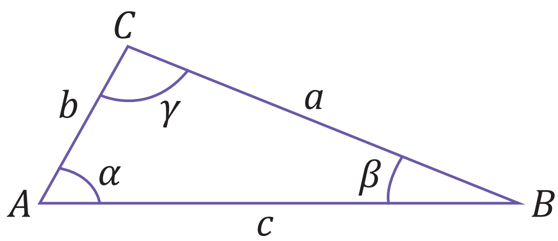
TRIÂNGULOS

Chegamos a um dos tópicos mais falados em todos os materiais de geometria plana, os triângulos. Mas você sabe o que é um triângulo? Provavelmente dirá algo como "é um objeto que tem três lados". Não deixa de ser uma aproximação coerente, mas veremos como se define formalmente um triângulo, para que não haja dúvidas do que estamos falando daqui pra frente. Antes disso, a noção de **pontos colineares** vai ser importante. Pontos colineares são pontos que pertencem a uma mesma reta. Agora, podemos falar do triângulo:

> Um triângulo é uma figura formada por três pontos não colineares e três segmentos de retas que têm em suas extremidades dois desses pontos.



Para nos referirmos ao triângulo da figura utilizamos a notação ΔABC, ou ΔBAC, ou ΔBCA , etc. A ordem das letras não importa quando tratamos do mesmo triângulo.

Os pontos A, B e C são os **vértices** do triângulo, os segmentos de reta $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$ são os **lados** do triângulo e α, β e γ são os **ângulos internos** do triângulo.

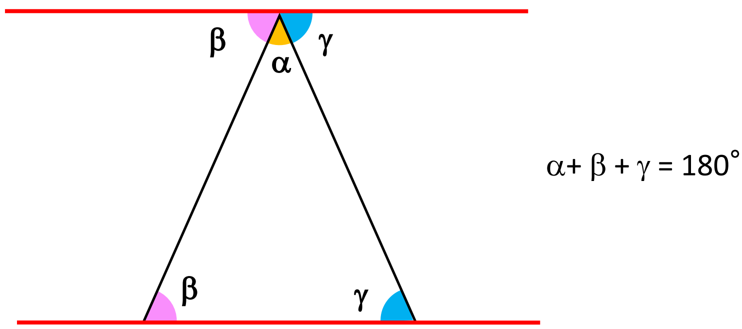
É importante mencionar **que o maior lado do triângulo sempre será oposto ao maior ângulo**. Na nossa figura de exemplo, supondo que o vértice A seja o vértice que contém o maior ângulo, então o maior lado está oposto a ele ($\overline{BC}$).

Os lados do triângulo possuem medidas diferentes, então poderíamos pensar: quaisquer três valores de comprimento são capazes de formar um triângulo? A resposta para esta pergunta é não.

> Para que um triângulo seja formado, os valores dos seus lados precisam obedecer à uma **condição de existência:**
>
> $$|a-c| < b < a + c$$

Em outras palavras, para um triângulo existir, o comprimento de um lado qualquer precisa ser maior que a diferença do comprimento dos outros dois lados em módulo e menor que a soma do comprimento desses mesmos dois lados.

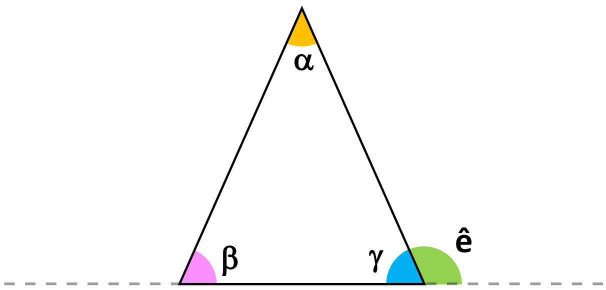
Os triângulos possuem uma propriedade fundamental em relação aos seus ângulos: **a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo vale 180°**. Veja a representação desta propriedade, conhecida como relação angular de Tales:



Estamos combinados então que os ângulos internos do triângulo estão resolvidos. Mas e os ângulos externos? Eles existem? Sim! Mas então, o que é um ângulo externo de um triângulo?

O ângulo externo de um triângulo é o suplemento do ângulo interno adjacente a ele.

