FB online

FÍSICA

Frente: Equação de Onda

Professor(a): Carlos Eduardo

EAD – ITA-IME

AULAS 36 E 37

Assunto: Introdução à Óptica Geométrica

Resumo Teórico

Introdução à Óptica Geométrica

Equação de onda unidimensional (harmônica)

A equação de uma onda harmônica tem como geratriz um oscilador harmônico.

$$y(t') = A \cdot \cos(\omega t' + \varphi_0)$$

Através de um intervalo de atraso (que é a mesma ideia de acompanhar o referencial), teremos:

$$t' = t - t_0$$

$$y(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - \omega t_0 + \varphi_0) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Chamaremos $\varphi = (\omega t - kx + \varphi_0)$ de fase da onda.

Existem outras formas de escrever a mesma equação:

- Se propagado no sentido positivo,
  $y(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = A \cdot \text{sen}(\omega t - kx + \theta_0)$
- Se propagando no sentido negativo,
  $y(x, t) = A \cdot \cos(\omega t + kx + \varphi_0) = A \cdot \text{sen}(\omega t + kx + \theta_0)$

Perceba a diferença entre os sinais! Essa diferença é causada por um atraso ou adiantamento no intervalo de tempo medido.

Defasagem:

Tomemos x_1 e x_2, da mesma onda tal que $x_1 \neq x_2$:

$$\varphi_1 = (\omega t - kx_1 + \varphi_0)$$

$$\varphi_2 = (\omega t - kx_2 + \varphi_0)$$

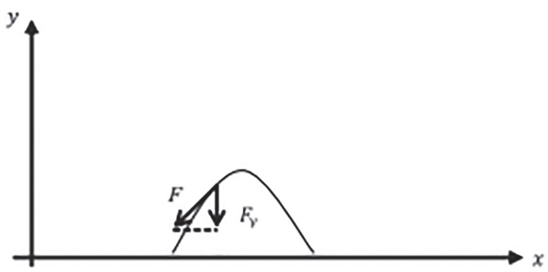
$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = K(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}|\Delta x|$$

Concluímos que:

- Se $\Delta x = n\lambda$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$
  $\Delta\varphi = n2\pi$ (concordância de fase)
- Se $\Delta x = n\lambda/2$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

Quando dois pontos estão em oposição de fase, eles possuem elongações simétricas. Veja a seguir exemplos de ondas que não são senoidais.

Intensidade de uma onda harmônica



A componente que realiza trabalho é a componente vertical. Calcularemos então a taxa de transmissão de energia por tempo desta componente.

$$P(x,t) = F_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial y \partial y}{\partial x \partial t}$$

$$P(x, t) = \omega KTA^2(\text{sen } \omega t + kx + \theta_0)^2$$

Calcularemos então uma potência média sobre a oscilação completa:

$$\bar{P}(x,t) = \omega KTA^2 \frac{1}{2\pi}\int(\text{sen } \omega t + kx + \theta_0)^2 \, d\theta$$

$$\boxed{1 = \bar{P} = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2}$$

A intensidade é proporcional ao quadrado da amplitude e ao quadrado da frequência (este resultado se aplica a qualquer onda harmônica bi ou tridimensional).

Exercícios

01. A função de uma onda é dada pela expressão:

$$y(x,t) = 20 \cdot \cos 2\pi\left(4t - \frac{x}{3}\right)$$

em que **x** e **y** estão em centímetros, e **t**, em segundos. Determine a amplitude, o período e a frequência dessa onda.

02. Um trem de ondas propaga-se em uma corda tensa não absorvedora de energia com velocidade igual a 10 m/s. Sabendo que a amplitude das ondas vale 0/5 m, a frequência é igual a 50 Hz e a fase inicial da onda é nula, determine a equação dessas ondas.

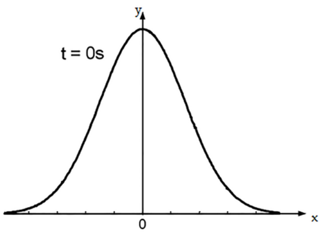
03. Uma corda de comprimento **l** está distendida, com uma extremidade presa a um suporte e a outra extremidade livre.

A) Ache as frequências f(n) dos modos normais de vibração da corda.
B) Desenhe a forma da corda associada aos três modos de vibração mais baixos (em ordem de frequência crescente). A velocidade de ondas na corda é **v**.

04. A equação de uma onda transversal se propagando em uma corda é dada por: $y = 2{,}0\ \text{mm}\ \text{sen}[20\ \text{m}^{-1}x - 600\ \text{s}^{-1}\ t]$
Encontre a amplitude, frequência velocidade e o comprimento de onda.

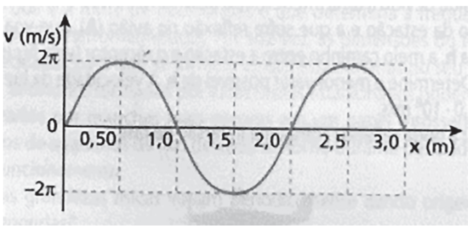
Encontre a velocidade escalar máxima de uma partícula da corda.
A) 1,2 m/s
B) 1,4 m/s
C) 2,8 m/s
D) 1,2cm/s
E) NDA

05.



