

FRENTE: FÍSICA III

PROFESSOR(A): MARCOS HAROLDO

ASSUNTO: CAMPO ELETROSTÁTICO

## EAD – ITA/IME

### AULAS 09 A 13



### Resumo Teórico

#### Introdução

É intrigante perceber que uma carga enxerga outra no espaço a uma distância  $r$ , concorda? Como ele faz para visualizar e ainda mais, para ditar a direção e o sentido da força, se elas nem estão em contato? A resposta de tal questionamento surge no século XIX, com o conceito de campo elétrico, proposto por Michael Faraday.

O conceito de campo se apresenta útil na explicação da interação de corpos à distância. Sem o auxílio do conceito de campo, essa interação ocorreria como se “telepaticamente” um corpo tomasse conhecimento da presença, da posição e das propriedades do outro. Com o conceito de campo, este passa a ser o agente transmissor das forças. A ideia de campo não é recente. Começou com um artifício matemático para facilitar a exposição de algumas teorias. A gravitação é um exemplo disso.

#### Definição

O vetor  $\vec{E}$  é chamado de campo elétrico das cargas fontes. Tal grandeza é função de  $\vec{r}$  (local onde você o calcula), pois depende intimamente de  $\vec{r}$  e da distribuição de cargas no espaço. Repare que ele não faz qualquer referência à carga de prova  $Q$ . Fisicamente, podemos arranjar uma definição pragmática para campo elétrico: Força por unidade de carga que seria exercida sobre uma carga de prova localizada em  $\vec{r}$ .<sup>1</sup>

Assim, tomemos a força resultante sobre uma carga pontual devido a  $N$  partículas no espaço:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i Q}{r_i^2} \hat{r}_i = Q\vec{E}$$

Logo, o campo que uma carga fonte (localizada na origem) gera em um ponto qualquer localizado pelo vetor  $\vec{r}$  é dado por:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

<sup>1</sup> É importante ter em mente que a definição de campo é um pouco abstrata. É fácil calculá-lo, mas temos um pouco de complicações quando o definimos.

Esse resultado pode ser visualizado com o auxílio de um gráfico:

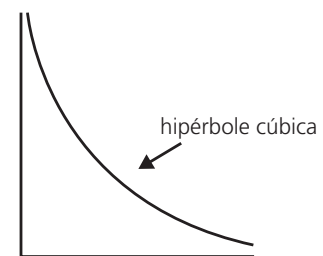
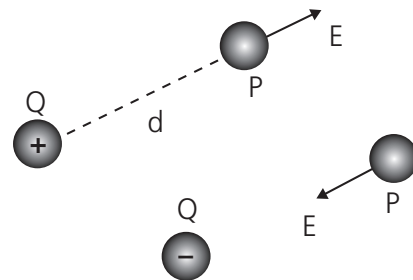


Gráfico do campo elétrico de uma carga pontual em função da distância.

Quando o campo enxerga uma carga “positiva” no ponto  $P$ , a carga sente força elétrica:



Se a carga for negativa, o efeito é o inverso.

#### Superposição de campos

Observe que se seguirmos essa linha de raciocínio, podemos perceber que o princípio da superposição é aplicado aos campos elétricos da mesma forma que para força elétrica.

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Podemos acontecer de a distribuição espacial de cargas fontes seja contínua. Teremos, então:

$$\vec{E} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Onde  $\Delta q$  é o “pedacinho” de carga espalhado, esse limite cai sobre uma integral.

$$\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

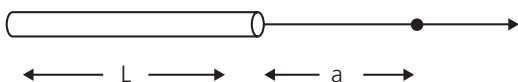
Analogamente, para uma distribuição de carga linear, superficial e volumétrica, teremos, respectivamente:

$$\vec{E} = \int \frac{\lambda' \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \vec{E} = \int \frac{\sigma' \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \vec{E} = \int \frac{\rho' \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

