>. Acesso em: 21 jan. 2016.

- moda:

$Mo = 5{,}25$

média:

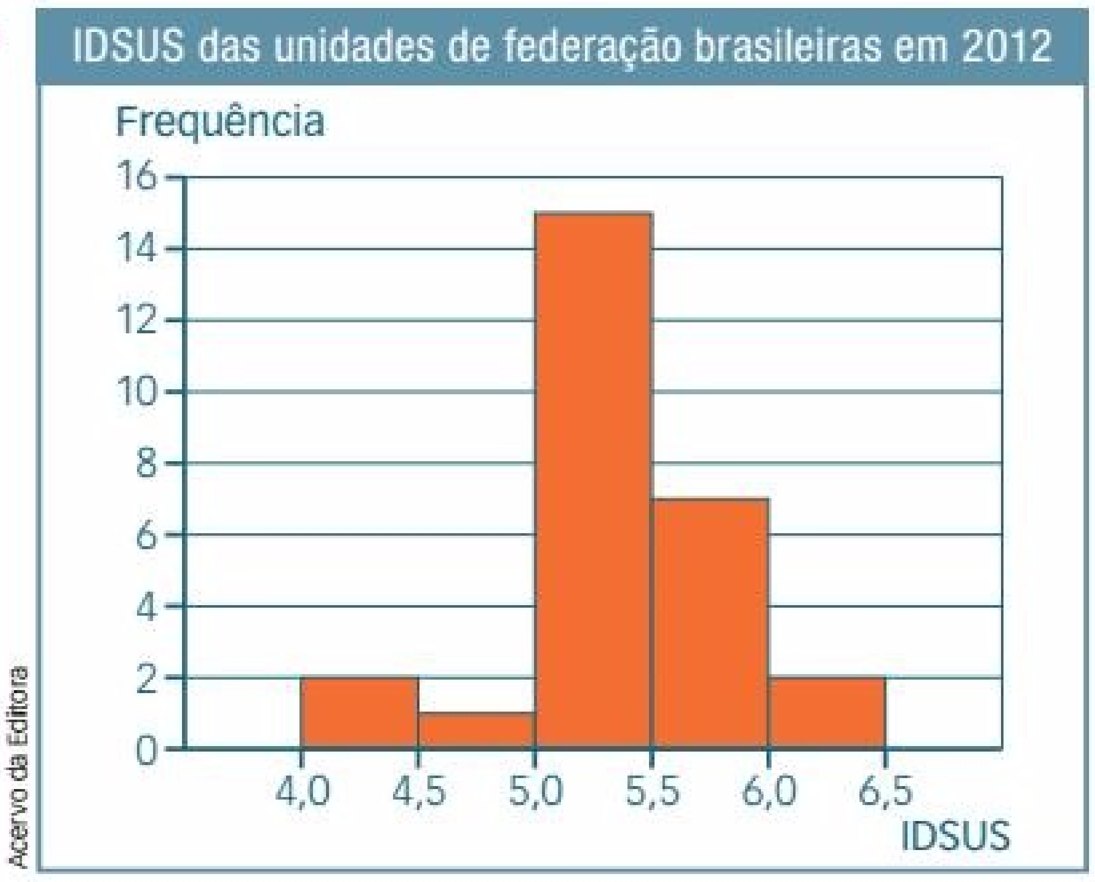
$2 \cdot 4{,}25 + 1 \cdot 4{,}75 + 15 \cdot 5{,}25 + 7 \cdot 5{,}75 + 2 \cdot 6{,}25 = 144{,}75$

$2 + 1 + 15 + 7 + 2 = 27$

$\overline{x} = \dfrac{144{,}75}{27} \simeq 5{,}36$

mediana:

$Md = 5{,}25$

- 

Acervo da Editora

Fonte: Portal da Saúde. Disponível em: <http://portalsaude.saude.gov.br/index.php/cidadao/principal/agencia-saude/noticias-anteriores-agencia-saude/1577-ministerio-avalia-qualidade-dos-servicos-de-saude>. Acesso em: 21 jan. 2016.

Calc e as medidas de tendência central

média: 9,125; mediana: 9; moda: 12

Velocidade da internet

a) Suíça; Estados Unidos; Alemanha; Austrália; Reino Unido; França; Espanha; Itália.

b) Suíça; 38%

c) Média; 512 Kbps – 2 Mbps

d) Não, porque a velocidade de conexão à internet da maioria dos brasileiros era de 512 Kbps a 2 Mbps.

Alguns cálculos estatísticos com a calculadora científica

a) Média aritmética: $6{,}21\overline{6}$; desvio padrão: aproximadamente 2,04; variância: aproximadamente 4,17.

b) Média aritmética: $6{,}\overline{13}$; desvio padrão: aproximadamente 3,65; variância: aproximadamente 13,32.

c) Média aritmética: 6,6; desvio padrão: aproximadamente 4,10; variância: 16,84.

Medidas de dispersão no Calc

a) Desvio médio: 1,93; variância: 5,29; desvio padrão: 2,30.

b) Desvio médio: 4,48; variância: 29,63; desvio padrão: 5,44.

c) Desvio médio: 17,83; variância: 545,82; desvio padrão: 23,36.

d) Desvio médio: 11,99; variância: 215,49; desvio padrão: 14,68.

20. ▪ homens:

$\overline{x_H} = \dfrac{1{,}25 + 2{,}47 + 4{,}98 + 7{,}38}{4} = 4{,}02$

$x_1 - \overline{x_H} = 1{,}25 - 4{,}02 = -2{,}77$

$x_2-\overline{x_H}=2{,}47-4{,}02=-1{,}55$
$x_3-\overline{x_H}=4{,}98-4{,}02=0{,}96$
$x_4-\overline{x_H}=7{,}38-4{,}02=3{,}36$

$$V_H=\frac{7{,}6729+2{,}4025+0{,}9216+11{,}2896}{4}=5{,}57165$$

$Dp_H=\sqrt{V_H}=2{,}3604$

- mulheres:

$$\overline{x_M}=\frac{2{,}06+4{,}07+7{,}99+11{,}73}{4}=6{,}46$$

$x_1-\overline{x_M}=2{,}06-6{,}46=-4{,}4$
$x_2-\overline{x_M}=4{,}07-6{,}46=-2{,}39$
$x_3-\overline{x_M}=7{,}99-6{,}46=1{,}53$
$x_4-\overline{x_M}=11{,}73-6{,}46=5{,}27$

$$V_H=\frac{19{,}36+5{,}7121+2{,}3409+27{,}7729}{4}=13{,}796475$$

$Dp_H=\sqrt{V_H}\simeq 3{,}7144$

Logo, o crescimento da população do gênero masculino é mais homogêneo, pois $Dp_H < Dp_M$.

22. Resposta esperada: Os desvios, em valores absolutos, em relação à média aritmética.

23. O candidato com pontuação mais regular foi o que obteve o menor desvio padrão, ou seja, Marco. Portanto, a alternativa correta é **b**.

24. a) $\overline{x}=\dfrac{1{,}92+2{,}11+2{,}04+1{,}85+1{,}92+1{,}91}{12}+$
$+\dfrac{2+2{,}07+2{,}11+1{,}85+2{,}11+2{,}11}{12}=2\rightarrow 2{,}00\text{ m}$

b) $V=\dfrac{4\cdot 0{,}0121+2\cdot 0{,}0064+2\cdot 0{,}0225+0{,}0016+0{,}0081+0{,}0049}{12}\simeq 0{,}01$

$Dp=\sqrt{0{,}01}=0{,}1\rightarrow 0{,}1\text{ m}$

25. a) Incorreto.

