20 Questões interessantes de Física

Q1)

Um observador parado percebe uma perseguição de dois carros que estão “buzinando” para livrar o trânsito. Um dos dois se aproxima, e outro se afasta com a mesma velocidade. O resultado disso é a percepção de batimentos com frequência **f**. Encontre a velocidade de cada carro. As frequências das buzinas são de $\mathbf{f_0}$ e a velocidade do som no ar é **v**.

Solução

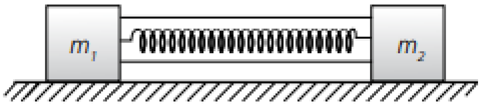
A frequência aparente do carro que se aproxima (f_1) é aumentada e a do carro que se afasta (f_2) é diminuída; pelas equações do efeito Doppler,

$$\begin{cases} f_1 = f_0\left(\dfrac{v}{v - v_0}\right) \\ f_2 = f_0\left(\dfrac{v}{v + v_0}\right) \end{cases} \Rightarrow f = f_1 - f_2 \therefore f = f_0\left(\frac{v}{v - v_0} - \frac{v}{v + v_0}\right)$$

$$f = f_0 v\left(\frac{2v_0}{v^2 - v_0^2}\right) \therefore fv^2 - fv_0^2 = 2f_0 v v_0 \therefore fv_0^2 + (2f_0 v)v_0 - fv^2 = 0$$

$$v_0 = \frac{-2f_0 v \pm \sqrt{4f_0^2 v^2 + 4f^2 v^2}}{2f} = \frac{-f_0 v + f_0 v\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}{f} = \frac{f_0 v}{f}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} - 1\right)$$

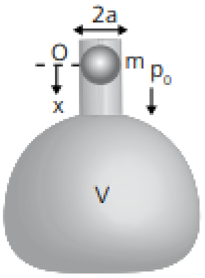
Q2) Dois blocos de massas m_1 e m_2 são ligados por uma mola de rigidez k. A mola está comprimida com ajuda de dois fios, como mostra a figura. Os fios são queimados. Determine o período de oscilações dos blocos.



Solução

O centro de massa do sistema não se move. Assim, uma resolução bastante sucinta para esse problema é trocarmos o sistema pela sua massa reduzida $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$; o período será $T = 2\pi\sqrt{\mu/k}$, ou seja, $T = 2\pi\sqrt{m_1 m_2/k(m_1 + m_2)}$.

Q3) No método de Rüchhardt, para medir $\gamma = C_p/C_V$ do ar, usa-se um grande frasco com um gargalo cilíndrico e estreito de raio **a**, aberto para a atmosfera (**p_0** = pressão atmosférica), no qual se ajusta uma bolinha metálica de raio **a** e massa **m**. Na posição de equilíbrio O da bolinha, o volume de ar abaixo dela no frasco é V (ver figura). Calcule a força restauradora sobre a bolinha quando ela é empurrada uma distância **x** para baixo, a partir do equilíbrio, o movimento sendo suficientemente rápido para que o processo seja adiabático. Mostre que a bolinha executa um MHS e calcule o período em função de **a**, **m**, **V**, **p_0** e **γ.**



Solução

Ao deslocar a bolinha por uma distância x, temos que o volume interno se altera de V para $V - \pi a^2 x$. No equilíbrio inicial, temos que:

$$p_0 \pi a^2 + mg = p_1 \pi a^2$$

sendo p_1 a pressão do gás contido em V; assim

$$p_1 = p_0 + \frac{mg}{\pi a^2}$$

Como o processo é adiabático, temos

$$p_1 V^\gamma = p_2 (V - \pi a^2 x)^\gamma \therefore p_2 = \left(\frac{V}{V - \pi a^2 x}\right)^\gamma p_1 = \left(1 - \frac{\pi a^2}{V} x\right)^{-\gamma} p_1$$

Supondo x suficientemente pequeno, temos:

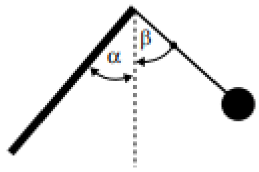
$$p_2 \cong \left(1 + \frac{\pi a^2 \gamma}{V} x\right) p_1$$

A força resultante nesse caso será:

$$F_r = mg + p_0 \pi a^2 - p_2 \pi a^2 = mg + p_0 \pi a^2 - p_1 \pi a^2 - \frac{\pi^2 a^4 \gamma p_1}{V} x$$

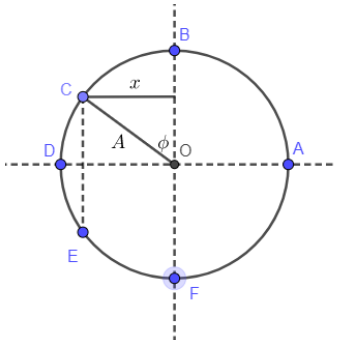
$$F_r = -\frac{\pi^2 a^4 \gamma p_1}{V} x \therefore T = 2\pi \sqrt{\frac{mV}{\pi^2 a^4 \gamma \left(p_0 + \frac{mg}{\pi a^2}\right)}} = \frac{2}{a^2} \sqrt{\frac{mV}{\gamma \left(p_0 + \frac{mg}{\pi a^2}\right)}}$$

Q4) (Olimpíada de Física da Colômbia) Ao ponto O de uma parede que forma um pequeno ângulo α com a vertical, prende-se através de um fio de comprimento L uma bola. Logo, inclina-se o fio com a bola de um pequeno ângulo $\beta > \alpha$ e solta-se. Considerando absolutamente elástico o choque da bola contra a parede, encontre o período de oscilações desse pêndulo.