Observe a imagem abaixo:



Temos que **ê** é um ângulo externo do triângulo e sua medida é: ê = 180° − γ.

Assim, todo triângulo possui 3 ângulos externos, bem como possui 3 ângulos internos. Mas então, podemos obter mais informações a respeito do ângulo externo? Sim!

Na figura acima, temos o seguinte par de informações:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 180° \\ \hat{e} + \gamma = 180° \end{cases}$$

Esse par de informações nos conduz a: ê = $\alpha + \beta$. Essa relação é lida como:

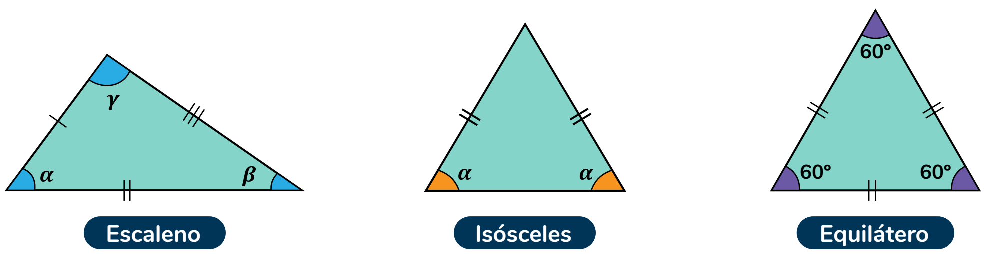
a medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Agora que já vimos as ideias iniciais, vamos classificar os triângulos!

CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS

A **primeira** classificação dos triângulos que temos é **quanto aos seus lados**, mas o que isso quer dizer? Isso quer dizer o seguinte: quando o triângulo possui três lados com diferentes medidas cada um, dizemos que ele é um triângulo **escaleno**. Quando o triângulo possui pelo menos dois lados de mesma medida, chamamos de triângulo **isósceles**. Finalmente, quando o triângulo possui os três lados com a mesma medida, chamamos de triângulo **equilátero.**

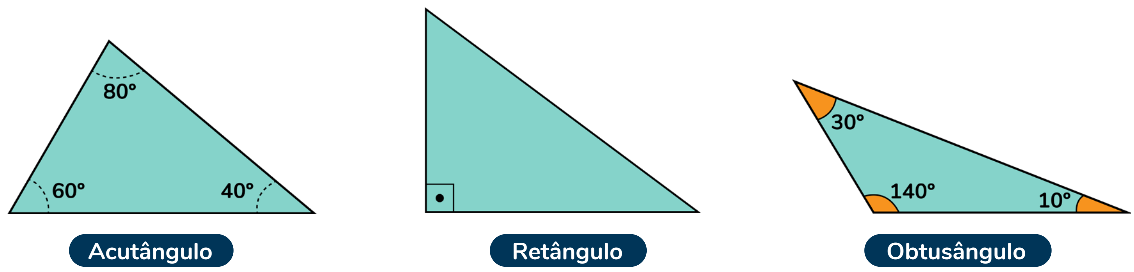
Em desenhos de triângulos, representamos lados que têm a mesma medida com o mesmo número de "risquinhos" e lados que têm medidas diferentes com diferentes números de "risquinhos". Observe essa classificação na imagem abaixo.



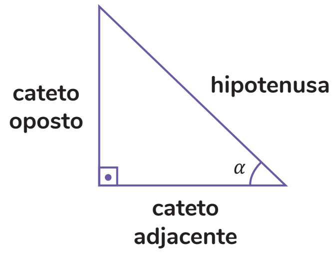
Aqui valem umas observações:

- **Todo triângulo equilátero também é isósceles!**
- Se os triângulos possuem lados com medidas iguais, seus ângulos opostos internos também terão medidas iguais. Sendo assim, o triângulo escaleno possui 3 ângulos com medidas diferentes, o triângulo isósceles possui 2 ângulos com medidas iguais e o triângulo equilátero possui 3 ângulos com medidas iguais (nesse caso, iguais a 60°).