## Aplicações

### Campo devido a uma distribuição linear de cargas (a uma distância $\alpha$ sobre a linha)

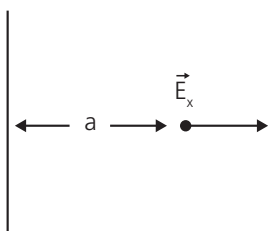
Campo no eixo de uma haste de comprimento  $L$ , uniformemente carregada, com densidade linear de carga  $\lambda$  e carga total  $Q$ .



$$\vec{E} = \int \frac{\lambda' \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \int_{a+L}^a \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2} dx \hat{i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(a+L)}$$

### Campo devido a uma distribuição linear de cargas (a uma distância $\alpha$ da linha)

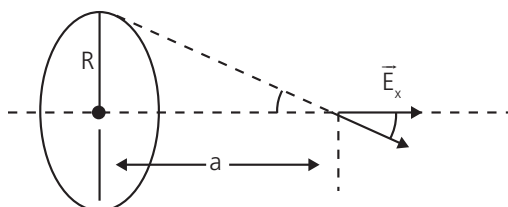
Obteremos o campo elétrico à distância  $a$  de um fio infinito e carregado com uma densidade de carga  $\lambda$ :



Primeiramente, observemos a simetria na vertical. As componentes verticais do campo se anulam, sobrando somente componente na horizontal. Devemos ter:

$$\begin{aligned} \vec{E}_x &= \int \frac{\lambda \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} dy \hat{i} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \theta dy}{a^2 + y^2} \hat{i} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(\sec \theta)^2 \cos \theta d\theta}{a^2 (\sec \theta)^2} \hat{i} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \alpha} [\sin \theta]_0^{\pi/2} \hat{i} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \alpha} \hat{i} \end{aligned}$$

### Campo gerado por um anel circular (em um ponto sobre o eixo)



Da mesma forma que no exemplo anterior, existe uma simetria que anula a componente do campo na vertical, restando somente a componente horizontal. Vejamos como fica o campo sobre o eixo a uma distância  $a$  do centro.

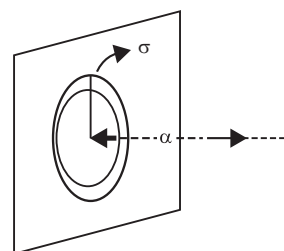
$$\begin{aligned} \vec{E}_x &= \int \frac{\lambda \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} dl \hat{i} = \int \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0 r^3} dl \hat{i} \\ &= \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + a^2)^{3/2}} dl \hat{i} \\ &= \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{aR}{(R^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i} \end{aligned}$$

#### Observação:

- Quando  $a$  é muito grande, o campo se reduz ao campo de uma carga pontual como vimos anteriormente.
- Quando  $a$  for zero (centro do anel), o campo é nulo. Isso indica que não existe força sobre tal ponto.

### Campo gerado por uma placa infinita

Tomemos agora uma chapa metálica infinita<sup>2</sup>.



Vendo a figura anterior, percebemos que podemos varrer tal região através de vários círculos (anéis que calculamos anteriormente) transformando apenas a densidade linear em superficial. Veja:

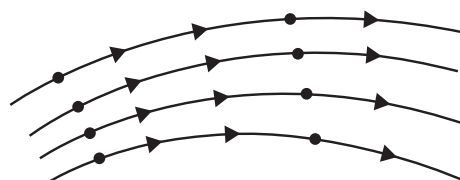
$$\vec{E}_x = \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r}{2\epsilon_0 (R^2 + a^2)^{3/2}} dr \hat{i} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}$$

Irei poupá-los de resolver essa integral desnecessária neste momento. Nosso foco não é aprender técnicas de integrais. Veremos mais adiante uma maneira satisfatória (eu diria brilhante) de calcular esse campo novamente, porém sem necessidade de tanto cálculo.

### Linhas de Força

O conceito de **linhas de força** foi introduzido por M. Faraday, e constitui-se numa ferramenta bastante adequada para visualizar a estrutura do campo elétrico devido a uma distribuição de cargas.