Solução

Consideremos a projeção do MHS em um plano circular:



A projeção do pêndulo sai de A, percorre o arco AB em um intervalo de tempo igual a 1/4 do período normal (caso não houvesse a parede); percorre BC em um intervalo de tempo t, onde o pêndulo bate elasticamente com a parede; percorre EF em um intervalo de tempo t; percorre FA em um 1/4 do período normal. Assim:

$$T = 2(t + t')$$

onde $t' = T'/4$, sendo $T' = 2\pi\sqrt{L/g}$ e t devemos calcular. A partir de uma regra de três simples:

Em um ângulo β o pêndulo percorre a amplitude total A

Então em um ângulo β percorre uma distância x (indicada na figura)

$\therefore x = A\left(\frac{\alpha}{B}\right)$

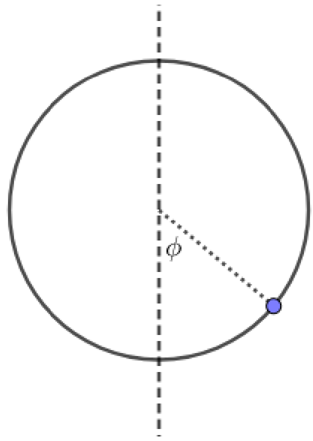
Da figura, vemos que $\operatorname{sen}\phi = \frac{x}{A} \therefore \phi = \operatorname{arcsen}\alpha/\beta$. Portanto, pelo MCU:

$$t = \frac{\phi}{\omega} = \frac{\operatorname{arcsen}\frac{\alpha}{\beta}}{2\pi/T} = \frac{T\operatorname{arcsen}\frac{\alpha}{\beta}}{2\pi} = \frac{2\pi\sqrt{L/g}\operatorname{arcsen}\frac{\alpha}{\beta}}{2\pi} = \sqrt{\frac{L}{g}}\operatorname{arcsen}\frac{\alpha}{\beta}$$

Logo,

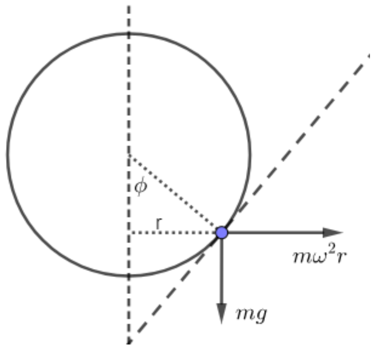
$$T = 2\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsen}\frac{\alpha}{\beta}\right)\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Q5) Uma miçanga de massa m se encontra presa (podendo com apenas um grau de liberdade) a um aro de raio R que gira em torno do eixo vertical que passa pelo diâmetro (ver figura). Calcule o período de pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio.



<u>Solução</u>

Vamos passar para o referencial não inercial;



1) **Cálculo da posição de equilíbrio inicial**

Na direção tangencial, temos

$$m\omega^2 r\cos\phi = mg\,\mathrm{sen}\,\phi \therefore m\omega^2 R\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi = mg\,\mathrm{sen}\,\phi \therefore \omega^2 R\cos\phi = g \quad \text{(i)}$$

2) **Perturbação da posição de equilíbrio**

Suponha que a partícula é levada até um ângulo $\alpha = \phi + \Delta\phi$, com $\Delta\phi \ll \phi$. A força restauradora será:

$$F_r = m\omega^2 R\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha - mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = m\,\mathrm{sen}\,\alpha\{\omega^2 R\cos\alpha - g\}$$

$$F_r = m\,\mathrm{sen}(\phi + \Delta\phi)\,\{\omega^2 R\cos(\phi + \Delta\phi) - g\}$$

Como $\begin{cases} \cos(\phi + \Delta\phi) = \underbrace{\cos\Delta\phi}_{\cong 1}\cos\phi - \underbrace{\mathrm{sen}\,\Delta\phi}_{\cong \Delta\phi}\mathrm{sen}\,\phi = \cos\phi - \Delta\phi\,\mathrm{sen}\,\phi \\ \mathrm{sen}(\phi + \Delta\phi) = \mathrm{sen}\,\phi\cos\Delta\phi + \mathrm{sen}\,\Delta\phi\cos\phi = \mathrm{sen}\,\phi + \Delta\phi\cos\phi \end{cases}$, segue que

$$F_r = m(\operatorname{sen}\phi + \Delta\phi\cos\phi)(\omega^2 R\cos\phi - \Delta\phi\omega^2 R\ \operatorname{sen}\phi - g)$$

De (i), segue que

$$F_r = -\Delta\phi\omega^2 R\operatorname{sen}\phi\, m(\operatorname{sen}\phi + \Delta\phi\cos\phi) = -\omega^2 R\operatorname{sen}\phi\, m(\Delta\phi\operatorname{sen}\phi + \Delta\phi^2\cos\phi)$$

Podemos desprezar $\Delta\phi^2$; assim:

$$F_r = -\omega^2 Rm\operatorname{sen}^2\phi\ \Delta\phi$$

Sendo $\Delta\phi$ um ângulo pequeno, segue que o arco compreendido por $\Delta\phi$ é praticamente um segmento de reta; assim $\Delta\phi = x/R$; temos ainda que $\operatorname{sen}\phi$ pode ser calculado a partir de (i):

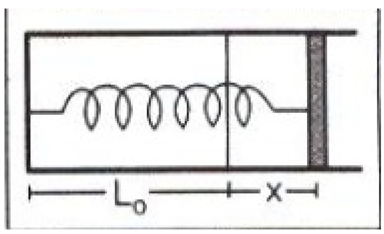
$$\cos\phi = \frac{g}{\omega^2 R} \therefore \operatorname{sen}\phi = \sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2}}$$

Assim,

$$F_r = -\omega^2 Rm\left(1 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2}\right)\frac{x}{R} = -\omega^2 m\left(1 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2}\right)x = -kx$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2}}} = 2\pi\omega R\sqrt{\frac{1}{\omega^4 R^2 - g^2}}$$

Q6) Um mol de um gás perfeito está contido em um cilindro de secção S fechado por um pistão móvel, ligado a uma mola de constante elástica k. Inicialmente, o gás está a pressão atmosférica P_0 e temperatura T_0, e o comprimento do trecho do cilindro ocupado pelo gás é L_0, com a mola estando não deformada. O sistema gás-mola é aquecido e o pistão se desloca uma distância x. Denotando a constante de gás por R, calcule a nova temperatura do gás.