- média:

$$\overline{x}=\frac{1+3+4+7+2+3+4}{7}=3{,}43$$

- mediana:

1	2	3	3	4	4	7

$Md=3$

b) Incorreto.

$$\overline{x}=\frac{2+3+4}{3}=3$$

$$V=\frac{(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$Dp=\sqrt{V}\Rightarrow Dp=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

c) Incorreto.

A: ser azul

B: ter comprimento maior que 4 cm

$n(A\cup B)=4;\ n(\Omega)=7$

$$P(A\cup B)=\frac{4}{7}$$

d) Correto.

Probabilidade de escolher duas varetas azuis:

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{12}{42}=\frac{2}{7}$$

Probabilidade de escolher duas varetas verdes:

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$$

Assim, a probabilidade de escolher duas varetas azuis ou duas verdes é:

$$\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$$

e) Correto. As 9 maneiras são:

$(3, 3, 1)$, $(3, 3, 2)$, $\left(3, 3, \underset{\text{azul}}{4}\right)$, $\left(3, 3, \underset{\text{verde}}{4}\right)$, $(4, 4, 1)$, $(4, 4, 2)$, $\left(4, 4, \underset{\text{azul}}{3}\right)$, $\left(4, 4, \underset{\text{verde}}{3}\right)$ e $(4, 4, 7)$.

Observe que $(3, 3, 7)$ não forma um triângulo, pois a soma dos comprimentos dos dois menores lados é menor que o comprimento do terceiro lado.

f) Correto. Como todas as varetas são distintas, o número de maneiras de enfileirá-las corresponde ao número de permutações de 7 elementos, ou seja:

$P_7=7!=5\,040\rightarrow 5\,040$ maneiras

26. Vamos calcular o desvio padrão dos tempos de cada piloto.

- piloto **A**:

$$\overline{x}=\frac{3{,}3+3{,}1+2{,}8+2{,}8+3}{5}=3$$

$$V=\frac{0{,}3^2+0{,}1^2+(-0{,}2)^2+(-0{,}2)^2+0^2}{5}=0{,}036$$

$Dp=\sqrt{V}\Rightarrow Dp=\sqrt{0{,}036}\simeq 0{,}19$

- piloto **B**:

$$\overline{x}=\frac{2{,}7+3+2{,}7+3{,}5+3{,}1}{5}=3$$

$$V=\frac{(-0{,}3)^2+0^2+(-0{,}3)^2+0{,}5^2+0{,}1^2}{5}=0{,}088$$

$Dp=\sqrt{V}\Rightarrow Dp=\sqrt{0{,}088}\simeq 0{,}30$

- piloto **C**:

$$\overline{x}=\frac{3{,}1+2{,}7+3{,}3+3{,}1+2{,}8}{5}=3$$

$$V=\frac{0{,}1^2+(-0{,}3)^2+0{,}3^2+0{,}1^2+(-0{,}2)^2}{5}=0{,}048$$

$Dp=\sqrt{V}\Rightarrow Dp=\sqrt{0{,}048}\simeq 0{,}22$

Logo, a ordem de colocação é: piloto **A**, piloto **C** e piloto **B**.

27. 1) Verdadeira, pois o desvio padrão das notas da turma **B** é maior.

2) Verdadeira, pois o desvio padrão foi diferente para cada turma.

3) Falsa, pois as notas da turma **A** estão menos dispersas em torno da média, já que o desvio padrão é menor.

Portanto, a alternativa correta é **d**.

28. a) - jogador **A**:

$$\overline{x}=\frac{12+13+9+6}{4}=10\rightarrow 10\text{ pontos}$$

- jogador **B**:

$$\overline{x}=\frac{11+8+13+8}{4}=10\rightarrow 10\text{ pontos}$$

- jogador **C**:

$$\overline{x}=\frac{11+10+9+10}{4}=10\rightarrow 10\text{ pontos}$$

b) ▪ jogador A:

$V = \dfrac{2^2+3^2+(-1)^2+(-4)^2}{4} = 7{,}5$

$Dp = \sqrt{V} = \sqrt{7{,}5} \simeq 2{,}74 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente 2,74 pontos

▪ jogador B:

$V = \dfrac{1^2+(-2)^2+3^2+(-2)^2}{4} = 4{,}5$

$Dp = \sqrt{V} = \sqrt{4{,}5} \simeq 2{,}12 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente 2,12 pontos

▪ jogador C:

$V = \dfrac{1^2+0^2+(-1)^2+0^2}{4} = 0{,}5$

$Dp = \sqrt{V} = \sqrt{0{,}5} \simeq 0{,}71 \rightarrow$

$\rightarrow$ aproximadamente 0,71 pontos

O jogador com a pontuação mais regular foi o jogador **C**, pois apresentou o menor desvio padrão.

Coeficiente de variação

a) $CV_p = \dfrac{1{,}7}{6{,}5} \cdot 100 \simeq 26{,}2\%$

$CV_t = \dfrac{0{,}9}{3{,}3} \cdot 100 \simeq 27{,}3\%$

Logo, as notas foram mais homogêneas na prova escrita.

b) ▪ bpm:

$\overline{x} = 135{,}375$

$Dp \simeq 6{,}96$

$CV_{bpm} = \dfrac{6{,}96}{135{,}375} \cdot 100 \simeq 5{,}14\%$

▪ IMC:

$\overline{x} = 22{,}625$

$Dp \simeq 2{,}50$

$CV_{IMC} = \dfrac{2{,}5}{22{,}625} \cdot 100 \simeq 11{,}05\%$

Portanto, o conjunto de dados da variável "bpm" é o mais homogêneo.

Conexão tecnológica

1. Resposta esperada: Não, pois o evento "lançamento de uma moeda" é aleatório.
2. Resposta esperada: Sim.

Unidade 8

Matemática financeira

1. a) $\dfrac{101{,}01}{100} \cdot 300 = 303{,}03 \rightarrow$ R\$ 303,03

b) De acordo com o texto, o índice acumulado de novembro de 2014 a novembro de 2015 foi de 10,48%. Assim, temos:

▪ R\$ 300,00:

$\dfrac{110{,}48}{100} \cdot 300 = 331{,}44 \rightarrow$ R\$ 331,44

▪ R\$ 150,00:

$\dfrac{110{,}48}{100} \cdot 150 = 165{,}72 \rightarrow$ R\$ 165,72

▪ R\$ 5 000,00:

$\dfrac{110{,}48}{100} \cdot 5\,000 = 5\,524 \rightarrow$ R\$ 5 524,00

2. a) Note que, ao levar duas peças, o cliente ganha um desconto de 10% + 8% = 18% sobre o preço de etiqueta, ou seja, o valor pago em cada peça corresponde a 100% − 18% = 82% do preço de etiqueta.

