Livro Eletrônico

Aula 08

Matemática III p/ Escola de Sargentos das Armas (EsSA) Com videoaulas - Pós-Edital

Italo Marinho Sá Barreto

Aula 08: Poliedros.

Sumário

E aí meu guerreiro destemido!! Como vão as coisas? Anda encontrando dificuldade com a geometria plana? Pois é, rapaz, essa é uma sina de todo estudante que inicie seus estudos com geometria. O início sempre será um pouco complicado, com aquela sempre impressão de que alguns aspectos cognitivos não estão sendo produtivos ou indo para frente.

Lembre-se sempre de que isso é uma grande ilusão, jovem. A repetição, o estudo contínuo, o foco contínuo, a bravura e perpetuação das tentativas eventualmente irão trazê-lo ao bom entendimento de tudo! basta que você siga o ciclo que sempre menciono para você: faça e refaça os mesmos exercícios de nossos livros eletrônicos, sempre lembrando-se de que refazer não é perda de tempo. De maneira alguma!

Hoje, jovem, estaremos iniciando os nossos estudos da Geometria Espacial. Começaremos estudando os Poliedros, um dos assuntos mais curtos de todo o nosso edital. Há pouquíssimas questões militares acerca desse assunto (você até verá algumas questões extras ao final, pela carência de questões militares).

Esse assunto poder ser uma grande surpresa de sua prova, visto que ninguém espera que venha a de fato ser um problema. Bom, então, sem mais delongas, vamos lá? Comecemos então a nossa Geometria Espacial.

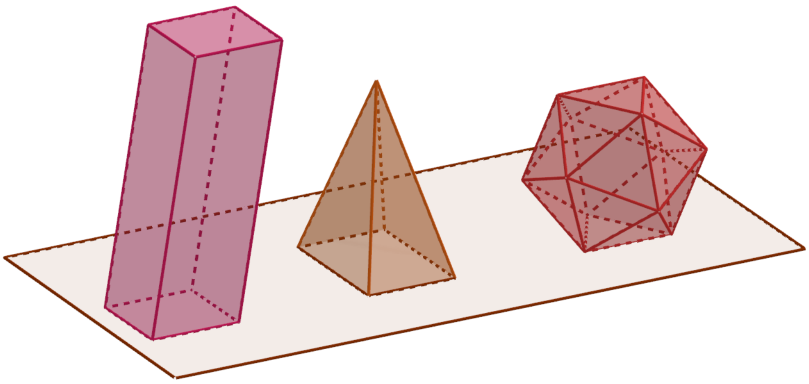
CRONOGRAMA DE AULAS

DISPONÍVEL	CONTEÚDO
Aula 00	*Fundamentos da Geometria Plana: elementos primitivos, axiomas e postulados. Ângulos: definição, elementos, notações, unidades de medida, classificação, ângulos consecutivos, ângulos adjacentes, bissetriz de um ângulo, ângulos opostos pelo vértice, retas paralelas cortadas por transversais. Triângulos: definição, elementos, relações angulares, condição de existência, classificação, cevianas, pontos notáveis, base média, congruência.*
Aula 01	*Teorema de Tales, semelhança de triângulos e teorema das bissetrizes. Relações métricas no triângulo retângulo. Polígonos: definição, elementos, nomenclatura, polígonos côncavos, polígonos convexos, classificação, relações angulares e número de diagonais.*
Aula 02	*Quadriláteros notáveis: definição, elementos, relações angulares, classificação, base média e mediana de Euler.*
Aula 03	*Polígonos regulares: Polígonos regulares inscritos e polígonos regulares circunscritos. Circunferência: definição de circunferência e de círculo, elementos, posições relativas, ângulos na circunferência, quadriláteros inscritíveis, teorema de Pitot,e potência de ponto.*
Aula 04	*Trigonometria: razões trigonométricas no triângulo retângulo, trigonometria num triângulo qualquer (Lei dos senos e dos cossenos)*
Aula 05	*Circunferência trigonométrica, operações com arcos (adição, subtração e arco duplo) e funções trigonométricas.*
Aula 06	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*
Aula 07	*Áreas de figuras planas.*
Aula 08	*Introdução à Geometria Espacial. Prismas: definição, elementos, classificação, planificação, áreas, volume e casos especiais: cubos e paralelepípedos. Cilindros: definição, elementos, classificação, planificação, áreas e volume.*
Aula 09	*Pirâmides: definição, elementos, classificação, relações métricas na pirâmide, áreas e volume. Cones: definição, elementos, classificação, relação métricas no cone, áreas e volume.*
Aula 10	*Esferas: definição, elementos, secção esférica, área da superfície esférica e volume. Troncos.*
Aula 11	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*

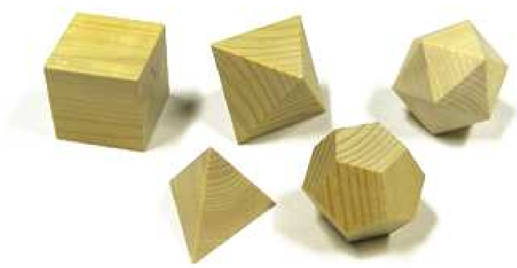
1.0– Poliedros

1.1– Definição e elementos básicos, análise de poliedro

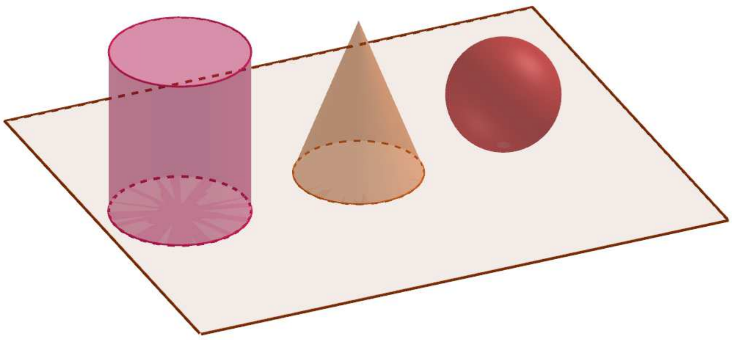
Bom, vamos então à definição de Poliedros. Poliedros são formas tridimensionais com faces poligonais planas, bordas retas (arestas) e cantos ou vértices acentuados. Seguem abaixo alguns exemplos de poliedros.