Solução

No início, temos

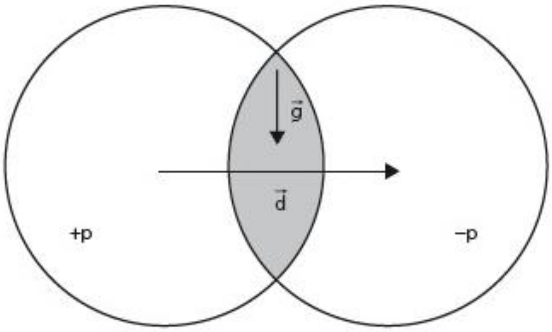
$p_0 V = RT_0 \therefore p_0 L_0 S = RT_0$

No final,

$$p_f V_f = RT_f \therefore \left(P_0 + \frac{kx}{S}\right)S(L_0 + x) = RT_f \therefore P_0 S L_0 + P_0 S x + kxL_0 + kx^2 = RT_f$$

Portanto, temos, $RT_0 + P_0 Sx + kxL_0 + kx^2 = RT_f \therefore T_f = T_0 + \frac{x}{R}(P_0 S + kL_0 + kx)$

Q7) Um aluno muito curioso estava estudando eletricidade e teve uma ideia nada convencional. Ele imaginou duas esferas de mesmo raio **R** e com distribuições volumétricas de cargas $+\rho$ e $-\rho$, respectivamente, e que estão posicionadas de forma que se sobrepõem parcialmente. Chame o vetor do centro positivo até o centro negativo de $\vec{d}$ (a linha que liga os centros é horizontal). Nesta região de intersecção ele imaginou um pêndulo simples (carregado) e este começa a oscilar com ângulos pequenos. Se **m** é a massa do pêndulo, **g** é o módulo da gravidade na região, $\boldsymbol{\ell}$ é o comprimento do fio e **T** é o período das pequenas.



<u>Solução</u>

Pode-se mostrar que o campo elétrico a uma distância r do centro de uma esfera carregada com densidade de cargas ρ (uniforme) é:

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

Para essa questão, $r = d/2$ de modo que os campos para $+\rho$ e $-\rho$ se somam (horizontalmente):

$$E = \frac{2\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho d}{3\varepsilon_0}$$

Assim, a aceleração que a carga ficará sujeita é dada por $a = EQ/m$; o campo gravitacional g', no interior da esfera será a composição de $\vec{a}$ (horizontal, na posição de equilíbrio da carga) e $\vec{g}$ (vertical). Para pequenas oscilações, $\vec{E}$ é praticamente horizontal. Assim, temos

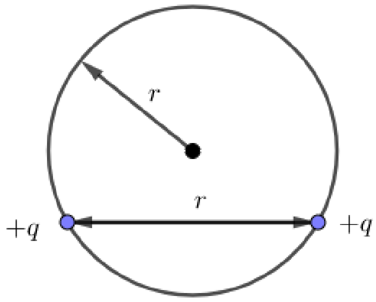
$$g' = \sqrt{a^2 + g^2}$$

O período será dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g'}} \therefore g' = \frac{4\pi^2\ell}{T^2} \therefore (g')^2 = \frac{16\pi^2\ell^2}{T^4} \Rightarrow a^2 + g^2 = \frac{16\pi^4\ell^2}{T^4}$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 \ell^2 - g^2} \therefore \frac{\rho Q d}{3m\varepsilon_0} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 \ell^2 - g^2} \therefore Q = \frac{3\varepsilon_0 m}{\rho d}\sqrt{\ell^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 - \ell^2}$$

Q8) Duas pequenas esferas de metal (puntiformes), de massas **m** e cargas **+q** cada, estão mantidas encostadas na superfície interna de um anel, feito de acrílico, de raio **r** e massa **4m**. todo o conjunto está inicialmente em repouso sobre um plano horizontal liso, com as esferas separadas pela distância **r**. Sendo **k** a constante eletrostática do meio, determine a velocidade máxima atingida pelo anel, após as esferas terem sidos liberadas.



__Solução__

A velocidade da esfera será máxima quando as cargas estiverem diametralmente opostas. Seja u as velocidades das cargas nesse instante (note que as velocidades das cargas estarão apontadas para cima); pela conservação do momento linear:

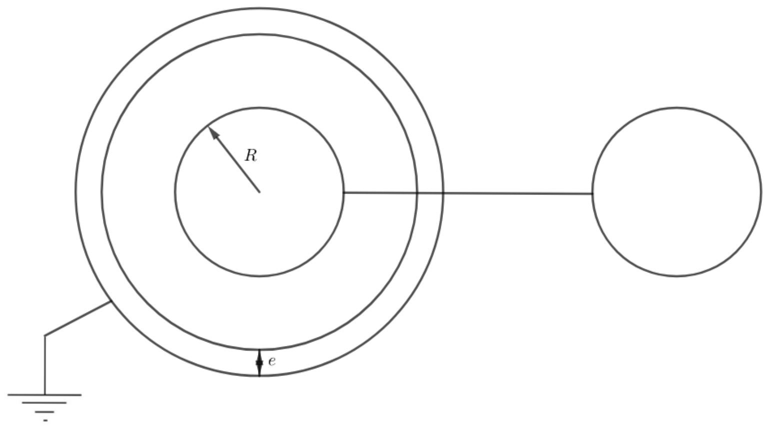
$$4mv = 2mu \therefore u = 2v$$

Cálculo de u:

$$\frac{kq^2}{r} = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}mu^2 + \frac{kq^2}{2r} + \frac{1}{2}(4m)v^2 \therefore \frac{kq^2}{r} = 2mu^2 + 4mv^2$$

$$\frac{kq^2}{r} = 2m(2v)^2 + 4mv^2 = 12mv^2 \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{kq^2}{12mr}}$$

Q9) A figura mostra, em corte, dois condutores esféricos muito afastados, interligados por um fio condutor fino. O condutor da esquerda está no centro de uma cavidade esférica condutora ligada à Terra. Antes da esfera esquerda ser colocada na cavidade, o conjunto das duas esferas interligadas estava a um potencial V_0. Determine a carga na superfície interna da cavidade.