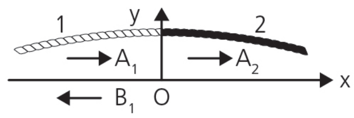
A figura acima mostra uma onda transversal na forma de um pulso ondulatório em uma corda esticada. A onda está se propagando no sentido positivo do eixo **x** com velocidade igual a 0,5 m/s. Se o deslocamento **y**, em metros, para uma coordenada **x**, em metros, no instante t = 0 é dado por $y(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$, o deslocamento **y**, em centímetros, para x = 3 metros e t = 2 segundos é
A) 5,50.
B) 6,25.
C) 8,50.
D) 12,50.
E) 15,25.

06. Considere uma onda senoidal propagando-se com velocidade igual a 4 m/s ao longo de uma corda elástica com um eixo de referencia 0x. O gráfico mostra, em determinado instante, os valores algébricos das velocidades transversais de alguns pontos da corda, compreendidos entre as posições $x_0 = 0$ e $x_1 = 3{,}0$ m.



a) Determine a frequência e a amplitude da onda.
b) No instante considerado, qual será o perfil da corda compreendido entre as posições $x_0 = 0$ e $x_1 = 3{,}0$ m?
c) Calcule, no instante considerado, o valor algébrico da aceleração do ponto da corda situado na posição 2,0m

07. Duas cordas muito longas, bem esticadas, de densidades lineares diferentes μ_1 e μ_2, estão ligadas uma à outra. Toma-se a posição de equilíbrio como eixo dos **x** e a origem **O** no ponto de junção, sendo **y** o deslocamento transversal da corda. Uma onda harmônica progressiva, $y_i = A_1 \cos(k_1x - \omega t)$, viajando na corda 1 (x < 0), incide sobre o ponto, de junção, fazendo-o oscilar com frequência angular ω. Isto produz na corda 2 (x > 0) uma onda progressiva de mesma frequência, $y_i = A_2 \cos(k_2x - \omega t)$, (onda transmitida), e dá origem na corda 1, a uma onda que viaja em sentido contrário, $y_r = B_1 \cos(k_1x + \omega t)$ (onda refletida). Dada a onda incidente y_i, de amplitude A_1, desejam-se obter a amplitude de reflexão $\rho = \dfrac{B_1}{A_1}$ e a amplitude de transmissão $\tau = \dfrac{A_2}{A_1}$.



A) Dada a tensão T da corda, calcule as velocidades de propagação v_1 e v_2 nas cordas 1 e 2, bem como os respectivos números de onda k_1 e k_2. O deslocamento total na corda 1 é $(y_i + y_r)$, e na corda 2 é y_t.
B) Mostre que, no ponto de junção x = 0, deve-se ter $(y_i + y_r) = y_r$.
C) Aplicando a 3ª Lei de Newton ao ponto de junção x = 0, mostre que, nesse ponto, deve-se ter também $\dfrac{\partial}{\partial x}(y_i + y_r) = \dfrac{\partial}{\partial x} y_t$.
D) A partir de (b) e (c), calcule as amplitudes de reflexão e transmissão em função das velocidades v_1 e v_2. Discuta o sinal de ρ.

08. O deslocamento de uma partícula de uma corda, tensionada na direção **x**, é representado por **y**. Assinale qual das alternativas contém expressões que caracteriza uma onda. As constantes A, k e ω são reais.

I. $y(x, t) = A\cos(kx)\ \text{sen}(\omega t)$;
II. $y(x, t) = A(k^2x^2 - w^2t^2)$;
III. $y(x, t) = A\cos^2(kx + \omega t)$;
IV. $y(x, t) = A\cos(k^2x^2 - w^2t^2)$;
V. $y(x, t) = Ae^{(kx - wt)}$.

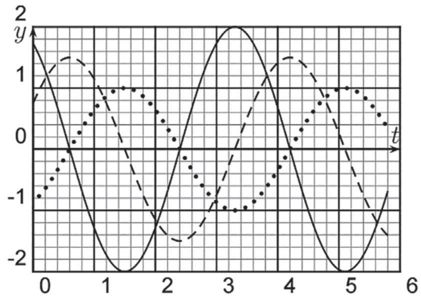
A) As equações I, II e IV.
B) As equações II e III.
C) As equações I, IV e V.
D) As equações I e III.
E) Nenhuma.

09. Um gafanhoto de massa **m** está tranquilamente em repouso sobre uma corda esticada horizontalmente. A corda possui uma densidade linear μ e está sob tensão F. Sem avisar, Tobias produz uma onda transversal senoidal com um comprimento de onda igual a λ que se propaga na corda. Qual a amplitude mínima da onda que faz o gafanhoto ficar repentinamente com um peso aparente igual a zero? Suponha que a massa **m** seja tão pequena que a presença desta não altere a propagação da onda.