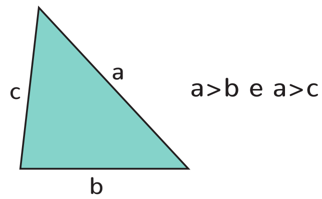
A **segunda** classificação dos triângulos é e em relação aos **seus ângulos internos**. Quando todos os ângulos internos do triângulo forem menores que 90°, temos um triângulo **acutângulo**. Por outro lado, se temos um ângulo interno igual a 90°, chamamos o triângulo de **triângulo retângulo**. Por fim, caso tenhamos um ângulo interno maior que 90°, este será um **triângulo obtusângulo**.



Quando falamos especificamente de **triângulos retângulos**, nomeamos os seus lados conforme a figura abaixo. O maior lado (ou seja, o lado oposto ao ângulo reto) é chamado de **hipotenusa**. Se definirmos um ângulo de referência dentro do triângulo (representado por α abaixo), então o lado oposto a esse ângulo é chamado de **cateto oposto**. Por último, o lado que sobra é o **cateto adjacente** (pois está "encostado" no ângulo de referência).



Continuando a falar sobre a classificação dos triângulos, consideremos agora o triângulo abaixo, onde **a** é o seu maior lado.

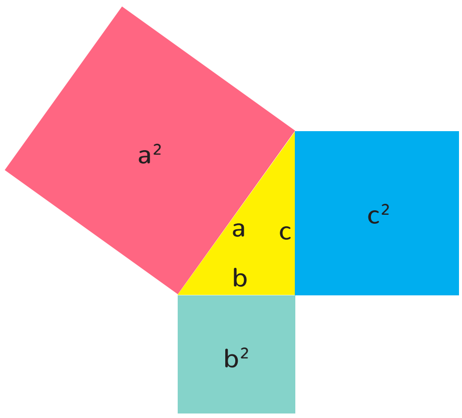


- Se ocorrer a desigualdade $a^2<b^2+c^2$, então o triângulo será acutângulo;
- Se ocorrer a desigualdade $a^2>b^2+c^2$, então o triângulo será obtusângulo e
- Se ocorrer a igualdade $a^2=b^2+c^2$, então o triângulo será retângulo.

Perceba então que é possível classificar um triângulo quanto aos seus ângulos sabendo apenas as medidas dos seus lados.

A igualdade anterior é conhecida como **teorema de Pitágoras**: em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Este teorema, além da equação conhecida, possui uma interpretação geométrica interessante: ele nos diz que a área de um quadrado desenhado sobre a hipotenusa do triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados desenhados sobre os catetos. Observe abaixo.



Agora que já falamos de classificação de triângulos, resta-nos saber quando os triângulos são considerados congruentes.

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Acontece muito, em geometria plana, de nos depararmos com figuras de triângulos desenhadas sob a página. Nesses casos, faz sentido nos perguntarmos quando os triângulos são congruentes. Dizemos que:

Dois triângulos são congruentes se, e somente se, possuem três lados ordenadamente congruentes e possuem três ângulos ordenadamente congruentes.

Já sabemos a definição de congruência de triângulos, mas ao nos depararmos com triângulos, podemos usar alguns critérios que, uma vez atendido a um deles, garantimos que os triângulos serão congruentes, sem precisarmos recorrer à definição. Vamos listar todos os quatro critérios para analisar a congruência:

1° critério: Lado-Lado-Lado (LLL)

Se um triângulo tem três lados iguais aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

2° critério: Lado-Ângulo-Lado (LAL)

Se um triângulo tem dois lados e o ângulo entre eles iguais aos dois lados e ao ângulo de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

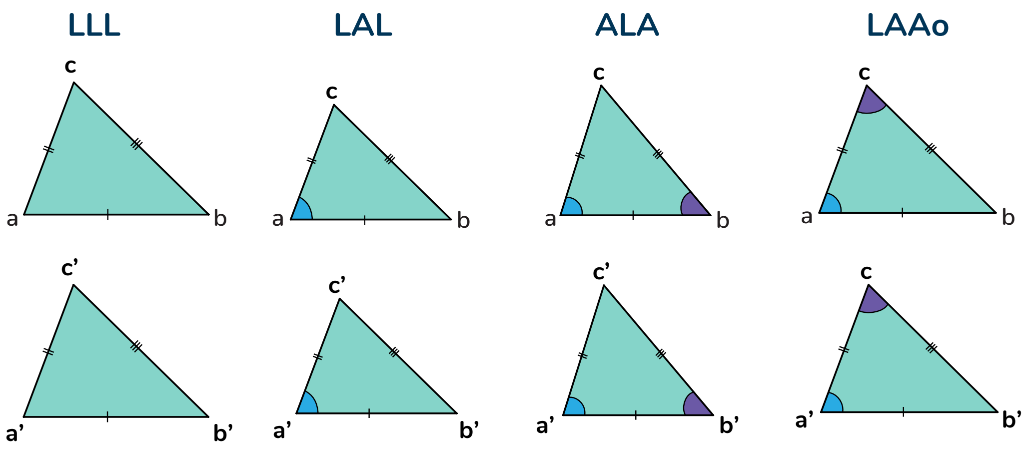
3° critério: Ângulo-Lado-Ângulo (ALA)