Aqui estão alguns poliedros reais feitos em madeira:



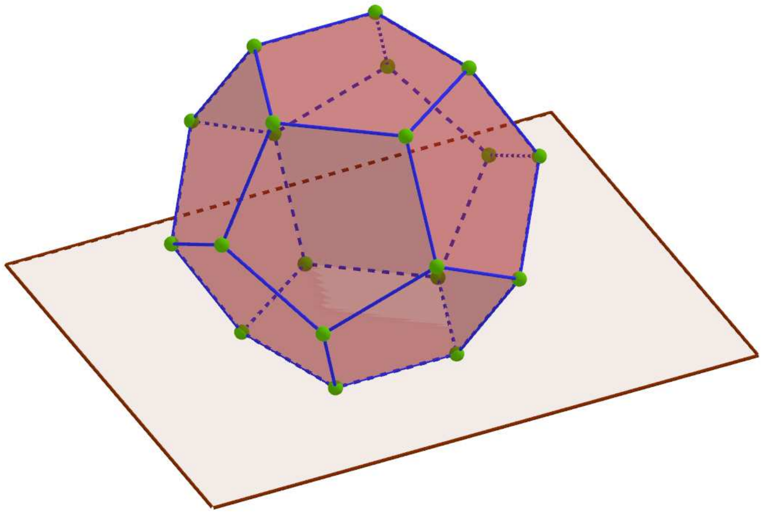
Seguem abaixo exemplos de figuras não-poliédricas:



Então, jovem, na prática de exercícios, sólidos não-redondos serão considerados poliedros (inclusive os prismas e as pirâmides, sólidos que serão estudados nas aulas seguintes).

Para essa aula, inicialmente precisaremos aprender a realizar contagens dentro dos poliedros. Vejamos as contagens mais importantes.

Poliedros possuem elementos muito importantes que destacarei a seguir.



Para ilustrarmos melhor cada um desses elementos para você, utilizarei o poliedro ao lado como exemplo. Destaquei em cores diferentes três elementos desse poliedro: o **vértice**, a **aresta** e a **face**.

Arestas são os segmentos de reta que constroem o poliedro. Podemos vê-las ao lado coloridas de azul. **Vértices** são como eram antes: são os encontros dos segmentos, isto é, o encontro das arestas. Podemos vê-los ao lado coloridos de verde. E finalmente as **faces** são os polígonos planos formados pelas arestas. Podemos vê-las acima coloridas de vermelho.

A quantidade de arestas de um poliedro será, daqui em diante, identificada por A, a quantidade de vértices por V e a quantidade de faces por F.

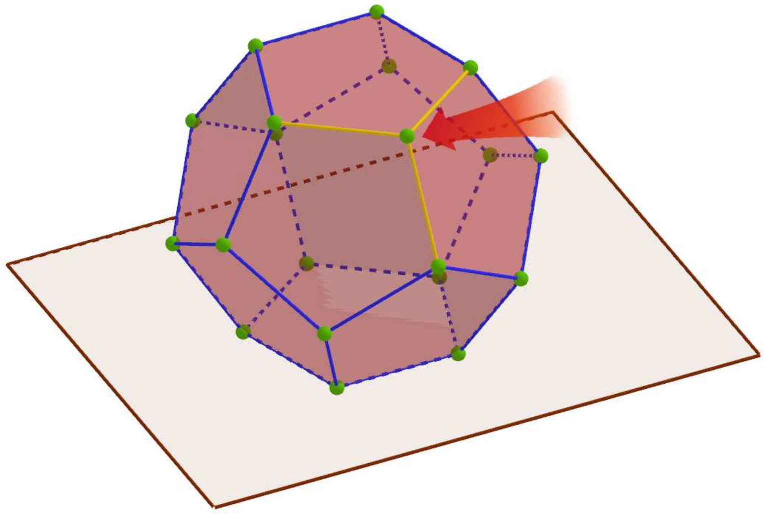
No poliedro anterior, por exemplo, temos $A = 30$, $V = 20$ e $F = 12$ (verifique isso contando você mesmo). Quando fazemos essa contagem que acabamos de fazer, dizemos que foi feita uma ***análise do poliedro***.

1.2– Análise total de um poliedro

Para entendermos o que vem a ser uma análise total de um poliedro, precisamos entender o que vem a ser a ordem de um vértice e a ordem de uma face. Vamos então falar de cada um deles. Comecemos pela ordem de um vértice.

> A ordem ou o gênero de um vértice é a quantidade de arestas que concorrem naquele vértice.

Podemos citar como exemplo, a figura que está mais acima nessa página mesmo. Observe um vértice qualquer desse poliedro. Vai lá, escolhe um. Bom, agora inicie uma contagem na sua cabeça da seguinte forma: quantas arestas concorrem naquele vértice, isto é, quantas arestas saem daquele vértice? Se você contou direitinho, deve ter encontrado que esse vértice tem ***três*** arestas que partem dele. Conseguiu ver isso? Se não conseguiu, olha a figura abaixo:

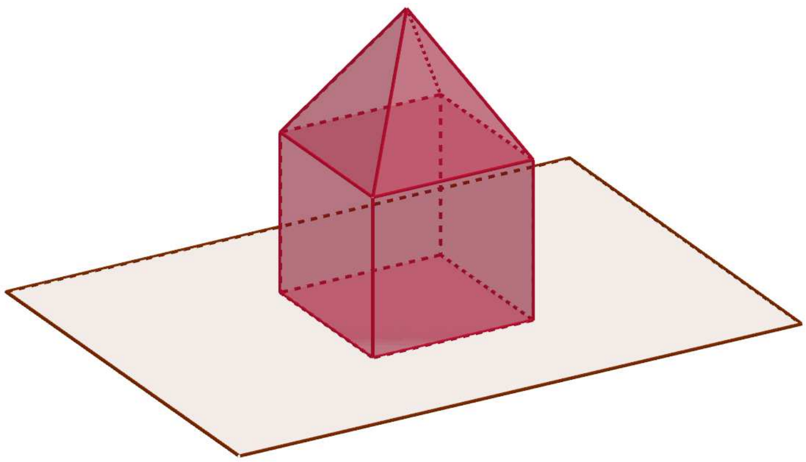


Eu escolhi aquele vértice ali, mas poderia ser qualquer outro. Quantas arestas saem daquele vértice? Como eu disse, saem três! Portanto, podemos dizer que esse vértice que eu escolhi é um vértice ordem 3. Inclusive, todos os vértices desse poliedro anterior possuem ordem 3. Tudo bem, jovem?

Assim como existe a ordem de um vértice, também existe a ordem (ou gênero) de uma face.

> A ordem ou o gênero de uma face é a quantidade de arestas da face.