▪ R\$ 57,40:

Se x é o preço de etiqueta, então:

$2 \cdot \left(\dfrac{82}{100} \cdot x\right) = 57{,}40 \Rightarrow \dfrac{82}{100}x = 28{,}7 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 35 \rightarrow$ R\$ 35,00

▪ R\$ 73,80:

Se x é o preço de etiqueta, então:

$2 \cdot \left(\dfrac{82}{100} \cdot x\right) = 73{,}80 \Rightarrow \dfrac{82}{100}x = 36{,}9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 45 \rightarrow$ R\$ 45,00

▪ R\$ 114,80:

Se x é o preço de etiqueta, então:

$2 \cdot \left(\dfrac{82}{100} \cdot x\right) = 114{,}80 \Rightarrow \dfrac{82}{100}x = 57{,}4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 70 \rightarrow$ R\$ 70,00

b) ▪ R\$ 40,00:

$2 \cdot \left(\dfrac{82}{100} \cdot 40\right) = 2 \cdot 32{,}8 = 65{,}6 \rightarrow$ R\$ 65,60

▪ R\$ 85,00:

$2 \cdot \left(\dfrac{82}{100} \cdot 85\right) = 2 \cdot 69{,}7 = 139{,}4 \rightarrow$ R\$ 139,40

▪ R\$ 110,00:

$2 \cdot \left(\dfrac{82}{100} \cdot 110\right) = 2 \cdot 90{,}2 = 180{,}4 \rightarrow$ R\$ 180,40

3. a) aumentou: China, Romênia e Sudão

diminuiu: Grécia e Brasil

b) Em milhões de dólares, temos:

▪ Brasil:

$\dfrac{2\,465\,773\,850\,935 - 2\,416\,635\,506\,076}{2\,416\,635\,506\,076} \simeq 0{,}020333 \simeq 2{,}03\%$

▪ China:

$\dfrac{10\,354\,831\,729\,340 - 9\,490\,602\,600\,148}{9\,490\,602\,600\,148} \simeq 0{,}091061 \simeq 9{,}1\%$

▪ Grécia:

$\dfrac{235\,574\,074\,998 - 239\,509\,850\,570}{239\,509\,850\,570} \simeq -0{,}016433 \simeq -1{,}64\%$

▪ Romênia:

$\dfrac{199043652215 - 191587217164}{191587217164} \simeq 0{,}038919 \simeq 3{,}89\%$

- Sudão:
$\dfrac{73814947341-66480141187}{66480141187}=0{,}110331=11{,}03\%$

4. $400+\dfrac{5}{100}\cdot 40\,000=400+2\,000=$
$=2\,400\rightarrow$ R\$ 2 400,00

Portanto, a alternativa correta é **a**.

5. a) - R\$ 800,00:
$\dfrac{8}{100}\cdot 800=64\rightarrow$ R\$ 64,00
- R\$ 1 100,00:
$\dfrac{8}{100}\cdot 1\,100=88\rightarrow$ R\$ 88,00
- R\$ 1 950,00:
$\dfrac{9}{100}\cdot 1\,950=175{,}5\rightarrow$ R\$ 175,50
- R\$ 3 900,00:
$\dfrac{11}{100}\cdot 3\,900=429\rightarrow$ R\$ 429,00

b) Inicialmente, vamos calcular os valores de contribuições em cada faixa de salário.
- até R\$ 1 399,12:
$\dfrac{8}{100}\cdot 1\,399{,}12=111{,}93\rightarrow$ R\$ 111,93
- de R\$ 1 399,13 até R\$ 2 331,88:
$\dfrac{9}{100}\cdot 1\,399{,}13=125{,}92\rightarrow$ R\$ 125,92
$\dfrac{9}{100}\cdot 2\,331{,}88=209{,}87\rightarrow$ R\$ 209,87
- de R\$ 2 331,89 até R\$ 4 663,75:
$\dfrac{11}{100}\cdot 2\,331{,}89=256{,}51\rightarrow$ R\$ 256,51
$\dfrac{11}{100}\cdot 4\,663{,}75=513{,}01\rightarrow$ R\$ 513,01

Tabela de contribuição dos segurados empregado, empregado doméstico e trabalhador avulso, para pagamento de remuneração – 2015

Salário de contribuição (R\$)	Alíquota para fins de recolhimento ao INSS (%)	Valores de contribuição (R\$)
Até 1399,12	8	Até 111,93
De 1399,13 até 2331,88	9	De 125,92 até 209,87
De 2331,89 até 4 663,75	11	De 256,51 até 513,01

Fonte: Ministério da Previdência Social. Disponível em: <http://www.mtps.gov.br/servicos-do-ministerio/servicos-da-previdencia/mais-procurados/calculo-de-guia-da-previdencia-social-carne/tabela-de-contribuicao-mensal>. Acesso em: 22 jan. 2016.

Com a tabela acima, podemos determinar a alíquota de acordo com o valor da contribuição.
- R\$ 49,76:
A alíquota é de 8%. Assim, denotando o salário por x, temos:
$\dfrac{8}{100}\cdot x=49{,}76\Rightarrow x=622\rightarrow$ R\$ 622,00
- R\$ 108,00 :
A alíquota é de 8%. Assim, denotando o salário por x, temos:
$\dfrac{8}{100}\cdot x=108\Rightarrow x=1\,350\rightarrow$ R\$ 1 350,00
- R\$ 162,00:
A alíquota é de 9%. Assim, denotando o salário por x, temos:
$\dfrac{9}{100}\cdot x=162\Rightarrow x=1\,800\rightarrow$ R\$ 1 800,00
- R\$ 341,00:
A alíquota é de 11%. Assim, denotando o salário por x, temos:
$\dfrac{11}{100}\cdot x=341\Rightarrow x=3\,100\rightarrow$ R\$ 3 100,00

c) Sim, pois 8% de R\$ 1 250,00 corresponde a R\$ 100,00.

6. $\dfrac{880-788}{788}=0{,}11675=11{,}67\%$

7. a) $238{,}70-18{,}70=220\rightarrow$ R\$ 220,00

b) $\dfrac{18{,}70}{220}=0{,}085=8{,}5\%$

8. O valor pago corresponde a $\underbrace{90\%}_{100\%-10\%}$ do valor sem as taxas de embarque, que é de R\$ $\underbrace{4\,080{,}00}_{4\,200-120}$, mais o valor das taxas de embarque, que é de R\$ 120, ou seja:
$\dfrac{90}{100}\cdot 4\,080+120=3\,672+120=$
$=3\,792\rightarrow$ R\$ 3 792,00

Portanto, a alternativa correta é **c**.

9. a) No total, o funcionário recebeu um reajuste de $\underbrace{12\%}_{9{,}5\%+2{,}5\%}$.
Se x é o valor do reajuste, então:
$\dfrac{x}{1\,887-x}=\dfrac{12}{100}\Rightarrow 100x=22\,644-12x\Rightarrow$
$\Rightarrow 112x=22\,644\Rightarrow x=202{,}18\rightarrow$
$\rightarrow$ R\$ 202,18

b) $1\,887-202{,}18=1\,684{,}82\rightarrow$ R\$ 1 684,82

10. $\dfrac{107}{\underbrace{100}_{100\%+7\%}}\cdot 850=909{,}5\rightarrow$ R\$ 909,50

11. - banco A:
$12\cdot 1\,500-15\,000=18\,000-15\,000=$
$=3\,000\rightarrow$ R\$ 3 000,00
$\dfrac{3\,000}{15\,000}=0{,}2=20\%$
- banco B:
$15\cdot 1\,200-12\,000=18\,000-12\,000=$
$=6\,000\rightarrow$ R\$ 6 000,00
$\dfrac{6\,000}{12\,000}=0{,}5=50\%$

12. a) $12\cdot 150=1\,800\rightarrow$ R\$ 1 800,00

b) $\dfrac{88}{\underbrace{100}_{100\%-12\%}}\cdot 1\,800=1\,584\rightarrow$ R\$ 1 584,00

13. Preço a prazo:

$\underbrace{\frac{113}{100}}_{100\%+13\%} \cdot 2\,500 = 2\,825 \rightarrow$ R$ 2 825,00

Valor de cada prestação:

$\frac{2\,825}{8} \simeq 353{,}13 \rightarrow$ R$ 353,13

14. Não, pois o valor do desconto é determinado sobre o valor capital acrescido de 15%, tornando este desconto maior que o valor acrescentado.