Se um triângulo tem dois ângulos e o lado entre eles iguais aos dois ângulos e o lado entre eles de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

4° critério: Lado-Ângulo-Ângulo Oposto (LAAo)

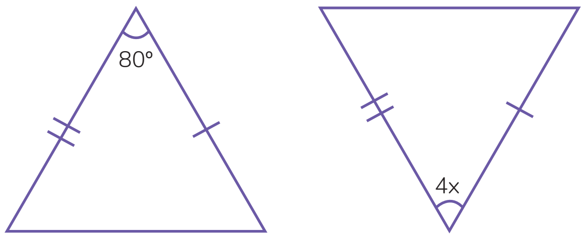
Dados dois triângulos que possuem dois ângulos iguais e os lados opostos a um desses ângulos também iguais, então os dois triângulos são congruentes.

Veja os casos de congruência na imagem abaixo:



Vamos fazer um exemplo para ampliar as ideias.

Exemplo: cite qual critério e qual valor de x deve ser utilizado para garantir que os dois triângulos sejam congruentes.



Resolução:

Por uma análise da figura, vemos que ambos possuem dois lados iguais aos do outro (marcados pelos "risquinhos" iguais) e que temos a informação do ângulo entre os lados. Assim, o critério utilizado para definir a congruência deve ser o Lado-Ângulo-Lado (LAL). Vamos agora achar o valor de x para que isso seja verdade:

$$4x=80°$$

$$x=20°$$

Assim, x = 20° garante a congruência dos triângulos.

Ainda precisamos falar de um assunto muito importante a respeito dos triângulos: seus pontos notáveis, que é o que veremos a seguir.

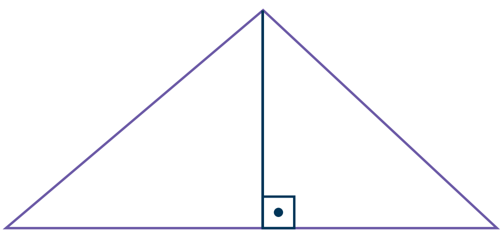
PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

Vamos agora falar sobre os **pontos notáveis** que encontramos em todo triângulo. Para você se situar no que estamos falando, segue a primeira definição:

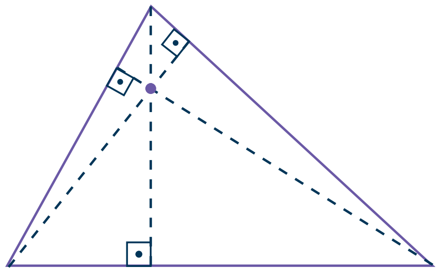
Uma ceviana de um triângulo é um segmento de reta no qual uma de suas extremidades está em um vértice do triângulo e a outra está no lado oposto a esse vértice.

Todo triângulo possui três cevianas, são elas: altura, mediana e bissetriz.

Para iniciar nosso estudo, vamos primeiro falar da **altura**. A altura de um triângulo é um segmento de reta com uma extremidade em um vértice e a outra no lado oposto ao vértice, formando com esse lado oposto um ângulo de 90°. Observe a imagem abaixo:



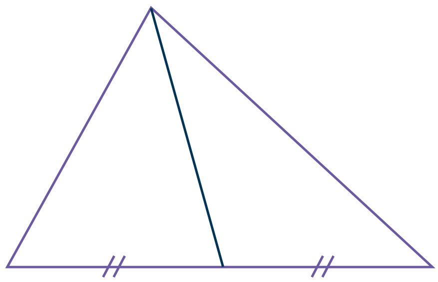
É importante deixar claro que um triângulo qualquer não possui apenas uma altura, mas sim **três** (referente a cada lado do triângulo). As três alturas de um triângulo qualquer se encontram em um ponto, que é primeiro ponto notável que falaremos nessa apostila: o **ortocentro (O)**, conforme representado abaixo.