<u>Solução</u>

1) **Situação inicial (entendendo que cada esfera esteja a um potencial V_0):**

$$\frac{kq_0}{R} = V_0 \therefore q_0 = \frac{V_0 R}{k}$$

2) **Ao colocar a cavidade esférica**

A cavidade esférica está ligada a Terra, de modo que sua superfície externa deve estar a um potencial nulo. Isso significa que $q_{ext} = 0$. O conjunto esferas + cavidade forma um só condutor, sendo que a esfera a esquerda possui uma carga q; a cavidade esférica possui carga -q em sua superfície interna e a esfera à direita possui carga q'

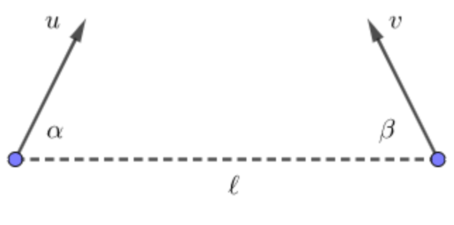
$$\frac{kq}{R} + \frac{k(-q)}{R+e} = \frac{kq'}{R} \therefore \frac{(R+e)q - Rq}{R+e} = q' \therefore q' = \frac{eq}{R+e}$$

Pela conservação da carga, temos que

$$q' + q = 2q_0 \therefore \frac{eq}{R+e} + q = 2q_0 \therefore \frac{e+R+e}{R+e}q = 2q_0 \therefore q = \frac{2q_0(R+e)}{(R+2e)}$$

$$q = \frac{2RV_0(R+e)}{k(R+2e)}$$

Q10) Duas partículas idênticas com velocidades **u** e **v**, que formam ângulos α e β com a reta que as une, estão a uma distância **l** uma da outra. A carga de cada partícula é **q**. Determine a massa das partículas, sabendo que a distância mínima entre as duas, vale **a**. Despreze a interação gravitacional.



<u>Solução</u>

O centro de massa do sistema não se move. Podemos substituir as partículas pela massa reduzida:

$$\mu = \frac{m \cdot m}{m+m} = \frac{m}{2}$$

Portanto, temos que:

$$\frac{1}{2}\mu v_{rel}^2 + \frac{kq^2}{l} = \frac{1}{2}\mu z_{rel}^2 + \frac{kq^2}{a} \therefore \frac{1}{2}\mu\left(v_{rel}^2 - z_{rel}^2\right) = \frac{kq^2(l-a)}{al} \quad \text{(i)}$$

- Cálculo da velocidade relativa inicial:

$$v_{rel}^2 = (u\cos\alpha + v\cos\beta)^2 + (u\,\mathrm{sen}\,\alpha - v\,\mathrm{sen}\,\beta)^2$$

$$v_{rel}^2 = u^2 + v^2 + 2uv(\cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta) = u^2 + v^2 + 2uv\cos(\alpha+\beta)$$

- Cálculo da velocidade relativa final;

Vamos calcular essa velocidade relativa final pela conservação do momento angular; como o sistema é livre de forças externas, temos que

$$\vec{L} = \mathrm{cte}$$

sendo $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. As partículas param de se aproximar quando a velocidade relativa em x for nula. Assim, conservando o momento angular em y:

$$ml(u\mathrm{sen}\,\alpha - v\,\mathrm{sen}\,\beta) = maz \therefore z = \frac{l}{a}(u\,\mathrm{sen}\,\alpha - v\,\mathrm{sen}\,\beta)$$

Portanto, temos que, em (i), para $\mu = m/2$:

$$\frac{m}{4}\left(u^2 + v^2 + 2uv\cos(\alpha+\beta) - \frac{l^2}{a^2}(u\,\mathrm{sen}\,\alpha - v\,\mathrm{sen}\,\beta)^2\right) = \frac{kq^2(l-a)}{al}$$

$$\therefore m = \frac{4kq^2(l-a)}{al\left(u^2 + v^2 + 2uv\cos(\alpha+\beta) - \frac{l^2}{a^2}(u\,\mathrm{sen}\,\alpha - v\,\mathrm{sen}\,\beta)^2\right)}$$

Q11) Suponha que uma partícula de massa **m** e carga **-Q** é lançada do centro de uma esfera isolante de raio **R** com carga **+Q** uniformemente distribuída no seu volume. Determine a velocidade de lançamento sabendo a carga **-Q** atinge uma altitude **2R**. É dado $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ como sendo a permissividade elétrica.

<u>Solução</u>

1) **Cálculo do trabalho para a partícula ir de r = 0 até r = R**

Como sabemos, o campo elétrico no interior de uma esfera de raio R com carga Q uniformemente distribuída é:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \therefore \vec{F}(r) = \left(-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r\right)\hat{r}$$

onde $\hat{r}$ é o versor que aponta do centro da esfera até a carga. Sendo assim, o trabalho será dado por:

$$W = \int_0^R -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r\,dr = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

2) **Cálculo do trabalho para a partícula ir de r = R até r = 3R**

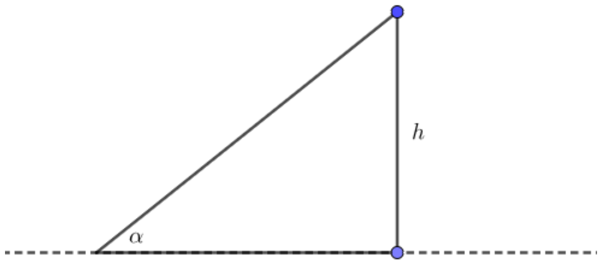
$$W = -\Delta U = U_i - U_F = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 (3R)} = -\frac{Q^2}{6\pi\varepsilon_0 R}$$

3) Aplicação do teorema da energia cinética

$$\sum W = \Delta E_c \therefore -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} - \frac{Q^2}{6\pi\varepsilon_0 R} = 0 - \frac{1}{2} mv^2 \therefore mv^2 = \frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = mv^2$$

$$mv^2 = \frac{7Q^2}{12\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow v = \frac{Q}{2}\sqrt{\frac{7}{3m\pi\varepsilon_0 R}}$$

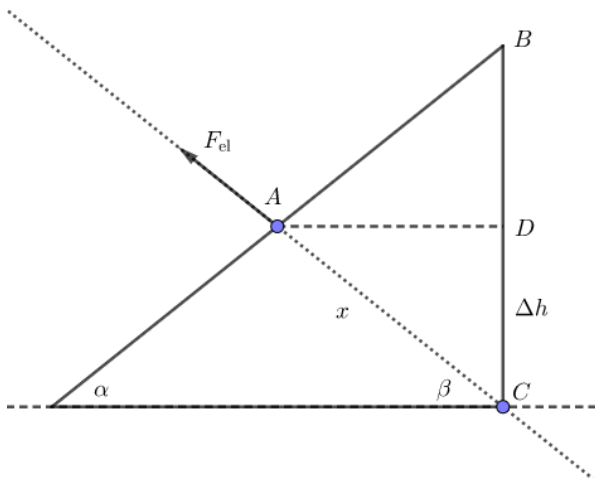
Q12) Uma partícula de massa **m** e carga **q** é abandonada de uma altura **h** sobre um plano liso e inclinado de **α** com a horizontal. Logo abaixo desta, está fixada uma partícula de mesma carga.