15. Se i é a taxa de aumento, temos:

$1+0{,}61=(1+0{,}15)\cdot(1+i) \Rightarrow 1{,}61=1{,}15\cdot(1+i) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+i=1{,}4 \Rightarrow i=0{,}4=40\%$

Portanto, a alternativa correta é **b**.

16. $113{,}16=P_0\cdot(1+0{,}04)\cdot(1+0{,}005)^{15} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_0 \simeq 100{,}96 \rightarrow$ R$ 100,96

Logo, o valor da fatura seria de R$ 100,96.

17. a) $1{,}1\cdot 1{,}18\cdot 1{,}13 = \underbrace{1{,}46674}_{100\%+46{,}674\%}$

Assim, os três acréscimos equivalem a um único aumento de 46,674%.

b) $5{,}13=P_0\cdot 1{,}46674 \Rightarrow P_0 \simeq 3{,}5 \rightarrow$ R$ 3,50

18. Se a produção dos Estados Unidos corresponder a $\frac{\overbrace{0{,}45}^{45\%}}{2}=22{,}5\%$ da produção mundial, a participação do Brasil deverá corresponder a $88\%-22{,}5\%=65{,}5\%$ da produção mundial. Assim, se **P** é a produção mundial em 2006, então a produção brasileira foi de $0{,}43P$ nesse ano e, como a produção deve aumentar para $0{,}655P$, temos:

$0{,}655P=0{,}43P\cdot(1+i) \Rightarrow 1+i \simeq 1{,}523 \Rightarrow$

$\Rightarrow i \simeq 0{,}523=52{,}3\%$

Portanto, a alternativa correta é **c**.

19. $P=5\,000\cdot(1-0{,}15)^{11} \simeq 836{,}7$

Portanto, no último mês foram comercializados 836 aparelhos.

20. $(1-0{,}2)\cdot(1+i)=1 \Rightarrow 0{,}8\cdot(1+i)=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+i=1{,}25 \Rightarrow i=0{,}25=25\%$

Portanto, o aumento deve ser de 25%.

21. a) $80\cdot(1+0{,}5)\cdot(1-0{,}2)=80\cdot 1{,}5\cdot 0{,}8=$

$=96 \rightarrow$ R$ 96,00

b) $\frac{96-80}{80}=\frac{16}{80}=0{,}2=20\%$

22. $1{,}12\cdot 1{,}095\cdot 1{,}2 = \underbrace{1{,}47168}_{100\%+47{,}168\%}$

Logo, os três aumentos equivalem a um único aumento de 47,168%. Segue que, em cada caso, temos:

- R$ 1 500,00:
$1\,500\cdot 1{,}47168=2\,207{,}52 \rightarrow$ R$ 2 207,52
- R$ 2 000,00:
$2\,000\cdot 1{,}47168=2\,943{,}36 \rightarrow$ R$ 2 943,36
- R$ 2 200,00:
$2\,200\cdot 1{,}47168=3\,237{,}70 \rightarrow$ R$ 3 237,70
- R$ 3 000,00:
$3\,000\cdot 1{,}47168=4\,415{,}04 \rightarrow$ R$ 4 415,04

Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC)

a) Brasília; Campo Grande

b) $680+\frac{1{,}35}{100}\cdot 680=680+9{,}18=689{,}18$

Juros compostos com a calculadora

a) $M=3\,500(1{,}045)^{12} \simeq 5\,935{,}59 \rightarrow$ R$ 5 935,59

b) $M=2\,800(1{,}045)^{12} \simeq 4\,748{,}47 \rightarrow$ R$ 4 748,47

c) $M=5\,000(1{,}045)^{12} \simeq 8\,479{,}41 \rightarrow$ R$ 8 479,41

d) $M=1\,200(1{,}045)^{12} \simeq 2\,035{,}06 \rightarrow$ R$ 2 035,06

23. $12064{,}32=11800(1+0{,}048t) \Rightarrow t=\frac{12064{,}32-11800}{11800\cdot(0{,}048)} \simeq 0{,}46$

Logo, o pagamento foi efetuado após $0{,}46\cdot 30 \simeq 14$ dias.

24. $975=825\cdot(1+i) \Rightarrow \frac{975-825}{825}=i \Rightarrow i=0{,}\overline{18} \simeq 18\%$

25. $M=500\left(1+0{,}02\cdot\frac{4}{15}\right) \Rightarrow M=500+\frac{40}{15} \simeq 502{,}67$

Portanto, o valor pago é de R$ 502,67.

26. Multa: 2% de 930,00

$\frac{2}{100}\cdot 930=18{,}60$

Juros: 1% ao mês

$\frac{1}{100}\cdot\frac{19}{30}\cdot 930=5{,}89$

Assim, o valor pago foi de $930+18{,}6+5{,}89=954{,}49$, ou seja R$ 954,49.

27. a) O valor devido, após o pagamento da entrada, era de R$ $\underbrace{950{,}00}_{2\,000-1\,050}$. Como Adriano vai pagar R$ $\underbrace{100{,}00}_{1\,050-950}$ de juros após um mês, a taxa é:

$\frac{100}{950} \simeq 0{,}1053=10{,}53\%$

b) Valor com desconto:

$(1-0{,}05)\cdot 2\,000=0{,}95\cdot 2\,000=1\,900$

Logo, o valor que seria economizado é:

$2\cdot 1\,050-1\,900=200 \rightarrow$ R$ 200,00

28 - Quantia paga:

$M=c(1+i)^t=3\,500(1+0{,}06)^5=3\,500\cdot 1{,}06^5=$

$=4\,683{,}79 \rightarrow$ R$ 4 683,79

- Juros:

$M=c+j \Rightarrow 4\,683{,}79=3\,500+j \Rightarrow$

$\Rightarrow j=1\,183{,}79 \rightarrow$ R$ 1 183,79

29. $M=2c \Rightarrow c(1+i)^t=2c \Rightarrow (1+i)^t=2 \Rightarrow (1+0{,}06)^t=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1{,}06)^t=2 \Rightarrow \log_2(1{,}06)^t=\log_2 2 \Rightarrow t\cdot\log_2(1{,}06)=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow t\cdot 0{,}084=1 \Rightarrow t \simeq 12 \rightarrow 12$ anos

30. 2 anos correspondem a 24 meses. Assim:

$M = c(1+i)^t \Rightarrow 6\,200 = c(1+0{,}024)^{24} \Rightarrow$

$\Rightarrow c = \dfrac{6\,200}{1{,}024^{24}} \simeq 3\,509{,}08 \rightarrow$ R\$ 3 509,08

31. a) $M = 15\,000(1{,}015)^9 \simeq 17\,150{,}85 \rightarrow$ R\$ 17 150,85

b) $M = 60\,000(1{,}05)^5 \simeq 76\,576{,}89 \rightarrow$ R\$ 76 576,89

32. $M = 3c \Rightarrow c(1+i)^t = 3c \Rightarrow (1+i)^t = 3 \Rightarrow (1+0{,}12)^t = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log(1{,}12)^t = \log 3 \Rightarrow t \cdot \log 1{,}12 = \log 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow t \cdot 0{,}05 \simeq 0{,}47 \Rightarrow t \simeq 9{,}4$

Assim, o tempo necessário é de 9,4 meses ou 9 meses e 12 dias.