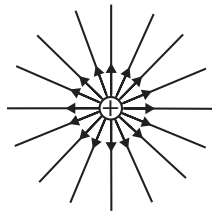
Uma linha de força é uma curva imaginária traçada de tal forma que sua direção e sentido em qualquer ponto sejam os do campo elétrico naquele ponto. Isto significa que, em qualquer ponto do espaço, o campo elétrico é sempre tangente às linhas de força.



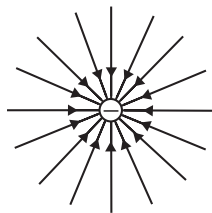
As linhas de força possuem as seguintes características:

1. As cargas positivas são fontes de linhas de força e as cargas negativas são sumidouros de linhas de força, ou seja, as linhas de força surgem nas cargas positivas e terminam nas cargas negativas.
2. As linhas de força são contínuas, exceto nas fontes e sumidouros.
3. As linhas de força nunca se cruzam, pois, se o fizessem, o campo elétrico seria indeterminado no ponto de encontro.
4. Uma maior densidade de linhas de força indica uma maior intensidade de campo elétrico nessa região.
5. O número de linhas de força que surgem (carga positiva) ou desaparecem (carga negativa) é proporcional ao valor absoluto da carga.

As linhas de força são radiais, divergindo a partir do ponto onde se encontra a carga.

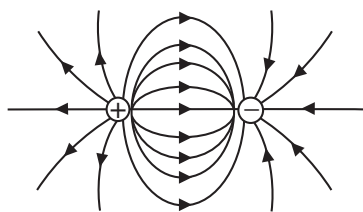


As linhas de força são radiais, convergindo para o ponto onde se encontra a carga.

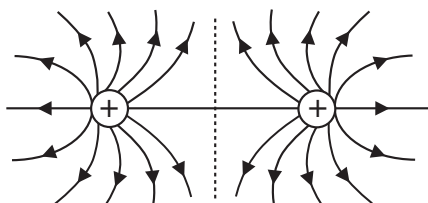


**Observação:** É válido salientar que os sentidos das linhas de força são uma convenção! Não existem tais "setinhas", apenas o formato das linhas pode ser percebido no laboratório.

Um dipolo elétrico constitui-se em um par de cargas pontuais de sinais opostos, mas iguais em valor absoluto:



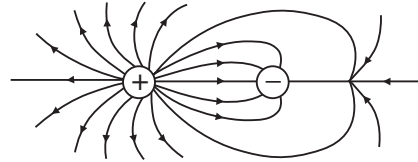
**Par de cargas idênticas:** observe atentamente a simetria das linhas de força. O aspecto das linhas de força devido a um par de cargas negativas idênticas é exatamente o mesmo, a não ser pelo fato de a orientação das linhas ser invertida.



<sup>2</sup> Quando nos referimos ao termo infinito, queremos dizer que é muito grande para a região que está sendo trabalhada. É claro que estamos fazendo aproximações e devemos saber que calcular o campo de uma placa de dimensões consideráveis é extremamente complicado devido aos efeitos de borda.

**Veja esse exemplo:**

Uma carga positiva duas vezes maior em valor absoluto que uma carga negativa. Sabemos que o número de linhas de força que saem da carga positiva é igual ao dobro do número de linhas de força que chegam à carga negativa.



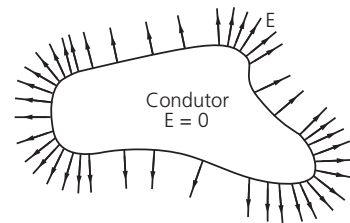
As outras linhas devem terminar em outras cargas negativas. Não importa onde estas estejam.

## Campo em condutores

Vamos agora a alguns exercícios que envolvem pouco cálculo e muito raciocínio. Para isto precisaremos saber algumas características físicas importantes dos condutores.

\* Se um condutor eletrizado estiver em equilíbrio eletrostático, as cargas estarão distribuídas na superfície.