Em certo instante a partícula perderá o contato com o plano inclinado. Neste mesmo instante a linha que passa pelo centro de massa das partículas faz um ângulo **β** com a horizontal (não representado na figura). Determine a velocidade da partícula neste instante.

Solução

Seja x a distância entre as cargas no instante em que a carga superior perde o contato com o plano inclinado, como mostra a figura a seguir;



Em ΔABC, temos $\hat{C} = 90° - \beta$; $\hat{B} = 90° - \alpha$; $\hat{A} = 180° - \hat{B} - \hat{C} = \alpha + \beta$;

Aplicando a lei dos senos em ΔABC, temos:

$$\frac{x}{\text{sen}(90° - \alpha)} = \frac{h}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \therefore x = \frac{h\cos\alpha}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$$

Seja F_{el} a força elétrica entre as cargas. Decompondo a força elétrica nas componentes horizontal e vertical, temos $\begin{cases} F_{el,x} = F_{el}\cos\beta \\ F_{el,y} = F_{el}\,\text{sen}\,\beta \end{cases}$. Para que a partícula esteja na eminência de perder contato com o plano, temos que $N \cong 0$; portanto, na direção normal:

$$mg\cos\alpha = F_{el,x}\,\text{sen}\,\alpha + F_{el,y}\cos\alpha \therefore mg\cos\alpha = F_{el}(\text{sen}\,\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\beta\cos\alpha)$$

$$F_{el} = \frac{mg\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\beta\cos\alpha} \therefore \frac{kq^2}{x^2} = \frac{mg\cos\alpha}{\text{sen}(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{kq^2}{x} = \frac{mg\cos\alpha}{\text{sen}(\alpha+\beta)}x = \frac{mgh\cos^2\alpha}{\text{sen}^2(\alpha+\beta)}$$

Em ΔADC, temos que

$$\Delta h = x\,\text{sen}\,\beta = \frac{h\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}(\alpha+\beta)}; \quad H = h - \Delta h = h\left(1 - \frac{\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}(\alpha+\beta)}\right)$$

$$H = h\left(\frac{\text{sen}(\alpha+\beta) - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}(\alpha+\beta)}\right) = h\cdot\frac{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}{\text{sen}(\alpha+\beta)}$$

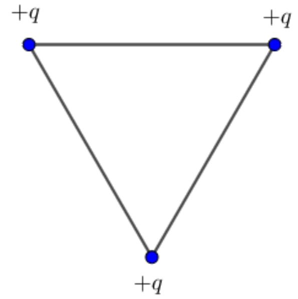
onde H é a altura vertical percorrida pela carga. Pela conservação da energia mecânica, temos:

$$\frac{kq^2}{h} + mgH = \frac{kq^2}{x} + \frac{1}{2}mv^2 \therefore v^2 = \frac{2}{m}\left\{\frac{kq^2}{h} + mgH - \frac{kq^2}{x}\right\}$$

$$v^2 = \frac{2}{m}\left\{\frac{kq^2}{h} + mgh\left(\frac{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}{\text{sen}(\alpha+\beta)} - \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2(\alpha+\beta)}\right)\right\}$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{2}{m}\left\{\frac{kq^2}{h} + mgh\left(\frac{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}{\text{sen}(\alpha+\beta)} - \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2(\alpha+\beta)}\right)\right\}}$$

Q13) Três pequenas esferas idênticas de mesma carga **+q** e massa **m** estão apoiadas sobre um plano horizontal liso, conectadas entre si através de fios de nylon, formando um triângulo equilátero de lado **L**. Em seguida, corta-se um dos fios. Determine a máxima velocidade **v** atingida pela carga elétrica do vértice ao fio que foi cortado, sabendo que a constante eletrostática do meio vale **k**.



Solução

A velocidade será máxima quando as 3 partículas estiverem alinhadas.

Pela simetria do problema, as duas cargas superiores da figura terão mesma velocidade v; pela conservação do momento a carga do meio terá velocidade 2v. Pela conservação da energia

$$\mathrm{E_i} = \mathrm{E_f} \Rightarrow \frac{3\mathrm{kq}^2}{\mathrm{L}} = 2\left(\frac{1}{2}\mathrm{mv}^2\right) + \frac{1}{2}\mathrm{m}(2\mathrm{v})^2 + \frac{2\mathrm{kq}^2}{\mathrm{L}} + \frac{\mathrm{kq}^2}{2\mathrm{L}}$$

$$\frac{\mathrm{kq}^2}{2\mathrm{L}} = \mathrm{mv}^2 + 2\mathrm{mv}^2 \therefore \mathrm{v} = \sqrt{\frac{\mathrm{kq}^2}{6\mathrm{mL}}}$$

Portanto, a velocidade requerida é:

$$2\mathrm{v} = \sqrt{\frac{2\mathrm{kq}^2}{3\mathrm{mL}}}$$

Q14) Um navio corsário aproxima-se de um porto, que é protegido por um forte, situado a uma altura **h** acima do mar. Os canhões do forte e do navio são idênticos. Se atirassem verticalmente, o projétil subiria até uma altura **k**, com $k > h$. O forte pode iniciar o combate assim que o navio se encontra a uma distância horizontal $\mathbf{d_1}$. O navio pode iniciar o combate assim que o forte se encontre a uma distância horizontal $\mathbf{d_2}$. Mostre que

$$\left(\frac{\mathrm{d}_1}{\mathrm{d}_2}\right)^2 = \frac{\mathrm{k}+\mathrm{h}}{\mathrm{k}-\mathrm{h}}$$

Solução

Equação da parábola de segurança:

$$\mathrm{y} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{A} - \frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{A}}\right)$$

onde $\mathrm{A} = \mathrm{v}_0^2/\mathrm{g}$.