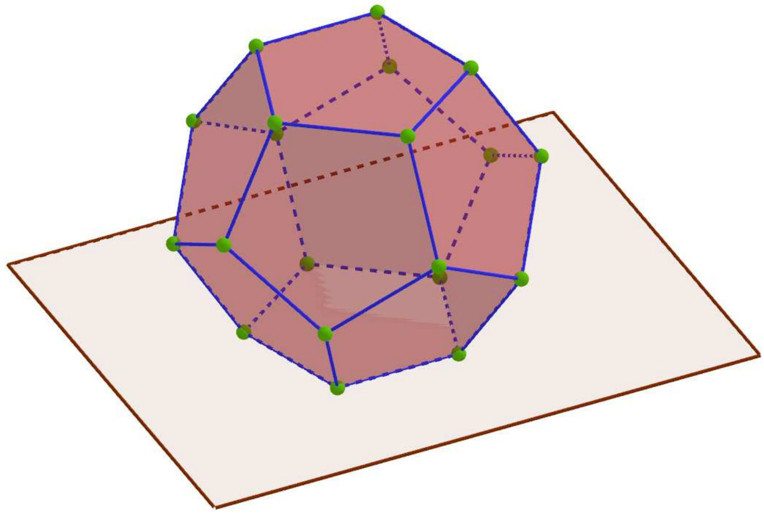
Para exemplificar, considere o poliedro abaixo:



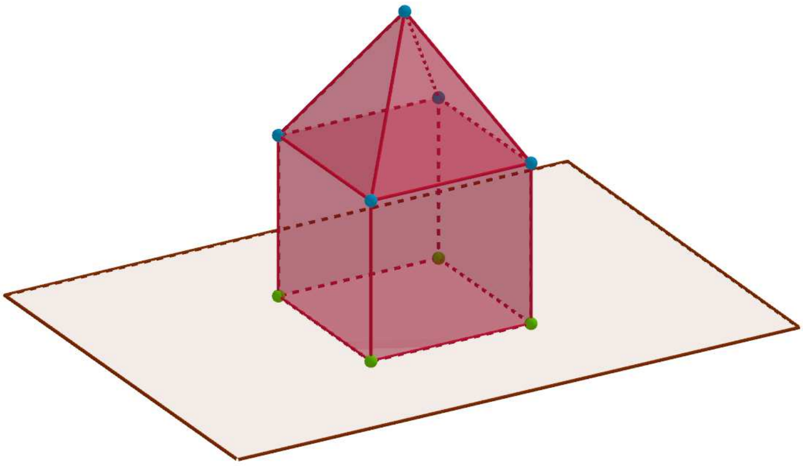
Veja que as suas faces são quadrangulares e triangulares, certo? Então algumas de suas faces têm ordem 3 e outras têm ordem 4, consegue ver isso, jovem?

Agora, vamos a algumas notações novas. Enunciarei agora para você o significado da notação V_n:

> Chamarei de V_n a quantidade de vértices de ordem n em um poliedro.



Para podermos exemplificar o uso dessa notação, retornarei ao poliedro inicial. Vou colocá-lo aqui à direita para que não precisemos ficar trocando de página. Se eu pedisse para você calcular V_4 para mim, o que você me responderia? Utilize a definição que acabamos de ver, substitua $n = 4$, leia novamente a definição e tente responder. E aí? Conseguiu? See você respondeu que $V_4 = 0$, acertou! Caso não tenha respondido, vamos entender o porquê de $V_4 = 0$. O que seria, de acordo com a definição que acabamos de ver, V_4? Ora, seria a quantidade total de vértices onde concorrem 4 arestas, certo? Acontece que nesse poliedro específico, ***nenhum*** vértice possui quatro arestas concorrentes. Logo, $V_4 = 0$. E se eu te pedisse para calcular V_3? Ora, vimso anteriormente que TODOS os vértices desse poliedro possui três arestas concorrentes. Como esse poliedro tem 20 vértices, temos que $V_3 = 20$ (pois existe um total de 20 vértices com três arestas concorrentes).



Agora, façamos as mesmas perguntas para esse poliedro ao lado. Dessa vez eu colori alguns vértices de verde e azul para te ajudar na visualização. Bom, inicialmente vou te pedir para que calcule V_4, como fiz antes. Consegue calcular para mim? Lembrando que calcular V_4 significa calcular a quantidade de vértices da figura de onde partem 4 arestas. Veja que são exatamente os pontos azuis da figura, consegue ver isso? De cada um dos cinco pontos azuis partem exatamente quatro arestas, e daí, $V_4 = 5$. E V_3, vale quanto? Estamos procurando então a quantidade de vértices de onde partem três arestas. Observando a figura podemos verificar que são os pontos verdes na base da figura. Portanto, podemos dizer que $V_3 = 4$. Tudo bem, jovem?

Da mesma forma que podemos definir a notação V_n, também podemos definir a notação F_n:

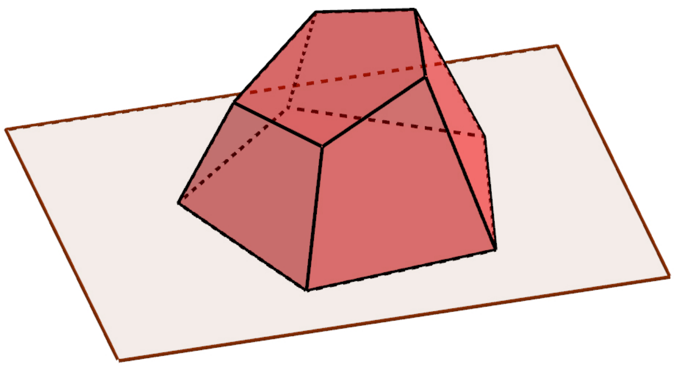
> Chamarei de F_n a quantidade de faces de ordem n em um poliedro.

No primeiro exemplo da página anterior, podemos verificar que $F_5 = 12$, pois existem 12 faces de ordem 5 (ou seja, 12 faces de 5 lados). Já no outro exemplo, logo abaixo, temos 4 faces triangulares e 5 faces quadrangulares; isso significa que, para aquele poliedro, $F_3 = 4$ e $F_4 = 5$.

Quando fazemos essas contagens em termos de V_n e F_n, chamamos essa análise de ***análise total do poliedro***. Façamos um exercícios acerca desse tema:

QUESTÃO 1

Considere o seguinte sólido poliédrico:

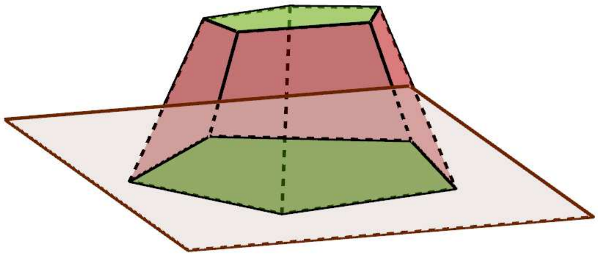


Sua análise completa é dada pela alternativa:

(a) $F_4 = 5$, $F_5 = 2$ e $V_3 = 10$, com $V = 10$, $F = 7$ e $A = 15$.
(b) $F_5 = 4$, $F_2 = 5$ e $V_{10} = 3$, com $V = 10$, $F = 7$ e $A = 15$.
(c) $F_4 = 5$, $F_5 = 2$, $V_3 = 5$ e $V_4 = 5$, com $V = 10$, $F = 7$ e $A = 15$.
(d) $F_5 = 4$, $F_2 = 5$ e $V_3 = 10$, com $V = 10$, $F = 7$ e $A = 15$.

R: Comecemos, então, a fazer as contagens. Façamos primeiro as contagens gerais. esse poliedro tem, por observação, 10 vértices, 7 faces e 15 arestas, isto é, $V = 10$, $F = 7$ e $A = 15$.

Agora, vamos à análise total. Algumas das faces desses poliedros têm ordem 5 e outras têm ordem 4. Colori a figura abaixo para ficar mais claro. Colori de verde aquelas faces com ordem 5 e mantive em vermelho as faces com ordem 4.