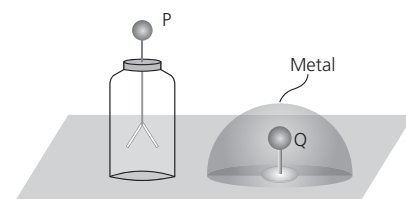
\* Se um condutor eletrizado estiver em equilíbrio eletrostático, o campo elétrico será nulo em todos os pontos do seu interior e em pontos da superfície desse condutor  $E$  será perpendicular à ela (se houvesse componente horizontal, os elétrons se moveriam e o condutor não estaria em equilíbrio).



Estes fenômenos físicos têm consequências físicas importantes. Por exemplo, uma cavidade no interior de um condutor é uma região que não será atingida por efeitos elétricos produzidos externamente, pois o campo elétrico nessa cavidade é sempre nulo e não há carga elétrica distribuída em sua parede (a carga se localiza na superfície do condutor). Por este motivo, um condutor oco pode ser usado para produzir blindagem eletrostática: quando queremos proteger um aparelho qualquer contra influências elétricas, nós envolvemos esse aparelho com uma capa metálica. Nestas condições, dizemos que o aparelho está blindado, pois nenhum fenômeno elétrico externo poderá afetá-lo.

Se você observar o interior de um aparelho de TV, por exemplo, poderá notar que algumas válvulas (e outros dispositivos) se apresentam envolvidos por capas metálicas, estando, portanto, blindadas por esses condutores.

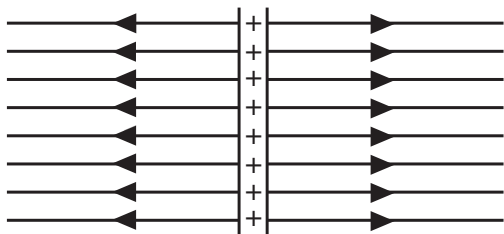
Um estudante verificou que a presença de uma carga  $Q$  estava perturbando o funcionamento de um aparelho elétrico  $P$  (próximo de  $Q$ ). Desejando evitar essas perturbações, ele envolveu a carga  $Q$  com uma cúpula metálica, como mostra a figura. Mas agindo dessa maneira ele não conseguiu o seu objetivo! Como deveria ele ter procedido? (sem afastar  $Q$  do aparelho)? É óbvio que ele deveria ter envolvido  $P$  com metal, e não  $Q$ !



### Exemplo:

Plano infinito carregado positivamente.

Conforme demonstramos, o campo devido a um plano infinito uniformemente carregado é uniforme, ou seja, em todos os pontos do espaço, a intensidade, a direção e o sentido do campo elétrico permanecem constantes. Como conclusão, temos linhas de força retilíneas e igualmente espaçadas.



➤ Plano infinito carregado positivamente.

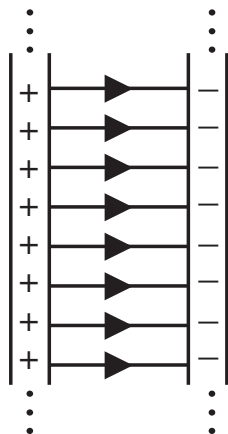
### Observação:

No caso de um plano infinito carregado negativamente, a única diferença é a orientação das linhas de força, que aparece invertida.

### Exemplo:

Par de placas infinitas e paralelas, carregadas uniformemente com cargas de sinais contrários.

Como vimos anteriormente, o campo no interior das placas é uniforme e fora delas é nulo.



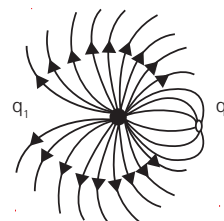
➤ "Capacitor" de placas infinitas e paralelas.



## Exercícios

01. Duas cargas  $q_1$  e  $q_2$  possuem inicialmente as mesmas velocidades (módulo e direção). Em seguida, um campo elétrico atuou durante certo intervalo de tempo. A direção da velocidade da primeira partícula variou de  $60^\circ$  e a magnitude caiu pra metade. A direção da segunda carga variou de  $90^\circ$ .
- A) A razão entre o módulo da velocidade final e a velocidade inicial da partícula 2 será de?
- B) Se a razão carga/massa da primeira partícula vale C, a razão carga/massa da segunda partícula vale?