A) $\dfrac{2g\lambda^2\mu}{F}$
B) $\dfrac{g\lambda^2\mu}{F}$
C) $\dfrac{2g\lambda^2\mu}{\pi^2F}$
D) $\dfrac{g\lambda^2\mu}{2\pi^2F}$
E) $\dfrac{g\lambda^2\mu}{4\pi^2F}$

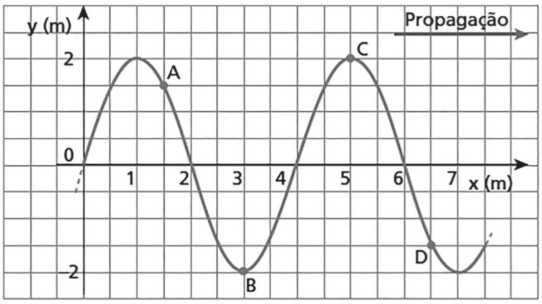
10. Na figura, as linhas cheia, tracejada e pontilhada representam a posição, a velocidade e a aceleração de uma partícula de uma corda na qual passa uma onda transversal e senoidal com frequência angular maior que a unidade ($\omega > 1$).

Com base nessas curvas, discorra sobre as afirmativas abaixo.



I. As linhas cheia e tracejada representam, respectivamente, a posição e a aceleração da partícula.
II. As linhas cheia e pontilhada representam, respectivamente, a posição e a velocidade da partícula.
III. A linha cheia, necessariamente, representa a aceleração da partícula.

11. O esquema a seguir representa no instante $t_0 = 0$ um trecho de uma corda elástica e não absorvedora percorrida por um trem de ondas harmônicas que se propagam para a direita, com velocidade de intensidade igual a 2 m/s.



Considerando o referencial cartesiano 0xy, responda.

A) Qual a equação das ondas, y = f(x, t), dada em unidades do SI?
B) Qual a defasagem, em radianos, entre os pontos A e D?

12. Uma fonte sonora isotrópica gera oscilações com frequência f = 1,45 KHz. A uma distância de $r_0 = 5{,}0$ m a partir da fonte o deslocamento de amplitude das partículas do meio é igual para ano $a_0 = 50\ \mu$m e para um ponto localizado a uma distância r = 10 m a partir da fonte a amplitude de deslocamento é $\eta = 3{,}0$ vezes menor que a_0. Calcule o coeficiente de amortecimento da onda. Assuma que a equação de uma onda esférica em um meio homogêneo e absorvedor é:

$$\xi = \frac{A_0 e^{-\gamma r}}{r}\cos(wt - kr)$$

Onde A_0 é uma constante e γ é o coeficiente de amortecimento.

Dados: ln 2 = 0,69 e ln 3 = 1,1

A) 0,04 m^{-1}
B) 0,08 m^{-1}
C) 0,12 m^{-1}
D) 0,16 m^{-1}
E) NDA

13. Uma onda de frequência 500 Hz tem uma velocidade de 350 m/s.

A) Quão afastados estão dois pontos que tem uma diferença de fase de $\frac{\pi}{3}$ rad?
B) Qual é a diferença de fase entre dois deslocamentos, num determinado ponto, em tempos separados de 1,00 ms?

14. Prove que, se uma onda transversal está se propagando ao longo de uma corda, então a inclinação de qualquer ponto da corda é numericamente igual à razão entre a velocidade escalar da partícula e a velocidade da onda naquele ponto.

15. Uma onda senoidal transversal está se propagando ao longo de uma corda no sentido de **x** decrescente. A figura mostra um gráfico do deslocamento como função da posição, no instante t = 0. A tensão na corda é 3,6 N e sua densidade linear é 25 g/cm.

Calcule:

A) a amplitude;
B) o comprimento de onda;
C) a velocidade da onda;
D) o período da onda;
E) Encontre a velocidade máxima de uma partícula da corda;
F) Escreva uma equação descrevendo a onda progressiva.

Gabarito

01	02	03	04	05
*	*	*	A	D
06	**07**	**08**	**09**	**10**
*	*	D	E	*
11	**12**	**13**	**14**	**15**
*	B	*	–	*

* **01:** 20 cm, 0,25 e 4 Hz

02: y(x, t) = 0,5 sen($10\pi x - 100\pi t$)

03: $f_m = \frac{(2n+1)v}{4l}$

06: A) 0,5 m 2 Hz C) $-\frac{8\pi^2 m}{s^2}$

07: A) $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ B) $\tau = \frac{2v_2}{v_1 + v_2}$, $\rho = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}$

10: O gráfico tracejado representa a velocidade, o gráfico pontilhado representa a posição e o gráfico contínuo a aceleração.

11: A) $y = 2\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$ (SI)

B) $\frac{5\pi}{2}$ rad

13: x = 0,117 m e $\Delta\varphi$ = 3,14 rad

15: $y_{(x,\,t)}$ = 0,050 m sen[16 rad/m x + 190 rad/s t + 0,93 rad]

– Demonstração.

Supervisor(a)/Diretor(a): Marcelo Pena – **Autor(a):** Carlos Eduardo
Digitador(a): Cirlene-20/09/2018 – **Revisor(a): CAMILLA**