Podemos dizer então que há 2 faces verdes de ordem 5 (isto é, $F_5 = 2$) e 5 faces vermelhas de ordem 4 (isto é, $F_4 = 5$).

Agora, vamos aos vértices. Esses são mais fáceis porque observando a figura podemos perceber que *todos* os vértices possuem ordem 3, isto é, de qualquer vértice partem sempre três arestas. Isto nos diz que $V_3 = 10$, visto que há 10 vértices na figura.

Gabarito: A

1.3– Forma especial de contagem de arestas

Aprenderemos aqui uma forma especial para contarmos arestas, isto é, uma forma distinta, muitas vezes utilizadas em exercícios. Se você entendeu a noção de ordem de vértices e faces que te ensinei anteriormente, então nenhum problema vai acontecer. Bom, vamos lá.

O que vou te apresentar agora são as duas fórmulas a seguir. Uma delas, a que explicito a seguir, utilizará a notação F_n:

$$\boxed{3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \ldots = 2A.}$$

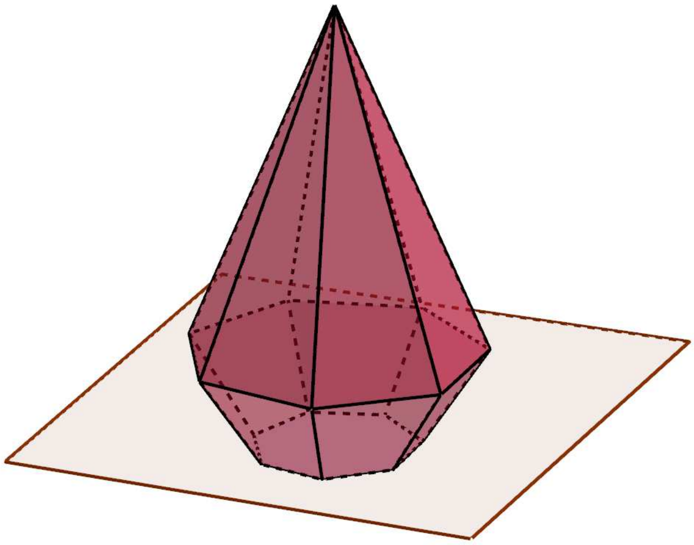
A outra, utiliza-se da notação V_n:

$$\boxed{3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \ldots = 2A.}$$

Vou te mostrar como podemos resolver questões utilizando essas novas fórmulas.

QUESTÃO 2

Calcule a quantidade de arestas do poliedro a seguir.



(a) 14
(b) 18
(c) 28
(d) 56

R: Em primeiro lugar, esse é um tipo de questão em que as fórmulas que vimos há pouco não são indispensáveis. isto acontece porque poderíamos simplesmente contar as arestas nós mesmos, de modo manual. Mas meu objetivo com essa questão é te mostrar como que aquelas duas fórmulas podem nos ajudar a resolver questões, e já te adianto: algumas só podem ser resolvidas utilizando-as. Bom, vamos lá.

Primeiro, façamos a análise total para esse poliedro. Façamos as faces primeiro. Há três tipos de faces para esse poliedro: uma face heptagonal (ou seja, $F_7 = 1$), sete faces quadrangulares (ou seja, $F_4 = 7$) e sete faces triangulares (ou seja, $F_3 = 7$). Apenas com isso já podemos calcular a quantidade de arestas. Veja:

$$\begin{aligned} 3F_3 + 4F_4 + 7F_7 &= 2A \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 1 &= 2A \\ 21 + 28 + 7 &= 2A \\ 2A &= 56 \end{aligned}$$

$$A = 28.$$

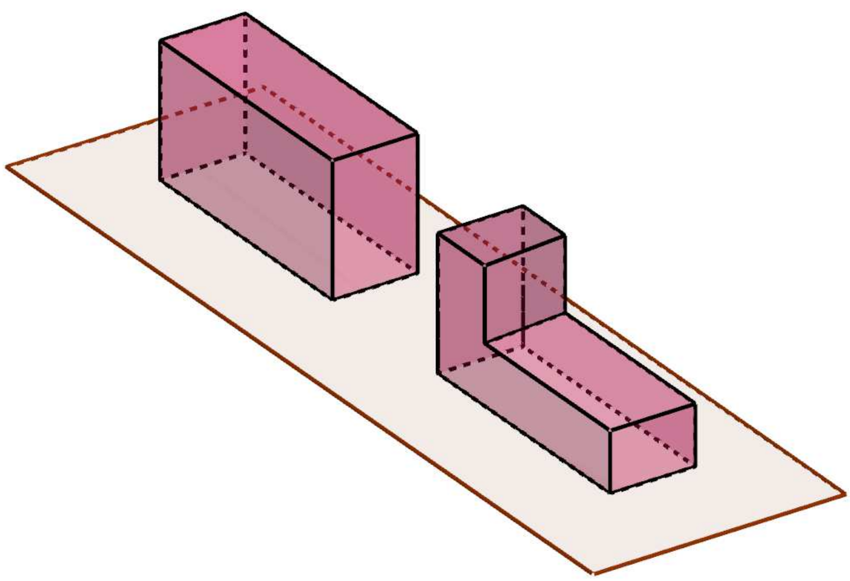
Poderíamos ter feito o mesmo utilizando a análise total de vértices. Vejamos. Existem, nessa figura, três tipos de vértices: um vértice de onde partem sete arestas (ou seja, $V_7 = 1$), sete vértices de onde partem 4 arestas (ou seja, $V_4 = 7$) e sete vértices de onde partem três arestas (isto é, $V_3 = 7$). Daí:

$$\begin{aligned} 3V_3 + 4V_4 + 7V_7 &= 2A \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 1 &= 2A \\ 21 + 28 + 7 &= 2A \\ 2A &= 56 \\ A &= 28. \end{aligned}$$

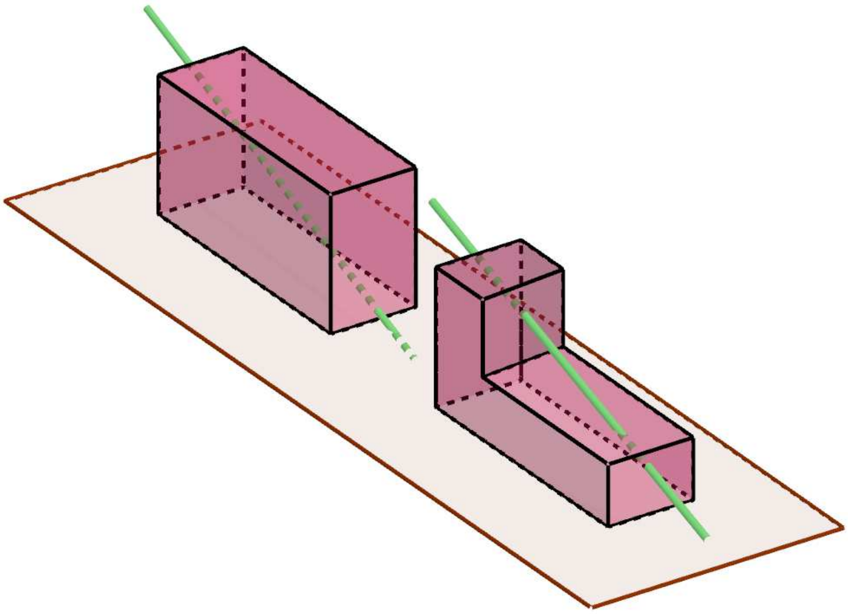
Gabarito: C

1.4– Relação de Euler para poliedros convexos

Um poliedro será dito convexo quando for possível cortá-lo com um segmento e obter no máximo dois furos.