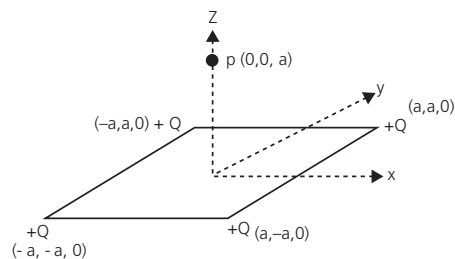
02. A figura mostra as linhas de força para o sistema isolado por duas cargas pontuais,  $q_1$  e  $q_2$ . Medidos em unidades de  $10^{-19}$  Coulombs, dois possíveis valores para  $q_1$  e  $q_2$  são, respectivamente:



- A) 2 e -1  
 B) 4 e -2  
 C) -32 e 8  
 D) 64 e -8  
 E) 96 e -24

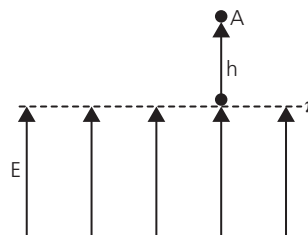
03. Quatro cargas puntiformes  $Q = +2 \mu\text{C}$  estão localizadas nos vértices de um quadrado no plano xy. Encontre a componente  $E_z$  do campo elétrico no ponto  $P = (0, 0, a)$ .

Dados:  $a = 10^{-2} \text{ m}$ ;  
 $K = 9,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ ;



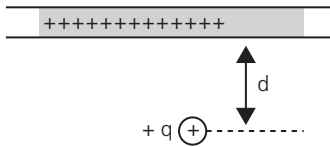
- A)  $E_z(0, 0, a) = 1,80 \times 10^8 \text{ N/C}$   
 B)  $E_z(0, 0, a) = 5,39 \times 10^8 \text{ N/C}$   
 C)  $E_z(0, 0, a) = 3,11 \times 10^8 \text{ N/C}$   
 D)  $E_z(0, 0, a) = 1,39 \times 10^8 \text{ N/C}$   
 E)  $E_z(0, 0, a) = 2,40 \times 10^8 \text{ N/C}$

04. A figura seguinte mostra um corpo de massa  $m$  e carga  $q$ , abandonado na posição A sob a ação de seu peso P. Abaixo do plano horizontal  $\pi$ , atua um campo elétrico uniforme, vertical e de intensidade  $E=2P/q$ . O tempo que o corpo leva para voltar à posição A é:



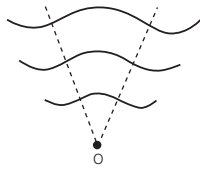
- A)  $\sqrt{\frac{32hm}{p}}$   
 B)  $\sqrt[4]{\frac{2hm}{p}}$   
 C)  $\sqrt{\frac{2pm}{q}}$   
 D)  $\sqrt[2]{\frac{hm}{p}}$   
 E)  $\sqrt{\frac{8hm}{p}}$

05. Seja um fio retilíneo infinitamente longo uniformemente eletrizado com uma densidade linear de cargas  $\lambda$  (coulomb/metro) imerso em um meio cuja constante eletrostática vale  $K$ . A força elétrica que atua sobre uma carga puntiforme  $+q$  localizada a uma distância  $d$  desse fio vale:



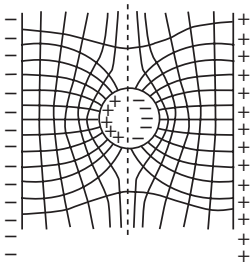
- A)  $\frac{2K \cdot \lambda \cdot q}{d}$       B)  $\frac{2K \cdot \lambda \cdot q}{d^2}$   
 C)  $\frac{K \cdot \lambda \cdot q}{d}$       D)  $\frac{K \cdot \lambda \cdot q}{d^2}$

06. As linhas de força numa certa seção de um campo têm o formato de arcos de círculos com centro no ponto O. Com relação à intensidade do campo elétrico, podemos afirmar que



- A) é inversamente proporcional à distância ao quadrado ao ponto O.  
 B) é inversamente proporcional à distância ao cubo em relação ao ponto O.  
 C) é inversamente proporcional à distância ao ponto O.  
 D) não depende da distância ao ponto O.  
 E) N.D.A.