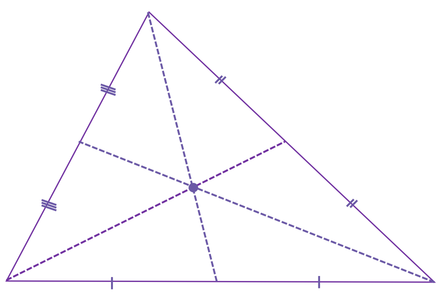
Perceba então que o ortocentro é o ponto de encontro das alturas. Vale a pena ressaltar que:

- Triângulo acutângulo: ortocentro interno ao triângulo;
- Triângulo retângulo: ortocentro no vértice de 90°;
- Triângulo obtusângulo: ortocentro externo ao triangulo.

Outra ceviana importante é a **mediana**. A mediana de um triângulo é um segmento de reta com uma extremidade em um vértice e a outra no ponto médio do lado oposto (relembrando, o ponto médio divide um segmento exatamente no meio). A figura abaixo representa uma mediana:

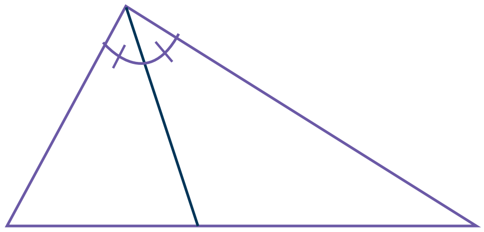


Em um triângulo qualquer, assim como no caso da altura, também é possível traçarmos três medianas. Ao fazermos isso, obtemos o segundo ponto notável: o **baricentro (G)** do triângulo. Note a figura abaixo:

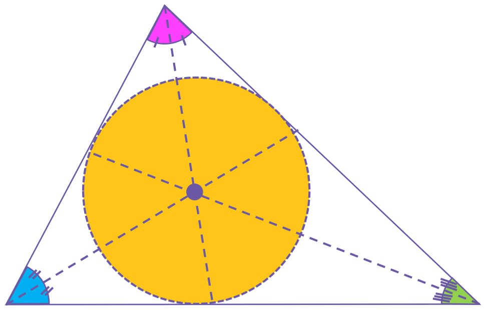


O baricentro do triângulo também é conhecido como o centro de gravidade do triângulo.

A terceira ceviana que falaremos é a **bissetriz**. A bissetriz é o segmento de reta com uma extremidade em um vértice e a outra no lado oposto, dividindo o ângulo do vértice em dois ângulos congruentes. Ela é ilustrada na figura abaixo:

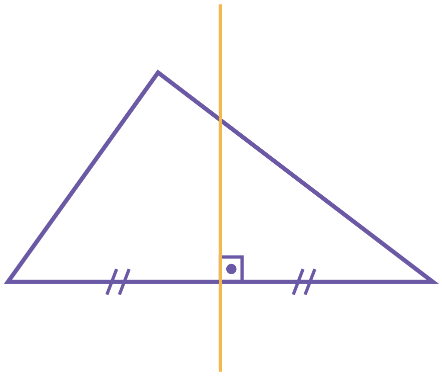


Novamente, podemos traçar três bissetrizes dentro de um triângulo qualquer. O encontro das três bissetrizes gera o terceiro ponto notável que falaremos, que é chamado de **incentro (I)**, ilustrado na figura abaixo:



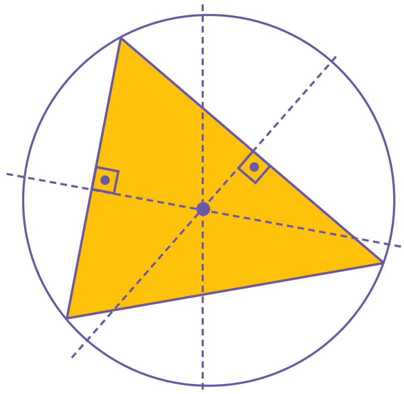
O incentro é o centro da circunferência inscrita ao triângulo.