Ao lado podemos ver dois poliedros. São dois poliedros bastante diferentes um do outro, correto? Pois bem. Imagine-se perfurando com uma reta os dois poliedros. Consegue imaginar? Então, em um desses você conseguirá fazer ***no máximo*** dois furos, enquanto que no outro você consegue, mirando nos lugares certos, furar em mais de dois pontos. Consegue ver qual poliedro é qual? Uma boa sugestão é considerar que disparos são feitos contra os poliedros, a fim de perfurá-los com projéteis. Bom, caso você tenha imaginado que o poliedro da direita é aquele em que podemos fazer mais furos com apenas um disparo, muito bem!! Vocxê está certo! Podemos furá-lo em até incríveis quatro furos. Mas isso não importa, o que realmente importa é que, dependendo da direção do disparo, é possível perfurá-lo em mais de dois pontos. Quando isso acontece o poliedro é dito um ***poliedro côncavo***. Caso contrário, isto é, caso o máximo número de furos seja de 2, po poliedro será dito um ***poliedro convexo***. Veja a seguir dois desses disparos sendo feitos:



Perceba que na direção dessas perfurações, o poliedro da esquerda foi perfurado em dois pontos enquanto o poliedro da direita foi perfurado em quatro pontos.

Quando um poliedro é convexo, podemos contar com uma fórmula famosa para a teoria de poliedros, uma expressão conhecida como a ***Relação de Euler***:

$$\boxed{V + F = A + 2.}$$

Seguem aqui dois exemplos de aplicação.

QUESTÃO 3.

Um poliedro possui 2 faces triangulares e mais outras 5 faces de gênero desconhecido. Sabendo que essas são as suas únicas faces e que esse poliedro possui 7 vértices, calcule a quantidade de arestas desse poliedro.

(a) 6

(b) 8
(c) 10
(d) 12
(e) 14

R: Veja que o número de faces é $F = 2 + 5 = 7$ e $V = 7$. Logo:

$$\begin{aligned} V + F &= A + 2 \\ 7 + 7 &= A + 2 \\ A &= 14 - 2 \\ A &= 12. \end{aligned}$$

Gabarito: D

QUESTÃO 4

Um poliedro possui 14 faces: 6 hexagonais e 8 quadrangulares. Calcule a quantidade de vértices desse poliedro.

(a) 14
(b) 22
(c) 34
(d) 36

R: Essa é um pouco mais complicada. Veja que em relação à análise simples do poliedro o problema apenas nos informa de que $F = 14$.
Podemos porém nos utilizar do fato de que $F_6 = 6$ e $F_4 = 8$. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} 4F_4 + 6F_6 &= 2A \\ 4 \cdot 8 + 6 \cdot 6 &= 2A \\ 2A &= 32 + 36 \\ 2A &= 68 \end{aligned}$$

$$A = 34.$$

Encontramos então que $A = 34$. Como já sabemos que $F = 14$:

$$\begin{aligned} V + F &= A + 2 \\ V + 14 &= 34 + 2 \\ V &= 36 - 14 \\ &= 22. \end{aligned}$$

Gabarito: B

2.0– Poliedros de Platão

2.1– Definições

Antes de comentarmos sobre o que vem a ser um poliedro regular, gostaria de fazer uma ressalva: não há convergência bibliográfica em relação a essa definição. Segundo alguns textos, um poliedro será dito regular quando possuir arestas de mesmas medidas. Em outros textos um poliedro será dito regular quando possuir arestas de mesmas medidas ***e*** tiver faces com apenas um gênero. Então, caso surja alguma questão em que esse impasse torne-se presente, a questão poderá vir a ser anulada dada a divergência bibliográfica que citei.

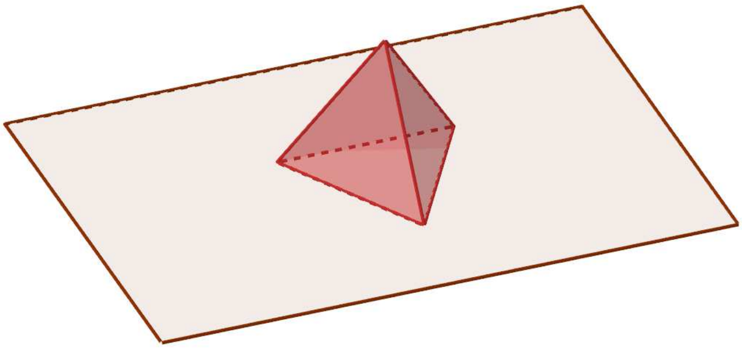
Um poliedro será dito um ***poliedro de Platão*** caso possua arestas de mesmas medidas ***e*** faces com apenas um gênero. É possível demonstrarmos que existem apenas cinco poliedros de Platão. Caso tenham interesse, falem comigo que prontamente colocarei a demonstração aqui.

Vamos lá então à lista dos poliedros de Platão.

2.2– Os cinco poliedros de Platão

Tetraedro

Comecemos pelo tetraedro. Trata-se de uma pirâmide de base triangular, como veremos nas aulas seguintes. Façamos uma análise dele.



Faces: triangulares

$V = 4$

$F = 4$

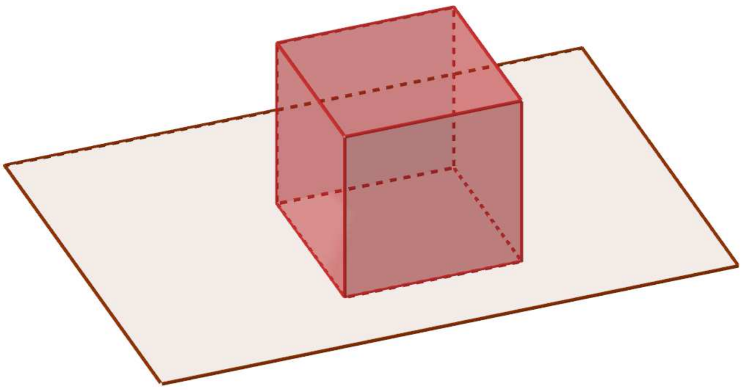
$A = 6.$

É um dos sólidos mais cobrados nos seus exames. Porém, não veremos aspectos métricos dos tetraedros aqui, apenas de contagens.