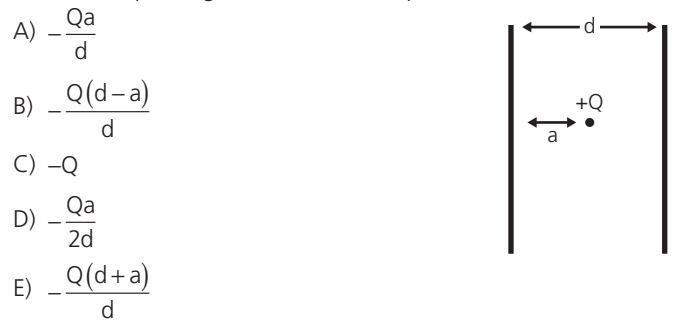
07. Um condutor neutro esférico é colocado no interior de um capacitor de placas planas e paralelas. Em função da presença do condutor esférico, as linhas de campo sofrerão um rearranjo, conforme figura seguinte.



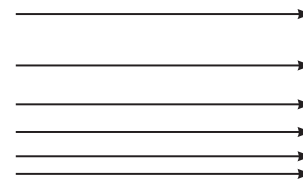
Podemos afirmar que

- A) somente as linhas de campo elétrico sofreram modificações, isto ocorreu devido à superposição do campo elétrico das cargas induzidas em todos os pontos do capacitor.  
 B) as linhas de campo elétrico e as equipotenciais sofreram modificações em função da superposição do campo elétrico das cargas induzidas em todos os pontos do capacitor.  
 C) somente as linhas de campo elétrico sofreram modificações, isto ocorreu devido à superposição do campo elétrico das cargas induzidas na superfície do condutor esférico.  
 D) as linhas de campo elétrico e as equipotenciais sofreram modificações em função do campo elétrico das cargas induzidas na superfície do condutor esférico.  
 E) as linhas de campo elétrico e as equipotenciais sofreram modificações devido ao campo elétrico das cargas induzidas em todos os pontos (capacitor, superfície da esfera condutora e interior da esfera condutora).

08. Duas placas condutoras idênticas aterradas estão separadas de uma distância  $d$  como se indica na figura seguinte. A uma distância  $a$  da placa esquerda está localizada uma carga puntual  $+Q$ . Determine que carga se induz sobre a placa direita.



09. Prove que é impossível produzir um campo elétrico no qual todas as linhas de força devem ser linhas retas paralelas, com a densidade aumentando constantemente na direção perpendicular às linhas de força. (ver figura).



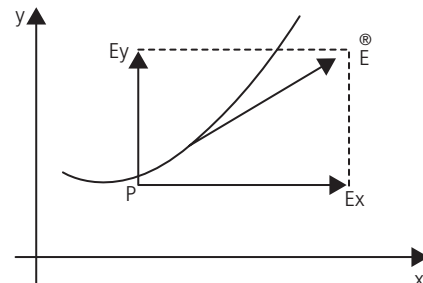
10. Sobre um lago tranquilo e extenso situa-se uma nuvem também extensa e sensivelmente horizontal. Graças à eletrização da nuvem, o nível da água se eleva de  $h$  em relação ao nível que corresponderia ao equilíbrio na ausência da nuvem. Determine a densidade elétrica superficial  $\sigma$  no lago.