- O forte pode iniciar o combate assim que o navio se encontra a uma distância horizontal d_1

$$\therefore -\mathrm{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{v}_0^2}{\mathrm{g}} - \frac{\mathrm{d}_1^2\mathrm{g}}{\mathrm{v}_0^2}\right) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}_1^2\mathrm{g}}{\mathrm{v}_0^2} = 2\mathrm{h} + \frac{\mathrm{v}_0^2}{\mathrm{g}}$$

- O navio pode iniciar o combate assim que o forte se encontra a uma distância horizontal d_2

$$\therefore \mathrm{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{v}_0^2}{\mathrm{g}} - \frac{\mathrm{d}_2^2\mathrm{g}}{\mathrm{v}_0^2}\right) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}_2^2\mathrm{g}}{\mathrm{v}_0^2} = \frac{\mathrm{v}_0^2}{\mathrm{g}} - 2\mathrm{h}$$

- Caso atirassem verticalmente, o projétil subiria até uma distância vertical k:

$$\therefore \mathrm{v}_0^2 = 2\mathrm{gk}$$

Portanto, desses resultados temos que

$$\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{2h + 2k}{2h - 2k} \therefore \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \frac{h + k}{h - k}$$

Q15) [ITA/11] Uma massa $\mathbf{m_1}$ com velocidade inicial $\mathbf{v_0}$ colide com um sistema massa-mola e constante elástica **k**, inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito, conforme ilustra a figura. Determine o máximo comprimento de compressão da mola, considerando desprezível a sua massa.

<u>Solução</u>

Inicialmente, o centro de massa do sistema move-se com velocidade v_{CM} dada por

$$v_{CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

Note que a velocidade do CM do sistema não muda em nenhum instante, já que o sistema é livre de forças externas. A compressão máxima ocorre quando as velocidades relativas de m_1 e m_2 são iguais as velocidades do CM; assim pela conservação da energia

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0\right)^2 + \frac{1}{2} kL^2$$

$$m_1 v_0^2 = \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_0^2 + kL^2 \therefore v_0^2 m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = kL^2$$

$$L = v_0 \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

Q16) [ITA/14] Considere uma esfera maciça de raio **r**, massa **m**, coeficiente de dilatação $\boldsymbol{\alpha}$, feita de um material com calor específico a volume constante c_V. A esfera está sujeita à pressão atmosférica **p**, repousa sobre uma superfície horizontal isolante térmica e está inicialmente a uma temperatura **T** alta o suficiente para garantir que sua energia interne não se altere em processos isotérmicos. Determine a temperatura final da esfera após receber uma quantidade de calor **Q**, sem perdas para o ambiente. Dê sua resposta em função de **g** e dos outros parâmetros especificados (**g** = aceleração da gravidade).

Solução

Inicialmente, podemos escrever que

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + c_V dT$$

Como o enunciado diz, a energia interna não se altera para processos isotérmicos. Sendo assim, $dU = 0$ para processos com $dT = 0$. Isso implicado que

$$\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{V}}\right)_T \mathrm{dV} = 0$$

Como $\mathrm{dV} \neq 0$ (o volume deve se alterar), segue que $\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{V}}\right)_\mathrm{T} = 0$. Portanto, podemos tomar:

$$\mathrm{dU} = \mathrm{mc_V dT} \therefore \Delta\mathrm{U} = \mathrm{c_V}\Delta\mathrm{T}$$

A variação de energia interna será dada pela primeira lei da termodinâmica

$$\Delta\mathrm{U} = \mathrm{w} + \mathrm{Q}$$

O trabalho realizado será o trabalho de expansão contra pressão constante e o trabalho gravitacional para elevar o centro de massa da esfera (o centro da esfera); como

$$\mathrm{V} = \frac{4}{3}\pi\mathrm{r}^3 \Longrightarrow \mathrm{dV} = 4\pi\mathrm{r}^2\,\mathrm{dr} \therefore \Delta\mathrm{V} \cong 4\pi\mathrm{r}^2\Delta\mathrm{r}$$

onde $\Delta\mathrm{r} = \mathrm{r}\left(\frac{\alpha}{3}\right)\Delta\mathrm{T}$. Portanto

$$\Delta\mathrm{V} = \frac{4}{3}\alpha\pi\mathrm{r}^3\Delta\mathrm{T}$$

1) **Cálculo do trabalho de expansão:**

$$\mathrm{w_1} = -\mathrm{p}\Delta\mathrm{V} = -\frac{4}{3}\mathrm{p}\alpha\pi\mathrm{r}^3\Delta\mathrm{T}$$

2) **Cálculo do trabalho para elevar o centro de massa**

$$\mathrm{w_2} = -\mathrm{mg}\Delta\mathrm{r} = -\frac{1}{3}\alpha\mathrm{mgr}\Delta\mathrm{T}$$

Portanto, temos que

$$\Delta\mathrm{U} = \mathrm{w} + \mathrm{Q} \therefore \mathrm{mc_V}\Delta\mathrm{T} = -\frac{1}{3}\alpha\mathrm{mgr}\Delta\mathrm{T} - \frac{4}{3}\alpha\pi\mathrm{r}^3\Delta\mathrm{T} + \mathrm{Q}$$

$$\mathrm{T_f} = \mathrm{T} + \frac{3\mathrm{Q}}{3\mathrm{mc_V} + \alpha\mathrm{mgr} + 4\mathrm{p}\alpha\pi\mathrm{r}^3}$$

Q17) Qual seria o rendimento de Carnot para uma máquina que funciona entre a temperatura **T** e a temperatura da placa (no estado estacionário) que se encontra entre outras duas placas (paralelas) de temperatura **2T** e **3T**, respectivamente? Considere que as placas são infinitas e todas elas podem ser consideradas como corpo negro.

Solução

Rendimento de uma máquina de Carnot:

$$\mathrm{n} = 1 - \frac{\mathrm{T_f}}{\mathrm{T_Q}}$$

onde $\mathrm{T_f}$ é a temperatura da fonte fria e $\mathrm{T_Q}$ da fonte quente. Sabemos que

$$P = eAT^4$$

onde e = 1 (corpo negro) e A é a área de cada corpo.