Dizemos que um sólido é o ***dual*** (ou ***conjugado***) de outro quando um deles possui vértices nos centros das faces dos outros. É possível demonstrarmos que o tetraedro é seu próprio sólido dual.

Hexaedro

Agora vamos ao hexaedro, também conhecido como ***cubo***:



Faces: quadrangulares

$V = 8$

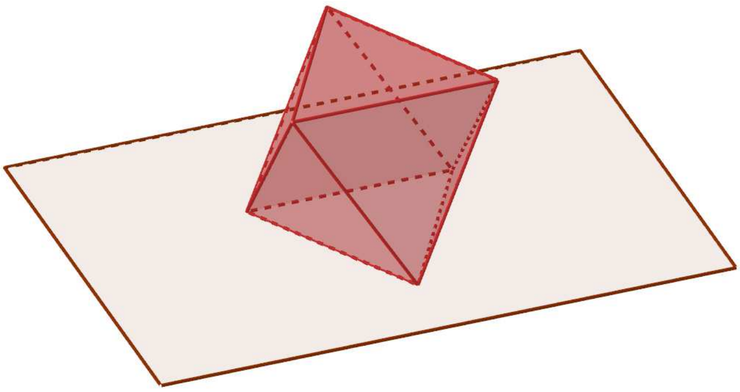
$F = 6$

$A = 12.$

O cubo é um sólido clássico. Trata-se de um prisma regular de base quadrangular, como veremos nas próximas aulas. Muitos aspectos métricos a serem considerados nas próximas aulas, e os exercícios adoram misturá-lo com esferas.

Octaedro

Agora vamos ao octaedro.



Faces: triangulares

$V = 6$

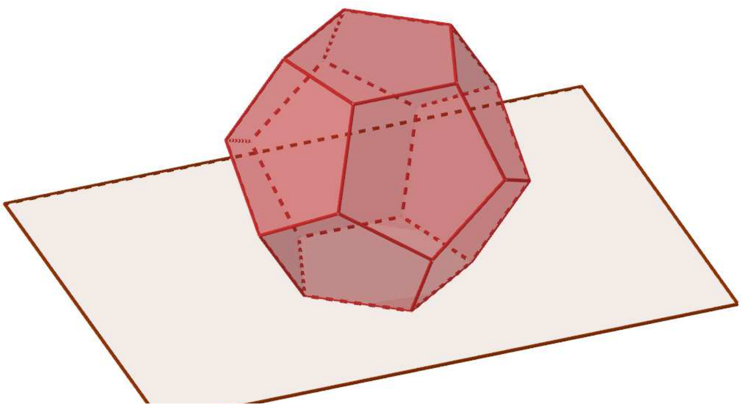
$F = 8$

$A = 12.$

O octaedro é um sólido obtido pela justaposição de duas pirâmides de bases quadrangulares. É o poliedro dual do cubo.

Dodecaedro

Agora vamos ao dodecaedro.



Faces: pentagonais

$V = 20$

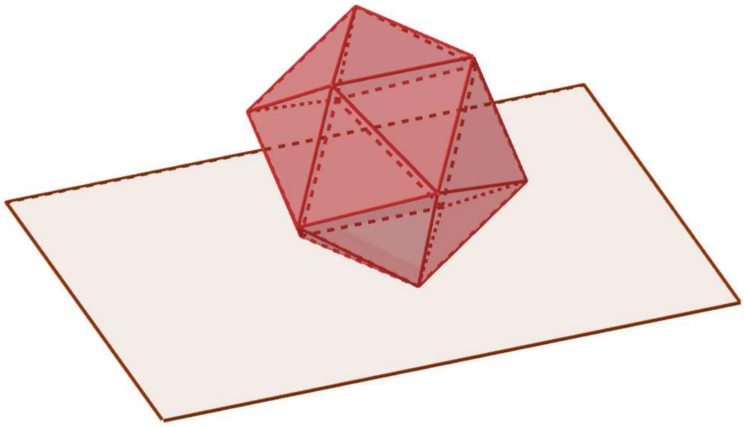
$F = 12$

$A = 30.$

O dodecaedro é o único sólido com faces pentagonais; é o dual do icosaedro.

Icosaedro

Vamos então ao último Poliedro de Platão, o dodecaedro.



Faces: triangulares

$V = 20$

$F = 12$

$A = 30.$

É o sólido dual do dodecaedro.

QUESTÕES PARA MEMORIZAÇÃO

(ESSA-2015) QUESTÃO 5

A palavra "icosaedro", de origem grega, significa "20 faces". Sabendo que o icosaedro regular é formado por 20 triângulos regulares, determine o número de vértices.

(a) 12
(b) 42
(c) 52
(d) 8
(e) 48

R: O icosaedro possui 20 faces, portanto, $F = 20$. Como são 20 triângulos, temos que $F_3 = 20$. Logo:

$$\begin{aligned} 3F_3 &= 2A \\ 3 \cdot 20 &= 2A \\ 2A &= 60 \\ A &= 30. \end{aligned}$$

Daí, temos:

$$\begin{aligned} V + F &= A + 2 \\ V + 20 &= 30 + 2 \\ V &= 32 - 20 \\ &= 12. \end{aligned}$$

Gabarito: A

(EEAR-2005) QUESTÃO 6

O número de vértices de um poliedro convexo que tem 3 faces quadrangulares, 2 faces triangulares e 4 faces pentagonais é

(a) $10.$
(b) 14
(c) $12.$
(d) $16.$

R: Temos que $F_4 = 3$, $F_3 = 2$ e $F_5 = 4.$ Podemos, então, calcular o número de arestas:

$$\begin{aligned} 4F_4 + 3F_3 + 5F_5 &= 2A \\ 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 &= 2A \\ 12 + 6 + 20 &= 2A \\ 2A &= 38 \\ A &= 19. \end{aligned}$$

Veja também que $F = 3 + 2 + 4 = 9$, logo:

$$\begin{aligned} V + F &= A + 2 \\ V + 9 &= 19 + 2 \\ V &= 21 - 9 \\ &= 12. \end{aligned}$$

Gabarito: C

(EEAR-2008) QUESTÃO 7

O número de poliedros regulares que têm faces triangulares é

(a) 1.
(b) 2.
(c) 3.
(d) 4.

R: Vamos relembrar dos gêneros das faces dos Poliedros de Platão:

Poliedro de Platão	Face
Tetraedro	triangular
Hexaedro	quadrangular
Octaedro	triangular
Dodecaedro	pentagonal
Icosaedro	triangular

Como podemos ver, há três poliedros com faces triangulares.

Gabarito: C

(EEAR-2009) QUESTÃO 8

"Existem somente ____ poliedros regulares." A palavra que completa corretamente a asserção anterior é

(a) quatro.
(b) cinco.
(c) seis.
(d) três.

R: Vimos mesmo na questão anterior que há apenas cinco Poliedros de Platão.

Gabarito: B

(EEAR-2012) QUESTÃO 9

O poliedro regular cujas faces são pentágonos é o

(a) octaedro.
(b) tetraedro.
(c) icosaedro.
(d) dodecaedro.