Portanto, a alternativa correta é **d**.

33. O valor financiado foi de R\$ $\underbrace{1\,500{,}00}_{2\,500-1\,000}$. Assim, a taxa **i** é dada por:

$M = c(1+i)^t \Rightarrow 1\,863{,}45 = 1\,500(1+i)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1+i)^3 = 1{,}2423 \Rightarrow 1+i = \sqrt[3]{1{,}2423} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+i \simeq 1{,}075 \Rightarrow i \simeq 0{,}075 = 7{,}5\%$

34. O tempo da aplicação é de 2 meses. Assim, a taxa **i** é dada por:

$M = c(1+i)^t \Rightarrow 29\,282 = 24\,200(1+i)^2 \Rightarrow (1+i)^2 = 1{,}21 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+i = \sqrt{1{,}21} \Rightarrow 1+i = 1{,}1 \Rightarrow i = 0{,}1 = 10\%$

Portanto, a alternativa correta é **b**.

35. a) Montante devido após 6 meses:

$M = c(1+i)^t = 8\,000(1+0{,}054)^6 \simeq$

$\simeq 10\,968{,}16 \rightarrow$ R\$ 10 968,16

Logo, o valor da primeira parcela é:

$\dfrac{10\,968{,}16}{2} = 5\,484{,}08 \rightarrow$ R\$ 5 484,08

b) O valor devido após o pagamento da primeira parcela é de R\$ 5 484,08 e, após 6 meses:

$M = c(1+i)^t = 5\,484{,}08(1+0{,}054)^6 \simeq$

$\simeq 7\,518{,}78 \rightarrow$ R\$ 7 518,78

Logo, o montante total pago é:

$5\,484{,}08 + 7\,518{,}78 = 13\,002{,}86 \rightarrow$ R\$ 13 002,86

c) O total pago, nesse caso, seria:

$M = c(1+i)^t = 8\,000(1+0{,}054)^{12} \simeq$

$\simeq 15\,037{,}56 \rightarrow$ R\$ 15 037,56

Logo, haveria uma diferença de:

$15\,037{,}56 - 13\,002{,}86 = 2\,034{,}7 \rightarrow$ R\$ 2 034,70

36. Após um ano, o montante é:

$M_1 = 10\,000(1+i)^1 = 10\,000(1+i)$

O valor que permanece aplicado, após o saque é de $10\,000(1+i) - 7\,000$. Como após mais um ano o montante é de 6 000, temos:

$M = c(1+i)^t \Rightarrow 6\,000 = (10\,000(1+i) - 7\,000)(1+i)^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6\,000 = 10\,000(1+i)^2 - 7\,000(1+i) \Rightarrow 10(1+i)^2 - 7(1+i) - 6 = 0$

Fazendo $x = (1+i)$, obtemos a equação quadrática $10x^2 - 7x - 6 = 0$ cujas soluções são $x_1 = 1{,}2$ ou $x_2 = -0{,}5$. Como a taxa **i** é positiva, temos $x = 1{,}2$ e:

$i = x - 1 = 1{,}2 - 1 = 0{,}2$

Assim:

$(4i-1)^2 = (4 \cdot 0{,}2 - 1)^2 = (-0{,}2)^2 = 0{,}04$

Portanto, a alternativa correta é **d**.

37. A cada mês, a dívida aumenta 17% em razão dos juros cobrados pela empresa e, sucessivamente, diminui 38% pelo pagamento de parte do valor da fatura. Logo, após 12 meses, o valor que Érica ainda deverá pagar será:

$(1{,}17 \cdot 0{,}62)^{12} \cdot A = 0{,}7254^{12} A \simeq 0{,}02A$

Se a quantia **A** for R\$ 1 000,00, Érica ainda estará devendo:

$0{,}02 \cdot 1\,000 = 20 \rightarrow$ R\$ 20,00

38. a) $M = c(1 + i \cdot t) = 2\,000(1 + 0{,}1 \cdot 8) = 3\,600 \rightarrow$ R\$ 3 600,00

b) $M = c(1+i)^t = 2\,000(1+0{,}085)^8 \simeq 3\,841{,}21 \rightarrow$ R\$ 3 841,21

39. a) $M = c(1+i)^t = 2\,200(1+0{,}022)^6 \simeq 2\,506{,}85 \rightarrow$ R\$ 2 506,85

b) No início da segunda aplicação, o montante era R\$ $\underbrace{3\,506{,}85}_{2\,506{,}85+1\,000}$. O resgate teria ocorrido após dois anos do início da segunda aplicação. Assim, o montante total foi:

$M = c(1+i)^t = 3\,506{,}85(1+0{,}022)^{24} \simeq$

$\simeq 5\,912{,}06 \rightarrow$ R\$ 5 912,06

40.

Mês	Depósito	Rendimento	Saldo
Jan.	300	0	300
Fev.	0	$300 \cdot 0{,}005882 \simeq 1{,}76$	301,76
Mar.	0	$301{,}76 \cdot 0{,}005169 \simeq 1{,}56$	303,32
Abr.	0	$303{,}32 \cdot 0{,}006302 \simeq 1{,}91$	305,23
Maio	550	$305{,}23 \cdot 0{,}006079 \simeq 1{,}86$	857,09
Jun.	0	$857{,}09 \cdot 0{,}006159 \simeq 5{,}28$	862,37
Jul.	0	$862{,}37 \cdot 0{,}006822 \simeq 5{,}88$	868,25
Ago.	0	$868{,}25 \cdot 0{,}007317 \simeq 6{,}35$	874,60
Set.	0	$874{,}60 \cdot 0{,}006876 \simeq 6{,}01$	880,61
Out.	0	$880{,}61 \cdot 0{,}006930 \simeq 6{,}10$	886,71
Nov.	184	$886{,}71 \cdot 0{,}006799 \simeq 6{,}03$	892,74
Dez.	0	$1\,076{,}74 \cdot 0{,}006303 \simeq 6{,}79$	1 083,53
Jan./2012	0	$1\,083{,}53 \cdot 0{,}007261 \simeq 7{,}87$	1 091,40

Portanto, o montante obtido em janeiro de 2016 foi, R\$ 1 091,40.