No equilíbrio, temos que a potência emitida pela placa central (de temperatura T_m) será igual a potência absorvida; assim

$$eA(2T)^4 + eA(3T)^4 = e(2A)T_m^4$$

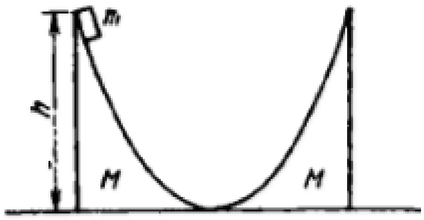
(note que colocamos 2A, pois a placa emite calor de ambos lados). Assim

$$T_m = \left(\frac{97}{2}\right)^4 T$$

Assim, temos que

$$n = 1 - \frac{T}{T_m} = 1 - \left(\frac{2}{97}\right)^4$$

Q18). Dois blocos de superfície inclinada de massa M são dispostos como na figura abaixo. No bloco da esquerda, é largada uma pequena carga m a partir da altura h. Despreze todos os atritos. Qual altura máxima a carga alcançará quando estiver em contato com o bloco?



<u>Solução</u>

Inicialmente, devemos ter a conservação do momento linear quando o bloquinho perder o contato com a primeira rampa.

$$mv_0 = Mu \therefore u = \left(\frac{m}{M}\right) v_0$$

Aplicando a conservação da energia, temos

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}Mu^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}v_0^2$$

$$2gh = v_0\left(\frac{m+M}{M}\right) \therefore v_0 = \frac{2Mgh}{m+M}$$

O bloquinho irá atingir a altura máxima quando, em contato com o 2° bloco, tiverem velocidade v → (para a direita) em relação à Terra. Assim,

$$mv_0 = (m+M)v \Longrightarrow v = \left(\frac{m}{m+M}\right) v_0$$

Aplicando a conservação da energia,

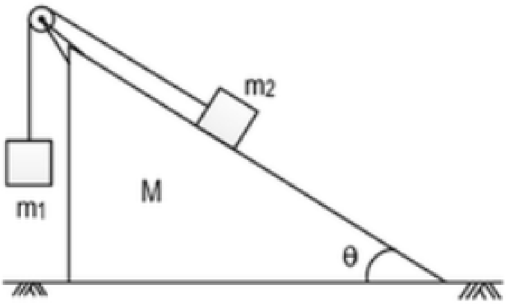
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m + M)v^2 + mgH$$

$$mv_0^2 = (m + M) \cdot \frac{m^2}{(m + M)^2}v_0^2 + 2mgH$$

$$v_0^2 = \frac{m}{m + M}v_0^2 + 2gH \therefore \left(\frac{M}{m + M}\right)v_0^2 = 2gH$$

$$\frac{M}{m + m}\left(\frac{2MgH}{m + M}\right) = 2gH \therefore H = \frac{M^2}{(m + M)^2}h$$

Q19). Um plano inclinado de massa M repousa sobre uma superfície cujo coeficiente de atrito vale μ. Os blocos m_1 e m_2 são lisos e são conectados por um fio ideal que passa por uma polia ideal fixa no topo do plano inclinado. Determine o menor coeficiente de atrito possível para que o plano permaneça em repouso.



<u>Solução</u>

Vamos inicialmente, calcular o valor da tração T no fio.

Vamos supor que o bloco de massa m_1 desce aceleradamente.

$$m_1g - T = m_1a$$

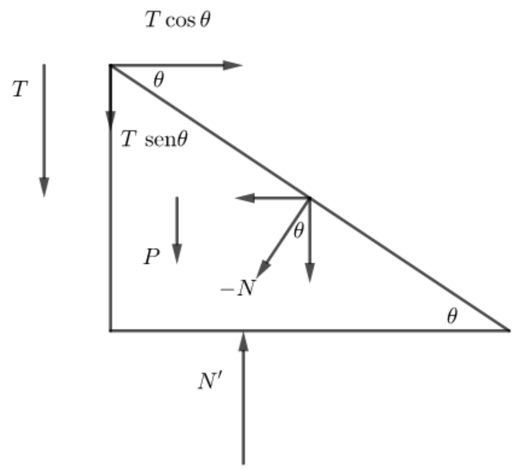
$$T - m_2g \text{ sen } \theta = m_2a$$

$$\therefore a = \frac{m_1 - m_2\text{sen } \theta}{m_1 + m_2}g$$

$$\therefore T = m_2\left(\frac{m_1 - m_2\text{sen } \theta}{m_1 + m_2}\right)g + m_2g \text{ sen } \theta = m_2g\left(\frac{m_1 - m_2 \text{ sen } \theta}{m_1 + m_2} + \text{sen } \theta\right)$$

$$T = \frac{m_1m_2g}{m_1 + m_2}(1 + \text{sen } \theta)$$

Veja o diagrama de forças abaixo.



No diagrama, além das forças de tração T, estão indicadas:

- A força de reação N que o prisma troca com o bloco m_2;
- A força de reação N' que o prisma troca com o solo;
- A força peso $P = Mg$ do prisma.

Cálculo de N: na direção normal ao plano, o bloco m_2 deve estar em equilíbrio,

$$N = m_2 g \cos\theta$$

Equilíbrio do prisma na direção vertical:

$$T + T \operatorname{sen}\theta + Mg + N\cos\theta = N'$$

$$T(1 + \operatorname{sen}\theta) + Mg + m_2 g \cos^2\theta = N'$$

Equilíbrio do prisma na direção horizontal: como não foi dado em qual sentido o prisma deve mover, a força de atrito pode estar tanto para a direita quanto para a esquerda. Veja que o módulo da força resultante na horizontal é (sem o atrito o módulo é $\neq 0$):

$$\left|\sum F_x\right| = |T\cos\theta - N \operatorname{sen}\theta| = |T\cos\theta - m_2 g \operatorname{sen}\theta\cos\theta|$$

Adicionando o atrito no lado oposto da força resultante, o módulo deve ser nulo. De qualquer maneira, devemos ter:

$$f_{at} = |T\cos\theta - m_2 g \operatorname{sen}\theta\cos\theta|$$

Na iminência de deslizar,

$$f_{at} = \mu N' \therefore |T\cos\theta - m_2 g \operatorname{sen}\theta\cos\theta| = \mu\{T(1 + \operatorname{sen}\theta) + Mg + m_2 g\cos^2\theta\}$$