R: Observemos novamente a nossa tabela de gêneros das faces para os Poliedros de Platão:

Poliedro de Platão	Face
Tetraedro	triangular
Hexaedro	quadrangular
Octaedro	triangular
Dodecaedro	pentagonal
Icosaedro	triangular

Vemos que o poliedro requerido é o dodecaedro.

Gabarito: D

(EEAR-2018) QUESTÃO 10

Sabendo que o dodecaedro regular possui 20 vértices, o número de arestas desse poliedro é

(a) 16
(b) 28
(c) 30
(d) 32

R: O dodecaedro possui 12 faces, isto é, $F = 12$. Como $V = 20$, temos:

$$V + F = A + 2$$
$$20 + 12 = A + 2$$

$$\begin{aligned} A &= 32 - 2 \\ &= 30. \end{aligned}$$

Também poderíamos ter chego ao mesmo resultado nos recordando que há 12 faces pentagonais. Logo, $F_5 = 12$, e daí:

$$\begin{aligned} 5F_5 &= 2A \\ 5 \cdot 12 &= 2A \\ 2A &= 60 \\ A &= 30. \end{aligned}$$

Gabarito: C

(EFOMM-2018) QUESTÃO 11

Um garoto dispõe de um único exemplar de cada poliedro de Platão existente. Para brincar, ele numerou cada vértice, face e aresta de cada poliedro sem repetir nenhum número. Em seguida, anotou esses números no próprio poliedro. Se ele sortear um dos números usados, aleatoriamente, qual será a probabilidade de o número sorteado representar um vértice?

(a) $\frac{5}{9}$

(b) $\frac{5}{14}$

(c) $\frac{1}{3}$

(d) $\frac{5}{19}$

(e) $\frac{1}{10}$

R: Façamos uma lista dessas características numéricas de cada Poliedro de Platão:

Poliedro de Platão	Nº de faces	Nº de vértices	Nº de arestas
Tetraedro	4	4	6
Hexaedro	6	8	12
Octaedro	8	6	12
Dodecaedro	12	20	30
Icosaedro	20	12	30

Temos então um total de $4+6+8+12+20=50$ faces numeradas, $4+8+6+20+12=50$ vértices numerados e $6+12+12+30+30=90$ arestas numeradas. Isso gera um total de $50+50+90=190$ números. Desses números, apenas 50 são vértices, logo, a probabilidade de que seja um vértice será:

$$\frac{n(E)}{n(\Omega)}=\frac{50}{190}=\frac{5}{19}.$$

Gabarito: D

(AFA-2003) QUESTÃO 12

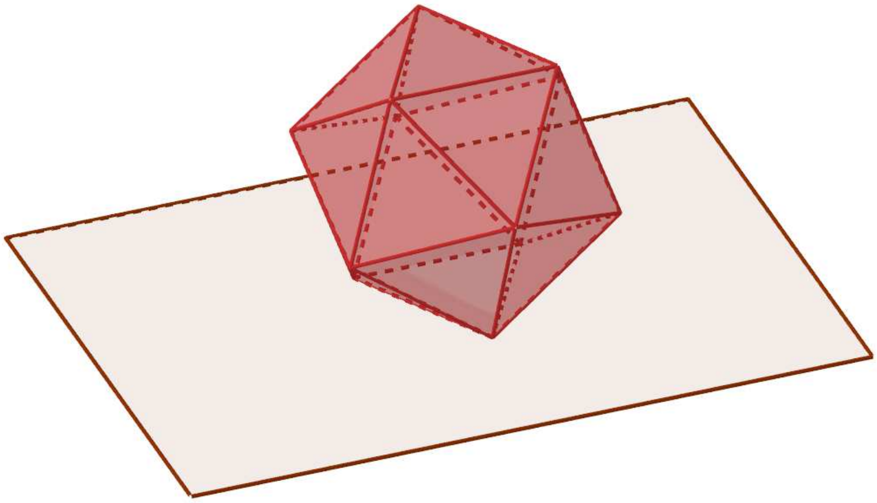
Um poliedro platônico, cujas faces são triangulares, tem 30 arestas. Determine o número de arestas que concorrem em cada vértice.

(a) 3
(b) 5
(c) 4
(d) 6

R: Caso saibamos a tabela de poliedros de cabeça, saberemos que só pode se tratar do icosaedro, pois, apesar de ambos icosaedro e dodecaedro terem 30 arestas, apenas o icosaedro é composto de faces triangulares (o dodecaedro é composto de faces pentagonais). Caso não soubéssemos, teríamos de algebrizar um pouco a teoria que acabamos de ter. Vamos ver como.
Como é um Poliedro de Platão, temos que suas F faces possuem todas o mesmo gênero 3. Isso nos diz que $F_3=F$. Logo:

$$\begin{aligned}3F_3&=2A\\3\cdot F&=2\cdot 30\\3\cdot F&=60\\F&=20.\end{aligned}$$

Daí concluímos que se trata de um icosaedro. se nos lembrarmos do formato de um icosaedro, perceberemos que em cada vértice concorrem exatas 5 arestas, veja:



Caso não nos lembrássemos teríamos de novamente algebrizar um pouco. Sabemos que de cada vértice do icosaedro saem n vértices, isto é, $V_n = V$. Calculemos, então, a quantidade de vértices de um icosaedro (caso não o tenha memorizado):

$$\begin{aligned} V + F &= A + 2 \\ V + 20 &= 30 + 2 \\ V &= 32 - 20 \\ &= 12. \end{aligned}$$

Assim, temos que $V = 12$. Daí, podemos utilizar a teoria para concluirmos que:

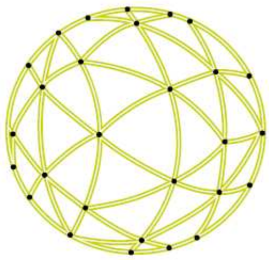
$$\begin{aligned} nV_n &= 2A \\ n \cdot V &= 2 \cdot 30 \\ n \cdot 12 &= 60 \\ n &= 5. \end{aligned}$$

Gabarito: B

(UERJ-2008) QUESTÃO 13

Considere o icosaedro abaixo, construído em plástico inflável, cujos vértices e pontos médios de todas as arestas estão marcados.

A partir dos pontos médios, quatro triângulos equiláteros congruentes foram formados em cada face do icosaedro. Admita que o icosaedro é inflado até que todos os pontos marcados fiquem sobre a superfície de uma esfera, e os lados dos triângulos tornem-se arcos de circunferências, como ilustrado a seguir:



Observe agora que, substituindo-se esses arcos por segmentos de reta, obtém-se uma nova estrutura poliédrica de faces triangulares, denominada geodésica.