**Dados:**  $\epsilon$ : permissividade elétrica.

**d:** densidade da água.

**g:** aceleração da gravidade.

11. Devido ao fato de as linhas de força serem, em geral, curvas tais que, num ponto considerado, determina-se a equação de uma linha de força, ou melhor, de uma família de curvas numa dada região, que representará as linhas de força nessa região. Veja o esquema seguinte: a tangente no ponto P representa o vetor campo elétrico. Conhecendo-se as componentes  $E_x$  e  $E_y$ , tem-se condição de determinar as coordenadas das linhas de força em cartesianas retangulares.



Agora considere uma região do plano na qual o campo elétrico é dado por  $E = ax\hat{i} + ay\hat{j}$ . Podemos afirmar que as linhas de força nessa região são

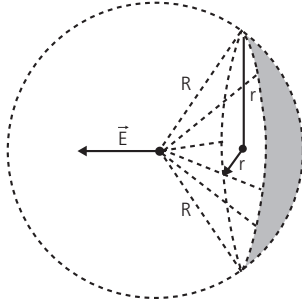
- A) hipérbolas cujas assíntotas são os eixos  $x$  e  $y$ .  
 B) parábolas que cortam apenas o eixo  $x$ .  
 C) parábolas que cortam apenas o eixo  $y$ .  
 D) parábolas que cortam os dois eixos.  
 E) retas passando pela origem.

12. Determine a intensidade do campo elétrico de um segmento esférico, carregado uniformemente no centro da esfera de raio  $R$ , da qual ele foi cortado.

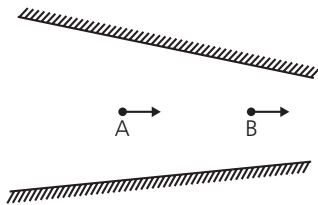
**Dados:**

$\sigma \rightarrow$  densidade superficial de carga.

$\epsilon_0 \rightarrow$  permissividade elétrica.

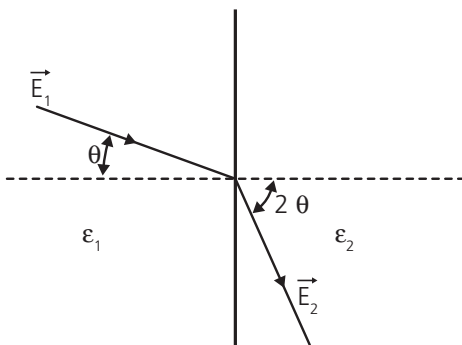


13. Um elétron está se movendo livremente ao longo de um tubo com área de seção transversal variando, conforme mostrado na figura.



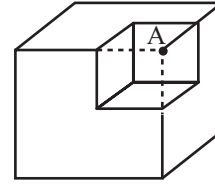
Explique a mudança na intensidade da velocidade do ponto A para o ponto B.

14. Quando um campo elétrico passa de um meio para outro, este em geral muda de direção e intensidade como uma espécie de "Lei de Snell", a qual diz:  $\epsilon_1 E_{1N} = \epsilon_2 E_{2N}$ , onde  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  são as constantes de permissividade dos respectivos meios e  $E_{1N}$  e  $E_{2N}$  são as componentes dos campos perpendiculares à superfície de separação dos meios. Tendo em vista a figura e se  $\epsilon_2 = 5\epsilon_1$ , então a intensidade de  $E_2$  vale:



- A)  $\frac{E_1 \sin \theta}{5 \sin 2\theta}$
- B)  $\frac{5E_1 \cos \theta}{\sin 2\theta}$
- C)  $\frac{E_1 \cos \theta}{5 \cos 2\theta}$
- D)  $5E_1$
- E)  $5E_1 \operatorname{tg} \theta$

15. Imagine um cubo com carga elétrica distribuída uniformemente com uma densidade  $\rho$  volume. A intensidade do campo elétrico no ponto A é E. Determine o valor do campo elétrico quando cortado e removido um pequeno cubo de lado igual à metade do cubo de origem.



## Gabarito

01	02	03	04	05
–	E	D	A	A
06	07	08	09	10
C	D	A	–	–
11	12	13	14	15
E	–	–	C	–

– Demonstração.



## Anotações