41. a) ▪ 1ª parcela:

$0{,}4 \cdot 3\,500 = 1\,400 \rightarrow$ R\$ 1 400,00

▪ 2ª parcela:

$M = c(1+i)^t = \underbrace{2\,100}_{3\,500-1\,400}(1+0{,}05)^2 =$

$= 2\,315{,}25 \rightarrow$ R\$ 2 315,25

b) ▪ 1ª maneira:

$\underbrace{0{,}95}_{100\%-5\%} \cdot 3\,500 = 3\,325$

▪ 2ª maneira:

$1\,400 + 2\,315{,}25 = 3\,715{,}25$

Assim, a diferença é:

$3\,715{,}25 - 3\,325 = 390{,}25 \rightarrow$ R\$ 390,25

42. O valor de **V**, indicado no gráfico, para $t = 3$ anos é, aproximadamente, R$ 50 000,00, ou seja, o valor obtido pelo funcionário é aproximadamente R$ 10 000,00 mais baixo. Portanto, a alternativa correta é **b**.

43. Considerando o capital de R$ 55000,00 e analisando cada opção temos:

- Opção 1: Arthur utilizará todo o capital no pagamento à vista.
- Opção 2: pagando R$ 30000,00 de entrada, Arthur poderá investir R$ 25000,00 por 6 meses e obter o seguinte montante:

$M = 25000 \cdot (1+0{,}1)^1 = 27500 \rightarrow$ R$ 27500,00

Após 6 meses ele poderá pagar a prestação e ainda lhe sobrará R$ $\underbrace{1500}_{27500-26000}$,00.

Investindo esse capital por mais 6 meses, Arthur irá obter:

$M = 1500 \cdot (1+0{,}1)^1 = 1650 \rightarrow$ R$ 1650,00

Logo, após 12 meses o terreno estará pago e ainda lhe sobrará R$ 1650,00.

- Opção 3: pagando R$ 20000,00 de entrada, Arthur poderá investir R$ 35000,00 por 6 meses e obter e seguinte montante:

$M = 35000 \cdot (1+0{,}1)^1 = 38500 \rightarrow$ R$ 38500,00

Ao realizar o pagamento da prestação de R$ 20000,00, Arthur ainda poderá investir R$ $\underbrace{18\,500}_{38500-20000}$,00 por 6 meses e obter e seguinte montante:

$M = 18500 \cdot (1+0{,}1)^1 = 20350 \rightarrow$ R$ 20350,00

Logo, após 12 meses ele poderá pagar a última prestação e ainda lhe sobrará R$ $\underbrace{2\,350}_{20\,350-18000}$,00.

- Opção 4: pagando R$ 15000,00 de entrada, Arthur poderá investir R$ 40000,00 por 12 meses e obter e seguinte montante:

$M = 40000 \cdot (1+0{,}1)^2 = 48400 \rightarrow$ R$ 48400,00

Logo, após 12 meses ele poderá pagar a prestação e ainda lhe sobrará R$ $\underbrace{9\,400}_{48400-39000}$,00.

- Opção 5: Arthur poderá investir R$ 55000,00 por 12 meses e obter e seguinte montante:

$M = 55000 \cdot (1+0{,}1)^2 = 66\,550 \rightarrow$ R$ 66 550,00

Logo, após 12 meses ele poderá pagar o terreno e ainda lhe sobrará R$ $\underbrace{6\,500}_{66500-60000}$,00.

Assim, para Arthur a opção 4 é a mais vantajosa financeiramente, pois após 12 meses ele terá o terreno e mais R$ 9 400,00 obtidos ao investir seu o capital.

Portanto, a alternativa correta é **d**.

44. a) $M = c(1+i)^t = \underbrace{55\,000}_{35\,000+20\,000}(1+0{,}018)^{12} =$

$= 55\,000(1{,}018)^{12} \simeq 68\,129{,}63 \rightarrow$ R$ 68 129,63

b) - Lucas:

$M = c(1+i)^t = 35\,000(1+0{,}018)^{12} =$

$= 35\,000(1{,}018)^{12} \simeq 43\,355{,}22 \rightarrow$ R$ 43 355,22

- Thais:

$M = c(1+i)^t = 20\,000(1+0{,}018)^{12} =$

$= 20\,000(1{,}018)^{12} \simeq 24\,774{,}41 \rightarrow$ R$ 24 774,41

Conversão da taxa de juros

a) $i_m = (1+0{,}1)^{\frac{1}{12}} - 1 \simeq 0{,}00797 \rightarrow 0{,}797\%$ a.m.

b) $i_a = (1+0{,}01531)^{12} - 1 \simeq 0{,}2 \rightarrow 20\%$ a.a.

c) $i_m = (1+0{,}25)^{\frac{1}{12}} - 1 \simeq 0{,}01877 \rightarrow 1{,}877\%$ a.m.

d) $i_a = (1+0{,}00565)^{12} - 1 \simeq 0{,}07 \rightarrow 7\%$ a.a.

As fórmulas que relacionam i_m e i_d são:

$i_d = (1+i_m)^{\frac{1}{30}} - 1$; $i_m = (1+i_d)^{30} - 1$

Aposentadoria

a) $V = (1+i) \cdot \left(\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}\right) \cdot P =$

$= (1+0{,}008) \cdot \left(\dfrac{(1+0{,}008)^{240} - 1}{0{,}008}\right) \cdot 100 =$

$= \dfrac{1{,}008 \cdot 100 \cdot (1{,}008^{240} - 1)}{0{,}008} =$

$= 12\,600(1{,}008^{240} - 1) \simeq 72\,690{,}03 \rightarrow$

$\rightarrow$ R$ 72 690,03

b) $V = (1+i) \cdot \left(\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}\right) \cdot P \Rightarrow$

$\Rightarrow 734\,170{,}65 = 1{,}012 \cdot \left(\dfrac{1{,}012^{300} - 1}{0{,}012}\right) \cdot P \Rightarrow$

$\Rightarrow P = \dfrac{734\,170{,}65 \cdot 0{,}012}{1{,}012(1{,}012^{300} - 1)} \simeq 250 \rightarrow$ R$ 250,00

c) $V = (1+i) \cdot \left(\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}\right) \cdot P \Rightarrow$

$\Rightarrow 134\,692 = 1{,}005 \cdot \left(\dfrac{1{,}005^{180} - 1}{0{,}005}\right) \cdot P \Rightarrow$

$\Rightarrow P = \dfrac{134\,692 \cdot 0{,}005}{1{,}005(1{,}005^{180} - 1)} \simeq 460{,}84 \rightarrow$ R$ 460,84

45. - $f(t) = 2\,000 + 70t \Rightarrow f(t) = 2\,000\left(1 + \dfrac{70}{2\,000}t\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(t) = \underbrace{2\,000}_{c}\left(1 + \underbrace{0{,}035}_{i} \cdot t\right)$

Logo, c = R$ 2 000,00 e i = 3,5%.

- $g(t) = 1\,500 \cdot \left(\dfrac{11}{10}\right)^t \Rightarrow g(t) = 1\,500(1{,}1)^t \Rightarrow g(t) = \underbrace{1\,500}_{c}\left(1 + \underbrace{0{,}1}_{i}\right)^t$

Logo, c = R$ 1 500,00 e i = 10%.