O próximo conceito que falaremos é o de **mediatriz**. A mediatriz é uma **reta perpendicular** a um segmento, que passa pelo seu ponto médio. Podemos observar na figura abaixo a mediatriz de um dos lados de um triângulo:



Observação: a mediatriz **não** é uma ceviana (pois não necessariamente o vértice está em uma das extremidades).

Ao traçarmos as três mediatrizes possíveis de um triângulo qualquer, temos nosso quarto ponto notável: o **circuncentro (C)** do triângulo, representado a seguir:



Observe que o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

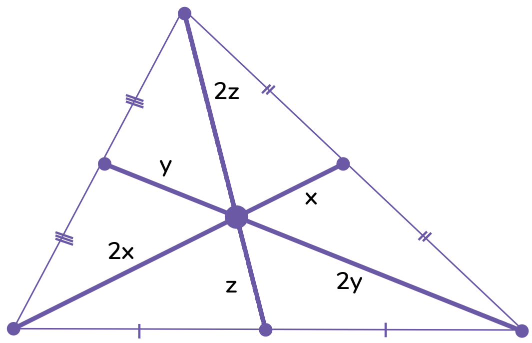
É possível perceber então que:

Todo triângulo tem uma circunferência inscrita que tangencia os lados do triângulo e uma circunferência circunscrita que toca os vértices do triângulo.

Todos estes pontos de encontro estudados (ortocentro, baricentro, incentro e circuncentro) são os chamados **pontos notáveis** do triângulo. Podemos ainda destacar propriedades interessantes a respeito das medianas.

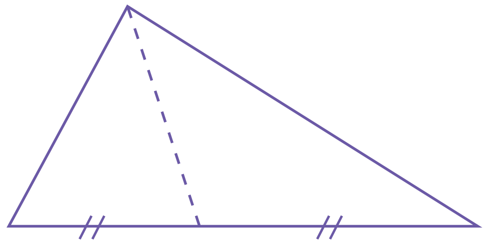
PROPRIEDADES DAS MEDIANAS

Vimos anteriormente a definição de mediana e baricentro. O baricentro de um triângulo possui uma propriedade interessante: **ele divide as medianas na proporção 2:1**. Observe na figura abaixo.



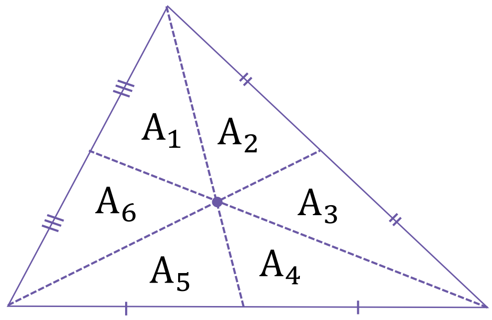
Mas o que isso quer dizer? Ao encontrarmos o baricentro, temos que o segmento da mediana que liga o vértice ao baricentro possui o dobro do comprimento em relação ao segmento que liga o baricentro ao ponto médio do lado oposto. Isto vale para **todas** as medianas do triângulo.

A segunda propriedade que veremos é a seguinte: **a mediana divide o triângulo em 2 triângulos de mesma área.**



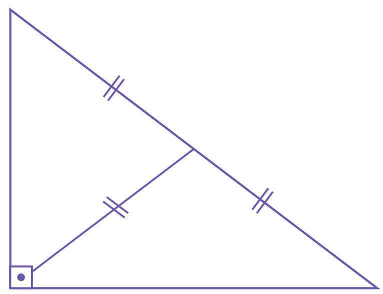
Os dois triângulos possuem a mesma área.

Podemos expandir essa divisão considerando todas as medianas do triângulo e assim vamos obter 6 triângulos de mesma área.



$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6$

Por fim, a última propriedade da mediana que falaremos diz respeito a um triângulo retângulo: **mediana relativa à hipotenusa mede metade do comprimento da hipotenusa.**



Terminamos assim nosso estudo de triângulos e seus pontos notáveis.

ANOTAÇÕES