Usando o valor da tração, temos para o lado esquerdo da equação,

$$E = T\cos\theta - m_2 g \operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}(1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta - m_2 g \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$E = \frac{m_2 g\cos\theta}{m_1 + m_2}(m_1 + m_1 \operatorname{sen}\theta - m_1 \operatorname{sen}\theta - m_2 \operatorname{sen}\theta)$$

$$E = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}(m_1 - m_2 \operatorname{sen}\theta)\cos\theta$$

Para o lado direito,

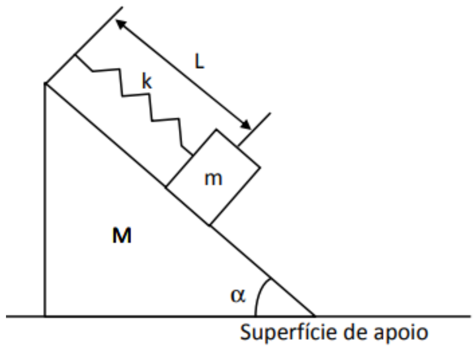
$$D = T(1 + \operatorname{sen}\theta) + Mg + m_2 g\cos^2\theta = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}(1 + \operatorname{sen}\theta)^2 + Mg + m_2 g\cos^2\theta$$

$$D = \frac{g}{m_1 + m_2}\{m_1 m_2(1 + \operatorname{sen}\theta)^2 + (m_1 + m_2)M + (m_1 + m_2)m_2\cos^2\theta\}$$

Logo,

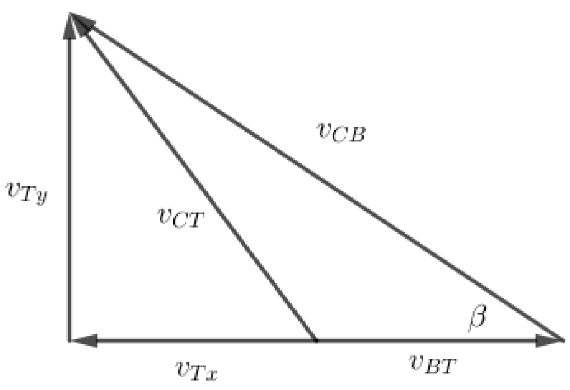
$$|E| = \mu D \therefore \mu = \frac{m_2|m_1 - m_2 \operatorname{sen}\theta|\cos\theta}{m_1 m_2(1 + \operatorname{sen}\theta)^2 + (m_1 + m_2)M + (m_1 + m_2)m_2\cos^2\theta}$$

Questão 203. (ITA – 2000 (O)) Um corpo de massa m desliza sem atrito sobre uma superfície plana (e inclinada de um ângulo α em relação à horizontal) de um bloco de massa M sob ação da mola, mostrada na figura. Esta mola, de constante elástica k, e comprimento natural C, tem suas extremidades respectivamente fixadas ao corpo de massa m e ao bloco. Por sua vez, o bloco pode deslizar sem atrito sobre a superfície plana e horizontal em que se apoia. O corpo é puxado até uma posição em que a mola seja distendida elasticamente a um comprimento L (L > C), tal que, ao ser liberado, o corpo passa pela posição em que a força elástica é nula. Nessa posição, o módulo da velocidade do bloco é:



<u>Solução</u>

Veja a figura a seguir:



C: corpo

B: Bloco

T: Terra

$$\vec{v}_{CT} = \vec{v}_{CB} + \vec{v}_{BT}$$

A conservação do momento linear nos garante que

$$mv_{Tx} = Mv_{BT} \therefore m(v_{CB}\cos\beta - v_{BT}) = Mv_{BT}$$

$$v_{CB} = \frac{M+m}{m\cos\beta} v_{BT} \quad \text{(i)}$$

Pela conservação da energia mecânica, temos que

$$E_i = E_f \Longrightarrow \frac{1}{2}k(L-C)^2 = \frac{1}{2}Mv_{BT}^2 + \frac{1}{2}mv_{CT}^2 + mg(L-C)\,\text{sen}\,\alpha$$

$$2\left\{\frac{1}{2}k(L-C)^2 - mg(L-C)\,\text{sen}\,\alpha\right\} = Mv_{BT}^2 + mv_{CT}^2 \quad \text{(ii)}$$

Da figura, vemos que:

$$v_{CT}^2 = v_{Tx}^2 + v_{Ty}^2 = (v_{CB}\cos\beta - v_{BT})^2 + (v_{CB}\,\text{sen}\,\beta)^2$$

$$v_{CT}^2 = v_{CB}^2 - 2v_{CB}v_{BT}\cos\beta + v_{BT}^2 \quad \text{(iii)}$$

Portanto, temos que o lado direito da equação (ii) fica:

$$Mv_{BT}^2 + mv_{CT}^2 = Mv_{BT}^2 + m\left\{\left(\frac{M+m}{m\cos\beta}\right)^2 v_{BT}^2 - 2\left(\frac{m+M}{m\cos\beta}\right)\cos\beta\ v_{BT}^2 + v_{BT}^2\right\}$$

$$Mv_{BT}^2 + mv_{CT}^2 = v_{BT}^2\left\{M + \frac{(M+m)^2}{m\cos^2\beta} - 2(m+M) + m\right\}$$

$$Mv_{BT}^2 + mv_{CT}^2 = v_{BT}^2\left\{\frac{(M+m)^2}{m\cos^2\beta} - (M+m)\right\}$$

$$Mv_{BT}^2 + mv_{CT}^2 = \frac{(M+m)v_{BT}^2}{m}\{(M+m)(1+\text{tg}^2\,\alpha) - m\}$$

$$Mv_{BT}^2 + mv_{CT}^2 = \frac{(M+m)v_{BT}^2}{m}\left((M+m)\,\text{tg}^2\,\alpha + M\right)$$

Segue que,

$$2\left\{\frac{1}{2}k(L-C)^2 - mg(L-C)\,\text{sen}\,\alpha\right\} = \frac{(M+m)v_{BT}^2}{m}\left((M+m)\,\text{tg}^2\,\alpha + M\right)$$

$$v_{BT} = \sqrt{\frac{2m\left[\frac{1}{2}k(L-C)^2 - mg(L-C)\,\text{sen}\,\alpha\right]}{(M+m)[(M+m)\,\text{tg}^2\,\alpha + M]}}$$

Lucas Pinafi – 2018

lucas.dcarvalho@hotmail.com.br (email para contato)