46. a) taxa de juros simples: investimento **B**

taxa de juros compostos: investimento **A**

b) $t < t_1$: investimento **B**

$t > t_1$: investimento **A**

c) capital **c**

47. a) $f(t) = 5000 + 350t$

$g(t) = 5000(1{,}07)^t$

b) Note que:

$f(t) = g(t) \Leftrightarrow 5000 + 350t = 5000(1{,}07)^t \Leftrightarrow 1 + 0{,}07t = (1{,}07)^t$

Assim, $t = 0$ ou $t = 1$. Logo, depois de 1 ano os montantes serão iguais.

c) A opção 1, pois o montante obtido será maior.

d) $f(2) = 5000 + 350 \cdot 2 = 5700$

$g(2) = 5000(1{,}07)^2 = 5724{,}50$

Assim, $|g(2) - f(2)| = 24{,}50 \rightarrow$ R$ 24,50

48. a) - proposta 1:

$M_1(t) = c(1 + i \cdot t) \Rightarrow M_1(t) = 10\,000(1 + 0{,}085t) \Rightarrow$

$\Rightarrow M_1(t) = 10\,000 + 850t$

- proposta 2:

$$M_2(t) = c(1+i)^t \Rightarrow M_2(t) = 10\,000(1+0{,}065)^t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M_2(t) = 10\,000(1{,}065)^t$$

b) - 5 meses:

$$M_1(5) = 10\,000 + 850 \cdot 5 = 14\,250$$
$$M_2(5) = 10\,000(1{,}065)^5 \simeq 13\,700{,}87$$

Portanto, a proposta 1 rende maior montante.

- 9 meses:

$$M_1(9) = 10\,000 + 850 \cdot 9 = 17\,650$$
$$M_2(9) = 10\,000(1{,}065)^9 \simeq 17\,625{,}70$$

Portanto, a proposta 1 rende maior montante.

- um ano:

$$M_1(12) = 10\,000 + 850 \cdot 12 = 20\,200$$
$$M_2(12) = 10\,000(1{,}065)^{12} \simeq 21290{,}96$$

Portanto, a proposta 2 rende maior montante.

- um ano e meio:

$$M_1(18) = 10\,000 + 850 \cdot 18 = 25\,300$$
$$M_2(18) = 10\,000(1{,}065)^{18} \simeq 31\,066{,}54$$

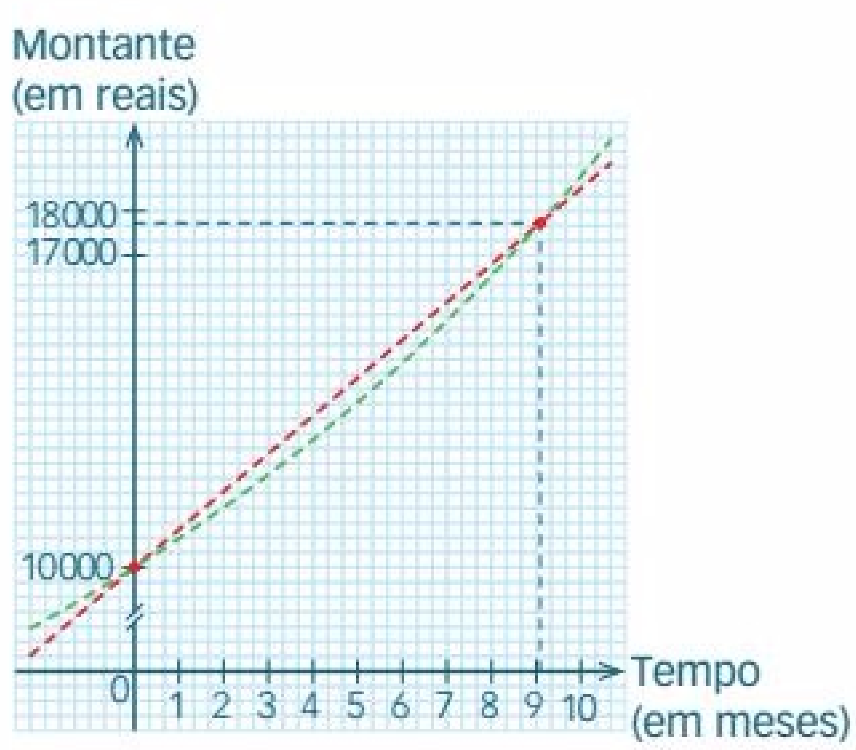
Portanto, a proposta 2 rende maior montante.

c) Pelo item **b**, a proposta 2 passa a render um montante maior entre 9 e 12 meses. Para $t = 10$ meses, temos:

$$M_1(10) = 10\,000 + 850 \cdot 10 = 18\,500$$
$$M_2(10) = 10\,000(1{,}065)^{10} \simeq 18\,771{,}37$$

Portanto, a partir do 10º mês a proposta 2 rende um montante maior que a proposta 1.

d)



Acervo da Editora

50. a) A taxa de variação não é constante, pois:

$$\underbrace{2\,090 - 2\,000}_{90} < \underbrace{2\,184{,}05 - 2\,090}_{94{,}05} <$$
$$< \underbrace{2\,282{,}33 - 2\,184{,}05}_{98{,}28}$$

Logo, a aplicação não foi feita em um regime de juros simples. Note que a taxa de acréscimo ocorrida no primeiro mês foi:

$$\frac{2\,090 - 2\,000}{2\,000} = \frac{90}{2\,000} = 0{,}045 = 4{,}5\%$$

Podemos verificar que o montante de cada mês, exceto o inicial, é aproximadamente igual ao montante do mês anterior acrescido dessa taxa de 4,5%, ou seja, a aplicação foi feita em um regime de juros compostos.

b) $\dfrac{2\,090 - 2\,000}{2\,000} = \dfrac{90}{2\,000} = 0{,}045 = 4{,}5\%$

c) $M(t) = c(1+i)^t \Rightarrow M(t) = 2\,000(1+0{,}045)^t \Rightarrow$
$\Rightarrow M(t) = 2\,000(1{,}045)^t$

51. a) - Em vermelho: sistema Price, pois as prestações são iguais.

- Em azul: sistema SAC, pois o valor das prestações diminuem em progressão aritmética.

b) - Sistema Price:

$$P = \frac{c \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} \Rightarrow 457{,}83 = \frac{c \cdot 0{,}04}{1-(1+0{,}04)^{-6}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c = \frac{457{,}83 \cdot (1 - 1{,}04^{-6})}{0{,}04} \simeq 2\,400$$

Como o valor do empréstimo é R$ 2 400,00, o valor dos juros é:

$$6 \cdot 457{,}83 - 2\,400 = 346{,}98 \rightarrow \text{R\$ } 346{,}98$$

- Sistema SAC:

O valor do empréstimo é de R$ 2 400,00, logo o valor dos juros é:

$$\underbrace{\frac{(496+416) \cdot 6}{2}}_{\text{soma dos termos da PA}} - 2\,400 = 336 \rightarrow \text{R\$ } 336{,}00$$

c) $P = \dfrac{c \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} \Rightarrow 457{,}83 = \dfrac{c \cdot 0{,}04}{1-(1+0{,}04)^{-6}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow c = \frac{457{,}83 \cdot (1 - 1{,}04^{-6})}{0{,}04} \simeq 2\,400$$

Logo, o valor do empréstimo é R$ 2 400,00.

52. O valor da prestação é:

$$P = \frac{c \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{5\,000 \cdot 0{,}06}{1-(1+0{,}06)^{-24}} \simeq 398{,}40$$

Logo, não é possível que ele faça o empréstimo, pois o valor das prestações, de R$ 398,40, excede os 25% da renda desse trabalhador, que é $\underbrace{\text{R\$ } 375{,}00}_{0{,}25 \cdot 1\,500{,}00}$.