O número de arestas dessa estrutura é igual a:

(a) 90
(b) 120
(c) 150
(d) 180

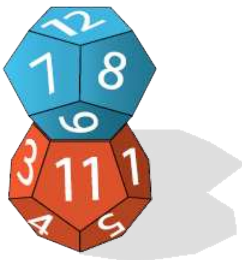
R: Sabemos que o icosaedro possui 20 faces, 12 vértices e 30 arestas. Perceba que cada face do icosaedro transforma-se em quatro faces menores na geodésica apresentada. Então, como o icosaedro tem 20 faces, a geodésica tem $4 \cdot 20 = 80$.
Como todas as faces são triangulares, temos que $F_3 = 80$, e daí:

$$\begin{aligned} 3F_3 &= 2A \\ 3 \cdot 80 &= 2A \\ 2A &= 240 \\ A &= 120. \end{aligned}$$

Gabarito: B

(UERJ-2016) QUESTÃO 14

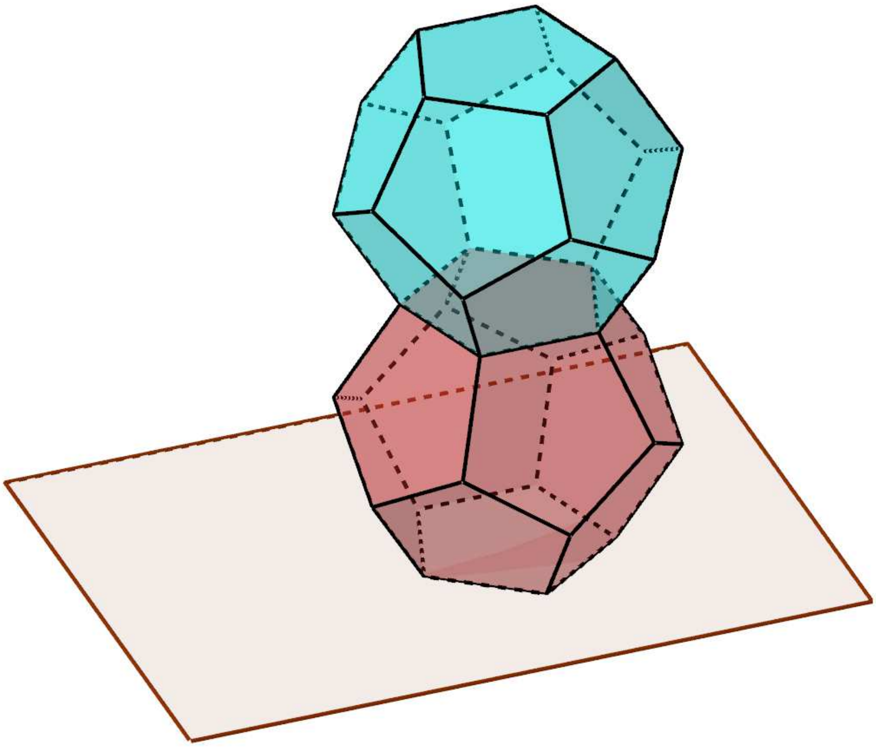
Dois dados, com doze faces pentagonais cada um, têm a forma de dodecaedros regulares. Se os dodecaedros estão justapostos por uma de suas faces, que coincidem perfeitamente, formam um poliedro côncavo, conforme ilustra a figura.



Considere o número de vértices V, de faces F e de arestas A desse poliedro côncavo. A soma $V + F + A$ é igual a:

(a) 102
(b) 106
(c) 110
(d) 112

R: Redesenhei a figura adicionando transparência, para que você consiga enxergá-la melhor:



A quantidade de faces do poliedro resultante é igual à soma da quantidade de faces dos dois dodecaedros, subtraída das duas faces que eles têm se encostando:

$$F = 12 + 12 - 2 = 22.$$

Um dodecaedro possui 20 vértices. Os dois juntos teriam, então, 40 vértices certo? Acontece que os vértices que se encontram no meio da figura contam como um só. Então, devemos subtrair 5 desse total, de forma que:

$$V = 40 - 5 = 35.$$

As arestas se comportam igualmente. São 30 arestas. Os oid sjuntos, subtraídas as arestas comuns:

$$A = 30 + 30 - 5 = 55.$$

Efetuando a soma que ele deseja:

$$\begin{aligned} V + F + A &= 35 + 22 + 55 \\ &= 112. \end{aligned}$$

Gabarito: D

(UERJ/ADAPTADA-2005) QUESTÃO 15

O poliedro acima, com exatamente trinta faces quadrangulares numeradas de 1 a 30, é usado como um dado, em um jogo.

Calcule o número de vértices desse poliedro.

(a) 20
(b) 30
(c) 32
(d) 40

R: Temos que $F = 30$. Essas faces são todas quadrangulares, isto é, $F_4 = 30$. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} 4F_4 &= 2A \\ 4 \cdot 30 &= 2A \\ 2A &= 120 \\ A &= 60. \end{aligned}$$

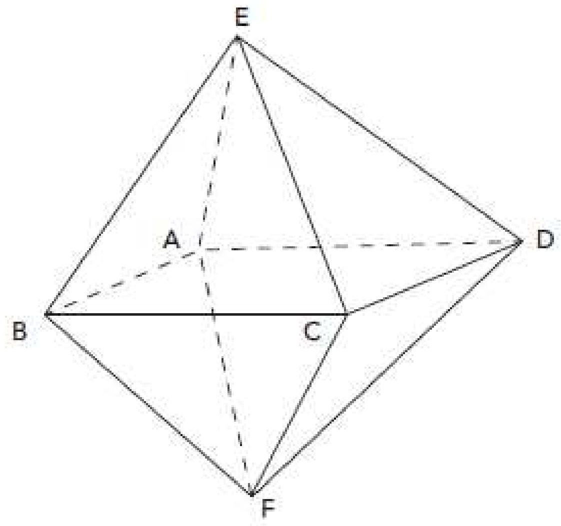
Daí, temos:

$$\begin{aligned} V + F &= A + 2 \\ V + 30 &= 60 + 2 \\ V &= 62 - 30 \\ &= 32. \end{aligned}$$

Gabarito: C

(UERJ/ADAPTADA-2018) QUESTÃO 16

A figura a seguir representa um objeto com a forma de um octaedro. Admita que suas arestas, feitas de arames fixados nos vértices, possuem os comprimentos indicados na tabela.



Arestas	AB	AD	AE	AF	BC	BE	BF	CD	CE	CF	DE	DF
Comprimento (cm)	10	11	12	10	11	12	11	12	11	10	12	12

Calcule o menor comprimento do arame, em centímetros, necessário para construir esse objeto.

(a) 134
(b) 126
(c) 145
(d) 152

R: Um octaedro tem 12 arestas. Temos 12 medidas, logo:

$$10+11+12+10+11+12+11+12+11+10+12+12=134\,\text{cm}.$$

Gabarito: A

2.3– GABARITO

Q. 1: A	**Q. 5**: A	**Q. 9**: D	**Q. 13**: B
Q. 2: C	**Q. 6**: C	**Q. 10**: C	**Q. 14**: D
Q. 3: D	**Q. 7**: C	**Q. 11**: D	**Q. 15**: C
Q. 4: B	**Q. 8**: B	**Q. 12**: B	**Q. 16**: A