53. a) Vamos construir parte da tabela demonstrativa desse empréstimo.

$$P = \frac{c \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{10\,000 \cdot 0{,}045}{1-(1+0{,}045)^{-12}} \simeq 1\,096{,}66$$

n	Juros (R$)	Amortização do saldo devedor (R$)	Pagamento (R$)	Saldo devedor (R$)
0	-	-	-	10 000
1	$\underbrace{450{,}00}_{0{,}045 \cdot 10\,000}$	$\underbrace{646{,}66}_{1\,096{,}66 - 450}$	1 096,66	9 353,34
2	$\underbrace{420{,}90}_{0{,}045 \cdot 9\,353{,}34}$	$\underbrace{675{,}76}_{1\,096{,}66 - 420{,}90}$	1 096,66	8 677,58
3	390,49	706,17	1 096,66	7 971,41
4	358,71	737,95	1 096,66	7 233,46
5	325,51	771,15	1 096,66	6 462,31
6	290,80	805,86	1 096,66	5 656,45
7	254,54	842,12	1 096,66	4 814,33
8	216,64	880,02	1 096,66	3 934,31

- Valor de cada parcela: R$ 1 096,66
- Juros embutidos na 3ª parcela: R$ 390,49
- Saldo devedor da 5ª parcela: R$ 6 462,31
- Amortização do saldo devedor correspondente a 8ª parcela: R$ 880,02

b) Vamos construir parte da tabela demonstrativa desse empréstimo.

O valor da amortização de cada mês é:

$$\frac{10\,000}{12} \simeq 833,33$$

n	Juros (R$)	Amortização do saldo devedor (R$)	Pagamento (R$)	Saldo devedor (R$)
0	-	-	-	10 000
1	$\underbrace{450,00}_{0,045 \cdot 10\,000}$	833,33	$\underbrace{1\,283,33}_{450+833,33}$	9 166,67
2	$\underbrace{412,50}_{0,045 \cdot 9\,166,67}$	833,33	$\underbrace{1\,245,83}_{412,50+833,33}$	8 333,34
3	375,00	833,33	1 208,33	7 500,01
4	337,50	833,33	1 170,83	6 666,68
5	300,00	833,33	1 133,33	5 833,35
6	262,50	833,33	1 095,83	5 000,02
7	225,00	833,33	1 058,33	4 166,69
8	187,50	833,33	1 020,83	3 333,36
9	150,00	833,33	983,33	2 500,03
10	112,50	833,33	945,83	1 666,70
11	75,00	833,33	908,33	833,37

- Amortização do saldo devedor: R$ 833,33
- Valor da 7ª parcela: R$ 1 058,33
- Saldo devedor da 4ª parcela: R$ 6 666,68
- Juros embutidos na 11ª parcela: R$ 75,00

54. a) O valor da prestação é:

$$P = \frac{c \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{2\,500 \cdot 0,02}{1-(1+0,02)^{-18}} =$$

$$= \frac{50}{1-1,02^{-18}} \simeq 166,76 \rightarrow \text{R\$ } 166,76$$

Logo, o total de juros é dado por:

$$18 \cdot 166,76 - 2\,500 = 501,68 \rightarrow \text{R\$ } 501,68$$

b) No primeiro mês, os juros correspondem a R$ $\underbrace{50,00}_{0,02 \cdot 2\,500}$ e, como a amortização mensal é de R$ $\underbrace{138,89}_{2\,500 : 18}$, o valor dos juros diminuem cerca de R$ $\underbrace{2,78}_{0,02 \cdot 138,89}$ a cada mês, ou seja, os juros mensais formam uma PA de primeiro termo $a_1 = 50$ e razão $r = -2,78$. O total de juros é, então, igual à soma dos termos dessa PA, ou seja:

$$\frac{(a_1 + a_{18})18}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + 17r)18}{2} = (2a_1 + 17r)9 = 18a_1 + 153r =$$

$$= 18 \cdot 50 + 153 \cdot (-2,78) = 474,66 \rightarrow \text{R\$ } 474,66$$

55. a) R$ 5 000,00

b) Como o juro da 1ª parcela é R$ 125,00, temos:

$$125 = 5\,000 \cdot i \Rightarrow i = 0,025 = 2,5\%$$

c) O saldo devedor forma uma PA em que o primeiro termo é $a_1 = 5\,000$ e a razão é $r = -625$. O saldo devedor da 4ª parcela corresponde ao 5º termo da PA, ou seja:

$$a_5 = a_1 + 4r = 5\,000 + 4 \cdot (-625) = 2\,500 \rightarrow \text{R\$ } 2\,500,00$$

d) Se **n** é o número de parcelas, então:

$$\frac{5\,000}{n} = 625 \Rightarrow n = \frac{5\,000}{625} = 8 \rightarrow 8 \text{ parcelas}$$

e) A cada mês, o valor dos juros é diminuído em $625 \cdot i = 625 \cdot 0,025 = 15,625$, logo, o valor do pagamento também é diminuído nesse mesmo valor, ou seja, os valores dos pagamentos formam uma PA em que $a_1 = 750$ e $r = -15,625$. Assim, a última parcela é:

$$a_8 = a_1 + 7r = 750 + 7 \cdot (-15,625) \simeq 640,63 \rightarrow \text{R\$ } 640,63$$

56. a) O valor financiado foi R$ $\underbrace{18\,000,00}_{33\,000-15\,000}$. Logo, a amortização do saldo devedor é:

$$\frac{18\,000}{36} = 500 \rightarrow \text{R\$ } 500,00$$

b) O saldo devedor da 1ª parcela é R$ $\underbrace{17\,500,00}_{18\,000-500}$. Assim:

- saldo devedor da 6ª parcela:

$$17\,500 + 5 \cdot (-500) = 15\,000 \rightarrow \text{R\$ } 15\,000,00$$

- saldo devedor da 16ª parcela:

$$17\,500 + 15 \cdot (-500) = 10\,000 \rightarrow \text{R\$ } 10\,000,00$$

c) Os juros da 1ª parcela correspondem a R$ $\underbrace{540,00}_{0,03 \cdot 18\,000}$, e o valor reduzido a cada parcela é R$ $\underbrace{15,00}_{0,03 \cdot 500}$. Assim:

- juros na 13ª parcela:

$$540 + 12 \cdot (-15) = 360 \rightarrow \text{R\$ } 360,00$$

- juros na 30ª parcela:

$$540 + 29 \cdot (-15) = 105 \rightarrow \text{R\$ } 105,00$$

d) O valor da 1ª parcela é R$ $\underbrace{1\,040,00}_{500+540}$, e o valor reduzido a cada parcela é igual a R$ $\underbrace{15,00}_{0,03 \cdot 500}$. Assim:

- valor da 9ª parcela:

$$1\,040 + 8 \cdot (-15) = 920 \rightarrow \text{R\$ } 920,00$$

- valor da última parcela (36ª parcela):

$$1\,040 + 35 \cdot (-15) = 515 \rightarrow \text{R\$ } 515,00$$

57. Como já foram pagas nove prestações temos que o saldo devedor é:

$$180000 - 9 \cdot 500 = 175500$$

Desta forma, a décima prestação será:

$$500 + 0,01 \cdot 175500 = 2255.$$

Portanto, a alternativa correta é **d**.

Calculadora do cidadão

a) R$ 160,51

b) 15 meses

c) R$ 3 800,00

d) 2,35%

ISBN - 978-85-451-0325-7